

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso

---

DISTRIBUIÇÃO DE RIQUEZA EM REDES DE  
AGENTES COM INTERAÇÃO

---

**José Luiz Ferreira Junior**

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Iglesias

**Porto Alegre**

2009/2

# *Sumário*

**Resumo**

**Abstract**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 5
1.1	Aspectos Gerais - Econofísica . . . . .	p. 5
1.2	Distribuição de Pareto . . . . .	p. 6
1.3	Modelo de Levy . . . . .	p. 6
<b>2</b>	<b>Modelo Lambda</b>	p. 11
2.1	Descrição . . . . .	p. 11
2.2	Simulação Numérica e Resultados . . . . .	p. 12
<b>3</b>	<b>Modelo de Ising</b>	p. 15
3.1	Descrição Física e Algoritmo . . . . .	p. 15
3.2	Aplicação em agentes econômicos . . . . .	p. 18
3.3	Resultados Numéricos . . . . .	p. 19
<b>4</b>	<b>Conclusões e Comentários</b>	p. 22
	<b>Apêndice A – Correlação e Coeficiente de Gini</b>	p. 25
	<b>Referências</b>	p. 28

# *Resumo*

Estudamos alguns possíveis modelos para explicar a distribuição de riqueza em sociedades com agentes econômicos. Apresentamos duas diferentes generalizações de um modelo sem interação entre agentes introduzido por Levy. Nesse modelo o autor afirma que a distribuição em lei de potência obtida decorre puramente do acaso. Aqui mostramos que as distribuições são similares aos resultados de Levy quando a interação é fraca, mas são modificadas consideravelmente quando as correlações são significativas. Tais resultados indicam que as diferenças entre agentes de alta e baixa riqueza se deve não apenas ao "acaso", mas também ao comportamento de agentes relacionados a estes.

# *Abstract*

We study some possible models to explain wealth distribution in economic systems. We present two different generalizations of a non-interactive model introduced by Levy. In that model the author states that the power law distribution of fortunes is due to pure chance. Here we show that the distributions are similar to Levy's results when the interaction is weak, but the modifications are considerable when correlations are significant. Thus, the difference between high-wealth and low-wealth agents is not just the result of "chance", but it also depends on the behavior of linked agents.

# 1 *Introdução*

## 1.1 Aspectos Gerais - Econofísica

A generalidade da Mecânica Estatística tem permitido uma grande incursão de físicos em estudos interdisciplinares, especialmente nas áreas de Biologia e Economia. Esta última, na qual este trabalho se fundamenta, é dita Econofísica e vem ganhando destaque nas últimas décadas por importantes contribuições na análise de dados relativos a mercados financeiros.

Os modelos e técnicas da Física Estatística se adequam bem aos problemas econômicos principalmente porque estes muitas vezes apresentam um número muito grande de agentes e um caráter estocástico, isto é, parâmetros não-determinísticos na descrição matemática dos problemas. Ainda que a Física e a Matemática tenham construído ferramentas teóricas suficientemente boas para a descrição de processos aleatórios, sabe-se que apenas uma pequena parcela destes tem solução analítica, o que muitas vezes restringe a solução do problema a resultados numéricos (como no presente trabalho).

Nosso trabalho tem por objetivo investigar possíveis mecanismos de acúmulo de riqueza em sociedades artificiais que resultam em uma forma de distribuição do tipo lei de potência, observada em inúmeros resultados empíricos. Apresentaremos um modelo da literatura que baseia-se puramente na sorte como tal mecanismo e mostraremos que é possível obter resultados semelhantes introduzindo interação em tais sociedades, tornando o resultado mais geral.

Inicialmente vamos propor uma generalização imediata que consiste apenas em alterar as chances de ganho dos agentes de equiprováveis e independentes para um valor dependente da vizinhança. O segundo modelo se baseia na reinterpretação do modelo de

Ising para a dinâmica da riqueza em sistemas artificiais. Compararemos a evolução da distribuição de riqueza no tempo bem como variáveis relevantes ao problema, tais como a correlação média, que mede a dependência da vizinhança na evolução de um agente, e o coeficiente de Gini, que mede quão desigual é a distribuição de riqueza nesse tipo de sociedade.

## 1.2 Distribuição de Pareto

Em 1896 o economista italiano Vifredo Pareto publicou(9) uma análise da distribuição de ingressos de pessoas em vários países ocidentais e concluiu que esta era descrita por uma lei de potência  $\rho(w) = w^{-(1+\beta)}$ , na qual  $w$  é a variável associada à riqueza e  $\beta$  é denominado *expoente de Pareto*. Dados empíricos dos últimos anos mostram que tal comportamento é observado nos estudos de sistemas econômicos de grandes escalas (comparação do PIB de grandes países, ranking Forbes(3), etc). Apesar disso, observa-se que a forma da distribuição muda significativamente na região de riqueza mais baixa, descrita por uma distribuição lognormal (ou gaussiana).

Para Pareto a lei de potência indicava que o mecanismo de acúmulo de riqueza não era fruto do "acaso", já que o "acaso" derivaria em distribuições de comportamento gaussiano. A partir de então muitos autores estudaram modelos diferentes que fossem capazes de exibir comportamentos similares aos vistos empiricamente. Em um artigo recente Levy(4) analisou os principais modelos que resultavam de forma satisfatória na lei de Pareto e constatou que todos eles compartilhavam três características fundamentais(que detalharemos na próxima seção): dinâmica estocástica multiplicativa, riqueza mínima e talento homogêneo entre os agentes econômicos da rede artificial. Ou seja, tais condições implicam em distribuições que são provenientes do "acaso"(que era refutado por Pareto), mas com a aleatoriedade gerando flutuações multiplicativas.

## 1.3 Modelo de Levy

Discutiremos com mais detalhes este modelo de Levy e seus resultados para depois introduzirmos a nossa generalização ao mesmo.

Um processo estocástico multiplicativo é definido(para o  $i$ -ésimo agente) como:

$$w_i(t + \Delta t) = \phi_i w_i(t) \quad (1.1)$$

onde  $\phi_i$  é uma variável aleatória.

Observe que em uma sociedade real isso implicaria em desconsiderar processos aditivos de riqueza (como recebimento de salários e compra e venda de bens), que são mais relevantes para agentes de baixa renda.

Uma evolução aditiva na riqueza dos agentes seria inteiramente análoga a um *random walk*, portanto esperaríamos nesse caso uma distribuição normal. Para a dinâmica multiplicativa a análise é um pouco mais complicada, pois o ruído passa a ser dependente da riqueza e não é mais *branco* (gaussiano). Nesses casos a forma mais geral da distribuição é a de Levy (5).

O talento homogêneo decorre da forma com que a variável estocástica  $\phi_i$  é definida. A condição de homogeneidade consiste em considerarmos a mesma realização (tanto o valor quanto a probabilidade) para toda a população em questão. No modelo de Levy é utilizado:

$$\phi_i = \begin{cases} 1.1 & \text{com } p_i = 1/2 \\ 0.95 & \text{com } p_i = 1/2 \end{cases} \quad (1.2)$$

Claramente a homogeneidade de  $\phi$  significa tratarmos um modelo livre de interações e com probabilidades de ganho ou perda iguais independente do desempenho do agente nos tempos anteriores, o que resulta em correlação nula (temporal para o mesmo agente e espacial em toda a rede, devido a independência das variáveis aleatórias) em média para a função  $\delta$ , definida como o sinal da variação de riqueza em relação ao passo anterior, isto é:

$$\delta_i(t) = \text{sign}(w_i(t) - w_i(t - \Delta t)) \quad (1.3)$$

A terceira imposição do modelo de Levy se refere à necessidade de existir uma riqueza

mínima de cada agente da sociedade. Tal imposição decorre da obrigatoriedade da distribuição ser normalizável, porquanto  $\int_{w_0}^{+\infty} \rho(w)dw$  diverge para  $w_0 = 0$ . Como a riqueza nesse modelo não é conservada<sup>1</sup>, não é útil definir um valor fixo de  $w_0$ , mas sim utilizar um valor dependente da riqueza média em cada tempo. Dessa forma definimos  $w_0(t) = \omega \langle w(t) \rangle$ , sendo  $\omega$  a fração da riqueza média que será considerada como mínima possível<sup>2</sup>. Ao longo de todo nosso trabalho iremos utilizar  $\omega = 0.2$ <sup>3</sup>.

Na primeira fase do nosso trabalho nós simulamos a dinâmica multiplicativa de Levy para diferentes números de agentes e diferentes distribuições iniciais. Os resultados para tal modelo independem da forma da distribuição inicial, portanto tomaremos a liberdade de implementar apenas simulações com distribuições do tipo delta de Dirac (com todos os agentes com mesma riqueza) ou constante no intervalo  $[0;1]$ , uma vez que estas são as mais simples possíveis. A figura 1 mostra a distribuição de riqueza em uma população de 2500 agentes<sup>4</sup> após 1000 passos de simulação (para cada agente), assim como o gráfico duplo-logarítimo da mesma, que será o formato em que iremos apresentar as distribuições.

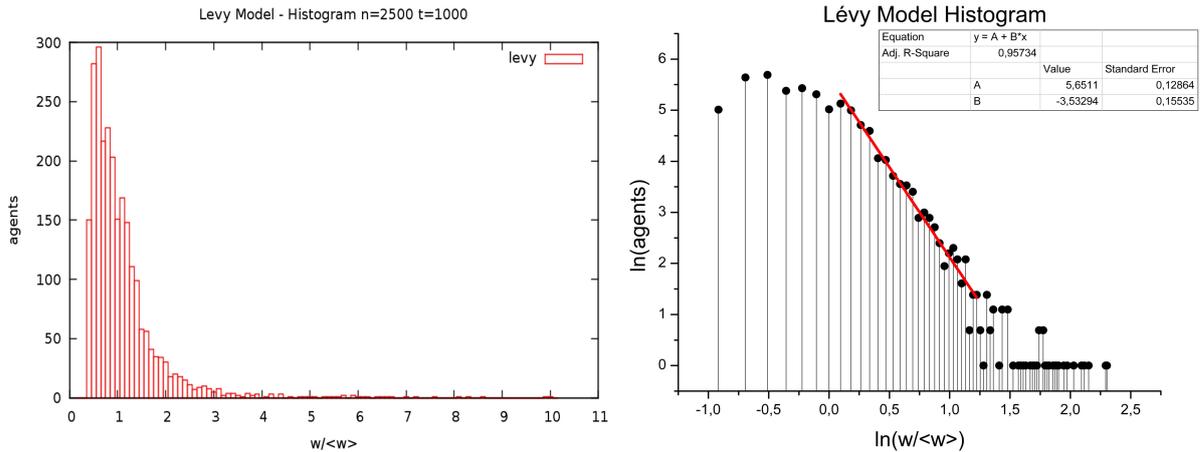


Figura 1: À esquerda, a distribuição de riqueza em função da riqueza normalizada. À direita o logaritmo duplo dessa distribuição.

Por simplicidade assumiremos que os agentes que não satisfazem a condição de riqueza mínima são excluídos da sociedade, dando lugar a novos agentes<sup>5</sup> que entram com uma determinada quantidade de riqueza. Em seu modelo, Levy não explica qual é o valor dessa riqueza, entretanto devemos salientar que isto não é irrelevante e afeta a forma da dis-

<sup>1</sup>As realizações da variável estocástica  $\phi_i$ , definida na equação 1.2, não são inversas uma da outra. Em decorrência disso o sistema tende a aumentar a riqueza total ao longo do tempo.

<sup>2</sup>Devemos ter  $0 \leq \omega \leq 1$ .

<sup>3</sup>Existe uma relação entre  $\omega$  e o expoente de Pareto(4), mas não trataremos disso em nosso trabalho.

<sup>4</sup>Este será o número de agentes utilizado ao longo do trabalho.

<sup>5</sup>Portanto há a conservação de número de agentes.

tribuição no intervalo em que  $\ln(w / \langle w \rangle) \leq 0$ . Estudamos três possíveis maneiras de inserir o agente: com riqueza mínima ( $w_i = 0.2 \langle w \rangle$ ), valor médio da riqueza ( $w_i = \langle w \rangle$ ) e riqueza aleatória (uniformemente distribuída) entre esses dois valores.

No primeiro caso, observamos que a distribuição apresenta melhor ajuste linear uma vez que a população de agentes é consideravelmente maior na região de mínimo de riqueza, contudo o tempo de permanência desses na sociedade é muito pequeno<sup>6</sup>. Além disso foi possível observar também que nas dinâmicas com interação a população próxima ao mínimo aumenta a ponto de encurvar (com concavidade positiva) a reta da distribuição.

Quando o agente entra com a riqueza média a distribuição na região de baixa riqueza assume um comportamento parabólico<sup>7</sup>, mas naturalmente a permanência dos agentes agregados é consideravelmente maior que nos outros casos. Por fim a terceira possibilidade citada tem resultados intermediários às duas situações discutidas, o que em princípio representaria a melhor escolha entre as analisadas. Por outro lado, como nosso interesse se concentra na análise da região de alta riqueza utilizaremos sempre a média como riqueza de entrada do agente. A figura 2 mostra gráficos duplo-logaritmos das distribuições com as três possibilidades discutidas acima.

Espera-se que em média metade dos agentes aumentem sua riqueza em um tempo  $t$  qualquer, portanto a correlação média<sup>8</sup> deve assumir valores próximos a zero. Além disso queremos medir a desigualdade entre as riquezas dos agentes por ser muito relevante em nossas discussões. O expoente de Pareto é uma dessas medidas, pois quanto maior ele é, maior é a desigualdade. Modernamente a medida mais usada é o coeficiente de Gini, que possui valores no intervalo  $[0;1]$ <sup>9</sup>. Nesse modelo o coeficiente de Gini cresce com o tempo e tem limite assintótico o valor  $G = 0.43$ , conforme podemos observar na figura 3.

O modelo de Levy proporciona um valor para o coeficiente de Gini próximo dos valores observados em países como Estados Unidos, China e alguns países da Europa. No entanto, Dinamarca, Japão e outros países possuem um Gini bem menor, da ordem de 0,25. Isto pode ser causado por mecanismos de redistribuição, mas também por interações entre agentes. É este segundo mecanismo que estudaremos aqui.

<sup>6</sup>Em média metade dos agentes que entram serão eliminados no próximo passo de tempo.

<sup>7</sup>Lembramos que estamos interessados na curva do logaritmo duplo da distribuição.

<sup>8</sup>Trataremos em detalhes a correlação média e o coeficiente de Gini no Apêndice.

<sup>9</sup>Se todos possuem a mesma riqueza  $G = 0$  (não há desigualdade) e se apenas um indivíduo é detentor de toda a riqueza  $G = 1$  (desigualdade máxima).

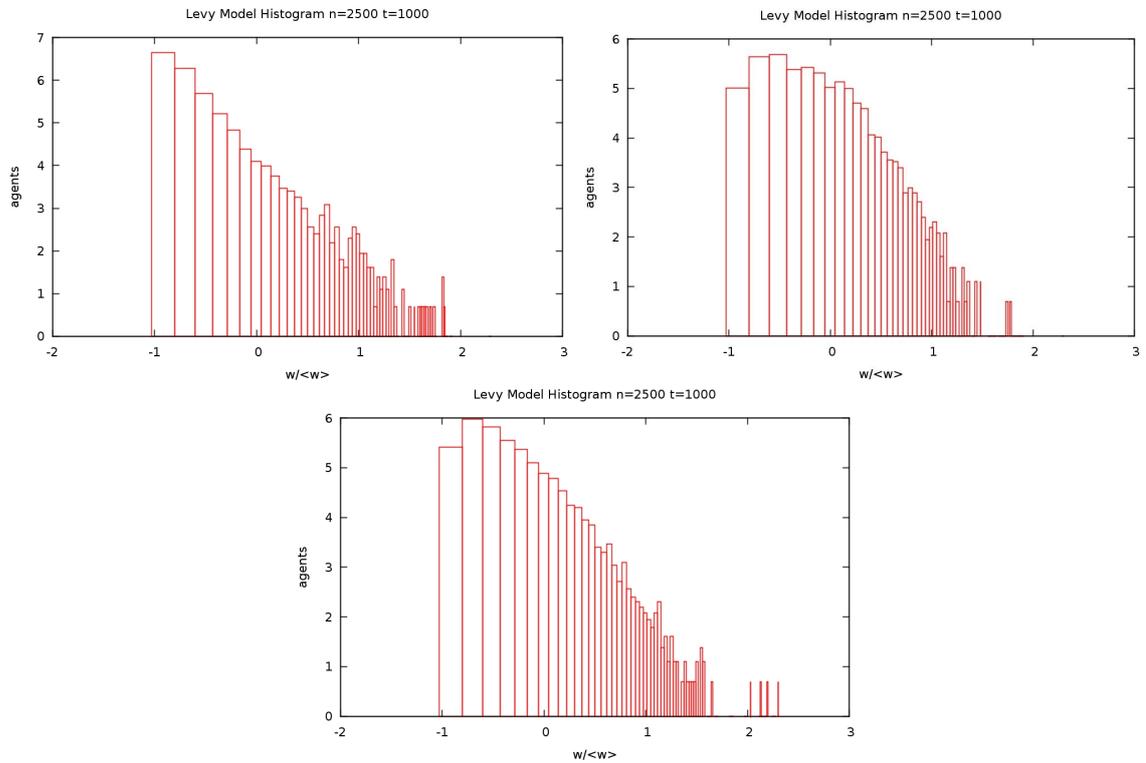


Figura 2: Distribuições quando a riqueza de ingresso é o mínimo (esquerda), média (direita) ou aleatoriamente distribuída entre esses dois valores(abaixo).



Figura 3: Coeficiente de Gini para o modelo de Levy

## 2 Modelo Lambda

### 2.1 Descrição

A primeira generalização do modelo de Levy que propomos consiste em considerarmos agentes dispostos em uma rede <sup>1</sup> e interações entre vizinhos, assim modificamos a variável estocástica  $\phi_i$  para:

$$\phi_i = \begin{cases} 1.1 & \text{com } p_i \\ 0.95 & \text{com } 1 - p_i \end{cases} \quad (2.1)$$

mas  $p_i$  não é mais 1/2 e passa a ser dado por:

$$p_i = \frac{1}{2} \left( 1 + \lambda \frac{N_g - N_p}{N_g + N_p} \right) \quad (2.2)$$

onde  $N_g(N_p)$  representa o número de vizinhos do  $i$ -ésimo sítio que tiveram sua riqueza aumentada(diminuída) no passo de tempo anterior, ou seja,  $\delta(t - \Delta t)$  maior(menor) que zero. Devemos salientar a existência de uma simetria na interação decorrente do fato de que consideramos a diferença entre o número de vizinhos ganhadores e perdedores. O parâmetro real  $\lambda$  é definido no intervalo  $[0; 1]$  de modo que os vizinhos vitoriosos no tempo anterior aumentem a probabilidade dos sítios vizinhos ganharem, portanto estaremos considerando apenas o caso em que há cooperação da vizinhança. É importante notar que por conta disso, podemos esperar que existam algumas regiões da rede com agentes mais ricos, porquanto poderão existir alguns aglomerados de agentes que "blindam" um ou mais agentes.

Feita a primeira consideração a respeito da interação, devemos definir qual será a organização da vizinhança de cada agente, ou seja, em que tipo de rede os agentes serão dispostos. Por simplicidade escolhemos a rede bidimensional quadrada com condições

---

<sup>1</sup>Inicialmente bidimensional quadrada, conforme veremos a seguir.

de contorno periódicas, pois esta possui um número relativamente pequeno de primeiros vizinhos (quatro) e a periodicidade, necessária para a diminuição dos efeitos de borda, é facilmente implementada.

## 2.2 Simulação Numérica e Resultados

Simulamos uma rede quadrada com 2500 agentes com 1000 passos de tempo<sup>2</sup>. A figura 4 contém distribuições para quatro valores distintos de  $\lambda$ .

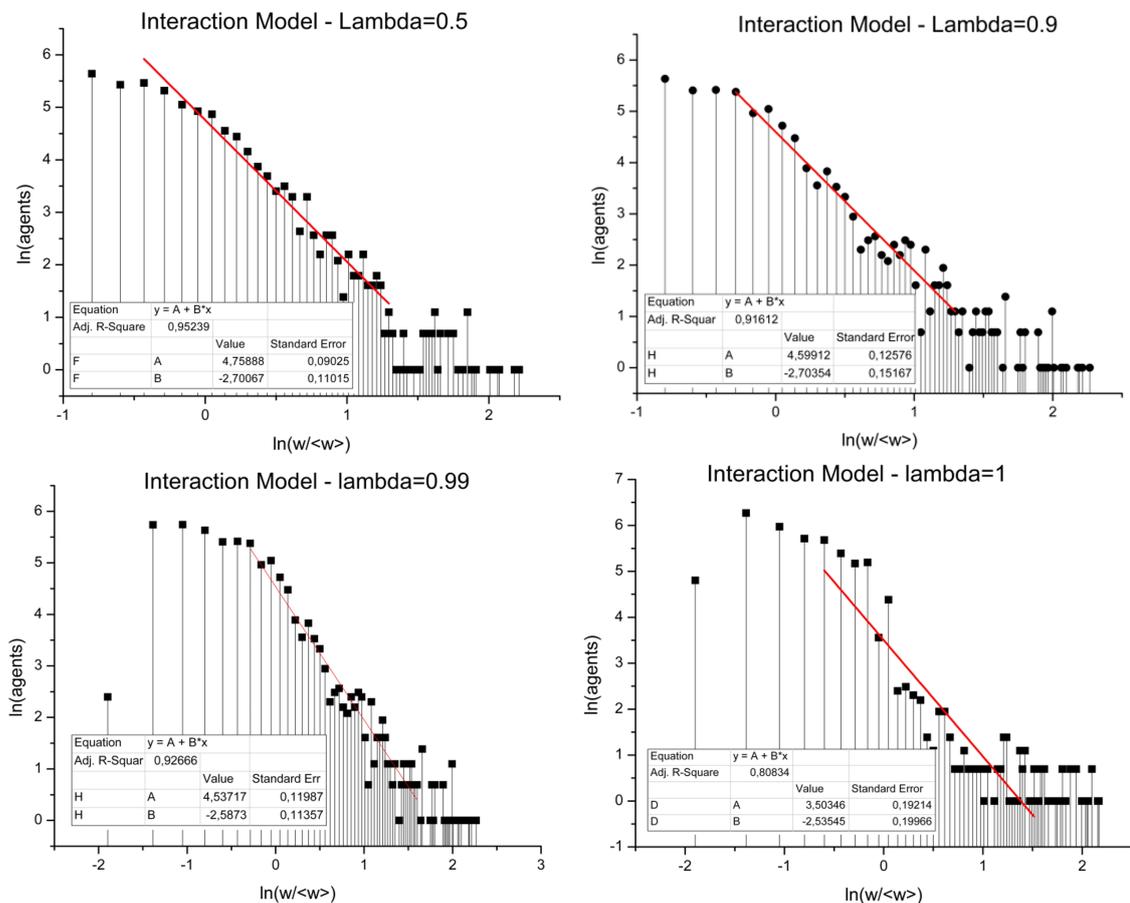


Figura 4: Acima as distribuições (em escala duplo-logaritmica) para  $\lambda = 0.5$ (esq.) e  $\lambda = 0.9$ (dir.). Abaixo para  $\lambda = 0.99$ (esq.) e  $\lambda = 0.1$ (dir.)

Obtivemos a correlação média e o coeficiente de Gini em função do tempo para diferentes valores de  $\lambda$  que estão mostrados na figura 5. Tais resultados foram obtidos fazendo-se a média sobre 20 realizações diferentes<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Novamente consideramos 1000 passos de tempo na evolução de cada agente. Tal definição será alterada apenas no próximo modelo.

<sup>3</sup>Alterando as sementes dos geradores de números aleatórios.

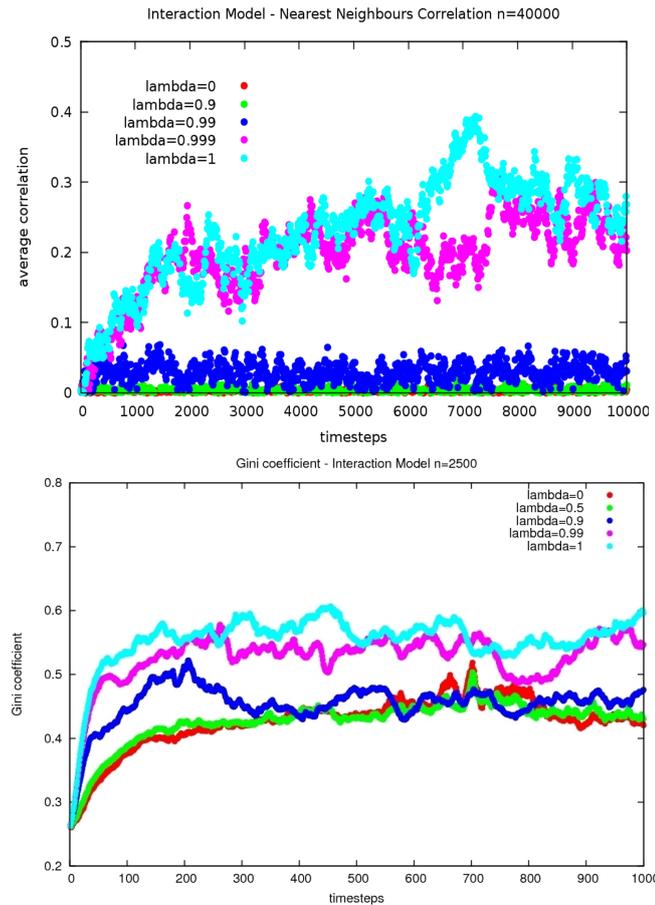


Figura 5: Correlação média (acima) e coeficiente de Gini (abaixo) em função do tempo para diferentes valores de  $\lambda$ .

Observa-se que para  $\lambda = 0.5$  até  $\lambda = 0.9$  ainda temos praticamente o mesmo comportamento linear do modelo livre de interações, enquanto que para  $\lambda = 1$  tal comportamento é totalmente alterado pelas interações fortes. A correlação média dos agentes deixa de oscilar em valores próximos de zero apenas para  $\lambda = 0.99$  e, no valor máximo de  $\lambda$ , ela não é maior do que 0.4, o que nos sugere que a interação neste modelo não é suficientemente forte mesmo quando fixamos o valor máximo do parâmetro de controle ( $\lambda$ ). O coeficiente de Gini cresce até valores entre 0.4 e 0.6, dependendo do parâmetro  $\lambda$ , sendo que nos mesmos intervalos de  $\lambda$  em que a correlação é baixa, o índice de Gini é próximo ao valor obtido no modelo de Levy.

Tanto a curva de correlação média quanto a curva do coeficiente de Gini em função do tempo apresentam um comportamento oscilatório que se explica pela forma em que foram implementadas as simulações. Existe uma oscilação de alta frequência que decorre de termos utilizados um número relativamente pequeno de realizações das variáveis aleatórias

para realizarmos as médias necessárias. Além disso, existem outros tipos de ruídos associados à forma segundo a qual percorremos os vetores no cálculo numérico. Aumentar o número de realizações e percorrer os sítios dos vetores aleatoriamente são medidas capazes de diminuir tais ruídos, entretanto tornam as simulações consideravelmente longas<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Ao longo do trabalho escolhemos números de realizações capazes de calcular médias significativamente precisas no menor tempo de simulação possível, otimizando a obtenção de resultados sem trazer grandes prejuízos à qualidade dos resultados.

## 3 Modelo de Ising

Nesta seção iremos estudar a dinâmica dos agentes econômicos a partir do modelo de Ising. Tal modelo foi escolhido por apresentar correlações médias (no equilíbrio) entre vizinhos que abrangem todo o intervalo  $[0;1]$ , o que nos permite observar distribuições em regimes de correlação maior entre agentes em relação às distribuições do modelo da seção anterior. Por outro lado como a variável  $\phi$  é binária<sup>1</sup> acreditamos que o modelo de Ising poderia ser bem aplicado a este problema.

### 3.1 Descrição Física e Algoritmo

O modelo de Ising é um modelo proposto para a descrição do ferromagnetismo na matéria, mas atualmente é de larga aplicação em sistemas não-magnéticos. Considera-se um grupo de variáveis denominadas *spins* que podem assumir dois valores (1 ou -1). A interação entre os  $N$  spins ocorre aos pares e é descrita, no caso mais geral, pelo hamiltoniano (negligenciando a presença de campos magnéticos externos):

$$\hat{H} = - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N J_{ij} \hat{s}_i \hat{s}_j \quad (3.1)$$

Observe que a energia é somada sobre todos os possíveis pares e cada um deles possui uma constante  $J_{ij}$  associada. Se  $J_{ij} > 0$  dizemos que a interação é ferromagnética, se  $J_{ij} < 0$  é antiferromagnética e se  $J_{ij} = 0$  não existe interação.

É de interesse físico considerarmos apenas interações entre vizinhos próximos, então utiliza-se  $J_{ij} \neq 0$  para todos  $j$  vizinhos de  $i$ . A vizinhança é definida após a escolha de uma topologia da rede e nos casos mais comuns fixamos um valor de  $J$  para toda a rede. Nesse caso o hamiltoniano (com  $\langle i, j \rangle$  representando todos os pares vizinhos) se torna:

---

<sup>1</sup>Assume dois valores apenas, não que estes sejam 0 e 1 neste caso.

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{s}_i \hat{s}_j \quad (3.2)$$

A configuração de mesma energia de um sistema com o hamiltoniano acima será aquela em que a energia é a mínima possível (spins paralelos ou anti-paralelos, dependendo do sinal de  $J$ ). Se considerarmos a rede em banho térmico a uma temperatura  $T \neq 0$  então são permitidas flutuações (de ordem de  $k_B T$ ) na energia do sistema. A descrição matemática do problema pode ser obtida a partir do *Ensemble Canônico*<sup>2</sup> e a distribuição de probabilidades do sistema estar numa configuração de energia  $E$  é dada pela distribuição de Boltzmann.

A competição entre o ordenamento dos spins devido à interação e a desordem provocada pela energia térmica pode resultar no aparecimento de transições de fase, cuja existência e temperatura crítica dependem do tipo de rede. A rede unidimensional (solúvel analiticamente) não exibe transições uma vez que o número baixo de primeiros vizinhos (dois) não é suficiente para ordenar o sistema.

O caso unidimensional possui solução analítica simples, porém não apresenta transições de fase e não será estudada aqui. A rede mais simples que apresenta transição de fase é a bidimensional quadrada, cuja solução analítica foi proposta por Onsager em 1944(8). A temperatura crítica nesse caso é  $T_c = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} \simeq 2.27$  (considerando  $\frac{J}{k_B} = 1$ )<sup>3</sup>. Uma outra rede bidimensional que também utilizaremos é a triangular, cujo valor da temperatura crítica<sup>4</sup> (usando a mesma definição para as constantes) é de  $T_c \simeq 3.5$ . A figura 6 exibe o gráfico da energia média por sítio nas redes quadrada e triangular, bem como os valores das temperaturas críticas nos dois casos.

O método numérico que vamos utilizar para implementar a dinâmica do sistema será o Algoritmo de Metropolis (6). Estamos interessados em encontrar o estado macroscópico de um sistema com muitas configurações, isto é, encontrar valores de equilíbrio para variáveis termodinâmicas relevantes ao problema, que serão médias sobre as possíveis configurações. O nosso problema apresenta  $2^N$  micro-estados, o que torna o cálculo direto da função partição inviável (a não ser para valores pequenos de  $N$ ) sob o ponto de vista

---

<sup>2</sup>Ver, por exemplo,(10).

<sup>3</sup>Utilizaremos essa definição ao longo do trabalho.

<sup>4</sup>Ver, por exemplo,(12).

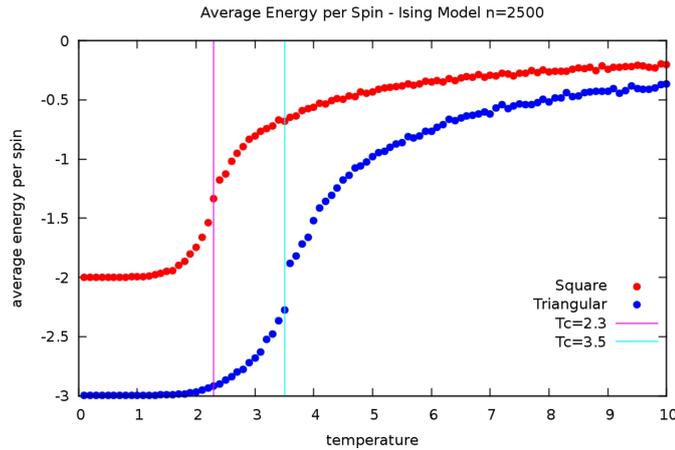


Figura 6: Energia média por spin na rede quadrada (vermelho) e triangular (azul). As retas verticais mostram a localização das temperaturas críticas.

computacional.

O Algoritmo de Metropolis consiste em partirmos de uma configuração arbitrária do sistema e aplicarmos um número suficientemente grande de transições aleatórias, tomando por fim as médias necessárias para descobrirmos as grandezas macroscópicas do problema. A base de tal algoritmo está no Princípio do Balanço Detalhado, que nos garante que o sistema tende ao equilíbrio (ou seja, que os micro-estados tenham distribuição de Boltzmann) tendo como única restrição a ergodicidade do problema.

Para o Modelo de Ising o Algoritmo de Metropolis é o seguinte procedimento:

- Sorteia-se um spin e troca-se sua orientação.
- Se a energia sofrer diminuição, a transição é aceita; se a energia aumentar, a transição terá uma probabilidade de ocorrer (dependente da variação da energia  $\Delta E$ ) dada por:

$$P = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-\Delta E}{k_B T}\right) \quad (3.3)$$

Como ilustração, simulamos<sup>5</sup> um sistema de spins utilizando tal algoritmo para as redes bidimensionais quadrada e triangular e para diversos números de sítios  $N$  ( $n = \sqrt{N}$  nas legendas, onde  $n$  representa o número de sítios em cada linha (ou coluna) da rede). A transição de fase é visualizada através de picos ou pontos de inflexão nos gráficos das variáveis termodinâmicas em função da temperatura. Observa-se que  $T_c \approx 2.3$  na rede

<sup>5</sup>Para maiores detalhes do procedimento computacional veja (7)(11).

quadrada e  $T_c \approx 3.5$  na rede triangular, portanto tomaremos esses valores como parâmetro de comparação para nossos resultados.

## 3.2 Aplicação em agentes econômicos

Ao contrário do modelo descrito na seção anterior (Modelo Lambda) que era uma generalização intuitiva do modelo sem interação proposto por Levy, o modelo com interação do tipo Ising não é muito "direto" sob o ponto de vista econômico. Devemos portanto iniciar a descrição dessa abordagem salientando que a vantagem de utilizarmos um modelo "puramente" físico (porém muito genérico) é termos como respaldo inúmeros resultados conhecidos desse modelo na Física. Em especial, observe que no caso de termos um número fixo de vizinhos por sítio (como nas redes quadrada e triangular) teremos uma relação de proporcionalidade entre a energia média da rede e a correlação média entre primeiros vizinhos, a saber:

$$\langle E \rangle = -J \frac{N_{vizinhos}}{N} \langle c \rangle . \quad (3.4)$$

Com isso podemos inferir que a correlação média a primeiros vizinhos terá uma região de máximo para  $T < T_c$  e mínimo para  $T > T_c$ , com valores intermediários para temperaturas próximas à crítica. Em outras palavras, teremos uma interação forte(fraca) dos vizinhos sempre que a temperatura for pequena(grande) em relação a  $T_c$ .

O nosso modelo de Ising baseia-se na interpretação dos spins como sendo *o sinal da variação da riqueza de um agente* em um determinado passo de tempo (segundo nossa notação,  $s_i(t) = \delta_i(t)$  definida em (3)). O calibre da interação entre vizinhos passa a ser fixado pela temperatura, que tem por objetivo quantificar o tamanho da aleatoriedade (fisicamente de natureza térmica, economicamente associada à "sorte" do agente) do sistema frente a tendência dos agentes de terem o mesmo comportamento de seus vizinhos (ordenamento do sistema). Por questões de simplicidade, manteremos a definição de  $T \in [0, +\infty)$ .

A evolução da riqueza segue sendo feita a partir de um processo multiplicativo e permaneceremos com as mesmas realizações possíveis para  $\phi_i$ , que podemos escrever

como:

$$\phi_i(t) = \left( 0.95 + 0.15 \frac{s_i(t) + 1}{2} \right) \quad (3.5)$$

Observe que ao utilizarmos o Algoritmo de Metropolis para a evolução das  $\delta_i$  acabamos tendo como passo de tempo *fundamental* na simulação uma transição de micro-estado (ou seja, uma troca de spin). Redefiniremos então, o passo de tempo como sendo o número de passos fundamentais (passos do algoritmo) necessários para em média mudar a orientação de todos os spins da rede (que chamaremos de *passos de Monte Carlo*).

### 3.3 Resultados Numéricos

Usamos redes quadradas e triangulares com 2500 agentes (50x50) e a deixamos evoluir por 1000 passos de tempo de Monte Carlo. Como condições iniciais utilizamos uma distribuição delta em  $w = 1$  e cada spin inicia com orientação randômica. Os agentes que substituem aqueles que foram excluídos pela condição de riqueza mínima possuem inicialmente a riqueza média no passo de tempo em que entram no sistema e spin aleatório. As figuras 7, 8 e 9 mostram as curvas duplo-logarítmicas das distribuições após 100 passos<sup>6</sup> para temperaturas pequenas, próximas à temperatura crítica e altas, respectivamente.

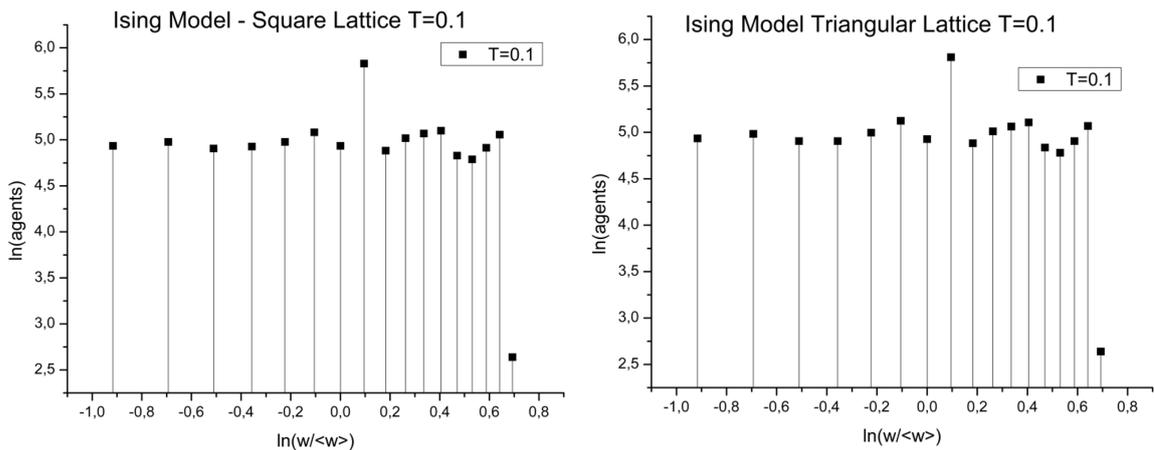


Figura 7: Distribuições (em escala duplo-logarítmica) para temperatura baixa na rede quadrada (esquerda) e triangular (direita).

O limite assintótico da correlação média por sítio pode ser visto como a reflexão da

<sup>6</sup>A forma da distribuição se mantém a partir desse tempo, o que pode ser observado nas curvas do coeficiente de Gini em função do tempo de simulação.

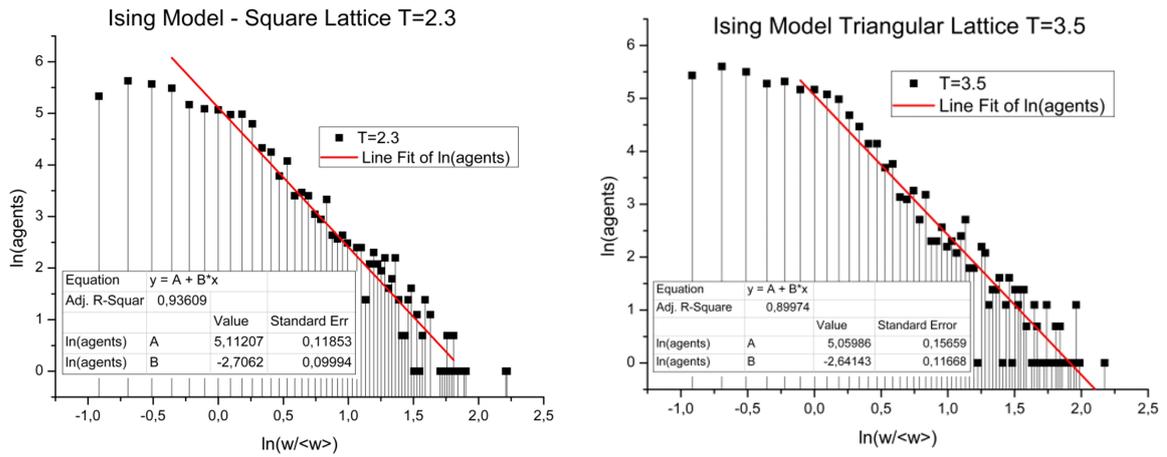


Figura 8: Distribuição na região de temperatura crítica

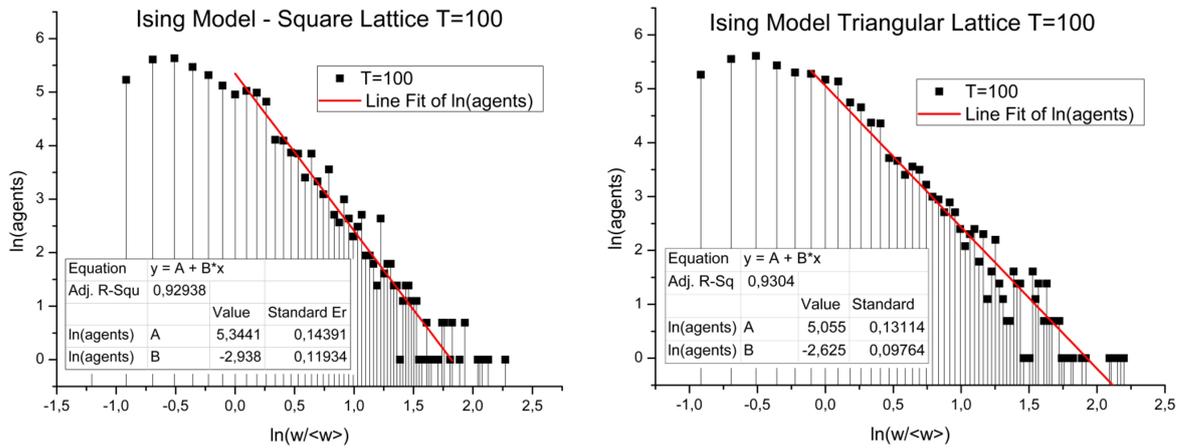


Figura 9: Distribuição para temperaturas grandes.

curva de energia média por spin em torno do eixo de temperatura <sup>7</sup>, então esperamos que em ambas as redes a correlação em função do tempo ora crescerá até o limite assintótico (que pode ser o valor máximo, se  $T < T_c$ , ou para valores intermediários na região de transição de fase), ora permanecerá em valores próximos de zero ( $T > T_c$ ). A figura 10 mostra a evolução no tempo dos coeficientes de Gini nas duas redes para alguns valores de temperatura.

Observa-se que a distribuições são totalmente modificadas para  $T < T_c$  devido ao ordenamento da rede. Nessa mesma região o coeficiente de Gini é consideravelmente menor

<sup>7</sup>Mais detalhadamente, a correlação e a energia média se relacionam linearmente no modelo de Ising (sem campo magético externo) por uma constante negativa dependente do número de vizinhos por sítio da rede.

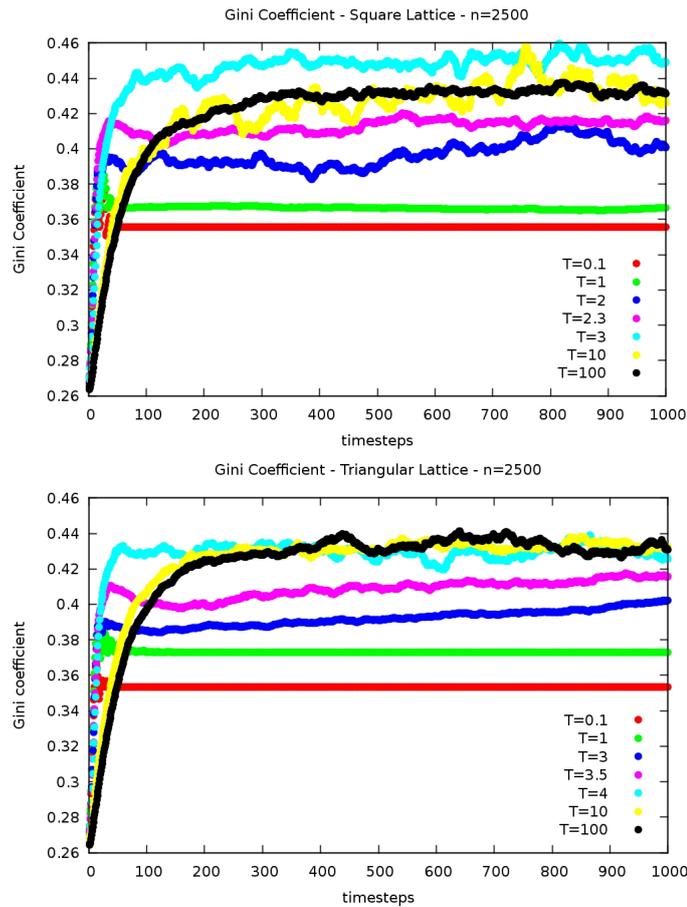


Figura 10: Coeficientes de Gini em função do tempo na rede quadrada (acima) e triangular (abaixo).

que no caso sem interação, o que está profundamente relacionado ao fato do sistema se ordenar em poucos passos de simulação<sup>8</sup>, resultando em menor dispersão de agentes em relação à distribuição inicial. Os valores do Gini neste caso se assemelham muito ao de países da Península Escandinava e do Japão. Para temperaturas próximas ou maiores à crítica o comportamento é de lei de potência e o coeficiente de Gini é similar ao caso sem interação.

<sup>8</sup>Os valores dos coeficientes de Gini praticamente não oscilam a partir de 100 passos de tempo, o que nos indica que a partir daí o ordenamento total foi alcançado.

## 4 *Conclusões e Comentários*

Nosso trabalho consistiu em apresentar duas possíveis generalizações para um modelo existente na literatura que, apesar da simplicidade decorrente da não-diferenciação de agentes, possuía resultados satisfatoriamente similares às observações empíricas. Salienta-se que não almejamos aqui uma descrição completa e realística de processos de acúmulo de riqueza em sistemas reais, que devem envolver um número muito maior de parâmetros, o que os torna praticamente impossíveis de serem descritos artificialmente. Por outro lado, notemos que os dois mecanismos aqui abordados (Modelo Lambda e Modelo de Ising) possuem resultados qualitativamente similares para as distribuições de riqueza ainda que possuam mecanismos consideravelmente diferentes entre si, o que pode ser interpretado como a possibilidade óbvia de haver tanto influências estocásticas (sorte) como "estratégias" (relacionadas ao tipo de interação) na evolução de uma sociedade econômica real.

Além das muitas alterações que podemos sugerir mantendo a dinâmica multiplicativa, que tem como característica a ausência de conservação da riqueza total, podemos considerar também a incorporação de interações conservativas entre agentes, como por exemplo regras de troca usualmente propostas na literatura(1)(2). Um modelo desse tipo contemplaria os dois tipos fundamentais de processos (aditivo e multiplicativo) e poderia ser capaz de modelar tanto a região de riqueza alta (distribuída de acordo com a Lei de Pareto) como a de baixa riqueza.

O Modelo Lambda, pensado como uma generalização imediata do caso sem interação, apresenta uma grande similaridade nas distribuições finais para valores relativamente grandes do parâmetro  $\lambda$ , a saber, no intervalo  $[0;0.9]$  é possível observar uma grande precisão no ajuste linear da reta duplo-logaritmo. Tal similaridade é facilmente compreendida ao observarmos que nesse mesmo intervalo de  $\lambda$  a correlação média da rede oscilou entre valores muito próximos de zero, que é o mesmo resultado que esperaríamos no caso sem

interação. Além disso, podemos sustentar ainda mais tal afirmação notando que o coeficiente de Gini tende a valores próximos de  $G = 0.43$  para  $0 \leq \lambda \leq 0.5$ .

No regime de interações fortes ( $\lambda > 0.9$ ) a distribuição de riqueza se deforma e diminui a concentração de agentes na região do meio da distribuição ( $\ln(w / \langle w \rangle)$  entre 0 e 1). A correlação média ainda tem um comportamento oscilatório (proveniente dos ruídos citados anteriormente), mas cresce gradativamente até ter limite assintótico próximo a 0.3, enquanto o coeficiente de Gini tende a valores consideravelmente maiores que  $G = 0.43$  (entre 0.5 e 0.6). Com isso inferimos que a interação provoca uma maior desigualdade, o que é explicado pela formação de regiões bem localizadas e isoladas de agentes de alta riqueza, enquanto o resto da sociedade possui riqueza inferior à média (que é imposta pelos agentes ricos, uma vez que tais regiões ricas são praticamente fixas no tempo).

A constatação que a correlação média no modelo Lambda não assumia valores maiores que 0.5 nos levou à busca por um outro modelo capaz de apresentar interações altamente correlacionadas e ainda sim resgatar os resultados do modelo de Levy para interações fracas. Conforme dito anteriormente, nossa motivação ao escolher o modelo de Ising era justamente a de termos duas regiões distintas de correlação conectadas por uma região que abrange valores intermediários de correlação. Não obstante, o fato de termos associado a interação com a variação da riqueza  $\delta$  nos permitiu uma interpretação imediata de tais funções como os spins do modelo de Ising.

Assim como o modelo Lambda, o modelo de Ising também manteve a forma paretiana da distribuição para  $T > T_c$  e para  $T \approx T_c$ , intervalos de temperatura para os quais a energia média por sítio é alta (e, conseqüentemente, a correlação é baixa). Tanto na rede quadrada quanto na rede triangular observamos que o coeficiente de Gini permaneceu no intervalo  $0.4 < G < 0.45$  para valores próximos da temperatura crítica. Por outro lado, na região de maior correlação temos  $G < 0.4$  e a situação é oposta à que ocorria no modelo Lambda, visto que o ordenamento de longo alcance produz um índice de Gini menor. Observa-se também que os resultados para temperaturas maiores ou iguais à crítica são muito semelhantes para um mesmo tipo de rede, especialmente se levarmos em conta as inclinações das retas de ajuste linear<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>As inclinações das retas para os dois modelos estiveram em geral no intervalo  $[-3; 2.5]$ , isto é, expoentes de Pareto de 1.5 a 2, que são valores próximos aos antecipados por Pareto e aos observados em (4).

Ao contrário do que vimos em todos os outros resultados, é observado, para  $T < T_c$ , uma forte dependência das condições iniciais, porquanto tais distribuições se tornam estáticas após poucos passos de simulação, isto é, a partir do momento em que a rede adquire magnetização máxima em módulo. Salientamos que em média a magnetização inicial do sistema é nula e, por isso, o sistema necessita de um tempo para ter ordem magnética espontânea e estar em equilíbrio térmico, mas se orientássemos todos no mesmo sentido iríamos observar um comportamento completamente diferente (estático) da distribuição e do coeficiente de Gini (uma vez que o sistema já estaria inicialmente em equilíbrio térmico). Além disso, a própria distribuição inicial de riqueza afeta as distribuições finais nesse caso, pois o fato de termos o "congelamento" da distribuição em poucos passos implica em uma leve conservação do formato inicial da mesma.

## *APÊNDICE A – Correlação e Coeficiente de Gini*

A função correlação de duas variáveis estocásticas  $x_i$  e  $x_j$  é definida como:

$$Cor(x_i, x_j) = \frac{\langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} \quad (\text{A.1})$$

na qual usamos a notação  $\langle x_i \rangle$  e  $\sigma_{x_i} = \sqrt{\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2}$  para o valor médio e o desvio padrão de  $x_i$ , respectivamente.

Tal função representa o grau de dependência entre as duas variáveis estocásticas em questão e está definida no intervalo  $[-1;1]$ . Se  $Cor(x_i, x_j) = 0$  então  $x_i$  e  $x_j$  são ditas *variáveis independentes*.

Em termos de simulação é muito trabalhoso utilizar (eq. acima) para calcular a correlação, uma vez que as médias relevantes para tal cálculo devem ser feitas sobre muitas realizações. Devemos então utilizar uma equação operacional para otimizar o tempo de simulação.

Notemos também que existem muitas formas de medirmos a correlação entre os agentes da rede, pois podemos tanto considerar as riquezas  $w_i(t)$  como variáveis estocásticas quanto as variações da riqueza  $\delta_i(t)$ <sup>1</sup>. (definidas na equação 1.3). Por estarmos lidando com processos estocásticos multiplicativos para  $w(t)$ , devemos ter valores muito dispersos e grandes para tal variável, o que resultaria em erros numéricos. Por outro lado,  $\delta(t)$  assume apenas valores +1 e -1, então tal variável é muito útil para esse tipo de cálculo.

Utilizaremos então a seguinte definição operacional para a correlação média da rede<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Devemos salientar que  $\delta_i$  é o sinal da variação, muito embora tenhamos o chamado simplesmente de *variação da riqueza*.

<sup>2</sup>É de suma importância notar que estamos lidando com correlações espaciais e *de primeiros vizinhos*.

(considerando o número de vizinhos  $N_{viz}$  igual para todos os  $N$  sítios<sup>3</sup>) iguais  $p$  num tempo  $t$ :

$$\overline{c(t)} \equiv \frac{1}{N} \frac{1}{N_{viz}} \sum_{i,j} \delta_i(t) \delta_j(t) \quad (\text{A.2})$$

Podemos definir uma variável  $\gamma_i$  que soma os elementos do conjunto das  $\delta_i$  vizinhas de  $i$  ( $viz_i$ ):

$$\gamma_i(t) \equiv \frac{1}{N_{viz}} \sum_{j \in viz_i} \delta_j(t) \quad (\text{A.3})$$

Dessa forma obtemos:

$$\overline{c(t)} = \frac{1}{N} \sum_i \delta_i \gamma_i = \langle \delta_i \gamma_i \rangle \quad (\text{A.4})$$

O coeficiente de Gini (ou índice de Gini) é a medida da desigualdade de uma dada distribuição. Apesar de ter aplicações em diversas áreas, ela é utilizada principalmente em Ciências Econômicas nas medidas de desigualdades de riquezas e salários.

Definimos o coeficiente de Gini como:

$$G \equiv \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{|w_i(t) - w_j(t)|}{\langle w \rangle} \quad (\text{A.5})$$

Observe que  $0 \leq G \leq 1$ . Para  $G = 0$  a igualdade é máxima e a distribuição é uma delta de Dirac. Para  $G = 1$  temos que um agente possui toda a riqueza da rede, o que é graficamente representado por duas funções delta (uma em  $w = 0$  com altura  $N - 1$  e outra com altura 1 na riqueza total da rede).

O índice de Gini depende apenas da riqueza relativa de cada membro da população estudada, portanto acaba sendo um parâmetro muito útil para fazer comparações socioeconômicas de diferentes países e regiões, mesmo que estes tenham PIB ou renda *per capita* de grande discrepância. Como ilustração a Figura 11 mostra o índice Gini de diversos países (incluindo o Brasil) nos últimos 60 anos.

---

<sup>3</sup>Os sítios das redes triangular e quadrada com condições periódicas de contorno apresentam o mesmo número de primeiros vizinhos (seis e quatro, respectivamente), o que não ocorre em redes aleatórias, como redes *smallworld*, por exemplo.

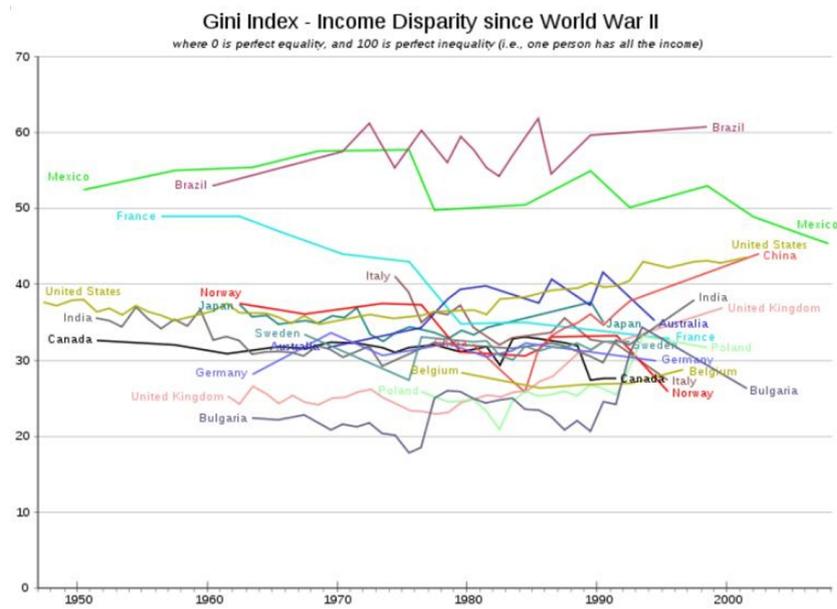


Figura 11: Índice de Gini para diferentes países nas últimas décadas.

## *Referências*

- 1 G. M. Caon, J. R. Iglesias, and S. Gonçalves. The unfair consequences of equal opportunities: comparing exchange models of wealth distributions. *European Physics Journal - Special Topics*, 143(69), 2007.
- 2 A. Chakraborti. Distributions of money in model markets of economy. *International Journal of Modern Physics C*, 13:1315–1321, 2002.
- 3 O. S. Klass, O. Biham, M. Levy, O. Malcai, and S. Solomon. The forbes 400 and the pareto wealth distribution. *Economics Letters*, 90:290–295, 2006.
- 4 M. Levy. Are rich people smarter? *Journal of Economic Theory*, 110(1):42–64, 2003.
- 5 R. N. Mantegna and H. E. Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 2000.
- 6 N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21:1087–1092, 1953.
- 7 M. E. J. Newmann and G. T. Barkema. *Monte Carlo methods in statistical physics*. Cambridge University Press, 1999.
- 8 L. Onsager. Crystal statistics.i.a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review Letters*, 65:117–149, 1944.
- 9 V. Pareto. *Cours d'Economic Politique*. 1987.
- 10 L. E. Reichl. *A modern course in Statistical Physics*. Wiley, 2nd edition, 1998.
- 11 C. Scherer. *Métodos Computacionais da Física*. Livraria da Física, 2005.
- 12 W. Selke. Critical binder cumulant of two-dimensional ising models. *The European Physics Journal B*, 51:223–228, 2006.