Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MEDIDAS MAXIMIZADORAS PARA SISTEMAS DINÂMICOS FRACAMENTE HIPERBÓLICOS

por

RAFAEL RIGÃO SOUZA

Porto Alegre, agosto de 2004

Tese submetida por Rafael Rigão Souza como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador: Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:
Dr. Alexandre Tavares Baraviera
Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha
Dr. Mario Jorge Dias Carneiro (UFMG)
Dr. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez (PUC-RJ)

Data de Defesa: 10 de agosto de 2004.

.

A minha esposa,

e meus pais.

.

Agradecimentos:

Agradeço ao meu orientador Artur Oscar Lopes, pelas várias oportunidades de estudo e pesquisa, pelas nossas conversas, e pelo direcionamento dado a mim durante todo este tempo.

Ao professor Philippe Thieullen, meu co-orientador na Universidade de Paris-Sud, pelo interesse demonstrado em nosso trabalho conjunto durante meu periodo de doutorado-sanduiche em Paris.

Agradeço aos colegas da Unisinos e da UFRGS, pelo apoio, bom humor e camaradagem durante a escrita desta tese.

Agradeço a minha esposa Joana, pela sua dedicação e por todos os momentos maravilhosos que me proporcionou durante esta jornada.

E meus pais, Santelmo e Docelina, por seu companheirismo, paciência, e pelos ótimos momentos que também me deram neste período.

Resumo

Dado um sistema dinâmico $g : M \to M$ e uma função $A : M \to I\!R$, chamada de observável, uma medida invariante ν que satisfaz $\int A d\nu = \sup\{\int A d\mu \ ; \mu$ é invariante para $g\}$ é chamada uma medida maximizadora. Neste trabalho vamos analisar medidas maximizadoras em duas classes de sistemas dinâmicos que apresentam pontos fixos indiferentes: Na primeira classe analisada, unidimensional, o sistema dinâmico f é dado por um mapa expansor de grau 2 definido em $[0, 1]$, apresentando derivada maior que 1 em todos os pontos com exceção do ponto fixo 0, onde tem derivada 1. O observável A é dado por uma função α-Hölder em cada ramo injetor, monótona em uma pequena vizinhança de zero. Na segunda classe analisada, bidimensional, o sistema dinâmico B é um mapa bijetor definido em $[0, 1) \times [0, 1)$ com o auxílio de uma função f da classe anterior, apresentando ponto fixo indiferente na origem. Trata-se de uma variante fracamente hiperbólica da Baker Map. O observável A agora é uma função α-Hölder, e obedece a uma condição semelhante à monotonicidade do caso unidimensional em um vizinhança de $(0, 0)$. Em ambos os casos mostraremos que a medida maximizadora, se for única, será uma medida unicamente ergódica. O passo mais importante nesta direção, que constitui-se em um resultado de interesse próprio, e que tomará a maior parte de nosso tempo, será, nos dois casos, a obtenção e o estudo da regularidade de uma função a valores reais S, chamada de função de subação, que obedecerá a desigualdade $S \circ g \geq S + A - m$. Em ambos os casos mostraremos que S existe e é Hölder-contínua.

Abstract

Given a dynamical system $g : M \to M$ and a funtion $A : M \to I\!R$, which is called an observable, an invariant measure ν satisfying $\int A d\nu = \sup\{ \int A d\mu \ ; \mu$ is invariant for $g\}$ is called a maximizing measure. In this work we will analyse maximizing measures in two classes of dynamical systems presenting indifferent fixed points: In the first analysed class, unidimensional, the dynamical system f is given by an expanding map of degree 2 defined in $[0, 1]$, presenting derivative greater than 1 at all points except in the fixed point 0, where it has derivative 1. The observable A is given by a function which is α-Hölder over each injective branch, and which is monotonous in a small neighbourhood of zero. In the second analysed class, bidimensional, the dynamical system B is a bijective map defined in $[0, 1) \times [0, 1)$ with the use of the function f of the previous class, presenting an indifferent fixed point at the origin. It is a weakly hyperbolic version of the Baker Map. The observable A is a function which is α-Hölder, and satisfies a condition similar to the monotonicity condition near the origin presented by the unidimensional case. In both classes we will show that, if there is an unique maximizing measure, then this maximizing measure is uniquely ergodic. The most important partial result, which has its own interest, and which will take the greater part of our efforts, will be, in both cases, the search and the study of the regularity of a real-valued function S, called a sub-action function, which will satisfies the inequality $S \circ g \geq S + A - m$. In both cases we will prove that S does exist and is a Hölder continuous function.

Indice

Motivação - Uma Introdução Não-Técnica

Faremos uma rápida introdução não técnica ao nosso objeto de estudo. O leitor mais familiarizado com os conceitos de teoria ergódica pode passar imediatamente para a próxima seção.

Vamos considerar um sistema dinâmico dado por uma função f definida em um espaço métrico M, tomando valores em M. Há uma variedade muito grande de exemplos de situações concretas que podem ser explicados por sistemas dinâmicos. Vamos nos concentrar em dois exemplos:

O primeiro está relacionado a meteorologia: Podemos estar interessados em estudar o clima de uma determinada região. Vamos supor que uma certa quantidade n de parâmetros envolvendo temperatura, pressão, velocidade e direção dos ventos, umidade, em diferentes pontos de controle, é registrada a cada dia, e caracteriza completamente o estado meteorológico desta região. Cada conjunto de valores para estes parâmetros forma um vetor de $\mathbb{R}^n$, e o conjunto de todos os possíveis vetores criados neste processo define o conjunto M. Podemos supor, de uma forma um tanto idealista, que o conhecimento destes parâmetros em um determinado dia define completamente os valores dos mesmos parâmetros no dia seguinte: portanto, se $p \in M$ representa o estado do dia de hoje, estaria bem definido $f(p) \in M$, o estado do dia seguinte. Ou seja, f seria a função que associa ao conjunto de parâmetros meteorológicos de um determinado dia o conjunto de parâmetros do dia seguinte.

Em um segundo exemplo, M poderia mais simplesmente conter vetores cujas coordenadas são dadas por posição e velocidade de um objeto em movimento sobre uma certa superficie. Supondo que esse objeto encontra-se sob ação de um campo de forças externo e homogêneo no tempo, $f(p)$ determinaria posição e velocidade do objeto que encontrava-se no estado p após um intervalo de tempo predefinido.

Estaremos interessados nos estados de equilíbrio do sistema dinâmico definido por M e f, e nas medidas invariantes associadas a cada estado de equilíbrio. Como exemplos mais simples de estados de equilíbrio temos pontos fixos ou órbitas periódicas: Uma vez que o sistema dinâmico parte de um dos pontos de uma órbita periódica, nela permanece para sempre. Começando em um ponto fixo, o sistema não sofre mudanças: permanece neste ponto fixo para sempre. Portanto temos um comportamento bastante simplificado do sistema nestes dois casos. Existem, é claro, situações de equilíbrio bem mais complexos do que simples órbitas periódicas: É o caso dos atratores estranhos, como o atrator de Lorenz, ou de situações de equilíbrio cujas medidas invariantes associadas são absolutamente contínuas: Neste último exemplo a órbita de um ponto que inicia-se neste estado de equilíbrio preenche densamente um subconjunto de M de interior não vazio, chamado de suporte da medida invariante, e que frequentemente é o próprio M. Apesar de um comportamento mais complexo em relação ao que ocorria no caso das órbitas periódicas, o conhecimento da medida invariante nos permite dizer a frequência com que os iterados do ponto inicial passam em qualquer subconjunto aberto contido na órbita, a longo prazo (tempo de ocupação deste subconjunto). Estados de equilíbrio também são importantes por frequentemente atraírem órbitas que iniciam fora do estado de equilíbrio: Um ponto fixo atrator, por exemplo, bastante comum em muitos sistemas dinâmicos, caracteriza-se por possuir uma vizinhança formada por pontos que irão se aproximar dele à medida que avançarmos no tempo (ou seja, à medida que considerarmos os iterados destes pontos). Existem também os pontos fixos repulsores: estes caracterizam-se pela existência de duas vizinhanças, uma pequena, contida em outra maior, tais que qualquer órbita partindo da vizinhança pequena em algum momento sairá até mesmo da grande. Tambem estados de equilíbrio mais complexos podem atrair pontos de fora: Como o nome sugere, é o caso dos atratores estranhos. Portanto estados de equilíbrio também nos fornecem informaçoes sobre pontos localizados fora deles próprios.

Vamos supor agora que estejamos interessados em colher informações importantes de nosso sistema em estudo, resumidas em um único dado numérico: Vamos considerar uma função $A : M \to I\!R$ contínua, chamada de observável, que associa a cada ponto p de M uma grandeza de interesse, como por exemplo, a temperatura em uma certa localidade no caso do controle meteorológico, ou a temperatura da superfície no ponto em que se encotra o objeto em observação, no caso do movimento sob ação do campo de forças.

Dada A e uma medida invariante μ, a integral de A em relação a μ pode ser vista, nos dois exemplos acima, como a temperatura média do estado de equilíbrio representado por μ. Nesse contexto, um estado de equilíbrio que apresente uma temperatura média superior a todos os demais seria de muito interesse. Então, poderíamos nos perguntar: Quais seriam as características deste estado que maximiza a temperatura média ? A medida invariante associada a este estado será chamada de medida maximizadora.

Estaremos neste trabalho, portanto, interessados em aprofundar o estudo das características de medidas maximizadoras de (M, f, A). Vários casos envolvendo sistemas dinâmicos hiperbólicos, uma das classes mais importantes e extensivamente estudadas na teoria de sistemas dinâmicos, já foram tratados, como falaremos mais adiante. Neste trabalho estudaremos sistemas dinâmicos que apresentam pontos fixos indiferentes, caracterizados por serem pontos fixos onde a derivada direcional de f é exatamente igual a 1 em uma das direções (pelo menos). São portanto sistemas não hiperbólicos no sentido estrito, e toda a teoria desenvolvida para sistemas hiperbólicos deve de ser adaptada a esta nova situação.

Introdução

Vamos iniciar introduzindo o conceito de medida maximizadora para um sistema dinâmico e um observável: dado um sistema dinâmico $g : M \to M$ e uma função $A : M \to I\!R$, chamada de observável, uma medida invariante ν é chamada de medida maximizadora se

$$\int A d\nu = \sup \left\{ \int A d\mu \,;\, \mu \text{ é invariante para } g \right\}.$$

Neste trabalho vamos analisar medidas maximizadoras em duas classes de sistemas dinâmicos que apresentam pontos fixos indiferentes: Na primeira classe analisada, unidimensional, o sistema dinâmico f é dado por um mapa expansor de grau 2 definido no intervalo unitário $[0, 1]$, apresentando derivada maior do que 1 em todos os pontos com exceção do ponto fixo 0, onde f tem derivada 1. Este ponto fixo com derivada 1, chamado de ponto fixo indiferente, faz com que uma órbita típica fique muito tempo perto da origem, no chamado regime de fase laminar (veja [9]). Vamos considerar, para este sistema unidimensional, um observável A que é $\alpha-$Hölder em cada ramo injetor de f, e que é monótono ou constante em uma pequena vizinhança de $x = 0$ (as propriedades de f e de A serão dadas em mais detalhes na seção 2).

Se f for definida de forma a satisfazer ainda a hipótese de ser $C^{1+\alpha}$ em cada ramo injetor (hipótese não necessária para os resultados deste trabalho), teremos um caso particular de observável de muito interesse, dado por $A(x) = \log(f'(x))$. Neste caso, a medida maximizadora será a medida de máximo expoente de Lyapunov, ou seja, a medida invariante que nos fornece a maior dependência sensitiva média nas condições iniciais. Podemos tambem considerar $A(x) = -\log(f'(x))$ e então estaremos analisando medidas minimizadoras do expoente de Lyapunov (veja [2] para resultados envolvendo medidas minimizadoras do expoente de Lyapunov para mapas uniformemente expansores).

Um exemplo importante de função f satisfazendo nossas hipóteses é dado pelos mapas de *Maneville-Pomeau* (veja [3]). Neste caso $A(x) = \log(f'(x))$ satisfaz as nossas hipóteses sobre A. Um estudo importante do tipo de hiperbolicidade fraca considerado aqui encontra-se em [12].

Na segunda classe de sistemas dinâmicos analisada neste trabalho, bidimensional (secao 4), temos um sistema dinâmico B invertivel, dado por um mapa bijetor definido no quadrado unitário $[0, 1) \times [0, 1)$ com o auxílio da função f da classe anterior, restrita a $[0,1)$, e dos ramos inversos de um mapa fortemente expansor de grau 2 definido em $[0,1)$ (com derivada maior que uma constante $\beta > 1$.) Tal sistema dinâmico pode ser visto como uma versão fracamente hiperbólica da Baker Map (ver seção 4 para detalhes), e tem a característica de ser fracamente expansor na direção horizontal e fortemente contrator na vertical (i.e. distâncias verticais decaem exponencialmente a uma taxa controlada, e distâncias horizontais crescem, mas não exponencialmente), apresentando um ponto fixo indiferente na origem $(0,0)$. O observável A nesta segunda classe analisada é uma função α-Hölder, e obedece a uma condição semelhante a monotonicidade do caso unidimensional em um vizinhança de $(0,0)$. Note que, assim como podemos considerar a Baker Map como uma versão simplificada de sistemas dinâmicos hiperbólicos, e que pode ser usada como modelo para o entendimento destes sistemas, a função B pode ser vista como uma versão simplificada de sistemas dinâmicos bidimensionais que apresentam pontos fixos indiferentes.

A ferramenta fundamental na análise das medidas maximizadoras, em ambas as classes, e que pode ser considerada também como uma contribuição deste trabalho que goza de interesse próprio, podendo ser de utilidade também em outras situações diferentes do estudo de medidas maximizadoras, é dada pela função de sub-ação, que vamos introduzir agora: Dado um sistema dinâmico $g : M \to M$ e um observável $A : M \to I\!R$, uma função $S : M \to I\!R$ é chamada de função de sub-ação se satisfizer a seguinte desigualdade, chamada de equação de sub-cohomologia:

$$S \circ g \geq S + A - m,$$

onde

$$m = \sup \left\{ \int A d\mu \, ; \mu \text{ é invariante para } g \right\}.$$

A busca pela existência e o estudo da regularidade de funções de sub-ação para as duas classes aqui estudadas formarão a parte mais extensa deste trabalho. Uma vez obtido uma função de sub-ação com boas características, obteremos os resultados sobre as medidas maximizadoras de forma relativamente fácil. (ver seção 3 para o caso unidimensional e seção 4 para o caso bidimensional).

Agora um breve panorama histórico envolvendo a função de sub-ação: a função de sub-ação foi obtida em [1] para o caso de M dado pelo círculo unidimensional S^1 e f dada por $f(x) = 2x(\text{mod } 1)$. Após, em [2], obteve-se funções de sub-ação para f dada por uma função estritamente expansora (hiperbólica) também no círculo unidimensional S^1. Em [6], M passa a ser uma variedade riemanniana de dimensão maior ou igual a 2, e uma função de sub-ação é obtida para o caso onde f é um difeomorfismo hiperbólico transitivo de Anosov. Analisando aplicações da função de sub-ação no estudo de medidas maximizadoras, temos em [2, 6] a função de sub-ação S sendo usada para provar que, para A pertencente a um certo subconjunto do conjunto de todas as funções α-Hölder, genérico na topologia α-Hölder , então existe uma única medida maximizadora μ_A que tem suporte em uma órbita periódica. Em [1] tem-se observáveis parametrizados por um número real, e μ_A é única e concentrada em uma órbita periódica para todos os parâmetros fora de um conjunto de medida de Lebesgue zero e dimensão de Hausdorff zero. Resultados relacionados aparecem em [5, 7].

Neste trabalho, mostramos no caso unidimensional (seção 2) que, dado o observável $\alpha-$Hölder em cada ramo injetor de f, existe uma função de sub-ação que é também $\alpha-$Hölder em $[0, 1]$. (Teorema 1 para a regularidade, Lema 1 e observações posteriores para a existência.) Entao, na seção 3, mostramos como a função S pode ser usada para provar que, se existe uma única medida maximizadora, então esta medida é unicamente ergódica (ver seção 3 para definição de medida unicamente ergódica). Note que não temos nenhum resultado que garanta a unicidade da medida maximizadora. Mas em muitos outros casos a medida maximizadora é única, como em [1, 2, 6], o que faz desta hipótese algo bastante razoável. Já a existência de medidas maximizadoras é garantida quando estamos trabalhando com sistemas dinâmicos contínuos em conjuntos compactos. É o caso da função f definida em $[0, 1]$ quando identificamos os pontos 0 e 1 (ver [2]).

No caso bidimensional, partindo de um observável A, que é também α-Hölder, vamos provar (seção 4) que existe uma função de sub-ação S que é $\alpha/C-$Hölder, onde C é uma constante maior do que 1. (Teorema 2 para a regularidade, Lema 6 e observações anteriores para a existência.) Na primeira parte da prova deste resultado as idéias são parecidas com o caso unidimensional, mas na segunda parte as técnicas são bem diferentes. A função S é usada então para provar, de forma bastante semelhante ao caso unidimensional, que a medida maximizadora, se única, é tambem unicamente ergódica (Corolario 2). Note que as funções B e S, sendo funções Hölder, podem ser extendidas ao conjunto compacto $[0, 1] \times [0, 1]$, com S ainda satisfazendo a equação de sub-cohomologia.

Parte significativa deste trabalho foi publicada em [10]. Uma excelente referência geral sobre Teoria Ergódica pode ser encontrada em [8]. Outra obra que merece ser citada é [11]. Para um tratamento bastante completo da teoria de sistemas dinâmicos, em especial os sistemas dinâmicos hiperbólicos, uma ótima referencia é [4].

2. A Função de Sub-Ação no Caso Unidimensional

Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função de grau 2, contínua e sobrejetiva em cada um dos intervalos $[0,c]$ e $(c,1]$ (onde c é uma constante em $(0,1)$), com

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(c) = 1 \quad , \quad f(1) = 1 \;\text{ e }\; \lim_{x \to c^+} f(x) = 0.$$

f é portanto crescente (e sobrejetora) em cada ramo injetivo $[0,c]$ e $(c,1]$. Suponha que f é também diferenciável de classe C^1 em $[0,c]$ e $[c,1]$, com $f'(x) > 1$ para todo x nos intervalos $(0,c)$ e $(c,1)$, e que as derivadas laterais em zero, c e um são

$$f'_+(0) = 1 \quad , \quad f'_-(c) > 1 \quad , \quad f'_+(c) > 1 \;\text{ e }\; f'_-(1) > 1.$$

Nessas condições $x = 0$ é um chamado ponto fixo indiferente e temos

$$\inf \{ f'(x) \;\mid\; x \in [\delta, 1) \backslash \{c\} \} > 1 \text{ para todo } \delta > 0.$$

Seja agora $A : [0,1] \to I\!R$ uma função que é $\alpha-$Hölder em cada um dos intervalos $[0,c]$ e $(c,1]$, i.e., suponha que exista uma constante $\mathrm{Hol}_\alpha(A) > 0$ tal que

$$|A(x) - A(y)| < \mathrm{Hol}_\alpha(A) d(x,y)^\alpha$$

se $x \neq y$ e ambos pertencem ao mesmo intervalo $[0,c]$ ou $(c,1]$. (aqui $d(x,y)$ representa a distância usual na reta, dada por $|x-y|$.) Vamos também supor que A é monótona (crescente ou decrescente) ou constante em uma pequena vizinhança de $x = 0$. Como última hipótese, suporemos que $A(0) < m$ e $A(1) < m$, onde

$$m = \sup \left\{ \int A d\mu \;\mid\; \mu \text{ é uma medida de probabilidade invariante para } f \right\}.$$

A última hipótese, de que $A(0) < m$ e $A(1) < m$, equivale a hipótese de nenhuma das medidas invariantes dadas por deltas de Dirac nos pontos fixos (em 0 e em 1) ser uma medida maximizadora. Tais casos não apresentam interesse pois tratam-se evidentemente de pontos fixos.

Note que, como consequência das hipóteses exigidas para A, temos a existência de uma constante $\delta > 0$, que sera fixada aqui e usada em toda a seção 2, e que satisfaz as seguintes três condições:

(i) $A(x) < m - \frac{|A(0)-m|}{2} \quad \forall x \in [0, \delta]$.

(ii) $A(x) < m - \frac{|A(1)-m|}{2} \quad \forall x \in [1-\delta, 1]$.

(iii) A é monótona crescente ou decrescente ou constante em $[0, 3\delta]$.

Um exemplo interessante de função A satisfazendo as hipóteses acima é dado por $A(x) = \log(f'(x))$. Neste caso estamos analisando o expoente de Lyapunov de medidas de probabilidade invariantes para f, e assumimos que f é de classe $C^{1+\alpha}$ em cada ramo injetor.

Vamos agora introduzir o conceito de cilindros e provar um resultado simples, que será usado várias vezes neste trabalho.

Dados $z \in [0,1]$ e $n \in I\!N$, vamos definir $(a_0 a_1 a_2 ... a_n)$, onde $a_i = 0$ ou 1, para todo $0 \leq i \leq n$, como o cilindro de tamanho $n+1$ que contém z: por definição,

$$z \in (a_0 a_1 a_2 ... a_n) \iff f^i(z) \in (a_i) \, \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\},$$

onde

$$(0) = [0, c] \ \text{ e } \ (1) = (c, 1].$$

Vamos chamar de tamanho do cilindro o número de iterados controlados, e comprimento do cilindro o seu comprimento visto como um intervalo da reta real: por exemplo, o cilindro (1011) terá tamanho 4 mas comprimento inferior a 1.

Afirmação: O comprimento dos cilindros tende a zero à medida que seu tamanho aumenta: mais especificamente, se $\{a_i\}_{i \geq 0}$ é uma sequência formada pelos dígitos zero e um, definindo c_n como o cilindro de tamanho $n+1$ dado por $(a_0 a_1 ... a_n)$ e $l(c_n)$ o seu comprimento como intervalo da reta real, vemos imediatamente que $c_{n+1} \subset c_n$, $l(c_n)$ é uma sequência decrescente, e afirmamos que $l(c_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Para demonstrar essa última afirmação, suponha que exista $\delta > 0$ tal que $l(c_n) > 2\delta$ para todo n natural. Logo, existirá para cada n natural dois elementos x_n e y_n pertencentes a c_n tais que $|x_n - y_n| > \delta$. Seja

$$\zeta = \inf \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \ ; \ |x-y| \geq \delta \ ; \ x \text{ e } \ y \in (0) \ \text{ ou } x \text{ e } y \in (1) \right\}.$$

Então, tomando δ pequeno, se necessário, teremos $\zeta > 1$, e, como para todo $0 \leq k \leq n$ temos que $f^k(x_n)$ e $f^k(y_n)$ estão no mesmo ramo injetor de f e distam entre si ao menos δ, teremos

$$|f^k(x_n) - f^k(y_n)| > \zeta^k |x_n - y_n| \ \ \forall \ \ k \ \in \ \{0, 1, ..., n\}.$$

Mas x_n e y_n estão no mesmo cilindro c_n, e portanto $f^n(x_n)$ e $f^n(y_n)$ estão ambos em (0) ou em (1). Então

$$|f^n(x_n) - f^n(y_n)| < \max\{c, 1-c\}.$$

Como consequência, teremos

$$|x_n - y_n| < \frac{\max\{c, 1-c\}}{\zeta^n}.$$

o que resulta em um absurdo visto que $|x_n - y_n| > \delta$ para todo n natural. Está completa a demonstração da afirmação.

Seguindo [2], para podermos definir uma função de sub-ação S, vamos precisar do Lema 1 a seguir.

Lema 1 *Existe uma constante $M \geq 0$ tal que, para todo $z \in [0,1]$ e todo $n \in I\!N$, temos:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(A\left(f^i(z)\right) - m \right) < M.$$

Demonstração: A demonstração será feita no caso onde A é crescente ou constante em uma vizinhança de zero. O caso em que A é decrescente apresenta prova análoga.

Seja $z \in [0,1]$ e $n \in I\!N$. Seja $(a_0 a_1 ... a_n)$ o cilindro de tamanho $n+1$ contendo z. Vamos definir $\xi = \xi(z,n)$ como o maior elemento no conjunto $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ tal que $a_\xi = 0$. Caso $a_i = 1 \ \forall i \geq 0$ e $i \leq n-1$, definimos $\xi = -1$.

Se $\xi \geq 0$, temos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(A(f^i(z)) - m \right) = \sum_{i=0}^{\xi} \left(A(f^i(z)) - m \right) + \sum_{i=\xi+1}^{n-1} \left(A(f^i(z)) - m \right).$$

(Se $\xi = -1$, o primeiro somatório é nulo.) Vamos inicialmente obter uma cota superior para o segundo somatório. Sabemos que o conjunto

$$\left\{ f^{\xi+1}(z), f^{\xi+2}(z), ..., f^{n-1}(z) \right\}$$

está inteiramente contido no intervalo $(1)=(c,1]$. Sabemos também que

$$\xi+1\leq j<j+1\leq n-1\ \Rightarrow\ f^{j+1}(z)<f^j(z).$$

Logo existe $\xi+1\leq j_0\leq n-1$ tal que

$$f^j(z)\in(1-\delta,1]\ \text{ se }\ \xi+1\leq j<j_0$$

e

$$f^j(z)\in(c,1-\delta]\ \text{ se }\ j_0\leq j\leq n-1.$$

Afirmamos que, se definirmos $\lambda_1=\inf\{f'(x);\ x\in[c,1]\}$ (note que $\lambda_1>1$), e N_1 for um numero natural que satisfaz $\delta\lambda_1^{N_1}>1-c$, então

$$\left\{f^{\xi+1}(z),f^{\xi+2}(z),...,f^{n-1}(z)\right\}\cap(c,1-\delta]=\left\{f^{j_0}(z),f^{j_0+1}(z),...,f^{n-1}(z)\right\}$$

terá no máximo N_1 elementos. Para provar esta afirmação, basta mostrar que $n-j_0\leq N_1$: para isto, note que $|f^{j_0}(z)-1|>\delta$ e, fazendo $k=n-j_0-1$, temos

$$|f^{n-1}(z)-1|=|f^{j_0+k}(z)-1|>\lambda_1^k|f^{j_0}(z)-1|>\delta\lambda_1^k.$$

Como $\delta\lambda_1^{N_1}>1-c$ e $|f^{n-1}(z)-1|<1-c$, temos $k<N_1$, o que equivale a $n-j_0\leq N_1$. Está demonstrada, portanto, a afirmação.

Agora usamos o fato de que

$$f^i(z)\in(1-\delta,1]\implies A(f^i(z))-m<-\frac{|A(1)-m|}{2}<0,$$

para concluirmos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=\xi+1}^{n-1}\big(A(f^i(z))-m\big)&\leq\sum_{\xi+1\leq i\leq n-1\,;\,f^i(z)\notin(1-\delta,1]}\big(A(f^i(z))-m\big)\\&\leq N_1\left(\|A\|-m\right),\end{aligned}$$

onde $\|A\|$ denota a norma do supremo para a função A.

Vamos agora obter uma cota superior para o primeiro somatório, supondo que $\xi\geq 0$. A definição de ξ nos diz que z pertence ao cilindro de tamanho $\xi+1$ dado por $(a_0a_1a_2...a_{\xi-1}0)$. Defina então p como o único ponto periódico de período $\xi+1$ pertencente ao cilindro subsequente de tamanho $\xi+1$ dado por $(a_0a_1a_2...a_{\xi-1}1)$. (Por cilindros subsequentes de tamanho n nos referimos a dois cilindros distintos de mesmo tamanho e com uma fronteira em comum.)

Note que, para todo $i \in \{0, 1, 2, ..., \xi\}$, os pontos $f^i(z)$ e $f^i(p)$ pertencem aos cilindros subsequentes de tamanho $\xi + 1 - i$ dados respectivamentes por $(a_i a_{i+1} a_{i+2} ... a_{\xi-1} 0)$ e $(a_i a_{i+1} a_{i+2} ... a_{\xi-1} 1)$, e portanto

$$f^i(z) < f^i(p) \ \text{ para todo } \ i \in \{0, 1, 2, ..., \xi\}.$$

Ainda, os pontos $f^i(z)$ e $f^i(p)$ pertencem ao mesmo cilindro de tamanho $\xi - i$ dado por $(a_i a_{i+1} a_{i+2} ... a_{\xi-1})$, e portanto existe $N_2 \in I\!N$ (dependendo só de f) tal que (no caso $\xi \geq N_2$)

$$d(f^i(p), f^i(z)) < \delta \ \text{ para todo } \ i \leq \xi - N_2.$$

Isto vem do fato do comprimento dos cilindros tender a zero quando seu tamanho cresce: basta tomar $N_2 \in I\!N$ tal que o comprimento de qualquer cilindro de tamanho maior ou igual a N_2 seja inferior a δ.

Se $\xi < N_2$ então temos $\sum_{i=0}^{\xi} (A(f^i(z)) - m)) \leq N_2(\|A\| - m)$ e portanto estabelecemos a cota superior prometida para o primeiro somatório.

Analisemos então o caso $\xi \geq N_2$: Considerando que p é um ponto periódico, a medida

$$\mu_p = \frac{1}{\xi + 1} \sum_{i=0}^{\xi} \delta_{f^i(p)}$$

(onde δ_q é a medida de Dirac concentrada em q) é uma medida de probabilidade invariante para f. Logo integrando o observável A com relação a esta medida temos

$$\sum_{i=0}^{\xi} A(f^i(p)) = (\xi + 1) \int A d\mu_p \leq m(\xi + 1).$$

Portanto

$$\sum_{i=0}^{\xi} \big(A(f^i(p)) - m\big) \leq 0,$$

e temos então

$$\sum_{i=0}^{\xi} \big(A(f^i(z)) - m\big) \ \leq \ \sum_{i=0}^{\xi} \big(A(f^i(z)) - m\big) - \sum_{i=0}^{\xi} \big(A(f^i(p)) - m\big) =$$

$$= \sum_{i=\xi-N_2+1}^{\xi} \big(A(f^i(z)) - A(f^i(p))\big) + \sum_{0 \leq i \leq \xi - N_2\, ;\, f^i(z) \leq 2\delta} \big(A(f^i(z)) - A(f^i(p))\big) +$$

$$+ \sum_{0 \le i \le \xi - N_2 \, ; \, f^i(z) > 2\delta} \big(A(f^i(z)) - A(f^i(p)) \big) \, .$$

O primeiro somatório acima é limitado por $2N_2 \|A\|$.

Para limitar o segundo somatório, vemos que se $0 \le i \le \xi - N_2$ e $f^i(z) \le 2\delta$, então $f^i(p) < 3\delta$. Portanto temos $f^i(z) < f^i(p) < 3\delta$, e como no intervalo $(0, 3\delta)$ o observável A é crescente ou constante, temos $A(f^i(z)) - A(f^i(p)) \le 0$. Logo o segundo somatório acima é negativo (ou nulo).

Para obtermos uma cota superior para o terceiro somatório, vamos renomear os elementos do conjunto $\{0 \le i \le \xi - N_2 \; ; \; f^i(z) > 2\delta\}$ como $b_1, b_2, ..., b_\eta$, onde η é o número total de elementos deste conjunto e $b_{k+1} > b_k$ para todo $k \in \{1, 2, ..., \eta - 1\}$. Como $f^{b_k}(p) > f^{b_k}(z) > 2\delta$ para todo $k \in \{1, 2, ..., \eta\}$, temos que

$$d\left(f^{b_{k+1}}(p), f^{b_{k+1}}(z)\right) \ge d\left(f^{b_k+1}(p), f^{b_k+1}(z)\right) > \gamma d\left(f^{b_k}(p), f^{b_k}(z)\right),$$

onde $\gamma = \inf\{f'(x); x \in (2\delta, 1]\} > 1$ e a primeira desigualdade segue do fato de f ser expansora em cada ramo injetivo e $b_{k+1} \ge b_k + 1$.

Portanto, para todo $k \in \{1, 2, ..., \eta\}$, temos:

$$d\left(f^{b_k}(p), f^{b_k}(z)\right) < \frac{d\left(f^{b_\eta}(p), f^{b_\eta}(z)\right)}{\gamma^{\eta-k}} < \frac{1}{\gamma^{\eta-k}}$$

e

$$\sum_{0 \le i \le \xi - N_2 \, ; \, f^i(z) > 2\delta} \big(A(f^i(z)) - A(f^i(p)) \big) < \mathrm{Hol}_\alpha(A) \sum_{k=1}^{\eta} d\left(f^{b_k}(p), f^{b_k}(z)\right)^\alpha <$$

$$< \mathrm{Hol}_\alpha(A) \sum_{k=1}^{\eta} \left(\frac{1}{\gamma^{\eta-k}} \right)^\alpha < \mathrm{Hol}_\alpha(A) \frac{1}{1 - (1/\gamma)^\alpha}$$

e então temos cotas superiores (que não dependem de z ou n) para cada um dos três somatórios acima, o que completa a prova do Lema 1.

Vamos agora definir a função de sub-ação: para isto, seguindo [2], definimos a função $S : [0,1] \to I\!R$ como:

$$S(x) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \big(A(f^i(z)) - m \big) \;\; | \;\; f^n(z) = x \;\; \text{e} \;\; n \in I\!N \right\}$$

para todo $x \in (0,1]$, e $S(0) = \lim_{x\to 0^+} S(x)$. O Lema 1, que acabamos de demonstrar, nos mostra que $S(x) \leq M$ $,\forall\ x \in (0,1]$. Vamos provar no Teorema 1, a seguir, que S restrito a $(0,1]$ é uma função α-Hölder, e portanto o limite que define $S(0)$ existe. S é então uma função bem definida no intervalo $[0,1]$, sendo α-Hölder . (Note que zero é o único ponto que não tem duas pré-imagens inversas.) Note também que S satisfaz a equação de sub-cohomologia:

$$S\left(f(x)\right) \geq S(x) + A(x) - m\ ,\ \forall x \in [0,1].$$

Antes de provarmos que S é α-Hölder, vamos provar o seguinte Lema, uma consequência do Lema 1 e da hipótese de que $A(0) < m$:

Lema 2 *Existe $N_0 \in I\!N$, dependendo apenas de f e de A, com a seguinte propriedade: Se x e z pertencem a $(0,1]$, $n \in I\!N$, $f^n(z) = x$ e*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \big(A(f^i(z)) - m\big) > S(x) - 1,$$

então para todo $j \leq n - N_0 + 1$ o conjunto

$$\left\{f^j(z), f^{j+1}(z), f^{j+2}(z), ..., f^{j+N_0-1}(z)\right\}$$

tem ao menos um elemento que não pertence ao intervalo $(0,\delta)$.

Em outras palavras, uma imagem inversa de x que aproxima $S(x)$ não poderá permanecer mais do que N_0 iterados seguidos em $(0,\delta)$.

Demonstração:

Seja
$$\gamma_0 = \frac{|A(0) - m|}{2}.$$
Lembre que fizemos a hipótese de que $A(x) < m - \gamma_0$ para todo x em $[0,\delta)$. Seja $N_0 \in I\!N$ tal que $N_0\gamma_0 > 2M + 1 - \inf(S)$.

Faremos a demonstração por contradição: Suponha que existem x, z, n, com $f^n(z) = x$ e $j \leq n - N_0 + 1$ tais que

$$\left\{f^j(z), f^{j+1}(z), f^{j+2}(z), ..., f^{j+N_0-1}(z)\right\} \subseteq (0,\delta),$$

então
$$\sum_{i=j}^{j+N_0-1}\big(A(f^i(z))-m\big) < -N_0\gamma_0 < -2M-1+\inf(S).$$
Agora usando o fato de que
$$S(x)-1 < \sum_{i=0}^{n-1}\big(A(f^i(z))-m\big) =$$
$$= \sum_{i=0}^{j-1}\big(A(f^i(z))-m\big) + \sum_{i=j}^{j+N_0-1}\big(A(f^i(z))-m\big) + \sum_{i=j+N_0}^{n-1}\big(A(f^i(z))-m\big)\,,$$
teremos
$$\sum_{i=0}^{j-1}\big(A(f^i(z))-m\big) + \sum_{i=j+N_0}^{n-1}\big(A(f^i(z))-m\big) >$$
$$> S(x)-1-\sum_{i=j}^{j+N_0-1}\big(A(f^i(z))-m\big) > S(x)-1+2M+1-\inf(S) \geq 2M,$$
o que é uma contradição, visto que pelo Lema 1 temos que
$$\sum_{i=0}^{j-1}\big(A(f^i(z))-m\big) < M \quad \text{e} \quad \sum_{i=j+N_0}^{n-1}\big(A(f^i(z))-m\big) < M.$$

Portanto, completamos a demonstração do Lema 2.

Teorema 1 *A função S definida acima é α-Hölder: existe uma constante $Hol_\alpha(S)>0$ tal que, se x e y são dois elementos quaisquer em $[0,1]$, temos:*
$$|S(x)-S(y)| < Hol_\alpha(S)d(x,y)^\alpha\ .$$

Demonstração: A prova será feita para a função S restrita ao intervalo semi-aberto $(0,1]$. Como consequência, teremos que o limite definindo $S(0)$ existe e portanto S é α-Hölder no intervalo fechado $[0,1]$.

Sejam x e y em $(0,1]$. Sem perda de generalidade, vamos supor $S(x)\geq S(y)$. Dado $\epsilon>0$, sejam $z\in(0,1]$ e $n\in I\!N$ tais que $f^n(z)=x$ e

$$\sum_{i=0}^{n-1}\big(A(f^i(z))-m\big) > S(x)-\epsilon.$$

Seja $(a_0a_1a_2...a_n)$ o cilindro de tamanho $n+1$ contendo z. Seja $w \in (0,1]$ o único elemento tal que $f^n(w) = y$ e $w \in (a_0a_1a_2...a_{n-1}b)$, onde $b = 0$ se $y \in [0,c]$ e $b = 1$ se $y \in (c,1]$. Temos

$$\sum_{i=0}^{n-1}\big(A(f^i(w))-m\big) \le S(y)$$

e portanto

$$|S(x)-S(y)| = S(x)-S(y) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\big(A(f^i(z))-m\big) - \sum_{i=0}^{n-1}\big(A(f^i(w))-m\big) + \epsilon <$$

$$< \mathrm{Hol}_\alpha(A)\sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(z),f^i(w))^\alpha + \epsilon = \mathrm{Hol}_\alpha(A)\sum_{i=1}^{n} d_i + \epsilon <$$

$$< \mathrm{Hol}_\alpha(A)\sum_{i=0}^{n-1} d_i + \epsilon,$$

onde $d_i \equiv d(f^{n-i}(z), f^{n-i}(w))^\alpha$ e a última desigualdade vem do fato da sequência $\{d_i\}_{i=0}^n$ ser decrescente .

Vamos então tratar o último somatório $\sum_{i=0}^{n-1} d_i$ acima. Antes disso, atente para a observação de que $f^i(z)$ e $f^i(w)$ estão no mesmo cilindro $(a_ia_{i+1}a_{i+2}...a_{n-1})$ de tamanho $n-i$. Portanto, se usarmos novamente o fato de que o comprimento dos cilindros tende a zero quando seu tamanho aumenta, podemos obter um número natural N_3, dependendo apenas de f , tal que

$$d(f^i(z),f^i(w)) < \frac{\delta}{2} \text{ para todo } i \le n-N_3.$$

Seja $N = \max\{N_0, N_3\}$. Note que N depende apenas de f e de A. Se $n < N$, temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i < Nd_0 = Nd(x,y)^\alpha,$$

e o Teorema está provado. Vamos portanto considerar, a partir de agora, que $n \ge N$. Sendo assim, temos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i \leq N\left(d_0 + d_N + d_{2N} + ... + d_{pN}\right),$$

onde p é o maior inteiro menor ou igual a n/N.

Como $N \geq N_0$, o Lema 2 nos garante que, para todo $k \geq 1$, o conjunto de índices

$$\{n-(k+1)N, n-(k+1)N+1, ..., n-kN-1\},$$

que tem N elementos, contém algum índice q tal que $f^q(z)$ não pertence a $[0,\delta)$. Ainda, se $k \geq 1$ temos $q < n - N_3$ e portanto $d(f^q(z), f^q(w)) < \frac{\delta}{2}$. As duas últimas informações nos mostram que $f^q(z)$ e $f^q(w)$ ambos pertencem a $(\frac{\delta}{2}, 1]$. Portanto, fazendo

$$\lambda = \inf\{f\,'(x); x \in [\frac{\delta}{2}, 1]\},$$

temos

$$d(f^{q+1}(z), f^{q+1}(w)) > \lambda d(f^q(z), f^q(w)).$$

Agora, usando o fato de que f é expansora em cada ramo inverso, e de que

$$n - kN \geq q + 1 > q \geq n - (k+1)N,$$

temos

$$d(f^{n-kN}(z), f^{n-kN}(w)) \geq d(f^{q+1}(z), f^{q+1}(w)) >$$
$$> \lambda d(f^q(z), f^q(w)) \geq \lambda d(f^{n-(k+1)N}(z), f^{n-(k+1)N}(w)) \quad \forall k \geq 1,$$

o que faz com que $d_{kN} > \lambda^\alpha d_{(k+1)N}$ para todo $k \geq 1$. Como consequência temos

$$d_{(k+1)N} \leq \frac{d_N}{\lambda^{k\alpha}} \leq \frac{d_0}{\lambda^{k\alpha}} \quad \forall k \geq 1.$$

Logo

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i \leq N\left(d_0 + d_N + d_{2N} + ... + d_{pN}\right) < N\left(d_0 + d_0 + \frac{d_0}{\lambda^\alpha} + \frac{d_0}{\lambda^{2\alpha}} + ...\right) =$$

$$= N\left(d_0 + \frac{d_0}{1 - 1/\lambda^\alpha}\right) = \frac{2\lambda^\alpha - 1}{\lambda^\alpha - 1} N d(x,y)^\alpha.$$

e portanto temos

$$|S(x) - S(y)| < \mathrm{Hol}_\alpha(A) \sum_{i=0}^{n-1} d_i + \epsilon < \mathrm{Hol}_\alpha(A) \frac{2\lambda^\alpha - 1}{\lambda^\alpha - 1} N d(x,y)^\alpha + \epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $S(x)$ é α-Hölder com constante de Hölder dada por

$$\mathrm{Hol}_\alpha(S) = \mathrm{Hol}_\alpha(A) \frac{2\lambda^\alpha - 1}{\lambda^\alpha - 1} N,$$

(onde N depende apenas de f e de A), e portanto concluimos a prova do Teorema 1.

3. Medidas Maximizadoras

Seja $R = S \circ f - S - A + m$. Como consequência da equação de sub-cohomologia

$$S\left(f(x)\right) \geq S(x) + A(x) - m,$$

temos $R(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Lema 3 *Definindo*

$$G = \{x \in [0,1] \ ; \ R(x) = 0\},$$

então se μ for qualquer medida maximizadora, seu suporte supp(μ) estará contido em $G \cup \{c\}$.

Demonstração: Suponha que $x \in \text{supp}(\mu)$ e que $x \neq c$: Vamos supor que $x \notin G$ e obter uma contradição: Para isto, note que R é continua em $[0,c) \cup (c,1]$, e portanto do fato de $x \notin G$ temos que $R(x) > 0$ e da continuidade temos a existência de $\gamma > 0$ tal que

$$R(z) > 0 \ \ , \ \forall z \in B(x,\gamma) \equiv \{z \in [0,1] \ ; |z - x| < \gamma\}.$$

Portanto $B(x,\gamma)$ está contido em G^C, o complementar de G, e logo temos

$$\mu(G^C) \geq \mu(B(x,\gamma)) > 0 \ .$$

Agora, lembrando que $R > 0$ em G^C, temos

$$\int R d\mu = \int_{G^c} R d\mu > 0 \ .$$

Mas por outro lado, usando a definição de R temos

$$\int R d\mu = -\int A d\mu + m \ ,$$

o que implica

$$\int A d\mu < m \ ,$$

e temos então uma contradição visto que μ é uma medida maximizadora. Portanto a prova do Lema 3 está completa.

Como consequência, mostraremos que se o funcional linear $\mu \to \int A d\mu$ atinge seu máximo em um único ponto, que chamaremos de μ_A, então esta medida maximizadora μ_A é unicamente ergódica.

Antes de definirmos medida unicamente ergódica, algumas notações: se for dado um sistema dinâmico $f : M \to M$, denotamos por $\text{supp}(\nu)$ o suporte de ν, ou seja, o menor subconjunto fechado de M que tem massa ν total. Denotamos tambem por f_ν a restrição de f a $\text{supp}(\nu)$.

Definição: Dado um sistema dinâmico $f : M \to M$, uma medida invariante ν será unicamente ergódica se e somente se f_ν possuir uma única medida invariante, dada pela própria ν (restrita a $\text{supp}(\nu)$).

Qualquer medida unicamente ergódica é trivialmente ergódica. Orbitas periódicas nos dão o melhor exemplo de medida unicamente ergódica. Já uma medida ergódica absolutamente contínua não é, em geral, unicamente ergódica, pois seu suporte costuma conter vários órbitas períodicas.

Corolário 1 *Se A possui uma única medida maximizadora μ_A , então μ_A é unicamente ergódica.*

Demonstração: Seja μ invariante para f_A: Note primeiro que

$$\mu(\{c\}) = 0.$$

para provar esta afirmação basta notar que se $\mu(\{c\}) > 0$ então $\mu(f^{-k}(c)) = \mu(\{c\})$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e portanto o conjunto $\cup_{k \geq 0}\{f^{-k}(c)\}$ teria de ser finito, o que é impossivel visto que c não é um ponto periódico. Portanto $\mu(\{c\}) = 0$, o que junto ao Lema 3 nos permite afirmar que

$$\int_{supp(\mu_A)} R d\mu = 0.$$

Mas por outro lado, da definição de R temos

$$\int_{supp(\mu_A)} R d\mu = -\int A d\mu + m,$$

e portanto

$$\int A d\mu = m,$$

o que faz com que $\mu = \mu_A$, já que estamos supondo que a medida maximizadora é unica. Logo temos também uma única medida maximizadora para f_A, e a prova do Corolário 1 está completa.

4. O Caso Bidimensional

Vamos agora passar à segunda classe de sistemas dinâmicos analisada neste trabalho. Trata-se de uma versão fracamente hiperbólica da Baker Map. A Baker Map, que é definida por $F : [0,1) \times [0,1) \to [0,1) \times [0,1)$, onde

$$F(x,y) = \begin{cases} (2x, y/2) & \text{se} \quad x < 1/2 \\ \\ (2x-1, 1/2 + y/2) & \text{se} \quad x \geq 1/2 \,, \end{cases}$$

é uma versão simplificada dos sistemas hiperbólicos em dimensão 2, tendo uma direção que é exponencialmente expandida e outra que é exponencialmente contraída. A função B que iremos definir tem um ponto fixo indiferente na origem, e portanto pode ser vista como uma versão simplificada de sistemas bidimensionais bijetivos que apresentam pontos fixos indiferentes.

De agora em diante vamos considerar a função f das seções anteriores como definida no intervalo $[0,1)$, com $f(c) = 0$. Todas as outras características da função f, que foram definidas na seção 2, serão mantidas. Esta pequena mudança não causará nenhum problema no que se segue, pois em nenhuma das demonstrações desta seção faremos uso de resultados das seções anteriores. Vamos também considerar nesta seção duas outras funções

$$g_a : [0,1) \to [0,d) \;\text{ e }\; g_b : [0,1) \to [d,1)$$

(onde d é uma constante em $(0,1)$), que vamos supor serem C^1, com

$$g_a(0) = 0 \;\;,\;\; \lim_{x \to 1^-} g_a(x) = d \;\;,\;\; g_b(0) = d \;\text{ e }\; \lim_{x \to 1^-} g_b(x) = 1,$$

e que existe uma constante $\beta > 1$ tal que

$$0 < g_a'(x) < 1/\beta \;\text{ e }\; 0 < g_b'(x) < 1/\beta \;\; \forall x \in (0,1).$$

(Note que essas funções podem ser vistas como os ramos inversos de uma função estritamente expansora de grau 2 em $[0,1)$.) Vamos definir $B : [0,1) \times [0,1) \to [0,1) \times [0,1)$ como

$$B(x,y) = \begin{cases} (f(x), g_a(y)) & \text{se} \quad x < c \\ \\ (f(x), g_b(y)) & \text{se} \quad x \geq c \end{cases}$$

Temos então um mapa bijetor B que contrai a direção vertical por um fator variável mas sempre inferior a $1/\beta$, e que expande fracamente (i.e., sem velocidade exponencial) a direção horizontal, levando

$$[0,c) \times [0,1) \ \text{ a } \ [0,1) \times [0,d) \ \text{ e } \ [c,1) \times [0,1) \ \text{ a } \ [0,1) \times [d,1)$$

(Veja a Figura 1). Note que $(0,0)$ é um ponto fixo indiferente.

Vamos considerar como observável uma função $A : [0,1) \times [0,1) \to \mathbb{R}$ que vamos supor ser $\alpha-$Hölder em todo o quadrado unitário $[0,1) \times [0,1)$. Ou seja, vamos supor que exista uma constante $\mathrm{Hol}_\alpha(A) > 0$ tal que

$$|A(x) - A(y)| < \mathrm{Hol}_\alpha(A) d(x,y)^\alpha \ , \ \forall \ x \text{ e } y \in [0,1) \times [0,1).$$

(Nessa seção $d(x,y)$ vai representar a distância bidimensional Euclidiana entre x e y.) Vamos também supor que exista $0 < \delta < c/3$ tal que uma das quatro condições seguintes seja satisfeita por A: (Note que essas condições fazem o papel da condição de monotonicidade do caso unidimensional.)

H1: Se $x_1 \leq x_2 \leq 2\delta$ e $y_1 \leq y_2 \leq 2\delta$ então $A(x_1,y_1) \leq A(x_2,y_2)$,

H2: Se $x_1 \leq x_2 \leq 2\delta$ e $y_1 \leq y_2 \leq 2\delta$ então $A(x_1,y_1) \geq A(x_2,y_2)$,

H3: Se $x_1 \leq x_2 \leq 2\delta$ e $y_2 \leq y_1 \leq 2\delta$ então $A(x_1,y_1) \leq A(x_2,y_2)$,

H4: Se $x_1 \leq x_2 \leq 2\delta$ e $y_2 \leq y_1 \leq 2\delta$ então $A(x_1, y_1) \geq A(x_2, y_2)$.

Note que as 4 condições acima são mutuamente exclusivas e, apenas para fins de ilustração, note que são equivalentes a:

H1: Em $[0, 2\delta] \times [0, 2\delta]$ as curvas de nível de A são decrescentes e/ou verticais, com o valor de $A(x, y)$ crescendo a medida que x e y crescem.

H2: Em $[0, 2\delta] \times [0, 2\delta]$ as curvas de nível de A são decrescentes e/ou verticais, com o valor de $A(x, y)$ decrescendo medida que x e y crescem.

H3: Em $[0, 2\delta] \times [0, 2\delta]$ as curvas de nível de A são crescentes e/ou verticais, com o valor de $A(x, y)$ crescendo a medida que x cresce e y decresce.

H4: Em $[0, 2\delta] \times [0, 2\delta]$ as curvas de nível de A são crescentes e/ou verticais, com o valor de $A(x, y)$ decrescendo a medida que x cresce e y decresce.

Agora vamos a uma terceira e última hipótese sobre A. Se

$$m = \sup \left\{ \int A d\mu \ \mid \ \mu \text{ é uma medida invariante para } B \right\},$$

vamos supor que exista uma constante $C_0 < m$ tal que

$$A(0, y) = A(1, y) = C_0 < m \quad \forall y \in [0, 1),$$

onde

$$A(1, y) = \lim_{x \to 1} A(x, y).$$

Note que, como consequência, diminuindo o valor de δ, se necessário, temos

$$A(x, y) < m \ \ \forall x \geq 1 - \delta \text{ e } \forall \ y \geq 1 - \delta.$$

e

$$A(x, y) < m \ \ \forall x \leq \delta \text{ e } \forall \ y \leq \delta.$$

Esta última hipótese, de A ser (a mesma) constante nas laterais de $[0, 1) \times [0, 1)$, é usada apenas para demonstrar o Lema 4, e é necessária pois B é descontínua no conjunto $\{(c, y); y \in [0, 1)\}$. (Note que o Lema 4 também será verdadeiro caso A, ao invés de ser constante nas laterais de $[0, 1) \times [0, 1)$, seja definido nessas laterais de forma a termos $A \circ B$ contínua em $\{(d, y); y \in$

$[0,1)\}$ - nesse caso precisaremos ter $A(0,0) < m$ e $A(1,1) < m$ como hipóteses adicionais.)

A demonstração do Lema 4, bastante diferente de todas as outras que fazemos neste trabalho, faz uso apenas das características de B e de A e continuaria válida mesmo se as hipóteses H1-H4 não fossem obedecidas.

Antes do Lema 4, vamos introduzir a notação a ser utilizada para coordenadas de um vetor e redefinir os cilindros unidimensionais: se $v \in [0,1)\times[0,1)$ vamos denotar por v_x e v_y as coordenadas horizontal e vertical de v. Então teremos

$$p = (p_x, p_y) \ \ , \ \ B^k(p) = (B^k(p)_x, B^k(p)_y) \ \text{ e } \ d(v) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

para exemplificar o uso destas notações. Já os cilindros continuarão representando subconjuntos unidimensionais, com os cilindros de tamanho 1 dados desta vez por

$$(0) \equiv [0,c) \ \text{ e } \ (1) \equiv [c,1).$$

Por $(a_0a_1a_2...a_l)$ onde $a_i = 0$ ou 1, definimos o cilindro de tamanho $l+1$, dado por

$$\{z \in [0,1) \ | \ B^k(z)_x \in (a_k) \ \forall\, 0 \leq k \leq l\}.$$

Note também que, da definição de B, temos

$$B(p)_y = g_a(p_y) \ \text{ se } \ p_x \in (0) \quad \text{e} \quad B(p)_y = g_b(p_y) \ \text{ se } \ p_x \in (1).$$

Lema 4 *Seja*

$$\rho = \sup\{f'(x) \mid x \in [0,1)\}.$$

Sejam v e w elementos de $[0,1)\times[0,1)$. Então $\forall i \in I\!N$ temos

$$|A \circ B^i(v) - A \circ B^i(w)| < 2Hol_\alpha(A)d(v,w)^\alpha(\rho^\alpha)^i.$$

Demonstração do Lema 4:

Seja $i_0 \in \{0,1,2,3,...\}$ tal que $B^i(v)_x$ e $B^i(w)_x$ estão no mesmo cilindro (0) ou (1) para $0 \leq i < i_0$ e

$$B^{i_0}(v)_x < c \leq B^{i_0}(w)_x$$

(No caso $B^{i_0}(v)_x \geq c > B^{i_0}(w)_x$ a demonstração é análoga.)

Então:

(i) se $i \leq i_0$ temos

$$|B^i(v)_x - B^i(w)_x| < \rho^i |v_x - w_x|$$

e

$$|B^i(v)_y - B^i(w)_y| < \frac{1}{\beta^i} |v_y - w_y|$$

pois $B^{i-1}(v)_x$ e $B^{i-1}(w)_x$ estando no mesmo cilindro (0) ou (1) para $i \leq i_0$ implicam que $B^i(v)_y$ e $B^i(w)_y$ serão calculados através do mesmo g_a ou g_b, que são contrações de fator $1/\beta$.

Como $1/\beta^i < 1 < \rho^i$ temos

$$d(B^i(v), B^i(w)) < \rho^i d(v,w) \;\text{ se } i \leq i_0 \tag{1}$$

e portanto

$$|A \circ B^i(v) - A \circ B^i(w)| < Hol_\alpha(A) d(B^i(v), B^i(w))^\alpha <$$
$$< Hol_\alpha(A) d(v,w)^\alpha (\rho^\alpha)^i.$$

(ii) se $i > i_0$, seja $k = i - i_0$. Lembrando que $B^j(p)_x = f^j(p_x)$ para qualquer j natural e qualquer vetor $p \in [0,1) \times [0,1)$, temos

$$B^i(w)_x = B^{i_0+k}(w)_x =$$
$$= |B^{i_0+k}(w)_x - 0| = |f^{k-1}(B^{i_0+1}(w)_x) - f^{k-1}(0)| <$$
$$< |B^{i_0+1}(w)_x - 0| \rho^{k-1} = |f(B^{i_0}(w)_x) - f(c)| \rho^{k-1} <$$
$$< |B^{i_0}(w)_x - c| \rho^k \leq |B^{i_0}(w)_x - B^{i_0}(v)_x| \rho^k \leq$$
$$\leq d(B^{i_0}(v), B^{i_0}(w)) \rho^k < d(v,w) \rho^{i_0+k} = d(v,w) \rho^i.$$

Note que na última desigualdade usamos (1). Temos também:

$$|1 - B^i(v)_x| = |1 - B^{i_0+k}(v)_x| =$$
$$= \lim_{z \to 1^-} |f^{k-1}(z) - f^{k-1}(B^{i_0+1}(v)_x)| <$$
$$< \lim_{z \to 1^-} |z - B^{i_0+1}(v)_x| \rho^{k-1} =$$
$$= |1 - B^{i_0+1}(v)_x| \rho^{k-1} =$$
$$= \lim_{z \to c^-} |f(z) - f(B^{i_0}(v)_x)| \rho^{k-1} <$$

$$= \lim_{z \to c^-} |z - B^{i_0}(v)_x|\rho^k =$$

$$= |c - B^{i_0}(v)_x|\rho^k \leq$$

$$\leq d(B^{i_0}(v), B^{i_0}(w))\rho^k <$$

$$< d(v,w)\rho^{i_0+k} = d(v,w)\rho^i.$$

e portanto:

$$\begin{aligned} B^{i_0+k}(w)_x &< d(v,w)\rho^{i_0+k} = d(v,w)\rho^i \\ |1 - B^{i_0+k}(v)_x| &< d(v,w)\rho^{i_0+k} = d(v,w)\rho^i. \end{aligned} \tag{2}$$

Para facilitar a leitura, no próximo cálculo usaremos a notação $d[v,w]$ para distância euclidiana entre v e w. Após e até o fim deste trabalho, retornamos ao uso da notação $d(v,w)$. Para que o leitor não estranhe o uso da notação para coordenadas de um vetor, a pouco introduzida, que fizemos no cálculo a seguir, é util atentar para a observação trivial de que se z é um número real, e v é um vetor qualquer de $[0,1) \times [0,1)$, então (z, v_y) é o vetor cuja coordenada horizontal é z e cuja coordenada vertical é a mesma de v, e portanto $d[v,(z,v_y)] = |z - v_x|$. Logo:

$$|A \circ B^i(v) - A \circ B^i(w)| \leq$$

$$\leq |A \circ B^{i_0+k}(v) - C_0| + |C_0 - A \circ B^{i_0+k}(w)| =$$

$$= \lim_{z \to 1^-} |A \circ B^{i_0+k}(v) - A(z, B^{i_0+k}(v)_y)| +$$

$$+|A(0, B^{i_0+k}(w)_y) - A \circ B^{i_0+k}(w)| <$$

$$< \lim_{z \to 1^-} Hol_\alpha(A) d[B^{i_0+k}(v), (z, B^{i_0+k}(v)_y)]^\alpha +$$

$$+Hol_\alpha(A) d[(0, B^{i_0+k}(w)_y), B^{i_0+k}(w)]^\alpha =$$

$$< \lim_{z \to 1^-} Hol_\alpha(A) |B^{i_0+k}(v)_x - z|^\alpha + B^{i_0+k}(w)_x^\alpha =$$

$$= Hol_\alpha(A) \left(|1 - B^{i_0+k}(v)_x|^\alpha + B^{i_0+k}(w)_x^\alpha \right) <$$

$$< 2Hol_\alpha(A) d(v,w)^\alpha (\rho^\alpha)^i$$

onde usamos (2) na última desigualdade. Portanto o Lema 4 está demonstrado.

Agora vamos introduzir a função de sub-ação. Seguindo [6], vamos definir $S : [0,1) \times [0,1) \to I\!R$ como

$$S(p) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^i(B^{-n}(q)) - m \big) + \Delta^s(q,p) \mid n \in I\!N \ , \ q_x = p_x \text{ e } q_y \in [0,1) \right\},$$

onde

$$\Delta^s(q,p) = \sum_{i \geq 0} \big(A \circ B^i(q) - A \circ B^i(p) \big) \, .$$

Vamos mostrar no Teorema 2 que S é $\alpha/C-$Hölder, onde

$$C = 1 + log(\rho)/log(\beta).$$

Antes disso, note que $q_x = p_x$ faz com que

$$d(B^i(q), B^i(p)) < d(q,p)/\beta^i \ \forall \ i \in I\!N,$$

e então temos

$$|\Delta^s(q,p)| < Hol_\alpha(A) \sum_{i \geq 0} \left(\frac{1}{\beta^i} \right)^\alpha = \frac{Hol_\alpha(A)}{1 - 1/\beta^\alpha} \, .$$

Essa última desigualdade juntamente com o Lema 6, que será enunciado e provado em breve, nos mostra que S está bem definida. Antes disso, (supondo que S está bem definida), vamos provar que S é uma função de sub-ação, ou seja:

Afirmação: S satisfaz a equação de sub-cohomologia:

$$S \circ B \geq S + A - m.$$

Para demonstrar a afirmação, dado $p \in [0,1) \times [0,1)$, fixe um $\epsilon > 0$, um n natural e um $q \in [0,1) \times [0,1)$ tais que $p_x = q_x$ e

$$\sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^i(B^{-n}(q)) - m \big) + \Delta^s(q,p) > S(p) - \epsilon.$$

Como $q_x = p_x$, temos $B(p)_x = B(q)_x$, e portanto

$$S(B(p)) \geq \sum_{i=0}^{(n+1)-1} \big(A \circ B^i(B^{-(n+1)}(B(q))) - m \big) + \Delta^s(B(q), B(p)).$$

Retirando para fora do símbolo de somatório o seu último elemento e notando que $B^{-(n+1)}(B(q)) = B^{-n}(q)$, temos

$$S(B(p)) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^i(B^{-n}(q)) - m\big) + (A(q) - m) + \Delta^s(B(q), B(p)).$$

Reordenando o lado direito e somando e subtraindo a constante adequada abaixo, temos

$$S(B(p)) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^i(B^{-n}(q)) - m\big) + \Delta^s(B(q), B(p)) +$$

$$+(A(q) - A(p)) - (A(q) - A(p)) + (A(q) - m),$$

o que resulta em

$$S(B(p)) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^i(B^{-n}(q)) - m\big) + \Delta^s(q, p) + A(p) - m >$$

$$> S(p) + A(p) - m - \epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ completamos a demonstração da afirmação.

Antes de passarmos ao Lema 6, um Lema preparatório (Lema 5) faz-se necessário:

Lema 5 *Existe $M_0 > 0$ tal que se $p_0 \in [0,1) \times [0,1)$ e $n_0 \in I\!N$ são tais que*

$$B^k(p_0)_x \in (1)\ \forall k \in \{0, 1, 2, ..., n_0\}$$

então teremos

$$\sum_{i=0}^{n_0-1} \big(A \circ B^i(p_0) - m\big) < M_0.$$

Demonstração do Lema 5: Note inicialmente que, se $k \in \{1, 2, ..., n_0\}$, então

$$B^k(p_0)_y = g_b(B^{k-1}(p_0)_y) = g_b^k((p_o)_y),$$

e portanto

$$1 - B^k(p_0)_y < \frac{1}{\beta^k}(1 - (p_0)_y) < \frac{1}{\beta^k}.$$

Logo se $M_0^1 \in I\!\!N$ satisfaz $(1/\beta)^{M_0^1} < \delta$, teremos que o conjunto

$$\Theta_1 \equiv \{0 \leq k \leq n_0 \mid B^k(p_0)_y < 1 - \delta\}$$

terá no máximo M_0^1 elementos.

Agora, se l é o primeiro elemento de $\{0, 1, 2, ..., n_0\}$ tal que $B^l(p_0)_x < 1-\delta$, então definindo

$$\lambda_0 \equiv \inf\{f'(x) \mid x \in (c, 1)\} > 1$$

teremos

$$|B^{l+k}(p_0)_x - 1| > \lambda_0^k |B^l(p_0)_x - 1| > (1-\delta)\lambda_0^k$$

para todo $k \geq 0$ tal que $l + k \leq n_0$. Portanto se M_0^2 for o primeiro natural a satisfazer

$$(1-\delta)\lambda_0^{M_0^2} > 1 - c,$$

então o conjunto

$$\Theta_2 \equiv \{0 \leq k \leq n_0 \mid B^k(p_0)_x < 1 - \delta\}$$

terá no máximo M_0^2 elementos.

Lembrando agora que $b^k(p_0)_x \geq 1 - \delta$ e $b^k(p_0)_y \geq 1 - \delta$ fazem com que $A \circ B^k(p_0) < m$, teremos

$$\sum_{i=0}^{n_0-1} \big(A \circ B^i(p_0) - m\big) < \sum_{i \in \Theta_1 \cup \Theta_2} \big(A \circ B^i(p_0) - m\big) < (M_0^1 + M_0^2)(\|A\| - m).$$

Logo definindo

$$M_0 = (M_0^1 + M_0^2)(\|A\| - m)$$

completamos a demonstração do Lema 5.

Antes de passarmos ao Lema 6, note que se fixarmos um cilindro qualquer $(a_0 a_1 a_2 ... a_l)$ de $[0, 1)$, existe um único ponto periódico $q \in [0, 1) \times [0, 1)$ tal que

$$B^{l+1}(q) = q \ \text{ e } \ B^k(q)_x \in (a_k) \ \text{ para todo } \ k \in \{0, 1, 2, ..., l\}.$$

Isto decorre do fato que existe um único ponto $q_0 \in [0, 1)$ periódico de periodo $l + 1$ para f contido no cilindro $(a_0 a_1 a_2 ... a_l)$. Logo B^{l+1} restrita a

$$\{(q_0, y) \ \mid \ y \in [0, 1)\}$$

é uma contração de fator $1/(\beta^{l+1})$ e portanto tem um único ponto fixo q, tal que

$$B^k(q)_x = f^k(q_x) = f^k(q_0) \in (a_k).$$

Lema 6 *Existe $M > 0$ tal que, para todo $p \in [0,1) \times [0,1)$ e $n \in I\!N$, temos*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^i(p) - m\big) < M$$

Demonstração: A demonstração será feita sob a hipótese H1, sendo completamente análoga nos demais casos. Ela consiste em aproximarmos a órbita de p com um ponto periódico q de tal forma que os iterados de q, quando próximos da origem, situam-se acima e a direita dos iterados de p correspondentes.

Dados então $p \in [0,1) \times [0,1)$ e $n \in I\!N$, sejam ξ_1 e ξ_2 o menor e o maior elementos no conjunto $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ que satisfazem $B^{\xi_1}(p)_x \in (0)$ e $B^{\xi_2}(p)_x \in (0)$. (consideraremos que existem pelo menos dois elementos distintos em $\{0 \leq k \leq n-1 \mid B^k(p)_x \in (0)\}$, caso contrário o Lema 6 será uma simples consequência do Lema 5. Portanto, temos que ξ_1 e ξ_2 estão bem definidos e $\xi_1 < \xi_2$). Logo

$$p \in (111...110 a_{\xi_1+1} a_{\xi_1+2} ... a_{\xi_2-2} a_{\xi_2-1} 011...1)$$

e

$$\sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^i(p) - m\big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\xi_1-1} \big(A \circ B^i(p) - m\big) + \sum_{i=\xi_1}^{\xi_2} \big(A \circ B^i(p) - m\big) + \sum_{i=\xi_2+1}^{n-1} \big(A \circ B^i(p) - m\big) <$$

$$< 2M_0 + \sum_{i=\xi_1}^{\xi_2} \big(A \circ B^i(p) - m\big)$$

onde a desigualdade é consequência do Lema 5.

Vamos limitar o último somatório acima. Para isso, seja $q \in [0,1) \times [0,1)$ o único ponto periódico para B com período $\xi_2 - \xi_1 + 1$ que satisfaz

$$B^{\xi_1}(q)_x \in (1 a_{\xi_1+1} a_{\xi_1+2} ... a_{\xi_2-2} a_{\xi_2-1} 1).$$

Como

$$B^{\xi_1}(p)_x \in (0 a_{\xi_1+1} a_{\xi_1+2} ... a_{\xi_2-2} a_{\xi_2-1} 0)$$

temos que, $\forall k \in \{\xi_1+1, ..., \xi_2-1\}$, $B^k(p)_x$ e $B^k(q)_x$ estão contidos nos cilindros subsequentes de tamanho $\xi_2 - k + 1$ dados por

$$(a_k a_{k+1} ... a_{\xi_2-2} a_{\xi_2-1} 0) \text{ e } (a_k a_{k+1} ... a_{\xi_2-2} a_{\xi_2-1} 1).$$

Como são subsequentes, temos

$$B^k(p)_x < B^k(q)_x \; \forall k \in \{\xi_1+1, ..., \xi_2-1\}.$$

E usando o fato de que o comprimento dos cilindros tende a zero quando seu tamanho aumenta, obtemos um natural N_5^1, dependendo apenas de B, tal que

$$|B^k(p)_x - B^k(q)_x| < \frac{\delta}{2} \quad \forall k \in \{\xi_1+1, ..., \xi_2 - N_5^1\}.$$

Agora, usando o fato de que $B^{\xi_1}(q)_x \in (1)$ e $B^{\xi_1}(p)_x \in (0)$, temos

$$B^{\xi_1+1}(p)_y = g_a(B^{\xi_1}(p)_y) < d \leq g_b(B^{\xi_1}(q)_y) = B^{\xi_1+1}(q)_y$$

e portanto podemos afirmar que

$$B^k(p)_y < B^k(q)_y \; \forall k \in \{\xi_1+1, ..., \xi_2\},$$

visto que $B^k(p)_y$ e $B^k(q)_y$ são obtidos mediante o mesmo ramo inverso (e crescente) g_a ou g_b, uma vez que $B^{k-1}(p)_x$ e $B^{k-1}(q)_x$ estao no mesmo cilindro (0) ou (1), $\forall k \in \{\xi_1+2, ..., \xi_2\}$. Pela mesma razão podemos concluir que

$$|B^k(p)_y - B^k(q)_y| < \frac{1}{\beta^{k-(\xi_1+1)}} \;\; \forall k \in \{\xi_1+2, ..., \xi_2\}, \tag{3}$$

visto que g_a e g_b são contrações de fator inferior a $1/\beta$. Esta última informação pode ser combinada com a desigualdade que define N_5^1 para nos permitir afirmar a existência de um natural N_5 dependendo apenas de B tal que

$$d(B^k(p), B^k(q)) < \delta \;\; \forall k \in \{\xi_1 + N_5, ..., \xi_2 - N_5\},$$

para isto bastando tomar N_5 maior ou igual a N_5^1 e também satisfazendo $1/\beta^{N_5} < \delta/2$.

Agora, lembrando que q é um ponto periódico com período $\xi_2 - \xi_1 + 1$, temos que $\{B^{\xi_1}(q), ..., B^{\xi_2}(q)\}$ é a órbita completa de q e portanto, da mesma forma como foi feito na demonstração do Lema 1, temos

$$\sum_{i=\xi_1}^{\xi_2} \big(A \circ B^i(q) - m\big) \leq 0.$$

Logo

$$\sum_{i=\xi_1}^{\xi_2}\big(A\circ B^i(p)-m\big)\leq\sum_{i=\xi_1}^{\xi_2}\big(A\circ B^i(p)-m\big)-\sum_{i=\xi_1}^{\xi_2}\big(A\circ B^i(q)-m\big)=$$

$$=\sum_{i=\xi_1}^{\xi_2}\big(A\circ B^i(p)-A\circ B^i(q)\big)<4N_5\|A\|+\sum_{i=\xi_1+N_5}^{\xi_2-N_5}\big(A\circ B^i(p)-A\circ B^i(q)\big)$$

Vamos então limitar o último somatório. Para isso, sejam

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{\xi_1+N_5\leq i\leq\xi_2-N_5 \mid B^i(p)\in[0,\delta]\times[0,\delta]\},\\
\Omega_2 &= \{\xi_1+N_5\leq i\leq\xi_2-N_5 \mid B^i(p)\in[0,\delta]\times(\delta,1)\},\\
\Omega_3 &= \{\xi_1+N_5\leq i\leq\xi_2-N_5 \mid B^i(p)\in(\delta,1)\times[0,1)\}.
\end{aligned}$$

Se $i\in\Omega_1$, então, usando o fato de que $d(B^i(p),B^i(q))<\delta$, temos

$$B^i(p)_x<B^i(q)_x<2\delta \ \text{ e } \ B^i(p)_y<B^i(q)_y<2\delta,$$

e portanto temos $A\circ B^i(p)-A\circ B^i(q)\leq 0$ como consequência da hipótese H1. Portanto

$$\sum_{i=\xi_1+N_5}^{\xi_2-N_5}\big(A\circ B^i(p)-A\circ B^i(q)\big)\leq\sum_{i\in\Omega_2\cup\Omega_3}\big(A\circ B^i(p)-A\circ B^i(q)\big)<$$

$$<Hol_\alpha(A)\sum_{i\in\Omega_2\cup\Omega_3}d(B^i(p),B^i(q))^\alpha<$$

$$<Hol_\alpha(A)\left(\sum_{i\in\Omega_2\cup\Omega_3}|B^i(p)_x-B^i(q)_x|^\alpha+\sum_{i\in\Omega_2\cup\Omega_3}|B^i(p)_y-B^i(q)_y|^\alpha\right)<$$

$$<Hol_\alpha(A)\left(\sum_{i\in\Omega_2\cup\Omega_3}|B^i(p)_x-B^i(q)_x|^\alpha+\frac{1}{1-(\frac{1}{\beta})^\alpha}\right).$$

onde na última desigualdade usamos (3).

Logo, para terminarmos a demonstração do Lema 6, basta exibirmos uma cota superior para

$$\sum_{i\in\Omega_2\cup\Omega_3}|B^i(p)_x-B^i(q)_x|^\alpha=\sum_{i\in\Omega_2}|B^i(p)_x-B^i(q)_x|^\alpha+\sum_{i\in\Omega_3}|B^i(p)_x-B^i(q)_x|^\alpha$$

Analisando inicialmente o somatório em Ω_2, notamos que se fixarmos um natural N_6 tal que $1/\beta^{N_6} < \delta$, então nenhuma órbita pode passar mais do que N_6 iterados seguidos em $[0, \delta) \times (\delta, 1)$. Isso pode ser provado se notarmos que se $\{j, j+1, j+2, ..., j+k\}$ esta contido em Ω_2, então temos

$$B^{j+k}(p)_y = |g_a^k(B^j(p)_y) - g_a^k(0)| < 1/\beta^k.$$

como $B^{j+k}(p)_y > \delta$, temos $1/\beta^k > \delta$, o que implica $k < N_6$.

Agora, no momento em que a órbita de p deixa o conjunto $[0, \delta) \times (\delta, 1)$, então, em algum momento antes de retornar a este conjunto, teremos ambas as órbitas de p e de q em $[\delta, 1) \times [0, 1)$, e portanto a distância horizontal entre estas órbitas será multiplicada por uma constante maior do que

$$\theta \equiv \inf\{f'(x) \mid x \in [\delta, 1)\} > 1.$$

Então teremos

$$\sum_{i \in \Omega_2} |B^i(p)_x - B^i(q)_x|^\alpha < N_6 \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\alpha k} < \frac{N_6}{1 - 1/\theta^\alpha} .$$

Vamos agora ao somatório em Ω_3: Inicialmente notamos que $B^i(p)_x = f^i(p_x)$ e $B^i(q)_x = f^i(q_x)$, e portanto

$$\sum_{i \in \Omega_3} |B^i(p)_x - B^i(q)_x|^\alpha = \sum_{i \in \Omega_3} |f^i(p_x) - f^i(q_x)|^\alpha.$$

Renomeamos os elementos de Ω_3 de forma a termos $\Omega_3 = \{b_1, b_2, ..., b_\varphi\}$ onde $b_{j+1} > b_j \ \forall j \in \{1, 2, ..., \varphi - 1\}$ e φ é o número de elementos de Ω_3. Como

$$f^{b_j}(q_x) > f^{b_j}(p_x) > \delta \ \forall j \in \{1, 2, ..., \varphi - 1\}$$

e f é expansora nos seus ramos injetores, temos que

$$|f^{b_{j+1}}(p_x) - f^{b_{j+1}}(q_x)| \geq |f^{b_j+1}(p_x) - f^{b_j+1}(q_x)| > \theta |f^{b_j}(p_x) - f^{b_j}(q_x)|$$

onde θ é a constante definida na análise do somatório em Ω_2, e portanto

$$|f^{b_j}(p_x) - f^{b_j}(q_x)| < \frac{1}{\theta^{\varphi - j}}$$

Logo

$$\sum_{i \in \Omega_3} |f^i(p_x) - f^i(q_x)|^\alpha = \sum_{j=1}^{\varphi} |f^{b_j}(p_x) - f^{b_j}(q_x)|^\alpha < \frac{1}{1 - (1/\theta)^\alpha}$$

e a demonstração do Lema 6 está completa.

Como consequência temos o seguinte Lema:

Lema 7 *Existe uma constante $N_0^2 \in I\!N$, dependendo apenas de B e de A, tal que, se q e p são elementos de $[0,1)\times[0,1)$ com $q_x = p_x$ e*

$$\sum_{i=0}^{n-1}\big(A\circ B^i(B^{-n}(q)) - m\big) + \Delta^s(q,p) > S(p) - 1$$

para um certo $n \in I\!N$, então para todo $j \leq n - N_0^2 - 1$ o conjunto

$$\{B^{j-n+1}(q), B^{j-n+2}(q), ..., B^{j-n+N_0^2}(q)\}$$

contém pelo menos um elemento de $(\delta,1)\times[0,1)$.

Ou seja, não podemos ter mais do que N_0^2 iterados seguidos em $[0,\delta)\times[0,1)$.

Demonstração do Lema 7:

Para simplificar a notação vamos escrever a partir de agora $B^{i-n}(q)$ no lugar de $B^i(B^{-n}(q))$. Note que ambas as notações estão corretas, mas a segunda é de compreensão mais imedidata.

Sejam j e T naturais tais que $j + T \leq n - 1$ e suponha que

$$\{B^{j-n+1}(q), B^{j-n+2}(q), ..., B^{j-n+T}(q)\} \subseteq [0,\delta)\times[0,1)$$

Seja N_7 tal que $1/\beta^{N_7} < \delta$. Se $T > N_7$, então, como vimos na demonstração do Lema 6, para todo $N_7 < i \leq T$ temos

$$B^{j-n+i}(q)_y < \frac{1}{\beta^{i-1}} B^{j-n+1}(q)_y < \delta$$

e portanto $B^{j-n+i}(q) \in [0,\delta]\times[0,\delta]$ o que implica

$$A\circ B^{j-n+i}(q) - m < -\gamma,$$

onde $-\gamma < 0$ é o supremo de $A - m$ no conjunto $[0,\delta]\times[0,\delta]$.

Logo

$$\sum_{i=j+1}^{j+T}\big(A\circ B^{i-n}(q) - m\big) = \sum_{i=j+1}^{j+N_7}\big(A\circ B^{i-n}(q) - m\big) +$$

$$+\sum_{i=j+N_7+1}^{j+T}\big(A\circ B^{i-n}(q)-m\big)<N_7\|A-m\|-(T-N_7)\gamma$$

Lembrando que

$$|\Delta^s(q,p)|<\frac{Hol_\alpha(A)}{1-\frac{1}{\beta^\alpha}}$$

temos

$$S(p)>A(B^{-1}(q))-m+\Delta^s(q,p)>\inf(A)-m-\frac{Hol_\alpha(A)}{1-\frac{1}{\beta^\alpha}}.$$

Logo

$$\inf(A)-m-\frac{Hol_\alpha(A)}{1-\frac{1}{\beta^\alpha}}-1<S(p)-1<$$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}\big(A\circ B^{i-n}(q)-m\big)+\Delta^s(q,p)<$$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}\big(A\circ B^{i-n}(q)-m\big)+\frac{Hol_\alpha(A)}{1-\frac{1}{\beta^\alpha}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j}\big(A\circ B^{i-n}(q)-m\big)+\sum_{i=j+1}^{j+T}\big(A\circ B^{i-n}(q)-m\big)+$$

$$+\sum_{i=j+T+1}^{n-1}\big(A\circ B^{i-n}(q)-m\big)+\frac{Hol_\alpha(A)}{1-\frac{1}{\beta^\alpha}}<$$

$$<\sum_{i=0}^{j}\big(A\circ B^{i-n}(q)-m\big)+\sum_{i=j+T+1}^{n-1}\big(A\circ B^{i-n}(q)-m\big)+$$

$$+N_7\|A-m\|-(T-N_7)\gamma+\frac{Hol_\alpha(A)}{1-\frac{1}{\beta^\alpha}}<$$

$$<2M+N_7\|A-m\|-(T-N_7)\gamma+\frac{Hol_\alpha(A)}{1-\frac{1}{\beta^\alpha}}$$

onde na última desigualdade usamos o Lema 6.

Logo temos que

$$T < \frac{2M + N_7\|A - m\| + N_7\gamma - \inf(A) + m + 1}{\gamma} + \frac{2}{\gamma}\frac{Hol_\alpha(A)}{1 - \frac{1}{\beta^\alpha}}$$

e se definirmos N_0^2 como o menor inteiro maior ou igual a constante no lado direito da desigualdade acima temos a demonstração do Lema 7.

Agora vamos provar que S é uma função Hölder:

Teorema 2 *Se*

$$C = 1 + \frac{\log(\rho)}{\log(\beta)},$$

então a função S é α/C-Hölder, i.e., existe uma constante $Hol_\alpha(S) > 0$ tal que, para todo p e $\overline{p}$ em $[0,1) \times [0,1)$, temos:

$$|S(p) - S(\overline{p})| < Hol_\alpha(S) d(p, \overline{p})^{\alpha/C}.$$

Demonstração: Sejam p e $\overline{p}$ em $[0,1) \times [0,1)$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $S(p) \geq S(\overline{p})$. Dado $0 < \epsilon < 1$, seja $q \in [0,1) \times [0,1)$ e $n \in I\!N$ tais que $q_x = p_x$ e

$$\sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^{i-n}(q) - m\big) + \Delta^s(q,p) > S(p) - \epsilon.$$

Seja $\overline{q} = (\overline{p}_x, q_y)$. Então:

$$S(\overline{p}) > \sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^{i-n}(\overline{q}) - m\big) + \Delta^s(\overline{q}, \overline{p})$$

e teremos

$$|S(p) - S(\overline{p})| = S(p) - S(\overline{p}) <$$

$$< \sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^{i-n}(q) - m\big) + \Delta^s(q,p) + \epsilon -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \big(A \circ B^{i-n}(\overline{q}) - m\big) - \Delta^s(\overline{q}, \overline{p}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(A \circ B^{i-n}(q) - A \circ B^{i-n}(\overline{q}) \right) + (\Delta^s(q,p) - \Delta^s(\overline{q},\overline{p})) + \epsilon.$$

Vamos começar analisando

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(A \circ B^{i-n}(q) - A \circ B^{i-n}(\overline{q}) \right).$$

Como $q_y = \overline{q}_y$, para todo $k \geq 1$ temos $B^{-k}(q)_y = B^{-k}(\overline{q})_y$ e ambos $B^{-k}(q)_x$ e $B^{-k}(\overline{q})_x$ estão no mesmo cilindro (0) ou (1). Logo para todo $k \geq 1$ temos que $B^{-k}(q)_x$ e $B^{-k}(\overline{q})_x$ estão no mesmo cilindro de tamanho k, e como o comprimento dos cilindros tende a zero a medida que seu tamanho cresce, existe $N_8^2 \in I\!N$ tal que

$$|B^{-k}(q)_x - B^{-k}(\overline{q})_x| < \delta/2 \text{ se } k \geq N_8^2.$$

Seja então

$$N_8 = \max\{N_0^2, N_8^2\}.$$

Se $j \in I\!N$ temos, do Lema 7, que existe

$$k \in \{jN_8 + 1, ..., (j+1)N_8\} \text{ tal que } B^{-k}(q)_x > \delta$$

e como $k > N_8 \geq N_8^2$ temos $B^{-k}(\overline{q})_x > \delta/2$. Logo, lembrado-se que

$$\lambda = \inf\{f'(x) \mid x \in [\delta/2, 1)\} > 1$$

temos

$$|B^{-k+1}(q)_x - B^{-k+1}(\overline{q})_x| > \lambda |B^{-k}(q)_x - B^{-k}(\overline{q})_x|$$

e portanto

$$|B^{-(j+1)N_8}(q)_x - B^{-(j+1)N_8}(\overline{q})_x| \leq |B^{-k}(q)_x - B^{-k}(\overline{q})_x| <$$

$$< \frac{1}{\lambda}|B^{-k+1}(q)_x - B^{-k+1}(\overline{q})_x| \leq \frac{1}{\lambda}|B^{-jN_8}(q)_x - B^{-jN_8}(\overline{q})_x|.$$

Logo temos para todo $j \in I\!N$:

$$|B^{-(j+1)N_8}(q)_x - B^{-(j+1)N_8}(\overline{q})_x| < \frac{1}{\lambda^j}|B^{-N_8}(q)_x - B^{-N_8}(\overline{q})_x| \leq \frac{1}{\lambda^j}|q_x - \overline{q}_x|.$$

Como $q_x = p_x$, $\overline{q}_x = \overline{p}_x$ e $q_y = \overline{q}_y$, temos que $|q_x - \overline{q}_x| < d(p, \overline{p})$ e portanto

$$|B^{-(j+1)N_8}(q)_x - B^{-(j+1)N_8}(\overline{q})_x| < \frac{1}{\lambda^j} d(p, \overline{p}) \ \ \forall j \in I\!N.$$

Seja agora $d_i = |B^{-i}(q)_x - B^{-i}(\overline{q})_x|^\alpha$. Usando o fato de que B expande a direção horizontal em (0) e em (1), e também a última desigualdade, temos:

(a) $\{d_i\}_{i \geq 1}$ é uma sequência decrescente; (b) $d_{(i+1)N_8} < 1/\lambda^{i\alpha} d(p, \overline{p})^\alpha$.

Definindo n_1 como o menor inteiro maior ou igual a n/N_8, teremos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(A \circ B^{i-n}(q) - A \circ B^{i-n}(\overline{q})\right) < Hol_\alpha(A) \sum_{i=0}^{n-1} d\left(B^{i-n}(q), B^{i-n}(\overline{q})\right)^\alpha =$$

$$= Hol_\alpha(A) \sum_{i=0}^{n-1} \left|B^{i-n}(q)_x - B^{i-n}(\overline{q})_x\right|^\alpha =$$

$$= Hol_\alpha(A) \sum_{i=1}^{n} d_i < Hol_\alpha(A) \sum_{i=0}^{n-1} d_i <$$

$$< N_8 Hol_\alpha(A) \left(d_0 + d_{N_8} + d_{2N_8} + ... + d_{(n_1-1)N_8}\right) <$$

$$< N_8 Hol_\alpha(A)(\ d(p, \overline{p})^\alpha + d(p, \overline{p})^\alpha + \frac{1}{\lambda^\alpha} d(p, \overline{p})^\alpha + ...$$

$$\frac{1}{\lambda^{2\alpha}} d(p, \overline{p})^\alpha + \frac{1}{\lambda^{(n_1-2)\alpha}} d(p, \overline{p})^\alpha\ ) <$$

$$< N_8 Hol_\alpha(A) \left(1 + \frac{1}{1 - (1/\lambda)^\alpha}\right) d(p, \overline{p})^\alpha =$$

$$= N_8 Hol_\alpha(A) \left(\frac{2\lambda^\alpha - 1}{\lambda^\alpha - 1}\right) d(p, \overline{p})^\alpha.$$

Logo temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(A \circ B^{i-n}(q) - A \circ B^{i-n}(\overline{q})\right) < N_8 Hol_\alpha(A) \left(\frac{2\lambda^\alpha - 1}{\lambda^\alpha - 1}\right) d(p, \overline{p})^\alpha.$$

Vamos agora analisar $\Delta^s(q,p) - \Delta^s(\overline{q},\overline{p})$: Seja

$$C_1 = \frac{1-(1/\beta)^{\alpha}}{2\beta^{\alpha} Hol_{\alpha}(A)}$$

e N um natural dependendo de p e $\overline{p}$ e que satisfaz

$$\left(\frac{1}{\beta^{\alpha}}\right)^{N} > C_1 d(p,\overline{p})^{\alpha/C} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}}\right)^{N+1} \leq C_1 d(p,\overline{p})^{\alpha/C}.$$

Teremos

$$|\Delta^s(q,p) - \Delta^s(\overline{q},\overline{p})| <$$

$$= \left|\sum_{i\geq 0}\big(A\circ B^i(q) - A\circ B^i(p)\big) - \sum_{i\geq 0}\big(A\circ B^i(\overline{q}) - A\circ B^i(\overline{p})\big)\right| <$$

$$< \left|\sum_{i=0}^{N}\big(A\circ B^i(q) - A\circ B^i(p)\big) - \sum_{i=0}^{N}\big(A\circ B^i(\overline{q}) - A\circ B^i(\overline{p})\big)\right| +$$

$$+ Hol_{\alpha}(A)\left(\sum_{i\geq N+1} d(B^i(q),B^i(p))^{\alpha} + \sum_{i\geq N+1} d(B^i(\overline{q}),B^i(\overline{p}))^{\alpha}\right) <$$

$$< \left|\sum_{i=0}^{N}\big(A\circ B^i(q) - A\circ B^i(\overline{q})\big) + \sum_{i=0}^{N}\big(A\circ B^i(\overline{p}) - A\circ B^i(p)\big)\right| +$$

$$+2Hol_{\alpha}(A)\sum_{i\geq N+1}\left(\frac{1}{\beta^{\alpha}}\right)^{i}.$$

onde na última desigualdade usamos o fato de $q_x = p_x$ e $\overline{q}_x = \overline{p}_x$. Note que

$$2Hol_{\alpha}(A)\sum_{i\geq N+1}\left(\frac{1}{\beta^{\alpha}}\right)^{i} = 2Hol_{\alpha}(A)\frac{(1/\beta^{\alpha})^{N}}{1-(1/\beta)^{\alpha}} =$$

$$= 2\beta^{\alpha} Hol_{\alpha}(A)\frac{(1/\beta^{\alpha})^{N+1}}{1-(1/\beta)^{\alpha}} \leq 2\beta^{\alpha} Hol_{\alpha}(A)\frac{C_1 d(p,\overline{p})^{\alpha/C}}{1-(1/\beta)^{\alpha}} = d(p,\overline{p})^{\alpha/C}.$$

Agora, usando o Lema 4, temos

$$\left|\sum_{i=0}^{N}\big(A\circ B^i(q) - A\circ B^i(\overline{q})\big) + \sum_{i=0}^{N}\big(A\circ B^i(\overline{p}) - A\circ B^i(p)\big)\right| <$$

$$< 2Hol_\alpha(A)\sum_{i=0}^{N}(\rho^\alpha)^i\left(d(q,\overline{q})^\alpha + d(p,\overline{p})^\alpha\right) \leq$$

$$\leq 4Hol_\alpha(A)\sum_{i=0}^{N}(\rho^\alpha)^i d(p,\overline{p})^\alpha = 4Hol_\alpha(A)\frac{1-(\rho^\alpha)^{N+1}}{1-\rho^\alpha}d(p,\overline{p})^\alpha <$$

$$< 4Hol_\alpha(A)\frac{(\rho^\alpha)^{N+1}}{\rho^\alpha - 1}d(p,\overline{p})^\alpha = C_2(\rho^\alpha)^{N+1}d(p,\overline{p})^\alpha$$

onde $C_2 = \frac{4Hol_\alpha(A)}{\rho^\alpha - 1}$. Da definição de N temos

$$N < \frac{\log(C_1) + \frac{\alpha}{C}\log(d(p,\overline{p}))}{\log(1/\beta^\alpha)} = \frac{C_3}{C_4} + \frac{\alpha/C}{C_4}\log(d(p,\overline{p}))$$

onde

$$C_3 = \log(C_1) \quad \text{e} \quad C_4 = \log(1/\beta^\alpha).$$

Agora, definindo

$$C_5 = C_2(\rho^\alpha)^{\frac{C_3}{C_4}+1} \ \text{ e } \ C_6 = \log(\rho),$$

teremos

$$C_5 > 0 \ \ , \ \ \rho^\alpha = \exp(\alpha C_6)$$

e

$$C_2(\rho^\alpha)^{N+1}d(p,\overline{p})^\alpha < d(p,\overline{p})^\alpha C_2(\rho^\alpha)^{\frac{C_3}{C_4}+\frac{\alpha/C}{C_4}\log(d(p,\overline{p}))+1} =$$

$$= d(p,\overline{p})^\alpha C_5 \exp\left(\alpha C_6 \frac{\alpha/C}{C_4}\log(d(p,\overline{p}))\right) = d(p,\overline{p})^\alpha C_5 d(p,\overline{p})^{\frac{C_6}{C_4}\frac{\alpha^2}{C}} =$$

$$= C_5 d(p,\overline{p})^{\alpha\left(1+\frac{C_6}{C_4}\frac{\alpha}{C}\right)} = C_5 d(p,\overline{p})^{\alpha\left(1-\frac{\log(\rho)}{\log(\beta)}\frac{1}{C}\right)} = C_5 d(p,\overline{p})^{\alpha\frac{1}{C}}.$$

Logo

$$|\Delta^s(q,p) - \Delta^s(\overline{q},\overline{p})| < (C_5+1)\, d(p,\overline{p})^{\alpha/C}.$$

Teremos então

$$|S(p) - S(\overline{p})| <$$

$$< N_8 Hol_\alpha(A)\left(\frac{2\lambda^\alpha - 1}{\lambda^\alpha - 1}\right) d(p,\overline{p})^\alpha + (C_5+1)\, d(p,\overline{p})^{\alpha/C} + \epsilon <$$

$$< \left[N_8 Hol_\alpha(A) \left(\frac{2\lambda^\alpha - 1}{\lambda^\alpha - 1} \right) 2^{\frac{\log(\rho)}{\log(\beta)}} + (C_5 + 1) \right] d(p, \overline{p})^{\alpha/C} + \epsilon,$$

onde na última desigualdade usamos o fato de que $d(p, \overline{p}) < \sqrt{2}$ e

$$d(p, \overline{p})^\alpha = \left(\frac{d(p, \overline{p})}{\sqrt{2}} \right)^\alpha \sqrt{2^\alpha} < \left(\frac{d(p, \overline{p})}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha/C} \sqrt{2^\alpha} =$$

$$= 2^{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{C-1}{C}\right)} d(p, \overline{p})^{\alpha/C} < 2^{C-1} d(p, \overline{p})^{\alpha/C} = 2^{\frac{\log(\rho)}{\log(\beta)}} d(p, \overline{p})^{\alpha/C}.$$

Como N_8 e C_5 não dependem de ϵ, podemos fazer $\epsilon \to 0$ e a demonstração do Teorema 2, portanto, está completa.

Vamos agora analisar os resultados envolvendo medidas maximizadoras. Note que quase não há diferença entre as demonstrações que estão abaixo e aquelas da seção 3.

Seja $R = S \circ B - S - A + m$. Como S é função de sub-ação, temos $R(p) \geq 0$ para todo $p \in [0, 1) \times [0, 1)$. Definindo

$$G = \{p \in [0, 1) \times [0, 1) \ / \ R(p) = 0\} \ \text{ e } \ H = \{p \in [0, 1) \times [0, 1) \ / \ p_x = c\},$$

temos:

Lema 8 *Se μ for qualquer medida maximizadora, então:*

$$supp(\mu) \subset G \cup H \ .$$

Demonstração: Suponha que $x \in \mathrm{supp}(\mu)$ e que $x \notin H$: Suponha por absurdo que $x \notin G$: Como R é continua em $[0, 1) \times [0, 1) \setminus H$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$R(z) > 0 \ \ , \ \forall z \in B(x, \gamma) \equiv \{z \in [0, 1) \times [0, 1) \ ; d(z, x) < \gamma\}.$$

Portanto $B(x, \gamma)$ está contido em G^C, e temos

$$\mu(G^C) \geq \mu(B(x, \gamma)) > 0 \ .$$

Como $R > 0$ em G^C, temos

$$\int R d\mu = \int_{G^c} R d\mu > 0 \ .$$

Por outro lado, da definição de R temos

$$\int R d\mu = -\int A d\mu + m \ ,$$

o que implica

$$\int A d\mu < m \ ,$$

e temos portanto uma contradição visto que μ é uma medida maximizadora. Portanto a prova do Lema 8 está completa.

Corolário 2 *Se A possui uma única medida maximizadora μ_A , então μ_A é unicamente ergódica.*

Demonstração: Seja B_A a restrição de B ao suporte de μ_A. Seja μ uma medida invariante para B_A: Note primeiro que $\mu(H) = 0$. (Para provar esta afirmação, basta notar que $f^{-k}(H) = \{p \in [0,1) \times [0,1) \ / \ B^k(p)_x = c\}$, o que faz com que $f^{-k}(H) \cap f^{-l}(H) = \emptyset$ se $k \neq l$, visto que c não é ponto periódico de f. Como $\mu(f^{-k}(H)) = \mu(H) \ \forall k \in I\!\!N$, temos $\mu(f^{-k}(H)) = \mu(H) = 0 \ \forall k \in I\!\!N$.) Usando então o Lema 8, temos

$$\int_{supp(\mu_A)} R d\mu = 0.$$

Mas por outro lado, da definição de R temos

$$\int_{supp(\mu_A)} R d\mu = -\int A d\mu + m,$$

e portanto

$$\int A d\mu = m,$$

o que faz com que $\mu = \mu_A$, já que estamos supondo que a medida maximizadora é única. Logo temos também uma única medida maximizadora para B_A, e a prova do Corolário 2 está completa.

Referências

[1] Th. Bousch. *Le Poisson n'a pas d'aretês*. Ann. Inst. Henri Poincaré **36** (2000), 489-508.

[2] G. Contreras, A.O. Lopes, Ph. Thieullen. *Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle*. Ergodic Theory and Dynamical Systems **21**(5) (2001), 1379-1409.

[3] A. M. Fisher, A.O. Lopes. *Exact bounds for the polynomial decay of correlation, 1/f noise and the central limit theorem for a non-Hölder potential*. Nonlinearity **14**(5) (2001), 1071-1104.

[4] B. Hasselblat, A. Katok. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge (1996).

[5] B. R. Hunt, E. Ott. *Optimal periodic orbits of chaotic systems occur at low period*. Ph. Rev. E **54** (1996), 328-337.

[6] A.O. Lopes, Ph. Thieullen. *Sub-actions for Anosov diffeomorphisms*. Astérisque **287** (2003), 135-146.

[7] R. Manẽ. *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*. Nonlinearity **9** (1996), 273-310.

[8] R. Manẽ. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer Verlag (1987).

[9] P. Manneville. *Intermittency, self-similarity and 1/f spectrum in dissipative dynamical systems*, J. Physique **41** (1980), 1235-1243.

[10] R. R. Souza. *Sub-actions for weakly hyperbolic one-dimensional systems*. Dynamical Systems, an International Journal, **18** (2) (2003), 165-179.

[11] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer Verlag (1982).

[12] L. S. Young. *Recurrence times and rates of mixing*. Israel Journal of Mathematics, **110** (1999), 153-188.