UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

JAIRO LUIZ SILVEIRA FILHO

A INTUIÇÃO E A IMAGINAÇÃO NA APRENDIZAGEM DO INFINITO

Porto Alegre
2012

Jairo Luiz Silveira Filho

A INTUIÇÃO E A IMAGINAÇÃO NA APRENDIZAGEM DO INFINITO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Porto Alegre
2012

Jairo Luiz Silveira Filho

A INTUIÇÃO E A IMAGINAÇÃO NA APRENDIZAGEM DO INFINITO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Eduardo Brietzke
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof.ª Dr.ª Lúcia Helena Marques Carrasco
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof. Dr. Carlos Hoppen – Orientador
Instituto de Matemática – UFRGS

Porto Alegre, julho de 2012.

Dedico este trabalho à vó Marta, que faleceu ano passado, mas que ***continua*** *existindo em infinitas outras direções. A maioria das quais desconhecidas.*

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, pelas milhares de pequenas coisas que mais ninguém no mundo teria feito pra tornar meu dia melhor.

Ao meu pai, que me educou pra ser Rei, por nunca parar de acreditar.

Aos meus irmãos, Josi, Batata e Bibi, por me lembrarem sempre de quem eu sou.

Ao meu orientador, Dr. Carlos Hoppen, pela gentileza, paciência e sensibilidade.

Ao Wagner, pela confiança incondicional na minha poesia.

Ao Rene, pelas improváveis inspirações.

À Fabiana, por ter salvado a minha alma de todas as maneiras que alguém pode fazê-lo.

RESUMO

Neste trabalho analisamos as dificuldades envolvidas na aprendizagem do infinito relacionando-as com a evolução desse conceito ao longo da história. Para isso, propomos uma experiência didática inspirada na pesquisa de Fischbein, Hess e Tirosh, “The intuition of infinity” (1979), testada com alunos de Ensino Médio. Fundamentamos nossas observações e conclusões a partir da concepção de “modelo tácito” (tacit model) de Fischbein, estabelecendo relações com a perspectiva bachelardiana dos “obstáculos epistemológicos”. Diante das dificuldades observadas, tanto na revisão histórica quando em sala de aula, consideramos a influência da intuição e da imaginação nos equívocos e sucessos obtidos nas diversas tentativas de entender e explicar esse conceito.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética: hablo del infinito.

Jorge Luis Borges

1. INTRODUÇÃO

> O homem é formado por corpo, mente e imaginação. O corpo é defeituoso, a mente é mentirosa, mas a imaginação fez dele um ser notável. Em algumas centúrias, a imagem humana tornou a vida neste planeta uma intensa prática de todas as mais belas energias.
>
> John Masefield, Shakespeare and Spiritual Life

Em "A intuição e a imaginação na aprendizagem do infinito" tomamos como objeto de investigação o problema da relação entre o infinito e sua aprendizagem. Gostaríamos de compreender até que ponto as contradições desencadeadas pelo infinito ao longo da história influenciam a aprendizagem deste conceito. Queremos, ainda, monitorar os tipos de imagens, figuras e modelos mentais que estruturam as impressões dos alunos a respeito do infinito e compará-los com as ideias de matemáticos como Aristóteles, Galileu e Cantor.

Para isso, inspirados na pesquisa apresentada por Fischbein, Hess e Tirosh, "The intuition of Infinity" (1979), desenvolvemos nosso trabalho a partir de um questionário respondido e discutido por alunos de Ensino Médio. Ao contrário daquilo que havíamos inicialmente planejado, a experiência didática acabou subvertendo alguns dos caminhos propostos, dando origem a divergências interessantes entre as duas pesquisas. Divergências essas que serão apresentadas no decorrer do Capítulo III e na Conclusão.

Nosso trabalho está estruturado em três capítulos, além desta introdução e da conclusão. O primeiro capítulo é dedicado a uma revisão histórica da conceitualização do infinito, onde pretendemos investigar e discutir erros, dificuldades e conquistas da matemática referentes a essa questão. Ao observarmos as contradições envolvidas no processo de invenção do infinito esperamos encontrar alguma similaridade com sua aprendizagem.

O capítulo seguinte não pode ser chamado exatamente de uma fundamentação teórica, isso porque a transcende e não a esgota. Apresentaremos os trabalhos de Efraim Fischbein sobre o infinito, discutiremos o conceito de modelo tácito na perspectiva deste mesmo autor e, por fim, recorreremos à noção de obstáculo epistemológico, de Gaston Bachelard.

No Capítulo III, apresentaremos nossa experiência didática. Tentaremos identificar estratégias e modelos mentais que estruturam as impressões dos alunos a respeito do infinito, relacionando os resultados com as observações do primeiro capítulo e comparando-os, sempre que possível, com os alcançados por Fischbein.

A fim de compreender a relação estabelecida entre homem e infinito, recorreremos a elementos menos típicos no debate pedagógico que a inteligência. Para Guillen (1988), os matemáticos estão familiarizados com a imaginação como os músicos estão com os sons, os gastrônomos com os paladares e os aromas e os fotógrafos e cineastas com a visão (p.13). Etimologicamente, a palavra imaginação vem de do latim “imago”, que significa representação, imitação. Neste sentido, imaginação denota a capacidade de imitar modelos exemplares, as imagens, reproduzindo-as. Mas segundo Bachelard (1994), a imaginação não é, como sugere a etimologia, a faculdade de formar imagens da realidade; ela é a faculdade de formar imagens que ultrapassam a realidade, que cantam a realidade. É uma faculdade de sobre-humanidade. Os limites entre estas duas noções se tornarão cada vez mais nítidos à medida que o texto evoluir, então, por hora, não daremos preferência a nenhuma delas.

Vejamos as gravuras, publicadas em 1906 pelo astrônomo Percival Lowell em seu livro, Canais de Marte:

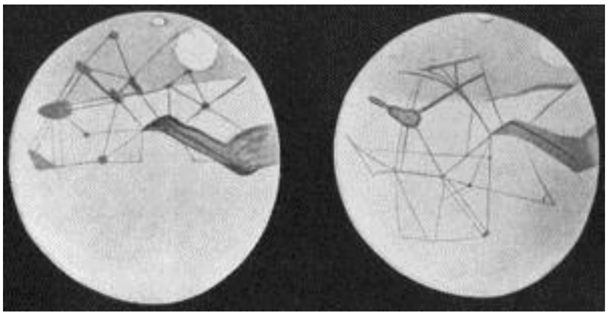


Figura 1:Canais de Marte, por Percival Lowell

São representações baseadas nas observações de Lowell ao Planeta Marte. Seus olhos, com o auxílio de um telescópio, viram na superfície de Marte marcas e vincos. Mas sua imaginação os representou como canais artificiais que serviriam para transportar água de um pólo ao outro em uma teórica civilização marciana. Vejamos a seguinte passagem Guillen (1998):

> Em Matemática este poder da imaginação humana de nos embalar em sonhos de muito pormenor é levado constantemente aos mais extremos limites racionais. E o certo é que o êxito lhes sorriu de modo pouco usual nas recentes tentativas de racionalizar, particularizar um dos mais inefáveis conceitos de todos os tempos, o do infinito (p. 51).

Por milhares de anos o infinito foi motivo de incerteza e contradição entre matemáticos e filósofos. Diante do assombro causado por este salto para além dos limites do pensamento racional, o homem, por muito tempo evitou o infinito e foi, conforme G. Bertrand Shaw escreveu em Homem e Super Homem, como o bosquímano que não pode contar além dos seus dedos: “[...] para ele [...] 11 é uma miríade incalculável [...]” (Shaw apud Guillen, 1998, p. 52)

Mas parece haver na essência do homem algo que o impele em direção ao infinito. Talvez essa atração passe por uma das maiores intranquilidades da existência humana: a certeza do fim. Em A Vontade de Potência, Nietzsche fundamenta na infinitude do tempo, a eternidade da alma:

:

> Se podemos imaginar o mundo como uma quantidade determinada de força e como um número determinado de centros de força — qualquer outra representação permanece indeterminada e portanto “inutilizável” — daí se conclui que o mundo deve atravessar um número avaliável de combinações, no grande jogo de dados de sua existência. Num tempo infinito, cada uma das combinações possíveis deverá uma vez realizar-se, ainda mais deverá realizar-se também um infinito de vezes. E como entre cada uma das combinações e seu retorno próximo, todas as combinações possíveis deverão ser percorridas e que cada uma dessas combinações condiciona toda a sucessão de combinações na mesma ordem, demonstraríamos, assim, um movimento circular de séries absolutamente idênticas: demonstraríamos que o mundo é um movimento circular que já se repetiu uma infinidade de vezes e que realiza o seu destino até o infinito. (NIETZSCHE, 2008, pág. 136)

Conforme Kubrusly (1999), o fim inevitável e a necessidade de dar sentido a sua vida faz o homem dedicar-se à transcendência. Para aplacar essa angústia que o dominava era preciso driblar o tempo e recriar a eternidade. Daí surgem todas as religiões com seus deuses poderosos e também o pensamento científico com a missão de compreender o que se passa e de deixar uma memória gravada que o tempo não conseguisse apagar. Surgem linguagem e matemática, surgem as perguntas filosóficas e as explicações da física, que a cada instante reinventa a natureza segundo seus caprichos e a moda de seu tempo. É o pensamento buscando o infinito. O que ignora a morte, não tendo fim nem começo, diferente de toda a natureza, impossível, num universo onde tudo é finito, e vivo apenas na mente desse estranho animal do pensamento a que se transformara, num instante, o macaco.

2. CAPÍTULO I
REVISÃO HISTÓRICA

Daquilo que se tem discutido a respeito da utilização da História da Matemática como ferramenta didática, as vantagens trazidas pela contextualização e ressignificação dos conceitos parecem inquestionáveis. Interessarão aqui especialmente os aspectos referentes à relação entre o processo de invenção do infinito e as dificuldades em sua compreensão. Inspirado nas concepções bachelardianas, Miguel (1993) questiona: como entender que a experiência é a lembrança dos erros retificados senão como apelo à retomada do processo histórico e dos erros da humanidade na busca de verdades? Vejamos o que Felix Klein diz a esse respeito:

> Com o fim de dar uma expressão precisa à minha própria opinião sobre esse ponto, gostaria de apresentar a “lei biogenética fundamental”, segundo a qual o indivíduo, em seu desenvolvimento, atravessa, de forma abreviada, todas as fases do desenvolvimento da espécie. Essas idéias tornaram-se hoje em dia parte e parcela da cultura de todos. Levando em conta a capacidade natural da juventude, o ensino deveria guiá-la para idéias mais elevadas e, finalmente, para formulações mais abstratas, e, ao fazê-lo, deveria seguir o mesmo caminho ao longo do qual a raça humana tem buscado desenvolver o conhecimento, desde seu estado original e simples até as formas mais elevadas. (Klein apud MIGUEL, 1993)

Uma discussão detalhada da ideia de Klein exigiria um tratamento biológico e antropológico mais profundo do que o proposto por este trabalho. Mas se existe aí alguma controvérsia devido à heterogeneidade e descontinuidade da evolução do gênero humano, por outro lado, podemos admitir com tranquilidade semelhanças entre o aprender e o inventar. Conforme Hadamard (2009):

> Entre o trabalho de um estudante que tenta resolver um problema de geometria ou álgebra e um trabalho de invenção pode-se dizer que só há uma diferença de grau, de nível, pois os dois trabalhos são de natureza análoga. (p.124)

Compreender a demonstração de um teorema ou mesmo a relevância de um algoritmo implica mais do que decompor sucessivamente cada um de seus silogismos ou cada etapa estática de sua construção e constatar que não possuem nenhuma inconsistência lógica. A compreensão efetiva exigirá a mesma imaginação e intuição do criador. Poincaré usa a metáfora de que não se conhece suficientemente um elefante estudando-o apenas com um microscópio.

Além das significativas contribuições dadas pelos outros autores que constam na bibliografia, o texto desta seção é baseado nos livros Análise Matemática para Licenciatura, de Geraldo Ávila; Conceitos Fundamentais da Matemática, de Bento Jesus Caraça; Introdução aos Fundamentos da Matemática, de Newton Carneiro A. da Costa; Pontes para o Infinito, de Michael Guillen e História da Matemática, de Carl B. Boyer. Então, antes que seja tarde demais e já tenhamos lançado mão do microscópio, observemos agora o infinito com um olhar mais amplo.

Para entender a concepção de infinito na Grécia Antiga, é preciso considerar o modo peculiar como gregos se relacionavam com a matemática. No trecho abaixo, Aristóteles narra a essência de uma época que condensa algumas das características mais bonitas do pensamento matemático:

> Aqueles a quem se chama pitagóricos foram os primeiros a consagrar-se às Matemáticas e fizeram-nas progredir. Penetrados desta disciplina, pensaram que os princípios das Matemáticas eram os princípios de todos os seres. Como, destes princípios, os números são, pela sua natureza, os primeiros, e como, nos números, os pitagóricos pensavam aperceber uma multidão de analogias com as coisas que existem e se transformam, mais que no Fogo, na Terra e na Água (tal determinação dos números sendo a justiça, tal outra a alma e a inteligência, tal outra o tempo crítico, e do mesmo modo para cada uma das outras determinações); como eles viam, além disso, que os números exprimiam as propriedades e as proporções musicais; como, enfim, todas as coisas lhes pareciam, na sua inteira natureza, ser formadas à semelhança dos números e que os números pareciam ser as realidades primordiais do universo, consideraram que os princípios dos números eram os elementos de todos os seres e que o céu inteiro era harmonia e número. (Aristóles apud CARAÇA, 1951, p.69)

Não havia na escola pitagórica uma delimitação clara entre matemática e religião. Suas frequentes conquistas na geometria, na astronomia e até na música foram consolidando a certeza de uma ordenação matemática do Universo. Mas na busca por uma unidade de medida comum para todas as coisas, ao assumirem a divisibilidade de grandezas ao infinito, os gregos deparam-se com uma das maiores crises de toda história do pensamento humano. Como poderia o “céu inteiro ser harmonia e número” se mesmo relações tão elementares quanto a razão entre dois segmentos de reta, como no caso da hipotenusa e um dos lados de um triângulo isósceles, não correspondessem a um número? É na descoberta da incomensurabilidade que o infinito surge na matemática grega. Mas esta não foi a única crise enfrentada pela agenda pitagórica. A dificuldade de se lidar com as noções de infinito e contínuo, em oposição às noções do finito e do discreto, traduz-se de modo pungente nos paradoxos de Zenão de Elea (cerca de 450 a.C.). No paradoxo de Aquiles, o hábil corredor aposta corrida com uma tartaruga, lhe concedendo alguns metros de vantagem. Zenão observa que não importa o quão depressa Aquiles corra, não poderá alcançar sua concorrente, pois quando chegar na posição inicial da tartaruga ela já terá avançado um pouco; e quando cobrir esta distância, novamente ela terá avançado um pouco mais. Assim o processo continua indefinidamente, de modo que Aquiles jamais alcançará a tartaruga. O paradoxo aqui é alimentado pela dificuldade de se conceber uma quantidade infinita de espaços cada vez menores e pela total falta de instrumentos matemáticos adequados para lidar com a soma destes espaços, que intuitivamente jamais poderiam constituir uma estrutura finita. O mesmo argumento fica explícito no Paradoxo da Dicotomia: para que um objeto possa percorrer determinada distância, deve percorrer primeiro a metade do caminho, e antes disso, o primeiro quarto, e assim sucessivamente através de infinitas subdivisões. Logo, é impossível iniciar o movimento. Tais impasses apontam para propriedades perturbadoras e armadilhas que repetiram-se sempre que tentou-se formalizar o infinito e que serão observadas também na sala de aula, como verificaremos no Capítulo III. Neste contexto, os gregos concluem pela exclusão do conceito quantitativo de infinito dos raciocínios matemáticos. A matemática toma uma feição cada vez mais finitista. Invade-a o *horror infiniti*.

Mas, apesar do duro golpe causado pela impossibilidade de submeter o infinito aos argumentos matemáticos, ao contrário do que se poderia esperar, os gregos buscaram alternativas para continuar desenvolvendo sua matemática. Segundo Boyer (1974, p.47), raramente, antes ou depois, homens com recursos tão limitados atacaram problemas de tal significado matemático. Eudoxo de Cnido certa vez teria afirmado que, de boa vontade, morreria queimado como Faeton, se esse fosse o preço a pagar para alcançar o sol e saber qual sua forma, tamanho e substância.

Diante do horror ao infinito, Arquimedes de Siracusa e Eudoxo desenvolvem o Método de Exaustão (assim intitulado por Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667), em 1647) encontrando aproximações sucessivas de uma área por comparação com áreas conhecidas, mesmo sem considerar somas infinitas de parcelas. Vejamos o que nos diz o axioma que fundamenta o Método da Exaustão:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrairmos não menos que a metade e se esse processo de subtração for continuado, finalmente restará uma grandeza de mesma espécie. (BOYER, 1974, p.67)

Ou seja, não era necessário supor a existência do infinito de fato, como uma realidade, tudo o que precisavam era usar “quantidades tão pequenas quanto desejassem”. Os matemáticos passaram então a considerar o infinito como potencial, como um processo inacabado. Este mesmo espírito ia estar presente na invenção do Cálculo dois mil anos mais tarde. Convencido da incoerência de se considerar do infinito como estrutura real e completa, Aristóteles afirma:

> Se é impossível que um lugar seja infinito e se todo o corpo ocupa um lugar, então é impossível que esse corpo seja infinito. (…) Pois bem, se o infinito não se pode quantificar – senão seria uma quantidade como de duas ou três coisas, pois isto é o que significa quantidade – assim também o que está num lugar é assim porque ocupa algum sítio: e isto para cima ou para baixo, ocupando uma das seis direções, e cada uma destas apresenta um certo limite. Fica claro que na atualidade não existe um corpo infinito. (…) Tornando-se evidente que o infinito existe num sentido e noutro não. Pois bem, diz-se que é, por um lado, em potência e por outro em atualidade. (…) De maneira que existe um número infinito em potência e não em atualidade.) (Aristóteles apud SAMPAIO, 2008, p.207)

Com o fim da antiguidade e da hegemonia grega, a noção predominante de infinito potencial permaneceu por um longo período. Todos os esforços somados de todas as civilizações medievais não foram em nenhum sentido comparáveis às realizações matemáticas da Grécia Antiga. O que não significa que não tenham acontecido progressos. Nos Diálogos Respeitantes a Duas novas Ciências, Galileu faz observações interessantes, vejamos:

> Salviati: Se te perguntar quantos são os quadrados perfeitos, podes responder-me, sem mentir, que são tantos quantas as suas raízes

> quadradas; visto que todo o quadrado tem a sua raíz e que toda a raíz o seu quadrado, não há nenhum quadrado que tenha mais de uma raíz nem uma raíz que tenha mais de um quadrado.
>
> Simplício: O que há a decidir nesta situação?
>
> Salviati: Não vejo outra solução que não seja a de que todos os números são infinitos; que os quadrados são infinitos; e que a imensidão dos quadrados não é menor que a de todos os números, nem maior, e, em conclusão, que os atributos de igualdade, maior que e menor que, não têm lugar no infinito, mas só nas quantidades finitas. (GALILEI,1989, p.40-41)

Nitidamente, Galileu aqui se deparava com a propriedade fundamental de um conjunto infinito: uma parte pode equivaler ao conjunto todo. Mas a intuição que diz o contrário estava tão enraizada nas suas idéias que não o permitiu perceber o óbvio. Este, aliás, é um fenômeno que vai tornar a se manifestar na comunidade científica diante das teorias de Cantor. Boyer (1974, p.241) chega a afirmar, que “como Moisés, Galileu chegou a avistar a terra prometida mas não pôde penetrar nela”.

Desde os dias de Zenão, apesar de todo desenvolvimento alcançado pela matemática posteriormente, nem o Cálculo, nem a Análise puderam nos conduzir à uma compreensão realmente profunda da natureza do infinito. Até que, já no fim do século XIX, o jovem matemático chamado Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, cria uma das maiores revoluções de toda história da matemática: a teoria dos números transfinitos. Segundo Hilbert (1925): “o produto mais extraordinário do pensamento matemático e uma da mais belas façanhas da pura atividade intelectual humana”.

Este notável triunfo da imaginação matemática na compreensão do infinito está intimamente ligado ao desenvolvimento da noção de conjunto. Bernhard Bolzano, no pequeno livro “Os Paradoxos do Infinito”, de 1851, propõe pela primeira vez um tratamento inteiramente racional dos conjuntos infinitos. Richard Dedekind vai mais longe, utilizando a noção de conjunto na construção dos números reais e na própria definição de infinito: diz-se que um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo, caso contrário S é dito um sistema finito.

Numa terminologia mais atual, um conjunto é dito infinito sempre que puder ser estabelecida uma correspondência biunívoca com os elementos de um subconjunto próprio. Mas, efetivamente, o crédito pela invenção da Teoria dos Conjuntos deve ser dado a Georg Cantor.

> Por conjunto entenderemos qualquer coleção numa totalidade M de objetos distintos, produtos de nossa intuição ou pensamento. Estes objetos serão chamados de "elementos" de M. (Cantor, 1915).

Apesar do questionável rigor dessa definição é a partir dela que Cantor desenvolve sua teoria. Na axiomática de Cantor, dois conjuntos são equivalentes se seus elementos podem ser emparelhados um a um. Neste caso dizemos também que os dois conjuntos são equipotentes ou que têm a mesma cardinalidade. Formalmente, estamos nos referindo a uma bijeção entre conjuntos. Se considerarmos $A_n = \{1,2,3,...,n\}$ o conjunto dos n primeiros números naturais, então B será um conjunto finito de n elementos se for equivalente (equipotente) a A_n. Mas e quanto aos conjuntos infinitos? Possuem todos a mesma cardinalidade?

Para responder às questões relativas à cardinalidade dos conjuntos infinitos, Cantor propõe o estudo dos números transfinitos, estabelecendo uma hierarquia entre esses conjuntos. Segundo sua teoria, os números naturais (**N**) correspondem ao menor conjunto infinito. Chama-se enumerável todo conjunto equivalente a **N**. Considerando a correspondência $n \rightarrow n^2$, o conjunto dos quadrados perfeitos é enumerável, ou seja, tem o mesmo tamanho do conjunto dos naturais, a propriedade que causara perplexidade em Galileu é agora aceita como uma peculiaridade dos conjuntos infinitos.

Se a equivalência destes dois conjuntos já parece ir contra a intuição, mais surpreendente é a conclusão de que o conjunto de todas as frações racionais também é enumerável. Como encontrar uma ordem para os racionais se entre quaisquer frações racionais, por mais próximas que estejam, sempre pode haver outra? Cantor propôs o seguinte arranjo:

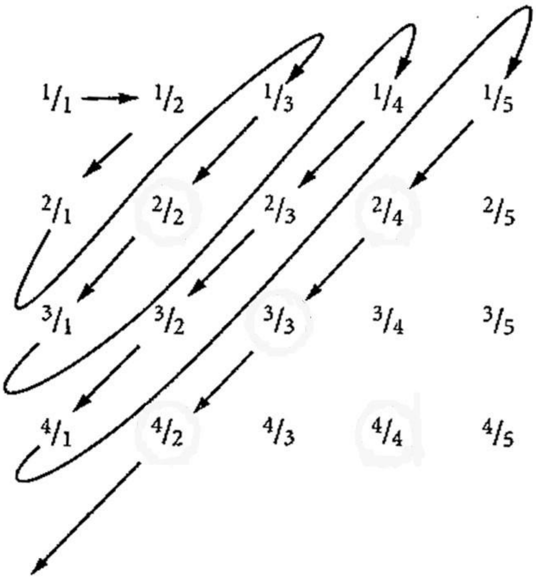


Figura 2: Enumerabilidade dos racionais

Basta agrupar os racionais em subconjuntos de frações cuja soma de numerador e denominador seja constante. Por exemplo, C = {1/4, 2/3, 3/2, 4/1} é o subconjunto cuja soma é 5. Nitidamente, todos os conjuntos formados desta maneira terão um número finito de elementos. Ora, se escrevermos todos os subconjuntos, um após o outro em ordem crescente de somas, teremos estabelecido uma organização numerável para os racionais. Começava-se a pensar que todos os conjuntos infinitos pudessem ter a mesma cardinalidade, mas Cantor, mais uma vez, prova que isto não é verdade.

A cardinalidade do conjunto dos números irracionais, por exemplo, é maior que a dos naturais. Para demonstrar este fato, Cantor imagina uma seqüência infinita com todos os números reais entre 0 e 1:

$$x_1 = 0{,}326845648487...$$
$$x_2 = 0{,}645982354558...$$
$$x_3 = 0{,}796352186164...$$
....
$$x_n = a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}...a_{nn}...$$
....

O processo a seguir, chamado Diagonal de Cantor, comprova que pelo menos um número irracional será sempre excluído da lista. Para encontrá-lo basta construirmos um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda, de x_3 na terceira e assim por diante. Logo, este número não estará na lista, o que significa que o conjunto dos reais não é numerável.

Cantor passa a referir-se aos naturais como uma infinidade numerável, à qual atribui o símbolo $\aleph_0$ (álefe zero) e aos irracionais como uma infinidade contínua $\aleph_1$ (álefe um), cuja cardinalidade seria $2^{\aleph_0}$. O tamanho de álefe um equivaleria ao tamanho do conjunto formado por todos os subconjuntos de álefe zero, portanto: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Em geral, como existiriam infinitos álefes, $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$. Essa igualdade ainda geraria muita discussão, como veremos adiante.

Mas os resultados surpreendentes não pararam por aí. Consideremos agora o segmento de reta pq, concorrente à reta rs. Qualquer semirreta com origem nos pontos T ou U que intersecte o segmento pq também intersectará a reta rs em um único ponto.

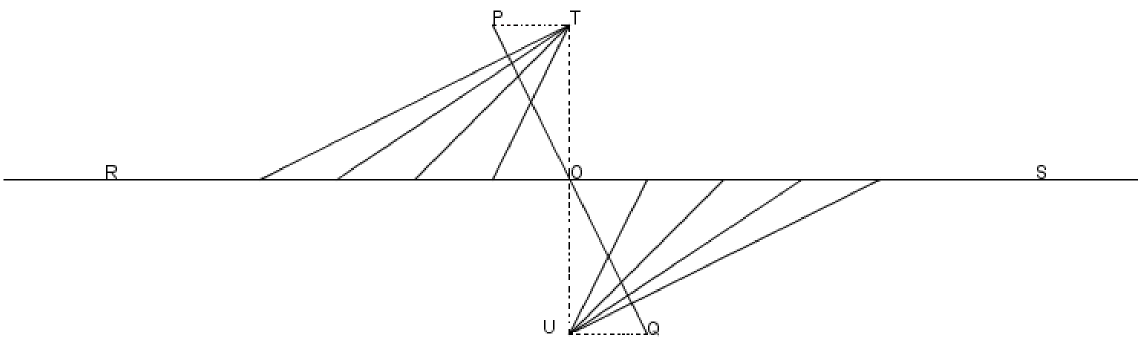


Figura 3: Equipotência entre segmento e reta

Pode-se estabelecer então uma correspondência biunívoca entre o segmento e a reta, ou seja, ambos possuem a mesma cardinalidade. Descoberta após descoberta, enquanto abalava as estruturas da matemática, Cantor escreve uma carta a seu amigo Dedekind dizendo, “eu vejo isso, mas não posso acreditar”. Mas a frequencia vertiginosa com que resultados tão inovadores e abrangentes foram sendo provados acabou deixando espaço para algumas inconsistências e contradições. A própria maneira pouco rigorosa como Cantor definiu conjunto deu origem a paradoxos importantes. Por exemplo, a questão do conjunto de todos os conjuntos ser menor ou maior do que o conjunto de suas partes. Ou ainda, o problema em se tentar definir o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos.

A natureza controversa das teorias de Cantor chocaram a comunidade cientifica. Segundo Costa (1962, p.36), Poincaré teria chegado a afirmar que a teoria cantoriana dos conjuntos era uma doença da qual a matemática não estava longe de se curar. O prestigiado professor Kronecker, também atacou as concepções de Cantor, classificando-as como “teologia, misticismo, ou o que se queira, menos matemática”. Os aviltamentos e desprezo de influentes matemáticos levaram o temperamental Georg Cantor ao esgotamento nervoso, mas não puderam diminuir a dimensão de sua obra. Em sua famosa conferência Sobre o Infinito, Hilbert declara:

> Existe, contudo, um caminho satisfatório para evitar os paradoxos sem trair nossa ciência. As atitudes que nos ajudarão a achar este caminho e a direção a tomar são as seguintes: definições frutíferas e métodos dedutivos que tiverem uma esperança de salvamento serão cuidadosamente investigados, nutridos e fortalecidos. Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós. [...]”. (Hilbert, 1926)

Cantor passaria seus últimos anos em um hospital psiquiátrico, em Halle, Alemanha, trabalhando sem parar na Hipótese do Contínuo, mas nunca conseguiria provar a existência de um conjunto entre os inteiros e o contínuo, $\aleph_0 < \mathbf{C} = 2^{\aleph_0}$. Tampouco pode demonstrar sua inexistência. Apenas décadas mais tarde Gödel e Cohen concluem pela indecidibilidade desta questão. Não a tempo de evitar que as discussões provocadas por ela transformassem para sempre o pensamento matemático. Se já não poderíamos mais acalentar o velho sonho de uma matemática absoluta, perfeitamente circunscrita num sistema axiomático infalível, também jamais voltaríamos a olhar para o infinito com o mesmo receio do bosquímano de Shaw.

3. CAPÍTULO II
AUTORES, PERSPECTIVAS E TEORIAS

Umas das minhas memórias mais antigas refere-se à imagem da Igreja São João Batista vista da janela da casa de minha avó, em Montenegro. Foi a igreja onde meus pais e depois meus tios se casaram, o lugar onde fui batizado e onde participei pela primeira vez de um culto religioso. Quando criança, eu brincava na praça do outro lado da rua e todos os sábados à tardinha, por muitos anos, escutei o sino avisando que ia começar a missa. Hoje, se ouço a expressão “igreja bonita”, invariavelmente a imagem na minha cabeça é da igreja São João Batista. Decidir se outra igreja qualquer é bonita implica submeter a altura das suas torres, as cores em seus vitrais, as flores em seu jardim e as proporções em seu interior a uma comparação com a figura ideal da igreja de minha infância.

Neste capítulo temos por propósito apresentar e discutir o conceito de modelo tácito a partir da perspectiva de Efraim Fischbein em seus artigos “Tacit Models and Infinity” (2001) e “The intuition of Infinity” (1979). Julgamos que este trabalho será tanto mais interessante quanto mais forem férteis as relações estabelecidas com os demais autores citados. Para isso começaremos nos valendo da importante noção de metáfora.

A etimologia da palavra metáfora vem dos termos gregos “meta”, que significa mudança, e “pherein”, que significa levar ou conduzir. Segundo o dicionário Aurélio, metáfora consiste na transferência de uma palavra para um âmbito semântico que não é o do objeto que ela designa e que se fundamenta numa relação de semelhança subentendida entre o sentido próprio e o figurado. Quando Mário Quintana escreve: “Os poemas são pássaros que chegam”, usa a metáfora para projetar implicações associadas à expressão “pássaros que chegam” ao sujeito primário “poemas”. Talvez fossem necessárias páginas inteiras de texto puramente denotativo para descrever o que de fato implica poemas serem pássaros que chegam. Certas expressões, aliás, sequer poderiam ser exprimíveis através de locuções literais. Como descrever, por exemplo, a passagem a seguir?

> Talvez tenhas existido apenas,
> como um lagarto a quem cortam o rabo
> E que é rabo para aquém do lagarto remexidamente.
> (Tabacaria, Fernando Pessoa)

Mas mais do que a metáfora enquanto recurso de imaginação poética ou ornamento retórico, nos interessa aqui a perspectiva conceitual e cognitiva proposta por Lakoff e Johnson (2002) para quem: “a essência da metáfora é compreender e experienciar uma coisa em termos de outra”. Nesse sentido o uso de metáforas e analogias como ferramenta didática pode protagonizar mediações simbólicas significativas geradas pelo processo relacional entre o estranho e o familiar. Esta é uma boa hora para introduzirmos as idéias de Fischbein:

> We think in terms of models which are substitutes of certain original concepts; usually these concepts are too abstract, or too complex and, the respective realities too big or too small relative to our capacity of grasping them. [...] Let us try to define the term model as it will be used in the present text. Considering two systems, A and B, B is defined as a model of A if it is possible to translate properties of A in terms of B so as to produce consistent descriptions of A in terms of B, or to solve problems – originally formulated in terms of A – by resorting to a translation in terms of B. The concept of mental model refers to mental representations which replace, in the reasoning process, the original entities, usually in order to stimulate and to ease the solving endeavor. (2011, p.311-312)

Para Fischbein, em certas ocasiões nós pensamos em termos de modelos que substituem conceitos originais. Frequentemente estes conceitos são abstratos demais ou complexos demais e as respectivas realidades são ou muito grandes ou muito pequenas para nossa capacidade de compreendê-las. Para explicar a definição de modelo mental, o autor considera dois sistemas, A e B, e define que B é um modelo de A se é possível interpretar propriedades de A em termos de B de modo a produzir descrições consistentes de A. Ou ainda se é possível resolver problemas originalmente formulados em termos de A recorrendo a sua tradução em termos de B. O conceito de modelo mental refere-se a representações mentais que substituem, nos processos de raciocínio, entidades originais, normalmente com a finalidade de estimular e facilitar o esforço resolutivo. Thagard e Holyoak (1996) descrevem a seguinte discussão entre uma mãe e sua filha de quatro anos de idade, Neil, que estava seriamente preocupada com o que um passarinho poderia usar como cadeira. Neil propôs que uma árvore poderia ser uma cadeira de passarinho. Um passarinho pode sentar no galho de uma árvore. Sua mãe disse que sim e acrescentou que ele também poderia sentar em seu ninho, que é a sua casa. A conversa tomou outros rumos. Mas passado algum tempo, a criança voltou com uma segunda opinião sobre árvore e passarinho: “a árvore não é uma cadeira de passarinho - ela é um quintal de passarinho!”

Exemplos como o citado acima ilustram com muita simplicidade os elementos que de fato nos interessam aqui. Neil modificou seus conceitos durante o diálogo, explorando conexões entre os dois domínios diferentes. Ela estava tentando entender o desconhecido mundo das criaturas voadoras em termos de um modelo familiar, residências humanas, exatamente como descrito por Efraim Fischbein.

Em Tacit Models and Infinity, Fishbein diferencia ainda os conceitos de modelo mental explícito e modelo tácito (explicit ou tacit models). As operações relacionadas a modelos mentais explícitos são conscientes e intencionais. Ao se deparar com um conceito desconhecido, o indivíduo relaciona um análogo já familiar (modelo explícito), a partir do qual mapeia o conceito estranho, gerando inferências, avaliando-as e adaptando a fim de se dar conta de suas singularidades. Finalmente, aprende algo genérico a partir do sucesso ou insucesso da analogia (aprendizado). Considere a figura abaixo:

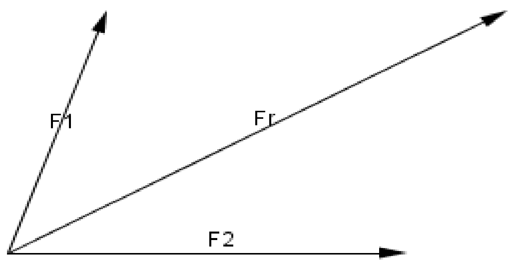


Figura 4: Força resultante

Usamos vetores como modelo explícito para compreender o comportamento de duas forças aplicadas em um corpo. A partir deste modelo podemos inferir direção, sentido e intensidade da força resultante. Força é um conceito abstrato, mas o problema pode ser traduzido em termos geométricos. Outro exemplo de modelo mental é o utilizado por Rutherford para representar o átomo, nitidamente inspirado no sistema solar.

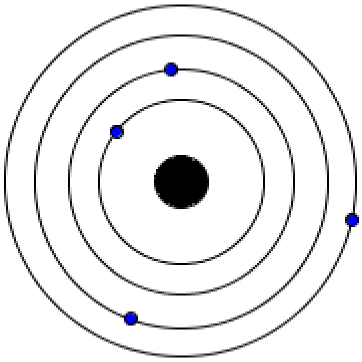


Figura 5: Modelo atômico de Rutherford

A importância deste tipo de modelo nas descobertas científicas fica bem visível na carta que Faraday, em 1815, escreve para um amigo:

> Dificilmente pode imaginar como luto para utilizar as minhas idéias poéticas na descoberta de analogias e figuras remotas relativas à Terra, ao Sol e a toda a classe de objetos – porque acredito que é a forma verdadeira (corrigida pelo discernimento) de levar a cabo uma descoberta. (apud Sutton, 1996, p. 8)

Também nas artes plásticas temos referencias semelhantes. Vejamos como o comportamento do artista descrito por Ernest H. Gombrich (2007) parece nos remeter às estratégias de um aluno que tenta resolver um problema de matemática:

> De modo geral, ao que parece o procedimento é sempre o mesmo. O desenhista começa por classificar o borrão, enquadrando-o em algum esquema familiar, dirá que é triangular, por exemplo, ou que parece um peixe. Tendo escolhido um esquema que se adapta aproximadamente à forma, procurará ajustá-lo melhor, por assim dizer, observando que o triângulo é arredondado no ápice ou que o peixe termina por um rabo de cavalo. (p.63)

Têm sido escritos muitos trabalhos interessantes abordando as possibilidades de utilização de modelo mentais no ambiente escolar, como é o caso de “Metáfora e Analogia no processo de formação de conceitos”, de Lauren Tonietto; “A utilização de modelos, analogias e metáforas na construção de conhecimentos significativos à luz da teoria de Vygotsk”, de Eliane G. Silva Fonseca e Ronaldo Luiz Nagem e “Saberes docentes mobilizados em contextos interativos discursivos de ensino de física envolvendo analogias”, de Fernanda Cátia Bozell. Mas não temos a pretensão aqui de estudar a fundo os detalhes destes processos cognitivos em toda sua heterogeneidade, nem a ingenuidade de achar que isto seria viável, dada a própria natureza das atividades propostas.

Os modelos mentais tácitos, estes sim, nos interessarão no estudo das dificuldades de compreensão do infinito. Assim como Fischbein, reconhecemos nestas estruturas explicações para dificuldades cognitivas que têm acompanhado a civilização por milhares de anos.

> But in the reasoning process there may also intervene models about which we are not aware, which replace tacitly some of the original components of the reasoning process. Such models may have been, initially, conscious ones, but later on, their conscious origin may have been forgotten. These models continue to act and influence the reasoning process without the individual being aware of their origin and their effect. (Fischbein, 2001)

Fischbein explica que os processos cognitivos podem ser influenciados por modelos sem que estejamos conscientes disso. Alguns modelos inicialmente conscientes podem ter sua origem esquecida e ainda assim continuar agindo e influenciando o raciocínio do indivíduo.

Conforme Gombrich (2007, p.83), o familiar será, sempre, o ponto de partida para a representação do desconhecido. Mas existem situações onde modelos mentais constituem, silenciosamente, obstáculos sérios para a assimilação de novos conceitos. Gombrich (ibidem, p.69) comenta a legenda de uma gravura italiana de 1601 (Figura 6) que estampa uma gigantesca baleia lançada à praia perto de Ancona naquele mesmo ano e “desenhada exatamente a partir do natural” (“ritratto qui dal naturale appunto”). A alegação poderia ser fidedigna se não existisse gravura anterior registrando incidente semelhante na costa holandesa, em 1598 (Figura 7).

Figura 6: Baleia lançada à praia em Ancona.1601.

Figura 7: Baleia lançada à praia na Holanda. 1598.

Mas será que os artistas holandeses do fim do século XVIII, mestres do realismo, não eram capazes de retratar uma baleia? Pois não eram, ao que parece. O animal parece ter orelhas, e baleias com orelhas, sei de boa fonte, não existem. O desenhista enganou-se, tomando uma das nadadeiras do cetáceo por orelha, e por isso mesmo colocou-a perto demais do olho. Foi induzido ao erro por um modelo familiar, o esquema da cabeça típica. Provavelmente sob influência do mesmo modelo, o italiano anônimo nem percebe o erro e o repete ao copiar a baleia de outra gravura.

Numa tentativa de melhorar a fluência da redação optamos por apresentar exemplos específicos de modelos nocivos associados ao conceito de infinito no próximo capítulo, à medida que formos relatando os resultados da prática didática. Mas antes disso existem ainda algumas observações importantes a serem feitas. Johnson e Lakoff (2002) ressaltam no trecho abaixo que limitar a compreensão é imanente aos modelos mentais:

> A própria sistematicidade que nos permite compreender um aspecto de um conceito em termos de outro (na metáfora discussão é guerra, por exemplo) necessariamente encobrirá outros aspectos deste conceito. Ao permitir focalizar um aspecto determinado de um conceito (por exemplo, os aspectos bélicos de uma discussão), um conceito metafórico pode nos impedir de focalizar outros aspectos deste mesmo conceito que sejam inconsistentes com essa metáfora. Por exemplo, no meio de uma discussão calorosa, na qual estamos engajados no propósito de atacar a posição de nosso oponente e de defender a nossa, podemos perder de vista os aspectos cooperativos da discussão. Alguém que esteja discutindo com você pode ser visto como aquele que esteja lhe oferecendo o seu tempo, um bem valioso, em um esforço para conseguir compreensão mútua. [...] Imagine uma cultura em que a discussão é vista como uma dança. [...] Nessa cultura, as pessoas perceberiam as discussões de outra maneira, experienciariam as discussões diferentemente, teriam desempenhos diversos e falariam delas de um outro modo. (p.53)

Já preocupados com a perigosa distância que começamos a tomar das superfícies, daremos agora um último passo em direção ao núcleo do problema, para que, a partir daí, possamos transitar com maior tranquilidade entre os resultados observados na sala de aula. Os próximos parágrafos serão dedicados ao conceito de obstáculo epistemológico, proposto por Gaston Bachelard.

> Quando se procuram as condições psicológicas dos progressos da ciência, em breve se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que se deve pôr o problema do conhecimento científico. E não se trata de considerar os obstáculos externos, nem de incriminar a fraqueza dos sentidos e do espírito humano; é no próprio ato de conhecer, intimamente, que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, lentidões e perturbações. É aqui que residem as causas da estagnação e mesmo de regressão, é aqui que iremos descobrir causas de inércia, a que chamaremos obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 2001, p.165)

Conforme Bachelard (1996, p.14), esta noção pode ser estudada tanto no desenvolvimento histórico do pensamento científico quanto na prática da educação. No âmbito deste trabalho, queremos considerar as duas possibilidades já que, como observamos, a invenção e a compreensão da matemática são fenômenos de mesma natureza. No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. Baseado nesta idéia, há entre os epistemólogos o irreverente prevérbio que diz: os grandes homens são úteis à ciência na primeira metade de sua vida e nocivos na outra metade.

Na história da ciência, importantes períodos de estagnação foram provocados pelas dificuldades de romper com o senso comum ou com o conhecimento anteriormente estabelecido. Durante mais de 2000 anos acreditou-se, por exemplo, que as leis da geometria euclidiana eram absolutas e universais. Segundo Guillen (1998, p.116), o importante conceito geométrico de retas paralelas como linhas que nunca se tocam vem sendo inculcado em nossa cultura desde os egípcios antigos, firmemente associado com as marcas deixadas pelas charruas ou pelos carros de duas rodas. Por muito tempo as únicas divergências provocadas pelo quinto postulado de Euclides (postulado relacionado à noção de paralelismo) diziam respeito ao fato de ser ou não um axioma. Alguns matemáticos consideravam que ele deveria ser demonstrado, mas nunca duvidou-se que um dia tais provas surgiriam.

O tempo passou e tais provas nunca surgiram. Apenas no século XIX, matemáticos como Gauss, Lobatchevski e Riemann, consideraram substituições no postulado das paralelas, superando o senso comum e estabelecendo novas geometrias. Este passo importante na direção contrária à perspectiva dos nossos sentidos e à experiência cotidiana mudaram para sempre o próprio modo como a humanidade compreende o espaço.

Vimos no primeiro capítulo o equívoco de Galileu ao não se questionar a respeito da percepção comum de que o todo devesse ser maior que a parte. Vimos também a corrosiva crítica de Kronecker e Poincaré à teoria dos números transfinitos de Cantor, baseados na certeza de que o infinito não podia ser aritmetizável. Uma certeza de natureza oposta levou Cantor à loucura tentando decidir se havia um conjunto entre o enumerável e o contínuo. Sentimentos similares acalentaram por muito tempo o sonho de axiomatizar a aritmética. Desde os gregos, incentivada pela própria natureza humana, sucesso após sucesso, a matemática foi consolidando a impressão de sua infalibilidade. Convencidos disso, grandes gênios empregaram décadas de suas vidas tentando “encontrar” o alicerce estável sobre o qual a matemática pudesse ser fundamentada. Até que, em 1931, Kurt Gödel estremeceu o mundo matemática ao publicar um trabalho onde concluía que um sistema axiomático independente não poderia ser ao mesmo tempo, consistente e completo. A Incompletude de Gödel destrói pra sempre a falsa expectativa acalentada desde a antiguidade de circunscrever o conhecimento matemático nos limites de um sistema axiomático. Essa descoberta foi tão perturbadora quanto a revelação por Hipasus da existência de grandezas incomensuráveis. E assim como o ocorrido na antiguidade, o resultado em questão, ao destruir certezas nocivas, redunda na evolução da matemática.

Na prática da educação, há muitas situações em que certezas apressadamente estabelecidas e modelos mentais prévios interferem e atrapalham o aprendizado. Por exemplo, na dificuldade em aceitar que se possa obter um aumento por uma divisão e uma diminuição por uma multiplicação, na ausência de comutatividade na multiplicação de matrizes e na extensão da linearidade para qualquer modelo de crescimento. No próximo capítulo, teremos abundantes exemplos da presença destes obstáculos e modelos relacionados ao conceito de infinito.

Estamos tendo o cuidado de não classificar imagens, figuras, metáforas ou modelos mentais constituídos a partir de um conhecimento prévio como coisas imanentemente boas ou más. São indispensáveis, isso sim, apesar de em determinados momentos se tornarem prejudiciais. É preciso usá-los com medida enquanto são úteis e desembaraçar-se imediatamente deles quando se tornam nocivos, sem correr o risco de tomar os andaimes pelo vigamento.

4. CAPÍTULO III
EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

> "Define-se o infinito através daquilo que ele não é? Se a sucessão dos números naturais é inesgotável, onde os posicionamos? Podemos demonstrar que a divisão em dois de um segmento de recta não tem fim? E o céu, onde acaba? O matemático trabalha com o infinito, mas o que nos ensina sobre ele? Eu acabei por compreender: na verdade, não nos ensina nada. Com uma espantosa humildade o matemático de hoje renuncia a interrogar-se sobre o estatuto do infinito para continuar a matematizá-lo. É aqui que reside a limitação, mas também a força do discurso matemático."
>
> Escher

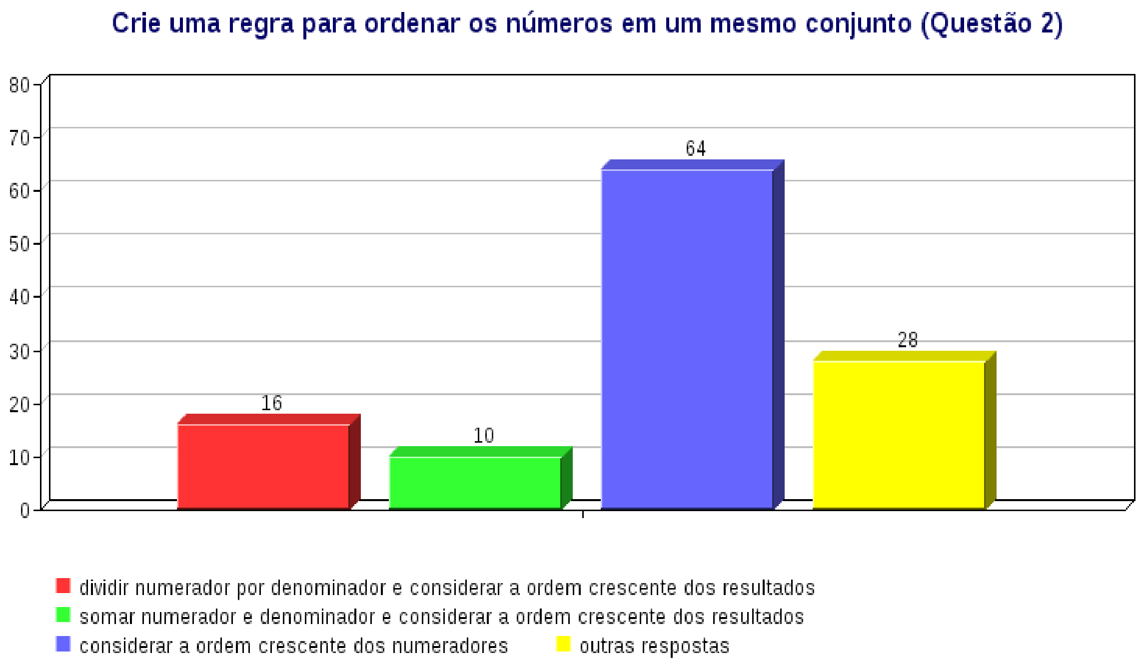
Nossa prática é inspirada no trabalho "The Intuition of the Infinity" (1979), de E. Fischbein, D. Tirosh e P. Hess. A experiência didática foi realizada com a colaboração de 118 alunos, de idades entre 15 e 19 anos, regularmente matriculados no 2º e 3º anos do Ensino Médio de um colégio estadual no Município de Montenegro. Foram necessários três períodos em cada uma das cinco turmas analisadas a fim de que todas as oito questões do questionário fossem respondidas e discutidas. Aqui se estabelece a diferença mais significativa entre a prática proposta por Fischbein e a nossa. A pesquisa apresentada em "The Intuition of the Infinity", preponderantemente quantitativa, é fundamentada apenas nas respostas registradas nos questionários, conforme pode ser verificado no Anexo I. Enquanto isso, boa parte das conclusões deste trabalho se baseiam nas discussões estabelecidas durante o preenchimento das questões. A princípio, havíamos planejado utilizar o primeiro período para que os alunos respondessem ao questionário e os dois últimos para discutí-lo. Mas diante da curiosidade manifesta e dos comentários feitos pelos alunos enquanto escreviam, julgamos interessante aproveitar o momento profícuo para estabelecer o debate ao fim de cada resposta. Das oito questões propostas no questionário, quatro foram baseadas em questões utilizadas por Fischbein (questões 3, 4, 5 e 6). Já as questões 1, 2 e 8, elaboradas por nós, possuem caráter de maior subjetividade, salientando a natureza do nosso trabalho. O que não nos impedirá de comparar resultados das duas pesquisas quando julgarmos conveniente

Para apresentar e analisar os resultados alcançados na prática, dividimos as questões em quatro seções, a saber, “O trunfo de Cantor”, “Paradoxo de Galileu e os obstáculos epistemológicos”, “Paradoxos de Zenão, continuidade e o infinito atual”, e “Tentativas de definição do infinito”.

4.1 O trunfo de Cantor (Questão 2)

2) Crie uma regra para ordenar os seguintes números em um mesmo conjunto:

2/2 2/4
174/3
1/2 6/995 3/3
10/3
4/2 10/5



Gostaríamos que os alunos experimentassem as possíveis dificuldades envolvidas na atividade de pôr um conjunto em ordem para que, mais tarde, quando falássemos em não enumerabilidade dos irracionais pudessem se apropriar desta noção com maior naturalidade. Então propusemos a questão 2, mas por receio de que os alunos se confundissem com o enunciado, pedimos antes para que sugerissem maneiras de ordenar as palavras “Anelise”, “Ana” e “Mateus”. Quase todos sugeriram ordem alfabética, que foi, então, enunciada com alguma dificuldade. Há que se registrar aqui a interessante capacidade de transitar entre discursos de um dos alunos do segundo ano que, à pergunta do compenetrado professor “por que Mateus fica por último?” responde, “porque é um cavalheiro”. A segunda sugestão mais frequente foi considerar o número de letras das palavras.

Para o conjunto de frações em questão, foram consideradas 15 maneiras diferentes de ordenação, desde “por as frações em ordem alfabética” a “tirando a raiz quadrada”, passando por “sorteio dos elementos”. Talvez por causa do modo horizontalizado como as frações estavam dispostas, o critério mais comum de ordenação foi considerar a ordem crescente dos numeradores. Mas das 64 respostas neste sentido, apenas 29 diferenciaram na regra o caso em que os numeradores fossem iguais, como em 2/2 e 2/4. Em geral foram propostas maneiras relativamente eficientes, mas algumas respostas acusaram dificuldades importantes, como a de Luana, 3º ano: “Olhei para o primeiro número. Olhei para o segundo número. Olhei para o terceiro número. E assim por diante.”

Feito isto, comentamos que o conjunto posto em ordem poderia ser enfileirado lado a lado com um subconjunto dos naturais. E que, no caso de conjuntos infinitos, sempre que essa relação pudesse ser estabelecida, estaríamos diante de um conjunto enumerável. Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a **N**, assim introduzimos a idéia de bijeção e equivalência entre conjuntos, dois dos maiores trunfos na teoria dos números transfinitos, que serão melhor discutidos na questão 3.

4.2 Paradoxo de Galileu e os obstáculos epistemológicos (Questões 1, 3 e 4)

No Livro I dos seus Elementos, Euclides define: um ponto é aquilo que não tem partes e uma linha é um comprimento sem largura. Algumas páginas adiante seu primeiro postulado diz: dados dois pontos, há um segmento de reta que os une. Não conhecemos na natureza objetos que não tenham parte, tampouco comprimentos sem largura, ou seja, ponto e reta não podem resultar de nossas experiências sensíveis, são, portanto, abstrações. Como tais objetos não existem na realidade, utilizamos modelos mentais para representá-los. Fischbein (2001) propõe uma pequena mancha para o ponto e um fino risco desenhado para as linhas geométricas. A partir destes modelos pode-se codificar, interpretar e compreender axiomas e teoremas. Vamos considerar, por exemplo, as questões:

Quantos pontos duas retas podem ter em comum? Recorremos ao modelo mental para inferir que duas retas, ou não têm nenhum ponto em comum, no caso de serem paralelas ou reversas, ou são secantes e têm apenas um ponto em comum, ou ainda são coincidentes e têm infinitos pontos em comum.

Qual é a menor distância entre dois pontos? Visualmente concluímos que a menor distância entre dois pontos é obtida pela medida do segmento de reta que une esses pontos. Estas respostas estão intimamente relacionadas ao modelo pictorial previamente estabelecido, sem ele seria muito difícil, quando não impossível, estabelece-las. Os modelos mentais têm um papel essencial para o raciocínio geométrico, apesar do fato de que os objetos originais da geometria serem abstrações.

Newton propõe um modelo diverso do de Euclides, dos infinitésimos de Leibniz e dos posteriores utilizados por Cantor para definir pontos e retas. E em termos desse modelo, estrutura um dos maiores prodígios da cultura humana em todos os tempos, o Cálculo. Vejamos:

> No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que éstas sean, sino como descritas por um movimiento continuo. Las líneas no son descritas y engendradas por la yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de pontos; las superficies por el movimiento de las líneas; los sólidos por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de los lados; los tiempos por um flujo continuo. Considerando, pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según que lo hagan con mayor o menor velocidad, busqué um método para determinar las magnitudes partiendo de las velocidades de los movimientos o aumentos que las

> engendran. Llamando fluxiones a las magnitudes engendradas, di, hacia los años 1665-1666, con el método de fluxiones, del que haré uso en la cuadratura de curvas. (Newton apud Frant, 2007)

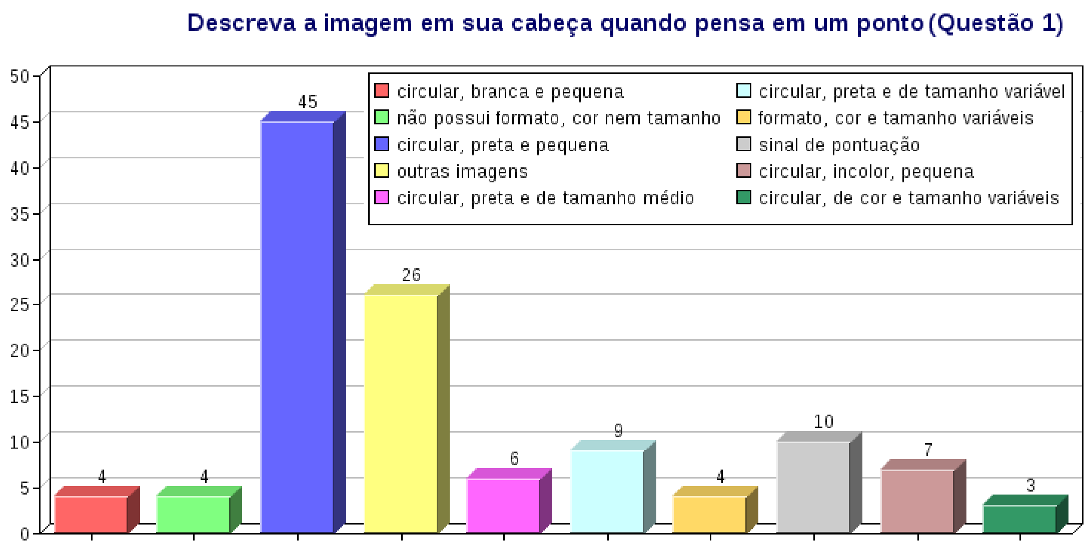
O filosofo francês Saint-Martin, já no século XIII, estabelece uma curiosa definição sobre a natureza da reta atribuindo a ela características nitidamente humanas:

> O objetivo da linha reta é perpetuar, até o infinito, a produção do ponto do qual ela emana, no entanto, a linha curva limita, em cada um de seus pontos, a produção de uma linha reta, já que ela tende a destruí-la constantemente e pode ser considerada, por assim dizer, como inimiga da reta. Não existe nenhuma característica comum a estes dois tipos de linha, portanto não pode haver uma medida comum possível de ser aplicada às duas (Saint-Martin, 1994).

Diante destas observações, julgamos conveniente propor aos alunos que falassem a respeito dos seus modelos mentais para que, num segundo momento (Questão 4), pudéssemos analisar as relações estabelecidas de maneira mais significativa. Assim surgiu a primeira questão:

1) Descreva a imagem em sua cabeça quando pensa em um ponto (possui tamanho, formato, cor?).

O gráfico a seguir mostra as respostas mais freqüentes.



Note que, para interferirmos o mínimo possível nas respostas, não perguntamos “qual o tamanho, formato e cor”, mas apenas se tais estruturas eram pertinentes. Mesmo assim apenas 4 alunos responderam que um ponto não possui formato, cor nem tamanho. Já para 45 alunos, o que equivale a 38% de todas as repostas, o modelo mental relacionado ao ponto é circular, preto e pequeno. Não se pode desconsiderar o fato de que a grafite usada em lapiseiras e lápis escreve em preto (cinza escuro) e de que na escola costumarmos representar um ponto pressionando estes instrumentos contra o papel, o que resulta na imagem descrita. Bom, talvez não seja por acaso que a terceira cor mais lembrada foi azul (3 vezes), já que é muito comum o uso de canetas azuis em sala de aula. A surpresa aqui fica por conta das 4 pessoas que imaginam o ponto como uma estrutura branca. Para Joana, do 3º ano, o modelo envolve, não só o ponto, mas também o contexto onde é visualizado: "eu imagino um ponto branco no meio do nada preto". Não há referência nos gráfico a repostas dadas por menos de 3 alunos. Por isso transcreveremos trechos de respostas menos frequentes, mas não menos interessantes:

"Ponto não tem forma porque a partir dele fazemos as imagens." (Jenifer, 2º ano)

"Eu penso na letra "i", porque tem um ponto em cima da letra i." (Rita, 2º ano)

"Ponto é uma reta que junta dois pontos ou mais, formando um triângulo, retângulo, quadrado." (Luciano, 2º ano)

"Grande como uma borracha, quadrada e verde." (Jéssica, 3º ano)

Algumas respostas, como é o caso dessa última, me pareceram tão extravagantes que fiz questão de conversar individualmente com seus autores para me certificar de que tinham entendido bem a questão ou de que a resposta não se tratava de uma brincadeira. Mas de fato, Jéssica, que respondeu aos demais exercícios de maneira absolutamente sóbria, reiterou que a figura em sua cabeça era um paralelepípedo verde. Bom, nem se quiséssemos, conseguiríamos esgotar todas as possibilidades e interpretações desta questão. Então vamos nos dar por satisfeitos com o propósito inicial, ou seja, preparar o terreno para os próximos exercícios, e seguir adiante analisando a questão 4.

4) Considere o conjunto de todos os pontos do segmento AB e o conjunto de todos os pontos do segmento CD. Qual tem mais elementos? Justifique sua resposta.

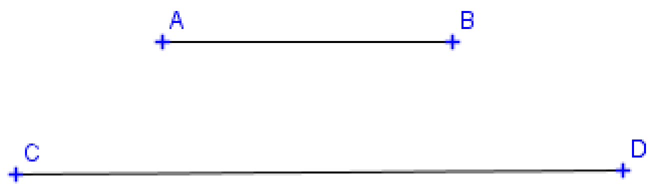
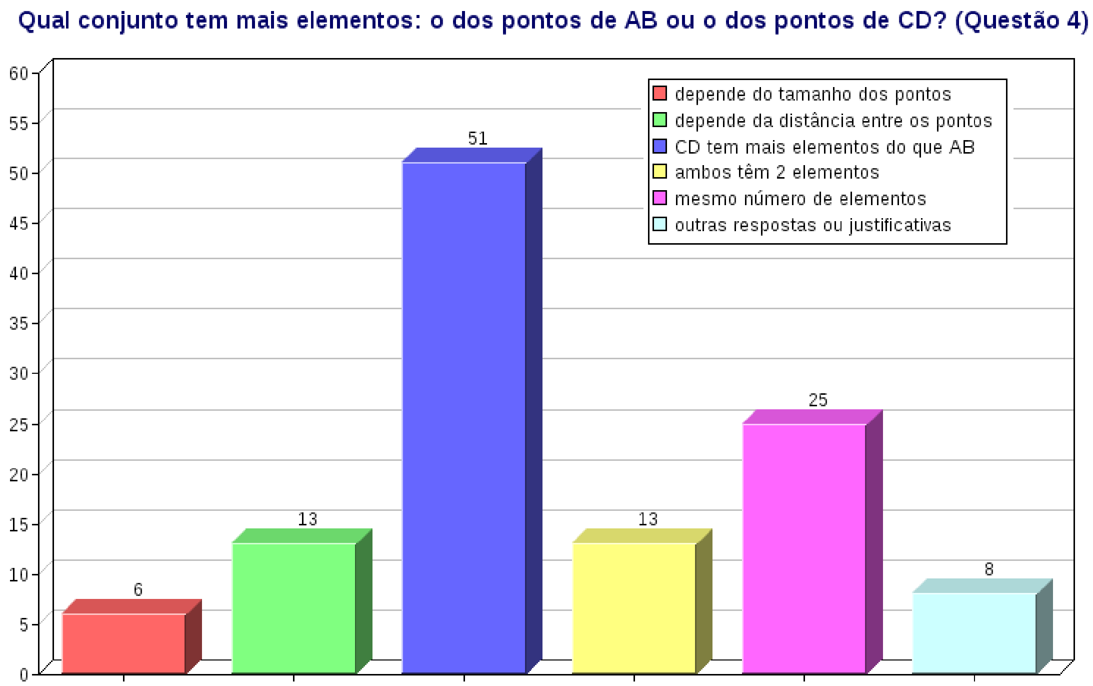


Figura 8: Equipotência entre segmentos diferentes

No primeiro capítulo deste trabalho mostramos como Cantor provou, mais do que a equivalência destes dois conjuntos, a equipotência entre o conjunto dos pontos de qualquer segmento e o conjunto de todos os pontos da reta. Não esperávamos que os alunos utilizassem as mesmas estratégias de Cantor, o que realmente não aconteceu. O proposto era apenas entender como os modelos mentais relatados anteriormente continuariam a interferir no processo de raciocínio. Mas, além disso, tivemos uma grata surpresa, conforme será relatado nos próximos parágrafos.



Como era previsto uma grande quantidade de alunos afirmou que o conjunto dos pontos do segmento CD tinha mais elementos. Jéssica escreveu: “CD pois o comprimento no desenho é maior que AB. Sendo assim, cabe mais elementos”. Muito parecida foi a resposta da Luana, do 3º ano: “O maior é o CD pois tem mais espaço e cabe mais coisas”. Esta é uma conseqüência direta do modelo mental a que temos nos referido. Ora, se um ponto possui tamanho, então ocupa espaço. Logo, um segmento de reta de maior comprimento deverá possuir mais pontos. Talvez essa quantidade, 44% dos alunos, pudesse ser ainda maior se as discussões estabelecidas já não os tivessem feito perceber a natureza contraditória do infinito, especialmente debatida na questão 3 como veremos adiante. Creditamos a isso boa parte das 25 respostas afirmando que CD e AB tinham o mesmo número de elementos. Mas também teve quem realmente julgou razoável que os conjuntos fossem equivalentes, a saber, 3 dos 4 alunos que afirmaram que um ponto não possuía formato, cor nem tamanho. Dois alunos justificaram a equivalência ao fato de não existir distância entre os pontos. Magnus, 2º ano, afirmou: “os dois segmentos têm o mesmo número de elementos apesar de um ser maior e o outro menor é como se os dois fossem de 0 a 1.

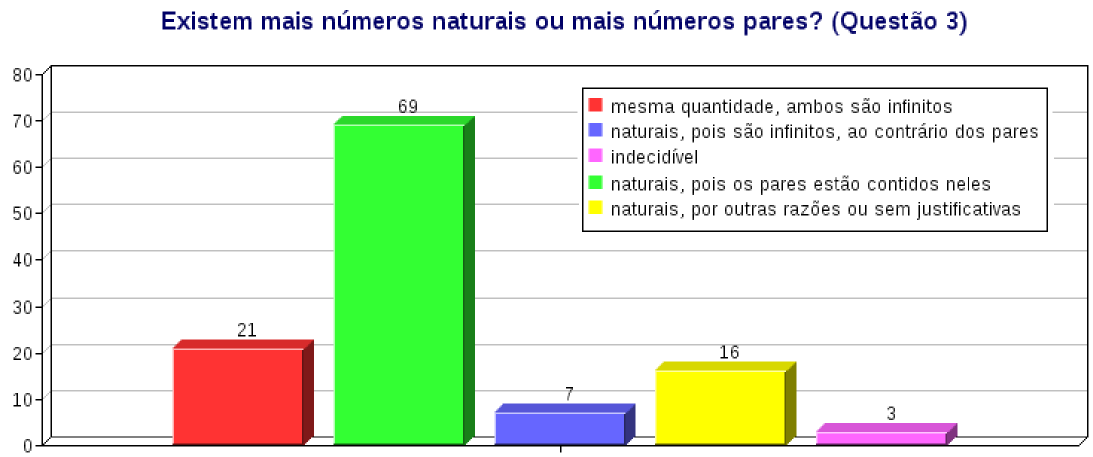
Na pesquisa de Fischbein, exercícios parecidos com este davam origem a duas categorias de respostas: conjuntos equivalentes pois são ambos infinitos (mais tarde discutiremos melhor esta questão) ou o segmento mais comprido possui mais pontos. Já na nossa pesquisa duas outras categorias importantes precisaram ser incluídas. O sistema de regras construído por alguns alunos para solucionar a questão foi mais elaborado do que o apresentado por Fischbein.

Seis respostas consideraram que se um ponto é um círculo pequeno, então ele possui tamanho e logicamente o tamanho do ponto influencia na quantidade de pontos em um segmento. É o que pensa Rita, 2º ano: “eles (segmentos AB e CD) podem ter o tamanho diferente, mas podem ter a mesma quantidade, por exemplo, eu posso ter uma folha pequena e fazer pontos pequenos e ter uma folha grande e fazer os pontos maiores”. Jenifer, também do 2º ano, afirma que “depende do tamanho dos pontos”. Sua colega Scheila, baseia seu raciocínio de maneira semelhante e conclui: “o ponto pode ter o tamanho de uma cidade ou até de um estado”.

Mas, segundo 13 alunos, não é só o tamanho dos pontos que define a quantidade de pontos de um segmento. Este valor depende também da distância entre eles. Para Jackson, do 3º ano, a resposta “depende do tamanho e da distância de cada ponto, se forem do mesmo tamanho, a distância é maior”. Carolina, 2º ano, é ainda mais clara: “têm a mesma quantidade de pontos porque é só o espaço entre os pontos que faz mudar o tamanho da reta”. Por último, para Jonathan, “depende, porque a quantidade de pontos depende da variação da distância entre os pontos”.

Houve ainda uma quantidade significativa de alunos para quem o modelo de reta formada por infinitos pontos não é natural. É o caso é o caso de Gustavo, 3º ano, para quem “ambos segmentos têm dois pontos. São iguais independente de seu tamanho, uma reta sempre terá 2 pontos”. Outras 12 pessoas responderam que ambos os segmentos tinham 2 pontos.

3) Existem mais números naturais N= {1, 2, 3, 4,...} ou mais números pares P = {2, 4, 6, 8, 10, ...}? Justifique sua resposta.



Esta é uma questão muito importante porque coloca os alunos de frente com a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos. Vimos no primeiro capítulo o paradoxo estabelecido por Galileu ao comparar o conjunto dos quadrados perfeitos com o de suas raízes. Mais uma vez estamos diante de uma aparente contradição provocada pela intuição dos gregos: o todo é maior que a parte.

Dos 116 alunos que responderam à questão, 92 afirmaram que o conjunto dos naturais é maior, 69 justificativas estavam relacionadas ao fato de os pares serem uma parte dos naturais, como diz Jaqueline, 3º ano: “(existem mais) números naturais, ao considerarmos apenas os números pares estamos incluindo os ímpares que participam do conjunto dos naturais. Portanto o conjunto dos naturais é maior”.

Segundo Bergson (2010), nosso espírito possui uma tendência irresistível de considerar como mais clara a ideia que costuma utilizar com freqüência. A experiência concreta, dia após dia, vai consolidando o modelo “todo maior que a parte” de maneira tão efetiva que acabamos por admitir sua generalidade, desconsiderando qualquer outra possibilidade. Mesmo quando esse princípio é enunciado a uma pessoa que nunca o tenha escutado é muito provável que o aceite como verdadeiro. O sentimento de uma certa evidência imediata, também denominado intuição geralmente acompanha essa afirmação. A palavra intuição tem sido usada de diferentes maneiras em filosofia. Das duas perspectivas que serão utilizadas neste trabalho e que constituem implicitamente um de seus alicerces, será apresentada agora a de Fishbein (1979), segundo a qual:

> We use the term intuition for direct, global, self-evident forms of knowledge. The statement: "If A > B and B > C, then A > C" is an example of such an intuitively accepted truth. Of course, not all intuitively accepted statements are really self-evident or correct. (1979, p. 6)

O autor usa o termo intuição para definir formas de conhecimento imediatas, globais e auto-evidentes. A proposição: “se A > B e B > C, então A > C” é um exemplo de como uma intuição pode ser aceita como verdade. Naturalmente, nem todas as intuições são realmente auto-evidentes ou corretas. As dificuldades que acompanham o conceito de infinito vêm da profunda contradição entre este conceito e sua intuição.

Para Paula, 3º ano, existem mais números naturais, “pois se fosse comparar, por exemplo até o 1000, em números naturais haveria 1000 números e pares haveria somente 500”. Nas experiências da vida real esquemas intelectuais são adaptados a objetos ou eventos finitos, o que influenciou, não só a opinião de Paula, como a da maioria dos alunos. Para três deles tal pergunta simplesmente não podia ser respondida, conclusão parecida com a de Galileu, para quem os atributos de igual, maior e menor não se aplicam ao infinito mas somente a quantidades finitas.

A princípio, havíamos planejado não comentar as respostas de algumas questões antes que todas fossem resolvidas, mesmo para evitar que as discussões influenciassem os modelos pessoais e as respostas posteriores. Mas ao invés de cumprir o plano, nas palavras de Larrosa (2002), fomos “sujeitos da experiência”.

> Vamos agora ao sujeito da experiência. Esse sujeito que não é o sujeito da informação, da opinião, do trabalho, que não é o sujeito do saber, do julgar, do fazer, do poder, do querer. Se escutamos em espanhol, nessa língua em que a experiência é “o que nos passa”, o sujeito da experiência seria algo como um território de passagem, algo como uma superfície sensível que aquilo que acontece afeta de algum modo, produz alguns afetos, inscreve algumas marcas, deixa alguns vestígios, alguns efeitos. Se escutamos em francês, em que a experiência é “ce que nous arrive”, o sujeito da experiência é um ponto de chegada, um lugar a que chegam as coisas, como um lugar que recebe o que chega e que, ao receber, lhe dá lugar. E em português, em italiano e em inglês, em que a experiência soa como “aquilo que nos acontece, nos sucede”, ou “happen to us”, o sujeito da experiência é sobretudo um espaço onde têm lugar os acontecimentos.

Os alunos praticamente exigiam que as “respostas certas” fossem discutidas ao fim de determinadas questões. Então, mesmo considerando os possíveis prejuízos, foi o que fizemos. Depois de respondida a questão 3, enquanto conversávamos sobre exemplos de partes que são menores do que o todo e da peculiaridade dos conjuntos infinitos de serem equivalentes a um subconjunto próprio, uma das alunas chamou atenção para o fato da “letra f fazer parte da palavra efe e ao mesmo tempo ser ela”. Pela naturalidade como que a aluna fez a observação, essa era uma questão que a vinha incomodando há algum tempo. Bom, ao contrário da conclusão apressada da aluna, isso não torna o conjunto das letras de f infinito, mas é um bonito exemplo de que a intuição dos gregos não era tão evidente quanto se pensava.

Para apresentar a justificativa matemática atualmente aceita para questão 3, começamos recorrendo à ideia de bijeção introduzida no exercício 2. Sem dúvida nenhuma, a noção de bijeção foi definitiva para o sucesso das estratégias de Cantor. O mais interessante é que mesmo justificativas tão consistentes e simples como as dadas por Cantor em sua teoria não foram suficientes para derrubar os nocivos preconceitos da comunidade científica de sua época. Perceba na descrição dada por Ávila (2006), como nos relacionamos com este conceito desde muito cedo:

> "Observe que é essa noção de equivalência (bijeção) que dá origem ao conceito abstrato de número natural. De fato, o que faz uma criança de quatro ou cinco anos de idade constatar que numa cesta há três laranjas, noutra três maças, e ainda noutra três ovos? Ela chega a estas conclusões - mesmo sem perceber - por constatar que é possível "casar" os elementos de qualquer uma destas cestas com os elementos de qualquer outra de maneira biunívoca. É essa abstração dos elementos concretos dos conjuntos equivalentes de diferentes objetos que nos leva a formar a noção de número natural, um fenômeno que ocorre muito cedo em nossas vidas."(p.33)

Apesar de nossa pesquisa estar lidando com alunos de segundo e terceiro anos, optamos por não usar o conceito formal de bijeção. Preferimos utilizar exemplos naturais aos alunos, como o caso do cinema que estará lotado se para cada cadeira houver exatamente um espectador. Recorremos também ao célebre exemplo dado por Russel, segundo o qual, se não houvesse poligamia e poliandria em parte alguma do mundo, o número de maridos vivos a qualquer momento seria exatamente igual o numero de esposas vivas. A relação entre marido e mulher poderia ser chamada, então, relação de "um-para-um". Só precisamos considerar então a relação P = 2N, para encontrarmos um único número P (par) para qualquer N (natural) dado. Dizemos que o conjunto dos números pares é equivalente ao conjunto dos naturais, ou seja, os pares são enumeráveis.

Ao perceber a equivalência entre os conjuntos Matheus, do 3º ano, se manifesta: "Isso não é matemática é filosofia." De fato as diferenças entre matemática e filosofia já não eram tão claras quanto outrora. E isso nem de perto era um problema. O que não se passava pela cabeça de Mateus é que as coisas iam ficar ainda mais incríveis: infinito nem sempre é igual ao infinito.

4.3 Paradoxos de Zenão, continuidade e o infinito atual (Questões 5, 6 e 7)

5) Dividimos o segmento AB em duas partes iguais (figura 9). O ponto M é o ponto médio do segmento. Agora dividimos AM e MB. Os pontos R e S representam os pontos médios dos segmentos AM e MB, respectivamente. Continuamos

dividindo da mesma maneira. Em cada divisão, os fragmentos tornam-se menores e menores. Chegaremos a um momento em que os fragmentos serão tão pequenos que não podemos continuar dividindo? Explique sua resposta.

Figura 9: Subdivisão de AB

6) Consideremos o ponto C localizado no segmento AB (figura 10). Se dividirmos e subdividirmos o segmento como na questão 2, algum ponto da subdivisão coincidirá com C?

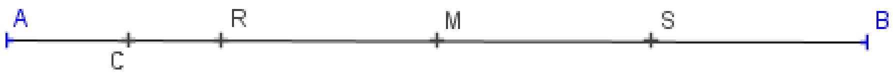
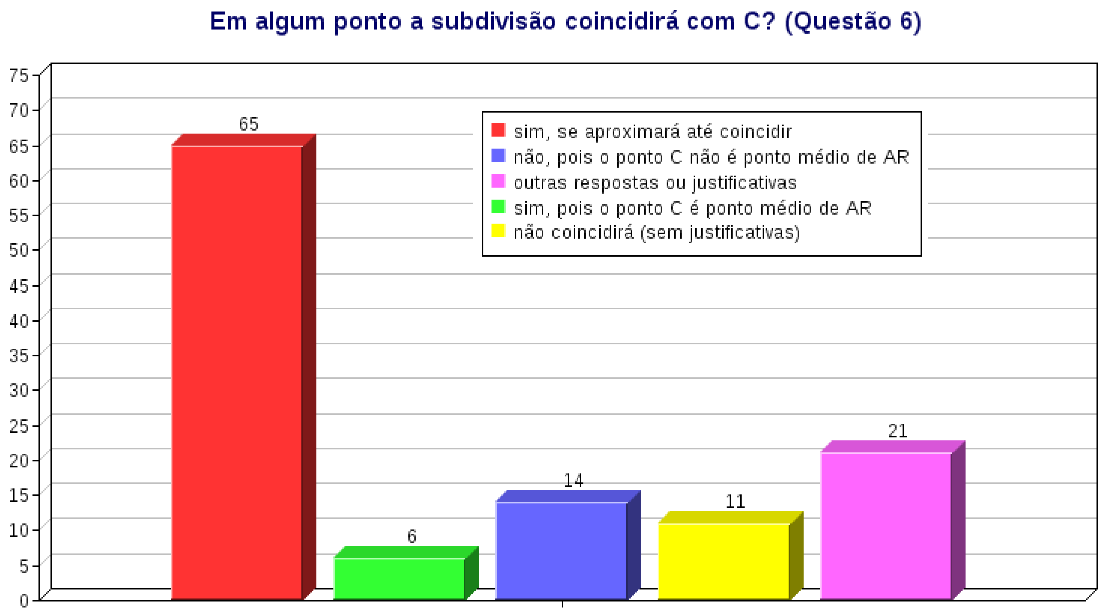


Figura 10: O lugar de C na subdivisão de AB



Na questão 5, enquanto 44 alunos acharam que poderíamos continuar a divisão infinitamente outros 60 responderam que deveria haver um limite para o processo. Para Jéssica, 2º ano: "não vai dar pra continuar pois uma hora estará tão pequeno que ninguém conseguirá ver o risquinho". Já Gabriel, 2º ano, observa: "sim, o máximo que poderemos dividir é 0,00000...1, menor que isto, fica zero". Apesar de ambos alunos acharem que haverá o momento em que os fragmentos serão tão pequenos que não poderão ser divididos, para Jéssica isso decorre do simples fato de não poder ver o fragmento. Já Gabriel supera a experiência sensível, criando uma notação interessante, mas que acaba por induzi-lo à uma conclusão inconsistente.

Atente para o uso do verbo "passar" nas próximas frases. Para Bruna, 2º ano, "não vai dar pra continuar porque chegará ao início ou ao fim, daí não dá para passar do ponto A ou do B". Gustavo, 2º ano, escreve: "chegaremos ao fim, mas antes passaremos por infinitos pontos". O verbo passar parece exprimir a idéia de movimento. Já não estamos falando da operação estática de dividir fragmentos infinitamente pequenos, mas de um movimento que se dá em direção aos extremos. Agora vejamos a observação de Éderson, também do 2º ano, que nunca tinha ouvido falar de Zenão: "se eu sair caminhando, uma hora eu vou ter que chegar na parede".

Ora, mas o movimento não pode ser decomposto em uma infinidade de instantes estáticos como de costume se faz com o espaço. Da mesma maneira que multiplicando as fotografias de um objeto, sob muitos aspectos, não se obtém a reprodução da sua materialidade. O espaço é então um modelo tácito para o tempo e sucessivamente para o movimento.

Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como constituídos de pontos e instantes, o que culminou com os paradoxos de Zenão e o *Horror Infiniti*, como vimos no primeiro capítulo. Mas o espaço e o tempo têm também uma propriedade tão difícil de definir quanto de intuir, conhecida como continuidade. O que modifica completamente o panorama. Discutiremos melhor a continuidade na próxima questão.

A questão 6 não possui apenas uma resposta correta pois dependendo da posição de C, a subdivisão poderá ou não coincidir. A maioria dos alunos que respondeu que a subdivisão nunca ia coincidir com o ponto baseou sua justificativa no fato de que C não é ponto médio de AR, como no caso da aluna Pamela, 2º ano: “ele não está bem no meio”. Bom, de fato, como C não é ponto médio de AR, não coincidirá logo com a primeira divisão. Mas isso não implica que não possa ser definido por qualquer uma das outras infinitas subdivisões.

O mais significativo nesta questão foram as 65 justificativas de que a subdivisão definirá pontos cada vez mais próximos de C até que coincida com este ponto. É o que justifica Tatiana, 3º ano: “quanto mais subdividir mais perto vai chegar do C”.

Até agora falamos de como modelos mentais interferiram inconscientemente na evolução do conceito de infinito ao longo da história, bem como na sua compreensão na sala de aula. Outra idéia que influencia concepções relacionadas ao infinito é o que Fischbein (2001) chama de capacidade inesgotável do infinito. Na questão 6, os alunos que disseram que chegaria não se deram conta que os números irracionais, por definição, não poderiam ser atingidos por tal divisão. Ora, se posso continuar dividindo infinitamente então todos os pontos podem ser atingidos. Aqui, uma sutileza interessante, há ainda a influência de um outro modelo: um infinito não pode ser maior do que o outro. O resultado da questão 3 já assinalava esta influência quando vinte e uma pessoas justificaram que o conjunto dos pares tem o mesmo número de elementos que os naturais: infinitos.

Escolhemos esta questão para introduzir a noção de conjunto contínuo. Nossa expectativa era estabelecer uma discussão a partir da noção de números irracionais, mas esta não estava tão consolidada quanto o esperado, como já havíamos percebido nos comentários de questões anteriores. Naiara, 2º ano, por exemplo, diz a respeito da questão 3: "Naturais são quase todos os números". Parece ser uma impressão recorrente entre os estudantes que os números irracionais são muito pouco abundantes. Na prática tem-se contato na escola com π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e não muito mais do que isso. O que, obviamente, influencia a idéia das pessoas a respeito do conjunto dos reais, dificultando a percepção de suas peculiaridades. É o que acontece com Raul, 2º ano, justifica que o ponto C na questão 6 será atingido pois "os valores vão se aproximando, por exemplo, se eu encher a reta de pontos eu posso afirmar que todos os pontos são um meio".

Contínuo vem de con-tenere (ter junto, manter unido, segurar). Contínuo é o que está imediatamente unido a outra coisa, sem lacunas nem interrupções. Da mesma origem vem conter, conteúdo, continente, contente (o que cabe em si, e não cobiça alargar-se). Mas o que de fato há na grandeza contínua que a distingue dos números racionais? Galileu e Leibniz tinham julgado que a continuidade de pontos sobre uma reta era consequência de sua densidade - isto é, de que entre dois pontos quaisquer existe sempre um terceiro. Bom, neste caso, a probabilidade de que o ponto C seja atingido pela subdivisão, aumenta significativamente. Porém, os números racionais também têm essa propriedade, no entanto não formam um conjunto contínuo.

Conforme Boyer (1974, p.410), refletindo sobre a questão, Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta - a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto sobre o segmento. Em qualquer divisão dos pontos do segmento em duas classes tais que cada ponto pertence a uma e somente uma, e tal que todo ponto numa classe está a esquerda de todo o ponto da outra, existe um e só um ponto que realiza a divisão. Como Dedekind escreveu: “por essa observação trivial o segredo da continuidade será revelado”.

Por considerarmos um desgaste cognitivo muito grande, optamos por não apresentar os cortes de Dedekind na sala de aula. Mas fizemos questão de salientar, ainda que sem nenhuma formalidade, a diferença entre a linha numerada racional, onde os números adjacentes encontram-se infinitamente juntos e a linha numerada real onde eles se encontram mais do que infinitamente juntos. Em Tractatus de Continuo, Bradwardine diz que as grandezas contínuas, embora contendo um número infinito de indivisíveis, não são formados destes átomos matemáticos, mas são compostos de um número infinito de contínuos da mesma espécie. (ibidem, p.191)

A compreensão deste conceito parece esbarrar nos próprios limites, quando não da razão humana, de sua linguagem. Conscientes de todas as armadilhas carregadas pelas metáforas, gostaríamos de relacionar a bonita figura criada por Bergson com as dificuldades acima descritas:

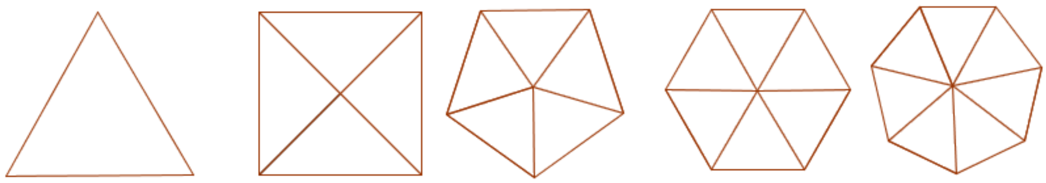
> Onde existe uma fluidez de tonalidades evanescentes que se interpenetram, ela (a inteligência) só vê cores nítidas, e por assim dizer sólidas, que se justapõem como a diversidade de pérolas de um colar: necessário lhe é supor então um fio, não menos sólido unindo as pérolas entre si. Mas se esse substrato incolor é a todo momento colorido por aquilo que o recobre, na sua indeterminação é para nós como se não existisse. Ora, nós, precisamente, só temos percepção do que é colorido.(Bergson, 2010, p.18)

7) Se repetirmos os seguintes processos infinitas vezes, qual será o resultado?

a) 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999

b)1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... =

c)

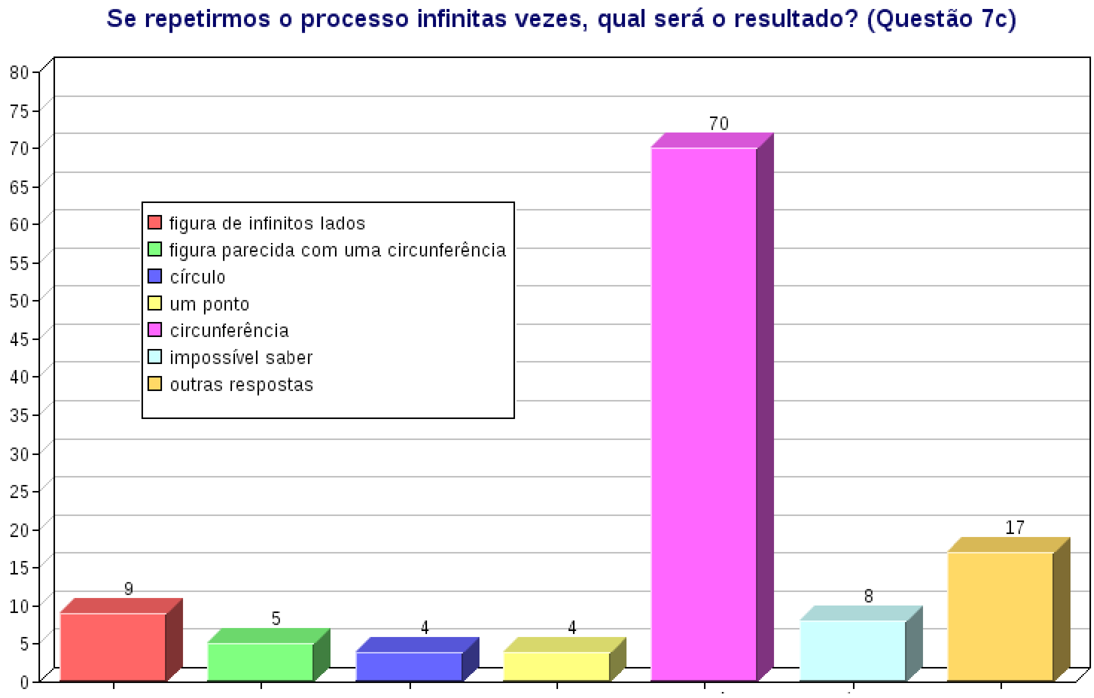


Conforme vimos no Capitulo I, o infinito atual, compreendido como estrutura real e completa sempre causou, entre as melhores almas, sérias dificuldades. Para São Tomás de Aquino tal noção comportava um desafio direto à natureza única, infinita e absoluta de Deus. De modo que praticamente toda matemática até o fim do século XIX foi estruturada sobre uma visão potencial do infinito. O infinito potencial é admitido apenas como processo que se repete indefinidamente, como uma iteração que não acaba e por isso não pode ser analisada como um todo.

De acordo com Ortiz (1994), Kant, no século XIX, concordava com Aristóteles ao assinalar que nunca podemos chegar ao infinito atual. Gauss, em 1831, também enfatiza seu protesto contra o uso do infinito como algo consumado: “Protesto contra o uso de uma quantidade infinita como uma entidade atual, esta nunca se pode permitir em matemática. O infinito é só uma forma de falar, quando na realidade deveríamos falar de limites aos quais certas razões podem aproximar-se tanto quanto se deseje, enquanto outras são permitidas crescer ilimitadamente”.

Toda a contradição desencadeada pelo infinito atual vem do fato de nossa mente estar essencialmente adaptada a realidades finitas de espaço e tempo. Os modelos mentais são mais adequados para lidar com objetos ou conjuntos finitos, transpor este obstáculo requer destruir esquemas mentais que demoraram anos para serem construídos no indivíduo (milhares de anos na Cultura).

A influência do infinito potencial fica muito nítida quando são analisados os resultados da questão 7. Na letra “a”, 17 alunos perceberam que o número estava se aproximando cada vez mais de 1 mas, nas 5 turmas analisadas, ninguém respondeu que o resultado final era exatamente 1. No caso da letra “b”, houve uma certa dificuldade de compreensão da sentença, 37 alunos sequer perceberam que se tratava de uma soma de parcelas cada vez menores. Mesmo recorrendo para o desenho da situação no quadro ninguém respondeu que o resultado da soma era igual a 2. Os resultados na letra “c”, estes sim, foram mais interessantes, como podemos observar no gráfico a seguir.



Na opinião de Paulo, 3º ano, “a cada vez que aumentarmos os lados a figura se torna mais arredondada. No infinito se tornará um ponto”. Paulo, que havia respondido que um ponto é uma pequena circunferência preta, permanece coerente com sua linha de pensamento, o que reforça a ideia de que os modelos mentais podem constituir estruturas muito complexas.

Alguns alunos tiveram dificuldades para perceber a regularidade do processo como Willian, 2º ano: “eu acredito que não tem como fazer isso, pois pensando no infinito, sei lá, pode ter mil, milhões de lados e isso não tem como eu fazer”. E Jackson, 3º ano, para quem não haverá nenhum resultado “pois não tem como formar uma figura com infinitos lados”. A grande maioria dos alunos respondeu que a figura final seria uma circunferência, aparentemente ignorando o que acontecia com as diagonais. Para quatro estudantes o resultado seria um círculo.

Uma última observação que julgamos da maior relevância. Enquanto a turma 223 resolvia esta última questão, Marcos, ao que pareceu, não pôde conter seu entusiasmo, e se manifestou: “então podemos desenhar infinitos lados enquanto desenhamos um círculo!”. Talvez minha análise esteja equivocada, mas pelo menos por um instante, o aluno teve uma experiência com o infinito atual. Como no poema de William Blake, pôs o infinito na palma de sua mão. Raras vezes pude usar a palavra entusiasmo, do grego *en* (dentro) + *theos* (Deus), de maneira tão adequada. Para perplexidade de São Tomás de Aquino, Marcos pôs Deus dentro de si.

4.4 Tentativas de definição do infinito

Como comentamos no primeiro capítulo, diz-se que um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo, caso contrário S se diz um sistema finito. Se por um lado, todo esse formalismo e rigidez nos permite, nas palavras de Escher, “matematizar” o infinito, por outro parece deixar escapar alguma coisa da essência do conceito. De modo que quisemos saber quais eram as impressões dos alunos a este respeito. Daquilo que foi respondido, escolhemos alguns trechos que seguem transcritos a seguir:

“Por exemplo, o universo é infinito e a borracha é infinita, nunca acaba.” (Daiane, 2º ano)

“A distância entre o céu e a terra é infinita” (Giovane, 2º ano)

“Infinito é uma coisa que vai, vai, vai e nunca chega”. (Juliane, 2º ano)

“Do infinito já falei até com a minha namorada, dizemos que vai ser eterno, mas talvez esse eterno não seja um infinito, ou até seja, pois os sentimentos são”. (Artur, 2º ano)

“Sentimentos, pessoas, oceano, céu, números, bactérias, vírus e praticamente tudo que existe”. (Cíntia, 2º ano)

“O infinito nunca acaba e sempre vai aumentando”. (Bianca, 2º ano)

“Quando pensamos em infinito não devemos pensar somente em números”. (Pâmela, 2º ano)

“O infinito seria um túnel escuro onde se escondem inúmeras coisas, onde você descobre o que tem neste túnel, mas ao descobrir isto você tem que descobrir dentro do que você descobriu e assim sucessivamente”. (Magnus, 2º ano)

“É algo onde é impossível chegar. Por exemplo, onde a casa decimal chega muito perto mas nunca será totalmente zero”. (Valdinei, 2º ano)

“Infinito é uma coisa maravilhosa, no sentido sentimental é uma coisa que nunca terá fim, é magnífico”. (Letícia, 2º ano)

“Eu defino o infinito como uma história que não acaba. Mas quem me dera se nossa vida fosse infinita, acho que os números são infinitos porque nunca sabemos quando os números vão acabar. Se os números não fossem infinitos nós teríamos os limites das coisas, de quanto gastar, comer, falar”. (Rita, 2º ano)

“Para mim, infinito é imensidão, é tudo que não chega a um resultado, ou, por exemplo, o céu, onde nós formos o veremos. Então o céu é infinito. As estrelas, se formos contar, nunca chegaríamos a um resultado, pois elas são infinitas. Ou seja, tudo que não podemos contar e ter um resultado, ou tudo o que vemos, como o céu, que não tem limite, é infinito”. (Gabriela, 2º ano)

“Estudiosos até hoje e para sempre ou até o fim do mundo tentarão explicar o universo onde cada vez que descobrimos, menos a gente sabe dele. Onde a luz nos intriga, a única coisa que pode explicar o infinito e o universo é a maravilha de deus”. (Sedenir, 2º ano)

“As cores são infinitas, considerando suas tonalidades”. (Jaqueline, 3º ano)

“Bom, para mim o infinito é uma coisa que não tem como pensar, pois é muito complicado pensar, pois isso não tem fim”. (William, 3º ano)

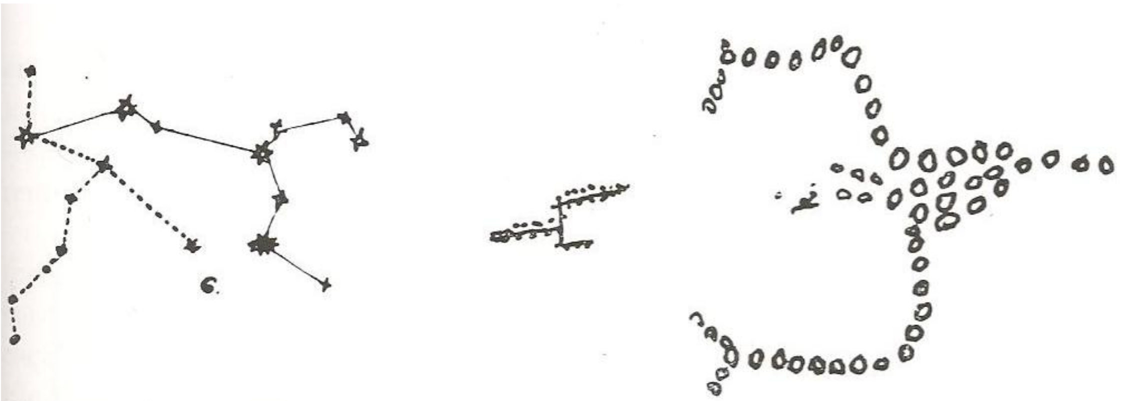
5. CONCLUSÃO

O quão ruim seria se percebêssemos que chegamos até aqui com perguntas a serem respondidas? Pois mais do que isso, as perguntas parecem agora mais abundantes e mais profundas. O que não significa que as conclusões tenham sido pouco freqüentes.

Diferente do trabalho de Fischbein, nossas conclusões não consideram sexo nem série dos alunos pesquisados. Isso por que não percebemos nas respostas nenhuma influência significativa destes fatores. Apesar de não acreditarmos nisso, devemos admitir que talvez essa aparente divergência pode ter sido provocada pela menor quantidade de alunos analisados, 470 alunos em “The intuition of Infinity” e 118 por nós. Ou ainda por termos direcionado nosso interesse para os dois últimos anos do ensino médio, enquanto Fischbein analisou alunos de cinco séries diferentes. Além disso, nossos alunos eram mais velhos, o que pode implicar uma maior homogeneidade no seu grau de maturidade.

Mas, em geral, foram encontrados resultados muito semelhantes entre os trabalhos. Principalmente no que diz respeito aos modelos mentais tácitos utilizados e sua influência nos resultados, como na imaginação de um ponto como uma pequena circunferência preta. Outro resultado semelhante, que talvez seja um subcaso do primeiro, mas que merece ser destacado por sua abrangência, é de que a idéia da capacidade inesgotável do infinito nos conduz à conclusão de que quaisquer conjuntos infinitos são iguais. Daí a resistência tão frequente na assimilação do contínuo.

Assim, nossa primeira conclusão é que aquilo que o aluno já conhece influencia não só na construção dos modelos mentais, como na prioridade dada a determinados modelos em detrimento de outros. Consecutivamente, interfere no próprio modo como um conceito novo é assimilado. Modelos mentais que dizem respeito a um mesmo conceito podem variar de sujeito para sujeito.



73. *A constelação do Leão*, à esquerda.

Suas representações:
74. *Por um Miriti-tapuia*, ao centro;
75. *Por um Kobéua*, à direita.

Figura 11: Constelação de Leão

A figura refere-se à Constelação de Leão, representada ao centro por um índio Miriti-tapuia e à esquerda por um Kobéua. Os índios da América do Sul não vêem na constelação um leão de perfil, em vez disso, projetam ativamente a imagem de um animal conhecido, uma espécie de lagosta, (Gombrich, 2007, p. 89). No chamado “teste de Rorschach” usado em exames psicológicos, o mesmo borrão de tinta pode ser interpretado como um pássaro, um monstro ou um inseto.

A assimilação de um conceito abstrato, como a continuidade de um conjunto infinito, muito mais do que a percepção de um borrão, é suscetível a muitas possibilidades de interpretação, algumas delas, obviamente, equivocadas. Nesse sentido, o erro torna-se uma ferramenta preciosa de diagnóstico. Funciona como um eficaz indicador dos processos cognitivos na aprendizagem da matemática, um retrato loquaz do modelo mental que estrutura a compreensão do aluno.

Nossa segunda conclusão passa por uma particularidade que torna a compreensão do infinito especialmente complexa. Segundo Matos (2003), quando consultamos uma palavra no dicionário, encontramos uma definição ou um sinônimo daquela palavra. Em nenhum dos casos, o dicionário simplesmente apresenta a “coisa” mesma ou o “conceito”. A definição simplesmente nos remete para outras palavras, ou seja, para outros signos. A presença daquilo que procuramos é indefinidamente adiada: ela só existe como traço de uma presença que nunca se concretiza, além disso, na impossibilidade da presença, um determinado signo só é o que é porque ele não é um outro, nem outro. O dicionário, na maioria das vezes, atua como mediador de conceitos e nos direciona a compreender tais conceitos com base em outros que já conhecemos.

Mas, além do infinito não ser fruto de nossas experiências sensíveis, também não se parece com nenhum conceito já conhecido: ou determinado objeto é infinito, ou não possui a principal característica dos objetos infinitos, o que implica não se parecer com eles. Conforme Bergson (2010) observa:

> Nossa inteligência, tal qual a evolução da vida a modelou, tem por função essencial iluminar nosso comportamento, preparar nossa ação sobre as coisas, de prever, dada uma situação, os acontecimentos favoráveis ou desfavoráveis que poderão se seguir. Assim isola, instintivamente, em uma situação, aquilo que parece ao já conhecido; procura o mesmo, a fim de poder aplicar seu princípio de que “o mesmo produz o mesmo. (...) retém das coisas apenas o aspecto repetição. Se o todo é original arranja-se de

> modo a analisá-lo em elementos ou em aspectos que sejam aproximadamente a reprodução do passado. (p.44)

Bom, de certa maneira isso explica as contradições e dificuldades relacionadas ao infinito enfrentadas ao longo da história e refletidas na sala de aula. Mas então, de onde vêm os triunfos que levaram Cantor à teoria dos números transfinitos e o aluno Marcos a visualizar infinitos lados em uma circunferência? Talvez compreender os fenômenos relacionados ao sucesso de Cantor e de Marcos possa constituir um bom ponto de partida para o ensino do infinito.

Para responder a esta última pergunta, precisaremos recorrer a um conceito de intuição diferente daquele proposto por Fischbein, usado por nós no Capítulo II. Vamos considerar a noção de Bergson, (1984):

> "Chamamos aqui intuição a simpatia pela qual nos transportamos para o interior de um objeto para coincidir com o que ele tem de único e, consequentemente, de inexprimível" (p. 14).

A intuição, neste sentido, possui caracteres radicalmente diferentes daqueles que tem a inteligência, penetra o singular, deprecia o símbolo e até, em certo sentido, se rebela contra a própria linguagem.

Enquanto os modelos mentais e a intuição na perspectiva de Fischbein frequentemente servem para confundir e limitar as teorias humanas, a imaginação no sentido bachelardiano e a intuição na perspectiva de Bergson nos permitem ultrapassar as molduras dessa condição, imprimindo algo de sublime em nossa existência.

> "Não podemos imaginar que algures por detrás da estrela mais longínqua do céu noturno, o espaço possa ter um fim, um limite para além do qual "nada" mais existe. O conceito de "vácuo" nos diz ainda alguma coisa, pois um espaço pode estar vazio, de qualquer maneira na nossa fantasia, mas a nossa força de imaginação é incapaz de apreender o conceito de nada no sentido de ausência de espaço. Por isso nos agarramos a uma quimera, a um além, a um purgatório, a um céu e a um inferno, a uma ressurreição ou um nirvana que de novo têm de ser eternos no tempo e infinitos no espaço, e isto, desde que o homem na Terra se deita, senta ou levanta, desde que nela se arrasta e corre, navega, cavalga e voa (e da Terra para fora se projeta)".
>
> Escher

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. Análise Matemática para Licenciatura. Edgard Blucher. São Paulo. 2006.

BACHELARD, Gaston. A Epistemologia. Coleção: O saber da Filosofia. Edições 70. Lisboa. 2001.

BACHELARD, Gaston. A Formação do Espírito Científico. Contraponto. Rio de janeiro. 1996.

BACHELARD, Gaston. O Direito de Sonhar. Bertrand Brasil. Rio de Janeiro. 1994.

BERGSON, Henri. A evolução criadora. São Paulo, Unesp, 2010.

BERGSON, Henri. Cartas, Conferências e outros Escritos. São Paulo, E. Victor Civita, 1984.

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. São Paulo, Edgar Blücher, 1974.

CANTOR, Georg. Contribuições aos Fundamentos da Teoria dos Conjuntos, Transfinitos, 1915. Traduzido por Alessandro Duarte e disponível em: http://www.alessandroduarte.com.br/beitrage.html.LyXconv/index.html (17/06/2012)

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa, 1951

COSTA, Newton Carneiro Affonso da. Introdução aos Fundamentos da Matemática. Globo, Porto Alegre, 1962.

FISCHBEIN, Efrain. Tacit Models and Infinity. Educational studies in mathematics. Volume 48, Numbers 2-3 (2001), 309-329.

FISCHBEIN, Hess e Tirosh. The intuition of infinity.Educational studies in mathematics. Volume 10, Number 1 (1979), 3-40.

FRANT, Janete Bólide. O uso de metáforas nos processos de ensino e aprendizagem da representação gráfica de funções. In: ANPED 30 Reunião anual, 2007, caxambu. Anais da 30° reunião anual da ANPED, 2007.

GALILEI, Galileo. Two new sciences. Toronto, Wall & Thompson. 1989

GOMBRICH, Ernest Hans. Arte e Ilusão: um estudo da psicologia da representação pictórica. 4ª edição, WMF, São Paulo, 2007.

GUILLEN, Michel. Pontes para o infinito: o lado humano das matemáticas. 2ª edição. Gradiva. Lisboa. 1998.

HADAMARD, Jacques. Psicologia da invenção na matemática. Contraponto. Rio de Janeiro. 2007.

HIBERT, David. Sobre o Infinito. Traduzido por W.A.Carnielli a partir do original alemão publicado em *Mathematische Annallen* (Berlim) v. 95 (1926)

LAKOFF, George; JOHNSON, Mark. Metáforas da vida cotidiana. Editora Mercados de Letras, SP. 1979.

KUBRUSLY, Ricardo Silva. O tamanho do Infinito.1999. Artigo disponível em: http://www.im.ufrj.br/~risk/diversos/tamanho.html
(17/06/2012)

LARROSA, Jorge. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Tradução de João Wanderley Geraldi. *Revista Brasileira de Educação.* 2002

MATOS, Cleusa M. Alves de. Revista Espaço Acadêmico, Nº 31, Dezembro de 2003. Conhecimento x Informação: Uma discussão necessária. Disponível em: (http://www.espacoacademico.com.br/031/31cmatos.htm
(17/06/2012)

MIGUEL, Antonio. Três estudos sobre histótia e educação matemática. Universidade estadual de Campinas, 1993. Tese de Doutorado em Educação.

NIETZSCHE, Friedrich. A Vontade de Poder: tentativa de uma transvaloração de todos os valores. Rio de Janeiro, Contraponto. 2008.

ORTIZ, Jose Ramon. El concepto de infinito. Boletín, Venezuela, v1, n. 2, 1994.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito uma História a Contar. Millenium - Revista do ISPV - n.º 34 - Abril de 2008.

SANT-MARTIN, Louis-Claude de. Dos Erros e da Verdade. GLP, lisboa.1994

SUTTON, Clive. Beliefs about Science and Beliefs about Language. International Journal of Science Education, 18(1), 1-18. 1996.

THAGARD, Paul; HOLYOAK, Keith. Mental Leaps: analogy in creative thought. Massachusetts Institute of Technology. 1996.

6. APÊNDICE: Questionário aplicado na experiência didática

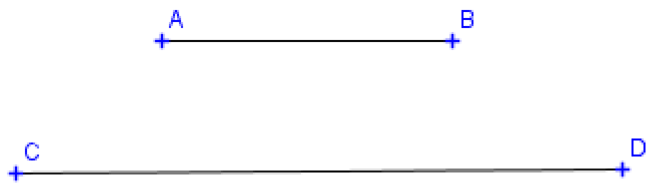
1) Descreva a imagem em sua cabeça quando pensa em um ponto. (possui tamanho, formato, cor?)

2) Crie uma regra para ordenar os seguintes números em um mesmo conjunto:

2/2 2/4
174/3
1/2 6/995 3/3
10/3
4/2 10/5

3) Existem mais números naturais N= {1, 2, 3, 4,...} ou mais números pares P = {2, 4, 6, 8, 10, ...}? Justifique sua resposta.

4) Considere o conjunto de todos os pontos do segmento AB e o conjunto de todos os pontos do segmento CD. Qual tem mais elementos? Justifique sua resposta.



5) Dividimos o segmento AB em duas partes iguais (figura 2). O ponto M é o ponto médio do segmento. Agora dividimos AM e MB. Os pontos R e S representam os pontos médios dos segmentos AM e MB, respectivamente. Continuamos dividindo da mesma maneira. Em cada divisão, os fragmentos tornam-se menores e menores.

Chegaremos a um momento em que os fragmentos serão tão pequenos que não possamos continuar dividindo? Explique sua resposta.

figura 1

6) Consideremos o ponto C localizado no segmento AB (figura 3). Se dividirmos e subdividirmos o segmento como na questão 2, em algum ponto da subdivisão coincidirá com C?

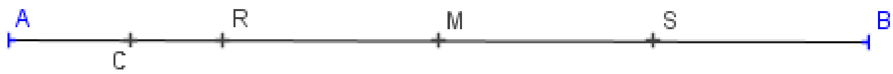


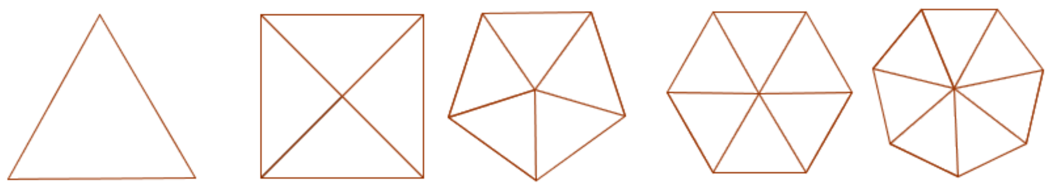
figura 3

7) Se repetirmos os seguintes processos infinitas vezes, qual será o resultado?

a) 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999

b)1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... =

c)



8) Tente definir infinito.

7. ANEXO I - Alguns resultados de Fischbein

TABLE IV
Comparison between the set of natural numbers and the set of positive even numbers (in %)

	Categories of answers		Grade					Sex		Levels of School Achievement		
	N =	Total 470	5 46	6 58	7 152	8 104	9 110	M 218	F 252	High 122	Medium 141	Low 103
1.	There is an infinite number of elements in both sets	4.5	2.2	5.2	5.3	3.8	4.6	5.0	4.4	5.7	4.3	4.9
2.	There is an infinite number of elements in both sets, but I don't know which set is "bigger"	5.1	10.9	5.2	5.3	2.9	4.6	6.0	4.4	5.7	3.5	3.9
1 + 2*		9.6	13.1	10.4	10.6	6.7	9.2	11.0	8.8	11.4	7.8	8.8
3.	The set of the natural numbers is "bigger"	71.0	60.9	77.6	63.2	80.8	73.4	67.9	73.4	81.3	78.0	49.0
4.	The set of the positive even numbers is "bigger"	8.3	10.9	6.9	10.5	8.7	4.6	11.0	6.0	2.4	5.0	19.6
5.	No answer	11.1	15.1	5.1	15.7	3.8	12.8	10.1	11.8	4.9	9.2	22.5

* The first two categories have been combined to indicate both types of "infinitist" answers.

TABLE I
The successive divisions of a segment by two (in %)

	Categories of answers		Grade					Sex		Levels of School Achievement		
	N =	Total 470	5 46	6 58	7 152	8 104	9 110	M 218	F 252	High 122	Medium 141	Low 103
1.	Practically the process comes to an end. Theoretically the process is infinite.	12.2	6.5	8.6	11.2	16.3	13.8	12.4	11.9	24.5	12.9	1.0
2.	The process in infinite	29.0	17.4	44.8	31.6	27.9	22.9	30.0	28.2	39.8	30.7	9.8
1 + 2*		41.2	23.9	53.4	42.8	44.2	36.7	42.4	40.1	64.3	43.6	10.8
3.	The process comes to an end.	55.4	76.1	44.8	51.3	51.0	62.4	53.5	57.1	33.3	52.1	83.3
4.	No answer	3.4	–	1.7	5.9	4.8	0.9	4.1	2.8	2.4	4.3	5.9

* The first two categories have been combined to indicate both types of "infinitist" answers.

TABLE V
The coincidence of a point of division of a segment with any arbitrarily given point (in %)

	Categories of answers		Grade					Sex		Levels of School Achievement		
	N =	Total 470	5 46	6 58	7 152	8 104	9 110	M 218	F 252	High 122	Medium 141	Low 103
1.	If the point corresponds to an "even point" we shall reach it	1.9	–	1.7	2.6	3.8	–	2.8	1.2	4.9	0.7	1.0
2.	It depends on the point's place	8.3	6.5	5.2	9.9	8.7	8.3	9.6	7.1	11.4	10.6	3.9
1 + 2*		10.2	6.5	6.9	12.5	12.5	8.3	12.4	8.3	16.3	11.3	4.9
3.	We shall reach the point	81.2	82.6	91.4	81.6	67.3	88.1	75.7	86.1	74.8	78.0	87.3
4.	We shall not reach the point	6.0	6.5	1.7	2.6	16.3	2.8	7.3	4.8	5.7	6.4	7.8
5.	No answer	2.6	4.2	–	3.3	3.8	0.8	4.5	0.8	3.2	4.3	–

* The first two categories have been combined to indicate the total of correct answers.

8. ANEXO II - Fotografia da Igreja São João Batista