Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Regularidade no infinito de variedades de Hadamard e alguns problemas de Dirichlet assintóticos

Tese de Doutorado

MIRIAM TELICHEVESKY

Porto Alegre, 27 de julho de 2012

Tese submetida por Miriam Telichevesky [1] , como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca examinadora:
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS, ORIENTADOR)
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)
Prof. Dr. Pedro Fusieger (UFSM)
Prof. Dr. Zhou Detang (UFF)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Quero dizer que sou grata a muita gente por estar concluindo essa etapa tão importante que é o Doutorado. Peço desculpas antecipadamente a muitas pessoas a quem devo muito, mas para não me alongar optei por escrever aqui apenas os agradecimentos a quem contribui de maneira mais direta durante a elaboração da tese. Então começo agradecendo de coração a todos aqueles que me ajudam a crescer, que me dão apoio, que acreditam em mim, que torcem por mim, ou que simplesmente tornam meus dias mais alegres.

Mesmo assim, existem cinco pessoas que quero citar aqui e que não estiveram contribuindo de maneira direta com minha tese. Os dois primeiros são os professores Cydara Ripoll e Eduardo Brietzke.

Cydara e Eduardo, o que eu mais gosto de pensar quando penso em vocês é que muito do que eu sou hoje eu praticamente *imito* de vocês, que são pessoas e profissionais incríveis. Obrigada por tudo que vocês sempre fizeram por mim, pelo carinho, pelo cuidado, pela orientação, pelos conselhos, pelos abraços. Sempre serei grata por isso, e espero um dia poder retribuir; se não for para vocês, vai ser para meus futuros alunos. Quero ser para eles o que vocês foram para mim, esse é um dos meus objetivos de vida!

Também quero agradecer de maneira muito especial a duas novas amigas que fiz durante o tempo de doutorado: as secretárias Rosane e Jéssica. *Rosane e Jéssica*, desde muito tempo acho justo incluí-las aqui, porque vocês estavam (e estão) sempre iluminando meu dia! Obrigada a vocês duas por tantos momentos alegres e únicos!! E também obrigada por todo o apoio burocrático.

E para encerrar essa parte de contribuições indiretas, agradeço ao meu marido Gabriel Volkweis Leite, que cuida de mim, me ouve, acredita em mim, e todo dia me faz crescer como pessoa. Obrigada, meu amor!

Agora dirijo meus agradecimentos aos que contribuíram diretamente com meu trabalho. Ao professor Detang Zhou, por ter nos mostrado, em sua vinda a Porto Alegre em 2010, várias questões em desenvolvimento relacionadas aos problemas de Dirichlet assintóticos, que nos ajudaram a ter problemas de pesquisa para seguir em frente. Também agradeço por sua participação na minha banca, assim como agradeço ao professor Pedro Fusieger.

Por fim, me dirijo à equipe de Geometria–Análise Geométrica do Instituto de Matemática da UFRGS, que participa diaria e diretamente do meu trabalho.

Álvaro e Pati: talvez eu nunca tenha agradecido, pelo menos não em palavras, por tudo que vocês representam para mim. Não sei o que seria dos meus dias nesse doutorado sem a companhia de vocês, que sempre me faz tão bem. Isso inclui obviamente todas nossas aventuras em congressos, nas caronas no Expresso Geometria, nos almoços e chimarrões, na hora da torrada e do café com leite, na inauguração da casa nova, na hora de cantar o hino do Rio Grande do Sul subindo uma lomba na chuva em Búzios ou num ônibus em Manaus, nas idas à Rosane, nas contas com o tensor de curvatura, e até nas *cacacas*! Vocês tornam meus dias essencialmente alegres, e eu me sindo só sem vocês por perto! Eu torço para que essa convivência que temos nunca mude. Às vezes me sindo como se fossêmos amigos de infância crescendo juntos. Espero que a vida nos permita continuar assim, sempre tão ligados como todo mundo nota. E *Álvaro*: Acho que és a pessoa mais parecida comigo que conheço, temos o mesmo jeito de pensar em muitas situações incomuns do (nosso) cotidiano. Obrigada por tudo que sempre fizeste por mim e comigo, principalmente no que diz respeito às nossas características mais "retardadas"... que só a gente entende. E *Pati*: Além de tudo ainda compartilhamos o mesmo orientador e problemas de pesquisa envolvendo o bordo assintótico, contas invertendo a tangente hiperbólica, a métrica de Poincaré, comparações do laplaciano e do hessiano... que com certeza seriam bem mais complicadas se a gente não soubesse que sempre podíamos consultar uma à outra... obrigada por tudo, minha *beste freundin*!!

Leonardo: Bem vindo ao time! Junto a essas duas pessoas incríveis às quais me dirigi acima e aquele ao qual me dirijo a seguir, és outra pessoa que, participando do meu dia-a-dia, me dá mais ânimo, alegria e vontade de fazer muita matemática. Te agradeço muito por todo o apoio matemático durante minha tese (incluindo as correções para a versão final!) e principalmente por estar sempre disposto a aprender coisas novas para participar de nossas pesquisas. Também te agradeço por esses momentos especiais que como um grupo de amigos nós cinco passamos nesses últimos meses, e igualmente torço para que as coisas sejam sempre assim, desse jeito que nem tem como explicar em palavras.

E deixei por último aquele a quem mais devo agradecer! $\ddot\smile$

Jaime, obrigada por teres sempre acreditado em mim, várias vezes muito mais do que eu mesma acreditei. Obrigada por teres sempre me desafiado, me propondo problemas difíceis, porque mesmo que a maioria deles ainda esteja em aberto, posso através deles amadurecer muitas ideias. Obrigada pelo carinho e companheirismo, que são ingredientes na minha opinião fundamentais para um bom ambiente de trabalho, coisa que conhecemos muito bem graças a teu jeito especial de ser. Obrigada por teres sempre nos tratado como colegas e amigos, porque assim nunca tive dúvidas quanto a te perguntar alguma coisa ou dar uma ideia aparentemente maluca. Obrigada pelos e-mails, torpedos e ligações intermináveis sempre que surgia algum problema ou ideia (na maioria das vezes uma ideia). Obrigada por me apoiar em algumas decisões e me fazer mudar de rumo em muitas outras... ou seja, obrigada por ter sido (e estar sendo) este *friendly advisor*, com todas as qualidades matemáticas de um orientador e todas as qualidades que tanto admiro do ser humano que és. Obrigada por tudo mesmo, de coração!

Resumo

Sejam M uma variedade de Hadamard com curvatura seccional $K_M \leq -k^2 < 0$ e $\partial_\infty M$ sua fronteira assintótica. Dizemos que M satisfaz a *condição de convexidade estrita* se, dados $x \in \partial_\infty M$ e $W \subset \partial_\infty M$ aberto relativo contendo x, existe um aberto $\Omega \subset M$ de classe $\mathcal{C}^2$ tais que $x \in \operatorname{Int}(\partial_\infty \Omega) \subset$ W e $M \setminus \Omega$ é convexo. Provamos que a condição de convexidade estrita implica que M é regular no infinito com relação ao operador

$$\mathcal{Q}[u] := \operatorname{div}\left(\frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\right)$$

definido no espaço de Sobolev $W^{1,p}_{\text{loc}}(M)$, onde $a \in \mathcal{C}^1([0,+\infty))$ satisfaz $a(0) = 0$, $a'(s) > 0$ para todo $s > 0$, $a(s) \leq C(s^{p-1} + 1)$, $\forall s \geq 0$, onde $C > 0$ é uma constante, e $a(s) \geq s^q$ para algum $q > 0$ e para $s \approx 0$ e supomos que é possível resolver problemas de Dirichlet em bolas (compactas) de M com dados contínuos no bordo. Segue disto que sob a condição de convexidade estrita, os problemas de Dirichlet para equação de hipersuperfície mínima e para o p-laplaciano, $p > 1$, são solúveis para qualquer dado contínuo prescrito no bordo assintótico. Também provamos que se M é rotacionalmente simétrica ou se $\inf_{B_{R+1}} K_M \geq -e^{2kR}/R^{2+2\epsilon}$, $R \geq R^*$, para certos R^* e $\epsilon > 0$, então M satisfaz a condição de convexidade estrita.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais elípticas na forma divergente; problema de Dirichlet assintótico; variedades riemannianas de curvatura negativa.

Abstract

Let M be Hadamard manifold with sectional curvature $K_M \leq -k^2$, $k > 0$ and $\partial_\infty M$ its asymptotic boundary. We say that M satisfies the *strict convexity condition* if, given $x \in \partial_\infty M$ and a relatively open subset $W \subset \partial_\infty M$ containing x, there exists a C^2 open subset $\Omega \subset M$ such that $x \in \operatorname{Int}(\partial_\infty \Omega) \subset W$ and $M \setminus \Omega$ is convex. We prove that the strict convexity condition implies that M is regular at infinity relative to the operator

$$\mathcal{Q}[u] := \operatorname{div}\left(\frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\right),$$

defined on the Sobolev space $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M)$, where $a \in C^1([0,\infty))$ satisfies $a(0) = 0, a'(s) > 0$ for all $s > 0$, $a(s) \leq C(s^{p-1}+1)$, $\forall s \geq 0$, where $C > 0$ is a constant, and $a(s) \geq s^q$, for some $q > 0$ and for $s \approx 0$ and we suppose that it is possible to solve Dirichlet problems on (compact) balls of M with continuous boundary data. It follows that under the strict convexity condition, the Dirichlet problems for the minimal hypersurface and the p-Laplacian, $p > 1$, equations are solvable for any prescribed continuous asymptotic boundary data. We also prove that if M is rotationally symmetric or if $\inf_{B_{R+1}} K_M \geq -e^{2kR}/R^{2+2\epsilon}$, $R \geq R^*$, for some R^* and $\epsilon > 0$, then M satisfies the SC condition.

Key-words: Elliptic partial differential equations on the divergence form; asymptotic Dirichlet problem; Riemannian manifolds of negative curvature.

Sumário

1 Introdução **2**

2 Preliminares geométricas **4**

2.1 Fronteira assintótica e compactificação da variedade Hadamard M 4

2.2 Conjuntos convexos 5

3 Condições de existência de solução para o problema de Dirichlet assintótico **7**

3.1 Suposições iniciais 7

3.2 O Método de Perron 8

3.3 Barreiras no infinito e regularidade 10

3.3.1 Propriedades de sub e supersoluções 10

3.3.2 Barreiras e regularidade na fronteira assintótica 13

4 Resultados centrais **16**

4.1 Condição de convexidade estrita 16

4.2 Dois casos particulares 20

4.2.1 Apêndices 22

5 Exemplos **24**

5.1 Variedades rotacionalmente simétricas 24

5.2 Curvatura seccional com decrescimento controlado 31

5.3 Problemas em aberto 39

Referências Bibliográficas **40**

Capítulo 1

Introdução

Seja M uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional negativa (abreviadamente, M é de Hadamard). Sejam $\partial_\infty M$ sua fronteira assintótica e $\overline{M}$ sua compactificação segundo a topologia dos cones.

Dados $\mathcal{Q}$ um operador diferencial definido no espaço de Sobolev $W^{1,p}_{\text{loc}}(M)$, onde $p \geq 1$, e uma função $\varphi \in \mathcal{C}^0\left(\partial_\infty M\right)$, resolver o problema de Dirichlet assintótico para $\mathcal{Q}$ com dado no bordo φ significa encontrar $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(M) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{M}\right)$ tal que $\mathcal{Q}[u] = 0$ em M (em algum sentido, que pode ser o sentido fraco) e $u|_{\partial_\infty M} = \varphi$. Abreviadamente, resolver o problema significa encontrar u tal que

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(M) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{M}\right) \\ \mathcal{Q}[u] = 0 \text{ em } M \\ u|_{\partial_\infty M} = \varphi. \end{cases} \tag{1.1}$$

De forma análoga ao que é feito no caso de domínios compactos do $\mathbb{R}^n$, investigamos a existência de solução para os problemas de Dirichlet assintóticos da forma (1.1) utilizando o Método de Perron, que vincula a equação ao comportamento no bordo. O problema é que mesmo que a função u obtida com o Método de Perron satisfaça $\mathcal{Q}[u] = 0$, seu comportamento no bordo pode não ser o esperado. Para garantir que u se estenda continuamente e satisfaça $u|_{\partial_\infty M} = \varphi$, é importante que os pontos de $\partial_\infty M$ sejam regulares, isto é, admitam barreiras superior e inferior para $\mathcal{Q}$ em vizinhanças arbitrariamente pequenas.

Muitos trabalhos têm sido feitos nas últimas três décadas dando condições suficientes para regularidade da fronteira assintótica de M. Destacamos, entre estes, o trabalho de H. Choi, [C], que prova que se M tem curvatura seccional $K_M \leq -1$ e satisfaz a condição de vizinhanças cônicas convexas (*convex conic neighborhood condition*), então os pontos da fronteira assintótica de M são regulares para o laplaciano. A prova usa a linearidade do laplaciano, e por isso não se estende para operadores mais gerais. No entanto, as ideias de Choi nos motivam definir outra condição de convexidade, a saber, a *condição de convexidade estrita*:

Definição 4.1.1. *Dizemos que M satisfaz a* condição de convexidade estrita *se para qualquer $x \in \partial_\infty M$ e qualquer $W \subset \partial_\infty M$ aberto contendo x, existe $\Omega \subset M$ aberto de classe $\mathcal{C}^2$ tal que $x \in \operatorname{Int} \partial_\infty \Omega \subset \mathrm{W}$ e $M \setminus \Omega$ é convexo.*

Mostramos que se M satisfaz a condição de convexidade estrita, então a fronteira de M é regular para operadores $\mathcal{Q}$ na forma divergente satisfazendo algumas propriedades (veja Seção 3.1). Como consequência, obtemos que se M satisfaz tal condição, então ela admite solução para os problemas de Dirichlet (1.1) relacionados ao p-laplaciano e ao operador curvatura média, em particular, e para operadores $\mathcal{Q}$ tais que o Método de Perron apresenta solução, em geral.

Organizamos o trabalho da seguinte maneira: no Capítulo 2, definimos bordo assintótico e compactificação pela topologia dos cones de uma variedade de Hadamard M e enunciamos algumas propriedades de conjuntos convexos. No Capítulo 3 discutimos condições gerais acerca de $\mathcal{Q}$ e M para que o problema de Dirichlet assintótico tenha solução em M. Já no Capítulo 4, definimos condição de convexidade estrita e enunciamos e mostramos os resultados centrais. Por fim, no Capítulo 5, apresentamos duas classes de variedades que satisfazem a condição de convexidade estrita.

Capítulo 2

Preliminares geométricas

2.1 Fronteira assintótica e compactificação da variedade Hadamard M

Seja M uma variedade riemanniana Cartan-Hadamard, ou seja, M é completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional $K_M \leq 0$. Seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ a distância riemanniana de M. Chamamos de *raios geodésicos* as geodésicas $\gamma : [0, +\infty) \to M$ com velocidade $|\gamma'| = 1$. Dois raios geodésicos γ_1 e γ_2 são ditos *assintóticos* se existe $C > 0$ tal que $d\left(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\right) \leq C$ para todo $t \in [0, +\infty)$.

É fácil ver que isto define uma relação de equivalência no conjunto dos raios geodésicos de M, e portanto está bem definido o conjunto das classes de equivalência via esta relação. Denotamos este conjunto por $\partial_\infty M$, e a classe à qual pertence o raio geodésico γ é denotada por $\gamma(\infty)$. Ao conjunto $\partial_\infty M$ damos o nome de *fronteira assintótica de* M. Com esta construção, é possível fazer uma compactificação de M, como descrito a seguir.

Dados $p, q \in M$, o Teorema de Hadamard garante que existe uma única geodésica γ com velocidade $|\gamma'| = 1$ que liga p a q. Denotamos ao longo do texto uma tal geodésica por γ_{pq}. Da mesma forma, é possível mostrar que se $p \in M$ e $x \in \partial_\infty M$, então existe única geodésica, denotada por γ_{px}, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(\infty) = x$ (note que esta última igualdade faz sentido, com a notação previamente fixada). Para uma prova, veja [BO]. Com isso, é possível provar que todos os pontos de $\partial_\infty M$ podem partir de um mesmo ponto $p \in M$. Desta forma, devido à unicidade anteriormente comentada, tem-se que, para qualquer $p \in M$ fixado,

$$\partial_\infty M = \{\gamma(\infty) \,|\, \gamma(0) = p\}.$$

Cada raio geodésico γ partindo de p está unicamente determinado por

$\gamma'(0)$, que é um elemento de $S^1 \subset T_pM$, a esfera unitária no espaço tangente a M em p: isto nos dá uma correspondência biunívoca entre $\partial_\infty M$ e S^1. Como $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo e T_pM pode ser difeomorficamente identificado com a bola unitária $B^1 \subset T_pM$, é natural nos perguntarmos se existe alguma forma de induzir uma topologia em $M \cup \partial_\infty M$ que o torne homeomorfo a $\overline{B^1} = B^1 \cup S^1$. Isso é possível com a chamada *topologia dos cones*, para qual apresentamos uma base.

Para tal, denotamos por $\sphericalangle(u, v)$ o ângulo entre $u, v \in T_pM$ e para $r > 0$, $q \in M$, $B_r(q)$ é a bola geodésica de centro q e raio r, ou seja, $B_q(r) := \{y \in M \mid d(q, y) < r\}$. Dados $q \in M$, $\alpha > 0$ e $v \in S^1$, chamamos de *cone com vértice q, eixo v e abertura α* o conjunto

$$C_q(v, \alpha) := \{x \in M \cup \partial_\infty M \mid \sphericalangle(v, \gamma'_{qx}(0)) < \alpha\}$$

e de *cone truncado com vértice q, eixo v, abertura α e raio r* o conjunto da forma

$$T_q(v, \alpha, r) := C_q(v, \alpha) \setminus \overline{B_r(q)}.$$

Fixado p, a topologia cuja base é constituída por todos os cones truncados $T_p(v, \alpha, r)$ e pelas bolas abertas de M é a chamada *topologia dos cones* para $M \cup \partial_\infty M$. Denotamos por $\overline{M}$ o conjunto $M \cup \partial_\infty M$ dotado desta topologia. Prova-se que $\overline{M}$ é homeomorfo a $\overline{B^1}$ como desejado. Desta forma também $\partial_\infty M$ é homeomorfo a S^1. Para a demonstração, veja a Seção 2 de [EO]. O espaço topológico $\overline{M}$ é chamado de *compactificação de M via topologia dos cones*.

Por fim, dado $S \subset M$, a fronteira assintótica de S é o conjunto $\partial_\infty S := \overline{S} \cap \partial_\infty M$, onde $\overline{S}$ é o fecho de S em $\overline{M}$, ou seja, na topologia dos cones.

Note que neste momento faz sentido perguntar quando uma função $u : \overline{M} \to \mathbb{R}$ é contínua e assume os valores de uma função $\varphi : \partial_\infty M \to \mathbb{R}$ contínua no bordo assintótico. Voltamos a tratar deste assunto em breve.

2.2 Conjuntos convexos

Um subconjunto $S \subset M$ é dito convexo se dados quaisquer dois pontos $p, q \in S$, o segmento da geodésica γ_{pq} que os une está contido em S. Um aberto $\Omega \subset M$ é dito de classe $\mathcal{C}^2$ se é possível parametrizar sua fronteira utilizando cartas locais de classe $\mathcal{C}^2$.

Uma propriedade interessante dos conjuntos convexos é que a segunda forma fundamental de sua fronteira, se orientada para dentro, é não-negativa, como prova H. Choi em [C].

Teorema 2.2.1 (Teoremas 4.1 e 4.2, [C]) *Seja M uma variedade Cartan-Hadamard e $S \subset M$ um subconjunto convexo com fronteira ∂S de classe $\mathcal{C}^2$. Seja η o campo normal a ∂S, unitário e orientado para dentro de S. Então $\overline{S}$ é convexo se e somente se $\langle \nabla_X X, \eta \rangle \geq 0$ para todo X tangente a ∂S. Além disso,* $\exp : \{-t\eta | t > 0\} \to M \setminus \overline{S}$ *é um difeomorfismo.*

Com este resultado em mãos, é possível definir a função $s : M \setminus \overline{S} \to \mathbb{R}$ por $s(x) = d(x, \partial S)$, que é de classe $\mathcal{C}^2$. Vejamos a seguir que esta satisfaz uma propriedade, bastante útil na construção de barreiras, graças ao fato que $K_M \leq -k^2 < 0$.

Teorema 2.2.2 (Teorema 4.3 de [C]) *Sejam M uma variedade Cartan-Hadamard de dimensão n com curvatura seccional $K_M \leq -k^2$, $k > 0$, $S \subset M$ convexo e $s : M \setminus \overline{S} \to \mathbb{R}$ dada por $s(x) = d(x, \partial S)$. Então*

$$\Delta s \geq (n-1)k \tanh ks.$$

Capítulo 3

Condições de existência de solução para o problema de Dirichlet assintótico

3.1 Suposições iniciais

As hipóteses a respeito do operador $\mathcal{Q}$ descritas nesta seção serão supostas ao longo de todo o texto.

Seja $p \geq 1$. Consideramos no espaço de Sobolev $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M)$ a equação diferencial

$$\mathcal{Q}[u] := \operatorname{div}\left(\frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\right) = 0, \tag{3.1}$$

onde $a \in \mathcal{C}^1([0,+\infty))$ satisfaz as propriedades

$$a(0) = 0, a'(s) > 0 \,\forall s \in (0,+\infty); \tag{3.2}$$

$$\exists C > 0 \text{ tal que } a(s) \leq C\left(s^{p-1} + 1\right), \forall s \in [0,+\infty); \tag{3.3}$$

$$\exists q, \delta > 0 \text{ tais que } a(s) \geq s^q, \forall s \in [0,\delta]. \tag{3.4}$$

Para $U \subseteq M$ aberto, denotamos por $W^{1,p}_c(U)$ o subconjunto de $W^{1,p}(U)$ das funções ξ cujo suporte $\operatorname{supp}\xi := \overline{\{x \in M \,|\, \xi(x) \neq 0\}}$, onde o fecho é tomado em M, seja limitado e esteja contido em U.

Definição 3.1.1 *Sejam $U \subseteq M$ aberto e $\mathcal{Q}$ operador satisfazendo* (3.1)–(3.4). *Uma função $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ é dita* solução *(fraca) da equação $\mathcal{Q} = 0$ em U, e denotamos por $\mathcal{Q}[u] = 0$, se*

$$\int_U \left\langle \frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u, \nabla \xi \right\rangle dx = 0 \tag{3.5}$$

para qualquer $\xi \in W^{1,p}_c(U)$.

Mostramos inicialmente que a integral na definição acima tem sentido. Note que usando a hipótese (3.3) a respeito da função a, temos que, se $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(M)$ e $\xi \in W^{1,p}_c(M)$,

$$\begin{aligned}
\int_M \left\langle \frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u, \nabla \xi \right\rangle dx &\leq \int_M a(|\nabla u|)|\nabla \xi| dx \\
&\leq \int_M C\left(|\nabla u|^{p-1}+1\right)|\nabla \xi| dx \\
&= C\int_{\operatorname{supp}\xi} |\nabla u|^{p-1}|\nabla \xi| dx + C\int_{\operatorname{supp}\xi} |\nabla \xi| dx.
\end{aligned}$$

À primeira parcela, aplicamos a Desigualdade de Hölder, com p' o expoente conjugado a p, ou seja, o número tal que $1/p + 1/p' = 1$ (mais precisamente, $p' = p/(p-1)$), obtendo

$$\begin{aligned}
\int_{\operatorname{supp}\xi} |\nabla u|^{p-1}|\nabla \xi| dx &\leq \left(\int_{\operatorname{supp}\xi} \left||\nabla u|^{p-1}\right|^{p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int_{\operatorname{supp}\xi} |\nabla \xi|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\operatorname{supp}\xi} |\nabla u|^p dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\operatorname{supp}\xi} |\nabla \xi|^p dx\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

que é finita pois $|\nabla u|^p, |\nabla \xi|^p$ são localmente integráveis.

Quanto à segunda parcela, basta notar que a função constante igual a 1 também é localmente integrável e aplicar o mesmo raciocínio. Assim, a integral que define solução de $\mathcal{Q} = 0$ faz sentido no espaço considerado, e podemos prosseguir.

Supomos que para qualquer bola $B \subset\subset M$ e para qualquer $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial B)$, existe solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(B) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B}) \\ \mathcal{Q}[u] = 0 \\ u|_{\partial B} = \phi \end{cases} \tag{3.6}$$

e prosseguimos investigando quais condições são necessárias em M e para o operador $\mathcal{Q}$ para que o problema de Dirichlet assintótico (1.1) seja solúvel, ou seja, quando é possível tomar limite para as bolas com raio tendendo a infinito (e veremos que em certo sentido precisamos que M seja de fato uma bola "redonda").

3.2 O Método de Perron

Para apresentar uma candidata à solução do problema de Dirichlet assintótico (1.1), utilizamos o Método de Perron. Talvez um dos maiores méritos deste método (veja por exemplo a Seção 2.8 de [GT]) seja o fato de que ele consegue determinar um candidato a solução do problema sem se preocupar, a princípio, com o que acontece na fronteira. O que garante que a solução assume os valores desejados na fronteira é o fato que seus pontos são regulares para a EDP (veja maiores detalhes na Seção 3.3).

Começamos definindo sub e supersoluções e chamamos atenção para suas propriedades importantes.

Definição 3.2.1 *Uma função $v \in \mathcal{C}^0(M)$ é dita uma* supersolução (resp. subsolução) *para $\mathcal{Q} = 0$ em M se, dado qualquer aberto limitado $U \subset M$ e dada uma solução u da equação em U, a condição $u \leq v$ (resp. $u \geq v$) em ∂U implicar em $u \leq v$ (resp. $u \geq v$) em todo U.*

Como o problema de Dirichlet para $\mathcal{Q}$ é solúvel em bolas, segue em particular que se $B \subset\subset M$ é uma bola, v_- é subsolução em B e v_+ é supersolução em B, com $v_- \leq v_+$ em ∂B, então $v_- \leq v_+$ em B. Com isso, é possível provar o resultado que segue, de forma análoga à Proposição 2.5 de [C].

Proposição 3.2.2 (Princípio do Máximo Assintótico) *Sejam σ, Σ sub e supersolução de $\mathcal{Q} = 0$ em M, respectivamente, tais que*

$$\limsup_{p \to x} \sigma(p) \leq \liminf_{p \to x} \Sigma(p), \ \forall \, x \in \partial_\infty M.$$

Então $\sigma \leq \Sigma$ em M.

Dem. Suponhamos por absurdo que $\exists p \in M$ tal que $\sigma(p) = \Sigma(p) + 2\varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Seja $R := d(p, o)$, onde o é uma origem fixada de M.

Por hipótese, temos que para cada $x \in \partial_\infty M$, existe um cone truncado aberto $T(x) = T_o(\gamma'_{ox}(0), \delta(x), r(x))$ tal que $\sigma(q) < \Sigma(q) + \varepsilon$ para todo $q \in T(x)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $r(x) > R$ para todo $x \in \partial_\infty M$. Temos então que $\{T(x); x \in \partial_\infty M\}$ é uma cobertura aberta de $\partial_\infty M$, que é compacto. Logo podemos extrair uma subcobertura finita indexada pelos pontos $x_1, \ldots, x_l$. Seja $r := \max\{r(x_1), \ldots, r(x_l)\}$. Então $\sigma(q) \leq \Sigma(q) + \varepsilon$ para todo $q \in M \setminus B_r(o)$, onde $r > R$, e assim temos que $\sigma \leq \Sigma + \varepsilon$ em ∂B_r. Como σ é subsolução e Σ é supersolução e B_r é uma bola, temos que $\sigma \leq \Sigma + \varepsilon$ em B_r, em particular, $\Sigma(p) + 2\varepsilon = \sigma(p) \leq \Sigma(p) + \varepsilon$, gerando um absurdo! ■

Dada $\varphi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$, definimos S_φ como sendo o conjunto das funções $\sigma : M \to \mathbb{R}$ tais que

$$\sigma \text{ é subsolução de } \mathcal{Q} = 0 \text{ em } M; \tag{3.7}$$

$$\text{para todo } x \in \partial_\infty M, \text{ vale que } \limsup_{p \to x} \sigma(p) \leq \varphi(x). \tag{3.8}$$

Observe que S_φ é não vazio, pois a função constante $\inf \varphi$ pertence ao conjunto. Além disso, o Princípio do Máximo Assintótico garante que a função constante igual a $\sup \varphi$ satisfaz $\sup \varphi \geq \sigma$ para qualquer $\sigma \in S_\varphi$, o que mostra que este é um conjunto superiormente limitado. Existe, portanto, a função $u : M \to \mathbb{R}$, dita *obtida pelo Método de Perron*, dada por

$$u(x) := \sup\{\sigma(x) \,|\, \sigma \in S_\varphi\}. \tag{3.9}$$

3.3 Barreiras no infinito e regularidade

Quando u satisfaz $\mathcal{Q}[u] = 0$, a pergunta que segue é se ela resolve o problema de Dirichlet (1.1). Isso nem sempre acontece. Por exemplo, para o caso $\mathcal{Q} = \Delta$, o laplaciano clássico, e para $M = \mathbb{R}^n$, sabemos pelo Teorema de Liouville que as únicas funções harmônicas limitadas globalmente definidas são as constantes. É possível provar, também, que o Método de Perron funciona em $\mathbb{R}^n$ para o laplaciano. Desta forma, qualquer dado não constante no bordo não pode ser atingido por uma solução de $\Delta = 0$. Em outras palavras, o problema de Dirichlet assintótico (1.1) não tem solução, a menos que φ seja constante.

É preciso, portanto, algo mais na variedade M para que, caso u dada pelo Método de Perron satisfaça $\mathcal{Q}[u] = 0$, u seja também tal que sua extensão contínua assuma os valores desejados no bordo assintótico. Esta seção destina-se a dar condições suficientes para que isso aconteça.

3.3.1 Propriedades de sub e supersoluções

Os operadores de nosso interesse satisfazem $\mathcal{Q}[-u] = -\mathcal{Q}[u]$; desta forma, se u é solução de $\mathcal{Q} = 0$, então $-u$ também o é. Assim, supersoluções e subsoluções estão em correspondência biunívoca:

$$v \text{ é supersolução} \iff -v \text{ é subsolução.}$$

Com esta observação em mente, é possível voltar nosso estudo apenas às supersoluções, obtendo informações a respeito de subsoluções também.

As três proposições que seguem nos fornecem candidatas naturais a supersoluções de $\mathcal{Q} = 0$.

Proposição 3.3.1 *Sejam $U \subset M$ aberto e $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M)$ tal que, para qualquer $\xi \in W^{1,p}_c(U)$ com $\xi \geq 0$, vale que*

$$\int_U \frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|} \langle \nabla v, \nabla \xi \rangle dx \geq 0.$$

Então v é uma supersolução para $\mathcal{Q} = 0$ em U. Em particular, se $v \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U})$ satisfaz $\mathcal{Q}[v] \leq 0$ no sentido clássico, então v é uma supersolução para $\mathcal{Q} = 0$ em U.

Dem. Sejam $B \subset\subset U$ e u solução de $\mathcal{Q} = 0$ em B tal que $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$. A mostrar: $v \geq u$ em B. Como $\mathcal{Q}[u] = 0$,

$$\int_B \frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \langle \nabla u, \nabla \xi \rangle dx = 0,$$

para toda $\xi \in W_c^{1,p}(B)$.

Desta forma,

$$\int_B \left\langle \frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u - \frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|} \nabla v, \nabla \xi \right\rangle dx \leq 0,$$

para toda $\xi \in W_c^{1,p}(B), \xi \geq 0$. Isto vale, em particular, para $\xi = (u - v)_+ = \max\{u - v, 0\}$, a parte positiva de $u - v$, que em quase todo ponto satisfaz

$$\nabla (u - v)_+ = \begin{cases} \nabla u - \nabla v, \text{ se } u \geq v \\ 0, \text{ se } u < v \end{cases}$$

Assim,

$$\int_B \left\langle \frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u - \frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|} \nabla v, \nabla u - \nabla v \right\rangle dx \leq 0. \tag{3.10}$$

Note que, por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u - \frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|} \nabla v, \nabla u - \nabla v \right\rangle &= a(|\nabla u|)|\nabla u| - \frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \\ &- \frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + a(|\nabla v|)|\nabla v| \\ &\geq a(|\nabla u|)|\nabla u| - a(|\nabla u|)|\nabla v| \\ &- a(|\nabla v|)|\nabla u| + a(|\nabla v|)|\nabla v| \\ &= (a(|\nabla u|) - a(|\nabla v|)) (|\nabla u| - |\nabla v|), \end{aligned}$$

onde a desigualdade acima é proveniente da desigualdade de Cauchy-Schwarz; e como a é crescente, este último produto é ≥ 0. Desta forma, o integrando em (3.10) é não-negativo; como sua integral é não positiva, segue que este deve se anular em quase todo ponto, e portanto em quase todo ponto de B vale que ou $\nabla u = \nabla v$, ou então

$$\frac{a(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u = \frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|} \nabla v. \tag{3.11}$$

Esta última igualdade implica, fazendo o produto interno com ∇u e usando o fato que a é estritamente crescente, que

$$\begin{aligned} a(|\nabla u|)|\nabla u| &= \frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|}\langle \nabla v, \nabla u\rangle \leq a(|\nabla v|)|\nabla u| \\ \Longrightarrow a(|\nabla u|) &\leq a(|\nabla v|) \Rightarrow |\nabla u| \leq |\nabla v|, \end{aligned}$$

e o raciocínio acima também é válido trocando u por v, donde segue que $|\nabla u| = |\nabla v|$, e portanto $\nabla u = \nabla v$ (devido a (3.11)).

Desta forma, $\nabla u = \nabla v$ em quase todo ponto de B, o que nos dá que $(u-v)_+$ é constante em quase todo ponto de B. Como $(u-v)_+$ vale zero em ∂B, pois $u|_{\partial B} \leq v|_{\partial B}$, segue que $(u-v)_+ \equiv 0$ q.t.p.. Desta forma, $u \leq v$ q.t.p. em B, como queríamos demonstrar.

Para a segunda parte, note que se $\mathcal{Q}[v] \leq 0$, temos, para qualquer $\xi \in W_c^{1,p}(B)$ com $\xi \geq 0$, a seguinte desigulddade:

$$\int_B \operatorname{div}\left(\frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|}\nabla v\right)\xi dx \leq 0,$$

e integrando por partes, usando que $\xi|_{\partial B} = 0$, temos

$$\int_B \frac{a(|\nabla v|)}{|\nabla v|}\langle \nabla v, \nabla \xi\rangle dx \geq 0,$$

o que conclui a demonstração. ■

Proposição 3.3.2 *Se v_1, v_2 são supersoluções de $\mathcal{Q} = 0$, então v dada por $v(p) := \min\{v_1(p), v_2(p)\}$ também o é.*

Dem. Segue imediatamente da definição de supersolução. De fato, se $U \subset M$ é aberto limitado e u é tal que $\mathcal{Q}[u] = 0$ em U, $u \leq v$ em ∂U, então em particular $u \leq v_1$ e $u \leq v_2$ em ∂U, e portanto $u \leq v_1$ e $u \leq v_2$ em U. ■

Proposição 3.3.3 *Sejam U, V abertos de M com $\overline{V} \subset U$. Suponha que $v_1 \in \mathcal{C}^0(M)$ e $v_2 \in \mathcal{C}^0(U)$ sejam supersoluções para $\mathcal{Q} = 0$ em M e que satisfaçam*

$$\begin{aligned} v_1 \leq v_2 \ &\text{em } \overline{U} \setminus V \\ v_2 \leq v_1 \ &\text{em } V. \end{aligned}$$

Defina $w : M \to \mathbb{R}$ por

$$w(x) = \begin{cases} v_1(x) \text{ se } x \in M \setminus V \\ v_2(x) \text{ se } x \in V. \end{cases}$$

Então $w \in \mathcal{C}^0(M)$ é supersolução de $\mathcal{Q} = 0$ em M.

Dem. Seja W aberto limitado de M e seja $u \in \mathcal{C}^2(W) \cap \mathcal{C}^0(\overline{W})$ solução de $\mathcal{Q} = 0$ em W satisfazendo $u|_{\partial W} \leq w|_{\partial W}$. A mostrar: $u \leq w$ em W.

Observe inicialmente que w é contínua pois em ∂V temos $v_1 = v_2$. Observe também que se $W \subset V$ ou $W \subset M \setminus V$, então não há o que fazer.

Note que pela definição de w, temos que $w \leq v_1$ em todo $\overline{M}$. Então, como v_1 é supersolução, temos que $u \leq v_1$ em W. Resta mostar que $u \leq v_2$ em $W \cap V$.

Defina $S := \partial V \cap W$ e $T := \partial(W \cap V) \setminus S$. Então $\partial(W \cap V) = S \cup T$. Note que em S temos que $v_1 = v_2$ e portanto já vale que $u \leq v_2$. Já em T, temos por hipótese que $u \leq w$, mas $w = u_2$ em V e portanto em T. Desta forma, $u \leq v_2$ em $\partial(W \cap V)$ e como v_2 é supersolução, vale que $u \leq v_2$ em $(W \cap V)$. ■

3.3.2 Barreiras e regularidade na fronteira assintótica

Mesmo quando estamos trabalhando em conjuntos compactos, o método de Perron se mostra eficaz na prova de existência de solução dos problemas de Dirichlet quando se supõe adicionalmente a existência de barreiras superior e inferior nos pontos da fronteira.

Barreiras são construídas, em geral, utilizando funções distância aos pontos na fronteira. Essas construções não são mais possíveis quando estamos trabalhando com a fronteira assintótica de M, que está a uma distância infinita a qualquer um dos pontos interiores. Esta dificuldade técnica é a principal razão pela qual se tem trabalhado intensamente em diversos problemas de Dirichlet assintóticos em variedades riemannianas, contornando a dificuldade através de alguma construção que substitua as barreiras usuais.

Definição 3.3.4 *Dados $x \in \partial_\infty M$ e $\Omega \subset M$ tal que x é ponto interior de $\partial_\infty \Omega$, uma* barreira superior (resp. inferior) para $\mathcal{Q}$ relativa a x e Ω com altura C *é uma função $\Sigma \in \mathcal{C}^0(M)$ (resp. $\sigma \in \mathcal{C}^0(M)$) tal que*

(i) Σ *é supersolução (resp. σ é subsolução) para $\mathcal{Q} = 0$;*

(ii) $\Sigma \geq 0$ *(resp. $\sigma \leq 0$) e* $\lim_{p \to x} \Sigma(p) = 0$ *(resp.* $\lim_{p \to x} \sigma(p) = 0$*);*

(iii) $\Sigma_{M \setminus \Omega} \geq C$ *(resp. $\Sigma_{M \setminus \Omega} \leq -C$),*

onde o limite $p \to x$, $p \in M$, $x \in \partial_\infty M$, é tomado em termos da topologia dos cones.

No contexto dos conjuntos limitados, pontos de fronteira que apresentem barreiras são chamados de *pontos regulares.* Pontos de não diferenciabilidade na fronteira, como cúspides, podem ser impedimentos para a solução de problemas de Dirichlet, como é o caso das funções harmônicas (veja discussão ao fim da Seção 2.8 de [GT]). E até mesmo não convexidade na fronteira pode implicar não existência, como é o que acontece para o caso do problema de Dirichlet para a equação de hipersuperfície mínima (por exemplo, veja [Ni], Teorema 6). O que é provado no caso de domínios limitados é que se um conjunto é tal que todos os pontos de sua fronteira são regulares então a solução obtida pelo método de Perron resolve o problema de Dirichlet (veja, por exemplo, Teorema 2.14 de [GT]). Isso dá motivo à seguinte definição.

Definição 3.3.5 *A variedade riemanniana M é dita* regular no infinito com respeito ao operador $\mathcal{Q}$ *se, dados $C > 0$, $x \in \partial_\infty M$ e um aberto $W \subset \partial_\infty M$ contendo x, existem $\Omega \subset M$ tal que $\partial_\infty x \in \mathrm{Int}\partial_\infty\Omega \subset W$ e barreiras superior e inferior $\Sigma, \sigma : M \to \mathbb{R}$ relativas a x e Ω com altura C.*

O Teorema que segue é uma adaptação do Teorema 2.7 de [C].

Teorema 3.3.6 *Sejam M regular no infinito e $\varphi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$. Se a função u obtida pelo Método de Perron, dada por (3.9), é solução de $\mathcal{Q} = 0$ em M, então u se estende continuamente a $\partial_\infty M$ e sua extensão $\overline{u}$ satisfaz $\overline{u}|_{\partial_\infty M} = \varphi$.*

Dem. Fixamos $x \in \partial_\infty M$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como φ é contínua, existe $W \subset \partial_\infty M$ aberto com $x \in W$ tal que $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo $y \in W$. Seja $A = \sup|\varphi|$, e tome $C = 3A$. Sejam $\Omega \subset M$ aberto com $x \in \mathrm{Int}\partial_\infty\Omega \subset W$ e Σ barreira superior em x relativa a Ω com altura C.

Então
$$w_-(p) := \varphi(x) - \varepsilon - \Sigma(p)$$
é subsolução de $\mathcal{Q} = 0$. Afirmamos $w_- \in S_\varphi$, ou seja, que $\limsup_{p\to y} w_-(p) \leq \varphi(y)$ para todo $y \in \partial_\infty M$. De fato, se $y \in \partial_\infty \Omega W$, então $\varphi(x) - \varepsilon < \varphi(y)$ e como $\Sigma(p) \geq 0$, temos imediatamente que
$$w_-(p) \leq \varphi(y).$$

Se $y \in \partial_\infty M \setminus W$, temos
$$\begin{aligned}\limsup_{p\to y} w_-(p) &= \varphi(x) - \varepsilon - \limsup_{p\to y} w_-(p)\Sigma(p) \leq \varphi(x) - 2A\\ &\leq \varphi(x) - \operatorname{osc}(\varphi) \leq \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y).\end{aligned}$$

Assim, $w_- \in S_\varphi$.

Definimos também

$$w_+(p) := \varphi(x) + \varepsilon + \Sigma(p),$$

que é uma supersolução para $\mathcal{Q} = 0$, e afirmamos que $w_+ \geq \sigma$, para qualquer $\sigma \in S_\varphi$. De fato, se $y \in W$, temos que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ e como $\Sigma \geq 0$, segue imediatamente que $w_+(p) \geq \varphi(y)$ para todo p. Já se $y \in \partial_\infty M \setminus W$, temos $\liminf_{p\to y} \Sigma(p) \geq C$ e portanto

$$\liminf_{p\to y} w_+(p) \geq \varphi(x) + \varepsilon + 2A \geq \varphi(x) + \varepsilon + \varphi(y) - \varphi(x) \geq \varphi(y).$$

Por outro lado, dada qualquer $\sigma \in S_\varphi$, vale por definição que, para todo $y \in \partial_\infty M$, $\limsup_{p\to y} \sigma(p) \leq \varphi(y)$. Pelo Princípio do Máximo Assintótico (Proposição 3.2.2), segue que $w_+ \geq \sigma$ para qualquer $\sigma \in S_\varphi$. Consequentemente, vale também que $w_+ \geq u$ em M.

Deste modo, temos que $w_- \leq u \leq w_+$ e portanto $\varphi(x) - \varepsilon - \Sigma \leq u \leq \varphi(x) + \varepsilon + \Sigma$, o que nos dá

$$|u - \varphi(x)| < \varepsilon + \Sigma.$$

Assim,

$$\limsup_{p\to x} |u(p) - \varphi(x)| < \varepsilon + \limsup_{p\to x} \Sigma(p) = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue que u se estende continuamente a φ em $\partial_\infty M$. ■

Capítulo 4

Resultados centrais

4.1 Condição de convexidade estrita

Como vimos na Seção 3.3, regularidade no infinito implica em existência de solução para problemas de Dirichlet assintóticos. Sabendo que a função obtida pelo método de Perron é solução, resta-nos encontrar propriedades de M que impliquem na regularidade no infinito.

No seu famoso trabalho [C], H. Choi define a "condição de vizinhança cônica convexa" (*convex conic neighborhood condition*) para M: M satisfaz esta condição se dados dois pontos distintos x e y de $\partial_\infty M$, existem vizinhanças (na topologia dos cones) de x e y de classe $\mathcal{C}^2$, convexas e disjuntas. Neste mesmo trabalho, Choi prova que esta condição, juntamente com a hipótese $K_M \leq -1$, é suficiente para a regularidade de M no infinito com respeito ao operador laplaciano $\mathcal{Q} = \Delta$, e consequentemente para a solubilidade do problema de Dirichlet assintótico (1.1) para qualquer dado no bordo $\varphi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$. Desde então, muitos trabalhos concentram-se em mostrar quais hipóteses acerca da variedade M implicam na condição de convexidade acima descrita, como é o caso dos trabalhos de M. Anderson, [And], e A. Borbély, [B1]. Também trabalhos de não-existência concentram-se em negar a condição de Choi para mostrar que existem variedades com curvatura $K_M \leq -1$ que não admitem solução para o problema de Dirichlet para o laplaciano Δ, para algum dado no bordo, como é o caso dos trabalhos de A. Ancona, [Anc], e A. Borbély, [B2].

A prova da existência de barreiras no infinito usando a condição de convexidade de Choi, no entanto, utiliza fortemente o fato que a equação $\Delta = 0$ é linear, o que não é o nosso caso. Desta forma, não parece ser possível adaptar, pelo menos diretamente, suas demonstrações para o caso quase linear, ou seja, a condição de convexidade do Choi, do jeito que está dada, não nos serve diretamente.

Apesar disso, a principal ideia da condição de convexidade de Choi é que o laplaciano da distância s a um conjunto convexo é limitado inferiormente por $k \tanh ks$, se $K_M \leq -k^2$, conforme já visto aqui, no Teorema 2.2.2. Este fato nos motiva a construir uma nova definição de convexidade.

Definição 4.1.1 *Dizemos que M satisfaz a* condição de convexidade estrita *se para qualquer $x \in \partial_\infty M$ e qualquer $W \subset \partial_\infty M$ aberto na topologia induzida contendo x, existe $\Omega \subset M$ aberto de classe $\mathcal{C}^2$ tal que*

$$\partial_\infty \Omega \subset W; \tag{4.1}$$

$$x \text{ é um ponto de interior de } \partial_\infty \Omega \tag{4.2}$$

$$M \setminus \Omega \text{ é um subconjunto convexo de } M. \tag{4.3}$$

Esta definição significa, em certo sentido, que dado qualquer ponto $x \in \partial_\infty M$, é possível "extrair" de M uma pequena vizinhança em torno do ponto x de modo que o que resta seja um conjunto convexo. Note que se M fosse um conjunto limitado, esta definição seria equivalente à de convexidade estrita. Por exemplo, compare com uma bola no espaço euclidiano, que é estritamente convexa: sempre é possível retirar um pequeno pedaço em torno de um dos pontos da fronteira, de modo a obter um conjunto ainda convexo. Já um polígono convexo, como por exemplo um triângulo, não tem essa propriedade, embora seja convexo, pois não é *estritamente* convexo.

Esta nova definição de convexidade nos permite utilizar a função distância ao conjunto convexo *em direção ao ponto do infinito onde queremos construir a barreira*, ao contrário do que acontece com a prova de Choi. Essa "convexidade para o outro lado" é bastante útil, e o teorema que segue mostra por quê.

Teorema 4.1.2 *Se M é uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional $K_M \leq -k^2$, $k > 0$ constante, que satisfaz a condição de convexidade estrita, então M é regular no infinito com respeito a $\mathcal{Q}$.*

Dem. Sejam $C > 0$, x e W dados. Note que como $\mathcal{Q}[-u] = -\mathcal{Q}[u]$, é suficiente mostrar que existe uma barreira superior em x. Fazemos isso de maneira construtiva. Primeiramente, definimos uma função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, como a seguir.

Como $a' > 0$, a função a tem uma inversa $a^{-1} \in \mathcal{C}^1([0, \alpha))$, onde $\alpha = \sup a \leq +\infty$. Seja $c := a(2C)$, e defina

$$g(s) = \int_s^{+\infty} a^{-1}\left(\frac{c}{\cosh^{n-1} kt}\right) dt \tag{4.4}$$

Vejamos inicialmente que g está bem definida. Como $\cosh^{1-n} kt$ é decrescente e ≤ 1, o único problema que pode ocorrer é a contribuição excessiva para integral do conjunto onde este valor é próximo a zero. No entanto, a estimativa $a(t) \geq t^q$ em $[0, \delta]$ impede que isso aconteça. De fato, $a(t) \geq t^q$ implica que $a^{-1}(t) \leq t^{\frac{1}{q}}$ para $t \in [0, \delta^q]$. Supondo sem perda de generalidade que $\delta \leq c$, definimos y por

$$\frac{c}{\cosh^{n-1} ky} = \delta.$$

Um tal y existe pois $c/\cosh^{n-1} k0 = c \geq \delta$ e $\lim_{t\to+\infty} c/\cosh^{n-1} kt = 0 < \delta$, e evidentemente $c/\cosh^{n-1} kt$ é uma função contínua. Então temos, para cada $s \in (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_s^y a^{-1}(c\cosh^{1-n} kt)dt + \int_y^{+\infty} a^{-1}(c\cosh^{1-n} kt)dt \\ &\leq a^{-1}(cs)(y-s) + \int_y^{+\infty} (c\cosh^{1-n} kt)^{\frac{1}{q}} dt \\ &\leq a^{-1}(cs)y + (2c)^{\frac{1}{q}} \int_y^{+\infty} e^{-\frac{kt}{q}} dt = a^{-1}(cs)y + \frac{(2c)^{\frac{k}{q}}}{q} e^{-ky} < +\infty \end{aligned}$$

e portanto g está bem definida. Além disso,

$$\lim_{s\to 0^+} g(s) > \int_0^1 a^{-1}\left(\frac{c}{\cosh^{n-1} kt}\right) dt \geq a^{-1}(c) = 2C$$

e também

$$\lim_{s\to+\infty} g(s) = 0.$$

Agora compomos a função g com uma função distância apropriada. Uma vez que M satisfaz a condição de convexidade estrita, existe $\Omega \subset M$ aberto de classe $\mathcal{C}^2$ satisfazendo as propriedades (4.1)–(4.3). Defina

$$\begin{aligned} s : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{dist}(x, \partial\Omega). \end{aligned}$$

Pelos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2, s é de classe $\mathcal{C}^2$ e satisfaz $\Delta s \geq k \tanh ks$, $\forall s > 0$. Definimos $v : \Omega \to \mathbb{R}$ por $v(x) = g(s(x))$. Então

$$\nabla v(x) = g'(s(x))\nabla s(x) = -a^{-1}\left(c\cosh^{1-n} ks(x)\right)\nabla s$$

e portanto

$$|\nabla v| = |g'(s(x))| = a^{-1}\left(c\cosh^{1-n} ks(x)\right);$$

além disso, $\nabla v/|\nabla v| = -\nabla s$. Combinando as expressões acima, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}(v) =& \operatorname{div}\left(-a\left(|g'(s(x))|\right)\nabla s(x)\right)\\
=& \operatorname{div}\left(-a\left(a^{-1}\left(c\cosh^{1-n}(ks(x))\right)\right)\nabla s(x)\right)\\
=& \operatorname{div}\left(-c\cosh^{1-n}(ks(x))\nabla s(x)\right)\\
=& -(1-n)ck\cosh^{-n}(ks(x))\sinh(ks(x))\langle\nabla s(x),\nabla s(x)\rangle\\
& -c\cosh^{1-n}(ks(x))\Delta s(x)\\
\leq& (n-1)ck\cosh^{-n}(ks(x))\sinh(ks(x))\\
& -(n-1)c\cosh^{1-n}(ks(x))k\tanh(ks(x)) = 0.
\end{aligned}
$$

onde na desigualdade utilizamos o Teorema 2.2.2.

De $\mathcal{Q}[v] \leq 0$ obtemos, utilizando a Proposição 3.3.1, que v é uma supersolução de $\mathcal{Q} = 0$. A barreira em x então pode ser definida da seguinte forma: observe que existe $\Omega' \subset \Omega$ tal que $v \leq C$ em Ω', com $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Assim, através da Proposição 3.3.3 (tomando $U = M \setminus \overline{\Omega'}$, $V = M \setminus \overline{\Omega}$, $v_1 = \min\{C, v\}$ e $v_2 = v$), temos que Σ dada por

$$
\Sigma(x) := \begin{cases} C, \text{ se } x \in M \setminus \Omega \\ \min\{v(x), C\}, \text{ se } x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.5}
$$

é uma supersolução para $\mathcal{Q} = 0$. Além disso, tem-se que $\Sigma \geq 0$ e como $\lim_{p\to y} v(p) = 0$ para todo $y \in \operatorname{Int}\partial_\infty\Omega$, temos que $\lim_{p\to x}\Sigma(p) = 0$. Por fim, por definição tem-se $\Sigma = C$ em $M\setminus\Omega$. Desta forma Σ é uma barreira superior para $\mathcal{Q}$ relativa a x e Ω e com altura C, o que conclui a demonstração. ■

Observação 4.1.3 *Observamos neste momento que a barreira construída acima é* mutatis mutandis *a barreira que usualmente se usa para provar regularidade com respeito ao operador $\mathcal{M}$ no caso de domínios compactos e convexos do $\mathbb{R}^n$. De fato, se $U \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e convexo, então em cada ponto x de ∂U existe uma esfera (possivelmente de raio infinito, ou seja, um hiperplano) que tangencia ∂U em x. Uma barreira em x pode então ser construída considerando a distância a uma esfera de mesmo centro e raio um pouco menor (ou hiperplano paralelo), ou seja, a distância a um conjunto convexo. Como no caso em que M é o ambiente não faz sentido pensar em esferas tangenciando os pontos de $\partial_\infty M$, a condição de convexidade estrita mostra-se ser um bom substitutivo para possibilitar a construção de barreiras.*

Teorema 4.1.4 *Seja M Hadamard tal que $K_M \leq -k^2$ satisfazendo a condição de convexidade estrita. Dada $\varphi \in \mathcal{C}^0(\partial_\infty M)$, se a função obtida pelo Método de Perron $u := \sup S_\varphi$ (cf.* (3.9)*) é solução de $\mathcal{Q} = 0$ em M, então u se estende continuamente a $\partial_\infty M$ e sua extensão $\overline{u}$ satisfaz $\overline{u}|_{\partial_\infty M} = \varphi$.*

Dem. O Teorema 4.1.2 garante que para cada $C > 0$, $x \in \partial_\infty M$ e $W \subset \partial_\infty M$ aberto contendo x existem barreiras superior e inferior para em x relativas a W com altura C. O resultado segue então do Teorema 3.3.6. ■

4.2 Dois casos particulares

Esta Seção dedica-se a provar existência de solução para o problema de Dirichlet assintótico (1.1) em dois casos particulares, a saber, quando $\mathcal{Q}$ é o operador curvatura média e quando é o p-laplaciano.

O operador $\mathcal{M}$ definido em $\mathcal{C}^2(M)$ por

$$\mathcal{M}[u] := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \tag{4.6}$$

representa a curvatura média do gráfico da função u, a menos de sinal, que depende da orientação do campo normal ao gráfico. Desta forma, encontrar soluções para a equação $\mathcal{M} = 0$ significa encontrar funções cujos gráficos têm curvatura média constante igual a zero, ou seja, os gráficos são *hipersuperfícies mínimas* em $M \times \mathbb{R}$. As hipersuperfícies mínimas são um objeto clássico de interesse para geômetras, e seu estudo é a principal razão que nos trouxe aos resultados aqui apresentados.

Embora seja mais comum trabalhar no espaço das funções duas vezes diferenciáveis, podemos aplicar a teoria anterior a respeito de sub e supersoluções no espaço de Sobolev $W^{1,1}_{\text{loc}}(M)$ à equação de hipersuperfície mínima $\mathcal{M} = 0$, e portanto as propriedades já obtidas aqui neste contexto continuam válidas.

Já o p-laplaciano é o operador diferencial definido em $W^{1,p}_{\text{loc}}(M)$, dado por

$$\mathcal{L}_p[u] := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right). \tag{4.7}$$

A equação $\mathcal{L}_p[u] = 0$ é a equação de Euler-Lagrange associada à integral variacional da p-energia dada por $\int_M |\nabla u|^p dx$.

Devido a resultados recentes relacionados ao comportamento destes dois operadores em variedades Hadamard, é possível mostrar o resultado que segue.

Teorema 4.2.1 *Seja M variedade de Hadamard com curvatura seccional $K_M \leq -k^2 < 0$ e satisfazendo a condição de convexidade estrita. Então os problemas de Dirichlet assintóticos para a equação de hipersuperfície mínima*

$\mathcal{M} = 0$ e para o p-laplaciano $\mathcal{L}_p = 0$, $p > 1$, possuem única solução para qualquer dado contínuo no bordo assintótico $\partial_\infty M$. Isto é, dada $\varphi \in \mathcal{C}^0(M)$, existem soluções $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap \mathcal{C}^0(\overline{M})$ de $\mathcal{M} = 0$ e $v \in W^{1,p}_{\text{loc}}(M) \cap \mathcal{C}^0(\overline{M})$ de $\mathcal{L}_p = 0$ tais que $u|_{\partial_\infty M} = v|_{\partial_\infty M} = \varphi$.

Dem. Já provamos que as hipóteses acima sobre M implicam em regularidade no infinito para os operadores $\mathcal{Q}$ e também que isto implica que se a função dada pelo Método de Perron é solução de $\mathcal{Q} = 0$, então ela resolve o problema de Dirichlet.

Verifiquemos inicialmente que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}_p$ satisfazem as hipóteses supostas acerca do operador $\mathcal{Q}$.

Para este o das mínimas, temos $a(s) = s(1+s^2)^{1/2}$ e portanto $\mathcal{M}$ satisfaz as trivialmente (3.2), (3.3) com $p = 1$ e (3.4) com $q = 2$ e $\delta = 1/2$, por exemplo. Afirmamos que o problema de Dirichlet para $\mathcal{M}$ é solúvel em bolas para dados contínuos. Utilizamos os Teoremas 2 de [DHL] e 1.1 de [Sp] (veja Seção 4.2.1) para provar a afirmação.

A estimativa do gradiente do Teorema 1.1 de [Sp], juntamente com argumentos standards de equações quaselineares elípticas (conforme [GT]), mostram que se $(u_k)_k$ é uma sequência de soluções de $\mathcal{M} = 0$ em uma bola $B \subset M$ uniformemente limitada na norma $\mathcal{C}^0$, então existe $\delta > 0$ uniforme tal que a norma $\mathcal{C}^{2,\delta}$ de u_k, $|u_k|_{2,\delta}$, é uniformemente limitada em subconjuntos $\widetilde{B} \subset\subset B$.

Conclusão 1. Dada qualquer sequência de soluções $(u_k)_k$ em $B \subset\subset M$ uniformemente limitada na norma $\mathcal{C}^0$, é possível extrair uma subsequência uniformemente convergente em compactos de B para uma função $u \in \mathcal{C}^2(B)$ tal que $\mathcal{M}[u] = 0$, no sentido clássico.

Pelo Teorema 2 de [DHL], dados qualquer bola $B \subset M$ e $\phi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial B)$, existe solução para o problema de Dirichlet para $\mathcal{M}$ em B com dado no bordo ϕ.

A estimativa de gradiente dada no Teorema 1.1 de [Sp] possibilita resolver o problema de Dirichlet em bolas para dados apenas contínuos, e não apenas de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, no bordo. De fato, sejam $p \in M$ e $B = B_R(p) \subset M$ e $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial B)$. Considere $\phi_k^+, \phi_k^- \in \mathcal{C}^\infty(\partial B)$ sequências de funções tais que $\phi_k^+ \to \phi$ monotonicamente, por cima, e $\phi_k^- \to \phi$ monotonicamente, por baixo. Para cada k, existem u_k^+, u_k^- soluções de $\mathcal{M} = 0$ em U tais que $u_k^+|_{\partial B} = \phi_k^+$ e $u_k^-|_{\partial B} = \phi_k^-$. Observe que pelo Princípio do Máximo, as sequências $u_k^\pm$ são monótonas.

Para cada $m \in \mathbb{N}, m > 1/R$, seja $B_m := B_{R-1/m}(p)$. As sequências $\left(u_k^\pm|_{B_m}\right)_k$ contêm subsequências convergentes na norma $\mathcal{C}^2$, devido às estimativas interiores do gradiente. Note que as subsequências devem coincidir com as sequências originais, devido à monotonicidade. Usando o método diagonal, $\left(u_k^+\right)_k$ e $\left(u_k^-\right)_k$ contêm subsequências convergentes, respectivamente, a funções u^+ e u^- em $\mathcal{C}^2(B)$. Como $u^+ \leq u_k^+$ e $u^- \geq u_k^-$ para todo k, segue imeditamente que u^+ e u^- se estendem continuamente para $\overline{B}$ e $u^+|_{\partial B} = u^-|_{\partial B} = \phi$; pelo Princípio do Máximo, deve ocorrer $u^+ = u^-$.

Conclusão 2. Se $B \subset M$ é uma bola, então para qualquer dado no bordo $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial B)$, existe $u : B \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{M}[u] = 0$ e $u|_{\partial B} = \phi$.

Desta forma, M satisfaz as condições exigidas para $\mathcal{Q}$.

Já para o caso do p-laplaciano, temos $a(s) = s^{p-1}$ e portanto o exponte em (3.3) é o próprio p, e a respeito de (3.4) temos $q = p - 1$ e δ qualquer. Quanto à solubilidade do problema de Dirichlet em uma bola B, começamos mostrando, com argumentos semelhantes ao caso $\mathbb{R}^n$, que existe solução quando o dado no bordo está em $W^{1,p}(\partial B) \cap \mathcal{C}^0(\partial B)$. Se o dado ϕ no bordo é apenas contínuo, consideramos como no caso mínimo sequências em $W^{1,p}(\partial B) \cap \mathcal{C}^0(\partial B)$ aproximando ϕ na norma $\mathcal{C}^0$ e usamos estimativas interiores do gradiente dada pelo Teorema 1.1 de [KN], bem como a Proposição 3.3.1.

Desta forma, a prova do Teorema 4.2.1 resume-se em verificar que o Método de Perron fornece de fato uma solução para $\mathcal{Q} = 0$ nos casos particulares do operador curvatura média e do p-laplaciano. Quanto ao p-laplaciano, segue imediatamente do Teorema 3.3 de [HV] (veja ao final do capítulo).

Com respeito ao operador curvatura média, basta utilizar os mesmos argumentos do Teorema 2.12 de [GT]. Tal resultado refere-se ao laplaciano Δ, no entanto os únicos fatos a respeito do operador Δ e suas soluções que são utilizados podem ser substituídos pelas Conclusões 1 e 2 acima e o Princípio Forte do Máximo, que também é satisfeito por $\mathcal{M}$ (veja Capítulo 10 de [GT]).

Por fim, a teoria de regularidade (veja Capítulo 13 de [GT]) implica que a solução u de $\mathcal{M} = 0$ é infinitamente diferenciável, visto que M é uma variedade diferenciável. ■

4.2.1 Apêndices

Teorema 4.2.2 *Seja $B \subset M$ domínio convexo limitado de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$. Então dada $\phi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial B)$, existe única $u : B \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{M}[u] = 0$ e $u|_{\partial B} = \phi$.*

Dem. Segue do Teorema 2 de [DHL], fazendo $H \equiv 0$ em B e $k > 0$ qualquer, já que $\coth^{-1}(0) = +\infty$. ■

Teorema 4.2.3 *Seja $u \in \mathcal{C}^3(B_R(o))$ tal que $\mathcal{M}[u] = 0$. Existe uma constante $L > 0$ que depende apenas de R e $u(o)$ tal que $|\nabla u(o)| \leq L$.*

Dem. Segue do Teorema 1.1 de [Sp]. ■

Teorema 4.2.4 *Se v é uma solução positiva para $\mathcal{L}_p = 0$ na bola $B = B_R(o) \subset M$, existe constante $C > 0$ que depende apenas de R, da curvatura seccional em B, da dimensão e de p tal que*

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}(o)} |\nabla v|^2 \leq C.$$

Dem. Segue do Teorema 1.1 de [KN]. ■

Teorema 4.2.5 *Para $p \in (1, +\infty)$, a função dada pelo método de Perron para o p-laplaciano $\mathcal{L}_p$ é solução de $\mathcal{L}_p = 0$ em uma variedade Cartan-Hadamard.*

Dem. Segue do Teorema 3.3 de [HV]. ■

Capítulo 5

Exemplos

Uma vez provado que a condição de convexidade estrita implica em regularidade na fronteira com respeito aos operadores na forma divergente $\mathcal{Q}$, a pergunta natural é: que classe de variedades satisfaz tal condição de convexidade?

O primeiro exemplo é o das variedades de dimensão 2. Em [EO], é possível encontrar a prova de que se M é completa, simplesmente conexa e $K_M \leq -k^2 < 0$, então dados dois pontos $x, y \in \partial_\infty M$, existe uma geodésica $\gamma_{xy} : \mathbb{R} \to M$ tal que $\gamma(-\infty) = x$ e $\gamma(+\infty) = y$. Como a dimensão é 2, tal geodésica separa M em duas componentes conexas, e neste caso ambas são convexas, devido à unicidade de geodésica ligando dois pontos de uma variedade Hadamard. A condição de convexidade estrita é então trivialmente satisfeita por uma variedade de dimensão 2.

Com esse exemplo, nossos resultados estendem o Teorema 5.2 de [GR] para operadores mais gerais.

O caso de dimensão ≥ 3 é drasticamente diferente. Evidentemente nesse caso geodésicas não separam mais o espaço em duas componentes, e o substitutivo natural para a geodésica, uma hipersuperfície em M, não tem mais porque ter segunda forma fundamental nula, ou seja, não tem mais razão para separar M em duas componentes conexas convexas.

As duas seções que seguem apresentam condições suficientes para que uma variedade M satisfaça a condição de convexidade estrita.

5.1 Variedades rotacionalmente simétricas

O objetivo desta seção é mostrar que variedades rotacionalmente simétricas com curvatura seccional $\leq -k^2 < 0$ satisfazem a condição de convexidade estrita. Fazemos isso de modo construtivo, utilizando hipersuperfícies totalmente geodésicas (como uma analogia às geodésicas, no caso bidimensional) no espaço hiperbólico de curvatura secctional $-k^2$, $\mathbb{H}^n(-k^2)$.

Uma variedade riemanniana M $(n+1)$-dimensional é *rotacionalmente simétrica com centro o e métrica dada por f* quando M se escreve da forma $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ com métrica dada por

$$dr^2 + f(r)^2 d\omega^2, \tag{5.1}$$

onde r é a distância ao ponto o e $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função não negativa tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ e $d\omega^2$ é a métrica usual de $\mathbb{S}^n$.

Enxergamos M como o conjunto $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) | x_i \in \mathbb{R}\}$ parametrizado por r, a distância a $(0, \dots, 0) = o$, e os ângulos $\theta_1, \dots, \theta_n$, com

$$\begin{aligned}
&x_1 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_n \\
&x_2 = r \cos\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_n \\
&x_3 = r \cos\theta_2 \sin\theta_3 \dots \sin\theta_n \\
&\dots \\
&x_n = r \cos\theta_{n-1} \sin\theta_n \\
&x_{n+1} = r \cos\theta_n,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

dotada da métrica (5.1). Utilizamos a notação $M = (\mathbb{R}^{n+1}, f)$ para M se esta é rotacionalmente simétrica como descrita acima.

Observação 5.1.1 *Note que:*

(i) *Os ângulos na origem $o = (0, 0, \dots, 0)$ são os mesmos independentemente de qual seja a função f que determina a métrica.*

(ii) *O parâmetro θ_n dá o ângulo com a direção $(0, \dots, 0, 1)$.*

Os campos de vetores definidos por

$$U := \frac{\partial}{\partial r},\ V_i := \frac{\partial}{\partial \theta_i} \tag{5.3}$$

dão um referencial local em $M \setminus \{o\}$. Usando as notações $V_0 := U$ e $g_{ij} := \langle V_i, V_j \rangle$, $0 \le i, j \le n$, é fácil obter

$$\begin{aligned}
&g_{ii} = f(r)^2 \sin^2\theta_{i+1} \sin^2\theta_{i+2} \dots \sin^2\theta_n, 1 \le i \le n-1, \\
&g_{00} = 1, g_{nn} = f(r)^2 \text{ e } g_{ij} = 0 \text{ se } i \ne j.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Com estas expressões em mãos, é possível provar o seguinte resultado preliminar:

Lema 5.1.2 *Seja $M = (\mathbb{R}^{n+1}, f)$ variedade riemanniana rotacionalmente simétrica. Então:*

(i) *As curvaturas principais de $S_R(o)$, a esfera geodésica centrada em o de raio R, são todas iguais a $f'(R)/f(R)$, na direção do normal interior.*

(ii) *As curvaturas seccionais $K_p(\Pi)$ de M num ponto $p \in S_R(o)$e no plano $\Pi \subset T_pM$ são dadas por $-f''(R)/f(R)$, se Π é gerado por $U(p)$ e outro vetor linearmente independente a ele.*

(iii) *Se $K_M \leq -k^2$, então $f'(r)/f(r) \geq k \coth kr$, $f(r) \geq (\operatorname{senh} kr)/k$ e $f'(r) \geq \cosh kr$, para todo $r > 0$.*

Dem. (i): Como os campos V_i, $1 \leq i \leq n$, são ortogonais a U, segue que as curvaturas principais de $S_R(o)$, quando orientada para dentro, são dadas por $\langle \nabla_{V_i} V_i, -U\rangle / \|V_i\|^2$. Note que, como $[U, V_i] = 0$,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{V_i} V_i, -U\rangle &= \langle V_i, \nabla_{V_i} U\rangle = \\ &= \langle V_i, \nabla_U V_i\rangle = \frac{1}{2} U\left(\|V_i\|\right)^2 \\ &= f(R) f'(R) \sin^2\theta_{i+1} \ldots \sin^2\theta_n,\end{aligned}$$

e portanto, dividindo por $\|V_i\|^2 = f(R)^2 \sin^2\theta_{i+1} \ldots \sin^2\theta_n$, segue (i).

(ii): Seja $\Pi = \mathrm{Span}\{\mathrm{U}, \mathrm{V_i}\}$. Como $[U, V_i] = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\|U\|^2 \|V_i\|^2 K(\Pi) &= \langle \nabla_{V_i} \nabla_U U - \nabla_U \nabla_{V_i} U, V_i\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{V_i} 0 - \nabla_U \left(\frac{f'}{f} V_i\right), V_i \right\rangle \\ &= -U\left(\frac{f'}{f}\right) \|V_i\|^2 - \frac{f'}{f} \langle \nabla_U V_i, V_i\rangle \\ &= -\left(\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2}\right) \|V_i\|^2 - \frac{1}{2}\frac{f'}{f} U(\|V_i\|^2) \\ &= -\frac{f''}{f}\|V_i\|^2 + \frac{f'^2}{f^2}\|V_i\|^2 - f'^2 \sin^2\theta_{i+1} \ldots \sin^2\theta_n \\ &= -\frac{f''}{f}\|V_i\|^2,\end{aligned}$$

o que demonstra (ii), já que $\|U\| = 1$ e $U \perp V_i$.

(iii): Defina $g(r) := \sinh(kr)/k$, então $g''(r)/g(r) = k^2$ e assim, uma vez que $K_M \leq -k^2$, temos

$$\frac{f''(r)}{f(r)} \geq k^2 = \frac{g''(r)}{g(r)} \Rightarrow f''(r) g(r) - g''(r) f(r) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(f'(r) g(r) - g'(r) f(r)\right)' \geq 0 \Rightarrow f'(r) g(r) - g'(r) f(r) \geq 0,$$

portanto

$$\frac{f'(r)}{f(r)} \geq \frac{g'(r)}{g(r)} = k \coth kr \tag{5.5}$$

e também

$$\left(\frac{f(r)}{g(r)}\right)' \geq 0.$$

A última desigualdade implica em

$$\frac{f(r)}{g(r)} \geq \lim_{r \to 0^+} \frac{f(r)}{g(r)} = 1 \Rightarrow f(r) \geq g(r) = \frac{\sinh kr}{k}.$$

Usando este fato juntamente com (5.5), concluímos que também vale que $f'(r) \geq g'(r) = \cosh kr$, o que conclui a demonstração. ■

Fixamos agora um raio geodésico $\gamma : [0, +\infty) \to M$ com $|\gamma'| \equiv 1$ e $\gamma(0) = o$. Como quaisquer dois raios geodésicos com estas propriedades podem ser um mapeado no outro por uma isometria de M, podemos supor sem perda de generalidade que $\gamma(s) = (0, 0, \ldots, 0, s), s \geq 0$ (é fácil ver que este é um raio geodésico).

Vamos no que segue construir uma hipersuperfície $\Sigma_R \subset M$ que é ortogonal a γ e cuja fronteira assintótica é dada por

$$\partial_\infty \Sigma_R = \{\widetilde{\gamma}(\infty) \,|\, \widetilde{\gamma}(0) = o, \sphericalangle(\widetilde{\gamma}'(0), \gamma'(0)) = \alpha\}, \tag{5.6}$$

onde $\alpha \in (0, \pi/2)$ é dado a priori. Para tal, seja $R > 0$ a ser posteriormente determinado e considere $r, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluções do sistema

$$\begin{cases} r'(t) = \cosh kR \sin \theta(t) \\ \theta'(t) = \dfrac{k \sinh kR}{\sinh^2(kr(t))} \\ r(0) = R, \ \theta(0) = 0, \end{cases} \tag{5.7}$$

e seja $\Sigma_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a hipersuperfície parametrizada por

$$\begin{aligned} (t, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \mapsto (&r(t) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{n-1} \sin \theta(t), \\ &r(t) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{n-1} \sin \theta(t), \\ &r(t) \cos \theta_2 \sin \theta_3 \ldots \sin \theta_{n-1} \sin \theta(t), \\ &\ldots, r(t) \cos \theta_{n-1} \sin \theta(t), r(t) \cos \theta(t)), \end{aligned} \tag{5.8}$$

com $r(t)$ e $\theta(t)$ dados por (5.7).

Lema 5.1.3 *Se $M = (\mathbb{R}^{n+1}, \sinh(kr)/k)$, ou seja, M é o espaço hiperbólico $(n+1)$-dimensional de curvatura seccional constante $-k^2$, então Σ_R é a hipersuperfície totalmente geodésica que intercepta γ ortogonalmente no ponto $(0, 0, \ldots, 0, R)$. Além disso,*

$$\partial_\infty \Sigma_R = \{\tilde{\gamma}(\infty) \,|\, \sphericalangle_o(\tilde{\gamma}(\infty), \gamma(\infty)) = \arccos(\tanh kR)\}.$$

O lema anterior, que será demonstrado após a demonstração da Proposição que segue, mostra que Σ_R existe e divide $\mathbb{R}^{n+1}$ em duas componentes conexas. Ambas são convexas se $f = \sinh(kr)/k$, já que a segunda forma fundamental de Σ_R se anula. A proposição que segue mostra que, se existir, Σ_R satisfaz as propriedades desejadas se substituímos a métrica hiperbólica por outra rotacionalmente simétrica que também satisfaça $K_M \leq -k^2$.

Observação 5.1.4 *Se $R > 0$, então uma das componentes conexas de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma_R$ contém a origem. De fato, basta notar que $(0, \ldots, 0) \notin \Sigma_R$ se $R > 0$, pois $(0, \ldots, 0, R) \in \Sigma_R$ e este deve ser o único ponto de γ em Σ_R, já que pontos de γ devem satisfazer $\theta(t) = 0$, e θ é uma função injetiva, por ser estritamente crescente.*

Proposição 5.1.5 *Sejam $M = (\mathbb{R}^{n+1}, f)$ rotacionalmente simétrica, com $K_M \leq -k^2$ e $\Sigma_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $R > 0$ como acima. Então Ω', a componente conexa de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma_R$ que contém a origem, é convexo.*

Dem. Como Σ_R é parametrizada por (5.8), os campos definidos por

$$T := \frac{\partial}{\partial t}, V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$$

são uma base ortogonal para $T_p S_R$ para qualquer $p \in S_R \setminus \{(0, \ldots, 0, R)\}$. Além disso, note que $T = r'(t)U + \theta'(t)V_n$.

É imediato verificar que o campo

$$N(t, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) := -f(r(t))\theta'(t)U + \frac{r'(t)}{f(r(t))}V_n \tag{5.9}$$

é normal a Σ_R apontando para Ω'. Para mostrar que Ω' é convexo, usamos o Teorema 2.2.1: é suficiente provar que a segunda forma fundamental de Σ_R com respeito a N é não-negativa, ou seja, que

$$\langle \nabla_T T, N \rangle,\ \langle \nabla_{V_i} V_i, N \rangle \geq 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n-1\},$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^{n+1}, f)$.

Começamos com $\langle \nabla_T T, N\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_T T, N\rangle &= -f\theta'\langle \nabla_T T, U\rangle + \frac{r'}{f}\langle \nabla_T T, V\rangle \\
&= -f\theta' T\langle T, U\rangle + f\theta'\langle T, \nabla_T U\rangle + \frac{r'}{f}T\langle T, V\rangle - \frac{r'}{f}\langle T, \nabla_T V\rangle \\
&= -f\theta' r'' + f\theta'\langle T, \nabla_T U\rangle + \frac{r'}{f}\left(f^2\theta'\right)' - \frac{r'}{f}\langle T, \nabla_T V\rangle. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\langle T, \nabla_T U\rangle &= r'^2\langle U, \nabla_U U\rangle + r'\theta'\left(\langle U, \nabla_V U\rangle + \langle V, \nabla_U U\rangle\right) + \theta'^2\langle V, \nabla_V U\rangle \\
&= 0 + 0 + 0 + \theta'^2\frac{1}{2}U\left(\|V\|^2\right) = \theta'^2 f f_r \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle T, \nabla_T V\rangle &= r'^2\langle U, \nabla_U V\rangle + r'\theta'\left(\langle U, \nabla_V V\rangle + \langle V, \nabla_U V\rangle\right) + \theta'^2\langle V, \nabla_V V\rangle \\
&= 0 + r'\theta'\left(-\frac{1}{2}U\left(\|V\|^2\right) + \frac{1}{2}U\left(\|V\|^2\right)\right) + \theta'^2\frac{1}{2}V\left(\|V\|^2\right) = 0, \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

e então, substituindo (5.11) e (5.12) na expressão (5.10), segue que

$$\langle \nabla_T T, N\rangle = f\theta'\left(f f_r \theta'^2 - r''\right) + \frac{r'}{f}\left(f^2\theta'\right)'. \qquad (5.13)$$

Calculamos a seguir $\langle \nabla_{V_i} V_i, N\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{V_i} V_i, N\rangle &= -f\theta'\langle \nabla_{V_i} V_i, U\rangle + \frac{r'}{f}\langle \nabla_{V_i} V_i, V\rangle \\
&= f\theta'\langle V_i, \nabla_{V_i} U\rangle - \frac{r'}{f}\langle V_i, \nabla_{V_i} V\rangle \\
&= f\theta'\langle V_i, \nabla_U V_i\rangle - \frac{r'}{f}\langle V_i, \nabla_V V_i\rangle \\
&= f\theta'\frac{1}{2}U\left(\|V_i\|^2\right) - \frac{r'}{f}\frac{1}{2}V\left(\|V_i\|^2\right) \\
&= f^2 f_r\theta'\sin^2\theta_{i+1}\ldots\sin^2\theta_n - r' f\sin^2\theta_{i+1}\sin^2\theta_{n-1}\sin\theta_n\cos\theta_n \\
&= f^2\sin^2\theta_{i+1}\ldots\sin^2\theta_n\left(f_r\theta' - \frac{r'}{f}\cot\theta_n\right). \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Por fim, de (5.7), obtemos que

$$\operatorname{sen}\theta\theta' = k\tanh kR\frac{r'}{\operatorname{senh}^2 kr},$$

que ao integrar em t nos dá que

$$\cos\theta = \tanh kR \coth kr. \tag{5.15}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
ff_r\theta'^2 - r'' &= ff_r\theta'^2 - \theta' \cosh kR \cos\theta \\
&= \theta' \left(ff_r \frac{k\sinh kR}{\sinh^2 kr} - \cosh kR \coth kr \tanh kR \right) \\
&= \theta' \left(ff_r \frac{k\sinh kR}{\sinh^2 kr} - \sinh kR \frac{\cosh kr}{\sinh kr} \right) \\
&= \frac{\theta'}{\sinh^2 kr} k \sinh kR \left(ff_r - \cosh kr \frac{\sinh kr}{k} \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é proveniente do Lema 5.1.2. Além disso, ao derivar θ' mais uma vez, obtemos

$$\theta'' = -2r'\theta' k \coth kr$$

e desta maneira

$$\begin{aligned}
r'\left(f^2\theta'\right)' =& r'\left(2ff_r r'\theta' + f^2\theta''\right) = 2r'^2\theta'\left(ff_r - f^2 k \coth kr\right) \\
=& 2r'^2\theta' f^2 \left(\frac{f_r}{f} - k \coth kr \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

onde novamente utilizamos o Lema 5.1.2. Por fim,

$$\begin{aligned}
f_r\theta' - \frac{r'}{f}\cot\theta &= k\sinh kR \frac{f_r}{\sinh^2 kr} - \cosh kR \frac{\cos\theta}{f} \\
&= \sinh kR \left(k \frac{f_r}{\sinh^2 kr} - \frac{\coth kr}{f} \right) \\
&= \frac{k\sinh kR}{f\sinh^2 kr} \left(ff_r - \cosh kr \frac{\sinh kr}{k} \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

onde novamente a desigualdade vem do Lema 5.1.2.

Desta forma, Ω' é um subconjunto convexo de M, como queríamos demonstrar. ■

Dem. do Lema 5.1.3. Basta substituir $f(r)$ por $\operatorname{senh}(kr)/k$ nas contas da demonstração do teorema, obtendo que a segunda forma fundamental de Σ_R é identicamente nula, e portanto Σ_R é totalmente geodésica. Por unicidade de geodésicas com velocidade e posição iniciais, segue que Σ_R é precisamente a hipersuperfície totalmente geodésica que intersecciona γ no ponto $\gamma(R)$ ortogonalmente.

Além disso, a expressão (5.6) é verificada utilizando a expressão (5.15) e fazendo $t \to \pm\infty$. ■

Teorema 5.1.6 *Se M é variedade Hadamard rotacionalmente simétrica com curvatura seccional $K_M \leq -k^2$ então M satisfaz a condição de convexidade estrita.*

Dem. Sejam $x \in \partial_\infty M$ e $W \subset \partial_\infty M$ aberto tal que x pertença ao interior de W. Seja $\gamma : [0, +\infty) \to M$ raio geodésico unitário tal que $\gamma(0) = o$, $\gamma(\infty) = x$ e seja $\alpha \in (0, \pi/2)$ tal que

$$\{\widetilde{\gamma}(\infty) \,|\, \widetilde{\gamma}(0) = o, \sphericalangle(\widetilde{\gamma}'(0), \gamma'(0)) \leq \alpha\} \subseteq W.$$

Escolhemos $R >> 0$ tal que $\tanh kR = \cos\alpha$ e construímos Σ_R e Ω' como acima. Pondo $\Omega := M \setminus \overline{\Omega'}$, a Proposição 5.1.5 nos dá que $M \setminus \Omega$ é convexo e ainda temos que, pela expressão (5.6),

$$\partial_\infty \Omega = \{\widetilde{\gamma}(\infty) \,|\, \widetilde{\gamma}(0) = o, \sphericalangle(\widetilde{\gamma}'(0), \gamma'(0)) \leq \alpha\},$$

já que uma vez que os ângulos na origem o independem da função f que define a métrica, a expressão (5.15) nos dá que a fronteira assintótica de Σ_R é dada por (5.6).

Assim, Ω satisfaz as propriedades (4.1)–(4.3) da Definição 4.1.1, o que conclui a demonstração. ■

O Corolário que segue é uma extensão para operadores mais gerais do que já é conhecido para o caso $\mathcal{Q} = \mathcal{M}$, conforme [EFR]. Já para o caso do p-laplaciano, é possível obtê-lo como consequência do Teorema 4 de [V1].

Corolário 5.1.7 *Se M é rotacionalmente simétrica com $K_M \leq -k^2$, então M é regular no infinito com respeito a $\mathcal{Q}$. Em particular, as conclusões dos Teoremas 4.1.2, 4.1.4 e 4.2.1 são válidas para M.*

5.2 Curvatura seccional com decrescimento controlado

Outra classe de variedades que satisfazem a condição de convexidade estrita é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 5.2.1 *Seja M uma variedade Hadamard com curvatura seccional $K_M \leq -k^2$ e suponha que existam $o \in M$ e $R^* > 0$ tais que*

$$K_R := \min\{K_M(\Pi) | \Pi \text{ é um 2-plano em } p, p \in B_{R+1}(o)\}$$

satisfaz

$$K_R \geq -\frac{e^{2kR}}{R^{2+2\epsilon}}, \forall R \geq R^*. \tag{5.16}$$

Então dados $v \in T_oM$ e $0 < \alpha < \pi/2$, existe um subconjunto convexo $C \subset M$ tal que

(i) $\partial_\infty C \supseteq \{\gamma(\infty) | \gamma(0) = o, \sphericalangle(v, \gamma'(0)) \geq 2\alpha\}$

(ii) $M \setminus C$ contém o cone truncado $T_o(v, \alpha, r_0)$ para algum $r_0 > 0$.

Em particular, M satisfaz a condição de convexidade estrita.

Para a prova deste resultado, adaptamos os passos feitos por M. Anderson em [And] e A. Borbély em [B1]. Nestes dois trabalhos é demonstrado que a condição de vizinhanças cônicas convexas de [C] é satisfeita por variedades com curvatura seccional limitada entre duas constantes negativas e satisfazendo $-e^{\lambda(r-1)} \leq K_r$, $K_M \leq -1$, $\lambda < 1/3$, respectivamente. Como nosso interesse é parecido, porém distinto, reescrevemos a demonstração com algumas adaptações.

Observamos também neste momento que I. Holopainen e A. Vähäkangas provaram em [HV] que o p-laplaciano é regular no infinito com as mesmas hipóteses do Teorema 5.2.1 (veja Corolário 3.23 de [HV]). A técnica no entanto é bastante diferente da nossa, o que é um fato bastante curioso.

Já para o caso de $\mathcal{Q} = \mathcal{M}$, o resultado é novidade.

A idéia central da construção é baseada no fato de que as bolas geodésicas são uniformemente estritamente convexas, então não importa qual seu raio, sempre é possível tirar um pedacinho delas contendo uma porção da fronteira de modo que o conjunto que sobra continua convexo. Isso depende apenas do fato de $K_M \leq -k^2$. Já o tamanho da fronteira que é retirado sem comprometer a convexidade do restante, quando o raio tende a infinito, é controlado pela limitação inferior da curvatura seccional.

Começamos fixando uma função suave não decrescente $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi([0, 1/2]) = 0$, $\phi \equiv 1$ em $[1, +\infty)$. Seja $L > 0$ tal que $\phi', \phi'' \leq L$. Para $p \in S_R(o)$, definimos $f_p : M \to \mathbb{R}$ por

$$f_p(x) = \phi(\rho_p(x)),$$

onde ρ_q denota a função distância a $q \in M$.

Daqui para frente, usamos a notação $a_R := \sqrt{-K_R}$.

Lema 5.2.2 *Existe $\beta > 0$ que depende apenas de k e L tal que, se pomos*

$$\varepsilon_R := \beta R^{1+\epsilon} e^{-kR}, \tag{5.17}$$

então o subconjunto de nível

$$\{x \in M;\ (\rho_o - \varepsilon_R f_p)(x) \leq R\}$$

é um conjunto estritamente convexo para $R \geq \max\{1, r^*, R^*\}$, onde r^* é tal que $e^{-kr^*}(r^*)^{1+\epsilon} = 1$.

Dem. É suficiente provar que o hessiano of $\rho_o - \varepsilon_R f_p$ é positivo-definido no subespaço $\{X \in T_xM | X \perp \nabla(\rho_o - \varepsilon_R f_p)(x)\}$, para cada x tal que $(\rho_o - \varepsilon_R f_p)(x) = R$. Seja $R \geq R^*$, onde a estimativa (5.16) vale, e $R > 1$, para que o conjunto de nível represente $B_R(o)$ menos um pedacinho. Fixamos um tal x. Seja $X \perp \nabla(\rho_o - \varepsilon_R f_p)(x)$. Então

$$\begin{aligned} D^2(\rho_o - \varepsilon_R f_p)(X, X) &= \langle \nabla_X \left(\nabla\rho_o - \varepsilon_R \phi' \nabla\rho_p \right), X\rangle \\ &= D^2\rho_o(X, X) - \varepsilon_R \phi' D^2\rho_p(X, X) - \varepsilon_R \phi'' \langle \nabla\rho_p, X\rangle^2. \end{aligned}$$

Como ρ_o é uma função distância tem-se que $D^2\rho_o(X, X) = D^2\rho_o(X^\perp, X^\perp)$, onde $X^\perp = X - \langle X, \nabla\rho_o\rangle\nabla\rho_o$; além disso, $\langle X, \nabla\rho_o\rangle = \varepsilon\phi'\langle X, \nabla\rho_p\rangle$.

Por fim, como $K_M \leq -k^2$, o Teorema de Comparação do Hessiano implica a estimativa $D^2\rho_o(X^\perp, X^\perp) \geq k\|X^\perp\|^2$, e desta forma

$$\begin{aligned} D^2\rho_o(X, X) &\geq k\left(\|X\|^2 - \langle X, \nabla\rho_o\rangle^2\right) \\ &= k\left(\|X\|^2 - \varepsilon_R\phi'\langle X, \nabla\rho_p\rangle\langle X, \nabla\rho_o\rangle\right) \geq k(1 - \varepsilon_R L)\|X\|^2 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Por outro lado, como $\phi' \equiv 0$ em $[1, +\infty)$ e $K_M \geq -a_R^2$ em $B_{R+1}(o)$, aplicamos novamente o Teorema de Comparação do Hessiano, na outra direção, para obter

$$\begin{aligned} \phi' D^2\rho_p(X, X) &\leq \phi' a_R \coth(a_R\rho_p)\|X - \langle X, \nabla\rho_p\rangle\nabla\rho_p\|^2 \\ &= \phi' a_R \coth(a_R\rho_p)\left(\|X\|^2 - \langle X, \nabla_p\rangle^2\right) \\ &\leq \phi' a_R \coth(a_R\rho_p)\|X\|^2. \end{aligned}$$

Como temos que $\phi' \equiv 0$ em $[0, 1/2]$, com $a_R \geq k$, temos

$$\phi' D^2\rho_p(X, X) \leq \phi' a_R \coth(a_R/2)\|X\|^2 \leq L a_R \coth(k/2)\|X\|^2. \tag{5.19}$$

Assim, se $\|X\| = 1$ e $R \geq r^*$ (o que implica que $\varepsilon_R \leq \beta$), usando também que $\varepsilon_R a_R \leq \beta$, temos que

$$\begin{aligned} D^2(\rho_o - \varepsilon_R f_p)(X, X) &\geq k(1 - \varepsilon_R L) - \varepsilon_R L a_R \coth(k/2) - \varepsilon_R L \\ &\geq k - \beta\left(k + 1 + \coth(k/2)\right) L. \end{aligned}$$

e desta forma, escolhendo

$$\beta := \frac{k}{2L(k+1+\coth(k/2))}, \tag{5.20}$$

obtemos a estimativa $D^2(\rho_o - \varepsilon_R f_p)(X,X) \geq k/2$, concluindo a demonstração. ■

Precisamos de mais um resultado geométrico, que diz que se estamos em M olhando a partir de o para uma bola de raio 1 que se afasta, então o ângulo que ela ocupa de nossa visão decresce exponencialmente com a distância a o. Mais precisamente:

Lema 5.2.3 *Sejam M uma variedade riemanniana com $K_M \leq -k^2$, $o \in M$ e $p \in M$ com $\rho_o(p) = R$, Então*

$$\theta_R := \max\{\sphericalangle(\gamma'_{op}(0), \gamma'_{oq}(0));\ q \in S_1(p)\} \leq \arcsin\left(\frac{\sinh k}{\sinh kR}\right). \tag{5.21}$$

Como consequência, se também vale que $R \geq \tilde{r}$, onde $\tilde{r} \geq (\ln 2)/2k$ e $\sinh^2 k\tilde{r} \geq 4\sinh^2(k)/3$, então existe $A > 0$ constante universal tal que $\theta_R \leq Ae^{-kR}$.

Dem. Notamos inicialmente que é suficiente provar que vale igualdade em (5.21) para o caso particular em que $M = \mathbb{H}^2(-k^2)$, o plano hiperbólico de curvatura seccional constante $-k^2$. De fato, sejam $p_1 = p$ como no enunciado e p_2 que realiza o máximo na expressão de θ_R. Denotamos por $\widetilde{d}$ a distância no hiperbólico.

Sejam $\widetilde{o}, \widetilde{p_1}$ e $\widetilde{p_2}$ pontos no plano hiperbólico tais

$$\widetilde{d}(\widetilde{o}, \widetilde{p_i}) = d(o, p_i), i = 1, 2,$$

$$\widetilde{d}(\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}) = d(p_1, p_2).$$

Queremos mostrar que $\alpha \leq \widetilde{\alpha}$, onde α é o ângulo em o e $\widetilde{\alpha}$ em $\widetilde{o}$.

Suponhamos por absurdo que $\widetilde{\alpha} < \alpha$. Então existe $\eta > 0$ tal que $\alpha = \widetilde{\alpha} + \eta$. Seja p o ponto de $\gamma_{p_1p_2}$ tal que $\sphericalangle\left(\gamma'_{op_1}(0), \gamma'_{op}(0)\right) = \widetilde{\alpha}$. Como as geodésicas em M se afastam mais rapidamente que em $\mathbb{H}^2$ (pelo Teorema da Comparação de Rauch), temos que $\mathrm{dist}_M(p_1, p) \geq \mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2})$, visto que os ângulos coincidem. Assim, $\mathrm{dist}_M(p_1, p_2) = \mathrm{dist}_M(p_1, p) + \mathrm{dist}(p, p_2) > \mathrm{dist}(\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2})$, pois $p \neq p_2$, já que $\eta > 0$. Isso é absurdo.

Podemos prosseguir, assim, mostrando igualdade em (5.21) em $\mathbb{H}^2(-k^2)$. Para isso, utilizaremos o modelo do disco de Poincaré, ou seja, consideramos $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$ munido da métrica

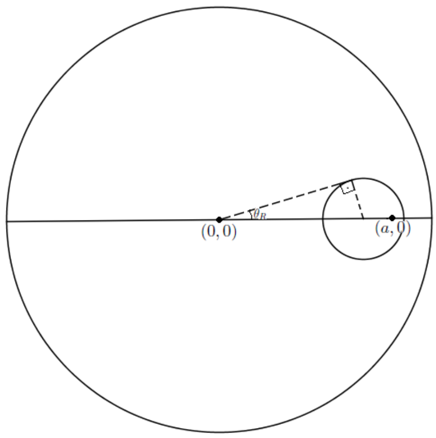
$$\langle u, v\rangle_{(x,y)} = \frac{4\langle u, v\rangle_e}{k^2(1 - x^2 - y^2)^2},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ denota a métrica euclidiana.

Como o espaço hiperbólico é homogêneo, podemos supor sem perda de generalidade que $o = (0,0)$ e que $p = (a, 0)$, $a > 0$. Como uma consequência imediata da expressão da métrica, temos que se a distância hiperbólica de p a o é R, então $a = \tanh(kR/2)$.

Observamos ainda que os ângulos hiperbólico e euclidiano em $o = (0,0)$ coincidem, pois a métrica de Poincaré é conforme à euclidiana. Desta forma, para calcular θ_R é suficiente calcular o ângulo euclidiano máximo do círculo $\mathbb{B}$ de centro hiperbólico $(a, 0)$ e raio hiperbólico 1. Neste caso, é fácil ver que θ_R é dado por

$$\operatorname{sen} \theta_R = \frac{\text{Raio euclidiano de } \mathbb{B}}{\text{Norma euclidiana do centro euclidiano de } \mathbb{B}}. \tag{5.22}$$



É suficiente, então, calcular o centro e o raio euclidianos de $\mathbb{B}$. Para isso, utilizaremos isometrias de $\mathbb{D}^2$, que são as transformações de Möbius que preservam o disco unitário. Escrevmos $z = x + iy$, e então

$$g(z) := \frac{z + a}{az + 1}$$

é um isometria que leva o eixo horizontal $\{y = 0\}$ em si próprio e leva o círculo hiperbólico de raio 1 centrado em o, $\widetilde{\mathbb{B}}$ (que é o círculo euclidiano centrado em $(0,0)$ de raio $b := \tanh(k/2)$), no circulo hiperbólico $\mathbb{B}$ de centro hiperbólico p e raio hiperbólico 1. Observe que os centros e raios hiperbólico e euclidiano não coincidem, no entanto, através da expressão da g é fácil ver que $g(-b)$ e $g(b)$ formam um diâmetro de $\mathbb{B}$, de onde obtemos que o centro euclidiano é dado por $(g(b)+g(-b))/2$ e o raio euclidiano por $(g(b)-g(-b))/2$. Assim,

$$\begin{aligned}\sin\theta_R &= \frac{g(b)-g(-b)}{g(b)+g(-b)} = \frac{b(1-a^2)}{a(1-b^2)}\\ &= \frac{\tanh(k/2)(1-\tanh^2(kR/2))}{\tanh(kR/2)(1-\tanh^2(k/2))} = \frac{\tanh(k/2)\cosh^2(k/2)}{\tanh(kR/2)\cosh^2(kR/2)}\\ &= \frac{\sinh(k/2)\cosh(k/2)}{\sinh(kR/2)\cosh(kR/2)} = \frac{\sinh k}{\sinh kR}\end{aligned}$$

e portanto

$$\theta_R = \arcsin\left(\frac{\sinh k}{\sinh kR}\right),$$

o que conclui a primeira afirmação.

Agora, se $\sinh^2 k/\sinh^2 kR \leq 3/4$, temos $\sqrt{1-\sinh^2 k/\sinh^2 kR} \geq 1/2$, o que nos dá

$$\arcsin\frac{\sinh k}{\sinh kR} = \int_0^{\frac{\sinh k}{\sinh kR}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \int_0^{\frac{\sinh k}{\sinh kR}} 2dt.$$

Se além disso também valer que $R \geq (\ln 2)/2k$, obtemos $\sinh kR \geq e^{kR}/4$, e portanto escrevendo $A := 8\sinh(k)$, obtemos a segunda afirmação, concluindo a demonstração. ∎

Com estes dois lemas em mãos, podemos partir para a demonstração do Teorema 5.2.1.

Prova do Teorema 5.2.1. Começamos com $r_0 \geq R^*$ que será determinado no fim da demonstração. Definimos os seguintes conjuntos:

$$C_0 := B_{r_0}, \quad T_0 := \{p \in S_r; \sphericalangle(\gamma_{op}, v) < \alpha\}, \quad D_0 = \emptyset$$

Graças ao Lema 5.2.2, existe $\varepsilon_0 := \varepsilon_{r_0}$ uniforme tal que para cada $p \in S_{r_0}(o)$, o subconjunto de nível

$$C_{1,p} := \{x \in M;\ (\rho_o - \varepsilon_0 f_p)(x) \leq r_0\}$$

é convexo. Definimos então a segunda coleção de conjuntos como segue:

$$\begin{aligned}\widetilde{C_1} &:= \bigcap_{p\in T_0} C_{1,p}, \quad C_1 := \widetilde{C_1}\setminus D_0, \quad r_1 := r_0+\varepsilon_0\\ D_1 &:= B_{r_1}(o)\setminus C_1, \quad T_1 := \overline{S_{r_1}(o)\setminus \partial C_1}.\end{aligned}$$

Note que C_1 é convexo, já que é a intersecção de convexos.

Definmos também

$$\theta_0 := \sup\{\sphericalangle(\gamma'_{op}(0), \gamma'_{oq}(0));\ p \in T_0,\ q \in S_1(p)\}.$$

Portanto, $\sphericalangle(v, \gamma'_{ox}(0)) \leq \alpha + \theta_0$, para todo $x \in D_1$. De fato, se $x \in D_1$, existe $p \in T_0$ tal que $x \in B_{r_1}(o) \setminus C_{1,p}$, o que implica que $r_0 + \varepsilon\phi(\rho_p(x)) < \rho(x) < r_1$, e logo $x \in B_1(p)$, caso contrário teríamos o absurdo $r_1 < r_1$. Desta forma

$$\sphericalangle(v, \gamma'_{ox}(0)) \leq \sphericalangle(v, \gamma'_{op}(0)) + \sphericalangle(\gamma'_{op}(0), \gamma'_{ox}(0)) \leq \alpha + \theta_0.$$

Agora procedemos indutivamente da seguinte forma: Suponha que C_k, r_k, D_k e T_k estão definidos para todo $k \leq n-1$, $n \geq 1$, e que todos os C_ks são convexos. Pelo Lema 5.2.2, existe ε_n uniforme tal que se $p \in S_{r_{n-1}}(o)$, o conjunto $C_{n,p} := \{\rho_o - \varepsilon_{n-1} f_p \leq r_{n-1}\}$ é convexo. Defina

$$\begin{aligned}
&\widetilde{C_n} := \bigcap_{p \in T_{n-1}} C_{n,p}, \quad C_n := \widetilde{C_n} \setminus D_{n-1}, \quad r_n := r_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \\
&D_n := B_{r_n}(0) \setminus C_n, \quad T_n := \overline{S_{r_n}(o) \setminus \partial C_n}, \\
&\theta_n := \sup\{\sphericalangle(\gamma'_{op}(0), \gamma'_{oq}(0)); p \in T_n, q \in S_1(p)\}.
\end{aligned}$$

Afirmaçã 1. C_n é convexo.

De fato, sejam $x, y \in C_n$ e suponha por absurdo, que $\gamma_{xy} \nsubseteq C_n$. Como $C_n \subset \widetilde{C_n}$, que é convexo, deve ocorrer $\gamma_{xy} \cap D_{n-1} \neq \emptyset$. Em particular, γ_{xy} deve interseccionar ∂D_{n-1} pelo menos duas vezes. Por outro lado, como C_{n-1} é convexo, γ_{xy} não pode cruzar ∂C_{n-1} duas vezes, caso contrário estaria contido em $C_{n-1} \subset C_n$. Logo γ_{xy} deve cruzar $\overline{\partial D_{n-1} \setminus \partial C_{n-1}} = \operatorname{int} T_{n-1}$. Mas neste caso, γ_{xy} conteria pontos de $B_{r_n}(o) \setminus \widetilde{C_n}$, o que contradiz a convexidade de $\widetilde{C_n}$.

Afirmação 2. Se $x \in D_n$, então $\sphericalangle(v, \gamma'_{ox}(0)) \leq \alpha + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i$.

De fato, a definição de D_n implica que $D_n = D_{n-1} \cup \left(B_{r_n}(o) \setminus \widetilde{C_n}\right)$. Se $x \in D_{n-1}$, termina, já que por indução é possível concluir que $\sphericalangle(v, \gamma'_{oy}(0)) \leq \alpha + \sum_{i=0}^{n-2} \theta_i$ para todo $y \in D_{n-1}$. Caso contrário, existe $p \in T_{n-1}$ tal que $x \in B_{r_n}(o) \setminus C_{n,p}$, o que implica que $x \in B_{r_n}(o) \cap B_1(p)$ para algum $p \in T_{n-1}$. Assim

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(v, \gamma'_{ox}(0)) &\leq \sphericalangle(v, \gamma'_{op}(0)) + \sphericalangle(\gamma'_{op}(0), \gamma'_{ox}(0)) \\
&\leq \sphericalangle(v, \gamma'_{op}(0)) + \theta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil ver que $T_{n-1} \subset \overline{D_{n-1}}$, logo $\sphericalangle(v, \gamma'_{op}(0)) \leq \alpha + \sum_{i=0}^{n-2} \theta_i$, o que conclui a afirmação 2.

Afirmação 3. Sejam

$$C := \bigcup_{n\geq 0} C_n, \quad D := \bigcup_{n\geq 0} D_n.$$

Então C é convexo e $M = C \cup D$.

Como por construção temos $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$ e todos os C_ns são convexos, segue imediatamente que C é convexo. Para provar que $M = C\cup D$, é suficiente mostrar que $r_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$ pois $B_{r_n}(o) = C_n \cup D_n$. Se supomos, por absurdo, que existe $A > 0$ tal que $r_n \leq A$ para todo $n \geq 0$, concluímos que

$$\varepsilon_n = \beta r_n^{1+\epsilon} e^{-kr_n} \geq \beta r_0^{1+\epsilon} e^{-kA}, \ \forall n \geq 0,$$

e usando que

$$r_{n+1} = r_n + \varepsilon_n = r_0 + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_n,$$

concluímos que $r_n \to +\infty$, o que é absurdo. Devido à afirmação 3, é suficiente mostrar que $\partial_\infty D \subset \{\gamma_v(+\infty)\, ; \sphericalangle(v, \gamma'(0)) \leq 2\alpha\}$ para obter (i). Para tal, note que, ao menos formalmente, se $x \in D$,

$$\sphericalangle(v, \gamma'_{ox}(0)) \leq \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n.$$

Assim, a única coisa que resta provar é que a série converge a uma constante $\leq \alpha$, desde que r_0 seja escolhido corretamente. A idéia central é estimar quantos r_i estão em cada intervalo para assim controlar, de certa forma, o número de termos da série. Definimos para isso t_n como o número de r_is no intervalo $I_n := [r_0 + n, r_0 + n + 1]$, $n \geq 0$. Seja j_n o subíndice do maior r_i em I_n. Como ε_i decresce com i, temos:

$$\begin{aligned} t_n \varepsilon_{j_n} &\leq \varepsilon_{j_n-1} + \varepsilon_{j_n-2} + \cdots + \varepsilon_{j_n-t_n} \\ &= (r_{j_n} - r_{j_n-1}) + (r_{j_n-1} - r_{j_n-2}) + \cdots + (r_{j_n+1-t_n} - r_{j_n-t_n}) \\ &= r_{j_n} - r_{j_n-t_n} \leq (r_0 + n + 1) - (r_0 + n) = 1. \end{aligned}$$

A estimativa acima nos dá

$$t_n \leq \varepsilon_{j_n}^{-1} \leq \frac{e^{k(r_0+n+1)}}{\beta (r_0+n)^{1+\epsilon}},$$

onde a última desigualdade é válida porque $r_0 + n \leq r_{j_n} \leq r_0 + n + 1$.

Além disso, pelo Lema 5.2.3 temos que $\theta_i \leq Ae^{-kr_i}$. Esses dois fatos nos dão

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r_i \in I_n} \theta_i \leq \sum_{n=0}^{\infty} t_n A e^{-k(r_0+n)} \leq \frac{Ae^k}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(r_0+n)^{1+\epsilon}}$$

Fica então claro que escolhendo adequadamente o valor de r_0, é possível obter $\theta < 2\alpha$.

Para provar (ii), seja γ um raio geodésico a partir de o satisfazendo $\sphericalangle(\gamma'(0), v) < \alpha$. Então γ intersecciona T_0 à distância r_0, saindo de C. Como por construção $\partial C \supseteq T_0$ e C é convexo, γ não pode interseccionar C após distância r_0. ■

5.3 Problemas em aberto

Com o trabalho [Anc] de A. Ancona, é sabido que existem variedades de curvatura seccional $K_M \leq -1$ para as quais existem dados no bordo cujos problemas de Dirichlet assintóticos não são solúveis, com respeito ao laplaciano. A abordagem em [Anc] é probabilística, porém, em seu trabalho [B2], A. Borbély mostrou o mesmo fato utilizando argumentos analíticos. Ambas as provas utilizam construções de variedades que satisfazem a seguinte propriedade: existe um ponto $x \in \partial_\infty M$ tal que se U é vizinhança de x na topologia dos cones, então a envoltória convexa de U (isto é, o menor convexo que contém U) é toda a variedade M.

Recentemente, I. Holopainen mostrou em [Ho2] que existem variedades para as quais problemas de Dirichlet assintóticos não são solúveis em geral com respeito aos p-laplacianos, estendendo os resultados de Ancona e Borbély. A construção usada por Holopainen é similar àquela que Borbély apresenta.

Esses exemplos mostram que a condição de convexidade estrita não é sempre satisfeita em uma variedade de Hadamard M com $K_M \leq -k^2 < 0$.

Uma pergunta que segue em aberto é se também vale um resultado de não-existência para a equação de hipersuperfície mínima.

Também temos interesse em investigar quais são as relações entre a nossa condição de convexidade estrita e a condição de vizinhanças convexas do Choi.

Por fim, uma outra questão que nos parece bastante surpreendente é que a hipótese (5.16) também aparece no Corolário 3.23 de [HV], e, substituindo a limitação inferior da curvatura seccional por curvatura de Ricci, também está presente no trabalho de Hsu [Hs] para o caso específico do laplaciano (a presença desta hipótese com a curvatura de Ricci no lugar da curvatura seccional se justifica provavelmente pela linearidade do laplaciano). A prova de existência de solução para (1.1) com esta hipótese é feita de maneiras completamente diferentes em cada um desses trabalhos. Este fato é curioso e estamos interessados, assim como Holopainen (veja [Ho2]), em investigar o quão *sharp* são nossas suposições.

Referências Bibliográficas

[Anc] A. Ancona: *"Convexity at infinity and Brownian motion on manifolds with unbounded negative curvature"*, Revista Matemática Iberoamericana, **10 (1)**: 189–220,1994.

[And] M. T. Anderson: *"The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature"* J. Differential Geom. **18 (4)**: 701–721, 1983.

[BO] R. L. Bishop and B. O'Neill: *" Manifolds of Negative Curvature"*. Transactions of the American Mathematical Society **145**: 1–49, 1969.

[B1] A. Borbély: *A note on the Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*. Proc. Am. Math. Soc., **114 (3)**: 865–872, 1992.

[B2] A. Borbély, *" The nonsolvability of the Dirichlet problem on negatively curved manifolds"*. Differential Geometry and its Applications **8**: 217–237, 1998.

[C] H. I. Choi: *"Asymptotic Dirichlet problems for harmonic functions on Riemannian manifolds"*. Trans. Am. Math. Soc., **281 (2)**: 691–716, 1984.

[DHL] M. Dajczer, P. Hinojosa, J.H. de Lira. *"Killing graphs with prescribed mean curvature"*, Calc. Var. Partial Differential Equations **33**: 231–248, 2008.

[EFR] N. do Espírito-Santo, S. Fornari, J. Ripoll:"*The Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation in $M \times \mathbb{R}$ with prescribed asymptotic boundary*", Journal de Mathématiques Pures et Apliquées **93 (2)**: 204–221, 2010.

[EO] P. Eberlein e B. O'Neill: *"Visibility manifolds"*, Pacific Journal of Mathematics **46 (1)**: 45–109, 1973.

[GR] J. A. Gálvez, H. Rosenberg :"*Minimal surfaces and harmonic diffeomorphisms from the complex plane onto certain Hadamard surfaces*". American Journal of Mathematics **132 (5)**: 1249–1273, 2010.

[GT] D. Gilbarg, N. Trudinger: *"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order"*. Springer, Berlin, 1998.

[Ho1] I. Holopainen: *"Asymptotic Dirichlet problem for the p-Laplacian on Cartan-Hadamard manifolds"*. Proc. Amer. Math. Soc. **130 (11)**: 3393–3400 (electronic), 2002.

[Ho2] I. Holopainen: *"Nonsolvabily of the asymptotic Dirichlet problem for the p-Laplacian on Cartan-Hadamard manifolds"*, preprint.

[HV] I. Holopainen and A. Vähäkangas: "*Asymptotic Dirichlet problem on negatively curved spaces",*Proceedings of the International Conference on Geometric Function Theory,Special Functions and Applications (ICGFT) Editors: R. W. Barnard and S. Ponnusamy. J. Analysis **15**: 63–110, 2007.

[Hs] E. P. Hsu.: "*Brownian motion and Dirichlet problems at infinity.*". The Annals of Probability **31 (3)**: 1305–1319, 2003.

[KN] B. Kotschwar, L. Ni: *"Local gradient estimates of p-harmonic functions, $1/H$-flow, and an entropy formula"*. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **(4) 42 (1)**: 1–36, 2009.

[Ne] R. W. Neel: "*Brownian motion and the Dirichlet problem at infinity on two-dimensional Cartan-Hadamard manifolds.* arXiv: 0912.0330v1, 2009.

[Ni] P. Nitsche "*Existence of prescribed mean curvature graphs in hyperbolic space*". Manuscripta math. **108**: 349–367, 2002.

[RS] M. Rigolli, A. Setti: *Liouville type theorems for $\varphi-$subharmonic functions,* Rev. Mat. Iberoam. **17**: 471–520, 2001.

[SY] R. Schoen, S. T. Yau: "*Lectures on Differential Geometry*", Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, Vol I, International Press, 1994.

[Sp] J. Spruck,"*Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in $M^n \times \mathbb{R}$*", Pure and Applied Mathematics Quarterly **3 (3)**(Special Issue: In honor of Leon Simon, Part 1 of 2): 785–800, 2007.

[Su] D. Sullivan: *"The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold"*. J. Differential Geom. **18 (4)**: 723–732, 1983.

[V1] A. Vähäkangas: *Dirichlet Problem at Infinity for $\mathcal{A}$-Harmonic Functions*, Potential Anal **27**: 27–44, 2007.

[V2] A. Vähäkangas: "*Dirichlet problem at infinity for p-harmonic functions on negatively curved spaces",* Academic Dissertation, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, University of Helsinki, 2008.