

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DA ENERGIA ESTACIONÁRIA E  
BIDIMENSIONAL PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO  
PLENAMENTE DESENVOLVIDO EM PLACA PLANA PARALELA PELO  
MÉTODO DA GILTT**

por

Ismael Rodrigo Heinen

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2005

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DA ENERGIA ESTACIONÁRIA E  
BIDIMENSIONAL PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO  
PLENAMENTE DESENVOLVIDO EM PLACA PLANA PARALELA PELO  
MÉTODO DA GILTT**

por

Ismael Rodrigo Heinen

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Túllio Mena Barreto de Vilhena

Aprovada por:

Prof. Dr. Francis Ramos França (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Ruben Panta Pazos (UNISC/RS)

Prof. Dr. Sérgio Wortmann (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Umberto Rizza (INST. FÍSICA ATM./LECCE/ITÁLIA)

Prof. Dr. Flávio José Lorini  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 25 de Janeiro de 2005

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Dr. Marco Túllio M. B. de Vilhena pela amizade, pelo conhecimento transmitido, assim como pela sua orientação durante este período.

Agradeço, igualmente, ao professor Dr. Sérgio Wortmann pela amizade, generosidade, companheirismo, pelas discussões, sugestões e contribuições, tanto na GILTT, como na parte computacional.

Aos Professores Jorge Zabadal, Cynthia Feijó Segatto e Volnei Borges pela amizade e pelas sugestões para a realização deste trabalho.

Aos meus pais Alberto e Gelcy que sempre me deram o apoio necessário para que pudesse estudar, e aos meus irmãos Jones e Bárbara pela amizade, companheirismo e generosidade.

Aos demais colegas pela amizade e que de alguma forma direta ou indireta contribuíram na realização deste trabalho.

Ao CNPQ pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes.

9 de Junho de 2005

## RESUMO

SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DA ENERGIA ESTACIONÁRIA E BIDIMENSIONAL PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO PLENAMENTE DESENVOLVIDO EM PLACA PLANA PARALELA PELO MÉTODO DA GILTT

Neste trabalho é apresentado um avanço na técnica **GILTT** (Generalized Integral and Laplace Transform Technique) solucionando analiticamente um sistema de **EDO's** (Equações Diferenciais Ordinárias) de segunda ordem resultante da transformação pela **GITT** (Generalized Integral Transform Technique). Este tipo de problema usualmente aparece quando esta técnica é aplicada na solução de problemas bidimensionais estacionários. A principal idéia consiste na redução de ordem do problema transformado em outro sistema de **EDO's** lineares de primeira ordem e a solução analítica deste problema, pela técnica da transformada de Laplace. Como exemplo de aplicação é resolvida a equação da energia linear bidimensional e estacionária. São apresentadas simulações numéricas e comparações com resultados disponíveis na literatura.

## **ABSTRACT**

### GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM WITH LAPLACE TRANSFORM IN SOLUTION OF APPLIED PROBLEMS

In this work, we report the recent advance in the **GILTT** technique, regarding the issue of solving analytically the linear second order ordinary **GITT** transformed equation. This kind of problems usually appears in the **GITT** solution of steady-state problems. The main idea consists in the reduction of order of the transformed problem into a linear first order ordinary differential equation and solution of the resulting problem, analytically, by the Laplace transform technique. We specialize the application to the solution of the linear steady-state two-dimensional energy equation in parallel-plane channel. We also present numerical simulation and comparisons with available results in the literature.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>OS MÉTODOS UTILIZADOS</b> .....	<b>7</b>
2.1	A GILTT .....	7
2.1.1	A GITT .....	7
2.1.2	A TRANSFORMADA DE LAPLACE NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS TRANSFORMADOS .....	11
2.2	Solução Analítica do Sistema de EDO's Lineares de Segunda Ordem - Redução de Ordem de EDO's .....	21
2.3	FÓRMULA DA INVERSA MODIFICADA .....	26
<b>3</b>	<b>PROBLEMA DIFUSIVO-ADVECTIVO COM TERMO DIFUSIVO TRANSVERSAL</b> .....	<b>29</b>
3.1	O MODELO MATEMÁTICO .....	29
3.2	MÉTODO DE SOLUÇÃO: GILTT .....	32
3.2.1	GITT .....	32
3.2.2	Solução do Sistema de <b>EDO's</b> Transformado .....	34
3.3	RESULTADOS .....	37
<b>4</b>	<b>PROBLEMA DIFUSIVO-ADVECTIVO COM TERMOS DIFUSIVOS AXIAL E TRANSVERSAL</b> .....	<b>41</b>
4.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	41
4.2	O MODELO MATEMÁTICO .....	41
4.3	MÉTODO DE SOLUÇÃO: GILTT .....	43
4.3.1	GITT .....	43
4.3.2	Solução do Sistema de <b>EDO's</b> Transformado com Redução de Ordem .....	44

4.4	RESULTADOS .....	48
4.5	RESULTADOS ADICIONAIS .....	51
5	CONCLUSÃO .....	57
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	59
	APÊNDICES .....	65
I	Transformação Integral da Primeira Equação da Energia .....	65
II	Transformação Integral da Condição de Entrada para o Sistema de EDO's Transformado .....	67
III	Transformação Integral da Segunda Equação da Energia .....	69
IV	Transformação Integral das Condições de Contorno em $X$ para o Sistema de EDO's Transformado .....	71
V	Relação entre os Grupos Adimensionais deste trabalho e com os da referência [Shah e London, 1978] .....	74

# LISTA DE SÍMBOLOS

## 1. Caracteres Arábicos

$A$ :	operador diferencial genérico.
$A(y(t))$ :	matriz de coeficientes do problema transformado não linear.
$B$ :	operador diferencial genérico.
$B(y(t))$ :	matriz de coeficientes do problema transformado não linear.
$E(t)$ :	matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes variáveis.
$E_n$ :	matriz constante com os valores médios de $E(t)$ .
$F(t)$ :	matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes variáveis.
$F_n$ :	matriz constante com os valores médios de $F(t)$ .
$E$ :	matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes constantes.
$E_{av}(t)$ :	matriz definida pela equação 2.31.
$F$ :	matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes constantes.
$k$ :	coeficiente de condutividade térmica do fluido.
$L$ :	operador diferencial associado ao problema de Sturm-Liouville.
$N$ :	número de autovalores ou ordem de truncamento da fórmula da inversa.
$N_i$ :	quadrado da norma $L^2(a, b)$ e do problema da temperatura do fluido.
$Pe$ :	número de Péclet $Pe = Re Pr$ .
$Pr$ :	número de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ .
$Re$ :	número de Reynolds $Re = \frac{u_0 h_w}{\nu}$ .
$S$ :	fonte genérica tanto para <b>EDP</b> genérica como para os problemas transformados genéricos.
$T(x, y)$ :	temperatura dimensional.
$U(Y)$ :	perfil de velocidades adimensionais para escoamento plenamente desenvolvido.
$X_{av}$ :	matriz de autovetores da matriz de coeficientes dos problemas transformados com coeficientes constantes.
$Z(0^*)$ :	vetor definido pela equação 2.74.
$Z_1(X)$ :	vetor definido pela equação 2.60.
$Z_2(X)$ :	vetor definido pela equação 2.61.



$Z(X)$ :	vetor definido pela equação 2.73.
$\overline{Z(s)}$ :	vetor definido pela equação 2.73 e transformado por Laplace.
$\overline{t_i(X)}$ :	temperatura transformada dos problemas difusivos-advectivos.
$\overline{u_i(t)}$ :	variável dependente transformada.
$h_w$ :	distância do centro do escoamento até a placa, dimensional.
$u(y)$ :	componente transversal da velocidade dimensional.
$T_0$ :	condição de entrada para a temperatura dimensional.
$T_w$ :	temperatura dimensional na placa.

## 1. Caracteres Gregos

$D_{av}$ :	matriz diagonal de autovalores da matriz dos problemas transformados.
$\alpha$ :	difusividade térmica do fluido $\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p}$ .
$\delta_{i,j}$ :	delta de Kronecker.
$\lambda$ ou $\lambda_i$ :	autovalor dos problemas de Sturm-Liouville.
$\mu$ :	viscosidade do fluido.
$\nu$ :	viscosidade cinemática do fluido.
$\psi$ ou $\psi_m$ :	autovetor do problema de Sturm-Liouville.
$\rho$ :	densidade do fluido.
$\theta_i(X, Y)$ :	temperatura adimensional genérica.
$\theta_1(X, Y)$ :	temperatura adimensional do problema do capítulo 3.
$\theta_2(X, Y)$ :	temperatura adimensional do problema do capítulo 4.
$\overline{\Theta}_1(X)$ :	vetor temperatura transformado pela <b>GITT</b> do problema do capítulo 3.
$\overline{\Theta}_2(X)$ :	vetor temperatura transformado pela <b>GITT</b> do problema do capítulo 4.
$\overline{\overline{\Theta}}_1(s)$ :	vetor temperatura transformado pela <b>GITT</b> e pela transformada de Laplace do problema do capítulo 3.
$\overline{\overline{\Theta}}_2(s)$ :	vetor temperatura transformado pela <b>GITT</b> e pela transformada de Laplace do problema do capítulo 4.

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Comparação das aproximações da equação 3.3c usando a fórmula da inversa (eq. 2.8) cujo somatório foi truncado em 10 e 9 termos. . . . .	27
2.2	Comparação das aproximações da equação 3.3c usando a fórmula da inversa (eq. 2.87) cujo somatório foi truncado em 10 e 9 termos. . . . .	28
3.1	Definição do problema - convecção forçada permanente . . . . .	30
3.2	Temperatura do fluido para $Pe = 1440$ . . . . .	39
3.3	Temperatura média de mistura do fluido para $Pe = 1440$ . . . . .	40
4.1	Temperatura do fluido para $Pe = 1440$ . . . . .	50
4.2	Temperatura média de mistura do fluido para $Pe = 1440$ . . . . .	50
4.3	Temperatura do fluido para $Pe = 1$ . . . . .	51
4.4	Temperatura do fluido para $Pe = 1$ . . . . .	52
4.5	Temperatura do fluido para $Pe = 2000$ . . . . .	54
4.6	Temperatura do fluido para $Pe = 2000$ . . . . .	54

## ÍNDICE DE TABELAS

3.1	Temperatura média de mistura em função do número de autovalores para vários valores de $X$ .....	37
3.2	Comparação da temperatura média de mistura obtida com a referência [Shah e London, 1978]. .....	38
4.1	Temperatura média de mistura em função do número de autovalores para vários valores de $X$ .....	48
4.2	Comparação da temperatura média de mistura obtida com a referência [Shah e London, 1978]. .....	49
4.3	Comparação entre as temperaturas médias de mistura das duas equações da energia. ....	53
4.4	Comparação entre as temperaturas médias de mistura das duas equações da energia. ....	55
4.5	Comparação entre as temperaturas médias de mistura das duas equações da energia. ....	56

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, modelos matemáticos que representam satisfatoriamente os problemas em Física-Matemática, especificamente na Transferência de Calor e Massa, na Teoria do Transporte de partículas neutras e na dispersão de poluentes na camada limite planetária, têm sido resolvidos tanto por métodos numéricos, quanto analíticos e semi-analíticos. O surgimento e o conseqüente avanço dos computadores, propiciou importantes avanços nos métodos numéricos. No entanto, a utilização de tais métodos envolve um alto custo computacional. O uso da computação simbólica associada aos métodos analíticos trouxe importantes melhorias, quer seja reduzindo custos computacionais, quer seja fornecendo resultados mais precisos. Esta associação resultou nos chamados métodos híbridos analítico-numéricos que vêm sendo usados com freqüência cada vez maior. Dentre os híbridos, destacamos a Técnica Transformada Integral Generalizada (Generalized Integral Transform Technique, **GITT**).

Existe uma vasta literatura a respeito da **GITT**, entre os quais podem ser citados os trabalhos de [Cotta, 1993], [Cotta et al., 1992], [Cotta e Mikhailov, 1997], [Aparecido e Cotta, 1990], [Cotta et al., 1990], [Wortmann, 1995], [Cotta, 1994a], [Cotta, 1994b], [Guerrero et al., 2001], [Guerrero et al., 1999], [Pimentel et al., 1998], [Ruperti et al., 1998], [Thum et al., 1998], [Aparecido e Özisik, 1998], [Cheroto et al., 1999], [Pimentel et al., 1999], [Neto et al., 1990], [Guerrero e Cotta, 1992], [Machado e Cotta, 1994], [Monticelli et al., 2003], [Guerrero e Cotta, 1995], [Mikhailov e Cotta, 1994]. É interessante mencionar que esta técnica surgiu como uma evolução da transformada integral clássica [Mikhailov e Özisik, 1984] que é aplicada em **EDP's**(Equações Diferenciais Parciais) difusivas. Sua principal vantagem em relação à antecessora é que ela permite a abordagem de problemas difusivo-advectivos.

A **GITT**, aplicada a problemas governados por equações diferenciais parciais lineares ou não, consiste na expansão do potencial original em uma base determinada a partir de um problema de Sturm-Liouville associado ao problema a ser resolvido. Uma vez efetuada esta expansão, o problema é integrado na dimensão em que foi expandido de forma a fazer uso da propriedade de ortogonalidade da base usada. O sistema de **EDO's** resultante deste procedimento é conhecido como problema transformado. Uma vez encontrada a solução do problema transformado, pode-se obter a solução do problema original através da fórmula da inversa.

O problema transformado é dependente do problema original. No caso de **EDP's** não lineares, a não linearidade é carregada para o problema transformado. Também está diretamente associado à relação entre o número de dimensões das **EDP's** e de transformações integrais sobre elas aplicadas. Como resultado disto, o problema transformado pode ser tanto um sistema algébrico, como um sistema **EDO** ou até mesmo um sistema **EDP**.

Se o problema transformado, após a aplicação da **GITT**, resultar num sistema algébrico, este pode ser resolvido por métodos numéricos tais como, **Eliminação Gaussiana**, Decomposição **LU**, **QR**, etc. Se resultar num sistema **EDP**, pode-se aplicar novamente a **GITT**, desde que sejam satisfeitas as condições de sua aplicabilidade. Se o problema transformado for um sistema de **EDO's**, a sua variável independente é aquela que não pôde ser ou ainda não foi transformada. Conforme pode ser visto nos trabalhos citados acima, na **GITT** os problemas transformados lineares e não-lineares são resolvidos numericamente com o auxílio de pacotes de subrotinas numéricas comerciais ou livres, sendo por isso caracterizada como analítico-numérica.

De modo a entender mais facilmente a aplicação da **GITT**, são apresentados, resumidamente, os passos básicos da **GITT**:

- escolher um problema auxiliar relacionado à **EDP**;
- expandir o potencial original com o uso da fórmula da inversa;
- integrar a equação expandida em relação à variável independente da base usada na expansão;
- resolver numericamente o sistema de equações resultante;
- usar a fórmula da inversa para restituir o potencial original.

A única aproximação na aplicação da **GITT** em problemas lineares, além da solução

numérica do problema transformado, é o truncamento do somatório infinito da fórmula da inversa o que torna possível estimar e controlar o erro da solução. De acordo com a literatura, a **GITT**, quando comparada aos métodos puramente numéricos, apresenta baixo custo computacional e excelente acuidade nos resultados. Conforme [Cotta, 1993], isso se deve, principalmente, à maior manipulação analítica do problema e à não necessidade de discretização do domínio.

Por outro lado, a transformada de Laplace tem sido empregada com sucesso na solução analítica de sistemas de **EDO's**, principalmente na área da Teoria dos Transportes, que tratam das aproximações  $S_N$  da Equação do Transporte ( $\mathcal{LTS}_N$ ), bem como de suas variações  $\mathcal{LTP}_N$ ,  $\mathcal{LTA}_N$ . Para maiores detalhes pode-se consultar [Segatto et al., 1999a], [Gonçalves, 1999], [Brancher et al., 1998], [Cardona e Vilhena, 1994], [Cardona e Vilhena, 1997], [Gonçalves et al., 2000], [Segatto et al., 1999b], [Segatto e Vilhena, 1999], [Zabadal et al., 1995], [Brancher et al., 1999], [Barichello, 1992], [Oliveira, 1993]. Em vista disso, recentemente, Wortmann [Wortmann et al., 2000], [Wortmann, 2003] propôs o uso da transformada de Laplace e diagonalização na solução dos problemas transformados pela **GITT**. Este procedimento ficou conhecido como **GILTT** (Generalized Integral Laplace Transform Technique). A **GILTT** é uma ferramenta matemática muito poderosa na solução dos mais diversos problemas físicos difusivo-advectivos. Segundo a literatura, a **GILTT** apresenta um custo computacional baixo e uma boa precisão dos resultados se comparada aos métodos híbridos ou puramente numéricos. Isto se deve ao avanço analítico na solução do problema. A partir daí outros trabalhos têm empregado a **GILTT** na solução de seus problemas físicos, dos quais podem ser citados [Thum, 2001], [Buske et al., 2003], [Buske, 2004].

Tudo o que já foi comentado a respeito da **GITT** nesta introdução, a menos da solução do problema transformado, é válido para a **GILTT**. O procedimento adotado pela **GILTT** segue os seguintes passos: 1) Efetua-se a transformação integral da **GITT** normalmente até a obtenção do problema transformado, constituído pelo sistema de **EDO's**. 2) A transformação de Laplace é aplicada no sistema resultando em um sistema algébrico. 3) A matriz de coeficientes do sistema transformado é decomposta nos seus autovalores e autovetores. 4) Esta matriz, uma vez fatorada, é invertida para se obter a solução do sistema algébrico. A inversão é encontrada analiticamente e sem custo computacional por se tratar de matriz diagonalizada. 5) A transformada de Laplace é também invertida analiticamente

e a solução analítica do sistema de **EDO's** é finalmente encontrada.

O uso da **GILTT**, remete a soluções de problemas difusivo-advectivos governados por **EDP's** lineares de uma forma totalmente analítica ou semi-analítica, no caso de não-lineares. A Equação da Energia, a Equação da Conservação das Espécies Químicas, etc, são exemplos em que a aplicação da **GILTT** resulta em soluções analíticas. Já no caso de **EDP's** não lineares, como as Equações de Navier-Stokes, a solução é obtida iterativamente, visto que a não linearidade é carregada para o problema transformado. Conforme Wortmann [Wortmann, 2003], a solução do problema transformado, constituído de um sistema de **EDO's** não lineares segue os seguintes passos: 1) Lineariza-se o sistema de **EDO's** admitindo-se valores para os coeficientes não-lineares; 2) Resolve-se o sistema de **EDO's** linearizado utilizando a transformada de Laplace e Diagonalização conforme descrito acima; 3) Com a solução obtida no passo dois recalculam-se os coeficientes não lineares para uma nova linearização; 4) Repetem-se os passos dois e três até que a solução encontrada seja igual ao valor admitido no cálculo dos coeficientes; 5) Uma vez solucionado o sistema de **EDO's** não-linear, a fórmula da inversa pode ser usada para obter o potencial original. É importante observar que cada iteração é resolvida analiticamente.

Em todos os trabalhos que utilizam a **GILTT** na solução de suas **EDP's**, tais como [Wortmann et al., 2000], [Wortmann, 2003], [Thum, 2001], [Buske et al., 2003], [Buske, 2004], os problemas transformados são constituídos de sistemas de **EDO's** de primeira ordem. Neste trabalho, pretende-se resolver um problema através da **GILTT**, cujo problema transformado é constituído de um sistema de **EDO's** lineares de segunda ordem. Para tanto é utilizado um método de redução que permite a obtenção de outro sistema de **EDO's** que apresenta como principais características ser de primeira ordem e ter o dobro do número de equações.

Para exemplificar o exposto, é resolvido um problema de convecção forçada entre placas planas paralelas com perfil hidrodinâmico desenvolvido e perfil térmico em desenvolvimento. A solução deste problema é obtida a partir de dois equacionamentos diferentes detalhados a seguir.

No primeiro, o termo difusivo na direção axial ao escoamento é desprezado. Este procedimento é clássico em problemas de convecção forçada para números de Péclet elevados ( $Pe \gg 0$ ) porque a contribuição da difusão axial é várias ordens de grandeza menor que

aquele do termo difusivo na direção transversal ao escoamento. Sabidamente, os resultados obtidos a partir da solução da equação simplificada não diferem significativamente daqueles obtidos pela equação que contempla a condução axial. No outro equacionamento, nenhum termo é desprezado.

Do ponto de vista físico, estas duas abordagens são redundantes. Porém, a técnica da **GITT** aplicada à primeira apresenta como problema transformado um sistema de **EDO's** de primeira ordem. Já na outra, a transformação resulta num sistema de **EDO's** de segunda ordem, cuja solução analítica é a principal novidade deste trabalho.

O objetivo da inclusão destes dois equacionamentos é didático. No primeiro o leitor pode familiarizar-se com o uso da **GILTT**. Comparando o primeiro com o segundo, pode-se perceber claramente a contribuição que se pretende dar neste trabalho. Além do mais, como os problemas são fisicamente equivalentes os resultados do primeiro servem de comparação passo a passo para o segundo facilitando a construção do código computacional.

No capítulo 2 é descrita a teoria da **GILTT**. São apresentados detalhadamente os passos da aplicação da **GITT** e da transformada de Laplace associada à diagonalização na solução do sistema de **EDO's** genéricas com coeficientes constantes, variáveis e não-lineares. Também descrevem-se os passos do método de redução de ordem a partir de um sistema de **EDO's** genéricas de segunda ordem. O capítulo termina com uma modificação para a fórmula da inversa da **GITT** que permite uma melhora considerável na precisão dos resultados.

O capítulo 3 apresenta o problema a ser resolvido pelo uso da **GILTT**. Pretende-se obter a temperatura média de mistura de um problema difusivo-advectivo bidimensional e estacionário entre placas planas paralelas, na região de escoamento plenamente desenvolvido. De modo a obter a solução de uma maneira mais direta, detalhes dos procedimentos são apresentados nos apêndices I e II. A **EDP** utilizada para a solução deste problema é a da energia bidimensional e estacionária com termo difusivo somente na direção transversal. A **GITT** é aplicada sobre a **EDP** e a condição inicial removendo a variável espacial  $y$ . O resultado é um sistema de **EDO's** de primeira ordem para a variável  $x$ . Este é resolvido pela técnica da transformada de Laplace associada à diagonalização de matrizes. Uma vez obtido o potencial transformado, o potencial original é calculado pela fórmula da inversa.

O capítulo 4 apresenta o problema a ser resolvido pelo uso da **GILTT** associado à



redução de ordem de **EDO's** de segunda ordem. Novamente, obtém-se a temperatura média de mistura de um problema difusivo-advectivo bidimensional entre placas planas paralelas, na região de escoamento plenamente desenvolvido. A **EDP** utilizada para a solução deste problema é a da energia bidimensional e estacionária com termos difusivos nas direções axial e transversal.

Os resultados são comparados com a referência [Shah e London, 1978] para validação dos métodos e do código computacional. Além do mais, simulações são realizadas para outros números de Péclet. Por fim, observações são feitas para futuros trabalhos.

## CAPÍTULO 2

### OS MÉTODOS UTILIZADOS

Neste capítulo são mostrados os métodos utilizados neste trabalho. Primeiramente é apresentado o método da **GILTT** que se caracteriza pela combinação de **GITT** e transformada de Laplace aplicada ao seu problema transformado. São apresentadas soluções para problemas transformados a coeficientes constantes, variáveis e não-lineares. Segue com o método de redução de ordem de **EDO's**. Por fim, é apresentada a fórmula da inversa modificada.

#### 2.1 A GILTT

##### 2.1.1 A GITT

Nesta seção serão mostrados, resumidamente, os passos básicos para obtenção da solução de um problema unidimensional transiente pela técnica da **GITT**, a menos da solução do problema transformado. Para problemas multidimensionais, o procedimento é análogo. A análise será em geometria cartesiana.

Seja a equação

$$Au(x, t) = S, \quad \text{em} \quad a < x < b \quad \text{e} \quad t > 0, \quad (2.1)$$

sujeita às condições de contorno homogêneas,

$$a_1 \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} + a_2 u(a, t) = 0 \quad \text{e} \quad (2.1a)$$

$$b_1 \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} + b_2 u(b, t) = 0. \quad (2.1b)$$

onde  $A$  é o operador diferencial parcial associado ao problema unidimensional transiente,  $S$  é o termo fonte e  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são constantes dependentes das propriedades físicas.

Por apresentar caráter espectral, este método, tem como princípio expandir a variável  $u(x, t)$  em uma base apropriada. Com o objetivo de determiná-la, faz-se uso de um problema auxiliar, conhecido como problema de Sturm-Liouville. Para obtê-lo, decompõe-se o operador  $A$  na seguinte forma

$$Au(x, t) = Bu(x, t) + Lu(x, t), \quad (2.2)$$

onde  $L$  é um operador associado ao problema de Sturm-Liouville e  $B$  é o operador associado aos termos restantes. Assim,  $L$  apresenta a seguinte forma

$$L\psi(\lambda, x) \equiv \nabla \cdot [k(x)\nabla \psi(\lambda, x)] + q(x)\psi(\lambda, x). \quad (2.3)$$

As funções  $k(x)$ ,  $q(x)$ , e  $\psi(x)$  devem ser reais e contínuas, e ainda  $k(x) > 0$  em todo o intervalo  $(a, b)$ , definido nos problemas representados pelas equações 2.1 e 2.4

$$L\psi(\lambda, x) + \lambda^2 \psi(\lambda, x) = 0 \quad em \ a < x < b, \quad (2.4)$$

$$a_1 \frac{d\psi(\lambda, a)}{dx} + a_2 \psi(\lambda, a) = 0 \quad e \quad (2.4a)$$

$$b_1 \frac{d\psi(\lambda, b)}{dx} + b_2 \psi(\lambda, b) = 0. \quad (2.4b)$$

O problema 2.4 é chamado de problema de Sturm-Liouville e é a forma geral dos chamados problemas auxiliares, na teoria da **GITT**. As constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  devem ser as mesmas do problema original 2.1. A equação 2.4 pode ser escrita para um  $\lambda_i$  qualquer, uma vez que parâmetro  $\lambda$  é independente das constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$ .

$$L\psi_i(x) + \lambda_i^2 \psi_i(x) = 0 \quad (2.5)$$

onde:  $\psi_i(x) \equiv \psi(\lambda_i, x)$ . As funções  $\psi_i(x)$  e os valores  $\lambda_i$  são conhecidos, respectivamente, como as autofunções e autovalores do operador  $L$ . Sendo assim, elas formam uma base para o operador  $L$ . Como os operadores  $L$  e  $B$  constituem o operador  $A$ , os operadores  $A$ ,  $L$  e  $B$  pertencem ao mesmo espaço operacional. Conseqüentemente, toda base de  $L$  também o é para os operadores  $A$  e  $B$ .

As autofunções gozam da seguinte propriedade da ortogonalidade [Özisik, 1980],

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_u \psi_i(x) \psi_j(x) du = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (2.6)$$

Onde  $N_i$  é o quadrado da norma  $L^2(a, b)$  expressa por

$$N_i = \int_u \psi_i^2(x) du. \quad (2.7)$$

Esta base é utilizada na expansão da variável  $u(x, t)$ . Sendo assim, a solução da equação 2.1 apresenta a seguinte forma

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{u_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \quad (2.8)$$

a qual é conhecida como fórmula da inversa, onde  $\overline{u_i(t)}$  é a variável transformada.

A variável transformada é obtida da fórmula da inversa 2.8, aplicando o seguinte operador

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_u \psi_i(x) du, \quad (2.9)$$

e fazendo uso da propriedade da ortogonalidade.

Após efetuar todas as integrais, o resultado é um problema transformado que para este exemplo é um sistema de **EDO's**, cuja variável dependente é o potencial transformado  $\overline{u_i(t)}$ . Solucionando o sistema de equações, a variável  $\overline{u_i(t)}$  fica determinada. Esta, juntamente com as autofunções  $\psi_i(x)$ , obtidas no problema de Sturm-Liouville, são substituídas na fórmula da inversa 2.8 para se obter o potencial original  $u(x, t)$ .

É possível perceber que a ordem de truncamento do somatório da fórmula da inversa 2.8 é muito importante para a determinação do potencial original  $u(x, t)$ . Cada termo do somatório corresponde a uma equação no problema transformado. Se ela for muito alta,

o custo computacional da solução do problema é sensivelmente comprometido. Uma maior quantidade de autovalores também dificulta a convergência do algoritmo iterativo. Por outro lado, se esta ordem for muito baixa, a precisão dos resultados ficará prejudicada.

Por uma questão didática, a seguir serão resumidos os principais passos para se obter a solução de uma equação pela **GITT**:

- a) Determina-se o problema auxiliar identificando-se o operador  $L$  na equação que se quer resolver. Na equação 2.3 este operador está representado na sua forma mais completa. Entretanto, algumas de suas parcelas podem ser nulas dependendo do problema a ser resolvido. Porém, deve-se ter em mente que:
  - a.1) A função  $k(x)$  não pode ser nula, ainda que seja uma função identidade.
  - a.2) Deve-se procurar levar para o problema auxiliar o máximo de informações do problema original. Em última análise, quanto mais informação se consegue carregar para a base de autovalores, menor será o número de termos necessários para o truncamento da equação 2.8. A base carregará mais informação na medida em que menos termos do operador  $L$  forem nulos.

As condições de contorno aplicadas às variáveis dependentes do problema auxiliar devem ser as mesmas que aquelas aplicadas às variáveis dependentes do problema principal. Obs: caso o problema principal não tenha condições de contorno homogêneas deve-se fazer o uso de filtros.

- b) Resolve-se o problema auxiliar.
- c) Usa-se o operador definido na equação 2.9 para transformar a equação original resultando em um sistema de equações transformado.
- d) Resolve-se o sistema de equações transformado.
- e) Trunca-se a equação 2.8, também conhecida na literatura como Fórmula da Inversa da **GITT**, em um valor suficientemente grande de termos para a obtenção da solução final do problema.

Para finalizar esta seção, serão feitas algumas observações sobre quais os problemas que podem ser solucionados pela **GITT**. Existem duas condições básicas:

- a) O operador diferencial da equação que se quer resolver tem que ter um termo laplaciano. Isto equivale a dizer que a função  $k(x)$  da equação 2.3 é não nula.
- b) As variáveis que se quer transformar têm que ter dimensão finita, ou seja, têm que estar contidas dentro do intervalo  $a < x < b$  citado na equação 2.4. Esta limitação pode ser contornada em, alguns casos, com a utilização de uma formulação parabólica. Este artifício é usado em escoamentos viscosos, cuja coordenada axial tem dimensão semi-finita. Para isso, estima-se um valor de  $b$  grande o suficiente para se admitir que o comportamento da solução seja aproximadamente o mesmo que para  $x$  no infinito.

### 2.1.2 A TRANSFORMADA DE LAPLACE NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS TRANSFORMADOS

Nos mais diversos problemas resolvidos pela **GITT**, a solução do problema transformado é obtida numericamente. Na **GILTT**, que tem como principal característica o avanço analítico na solução do problema transformado, pode-se obter tanto soluções analíticas como soluções semi-analíticas. Para obtê-las, faz-se uso da Transformada de Laplace associada à diagonalização de matrizes.

O problema transformado de primeira ordem, na sua forma mais geral, é constituído de equações do tipo

$$A(y(t)).y'(t) + B(y(t)).y(t) = f(t) \quad 0 < t < \infty, \quad (2.10)$$

sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0. \quad (2.10a)$$

Onde  $A(y(t))$  e  $B(y(t))$  são matrizes de ordem  $(N \times N)$ ,  $y(t)$  é um vetor de incógnitas com  $N$  componentes,  $y_0$  é um vetor condição inicial com  $N$  componentes para  $t = 0$  e  $f(t)$  é um vetor fonte qualquer com  $N$  componentes.

O sistema transformado, homogêneo ou não, pode ser separado nos três seguintes grupos:

- a) não-lineares, como o mostrado na equação 2.10;

b) lineares de coeficientes variáveis, ou seja, quando

$$A(y(t)) \equiv E(t) \quad e \quad B(y(t)) \equiv F(t), \quad (2.11)$$

onde  $E(t)$  e  $F(t)$  são matrizes de ordem  $(N \times N)$ , cujos elementos são funções conhecidas;

c) e, por último, ainda podem ser lineares com coeficientes constantes em que

$$A(y(t)) \equiv E \quad e \quad B(y(t)) \equiv F, \quad (2.12)$$

onde  $E$  e  $F$  são matrizes de ordem  $(N \times N)$ , cujos elementos são constantes.

O tipo de problema transformado está diretamente relacionado às equações que regem o problema original, bem como sobre quais variáveis a transformação integral foi aplicada. Conforme Wortmann [Wortmann, 2003], a relação entre **EDP's** e problemas transformados é dada como segue: **a)** problemas originais não-lineares carregam suas não linearidades para os seus respectivos problemas transformados; **b)** a transformação de equações com coeficientes variáveis pode gerar sistemas transformados também com coeficientes variáveis; **c)** se a(s) variável(eis) independente(s) dos coeficientes variáveis for(em) aquela(s) em que a transformação integral foi aplicada, o problema transformado terá coeficientes constantes. **d)** se não for(em) transformada(s) pela transformada integral ( a variável  $t$  na equação 2.1, por exemplo ), o sistema de **EDO's** resultante é de coeficientes variáveis.

### Solução Analítica do Sistema de EDO's Lineares - Coeficientes Constantes

O objetivo deste tópico é apresentar um procedimento analítico, desenvolvido por Wortmann [Wortmann, 2003], com intuito de resolver um sistema de **EDO's** lineares homogêneo com coeficientes constantes. Para isso, faz-se uso da Transformada de Laplace associada à diagonalização. Esta ferramenta matemática, corresponde ao avanço analítico na **GILTT**, o que a diferencia da **GITT**.

Para melhor entender o procedimento de solução do problema transformado, o exemplo a seguir é análogo ao problema transformado do capítulo 3. O referido sistema de **EDO's**

escrito em notação matricial é

$$E.y'(t) + F.y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.13)$$

sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0. \quad (2.13a)$$

Onde  $E$ ,  $F$  são matrizes de ordem  $(N \times N)$ , cujos elementos são constantes,  $y'(t)$  é um vetor diferencial de incógnitas com  $N$  componentes,  $y(t)$  é um vetor de incógnitas com  $N$  componentes e  $y_0$  é um vetor condição inicial para  $t = 0$  com  $N$  componentes.

Fazendo  $G \equiv E^{-1}.F$ , obtém-se

$$y'(t) + G.y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.14)$$

$$y(0) = y_0. \quad (2.37a)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace, resulta em

$$s \overline{y(s)} - y_0 + G.\overline{y(s)} = 0 \quad (2.15)$$

ou

$$(s I + G).\overline{y(s)} = y_0. \quad (2.16)$$

A barra superior indica o potencial transformado,  $s$ , a variável independente transformada e  $I$ , a matriz Identidade  $(N \times N)$ . O passo seguinte é decompor a matriz  $G$  em seus autovetores e autovalores da seguinte forma

$$G = X_{av}.D_{av}.X_{av}^{-1}, \quad (2.17)$$

onde  $X_{av}$  é a matriz de autovetores e  $D_{av}$ , a matriz diagonal de autovalores de  $G$ . Este fatoramento só é possível uma vez que todos os autovalores da matriz  $G$  são distintos. Isto pode ser verificado no código numérico.



Substituindo a equação 2.17 em 2.16 tem-se

$$(s I + X_{av} \cdot D_{av} \cdot X_{av}^{-1}) \cdot \overline{y(s)} = y_0, \quad (2.18)$$

Fazendo  $I = X_{av} \cdot X_{av}^{-1}$ , pode-se colocar a matriz dos autovetores e sua inversa em evidência

$$(s X_{av} \cdot X_{av}^{-1} + X_{av} \cdot D_{av} \cdot X_{av}^{-1}) \cdot \overline{y(s)} = y_0 \quad (2.19)$$

e então

$$X_{av} \cdot (s I + D_{av}) \cdot X_{av}^{-1} \cdot \overline{y(s)} = y_0. \quad (2.20)$$

Multiplicando-se os dois lados da equação 2.20 por  $X_{av}^{-1}$ , em seguida por  $(s I + D_{av})^{-1}$  e finalmente por  $X_{av}$ , pode se isolar a variável  $\overline{y(s)}$  e a equação passa a ser

$$\overline{y(s)} = X_{av} \cdot (s I + D_{av})^{-1} \cdot X_{av}^{-1} \cdot y_0. \quad (2.21)$$

Aplicando-se a Transformada Inversa de Laplace, obtém-se

$$L^{-1}y(s) = L^{-1}\{X_{av} \cdot (s I + D_{av})^{-1} \cdot X_{av}^{-1} \cdot y_0\}. \quad (2.22)$$

Sendo a matriz  $X_{av}$  e os vetores  $y_0$  constantes, pode-se escrever

$$y(t) = X_{av} \cdot L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\} \cdot X_{av}^{-1} \cdot y_0. \quad (2.23)$$

Finalmente faz-se

$$y(t) = X_{av} \cdot E_{av}(t) \cdot X_{av}^{-1} \cdot y_0, \quad (2.24)$$

onde

$$E_{av}(t) = L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\}. \quad (2.25)$$

Mantendo o procedimento adotado por Wortmann [Wortmann, 2003], a matriz  $E_{av}(t)$  pode ser melhor avaliada. Primeiramente a matriz  $(s I + D_{av})$  será escrita em notação explícita. Em seguida, proceder-se-á sua inversão e a obtenção da Transformada Inversa de

Laplace. Portanto

$$(s I + D_{av}) = \begin{bmatrix} s + d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s + d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s + d_N \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

em que  $d_i$  são os autovalores da matriz  $G$  (eq 2.37) ou ainda os elementos da matriz diagonal  $D_{av}$ . Da álgebra matricial, a inversa de uma matriz diagonal é a inversa dos seus elementos, então

$$(s I + D_{av})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s+d_N} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Falta apenas a Transformada Inversa de Laplace

$$E_{av}(t) = L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s+d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s+d_N} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.28)$$

ou

$$E_{av}(t) = L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\} = \begin{bmatrix} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+d_1} \right\} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+d_2} \right\} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+d_N} \right\} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

A transformada inversa dos elementos da matriz acima é

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + d_i} \right\} = e^{-t d_i}. \quad (2.30)$$

Finalmente, a matriz  $E_{av}(t)$  é escrita como

$$E_{av}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-t d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-t d_N} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Finalmente, substituindo a matriz 2.31 na equação 2.24, obtém-se a seguir a solução do problema 2.13

$$y(t) = X_{av} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-t d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-t d_N} \end{bmatrix} \cdot X_{av}^{-1} \cdot y_0. \quad (2.32)$$

Geralmente o cálculo da matriz inversa dos autovetores,  $X_{av}^{-1}$ , requer um custo computacional elevado na obtenção da solução dada pela equação 2.24 ou 2.32. Para contornar este inconveniente, e diminuir o tempo computacional na determinação desta matriz, pode-se adotar o procedimento detalhado a seguir.

Usando a equação 2.24 e fazendo-se

$$\xi = X_{av}^{-1} \cdot y_0, \quad (2.33)$$

resulta

$$y(t) = X_{av} \cdot E_{av}(t) \cdot \xi. \quad (2.34)$$

A equação 2.34 pode ser avaliada para um  $t$  qualquer. Esta pode ser avaliada em  $t = 0$ , uma vez que é conhecida a condição inicial do problema, a saber  $y_0$ . Assim, resulta

$$y_0 = X_{av} \cdot E_{av}(0) \cdot \xi. \quad (2.35)$$

Da matriz 2.31, tem-se que  $E_{av}(0) = I$ , assim a equação 2.35 fica

$$y_0 = X_{av} \cdot \xi. \quad (2.36)$$

Logo, as equações 2.33 e 2.36 são equivalentes. Portanto, é vantajoso resolver o sistema de equações lineares (eq. 2.36), uma vez que o custo computacional é inferior, ao invés de se calcular a matriz inversa dos autovalores  $X_{av}^{-1}$ .

### Solução Analítica do Sistema de EDO's Lineares - Coeficientes Variáveis

Agora, estende-se esta metodologia na solução de um sistema de **EDO's** lineares mais geral, sendo que os valores de entrada das matrizes  $E$  e  $F$  variam com o tempo. Para alcançar este objetivo, consideremos

$$E(t).y'(t) + F(t).y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.37)$$

sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0. \quad (2.37a)$$

Para resolver este problema pela transformada de Laplace, é apresentada uma aproximação gradual das matrizes  $E(t)$  e  $F(t)$ . Até agora, levando em consideração o interesse de encontrar uma solução para o tempo variando de zero até um tempo prescrito  $T$ , divide-se o intervalo  $(0, T)$  em subintervalos  $(t_{n-1}, t_n)$  para  $n = 1 : J$ , onde  $J$  denota o número de subintervalos. Para cada subintervalo, toma-se valores médios para os valores de entrada das matrizes  $E(t)$  e  $F(t)$ . Assim, a equação 2.37 fica simplificada para um conjunto recursivo de problemas

$$E_n.y_n'(t) + F_n.y_n(t) = 0, \quad (2.38)$$

para  $t$  no subintervalo  $(t_{n-1}, t_n)$ ,  $n$  variando de 1 até  $J$  e as matrizes  $E_n$  e  $F_n$  possuem elementos constantes. Fazendo uso da solução do problema anterior, equação 2.24, a solução do problema 2.38 é

$$y_{(n)} = X_{av(n)} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t d_{1(n)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-t d_{2(n)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-t d_{N(n)}} \end{bmatrix} \cdot X_{av(n)}^{-1} \cdot y_{(n-1)}, \quad (2.39)$$

para  $t$  no intervalo  $(t_{n-1}, t_n)$  e a condição inicial  $y_{(n-1)}$  dada pela solução calculada anteriormente em  $t_{n-1}$  para  $t$  no intervalo  $(t_{n-2}, t_{n-1})$ .

A solução desta mesma equação também pode ser obtida da forma detalhada a seguir. Na tentativa de encontrar soluções analíticas para o sistema de **EDO's** lineares, resultante da aplicação da **GITT**, a seguir é apresentada uma aproximação analítica alternativa para resolver o problema 2.37. É o método da decomposição proposto por Adomian [Adomian, 1988]. Para aplicar o método da decomposição, deve-se reescrever a equação 2.38 como

$$\bar{E}.y'(t) + \bar{F}.y(t) = A(t).y'(t) + B(t).y(t) \quad (2.40)$$

onde as matrizes  $A(t)$  e  $B(t)$  são respectivamente expressas como

$$A(t) = E(t) + \bar{E} \quad (2.41)$$

e

$$B(t) = F(t) + \bar{F} \quad (2.42)$$

Aqui  $\bar{E}$  e  $\bar{F}$  são matrizes constantes apropriadamente escolhidas. Agora expandindo a solução da equação 2.40 na série truncada

$$y(t) = \sum_{k=0}^P u_k(t) \quad (2.43)$$

e substituindo a expansão 2.43 na equação 2.40 resulta

$$\bar{E}. \sum_{k=0}^P u'_k(t) + \bar{F}. \sum_{k=0}^P u_k(t) = A(t). \sum_{k=0}^P u'_k(t) + B(t). \sum_{k=0}^P u_k(t) \quad (2.44)$$

Da equação 2.44, pode-se construir o seguinte conjunto recursivo de **EDO's** lineares matriciais com matrizes constantes

$$\bar{E}.u_0'(t) + \bar{F}.u_0(t) = 0, \quad (2.45)$$

$$\bar{E}.u_1'(t) + \bar{F}.u_1(t) = A(t).u_0'(t) + B(t).u_0(t), \quad (2.46)$$

$$\bar{E}.u_2'(t) + \bar{F}.u_2(t) = A(t).u_1'(t) + B(t).u_1(t) \quad (2.47)$$

e assim por diante. Genericamente, pode-se escrever

$$\bar{E}.u_n'(t) + \bar{F}.u_n(t) = A(t).u_{n-1}'(t) + B(t).u_{n-1}(t), \quad (2.48)$$

para  $n = 1 : P$ . Pode-se verificar nas equações acima que os termos do lado direito do conjunto recursivo de equações, 2.45 a 2.48 são conhecidos. Portanto, para obter a solução destas equações, resolve-se o seguinte problema com matrizes constantes e fonte, a saber

$$\bar{E}.y_n'(t) + \bar{F}.y_n(t) = S(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (2.49)$$

o qual tem uma solução bem conhecida,

$$y(t) = y_h(t) y_0 + y_h(t) * S(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (2.50)$$

enquanto que a solução homogênea  $y_h(t)$  é dada pela equação 2.32. Aqui a (\*) significa convolução. Portanto, a solução da equação genérica 2.48 tem a forma

$$y(t) = X_{av} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-t d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-t d_N} \end{bmatrix} \cdot X_{av}^{-1} \cdot y_0 + \int_0^t \left\{ X_{av}(t') \begin{bmatrix} e^{-t' d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-t' d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-t' d_N} \end{bmatrix} X_{av}(t')^{-1} S(t-t') \right\} dt' \quad (2.51)$$

e, conseqüentemente, a solução da equação 2.37 é bem determinada pelas equações 2.43 e

2.51.

### Solução Analítica do Sistema de EDO's Não-Lineares de Primeira Ordem

Neste tópico pretende-se mostrar, resumidamente, os passos para resolver um sistema de **EDO's** não lineares. Para isso, considera-se

$$A(y(t)).y'(t) + B(y(t)).y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.52)$$

sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0. \quad (2.52a)$$

Conforme a literatura [Wortmann, 2003], primeiramente, escreve-se os coeficientes  $A$  e  $B$  em função de  $y_i^{ap}$  que é uma aproximação de  $y$  para um valor  $t_i$  de  $t$ . Assim, tem-se

$$y(t_i) \approx y_i^{ap}, \quad (2.53)$$

$$A(y(t_i)) \approx A(y_i^{ap}) \quad e \quad B(y(t_i)) \approx B(y_i^{ap}) \quad (2.54)$$

onde  $i = 0, 1, 2, \dots$  e  $t_0 = 0$ . Em seguida, resolve-se analiticamente, como já visto nesta seção, o seguinte sistema de **EDO's** lineares com coeficientes constantes

$$A(y_1^{ap}).y'(t) + B(y_1^{ap}).y(t) = 0 \quad 0 < t < t_1 \quad (2.55)$$

sujeito à condição inicial

$$y(0) = y(t_0) \quad (2.55a)$$

para  $t = t_1$ . A solução  $y(t_1)$  obtida é usada para corrigir o valor de  $y_1^{ap}$ . Novos coeficientes  $A(y_1^{ap})$  e  $B(y_1^{ap})$  são calculados e o sistema de equações 2.55 é resolvido outra vez. Este

procedimento é repetido tantas vezes quantas forem necessárias até que

$$y(t_1) - (y_1^{ap}) \leq \epsilon_{cv}, \quad (2.56)$$

onde  $\epsilon_{cv}$  é a tolerância de convergência admitida. Com a solução convergida para  $t_1$ , repete-se o mesmo processo para outros valores de  $t$ . A expressão geral para o  $i$ -ésimo valor de  $t$ , é

$$A(y_i^{ap}).y'(t) + B(y_i^{ap}).y(t) = 0 \quad 0 < t < (t_i - t_{i-1}) \quad (2.57)$$

sujeita à condição inicial

$$y(0) = y(t_{i-1}) \quad (2.57a)$$

Para obter a convergência de um algoritmo iterativo como descrito acima, Wortmann [Wortmann, 2003] utiliza um procedimento adaptativo para os autovalores e outro para o tamanho do incremento na variável não transformada.

Na seção 2.1.2 a análise se limitou a problemas homogêneos. Para problemas com fonte, o procedimento é análogo àquele apresentado na solução da equação 2.40, ou seja, problemas não-homogêneos têm como solução a solução do problema homogêneo mais uma integral de convolução.

## 2.2 Solução Analítica do Sistema de EDO's Lineares de Segunda Ordem - Redução de Ordem de EDO's

Neste tópico é que reside a principal novidade deste trabalho. Aqui será mostrado o método de redução de ordem de **EDO's** de segunda ordem. Através deste método, o problema transformado constituído de um sistema de **EDO's** lineares de segunda ordem fica reduzido a um sistema de **EDO's** lineares de primeira ordem. Este é resolvido aplicando a transformada de Laplace conforme já mostrado na seção 2.1.2.

A seguir é detalhado o procedimento adotado para este método. Para que se possa fazer uso dele na solução do problema transformado, mais adiante no capítulo 4, considera-se o seguinte sistema de **EDO's** de segunda ordem:

$$C.y''(x) + D.y'(x) + E.y(x) = 0 \quad (2.58)$$



sujeita às seguintes condições de contorno

$$y(0) = f_1(t), \quad \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=R} = f_2(t). \quad (2.58(a, b))$$

onde  $C$ ,  $D$  e  $E$  são matrizes de ordem  $(N \times N)$  com elementos constantes,  $y(x)$  é um vetor incógnita com  $N$  componentes,  $y(0)$  é um vetor condição de contorno em  $x = 0$  com  $N$  componentes,  $y'(R)$  é um vetor condição de contorno em  $x = R$  com  $N$  componentes,  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são funções vetoriais quaisquer com  $N$  componentes.

Multiplicando a equação 2.58 pela matriz inversa  $C^{-1}$ , resulta

$$y''(x) + F.y'(x) + G.y(x) = 0. \quad (2.59)$$

onde  $F = C^{-1}.D$  e  $G = C^{-1}.E$ .

O primeiro passo, é definir novas variáveis como segue

$$Z_1(x) = y(x), \quad (2.60)$$

e

$$Z_2(x) = y'(x), \quad (2.61)$$

Assim,  $Z_1(x)$  e  $Z_2(x)$  tornam-se vetores incógnitas com  $N$  componentes.

Em seguida deriva-se as equações matriciais 2.60 e 2.61 resultando em

$$Z'_1(x) = y'(x). \quad (2.62)$$

e

$$Z'_2(x) = y''(x) \quad (2.63)$$

Das equações 2.61 e 2.62 resulta a seguinte equação matricial de ordem  $N$

$$Z'_1(x) = Z_2(x), \quad (2.64)$$

ou

$$Z_1'(x) - Z_2(x) = 0. \quad (2.65)$$

Usando as equações 2.60, 2.61 e 2.63 acima e substituindo-as na equação 2.59 resulta outra equação matricial de ordem  $N$

$$Z_2'(x) + F.Z_2(x) + G.Z_1(x) = 0. \quad (2.66)$$

As equações matriciais 2.65 e 2.66 constituem o seguinte sistema de equações matricial de primeira ordem

$$\begin{cases} Z_1'(x) + 0 Z_2'(x) + 0 Z_1(x) - Z_2(x) = 0 \\ 0 Z_1'(x) + Z_2'(x) + G.Z_1(x) + F.Z_2(x) = 0, \end{cases} \quad (2.67)$$

sujeitas às seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} Z_1(0) = f_1(t) \\ Z_2(R) = f_2(t). \end{cases} \quad (2.67a)$$

Em notação matricial, o sistema 2.67 e as condições de contorno 2.67a ficam

$$\begin{bmatrix} Z_1'(x) \\ Z_2'(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ G & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1(x) \\ Z_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} Z_1(0) \\ Z_2(R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Das definições 2.69 e 2.68, pode-se definir a seguinte **EDO** na forma matricial

$$Z'(x) + H.Z(x) = 0, \quad (2.70)$$

com condição inicial

$$Z(0^*) = f(t), \quad (2.70a)$$

onde

$$Z'(x) = \begin{bmatrix} Z'_1(x) \\ Z'_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ G & F \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

$$Z(x) = \begin{bmatrix} Z_1(x) \\ Z_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

$$Z(0^*) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

sendo  $Z(x)$  o vetor de incógnitas de  $2N$  componentes e  $H$  a matriz de ordem  $(2N \times 2N)$ . Pode-se verificar que a condição inicial, equação 2.70a, é um vetor de  $2N$  componentes constituído de  $N$  condições de contorno em  $x = 0$  e  $N$  em  $x = R$ .

Uma vez obtida a **EDO** de primeira ordem, o passo seguinte consiste em aplicar a transformada de Laplace associada à diagonalização de matrizes. Assim, segue-se os passos definidos na seção 2.1.2.

Aplicando-se a Transformada de Laplace na equação 2.70, resulta em

$$s \overline{Z(s)} - Z(0^*) + H \cdot \overline{Z(s)} = 0 \quad (2.75)$$

ou

$$(s I + H) \cdot \overline{Z(s)} = Z(0^*). \quad (2.76)$$

A barra superior indica o potencial transformado,  $s$  a variável independente transformada e  $I$  a matriz Identidade de ordem  $(2N \times 2N)$ . O passo seguinte é decompor a matriz  $H$  em

seus autovetores e autovalores da seguinte forma

$$H = X_{av} \cdot D_{av} \cdot X_{av}^{-1}, \quad (2.77)$$

onde  $X_{av}$  é a matriz de autovetores e  $D_{av}$  a matriz diagonal de autovalores de  $H$ . Substituindo a equação 2.77 em 2.76, tem-se

$$(s I + X_{av} \cdot D_{av} \cdot X_{av}^{-1}) \cdot \overline{Z(s)} = Z(0^*). \quad (2.78)$$

Fazendo  $I = X_{av} \cdot X_{av}^{-1}$ , pode-se colocar a matriz dos autovetores e sua inversa em evidência fazendo

$$(s X_{av} \cdot X_{av}^{-1} + X_{av} \cdot D_{av} \cdot X_{av}^{-1}) \cdot \overline{Z(s)} = Z(0^*), \quad (2.79)$$

e então

$$X_{av} \cdot (s I + D_{av}) \cdot X_{av}^{-1} \cdot \overline{Z(s)} = Z(0^*). \quad (2.80)$$

Multiplicando-se os dois lados da equação 2.80 por  $X_{av}^{-1}$ , em seguida por  $(s I + D_{av})^{-1}$  e finalmente por  $X_{av}$ , pode se isolar a variável  $\overline{Z(s)}$  e a equação passa a ser

$$\overline{Z(s)} = X_{av} \cdot (s I + D_{av})^{-1} \cdot X_{av}^{-1} \cdot Z(0^*). \quad (2.81)$$

Aplicando-se a Transformada Inversa de Laplace, obtém-se

$$L^{-1}\{\overline{Z(s)}\} = L^{-1}\{X_{av} \cdot (s I + D_{av})^{-1} \cdot X_{av}^{-1} \cdot Z(0^*)\}. \quad (2.82)$$

Sendo a matriz  $X_{av}$  e os vetores  $Z(0^*)$  constantes, pode-se escrever

$$Z(x) = X_{av} \cdot L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\} \cdot X_{av}^{-1} \cdot Z(0^*). \quad (2.83)$$

Finalmente faz-se

$$Z(x) = X_{av} \cdot E_{av}(x) \cdot X_{av}^{-1} \cdot Z(0^*), \quad (2.84)$$

onde

$$E_{av}(x) = L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\}, \quad (2.85)$$

sendo,  $E_{av}(x)$  é uma matriz diagonal, cujos elementos valem  $e^{-x d_i}$ .

Conforme a equação 2.84, o resultado obtido é para a variável  $Z(x)$ , com  $2N$  componentes, que é constituída pela equação 2.73. Assim, temos solução para a variável  $Z_1(x)$  e  $Z_2(x)$ , cada uma delas com  $N$  componentes. No entanto, a solução da equação 2.58, com  $N$  componentes, deve ser dada para  $y(x) = Z_1(x)$ . Portanto, das duas soluções obtidas, a única solução utilizada é  $Z_1(x)$ . Sendo assim, a solução final da equação 2.58 é  $Z_1(x)$ .

Até aqui, todos os métodos discutidos para solucionar os problemas transformados implicavam em matrizes não degeneradas, ou seja, matrizes cujos autovalores são distintos e não-nulos. No caso de se tratar de problemas transformados com matrizes degeneradas, a fatoração em autovalores e autovetores não é possível. Para contornar tal inconveniente, a inversa da matriz simbólica pode ser obtida pelo método da decomposição de Schur. Neste caso a inversa da transformada de Laplace é obtida pela expansão de Heaviside para autovalores com multiplicidade maior que 1.

### 2.3 FÓRMULA DA INVERSA MODIFICADA

Neste trabalho usou-se uma fórmula de inversão analítica diferente daquela tipicamente usada na **GITT** e descrita pela equação 2.8. Fez-se uso de uma fórmula da inversa modificada, proposta por Wortmann [Wortmann, 2003], que necessita de uma quantidade menor de autovalores para obter a precisão desejada em termos de bases senoidais e cossenoidais.

O erro na aproximação de funções por séries que utilizam tais bases é devido ao truncamento do somatório. Quanto maior o número de termos, mais precisa é a solução. No entanto, maior será o custo computacional. O erro se evidencia principalmente quando se quer aproximar funções constantes ou não suaves.

Na figura 2.1 pode ser visto o erro na aproximação de funções por séries como o da equação 2.8, que utiliza base cossenoidal e cujo somatório foi truncado. Esta mostra a condição de entrada da temperatura adimensional (eq. 3.3c) para o problema do capítulo 3, ou seja,  $\theta(0, y) = 1$ , e duas aproximações. Truncou-se o somatório da fórmula da inversa,

(eq. 2.8) em 10 termos e outra em 9 termos.

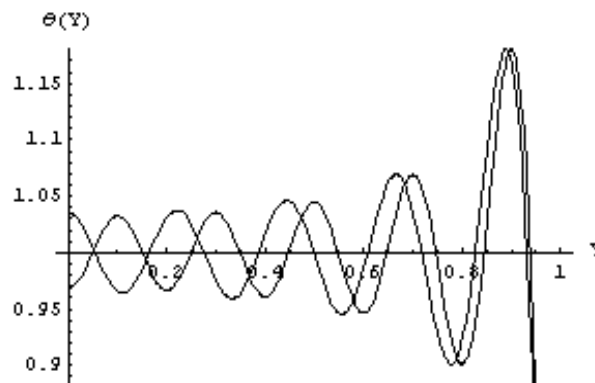


Figura 2.1 – Comparação das aproximações da equação 3.3c usando a fórmula da inversa (eq. 2.8) cujo somatório foi truncado em 10 e 9 termos.

Como pode-se verificar na figura 2.1 as curvas das aproximações oscilam de forma alternada na parte mais à esquerda do gráfico. Conforme Wortmann [Wortmann, 2003], isso sugere que a média entre as duas aproximações é muito mais próxima da curva que se quer aproximar do que cada uma delas individualmente. Sendo assim, a fórmula da inversa 2.8 com somatório truncado em  $N$  foi substituída pela seguinte fórmula da inversa modificada:

$$u(x, t) \simeq \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\overline{u_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\overline{u_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}}}{2}, \quad (2.86)$$

ou simplesmente,

$$u(x, t) \simeq \left( \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\overline{u_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\overline{u_N(t)} \psi_N(x)}{2 N_N^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.87)$$

Na figura 2.2 pode ser visto o erro na aproximação de funções por séries usando a equação 2.87, que utiliza base cossenoidal e cujo somatório foi truncado. Esta mostra a mesma condição de entrada da temperatura adimensional (eq. 3.3c) da figura 2.1 para fins de comparação, ou seja,  $\theta(0, y) = 1$ , e duas aproximações. Também truncou-se o somatório da fórmula da inversa, (eq. 2.87) em 10 termos e outra em 9 termos. Pode-se ver que na figura 2.2 o erro das duas aproximações é menor na maior parte do domínio de interesse do que na figura 2.1. Isto foi verificado para diversos números de autovalores na solução dos problemas descritos nos capítulos 3 e 4. Assim, pode-se confirmar que a fórmula da inversa

modificada (eq. 2.87) neste trabalho foi mais eficiente do que a fórmula da inversa (eq. 2.8), tipicamente usada na **GITT**.

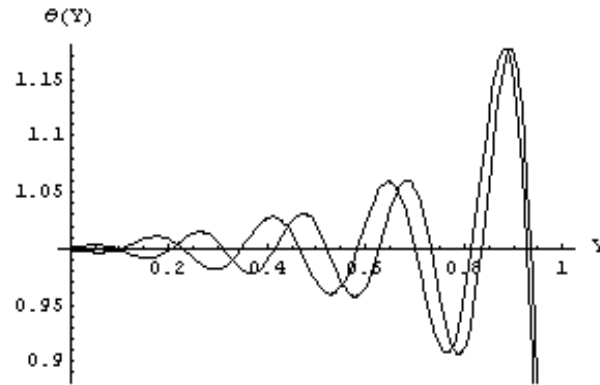


Figura 2.2 – Comparação das aproximações da equação 3.3c usando a fórmula da inversa (eq. 2.87) cujo somatório foi truncado em 10 e 9 termos.

## CAPÍTULO 3

### PROBLEMA DIFUSIVO-ADVECTIVO COM TERMO DIFUSIVO TRANSVERSAL

Neste capítulo pretende-se mostrar o uso da **GILTT** na solução da equação da Energia bidimensional. Assim, faz-se uso da transformada de Laplace associada à diagonalização de matrizes na solução de um sistema de **EDO's** de primeira ordem, resultante da aplicação da **GITT** no domínio espacial  $y$ . Considera-se um problema de convecção forçada entre placas planas paralelas com perfil hidrodinâmico desenvolvido e perfil térmico em desenvolvimento. Impõe-se as seguintes hipóteses simplificadoras:

- a) regime estacionário,
- b) escoamento laminar e desenvolvido,
- c) fluido incompressível,
- d) propriedades físicas constantes,
- e) condução axial desprezível,
- f) dissipação viscosa desprezível,
- g) convecção livre desprezível,
- h) pressão atmosférica constante.

#### 3.1 O MODELO MATEMÁTICO

Baseado nas hipóteses acima, o problema é representado, matematicamente, pela equação da Energia bidimensional e estacionária, escrita em coordenadas cartesianas como segue:



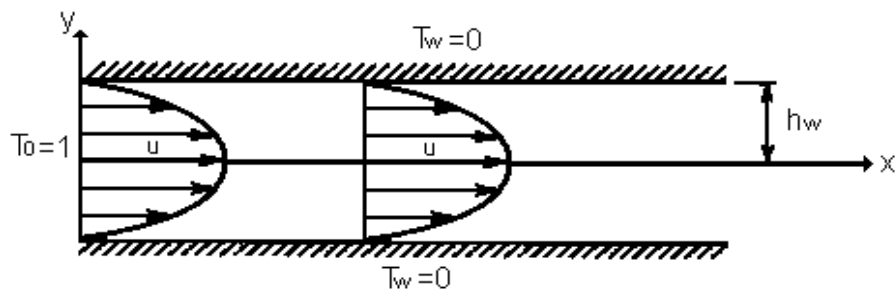


Figura 3.1 – Definição do problema - convecção forçada permanente

$$\rho C_p u(y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2}, \quad (3.1)$$

em que  $0 < x < R$  e  $0 < y < h_w$ . Onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $C_p$  o calor específico a pressão constante e  $k$  o coeficiente de condutividade térmica do fluido. As condições de contorno e inicial são dadas por

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad T(x, h_w) = T_w, \quad (3.1(a, b))$$

$$T(0, y) = T_0. \quad (3.1 c)$$

Ao introduzir as variáveis adimensionais que se seguem, as equações acima adquirem a forma adimensionalizada:

$$Y = \frac{y}{h_w}, \quad (3.2)$$

$$X = \frac{x}{h_w}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad (3.2(b, c))$$

$$Pe = RePr, \quad Re = \frac{u_0 h_w}{\nu}, \quad (3.2(d, e))$$

$$\theta_i = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (3.2(f, g))$$

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (3.2(h, i))$$

onde o índice zero refere-se a um valor e  $h_w$ , à altura da placa.

Em termos desses grupos adimensionais, a equação da Energia fica

$$U(Y) \frac{\partial \theta_1(X, Y)}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta_1(X, Y)}{\partial Y^2}, \quad (3.3)$$

e as condições de contorno adimensionalizadas, tornam-se

$$\left. \frac{\partial \theta_1(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad \theta_1(X, 1) = 0, \quad (3.3(a, b))$$

$$\theta_1(0, Y) = 1. \quad (3.3c)$$

Antes de aplicarmos o formalismo da **GILTT** nas equações 3.3, o termo velocidade da equação 3.3,  $U(Y)$  será substituído pela expressão que representa a velocidade do fluido na região do escoamento plenamente desenvolvido. Na literatura, a velocidade para o escoamento plenamente desenvolvido entre placas planas é dada por

$$U(Y) = \frac{3}{2} (1 - Y^2). \quad (3.4)$$

Assim, o problema passa a ser representado matematicamente pela seguinte equação

$$\frac{3}{2} (1 - Y^2) \frac{\partial \theta_1(X, Y)}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta_1(X, Y)}{\partial Y^2}, \quad (3.5)$$

e suas condições de contorno e inicial, tornam-se

$$\left. \frac{\partial \theta_1(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad \theta_1(X, 1) = 0, \quad (3.5(a, b))$$

$$\theta_1(0, Y) = 1. \quad (3.5 c)$$

## 3.2 MÉTODO DE SOLUÇÃO: GILTT

### 3.2.1 GITT

O problema descrito pela equação 3.5 e as suas condições de contorno e inicial estão apropriadas para a aplicação da **GITT**. A equação apresenta o termo Laplaciano e as condições de contorno em  $Y$  são homogêneas. Assim, a transformação integral é aplicada no problema, seguindo os passos descritos na seção 2.1.1. Inicialmente, deve-se identificar o operador  $L$  (eq. 2.3), na equação (3.5). A maneira mais fácil é comparar estas duas equações e fazer  $k(y) = 1$  e  $q(y) = 0$  na equação 2.3. O operador  $L$  aplicado à variável  $\psi_i(Y)$  seria então identificado da seguinte forma

$$L\{\psi_i(Y)\} = \frac{d^2\psi_i(Y)}{dY^2}. \quad (3.6)$$

Os termos restantes da equação 3.5 corresponderiam ao operador  $B$  da equação 2.2. Definido o operador  $L$  e usando a equação 2.5, determina-se o seguinte problema auxiliar

$$\frac{d^2\psi_i(Y)}{dY^2} + \lambda_i^2\psi_i(Y) = 0, \quad 0 < Y < 1, \quad (3.7)$$

com as respectivas condições de contorno

$$\left. \frac{d\psi_i(Y)}{dY} \right|_{Y=0} = 0 \quad e \quad \psi_i(1) = 0. \quad (3.7(a, b))$$

O problema 3.7 é conhecido como problema de Sturm-Liouville. Sua solução analítica é dada por [Özisik, 1980]

$$\psi_i(Y) = \cos(\lambda_i Y), \quad (3.8)$$

onde

$$\lambda_i = (2i - 1)\frac{\pi}{2} \quad e \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8 a)$$

Conforme a equação 2.8, a fórmula da inversa pode ser definida como segue

$$\theta_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y), \quad (3.9)$$

onde  $\overline{t_i(X)}$  é a temperatura transformada e  $N_i$  o quadrado da norma, definida conforme a equação 2.7 e que neste exemplo particular se torna

$$N_i = \int_0^1 \psi_i^2(Y) dY. \quad (3.10)$$

O seguinte passo consiste em expandir a variável  $\theta(X, Y)$  da equação 3.5, substituindo a equação 3.9 na mesma. Deste procedimento, resulta

$$\frac{3}{2} (1 - Y^2) \frac{\partial}{\partial X} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right] = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right]. \quad (3.11)$$

Após efetuar todas devidas operações na equação 3.11, deve-se aplicar o operador integral definido na equação 2.9, que para este exemplo se torna

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_i(Y) dY. \quad (3.12)$$

A integração, o uso da propriedade da ortogonalidade e demais detalhes podem ser observados no apêndice I.

O resultado da aplicação da Transformada Integral é a seguinte equação matricial

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{i,j} - A_{i,j}) \overline{t'_i(X)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 \delta_{i,j}}{Pe} \overline{t_i(X)} = 0 \quad (3.13)$$

onde ' representa a derivada de primeira ordem. O vetor  $\overline{t_i(X)}$  representa a temperatura transformada,  $A_{i,j}$  e o operador delta de Kronecker são definidos como

$$A_{i,j} = \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 Y^2 \psi_i(Y) \psi_j(Y) dY \quad (3.13 a)$$

$$\delta_{i,j} = \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_i(Y) \psi_j(Y) dY = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (3.13 b)$$

Como pode ser notado, a equação 3.13 corresponde a um sistema de **EDO's** lineares de primeira ordem. Para sua solução analítica será empregada a transformada de Laplace e diagonalização de matrizes. Cabe lembrar que a solução analítica do problema transformado caracteriza a **GILTT** empregada neste trabalho. É exatamente este procedimento que dife-

rencia a **GILTT** de sua antecessora, a **GITT**. Esta última resolve o problema transformado numericamente.

Para tanto, é preciso que a condição inicial (eq. 3.5 c) também deva ser transformada pela **GITT**. Assim, tomará a forma vetorial, tornando-se consistente com o sistema de **EDO's** (3.13), que é vetorial. Os detalhes podem ser vistos no apêndice II e o resultado é

$$\overline{t_j(0)} = Q_j, \quad (3.14)$$

onde

$$Q_j = \frac{1}{N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_j(Y) dY. \quad (3.14 \text{ a})$$

O procedimento de solução do sistema de **EDO's** pela transformada de Laplace associada à diagonalização de matrizes foi descrito na seção 2.1.2. Baseado nisso, o sistema de **EDO's** 3.13 é resolvido conforme pode ser visto na próxima seção.

### 3.2.2 Solução do Sistema de EDO's Transformado

O primeiro passo é truncar o sistema de **EDO's** 3.13 em uma ordem grande o suficiente para garantir a precisão dos resultados. O seguinte passo é reescrevê-lo na seguinte forma

$$C \overline{\Theta}_1'(X) + D \overline{\Theta}_1(X) = 0, \quad (3.15)$$

com condição inicial

$$\overline{\Theta}_1(0) = Q, \quad (3.15 \text{ a})$$

onde

$$\overline{\Theta}_1(X) = \{\overline{t_i(X)}\}, \quad (3.15 \text{ b})$$

$$Q = \{q_{i,j}\}, \quad (3.15 \text{ c})$$

$$q_{i,j} = \frac{1}{N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_j(Y) dY, \quad (3.15 \text{ d})$$

$$C = \{c_{i,j}\}, \quad (3.15 \text{ e})$$

$$c_{i,j} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{i,j} - A_{i,j}), \quad (3.15 \text{ f})$$

$$D = \{d_{i,j}\}, \quad (3.15 \text{ g})$$

$$d_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 \delta_{i,j}}{Pe}. \quad (3.15 \text{ h})$$

sendo  $C$  e  $D$  matrizes de ordem  $N$  e  $\bar{\Theta}_1(X)$  é o vetor incógnita com  $N$  componentes.

Seguindo o que foi apresentado na seção 2.1.2, a matriz de coeficientes  $C$  é invertida fazendo

$$\bar{\Theta}_1'(X) + E \bar{\Theta}_1(X) = 0, \quad (3.16)$$

onde  $E = C^{-1} \cdot D$ . Aplicando-se a Transformada de Laplace, resulta em

$$s \bar{\bar{\Theta}}_1(s) - \bar{\Theta}_1(0) + E \cdot \bar{\bar{\Theta}}_1(s) = 0 \quad (3.17)$$

ou

$$(s I + E) \cdot \bar{\bar{\Theta}}_1(s) = \bar{\Theta}_1(0). \quad (3.18)$$

As duas barras superiores indicam o potencial transformado por Laplace,  $s$  a variável independente transformada e  $I$  a matriz Identidade de ordem  $(N \times N)$ . O passo seguinte é decompor a matriz  $E$  em seus autovetores e autovalores da seguinte forma

$$E = X_{av} \cdot D_{av} \cdot X_{av}^{-1}, \quad (3.19)$$

onde  $X_{av}$  é a matriz de autovetores e  $D_{av}$  a matriz diagonal de autovalores de  $E$ .

Substituindo a equação 3.19 em 3.18 tem-se

$$(s I + X_{av} \cdot D_{av} \cdot X_{av}^{-1}) \cdot \overline{\overline{\Theta}}_1(s) = \overline{\Theta}_1(0). \quad (3.20)$$

Fazendo  $I = X_{av} \cdot X_{av}^{-1}$ , pode-se colocar a matriz dos autovetores e sua inversa em evidência fazendo

$$(s X_{av} \cdot X_{av}^{-1} + X_{av} \cdot D_{av} \cdot X_{av}^{-1}) \cdot \overline{\overline{\Theta}}_1(s) = \overline{\Theta}_1(0) \quad (3.21)$$

e então

$$X_{av} \cdot (s I + D_{av}) \cdot X_{av}^{-1} \cdot \overline{\overline{\Theta}}_1(s) = \overline{\Theta}_1(0). \quad (3.22)$$

Multiplicando-se os dois lados da equação 3.22 por  $X_{av}^{-1}$ , em seguida por  $(s I + D_{av})^{-1}$  e finalmente por  $X_{av}$  pode se isolar a variável  $\overline{\overline{\Theta}}_1(s)$  e a equação passa a ser

$$\overline{\overline{\Theta}}_1(s) = X_{av} \cdot (s I + D_{av})^{-1} \cdot X_{av}^{-1} \cdot \overline{\Theta}_1(0). \quad (3.23)$$

Aplicando-se a Transformada Inversa de Laplace, obtém-se

$$L^{-1}\{\overline{\overline{\Theta}}_1(s)\} = L^{-1}\{X_{av} \cdot (s I + D_{av})^{-1} \cdot X_{av}^{-1} \cdot \overline{\Theta}_1(0)\}. \quad (3.24)$$

Sendo a matriz  $X_{av}$  e os vetores  $\overline{\Theta}_1(0)$  constantes, pode-se escrever

$$\overline{\Theta}_1(X) = X_{av} \cdot L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\} \cdot X_{av}^{-1} \cdot \overline{\Theta}_1(0). \quad (3.25)$$

Finalmente faz-se

$$\overline{\Theta}(X) = X_{av} \cdot E_{av}(X) \cdot X_{av}^{-1} \cdot \overline{\Theta}(0), \quad (3.26)$$

onde

$$E_{av}(X) = L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\}, \quad (3.27)$$

ou ainda,  $E_{av}(X)$  é uma matriz diagonal, cujos elementos valem  $e^{-X d_i}$ .

Obtido o resultado na equação 3.27, a fórmula da inversa (eq. 3.9) é usada para

obter o potencial original  $\theta_1(X, Y)$ .

### 3.3 RESULTADOS

Os resultados das simulações são mostrados a seguir. São comparados com resultados encontrados na literatura [Shah e London, 1978]. Foram obtidos para  $Re = 2000$  e  $Pr = 0.72$ , ou seja,  $Pe = 1440$ .

Na tabela 3.1 é mostrado a convergência numérica dos resultados da temperatura média de mistura obtidos para diferentes distâncias no domínio em  $X$  e em função de diferentes números de autovalores. Utilizou-se  $Re = 2000$  e  $Pr = 0.72$ , ou seja,  $Pe = 1440$ . Pode-se verificar que a convergência numérica da solução para as regiões mais próximas da entrada do escoamento plenamente desenvolvido é mais lenta do que para as regiões mais afastadas. Isso se deve à forma do perfil de temperatura admitido como condição de entrada, que como pode ser visto na definição do problema, é constante. É importante lembrar que este perfil é aproximado por uma expansão em cossenos. Bases cossenoidais necessitam de mais termos ao aproximar funções constantes quando comparadas à aproximação de funções não constantes, para um mesmo erro de aproximação. Na medida que se avança no domínio, este perfil decresce suavemente, portanto não constante e torna-se mais facilmente aproximado pela base usada.

$X$	Número de Autovalores							
	5	10	20	30	40	60	80	100
0,04608	0,999574	0,999469	0,999083	0,998885	0,998842	0,998834	0,998831	0,998830
0,4608	0,997239	0,995499	0,994631	0,994600	0,994591	0,994586	0,994584	0,994584
4,608	0,978063	0,975232	0,975065	0,975046	0,975042	0,975039	0,975039	0,975039
46,08	0,886772	0,886132	0,886049	0,886040	0,886038	0,886037	0,886037	0,886037
460,8	0,498346	0,498082	0,498048	0,498045	0,498044	0,498044	0,498044	0,498044
4608	0,002185	0,002184	0,002184	0,002184	0,002184	0,002184	0,002184	0,002184

Tabela 3.1 – Temperatura média de mistura em função do número de autovalores para vários valores de  $X$ .

Na tabela 3.2 pode-se ver a comparação dos valores obtidos para a temperatura média de mistura (eq. 3.28) com referência [Shah e London, 1978]. O programa foi rodado



para 100 autovalores. A tabela apresenta as comparações para  $Pe = 1440$ .

$Pe = 1440$			
$X$	$\theta_B(X)$	ref.	desvio
0,02304	0,99926	0,99926	0,00000
0,09216	0,99814	0,99814	0,00000
0,18432	0,99705	0,99705	0,00000
0,34560	0,99552	0,99553	0,00001
1,15200	0,99004	0,99004	0,00000
1,84320	0,98640	0,98640	0,00000
3,45600	0,97936	0,97937	0,00001
11,5200	0,95424	0,95425	0,00001
18,4320	0,93761	0,93761	0,00000
23,0400	0,92773	0,92774	0,00001
46,0800	0,88603	0,88604	0,00001
92,1600	0,82065	0,82065	0,00000
138,240	0,76647	0,76648	0,00001
184,320	0,71860	0,71860	0,00000
230,400	0,67503	0,67503	0,00000
921,600	0,27241	0,27241	0,00000
1382,40	0,14901	0,14902	0,00001
1843,20	0,08151	0,08152	0,00001
2304,00	0,04459	0,04459	0,00000
4608,00	0,00218	0,00218	0,00000

Tabela 3.2 – Comparação da temperatura média de mistura obtida com a referência [Shah e London, 1978].

A temperatura média de mistura,  $\theta_B(X)$ , mostrada na tabela 3.2 é definida na literatura [Shah e London, 1978] pela seguinte equação

$$\theta_{1B}(X) = \frac{1}{U_m} \int_0^1 U(Y) \theta_1(X, Y) dY \quad (3.28)$$

e a velocidade média,  $U_m$ , é

$$U_m = \int_0^1 U(Y) dY. \quad (3.29)$$

Na tabela 3.2 pode-se verificar que os resultados obtidos na solução da equação da energia com termo difusivo na direção transversal apresentam ótima concordância com os resultados da referência [Shah e London, 1978]. Para 100 autovalores, a diferença absoluta máxima foi de 0,00001 em alguns pontos do domínio em  $X$ , sendo que em outros pontos os valores coincidem com a referência para a precisão adotada.

A figura 3.2 apresenta a distribuição de temperatura na região de escoamento plenamente desenvolvido. Os resultados foram obtidos para o número de Péclet,  $Pe$ , valendo 1440.

À medida que o fluido escoia axialmente entre as placas planas, este vai diminuindo sua temperatura. Analisando a figura 3.2 na direção axial ( $X$ ), pode-se perceber importantes variações na temperatura. Verifica-se uma queda acentuada ao longo de  $X$ , principalmente próximo à parede ( $Y = 1$ ), devido ao fato de a temperatura ser unitária na entrada e nula na parede. Analisando em direção ao centro do escoamento ( $Y = 0$ ), a queda da temperatura ao longo de  $X$  é gradualmente menos acentuada. Isso ocorre porque a informação da parede, ou seja, a troca de calor entre o fluido e a parede, leva um certo tempo até chegar ao centro do escoamento.

A figura 3.3 apresenta o perfil de temperatura média de mistura, para  $Pe$  valendo 1440.

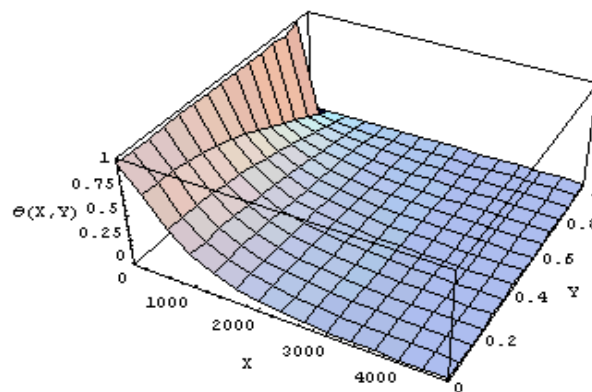


Figura 3.2 – Temperatura do fluido para  $Pe = 1440$ .

Por fim, pode-se considerar que os resultados da temperatura média de mistura obtidos por este método são satisfatórios na comparação com os resultados da referência [Shah e London, 1978], tabela 3.2. Juntamente com a análise da convergência numérica da

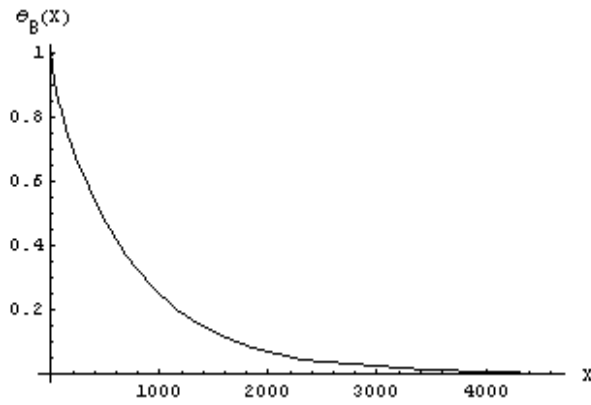


Figura 3.3 – Temperatura média de mistura do fluido para  $Pe = 1440$ .

solução, tabela 3.1 pôde-se validar tanto a **GILTT** como o código computacional para a solução deste problema.

Por último, cabe ressaltar que foram obtidos resultados para diferentes valores de Péclet,  $Pe$ . Assim, será possível o melhor entendimento da influência do número de Péclet na equação da energia. Tais resultados são apresentados no capítulo 4.

## CAPÍTULO 4

### PROBLEMA DIFUSIVO-ADVECTIVO COM TERMOS DIFUSIVOS AXIAL E TRANSVERSAL

#### 4.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Nesta seção pretende-se mostrar o uso da **GILTT** na solução da equação da Energia bidimensional, associada a um método de redução de ordem de **EDO's**. Assim, o sistema de **EDO's** de segunda ordem, resultante da aplicação da **GITT** no domínio espacial  $y$ , é reduzido a um de primeira ordem em  $x$ . Em seguida aplica-se a transformada de Laplace associada a diagonalização de matrizes. Considera-se um problema de convecção forçada entre placas planas paralelas com perfil hidrodinâmico desenvolvido e perfil térmico em desenvolvimento. Diferentemente do problema anterior, aqui será levada em consideração a condução axial para a aplicabilidade destes métodos. Impõe-se as mesmas hipóteses simplificadoras do problema anterior a menos da condução axial que aqui é levada em consideração. Isso permite obter um problema transformado representado por sistema de **EDO's** de segunda ordem, o que propicia a aplicação do algoritmo de redução de ordem proposto.

#### 4.2 O MODELO MATEMÁTICO

Baseado nas hipóteses acima, o problema é representado, matematicamente, pela equação da Energia bidimensional e estacionária, escrita em coordenadas cartesianas como segue:

$$\rho C_p u(y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right), \quad (4.1)$$

em que  $0 < x < R$  e  $0 < y < h_w$ . Onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $C_p$  o calor específico a pressão constante e  $k$  o coeficiente de condutividade térmica do fluido. As condições de

contorno são dadas por

$$T(0, y) = T_0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right|_{x=R} = 0, \quad (4.1(a, b))$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad T(x, h_w) = T_w. \quad (4.1(c, d))$$

Em termos dos grupos adimensionais apresentados no capítulo 3, a equação da Energia fica

$$U(Y) \frac{\partial \theta_2(X, Y)}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta_2(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_2(X, Y)}{\partial Y^2} \right), \quad (4.2)$$

e as condições de contorno adimensionalizadas, tornam-se

$$\theta_2(0, Y) = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta_2(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=R} = 0, \quad (4.2(a, b))$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad \theta_2(X, 1) = 0. \quad (4.2(c, d))$$

Novamente o termo velocidade da equação 4.2,  $U(Y)$  será substituída pela expressão que representa a velocidade do fluido na região do escoamento plenamente desenvolvido entre placas planas, ou seja,

$$U(Y) = \frac{3}{2} (1 - Y^2). \quad (4.3)$$

Assim, o problema passa a ser representado matematicamente pela seguinte equação

$$\frac{3}{2} (1 - Y^2) \frac{\partial \theta_2(X, Y)}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta_2(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_2(X, Y)}{\partial Y^2} \right), \quad (4.4)$$

e suas condições de contorno

$$\theta_2(0, Y) = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta_2(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=R} = 0, \quad (4.4(a, b))$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad \theta_2(X, 1) = 0. \quad (4.4(c, d))$$

### 4.3 MÉTODO DE SOLUÇÃO: GILTT

#### 4.3.1 GITT

Igualmente ao capítulo anterior, o problema descrito pelas equações 4.4 satisfazem as condições básicas necessárias, seção 2.1.1, para a aplicação da **GITT**. Visto que a equação apresenta termo Laplaciano em  $Y$  e condições de contorno homogêneas nesta direção, a transformação integral é aplicada em relação a  $Y$ . Para tal, segue-se os passos descritos na seção 2.1.1. Inicialmente, deve-se identificar o operador  $L$  (eq. 2.3), na equação (4.4).

Para a equação 4.4 a parte referente à aplicação da **GITT**, ou seja, escolha do problema auxiliar, sua solução, determinação da fórmula da inversa e da expressão para calcular a norma dos autovalores é idêntica ao capítulo anterior e não será repetida.

Aplicando a fórmula da inversa (eq. 3.9) na equação 4.4, resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} (1 - Y^2) \frac{\partial}{\partial X} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_j(Y) \right) \right] = \\ & \frac{1}{Pe} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Usando novamente o operador integral 3.12, pode-se tomar os momentos da equação acima cujos detalhes podem ser observados no apêndice III.

O resultado da aplicação da transformação integral é a seguinte equação matricial de segunda ordem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{i,j}}{Pe} \overline{t_i''(X)} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{i,j} - A_{i,j}) \overline{t_i'(X)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 \delta_{i,j}}{Pe} \overline{t_i(X)} = 0 \quad (4.6)$$

onde ' e '' representam as derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente. O vetor  $\overline{t_i(X)}$  representa a temperatura transformada e  $A_{i,j}$  corresponde a seguinte matriz dada pela equação 3.13a e  $\delta_{i,j}$  pela equação 3.13b.

As condições de contorno em  $X$  (eqs. 4.4 (a, b)) também devem ser transformadas pela **GITT**. Os detalhes podem ser vistos no apêndice IV. O resultado é

$$\overline{t_j(0)} = Q_j \quad e \quad \left. \frac{d\overline{t_j(X)}}{dX} \right|_{X=R} = 0, \quad (4.6(b, c))$$

onde

$$Q_j = \frac{1}{N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_j(Y) dY. \quad (4.6 \text{ d})$$

Como pode ser notado, a equação 4.6 corresponde a um sistema de **EDO's** lineares de segunda ordem. Sua solução analítica, conforme já foi dito anteriormente será obtida pela combinação das técnicas de redução de ordem e transformada de Laplace.

### 4.3.2 Solução do Sistema de EDO's Transformado com Redução de Ordem

O primeiro passo é truncar o sistema de **EDO's** 4.6 em uma ordem grande o suficiente para garantir a precisão dos resultados. O seguinte passo é reescrevê-lo em notação matricial como pode ser visto abaixo

$$C \bar{\Theta}_2''(X) + D \bar{\Theta}_2'(X) + E \bar{\Theta}_2(X) = 0, \quad (4.7)$$

com condições de contorno

$$\bar{\Theta}_2(0) = Q \quad e \quad \left. \frac{d\bar{\Theta}_2(X)}{dX} \right|_{X=R} = 0, \quad (4.7(a, b))$$

onde

$$\bar{\Theta}_2(X) = \{\overline{t_i(X)}\}, \quad (4.7 \text{ c})$$

$$Q = \{q_{i,j}\}, \quad (4.7 \text{ d})$$

$$q_{i,j} = \frac{1}{N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_j(Y) dY, \quad (4.7 \text{ e})$$

$$C = \{c_{i,j}\}, \quad (4.7 \text{ f})$$

$$c_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{i,j}}{Pe}, \quad (4.7 \text{ g})$$

$$D = \{d_{i,j}\}, \quad (4.7 \text{ h})$$

$$d_{i,j} = -\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{i,j} - A_{i,j}), \quad (4.7 \text{ i})$$

$$E = \{e_{i,j}\}, \quad (4.7 \text{ j})$$

$$e_{i,j} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 \delta_{i,j}}{Pe}. \quad (4.7 \text{ k})$$

sendo  $C$ ,  $D$  e  $E$  matrizes de ordem  $(N \times N)$  e  $\bar{\Theta}_2(X)$  o vetor incógnita de  $N$  componentes.

Seguindo o que foi apresentado na seção 2.2, multiplica-se toda a equação 4.7 pela matriz inversa  $C^{-1}$ , resultando em

$$\bar{\Theta}_2''(X) + F \cdot \bar{\Theta}_2'(X) + G \cdot \bar{\Theta}_2(X) = 0. \quad (4.8)$$

onde  $F = C^{-1} \cdot D$  e  $G = C^{-1} \cdot E$ .

Inicia-se por definir as seguintes variáveis

$$Z_1(X) = \bar{\Theta}_2(X) \quad (4.9)$$

e

$$Z_2(X) = \bar{\Theta}_2'(X). \quad (4.10)$$

Assim,  $Z_1(X)$  e  $Z_2(X)$  tornam-se vetores incógnitas com  $N$  componentes.

A derivada das equações 4.9 e 4.10 resulta em

$$Z_1'(X) = \bar{\Theta}_2'(X). \quad (4.11)$$

e

$$Z_2'(X) = \bar{\Theta}_2''(X) \quad (4.12)$$



Comparando as equações 4.10 e 4.11 pode-se escrever

$$Z_1'(X) = Z_2(X), \quad (4.13)$$

ou

$$Z_1'(X) - Z_2(X) = 0. \quad (4.14)$$

Usando as equações 4.9 e 4.10 e 4.12 e substituindo-as na equação 4.8 resulta na equação matricial de ordem  $N$  abaixo

$$Z_2'(X) + F \cdot Z_2(X) + G \cdot Z_1(X) = 0. \quad (4.15)$$

As equações 4.14 e 4.15 constituem o seguinte sistema de equações matriciais de primeira ordem

$$\begin{cases} Z_1'(X) + 0 Z_2'(X) + 0 Z_1(X) - Z_2(X) = 0 \\ 0 Z_1'(X) + Z_2'(X) + G \cdot Z_1(X) + F \cdot Z_2(X) = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

sujeitas às condições de contorno

$$\begin{cases} Z_1(0) = Q \\ Z_2(0) = 0. \end{cases} \quad (4.16 \text{ a})$$

Em notação matricial, o sistema de equações 4.16 fica

$$\begin{bmatrix} Z_1'(X) \\ Z_2'(X) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ G & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1(X) \\ Z_2(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

$$\begin{bmatrix} Z_1(0) \\ Z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

De acordo com o sistema matricial acima, pode-se definir a **EDO** na forma matricial representada abaixo

$$Z'(X) + H \cdot Z(X) = 0, \quad (4.19)$$

com condição inicial

$$Z(0^*) = M, \quad (4.19 \text{ a})$$

onde

$$Z'(X) = \begin{bmatrix} Z'_1(X) \\ Z'_2(X) \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ G & F \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$Z(X) = \begin{bmatrix} Z_1(X) \\ Z_2(X) \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$M = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

sendo  $Z(X)$  o vetor incógnita com  $2N$  componentes e  $H$  a matriz bloco de ordem  $(2N \times 2N)$ . Pode-se verificar que a condição inicial, equação 4.19a, é um vetor de  $2N$  componentes constituído de  $N$  condições de contorno em  $x = 0$  e  $N$  em  $x = R$ .

O seguinte passo consiste em resolver a **EDO** 4.19 com o uso da transformada de Laplace de forma análoga a seção 2.1.2. A solução final é

$$Z(X) = X_{av} \cdot E_{av}(X) \cdot X_{av}^{-1} \cdot Z(0^*), \quad (4.24)$$

onde  $E_{av}(X)$  é uma matriz diagonal, cujos elementos valem  $e^{-X d_i}$ .

Conforme a equação 4.24, o resultado obtido é para a variável  $Z(X)$ , com  $2N$  componentes, que é constituída pela equação 4.22. Assim, temos solução para a variável  $Z_1(X)$  e  $Z_2(X)$ , cada uma com  $N$  componentes. No entanto, a solução da equação 4.8 deve ser para  $\bar{\Theta}_2(X) = Z_1(X)$ . Portanto, das duas soluções obtidas, a única solução utilizada é  $Z_1(X)$ . Sendo assim, a solução final da equação 4.8 é  $Z_1(X)$ .

Uma vez obtido o resultado do problema transformado 4.7, a fórmula da inversa 3.9 é usada para obter o potencial original  $\theta_2(X, Y)$ .

#### 4.4 RESULTADOS

Os resultados encontrados na solução do problema 4.4 são apresentados a seguir. Conforme já comentado na introdução deste trabalho, para  $Pe \gg 0$  a solução obtida para o problema resolvido neste capítulo não deve diferir significativamente daquela obtida no problema resolvido no capítulo 3. Como forma de validação do método aqui empregado e do código computacional, novamente, comparam-se os resultados com os da referência [Shah e London, 1978]. Para efeito de simples ilustração escolheu-se mostrar as que se referem aos seguintes valores de parâmetros adimensionais:  $Re = 2000$ ,  $Pr = 0,72$ , ou seja,  $Pe = 1440$ . Da mesma forma que no capítulo anterior, neste também fez-se simulações para outros valores de Péclet, levando em consideração a equação da energia com difusão axial e transversal.

Na tabela 4.1 é mostrada a convergência numérica dos resultados da temperatura média de mistura obtidos para diferentes distâncias no domínio em  $X$  e em função de diferentes números de autovalores. Novamente pode-se verificar que a convergência numérica da solução para as regiões mais próximas da entrada do escoamento plenamente desenvolvido é mais lenta do que para as regiões mais afastadas. Este problema já foi comentado no capítulo 3.

$X$	Número de Autovalores						
	5	10	20	30	40	50	60
0,04608	0,999574	0,999470	0,999114	0,998979	0,998962	0,998961	0,998961
0,4608	0,997240	0,995510	0,994677	0,994663	0,994662	0,994661	0,994661
4,608	0,978066	0,975243	0,975088	0,975078	0,975077	0,975077	0,975077
46,08	0,886775	0,886138	0,886060	0,886055	0,886055	0,886055	0,886055
460,8	0,498347	0,498084	0,498053	0,498051	0,498051	0,498051	0,498051
4608	0,002185	0,002184	0,002184	0,002184	0,002184	0,002184	0,002184

Tabela 4.1 – Temperatura média de mistura em função do número de autovalores para vários valores de  $X$ .

A tabela 4.2 compara os valores obtidos para a temperatura média de mistura com

a referência [Shah e London, 1978]. O programa foi rodado para 60 autovalores. Para fins de comparação, os valores foram obtidos para as mesmas distâncias usadas na obtenção dos resultados do problema anterior.

$Pe = 1440$			
$X$	$\theta_{2B}(X)$	ref.	desvio
0,02304	0,99940	0,99926	0,00014
0,09216	0,99826	0,99814	0,00012
0,18432	0,99715	0,99705	0,00010
0,34560	0,99561	0,99553	0,00008
1,15200	0,99010	0,99004	0,00006
1,84320	0,98645	0,98640	0,00005
3,45600	0,97941	0,97937	0,00004
11,5200	0,95427	0,95425	0,00002
18,4320	0,93763	0,93761	0,00002
23,0400	0,92775	0,92774	0,00001
46,0800	0,88605	0,88604	0,00001
92,1600	0,82066	0,82065	0,00001
138,240	0,76648	0,76648	0,00000
184,320	0,71861	0,71860	0,00001
230,400	0,67504	0,67503	0,00001
921,600	0,27241	0,27241	0,00000
1382,40	0,14902	0,14902	0,00000
1843,20	0,08151	0,08152	0,00001
2304,00	0,04459	0,04459	0,00000
4608,00	0,00218	0,00218	0,00000

Tabela 4.2 – Comparação da temperatura média de mistura obtida com a referência [Shah e London, 1978].

A temperatura média de mistura,  $\theta_{2B}(X)$ , mostrada na tabela 4.2 é a mesma que foi utilizada no capítulo 3, dada pelas equações 3.28 e 3.29.

Na tabela 4.2 pode-se verificar que o desvio é novamente um pouco mais substancial para as regiões mais próximas da entrada do escoamento plenamente desenvolvido do que para as regiões mais afastadas, como já era esperado.

A figura 4.1 apresenta a distribuição de temperatura na região de escoamento ple-

namente desenvolvido, ao passo que a figura 4.2 mostra o perfil de temperatura média de mistura.

Em termos de resultados gráficos, as figuras 4.1 e 4.2 coincidem com as figuras 3.2 e 3.3, respectivamente, o que era esperado. Tais motivos foram discutidos no início desta seção. Uma vez que os resultados são coincidentes, a análise feita no capítulo 3 para os gráficos 3.2 e 3.3 serve também para as figuras 4.1 e 4.2.

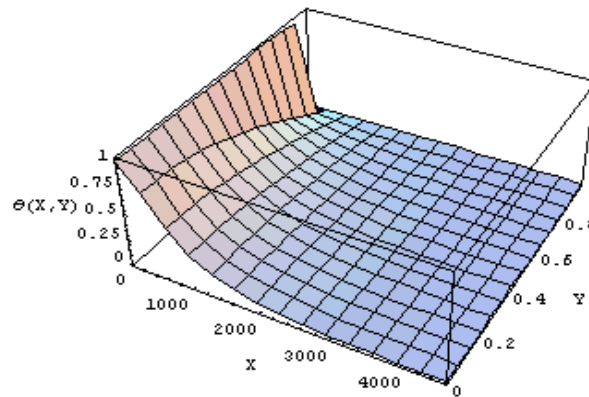


Figura 4.1 – Temperatura do fluido para  $Pe = 1440$ .

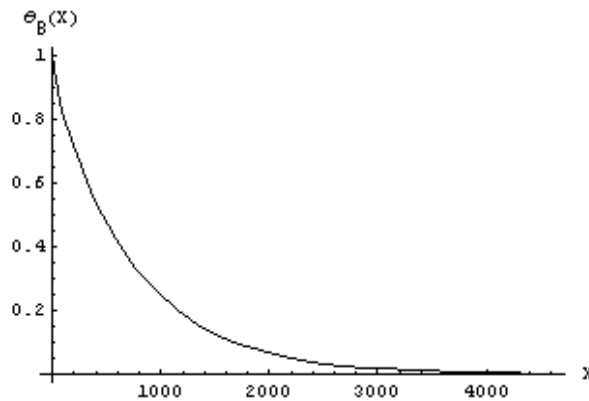


Figura 4.2 – Temperatura média de mistura do fluido para  $Pe = 1440$ .

Por fim, o que se queria realmente com a solução deste problema era mostrar a eficiência do método de redução de ordem associado a **GILTT**, além de validar o código computacional. Isto ficou provado com a comparação dos resultados numéricos e gráficos acima.

## 4.5 RESULTADOS ADICIONAIS

Neste tópico são apresentados resultados das simulações para outros valores do número de Péclet,  $Pe$ . As figuras 4.3 e 4.4 apresentam a distribuição de temperatura na região de escoamento plenamente desenvolvido. Os resultados mostrados nelas, foram obtidos para o número de Prandlt,  $Pr$ , valendo 0,005, Reynolds,  $Re$ , 200, ou seja, Péclet,  $Pe$ , 1. No entanto, o resultado apresentado pela figura 4.3 foi obtido a partir da solução da equação da energia com termo difusivo somente na direção transversal resolvida no capítulo 3. Já a figura 4.4 apresenta o resultado obtido a partir da solução da equação da energia com termos difusivos nas direções axial e transversal resolvida neste capítulo. Os resultados foram plotados em um domínio reduzido de forma a evidenciar as diferenças de solução para as duas equações. Comparando as duas figuras pode-se perceber claramente que a solução da equação com termos difusivos axial e transversal apresenta valores de temperatura mais elevados do que a solução da equação com somente termo difusivo transversal. Isso ocorre porque o termo de difusão axial contribui para uma maior transferência de energia, fenômeno que é potencializado para pequenos valores do número de Péclet,  $Pe$ .

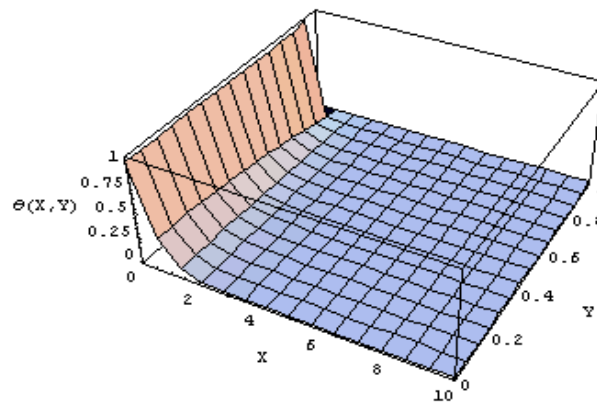


Figura 4.3 – Temperatura do fluido para  $Pe = 1$ .

A tabela 4.3 apresenta os resultados da temperatura média de mistura com o número de Péclet valendo 1 para as duas equações. Através dela, pode-se notar que a diferença entre as duas soluções torna-se ainda mais evidente do que os resultados gráficos mostrados pelas figuras. Nesta tabela manteve-se o mesmo domínio de interesse dos resultados para o número de Péclet valendo 1440, de modo a se ter noção do quanto estas soluções diferem daquelas da referência [Shah e London, 1978]. A partir de um determinado ponto no domínio os valores

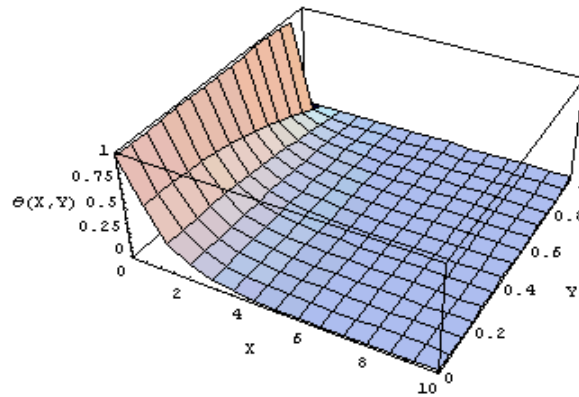


Figura 4.4 – Temperatura do fluido para  $Pe = 1$ .

obtidos pelas duas soluções possuem precisão melhor do que aquela adotada, sendo por isso apresentados como nulos na tabela.

As figuras 4.5 e 4.6 também apresentam a distribuição de temperatura na região de escoamento plenamente desenvolvido. No entanto, seus resultados foram obtidos para o número de Prandlt,  $Pr$ , valendo 1, o número de Reynolds,  $Re$ , 2000, ou seja, o número de Péclet,  $Pe$ , 2000. Enquanto a figura 4.5 apresenta resultados obtidos a partir da solução da equação da energia com termo difusivo somente na direção transversal, a figura 4.6 mostra resultados obtidos a partir da solução da equação da energia com termos difusivos nas direções axial e transversal. Observando os resultados gráficos a diferença absoluta entre as duas soluções é imperceptível. Isso ocorre porque a diferença absoluta entre as soluções para as duas equações é muito menor que para os outros valores do número de Péclet,  $Pe$ , inferiores.

A tabela 4.4 apresenta os resultados para a temperatura média de mistura, cujo número de Péclet é 2000. Através dela, a comparação entre as soluções das duas equações para um determinado número de Péclet tornam-se mais evidentes do que os resultados gráficos ilustrados pelas figuras citadas acima. Pode-se notar que a diferença entre as temperaturas médias de mistura das duas equações é muito menor para o valor do número de Péclet valendo 2000 do que para 1440 e 1. Além do mais, os resultados da solução da equação com difusão axial e transversal permanecem mais elevados do que os resultados da solução da equação com somente difusão transversal, como era esperado. Pode-se concluir que quanto maior o valor do número de Péclet, menor será a diferença absoluta entre as soluções das duas equações. Isso implica que a partir de um determinado número de Péclet, mais elevado,

$Pe = 1$				
$X$	$\theta_{1B}(X)$	$\theta_{2B}(X)$	$ \theta_{2B}(X) - \theta_{1B}(X) $	ref.
0,02304	0,90814	0,97356	0,06542	0,99926
0,09216	0,77258	0,89968	0,12710	0,99814
0,18432	0,64415	0,81175	0,16760	0,99705
0,34560	0,47455	0,68078	0,20623	0,99553
1,15200	0,10376	0,28981	0,18605	0,99004
1,84320	0,02819	0,14037	0,11218	0,98640
3,45600	0,00134	0,02589	0,02455	0,97937
11,5200	0,00000	0,00000	0,00000	0,95425
18,4320	0,00000	0,00000	0,00000	0,93761
23,0400	0,00000	0,00000	0,00000	0,92774
46,0800	0,00000	0,00000	0,00000	0,88604
92,1600	0,00000	0,00000	0,00000	0,82065
138,240	0,00000	0,00000	0,00000	0,76648
184,320	0,00000	0,00000	0,00000	0,71860
230,400	0,00000	0,00000	0,00000	0,67503
921,600	0,00000	0,00000	0,00000	0,27241
1382,40	0,00000	0,00000	0,00000	0,14902
1843,20	0,00000	0,00000	0,00000	0,08152
2304,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,04459
4608,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00218

Tabela 4.3 – Comparação entre as temperaturas médias de mistura das duas equações da energia.

o termo difusivo axial torna-se desprezível na solução da equação da energia. É por isso que em quase todos os trabalhos científicos realizados, cujos valores do número de Péclet são mais elevados, a equação da energia não apresenta o termo difusivo axial.

Comparando as temperaturas médias de mistura entre as três tabelas, primeiramente para a equação da energia com termo difusivo transversal e depois para a equação da energia com termos difusivos axial e transversal, pode-se notar que os resultados com valor do número de Péclet maior apresentam temperaturas médias de mistura mais elevadas. Além do mais, implica que à medida que eleva-se o valor do número de Péclet, a temperatura média de mistura também aumenta.



Por fim, apresenta-se a tabela 4.5 para mostrar a diferença absoluta entre a solução do capítulo 3 com a deste capítulo, já apresentadas, para o valor do número de Péclet valendo 1440. Pode-se notar que as diferenças absolutas entre elas encontram-se entre as diferenças absolutas das soluções para o número de Péclet valendo 1 e 2000, como era esperado. Esses resultados validam tanto o método da **GILTT** como o código computacional.

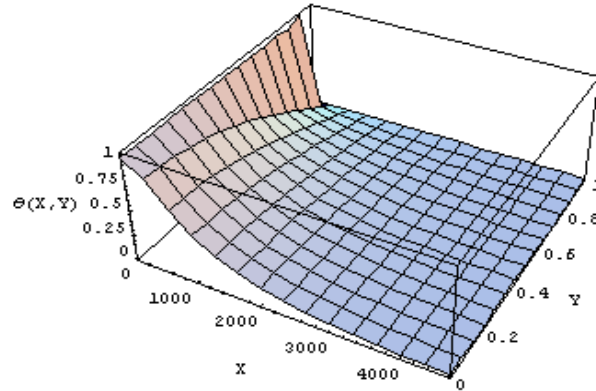


Figura 4.5 – Temperatura do fluido para  $Pe = 2000$ .

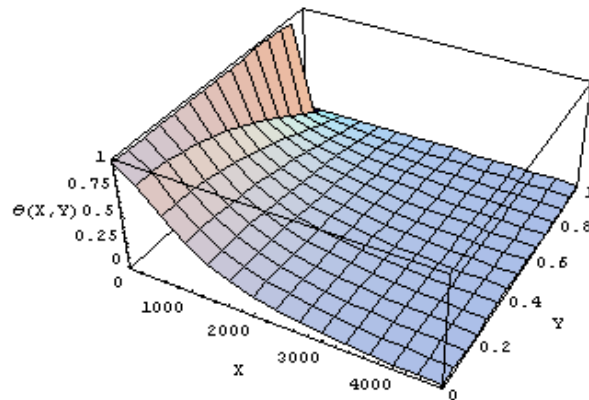


Figura 4.6 – Temperatura do fluido para  $Pe = 2000$ .

$Pe = 2000$				
$X$	$\theta_{1B}(X)$	$\theta_{2B}(X)$	$ \theta_{2B}(X) - \theta_{1B}(X) $	ref.
0,02304	0,99940	0,99950	0,00010	0,99926
0,09216	0,99850	0,99858	0,00008	0,99814
0,18432	0,99763	0,99770	0,00007	0,99705
0,34560	0,99640	0,99646	0,00006	0,99553
1,15200	0,99199	0,99203	0,00004	0,99004
1,84320	0,98906	0,98909	0,00003	0,98640
3,45600	0,98340	0,98343	0,00003	0,97937
11,5200	0,96317	0,96319	0,00002	0,95425
18,4320	0,94976	0,94978	0,00002	0,93761
23,0400	0,94180	0,94181	0,00001	0,92774
46,0800	0,90814	0,90815	0,00001	0,88604
92,1600	0,85529	0,85530	0,00001	0,82065
138,240	0,81142	0,81143	0,00001	0,76648
184,320	0,77258	0,77259	0,00001	0,71860
230,400	0,73715	0,73716	0,00001	0,67503
921,600	0,38189	0,38190	0,00001	0,27241
1382,40	0,24734	0,24735	0,00001	0,14902
1843,20	0,16020	0,16020	0,00000	0,08152
2304,00	0,10376	0,10376	0,00000	0,04459
4608,00	0,01182	0,01182	0,00000	0,00218

Tabela 4.4 – Comparação entre as temperaturas médias de mistura das duas equações da energia.

$Pe = 1440$				
$X$	$\theta_{1B}(X)$	$\theta_{2B}(X)$	$ \theta_{2B}(X) - \theta_{1B}(X) $	ref.
0,02304	0,99926	0,99940	0,00014	0,99926
0,09216	0,99814	0,99826	0,00012	0,99814
0,18432	0,99705	0,99715	0,00010	0,99705
0,34560	0,99552	0,99561	0,00009	0,99553
1,15200	0,99004	0,99010	0,00006	0,99004
1,84320	0,98640	0,98645	0,00005	0,98640
3,45600	0,97936	0,97941	0,00005	0,97937
11,5200	0,95424	0,95427	0,00003	0,95425
18,4320	0,93761	0,93763	0,00002	0,93761
23,0400	0,92773	0,92775	0,00002	0,92774
46,0800	0,88603	0,88605	0,00002	0,88604
92,1600	0,82065	0,82066	0,00001	0,82065
138,240	0,76647	0,76648	0,00001	0,76648
184,320	0,71860	0,71861	0,00001	0,71860
230,400	0,67503	0,67504	0,00001	0,67503
921,600	0,27241	0,27241	0,00000	0,27241
1382,40	0,14901	0,14902	0,00001	0,14902
1843,20	0,08151	0,08151	0,00000	0,08152
2304,00	0,04459	0,04459	0,00000	0,04459
4608,00	0,00218	0,00218	0,00000	0,00218

Tabela 4.5 – Comparação entre as temperaturas médias de mistura das duas equações da energia.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÃO

Neste trabalho buscou-se contribuir para o avanço da **GILTT**. Foi resolvido analiticamente um problema transformado, resultante da aplicação da **GITT** na **EDP**, constituído de um sistema de **EDO's** lineares de segunda ordem. Para isso, empregou-se um método analítico de redução de ordem de **EDO's**. Esta nova metodologia permite à **GILTT** obter soluções analíticas para **EDP's** advectivas-difusivas bidimensionais e estacionárias, o que até então não havia sido resolvido pela **GILTT**.

A **GILTT** tem se caracterizado por apresentar soluções totalmente analíticas ou semi-analíticas. Neste trabalho, os dois problemas lineares resolvidos pela **GILTT** resultaram em soluções totalmente analíticas. A única aproximação efetuada foi o truncamento do somatório infinito da fórmula da inversa, (eq. 2.8), de modo a constituir o sistema de **EDO's**. Para obtenção dos resultados, no primeiro problema trabalhou-se com uma ordem de truncamento ( $N$ ), ou seja, número de autovalores, até 100, enquanto que no outro problema a ordem de truncamento foi de 60. Com esta ordem, os códigos computacionais convergiram numericamente de forma amplamente satisfatória para vários valores de  $X$ . Porém, próximo da entrada a convergência foi mais difícil do que para valores de  $X$  mais afastados, onde ela foi obtida para menos autovalores. Os resultados para a temperatura média de mistura, tabelas 3.2 e 4.2, apresentaram boa concordância com a literatura. Comparando com a referência [Shah e London, 1978], a diferença absoluta máxima para a temperatura média de mistura para o primeiro problema foi de 0,00001. Para o segundo, esta foi de 0,00014. Os demais resultados obtidos para os diferentes valores de Péclet também mostraram-se muito satisfatórios.

Acredita-se que os objetivos deste trabalho foram alcançados a contento. A tarefa de resolver analiticamente problemas de segunda ordem transformados pela **GITT** foi con-

cluída. Os resultados obtidos pela nova metodologia foram numericamente validados com acuidade satisfatória, o que garante a correção dos cálculos bem como do código computacional. O autor entende ainda que foi dado mais um passo para o desenvolvimento da técnica da **GILTT** proposta recentemente. Para trabalhos futuros, propõe-se que a metodologia aqui apresentada seja desenvolvida para problemas de segunda ordem transformados pela **GITT** com coeficientes variáveis e não-lineares.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adomian, G., 1988. "A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics", **Journal Of Mathematical Analysis an Applications**, vol. 1(135), pp. 501 – 544.

Aparecido, J. and Cotta, R., 1990. "Analytical Solutions to Parabolic Multi-Dimensional Diffusion Problems within Irregularly Shaped Domains", **Advanced Computational Methods in Heat Transfer**, vol. 1: Heat Conduction, Convection and Radiation, pp. 27 – 38.

Aparecido, J. and Özisik, M., 1998. "Laminar Forced Convection Inside Circular Sector Tube with Variable Boundary Heat Flux", **VII ENCIT**, vol. 1, pp. 37 – 42.

Barichello, L. B., 1992. "**Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Brancher, J. D., Cardona, A. V., and Vilhena, M. T. M. B., 1998. "A Recursive Method to Invert the  $LTS_N$  Matrix", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33(4), pp. 393 – 401.

Brancher, J. D., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T. M. B., 1999. "The  $LTS_N$  Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimuthal Symmetry With Severe Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 62(-), pp. 743 – 753.

Buske, D., 2004. "**Solução Analítica da Equação de Difusão-Advecção pelo Método GILTT Aplicada à Dispersão de Poluentes Atmosféricas**", Dissertação

de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Buske, D., Wortmann, S., and Vilhena, M., 2003. "Solução Analítica para a Dispersão de Poluentes na Camada Limite Planetária pelo Método GITT", **Revista Ciência e Natura**, vol. , pp. 83 – 86.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1994. "A Solution of Linear Transport Equation Using Walsh Function and Laplace Transform", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21(8), pp. 495–505.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1997. "Analytical Solution for  $A_N$  Approximation", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 31(3), pp. 219–223.

Cheroto, S., Mikhailov, M. D., Kakaç, S., and Cotta, R. M., 1999. "Periodic Laminar Forced Convection:- Solution via Symbolic Computation and Integral Transforms", **Int. J. Thermal Sciences - Revue Generale de Thermique**, vol. 38(7), pp. 613–621.

Cotta, R., Serfaty, R., and Guedes, R., 1990. "Integral Transform Solution of a Class of Transient Convection-Diffusion Problems", **Advanced Computational Methods in Heat Transfer**, vol. 1: Heat Conduction, Convection and Radiation, pp. 239 – 250.

Cotta, R. M., 1993. "**Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**". CRC Press, Boca Raton, FL, EUA.

Cotta, R. M., 1994a. "Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow: - The Integral Transform Method", **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 37(1), pp. 381–394.

Cotta, R. M., 1994b. "The Integral Transform Method in Computational Heat and Fluid Flow", **Proc. of the 10th Int. Heat Transfer Conf., Brighton, UK**, vol. 1(SK-3), pp. 43–60.

Cotta, R. M., Guerrero, J. S. P., and Neto, F. S., 1992. "Hybrid Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations via Integral Transformation", **In Proc. of the 2nd Int. Conf. Advanced Comut. Methods in Heat Transfer, Heat Transfer 92, Milan, Italy**, vol. 1, pp. 735–750.

Cotta, R. M. and Mikhailov, M. D., 1997. "**Heat Conduction - Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation**". John Wiley & Sons, Chichester.

Gonçalves, G. A., 1999. "**Solução  $LTS_N$  da Equação Adjunta de Transporte de Nêutrons com Fonte Arbitrária para Elevada Ordem de Quadratura numa Placa Homogênea**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Gonçalves, G. A., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T. M. B., 2000. "The  $LTS_N$  Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 66, pp. 271–276.

Guerrero, J., Pimentel, L., Filho, P., and Cataldi, M., 2001. "Study of Pollutant Transport in Surface Boundary Layer By Generalized Integral Transform Technique", **Proceeding of the 2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, Rio de Janeiro, October 22-26**, vol. .

Guerrero, J., Ramos, R., and Pimentel, L., 1999. "Solução Analítica para o Problema da Cavidade com Tampa Deslizante para Número de Reynolds Tendendo a Zero", **XV COBEM**, vol. 1(1).

Guerrero, J. S. P. and Cotta, R. M., 1992. "Integral Transform Method for the Navier-Stokes Equations in Stream-Function Only Formulation", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, vol. 15, pp. 399.

Guerrero, J. S. P. and Cotta, R. M., 1995. "Integral Transform Solution of Developing Laminar Duct Flow in Navier-Stokes Formulation", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, vol. 20, pp. 1203.

Machado, H. A. and Cotta, R. M., 1994. "Integral Transform Method for the Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluid Flow Problems", **Int. J. Numer. Meth. Heat & Fluid Flow**, vol. 4.



Mikhailov, M. and Özisik, M., 1984. "**Unified Analysis and Solution of Heat and Mass Diffusion**". John Wiley, New York.

Mikhailov, M. D. and Cotta, R. M., 1994. "Integral Transform Method for Eigenvalue Problems", **Comm. Num. Meth. Eng.**, vol. 10, pp. 827–835.

Monticelli, C., C.F.Segato, Vilhena, M., and Wortmann, S., 2003. "A Closed-Form Solution to the Forward Fokker-Planck Equation Using Spectral and Laplace Transform Techniques", **18'th International Conference on Transport Theory (18 ICTT), Rio de Janeiro, July 20-25**, vol. .

Neto, F. S., Cotta, R., and Mikhailov, M., 1990. "Alternative Approach to the Integral Transform Solution of Non-Homogeneous Diffusion Problems", **Advanced Computational Methods in Heat Transfer**, vol. 1: Heat Conduction, Convection and Radiation, pp. 39 – 50.

Oliveira, J. V. P., 1993. "**Formulação  $LTS_N$  para o Problema de Ordenada Discreta com Anisotropia**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Pimentel, L., Ramos, R., Guerrero, J., and Pimentel, J., 1998. "Analysis of Non-Linear Transient Diffusive Heat Transfer Problems in Multilayered Cylindrical Media", **VII ENCIT**, vol. 1, pp. 154 – 159.

Pimentel, L. C. G., Cotta, R. M., and Kakaç, S., 1999. "Fully Developed Turbulent Flow in Ducts with Symmetric and Asymmetric Rough Walls", **Chem. Eng. J.**, vol. 74, pp. 147–153.

Rupert, N., Gobin, D., and Cotta, R., 1998. "Covalidation of Integral Transform and Finite Volume Solutions in Phase-Change Problems", **VII ENCIT**, vol. 1, pp. 659 – 664.

Segatto, C. F. and Vilhena, M. T. M. B., 1999. "The State-of-the-art of the  $LTS_N$  Method", **Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications—International Conference, Madrid, Spain**, vol. 2, pp. 1618–1631.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. M. B., and Brancher, J. D., 1999a. "The One-Dimensional  $LTS_N$  Formulation for High Degree of Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 61, pp. 39.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. M. B., and Gomes, M. G., 1999b. "The One-Dimensional  $LTS_N$  Solution In a Slab With High Degree of Quadrature", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 26, pp. 925–934.

Shah, R. and London, A., 1978. "**Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Adv. Heat Transfer**". Academic Press, New York.

Thum, R., 2001. "**Uma Abordagem Analítica para a Solução de Problemas Multidimensionais de Secagem Baseados no Modelo de Luikov**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Thum, R., Barichello, L., Vilhena, M., and Cotta, R., 1998. "Solução do Problema de Luikov por Transformada Integral(GITT) e Transformada de Laplace", **VII ENCIT**, vol. 1, pp. 43 – 46.

Wortmann, S., 1995. "**Convecção Forçada Transiente no Escoamento Laminar em Desenvolvimento Simultâneo**", Dissertação de mestrado, UFPB, João Pessoa, PB, Brasil.

Wortmann, S., 2003. "**Formulação Semi-Analítica para a Equação Transformada Resultante da Aplicação da GITT em Problemas Difusivos-Advectivos**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Wortmann, S., Moura, A., and Vilhena, M., 2000. "Solução Analítica para o Problema Unidimensional Transiente de Dispersão de Poluentes com Coeficiente de Difusão Variável", **Anais ENCIT**, vol. .

Zabadal, J., Vilhena, M. T. M. B., and Barichello, L. B., 1995. "An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem In a Convex Domain", **Progress in Nuclear Energy**, vol. –.

Özisik, M. N., 1980. "**Heat Conduction**". John Wiley, New York.

## APÊNDICE I

### Transformação Integral da Primeira Equação da Energia

Neste apêndice será aplicada a transformação integral na equação 3.11, cuja variável  $\theta_1(X, Y)$  foi expandida com auxílio da fórmula da inversa 3.9.

$$\frac{3}{2} (1 - Y^2) \frac{\partial}{\partial X} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right] = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right]. \quad (\text{I.1})$$

Aplicando os operadores diferenciais e reorganizando os termos, resulta em

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t'_i(X)} \frac{\psi_i(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t'_i(X)} \frac{Y^2 \psi_i(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{Pe} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(X)} \frac{\psi_i''(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{I.2})$$

Integrando toda a equação acima com o operador 3.12 o resultado é

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t'_i(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i(Y) \psi_j(Y) dY}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t'_i(X)} \int_0^1 \frac{Y^2 \psi_i(Y) \psi_j(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} = \\ \frac{1}{Pe} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i''(Y) \psi_j(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Usando a equação 3.13a e 3.13b, a equação torna-se

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{i,j} \overline{t'_i(X)} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,j} \overline{t'_i(X)} = \frac{1}{Pe} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i''(Y) \psi_j(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{I.4})$$

ou

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{i,j} - A_{i,j}) \overline{t'_i(X)} = \frac{1}{Pe} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i''(Y) \psi_j(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{I.5})$$

O termo a direita da equação I.5, ou seja,

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_i''(Y) \psi_j(Y) dY \quad (\text{I.6})$$

pode ser simplificado utilizando o problema auxiliar (eq. 3.7), escrito da seguinte forma

$$\frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} = -\lambda_i^2 \psi_i(Y). \quad (\text{I.7})$$

Substituindo I.7 na equação I.6

$$\frac{-\lambda_i^2}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_i(Y) \psi_j(Y) dY \quad (\text{I.8})$$

e usando a propriedade da ortogonalidade, equação 2.6, o resultado da integral I.8 é  $-\lambda_i^2 \delta_{i,j}$ . Detalhes desta propriedade da ortogonalidade podem ser vistos na referência [Wortmann, 2003]. Assim, a equação I.5 pode ser reescrita da seguinte forma vetorial

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{i,j} - A_{i,j}) \overline{t'_i(X)} = -\frac{1}{Pe} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \delta_{i,j} \overline{t_i(X)} \quad (\text{I.9})$$

ou

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{i,j} - A_{i,j}) \overline{t'_i(X)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 \delta_{i,j}}{Pe} \overline{t_i(X)} = 0. \quad (\text{I.10})$$

Usando as equações 3.15a, 3.15b, 3.15c, 3.15d e 3.15e, a equação I.10 em notação matricial fica

$$C \overline{\Theta}_1'(X) + D \overline{\Theta}_1(X) = 0. \quad (\text{I.11})$$

## APÊNDICE II

### Transformação Integral da Condição de Entrada para o Sistema de EDO's Transformado

Neste apêndice será aplicada a transformação integral na condição de entrada 3.5c, ou seja,

$$\theta_1(0, Y) = 1. \quad (\text{II.1})$$

Fazendo uso da fórmula da inversa 3.9 para expandir a variável  $\theta(X, Y)$  e substituindo-a na equação II.1 obtém-se

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(0)} \psi_i(Y) \right) = 1 \quad (\text{II.2})$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(0)} \frac{\psi_i(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} = 1. \quad (\text{II.3})$$

Integrando a equação acima com o operador 3.12 o resultado é

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(0)} \int_0^1 \frac{\psi_i(Y) \psi_j(Y) dY}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{\psi_j(Y) dY}{N_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{II.4})$$

Usando a propriedade da ortogonalidade, equação 2.6, a equação II.4 pode ser reescrita da seguinte forma vetorial

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(0)} \delta_{i,j} = \int_0^1 \frac{\psi_j(Y) dY}{N_j^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{II.5})$$

ou

$$\overline{t_j(0)} = \int_0^1 \frac{\psi_j(Y)dY}{N_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{II.6})$$

Usando a equação 3.14a, a equação acima fica

$$\overline{t_j(0)} = Q_j. \quad (\text{II.7})$$

Utilizando as equações 3.15a, 3.15b, 3.15c e 3.15d, a equação II.7 em notação matricial fica

$$\overline{\Theta}_1(0) = Q. \quad (\text{II.8})$$

## APÊNDICE III

### Transformação Integral da Segunda Equação da Energia

Neste apêndice será aplicada a transformação integral na equação 4.5, cuja variável  $\theta_2(X, Y)$  foi expandida com auxílio da fórmula da inversa 3.9.

$$\frac{3}{2} (1 - Y^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_j(Y) \right) \right] =$$
(III.1)

$$\frac{1}{Pe} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right] \right\}.$$

Aplicando os operadores diferenciais e reorganizando os termos, resulta em

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i'(X)} \frac{\psi_i(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i'(X)} \frac{Y^2 \psi_i(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{Pe} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i'''(X)} \frac{\psi_i(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(X)} \frac{\psi_i''(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \right).$$
(III.2)

Integrando toda a equação acima com o operador 3.12 o resultado é

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i'(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i(Y) \psi_j(Y) dY}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i'(X)} \int_0^1 \frac{Y^2 \psi_i(Y) \psi_j(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} =$$
(III.3)

$$\frac{1}{Pe} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i'''(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i(Y) \psi_j(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i''(Y) \psi_j(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \right).$$



Usando a equação 3.13a e 3.13b, a equação torna-se

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{i,j} \overline{t'_i(X)} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,j} \overline{t'_i(X)} = \frac{1}{Pe} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{i,j} \overline{t''_i(X)} + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i''(Y) \psi_j(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} dY \right) \quad (\text{III.4})$$

O último termo do segundo membro da equação III.4, ou seja,

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_i''(Y) \psi_j(Y) dY \quad (\text{III.5})$$

pode ser simplificado utilizando o problema auxiliar (eq. 3.7), escrito da seguinte forma

$$\frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} = -\lambda_i^2 \psi_i(Y). \quad (\text{III.6})$$

Substituindo III.6 na equação III.5

$$\frac{-\lambda_i^2}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_i(Y) \psi_j(Y) dY \quad (\text{III.7})$$

e usando a propriedade da ortogonalidade, equação 2.6, o resultado da integral III.7 é  $-\lambda_i^2 \delta_{i,j}$ .

Assim, a equação III.4 pode ser reescrita da seguinte forma vetorial

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{i,j} \overline{t'_i(X)} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,j} \overline{t'_i(X)} = \frac{1}{Pe} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{i,j} \overline{t''_i(X)} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \delta_{i,j} \overline{t_i(X)} \right) \quad (\text{III.8})$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{i,j}}{Pe} \overline{t''_i(X)} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{i,j} - A_{i,j}) \overline{t'_i(X)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 \delta_{i,j}}{Pe} \overline{t_i(X)} = 0. \quad (\text{III.9})$$

Usando as equações 4.7c, 4.7f, 4.7g, 4.7h e 4.7i, a equação III.9 em notação matricial fica

$$C \overline{\Theta}_2''(X) + D \overline{\Theta}_2'(X) + E \overline{\Theta}_2(X) = 0. \quad (\text{III.10})$$

## APÊNDICE IV

### Transformação Integral das Condições de Contorno em $X$ para o Sistema de EDO's Transformado

Neste apêndice será aplicada a transformação integral nas condições de contorno em  $X$ , (eq. 4.4(a, b)), ou seja,

$$\theta_2(0, Y) = 1 \quad (\text{IV.1})$$

e

$$\left. \frac{\partial \theta_2(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=R} = 0. \quad (\text{IV.2})$$

Primeiramente, será aplicada a transformação integral na condição de contorno IV.1. Fazendo uso da fórmula da inversa 3.9 para expandir a variável  $\theta_2(X, Y)$  e substituindo-a na equação IV.1 obtém-se

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(0)} \psi_i(Y) \right) = 1 \quad (\text{IV.3})$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(0)} \frac{\psi_i(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} = 1. \quad (\text{IV.4})$$

Integrando a equação acima com o operador 3.12 o resultado é

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(0)} \int_0^1 \frac{\psi_i(Y) \psi_j(Y) dY}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{\psi_j(Y) dY}{N_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{IV.5})$$

Usando a propriedade da ortogonalidade, equação 2.6, a equação IV.5 pode ser

reescrita da seguinte forma vetorial

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t_i(0)} \delta_{i,j} = \int_0^1 \frac{\psi_j(Y) dY}{N_j^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{IV.6})$$

ou

$$\overline{t_j(0)} = \int_0^1 \frac{\psi_j(Y) dY}{N_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{IV.7})$$

Usando a equação 4.6d, a equação acima fica

$$\overline{t_j(0)} = Q_j. \quad (\text{IV.8})$$

Usando as equações 4.7a, 4.7c, 4.7d e 4.7e, a equação IV.8 em notação matricial fica

$$\overline{\Theta}_2(0) = Q. \quad (\text{IV.9})$$

O próximo passo é aplicar a transformação integral na condição de contorno IV.2, ou seja,

$$\left. \frac{\partial \theta_2(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=R} = 0. \quad (\text{IV.10})$$

Utilizando a fórmula da inversa 3.9 para expandir a variável  $\theta_2(X, Y)$  e substituindo-a na equação IV.10 obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \overline{t_i(X)} \psi_i(Y) \right) \right] = 0 \quad (\text{IV.11})$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t'_i(X)} \frac{\psi_i(Y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Integrando a equação acima com o operador 3.12 o resultado é

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t'_i(X)} \int_0^1 \frac{\psi_i(Y) \psi_j(Y) dY}{N_i^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{2}}} = 0. \quad (\text{IV.13})$$

Usando a propriedade da ortogonalidade, equação 2.6, a equação IV.13 pode ser

reescrita da seguinte forma vetorial

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{t'_i(X)} \delta_{i,j} = 0 \quad (\text{IV.14})$$

ou

$$\overline{t'_j(X)} = 0. \quad (\text{IV.15})$$

Usando a equação 4.7b e 4.7c, a equação acima fica

$$\left. \frac{d\overline{\Theta}_2(X)}{dX} \right|_{X=R} = 0. \quad (\text{IV.16})$$

## APÊNDICE V

### Relação entre os Grupos Adimensionais deste trabalho e com os da referência [Shah e London, 1978]

Com intuito de simplificar a solução dos problemas descritos nos capítulos 3 e 4, adimensionalizou-se os referidos problemas. Porém, o grupo adimensional usado neste trabalho é diferente daquele empregado na referência [Shah e London, 1978].

Neste trabalho o grupo adimensional usado é representado pelas equações: 3.2, 3.2(b, c), 3.2(d, e), 3.2(f, g) e 3.2(h, i). Na referência [Shah e London, 1978] foi utilizado o seguinte grupo adimensional:

$$y^* = \frac{y}{D_h}, \quad (\text{V.1})$$

$$x^* = \frac{x}{D_h Pe}, \quad u^* = \frac{u}{u_m}, \quad (\text{V.1(b, c)})$$

$$Re = \frac{\rho u_m D_h}{\mu}, \quad Pe = Re Pr, \quad (\text{V.1(d, e)})$$

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{\kappa}, \quad (\text{V.1(f, g)})$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p}, \quad (\text{V.1(h, i)})$$

onde  $u_m$  é a velocidade axial média do fluido,  $D_h$  o diâmetro hidráulico.

A seguir pretende-se determinar a relação para a variável  $X$  entre os dois grupos adimensionais. Isso se faz necessário para efetuar a comparação dos valores da temperatura média de mistura obtidos neste com os da referência [Shah e London, 1978].

Das equações V.1b, V.1d, V.1e e V.1g resulta

$$x^* = \frac{x}{D_h Re Pr} \quad (V.2)$$

ou ainda

$$x^* = \frac{x}{D_h \left( \frac{\rho u_m D_h}{\mu} \right) \left( \frac{\mu C_p}{\kappa} \right)}. \quad (V.3)$$

Isolando a variável  $x$  das equações V.3 e 3.2b fica, respectivamente

$$x = \frac{x^* D_h^2 u_m C_p}{\kappa}. \quad (V.4)$$

e

$$x = X h_w. \quad (V.5)$$

Igualando as equações V.4 e V.5 tem-se

$$X = \frac{x^* D_h^2 u_m \rho C_p}{h_w \kappa}. \quad (V.6)$$

Fazendo uso das equações 3.2e, 3.2g e 3.2(h, i) obtém-se

$$Pe = \left( \frac{u_0 h_w}{\nu} \right) \cdot \left( \frac{\nu \rho C_p}{\kappa} \right) \quad (V.7)$$

ou

$$Pe = \frac{u_0 h_w \rho C_p}{\kappa}. \quad (V.8)$$

Multiplicando a equação V.6 por  $h_w$  tanto no numerador como no denominador resulta

$$X = \frac{x^* D_h^2 u_m h_w \rho C_p}{h_w^2 \kappa}. \quad (V.9)$$

Sabendo-se que  $u_0 = u_m$ , pode-se verificar que a equação V.9 contempla a equação V.8.

Substituindo a equação V.8 na equação V.9 obtém-se

$$X = \frac{x^* D_h^2 Pe}{h_w^2} . \quad (\text{V.10})$$

Assumindo que  $h_w = 1$  e  $D_h = 4$  para placas planas paralelas, a equação a ser utilizada para fins de comparação com a referência [Shah e London, 1978] é

$$X = 16 x^* Pe . \quad (\text{V.11})$$