

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**JEFERSON VIEIRA FLORES**

**PROJETO DE CONTROLADORES PARA  
O SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS  
PERIÓDICAS EM SISTEMAS COM  
ATUADORES SATURANTES**

Porto Alegre  
2012

**JEFERSON VIEIRA FLORES**

**PROJETO DE CONTROLADORES PARA  
O SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS  
PERIÓDICAS EM SISTEMAS COM  
ATUADORES SATURANTES**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre  
2012

**JEFERSON VIEIRA FLORES**

**PROJETO DE CONTROLADORES PARA  
O SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS  
PERIÓDICAS EM SISTEMAS COM  
ATUADORES SATURANTES**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse,  
França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares, UFMG  
Doutor pela Universidade Estadual de Campinas – Campinas, Brasil

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho, UFSC  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler, UFRGS  
Doutor pela Universidade Técnica de Dortmund – Dortmund, Alemanha

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, UFRGS  
Doutor pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Prof. Dr. Walter Fetter Lages, UFRGS  
Doutor pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Porto Alegre, abril de 2012.

## **DEDICATÓRIA**

*À Dinara e Betina*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. João Manoel Gomes da Silva Jr, por ter embarcado comigo neste desafio. Sem a sua disposição e conhecimento a conclusão desta tese seria impossível. Agradeço também ao Prof. Luís Fernando Alves Pereira pela ajuda e pelo ótima parceria de trabalho que estabelecemos ao longo do doutorado.

Agradeço a todos os membros da Baía 1, permanentes ou temporários: ao Bender e à Ilca por me ensinarem quais são as dificuldades de fazer um doutorado; ao Maurício pelas discussões que ajudaram a fazer esta tese andar; ao Manoel, Ivan, Ricardo e Tassiano pelos cafés e momentos divertidos e, especialmente, ao Diego e à Lucíola, por todos os momentos que passamos juntos desde o mestrado. Sem vocês minha vida teria sido muito menos divertida.

Finalmente, um agradecimento especial à minha família, razão de tudo que eu faço: à minha esposa Dinara, que leu a tese, me aguentou nos fins de semana fazendo simulação ou artigos, me acompanhou em todos os momentos, bons e ruins; à Betina, por completar o que faltava na minha vida; aos meus pais e à minha irmã, pelo apoio e pelas jantas ao longo do doutorado.

## RESUMO

Este trabalho aborda o problema de seguimento e rejeição de sinais periódicos em sistemas lineares sujeitos a saturação nos atuadores. Para garantir o seguimento/rejeição, dois controladores baseados no princípio do modelo interno são considerados: o primeiro baseia-se no modelo interno em sua formulação clássica, isto é, um controlador dinâmico contendo um número finito de modos (marginalmente) instáveis da referência/perturbação é introduzido na malha de controle, em uma abordagem chamada de controladores ressonantes; a segunda abordagem considera o controlador repetitivo, onde um elemento de atraso é inserido na malha de controle em um laço de realimentação positiva, fazendo o papel do modelo interno de ordem infinita. Nos dois casos, o objetivo principal é a obtenção de condições na forma de inequações matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities - LMIs*) para a síntese simultânea de uma realimentação de estados estabilizante e do ganho do laço estático de *anti-windup*. Partindo do pressuposto que as referências e perturbações pertencem a um certo conjunto admissível, estes ganhos garantem que as trajetórias do sistema em malha fechada iniciadas em um certo conjunto elipsoidal convergem para outro conjunto elipsoidal invariante contido na região de operação linear do sistema. Nesta região, a presença do modelo interno na malha de controle garante o seguimento e a rejeição dos sinais de interesse. Nas duas abordagens são propostos problemas de otimização visando a maximização do conjunto invariante de estados admissíveis e/ou a maximização do conjunto de referências/perturbações admissíveis. Extensões da metodologia para sistemas de tempo discreto também são apresentadas.

**Palavras-chave:** Seguimento de referências, rejeição de perturbações, sinais periódicos, controlador ressonante, controlador repetitivo, saturação de controle, *anti-windup*, LMI.

## ABSTRACT

This work addresses the tracking/rejection problem of periodic signals for linear systems subject to control saturation. To ensure the tracking/rejection, two internal model based controllers are considered: the first one considers the internal model in a classical framework, i.e. a dynamic controller containing a finite number of (marginally) unstable modes of the reference/disturbance signal is introduced in the control loop. In this work, this approach is called resonant controller. The second approach considers the repetitive controller, where a delay element is introduced in the control loop in a positive feedback loop, playing the role of an infinite order internal model. In both cases, the main objective is to obtain conditions in the form of LMIs to simultaneously compute a stabilizing state feedback gain and an anti-windup gain. Assuming that the references and disturbances signals belong to a certain admissible set, these gains guarantee that the trajectories of the closed-loop system starting in a certain ellipsoidal set contract to another invariant ellipsoidal set inside the linearity region of the closed-loop system. In this region the presence of the internal model ensures tracking/rejection of the considered periodic signals. In both frameworks, optimization problems aiming at the maximization of the invariant set of admissible states and/or the maximization of the set of admissible references/disturbances are proposed. Extensions of the proposed framework to discrete-time systems are also presented.

**Keywords:** Reference tracking, disturbance rejection, periodic signals, resonant controller, repetitive controller, control saturation, anti-windup, LMI.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b>	9
<b>LISTA DE TABELAS</b>	12
<b>LISTA DE ABREVIATURAS</b>	13
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	14
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	16
<b>2 PRELIMINARES E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	19
<b>2.1 Estabilidade de sistemas dinâmicos</b>	19
2.1.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov	19
2.1.2 Sistemas sujeitos a atrasos nos estados	21
<b>2.2 Sistemas lineares com atuadores saturantes</b>	24
2.2.1 Sistema de interesse	24
2.2.2 Modelos de saturação	26
2.2.3 Problema de <i>anti-windup</i>	29
<b>2.3 Seguimento de referências e rejeição de perturbações periódicas</b>	32
2.3.1 Princípio do Modelo Interno	32
2.3.2 Outras metodologias	49
<b>2.4 Comentários finais</b>	50
<b>3 ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLADORES RESSONANTES</b>	52
<b>3.1 Preliminares</b>	52
<b>3.2 Formulação do problema</b>	54
<b>3.3 Resultado principal</b>	56
<b>3.4 Problema de otimização</b>	58
<b>3.5 Exemplos numéricos</b>	59
3.5.1 Exemplo 1 - sistema <i>SISO</i>	59
3.5.2 Exemplo 2 - <i>UPS</i>	60
3.5.3 Exemplo 3 - sistema <i>MIMO</i>	69
<b>3.6 Comentários finais</b>	74
<b>4 ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLADORES REPETITIVOS</b>	77
<b>4.1 Controlador repetitivo multi-periódico</b>	77
<b>4.2 Preliminares</b>	79
<b>4.3 Formulação do problema</b>	80
<b>4.4 Resultado principal</b>	81



<b>4.5</b>	<b>Problema de otimização</b>	85
<b>4.6</b>	<b>Exemplos numéricos</b>	86
4.6.1	Exemplo 1 - sistema <i>SISO</i>	86
4.6.2	Exemplo 2 - <i>UPS</i>	87
4.6.3	Exemplo 3 - sistema <i>MIMO</i>	92
<b>4.7</b>	<b>Comentários finais</b>	96
<b>5</b>	<b>EXTENSÕES DO RESULTADOS PARA SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO</b>	98
<b>5.1</b>	<b>Preliminares</b>	98
<b>5.2</b>	<b>Formulação do problema</b>	99
<b>5.3</b>	<b>Resultado principal</b>	100
<b>5.4</b>	<b>Problema de otimização</b>	102
<b>5.5</b>	<b>Exemplos numéricos</b>	103
5.5.1	Exemplo 1 - controlador ressonante	103
5.5.2	Exemplo 2 - controlador repetitivo	105
<b>5.6</b>	<b>Comentários finais</b>	106
<b>6</b>	<b>SÍNTESE DE MALHAS DE <i>ANTI-WINDUP</i> UTILIZANDO CONDICIONAMENTO LINEAR</b>	108
<b>6.1</b>	<b>Abordagem via condicionamento linear</b>	108
6.1.1	Formulação geral	108
6.1.2	Determinação de $M(z)$	112
<b>6.2</b>	<b>Determinação dos conjuntos admissíveis <math>\Omega(P, 1)</math> e <math>\Omega(R, 1)</math></b>	113
<b>6.3</b>	<b>Exemplos numéricos</b>	115
<b>6.4</b>	<b>Comentários finais</b>	118
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	121
	<b>REFERÊNCIAS</b>	124
	<b>APÊNDICE A ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLADORES RESONANTES PARA SISTEMAS COM INCERTEZA LIMITADA EM NORMA</b>	135
<b>A.1</b>	<b>Estrutura de controle</b>	135
<b>A.2</b>	<b>Resultado principal</b>	136

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Regiões associadas ao problema de tolerância a perturbações . . . . .	26
Figura 2:	Condição de Setor clássica - não-linearidade do tipo zona-morta des-centralizada. . . . .	28
Figura 3:	Topologia de controle com laço de <i>anti-windup</i> . . . . .	30
Figura 4:	Sistema em malha fechada - modelo interno . . . . .	35
Figura 5:	Diagrama de Bode (magnitude) de $\Phi(s)$ . . . . .	37
Figura 6:	Configuração básica do controlador repetitivo. . . . .	41
Figura 7:	LGR ilustrativo. . . . .	42
Figura 8:	Estrutura básica do controlador repetitivo com o filtro $Q(s)$ . . . . .	43
Figura 9:	Diagrama de Bode de $G_{rc}^f(s)$ com $\omega_0 = 1rad/s$ . . . . .	44
Figura 10:	Polos de $G_{rc}^f(s)$ com $\omega_0 = 1rad/s$ . . . . .	44
Figura 11:	Configuração básica do controlador repetitivo de tempo discreto. . . . .	46
Figura 12:	Controlador ressonante - sistema em malha fechada . . . . .	53
Figura 13:	Regiões associadas à abordagem multi-elipsoidal. . . . .	55
Figura 14:	Sistema <i>SISO</i> - controlador ressonante - simulação do sistema (42) para $r_{max} = 0.2437$ , $d_{max} = 0.1219$ e $z(0) = [1.3607 \ 0.8925]^T$ . . . . .	61
Figura 15:	Sistema <i>SISO</i> - controlador ressonante - trajetória de (42) iniciada em $z(0) = [1.3607 \ 0.8925]^T$ . . . . .	62
Figura 16:	Sistema <i>SISO</i> - controlador ressonante - trajetórias de (42) iniciadas na fronteira de $\Omega(P, 1)$ . . . . .	63
Figura 17:	Topologia <i>UPS</i> . . . . .	64
Figura 18:	<i>UPS</i> - sinal de perturbação e seu conteúdo harmônico. . . . .	64
Figura 19:	<i>UPS</i> - controlador ressonante - varredura em $\lambda$ e $\eta$ considerando apenas a frequência fundamental. . . . .	65
Figura 20:	<i>UPS</i> - controlador ressonante - varredura em $\lambda$ e $\eta$ considerando a frequência fundamental e terceira harmônica. . . . .	65
Figura 21:	<i>UPS</i> - controlador ressonante - varredura em $\lambda$ e $\eta$ considerando a frequência fundamental, terceira e quinta harmônica. . . . .	66
Figura 22:	<i>UPS</i> - Erros de seguimento para diferentes configurações do controlador ressonante. . . . .	67
Figura 23:	<i>UPS</i> - controlador ressonante - simulação considerando a frequência fundamental, terceira e quinta harmônica. . . . .	67
Figura 24:	<i>UPS</i> - erro de seguimento para o controlador ressonante - forma diagonal. . . . .	70
Figura 25:	<i>UPS</i> - controlador ressonante - <i>THD</i> considerando $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, 7\omega_0$ e $9\omega_0$ - forma diagonal . . . . .	71

Figura 26:	<i>UPS</i> - controlador ressonante - simulação considerando $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, 7\omega_0$ e $9\omega_0$ - forma diagonal . . . . .	71
Figura 27:	<i>UPS</i> - controlador ressonante - valor <i>RMS</i> dos sinais de saída apresentados na Figura 24. . . . .	72
Figura 28:	Sistema <i>MIMO</i> - controlador ressonante - simulação considerando $E_c \neq 0$ e $z(0) = 154.0723[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$ . . . . .	73
Figura 29:	Sistema <i>MIMO</i> - controlador ressonante - simulação considerando $E_c \neq 0$ e $z(0) = [4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 0_{1 \times 6}]^T$ . . . . .	74
Figura 30:	Sistema <i>MIMO</i> - controlador ressonante - simulação considerando $E_c = 0$ e $z(0) = [4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 0_{1 \times 6}]^T$ . . . . .	75
Figura 31:	Representação em cascata do controlador repetitivo. . . . .	78
Figura 32:	Controlador repetitivo - sistema em malha fechada. . . . .	80
Figura 33:	Ilustração de $V(z(t))$ - Lema 2 . . . . .	82
Figura 34:	Sistema <i>SISO</i> - controlador repetitivo - simulação do sistema (42) para $r_{max} = 0.1298, d_{max} = 0.0649$ e $z(0) = [1.5386 \ 1.6096]^T$ . . . . .	87
Figura 35:	Sistema <i>SISO</i> - controlador repetitivo - trajetória de (42) iniciada em $z(0) = [1.5386 \ 1.6096]^T$ . . . . .	88
Figura 36:	Sistema <i>SISO</i> - controlador repetitivo - trajetórias de (42) iniciadas na fronteira de $\Omega(P, 1)$ . . . . .	89
Figura 37:	<i>UPS</i> - controlador repetitivo - varredura em $\lambda$ e $\eta$ considerando $\omega_c = 50$ . . . . .	90
Figura 38:	<i>UPS</i> - controlador repetitivo - varredura em $\lambda$ e $\eta$ considerando $\omega_c = 60$ . . . . .	90
Figura 39:	<i>UPS</i> - controlador repetitivo - varredura em $\lambda$ e $\eta$ considerando $\omega_c = 66$ . . . . .	91
Figura 40:	<i>UPS</i> - erros de seguimento para diferentes frequências de corte. . . . .	92
Figura 41:	<i>UPS</i> - simulação considerando $\omega_c = 66$ rad/s. . . . .	93
Figura 42:	<i>UPS</i> - controlador repetitivo - valor <i>RMS</i> dos sinais de saída para diferentes valores de $\omega_c$ . . . . .	93
Figura 43:	<i>UPS</i> - controlador repetitivo - <i>THD</i> do sinal de saída para diferentes valores de $\omega_c$ . . . . .	94
Figura 44:	Sistema <i>MIMO</i> - controlador repetitivo - simulação considerando $E_c \neq 0$ e $x(0) = 98.0685[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$ . . . . .	95
Figura 45:	Sistema <i>MIMO</i> - controlador repetitivo - simulação considerando $E_c = 0$ e $x(0) = 98.0685[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$ . . . . .	95
Figura 46:	Regiões elipsoidais - sistemas de tempo discreto . . . . .	99
Figura 47:	Sistema de tempo discreto - maximização de $\Omega(R, 1)$ - simulação da saída e sinal de controle para $r(k) = 9.9526 \sin(\frac{2\pi}{50}k), d(k) = 0, x(0) = [20 \ 20]^T$ e $\xi(0) = [0 \ 0]^T$ . . . . .	104
Figura 48:	Sistema de tempo discreto - maximização de $\Omega(P, 1)$ - simulação da saída e sinal de controle para $r(k) = 0.1 \sin(\frac{2\pi}{50}k), d(k) = 0, x(0) = [10.1493 \ 71.1566]^T$ e $\xi(0) = [0 \ 0]^T$ . . . . .	105
Figura 49:	Sistema de tempo discreto - maximização de $\Omega(P, 1)$ - controlador repetitivo e laço de <i>anti-windup</i> . . . . .	106
Figura 50:	Sistema de tempo discreto - maximização de $\Omega(P, 1)$ - controlador repetitivo sem laço de <i>anti-windup</i> . . . . .	107
Figura 51:	Estrutura genérica de <i>anti-windup</i> (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003). . . . .	109
Figura 52:	Configuração de controle via condicionamento linear (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003). . . . .	110
Figura 53:	Forma alternativa para o diagrama de blocos da Figura 52. . . . .	111

Figura 54:	<i>ZPRC</i> com laço de <i>anti-windup</i> estático - simulação da saída e sinal de controle para $r(k) = d(k) = \sin(\frac{2\pi}{16}k)$ , $x(0) = 1.1570 \times 10^4 [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ e $\xi(0) = 0_{18 \times 1}$ . . . . .	117
Figura 55:	<i>ZPRC</i> sem laço de <i>anti-windup</i> - simulação da saída e sinal de controle para $r(k) = d(k) = \sin(\frac{2\pi}{16}k)$ , $x(0) = 1.1570 \times 10^4 [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ e $\xi(0) = 0_{18 \times 1}$ . . . . .	117
Figura 56:	<i>ZPRC</i> com compensação <i>anti-windup</i> via condicionamento linear - simulação da saída e sinal de controle para $r(k) = d(k) = \sin(\frac{2\pi}{16}k)$ , $x(0) = 1.1570 \times 10^4 [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ e $\xi(0) = 0_{18 \times 1}$ . . . . .	118
Figura 57:	<i>ZPRC</i> com compensação <i>anti-windup</i> via condicionamento linear - Sinais $u(k)$ , $u_d(k)$ e $y_d(k)$ . . . . .	119
Figura 58:	<i>ZPRC</i> - detalhe das três simulações. . . . .	119

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	<i>UPS</i> - ganhos dos controladores ressonantes . . . . .	66
Tabela 2:	<i>UPS</i> - ganhos dos controladores ressonantes - forma diagonal . . . . .	68
Tabela 3:	Controlador ressonante - influência de $\kappa$ nos valores $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	75
Tabela 4:	<i>UPS</i> - ganhos dos controladores repetitivos . . . . .	91
Tabela 5:	Controlador repetitivo - influência de $\kappa$ e $\omega_c$ nos valores de $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	96
Tabela 6:	Controlador repetitivo - influência de $\omega_{c_i}$ nos valores de $\alpha$ , $\beta$ e erro de seguimento . . . . .	96

## LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ARE	<i>Algebraic Riccati Equation</i>
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequalities</i>
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente contínua
CTFS	<i>Continuous-Time Fourier Series</i>
DTFS	<i>Discrete-Time Fourier Series</i>
IMC	<i>Internal Model Control</i>
LASCAR	Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
MIMO	<i>Multi-Input, Multi-Output</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PMI	Princípio do Modelo Interno
PRC	<i>Prototype Repetitive Controller</i>
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
THD	<i>Total Harmonic Distortion</i>
SISO	<i>Single-Input, Single-Output</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UPS	<i>Uninterruptible Power Supply</i>
VSC	<i>Variable Structure Controller</i>
ZPRC	<i>Zero-Phase Repetitive Controller</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$v_{(i)}$	$i$ -ésimo componente do vetor $v$
$A_{(i)}$	$i$ -ésima linha da matriz $A$
$A_{(i,j)}$	elemento localizado na $i$ -ésima linha, $j$ -ésima coluna da matriz $A$
$A^T$	transposta da matriz $A$
$I_n$	matriz identidade de ordem $n$
$0_{n \times m}$	matriz de dimensão $n \times m$ com todos elementos nulos
$\text{rank}(A)$	posto da matriz $A$
$\text{traço}(A)$	traço da matriz $A$
$\text{diag}\{x\}$	matriz diagonal formada pelos elementos do vetor $x$
$\text{diag}\{A, B\}$	matriz bloco-diagonal formada pelas matrizes $A$ e $B$ , isto é, $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$
$\text{conv}\{A_j\}$	envelope convexo com vértices $A_j$
$\text{Sim}\{AW\}$	bloco simétrico $AW + W^T A^T$
$A > (\geq) 0$	matriz (semi)definida positiva
$\lambda(A)$	conjunto do autovalores da matriz $A$
$\lambda_{\max}(A)$	máximo autovalor da matriz $A$
$\lambda_{\min}(A)$	mínimo autovalor da matriz $A$
$\text{sat}_{w_0}(w)$	saturação com limites simétricos em $\pm w_0$ aplicada ao vetor $w$
$\Psi_{w_0}(w)$	função vetorial equivalente a $w - \text{sat}_{w_0}(w)$
$\Omega(P, \vartheta)$	elipsoide definido por $x^T P x \leq \vartheta$
$\partial\Omega$	fronteira do conjunto $\Omega$
$\text{int}\Omega$	interior do conjunto $\Omega$
$\ x(t)\ _2$	norma-2 do sinal $x(t)$ : $\ x(t)\ _2 = \left( \int_0^\infty x(t)^T x(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$
$\ x(t)\ _\infty$	norma-infinito do sinal $x(t)$ : $\ x(t)\ _\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}}  x(t) $

$\ \mathcal{Y}\ _{i,2}$	norma induzida ou ganho $\mathcal{L}_2$ do operador $\mathcal{Y}$ :
	$\ \mathcal{Y}\ _{i,2} = \sup_{x \in \mathcal{L}_2} \frac{\ \mathcal{Y}(x(t))\ _2}{\ x(t)\ _2}$
$\mathcal{L}_2$	espaço de sinais com norma-2 finita, isto é, $\ x(t)\ _2 < \infty$
$\mathcal{L}_\infty$	espaço de sinais com norma-infinito finita, isto é, $\ x(t)\ _\infty < \infty$
$\ \phi\ _c$	norma contínua do sinal $\phi(t)$ , definida como $\ \phi\ _c = \max_{a \leq \theta \leq b} \ \phi(\theta)\ $
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano de ordem $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathcal{C}$	conjunto das funções contínuas, mapeadas do intervalo $[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^n$
*	utilizado em matrizes simétricas para representar o respectivo elemento transposto da matriz
$\otimes$	produto de Kronecker
$\langle N \rangle$	denota o conjunto de $N \in \mathbb{N}$ elementos consecutivos.
$dist(x, \mathcal{X})$	denota a menor distância entre o sinal $x(t)$ e o interior do conjunto $\mathcal{X}$ , isto é, $dist(x, \mathcal{X}) = \inf_{x_i \in \mathcal{X}} \ x - x_i\ $ .
$G(s) \sim (A, B, C, D)$	função de transferência correspondente a um sistema no espaço de estados representado pelas matrizes $(A, B, C, D)$ , ou seja, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ .



# 1 INTRODUÇÃO

Muitos sinais encontrados na Engenharia são periódicos ou podem ser aproximados por um sinal periódico quando analisados em um intervalo de tempo adequado. Isto se verifica, por exemplo, para uma variedade de sinais associados a máquinas elétricas, manipuladores robóticos, controle ativo de vibração, sistemas de potência, unidades de disco ótico ou máquinas realizando tarefas repetitivas (PIPELEERS; DEMEULENAERE; SWEVER, 2009). Com o aumento das exigências de produtividade e qualidade, o controle preciso destes sistemas tornou-se um desafio significativo, tanto de forma teórica quanto prática. Nestes casos, pode-se destacar o problema de seguimento de referências e/ou a rejeição de perturbações periódicas.

De uma grande variedade de opções encontradas na literatura, uma das abordagens mais utilizadas para a garantia de seguimento robusto de referências são os controladores baseados no Princípio do Modelo Interno (PMI), onde o controlador (ou a planta a ser controlada) deve apresentar os modos instáveis ou marginalmente estáveis dos sinais de referência e/ou perturbação (CHEN, 1970). É assim, baseado no PMI, que surge a necessidade da introdução de uma ação integral para a garantia de seguimento de referências constantes. Considerando diretamente o seguimento de referências periódicas, os sinais de interesse podem ser descritos como uma soma de senoides através da sua representação por Série de Fourier. Assim, o PMI se verifica com a introdução de um controlador contendo os modos correspondentes às harmônicas do sinal desejado. Devido ao fato do controlador resultante inserir picos de ressonância nas frequências destas senoides, estes controladores são conhecidos na literatura relacionada a fontes ininterruptas de energia (do inglês, *Uninterruptible Power Supply - UPS*) como controladores ressonantes. Outra abordagem muito utilizada quando os sinais de interesse são periódicos são os chamados controladores repetitivos. Esta abordagem baseia-se no fato de que qualquer sinal periódico pode ser gerado por um sistema contendo um elemento de atraso correspondente ao período  $\tau$  da referência em um laço de realimentação positiva. Neste sentido, se o sistema é estável em malha fechada, então o seguimento perfeito (ou quase perfeito) de qualquer referência periódica com período  $\tau$  é garantido. O elemento de atraso faz o papel de um modelo interno de ordem infinita, introduzindo picos de ressonância em todas as frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental  $\omega_0 = 2\pi/\tau$ . Apesar da aparente simplicidade, a introdução de um elemento de atraso na malha de controle faz com que a síntese do controlador não seja uma tarefa trivial, uma vez que devem ser considerados os efeitos do elemento de atraso na estabilidade do sistema em malha fechada. A garantia da estabilidade de sistemas com atraso é outro tópico bastante explorado na literatura de sistemas de controle. Os efeitos do atraso no sistema como um todo podem variar de uma pequena perda de desempenho até a instabilidade. De uma maneira geral, a garantia da estabilidade de sistemas com atraso pode ser feita no espaço das funções, através

dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii, ou no espaço euclidiano, através das funções de Lyapunov e da abordagem de Razumikhin. Além disso, as condições podem ser obtidas tanto de forma dependente quanto independente do valor do atraso (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003).

É importante considerar também que os atuadores utilizados na indústria apresentam uma série de limitações físicas ou de segurança nas amplitudes dos sinais que estes atuadores podem entregar ao sistema. Quando estes limites são violados, o sistema passa a comportar-se como se não existisse um controlador, o que, na maioria dos casos, impossibilita o cumprimento dos requisitos de desempenho estabelecidos durante a etapa de projeto. Os efeitos mais comuns da violação destes limites são a perda de desempenho, o surgimento de trajetórias indesejadas como ciclos-limite e, no pior caso, a instabilidade do sistema. Assim nasce a motivação e o interesse pelo estudo de sistemas sujeitos a saturação, no sentido de considerá-las explicitamente no projeto do controlador, a fim de evitar estes comportamentos indesejáveis, ou, pelo menos, de poder avaliar os seus efeitos sobre a estabilidade, o desempenho e a robustez do sistema em malha-fechada. A maneira mais usual de reduzir os efeitos da saturação são os chamados compensadores *anti-windup*, onde os estados do controlador previamente projetado sem considerar os efeitos da saturação são corrigidos com a diferença entre o sinal de controle calculado e o sinal de controle efetivamente entregue à planta. Os primeiros trabalhos a tratar deste problema foram (LOZIER, 1956) e (FERTIK; ROSS, 1967), os quais contribuíram para a abertura de um novo campo de pesquisa para vários autores nas décadas seguintes.

Por outro lado, a presença da saturação do sinal de controle faz com que a estabilidade entrada-estado do sistema dependa da amplitude dos sinais de referência/perturbação considerados, restringindo assim a gama de sinais para os quais o seguimento/rejeição será garantido. Da mesma forma, se o sistema em malha aberta não for estável, então existe um conjunto restrito de condições iniciais para os quais é possível garantir a estabilidade do sistema saturado. Assim, é de extrema importância caracterizar os conjuntos de estados iniciais e de referências e perturbações admissíveis.

É no contexto dos problemas discutidos acima que este trabalho se insere, propondo uma metodologia sistemática de síntese de controladores para o seguimento/rejeição de sinais periódicos em sistemas com atuadores saturantes. Tendo em vista este objetivo geral, pode-se destacar os seguinte objetivos específicos:

- Obtenção de condições na forma de inequações matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities - LMIs*) para a síntese simultânea de um controlador estabilizante e do laço de *anti-windup*, a partir de uma abordagem no espaço de estados para a descrição do sistema;
- Caracterização dos domínios de estabilidade do sistema e dos sinais de referência/perturbação admissíveis.

A garantia de seguimento/rejeição dos sinais periódicos é feita considerando duas diferentes implementações do PMI: controladores ressonantes e controladores repetitivos, tanto para sistemas de tempo contínuo como para sistemas de tempo discreto.

Este trabalho será apresentado da seguinte forma: no Capítulo 2, alguns conceitos básicos serão apresentados em conjunto com uma revisão bibliográfica sobre os temas mais relevantes abordados ao longo do trabalho. Neste capítulo, pode-se destacar os conceitos de estabilidade de sistemas dinâmicos com e sem atraso temporal, um estudo sobre as formas de se levar em conta os efeitos da saturação no sistema e, principalmente, a apresentação dos controladores ressonantes e repetitivos.

O Capítulo 3 trata do problema de seguimento e rejeição de sinais periódicos considerando a introdução dos controladores ressonantes na malha de controle. Um especial destaque será dado para a formalização problema de interesse, o qual será utilizado em toda sequência do trabalho. Exemplos numéricos serão utilizados para ilustrar a influência do laço de *anti-windup* no desempenho do sistema em malha fechada e demonstrar a possibilidade de aplicação da metodologia em uma planta real. Já no Capítulo 4, o foco são os controladores repetitivos, onde condições *LMI* independentes do valor do atraso são obtidas através de funções de Lyapunov quadráticas e da abordagem de Razumikhin. As duas abordagens consideradas tratam de sistemas de tempo contínuo.

Os Capítulos 5 e 6 apresentam abordagens relativas aos sistemas de tempo discreto. No Capítulo 5 é feita uma extensão das metodologias propostas tanto para o controlador ressonante quanto para o controlador repetitivo. Por sua vez, no Capítulo 6 é explorada uma configuração de *anti-windup* alternativa, baseada na técnica conhecida como condicionamento linear. Neste caso, será proposto um problema de análise para a determinação dos conjuntos de condições iniciais e/ou referências admissíveis. O exemplo de um disco ótico será utilizado para demonstrar a melhoria no desempenho decorrente da técnica de condicionamento linear. O presente trabalho será finalizado com um capítulo de conclusões e perspectivas e um apêndice com a extensão dos resultados dos capítulos anteriores para sistemas com incertezas paramétricas limitadas em norma.

## 2 PRELIMINARES E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada uma breve revisão bibliográfica e uma série de conceitos básicos relativos aos assuntos que serão abordados nos desenvolvimentos apresentados na sequência deste trabalho. Os principais tópicos abordados são: a estabilidade de sistemas dinâmicos, com destaque para as técnicas baseadas na Teoria de Lyapunov e em LMIs; os sistemas sujeitos à saturação, onde é apresentada a abordagem por não-linearidade de setor e são discutidas as principais técnicas de compensação *anti-windup*; e o problema de seguimento de referências e rejeição à perturbações, a partir de duas técnicas baseadas no PMI para sistemas de tempo contínuo e tempo discreto.

### 2.1 Estabilidade de sistemas dinâmicos

No projeto de sistemas de controle realimentados, diferentes tipos de especificações podem ser utilizadas como, por exemplo, tempo de acomodação, máximo sobressinal (*overshoot*) e erro de regime permanente. Por outro lado, a estabilidade é o requisito fundamental de todo sistema de controle, uma vez que se o sistema em malha fechada for instável as demais especificações sobre a resposta transitória e sobre o comportamento do sistema em regime permanente obviamente não serão atingidas. A seguir serão mostradas algumas metodologias para a garantia da estabilidade de sistemas dinâmicos com e sem atraso, com um enfoque especial para as abordagens baseadas na Teoria de Lyapunov e nas técnicas baseadas em *LMIs*.

#### 2.1.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov

O conceito de estabilidade de um sistema (não-linear) está normalmente relacionado a um ponto de equilíbrio. Um dos métodos mais usuais para a caracterização da estabilidade de um ponto de equilíbrio é estudá-la no sentido de Lyapunov. O princípio básico deste método é que o ponto de equilíbrio será considerado estável se todas as trajetórias iniciadas em uma vizinhança deste ponto se manterão próximas ou tenderão assintoticamente para este ponto. Alguns autores (SASTRY, 1999) consideram este método como uma generalização do conceito de medir a “dissipação de energia” do sistema. Com o objetivo de formalizar esta análise, pode-se enunciar o seguinte teorema relativo ao método direto de Lyapunov.

**Teorema 1** (KHALIL, 1992) *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio para o sistema  $\dot{x} = f(x)$  onde  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow D$  e  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio contendo  $x = 0$ . Seja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma*

função continuamente diferenciável tal que

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ e } V(x(t)) > 0 \text{ em } D - \{0\} \\ \dot{V}(x(t)) &\leq 0 \text{ em } D. \end{aligned}$$

Se isto se verifica, então  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \text{ em } D - \{0\},$$

então  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Associado à análise de estabilidade assintótica pelo método direto de Lyapunov, um problema adicional pode ser determinar o quão afastado do ponto de equilíbrio pode-se iniciar uma trajetória de forma que a mesma convirja assintoticamente a este ponto. Este problema dá origem à definição de região de atração de um dado ponto de equilíbrio, formalmente definida como:

**Definição 2.1.1** (KHALIL, 1992) *A região de atração de um dado ponto de equilíbrio  $x_e$  é o conjunto de todos os pontos para os quais as trajetórias do sistema iniciadas nestes pontos convergem assintoticamente para o equilíbrio. Matematicamente, a região de atração é definida como segue:*

$$\mathcal{R}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x, t_0) \rightarrow x_e \text{ se } t \rightarrow \infty\}$$

onde  $\phi(x, t)$  é uma trajetória do sistema iniciada em  $x$  no tempo  $t = t_0$ , isto é,  $x(t_0) = x$ .

A determinação exata da região de atração de um ponto de equilíbrio não é uma tarefa trivial, podendo até mesmo ser impossível. Nestes casos, faz-se necessário o uso de estimativas que caracterizam da melhor forma possível esta região. Uma das estimativas mais comuns, apesar de conservadora, é através de domínios de Lyapunov. Um domínio de Lyapunov é definido com uma curva de nível da função de Lyapunov, ou seja,

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}.$$

Se uma função de Lyapunov garante estabilidade assintótica em um domínio  $D$  e ainda se  $\Omega_c \subset D$ , então toda trajetória iniciada em  $\Omega_c$  permanece confinada a este conjunto e ainda tende ao ponto de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim,  $\Omega_c$  é uma estimativa da região de atração do ponto de equilíbrio. Outra maneira de estimar a região de atração é determinando as trajetórias que definem o seu limite. Estas estimativas são obtidas através da utilização de simulações numéricas, estando fora do escopo deste trabalho.

Considerando um caso mais geral, pode-se determinar regiões onde todas as trajetórias do sistema inicializadas dentro de um dado conjunto permanecem confinadas em seu interior. Este tipo de conjunto é conhecido como conjunto invariante, conforme definido a seguir.

**Definição 2.1.2** (KHALIL, 1992) *Um conjunto  $M$  é dito invariante em relação ao sistema  $\dot{x} = f(x)$  se*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*O conjunto  $M$  será dito positivamente invariante se*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0.$$

*Finalmente, o conjunto  $M$  será contrativamente invariante se*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = x_e$$

onde  $x_e$  é um dado ponto de equilíbrio no interior de  $M$ .

No que se refere a sistemas com saturação, os conjuntos invariantes podem ser usados como estimativas da região de atração de um dado ponto de equilíbrio. Em (BLANCHINI, 1999), é feita uma extensa análise sobre conjuntos invariantes e suas aplicações a sistemas de controle.

### 2.1.2 Sistemas sujeitos a atrasos nos estados

A análise de sistemas com atraso vem sendo objeto de grande interesse nos últimos anos, já que esta é uma característica inerente a muitos processos reais. Normalmente, a presença de atrasos no modelo do sistema é conhecida por causar uma série de efeitos indesejados, sendo os mais corriqueiros a perda de desempenho e a instabilização do sistema. Porém, em condições especiais, o atraso pode ser introduzido no sistema em malha fechada de forma proposital, visando o seguimento de referências periódicas (ver Seção 2.3.1.3) ou até mesmo a estabilização do sistema (MICHIELS; NICULESCU; MOREAU, 2004). Em ambos os casos, o estudo do comportamento e da estabilidade do sistema nestas condições torna-se essencial. Para isto, pode-se aplicar o método direto de Lyapunov tanto no espaço das funções, através dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii, quanto no espaço euclidiano, através da abordagem de Razumikhin (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003).

Considere a seguinte equação diferencial funcional:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

com  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e com  $x_t(\cdot)$  sendo o segmento de  $x(\cdot)$  restrito ao intervalo  $[t - \tau, t]$ , onde  $\tau$  é o atraso máximo encontrado no sistema. A relação (1) indica que a derivada da variável de estado  $x$  no instante  $t$  depende de  $t$  e de  $x(\nu)$  para  $t - \tau \leq \nu \leq t$ . Desta forma, para determinar a evolução futura dos estados é necessário especificar os valores iniciais de  $x(t)$  em um intervalo finito de tamanho  $\tau$ , ou seja, de  $t_0 - \tau$  até  $t_0$ . Neste caso, a condição inicial deixa de ser um ponto no espaço  $\mathbb{R}^n$  para ser uma função neste mesmo espaço. Geralmente, a condição inicial  $x_{t_0}$  é representada por uma função contínua  $\phi(\theta)$  definida no intervalo  $[-\tau, 0]$  (GOMES DA SILVA JR.; LEITE, 2007), ou seja,

$$x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0. \quad (2)$$

As condições de análise de estabilidade e/ou síntese de controladores para sistemas com atraso podem ser classificadas como condições dependentes ou independentes do valor do atraso. No caso de condições independentes do atraso, a estabilidade do sistema é garantida para qualquer valor de atraso, normalmente resultando em relações mais simples. Por outro lado, do ponto de vista de estimativa da região de atração do sistema, estas condições tendem a apresentar resultados conservadores. Já condições dependentes do atraso levam diretamente em conta o valor  $\tau$ , onde o resultado obtido é válido apenas em determinadas condições (normalmente para todos atrasos no intervalo  $[0, \tau]$ ). Resultados provenientes destas condições tendem a ser menos conservadores, principalmente quando o atraso é pequeno (XU; LAM, 2008), (FRIDMAN; SHAKED, 2003a). A seguir serão detalhadas apenas as condições independentes do atraso, as quais serão utilizadas na sequência deste trabalho.

#### 2.1.2.1 Abordagem de Lyapunov-Krasovskii

A análise de estabilidade para sistemas sem atraso requer a construção de uma função candidata de Lyapunov  $V(x(t))$ , a qual pode ser encarada como uma medida do desvio do

estado  $x(t)$  em relação a solução trivial (normalmente considerada como a origem). Neste caso, é necessário o conhecimento de  $x(t)$  a fim de caracterizar a evolução dos estados do sistema. Do mesmo modo, para sistemas com atraso é necessário o conhecimento de  $x(t)$  no intervalo  $[t - \tau, t]$  (dado por  $x_t$ ) a fim de caracterizar a evolução dos estados do sistema. Assim, é natural esperar que a função de Lyapunov correspondente também dependa de  $x_t$  através do funcional  $V(t, x_t)$ . Desta forma, este funcional estaria relacionado ao desvio de  $x_t$  em relação a solução trivial. Este tipo de funcional é conhecido como funcional de Lyapunov-Krasovskii. Mais especificamente, pode-se definir  $V(t, \phi)$ , onde  $\phi$  é uma função que descreve o comportamento de  $x_t$  no intervalo  $[-\tau, 0]$ . Uma caracterização mais precisa desta análise é apresentada no teorema a seguir. Por tratar-se de uma abordagem consolidada na literatura de sistemas com atraso, a prova deste teorema será omitida, podendo ser encontrada, por exemplo, em (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003) e referências.

**Teorema 2 (Teorema de Lyapunov-Krasovskii)** *Suponha que  $V_1, V_2, V_3$  são funções contínuas não-decrescentes tais que  $V_1(r)$  e  $V_2(r)$  são positivas para  $r > 0$  e ainda  $V_1(0) = V_2(0) = 0$ . Se existe um funcional continuamente diferenciável  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{aligned} V_1(\|\phi\|) &\leq V(t, \phi) \leq V_2(\|\phi\|) \\ \dot{V}(t, \phi) &\leq -V_3(\|\phi\|) \end{aligned}$$

*então a solução trivial é estável. Se  $V_3(r)$  é positiva para  $r > 0$  então a solução trivial é assintoticamente estável.*

A título de exemplo da aplicação do Teorema 2, considere o sistema linear no espaço de estados com um único elemento de atraso dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau). \quad (3)$$

Então a garantia da estabilidade independente do atraso baseada em um funcional de Lyapunov-Krasovskii é formalizada no teorema a seguir.

**Teorema 3** *A solução trivial associada ao sistema (3) é assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas  $P > 0$  e  $S > 0$  tais que*

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} PA + A^T P + S & PA_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

*Prova.* Considerando o funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t, x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-\tau}^t x(\theta)^T S x(\theta) d\theta$$

e calculando a sua derivada temporal ao longo das trajetórias do sistema, segue que

$$\dot{V}(t, x_t) = x(t)^T (PA + A^T P)x(t) + 2x(t)^T PA_d x(t - \tau) - x(t - \tau)^T S x(t - \tau) + x(t)^T S x(t).$$

Escrevendo agora  $\dot{V}(t, x_t) = \vartheta^T \mathcal{M} \vartheta$  com  $\vartheta = [x(t)^T \ x(t - \tau)^T]^T$  segue que, se a condição (4) é satisfeita, então tem-se  $\mathcal{M} < 0$ , o que implica em  $\dot{V}(t, x_t) < 0$ . A condição do Teorema 2 também é verificada uma vez que

$$\lambda_{\min}(P) \|\phi(0)\|^2 \leq V(t, \phi) \leq (\lambda_{\max}(P) + \tau \lambda_{\max}(S)) \|\phi\|^2$$

■

### 2.1.2.2 Abordagem de Razumikhin

A abordagem de Lyapunov-Krasovskii necessita a manipulação de funcionais, o que pode deixar a sua aplicação relativamente complicada, dependendo de quanto a complexidade destes funcionais aumenta. Em alguns casos, estas dificuldades podem ser contornadas através da abordagem de Razumikhin, que utiliza basicamente funções em vez de funcionais. A ideia principal desta abordagem é a utilização de uma estimativa do limitante de  $V(x(t))$  no intervalo  $[-\tau, 0]$  através da função

$$\bar{V}(x_t) = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} V(x(t + \theta)). \quad (5)$$

Se  $V(x(t)) < \bar{V}(x_t)$ , então  $\dot{V}(x(t)) > 0$  não faz com que  $\bar{V}(x_t)$  cresça. Na verdade, para garantir que  $\bar{V}(x_t)$  não seja crescente, é necessário apenas que  $V(x(t))$  não seja positiva quando  $V(x(t)) = \bar{V}(x_t)$ . A formulação precisa das ideias apresentadas é dada a seguir.

**Teorema 4 (Teorema de Razumikhin)** *Suponha que  $U_1, U_2, U_3$  são funções contínuas não-decrescentes tais que  $U_1(r)$  e  $U_2(r)$  são positivas para  $r > 0$ ,  $U_1(0) = U_2(0) = 0$  e ainda que  $U_2$  seja estritamente crescente. Se existe uma função continuamente diferenciável  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$U_1(\|x\|) \leq V(x(t)) \leq U_2(\|x\|), \text{ para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n$$

e ainda que a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias do sistema satisfaz

$$\dot{V}(x(t)) \leq -U_3(\|x(t)\|) \text{ se } V(x(t + \theta)) \leq V(x(t)) \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

então a solução trivial é estável. Se  $U_3(r)$  é positiva para  $r > 0$  e ainda se existe uma função positiva não-decrescente  $U_4(r)$  para  $r > 0$ , então a solução trivial é assintoticamente estável se a relação

$$\dot{V}(x(t)) \leq -U_3(\|x(t)\|) \text{ e } V(x(t + \theta)) \leq U_4(V(x(t)))$$

é verificada  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ .

Assim como no Teorema de Lyapunov-Krasovskii, a prova deste teorema é mostrada em (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). Considerando o caso com apenas um atraso definido em (3), pode-se enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 5** *A solução trivial associada ao sistema (3) é assintoticamente estável se existir a matriz simétrica positiva definida  $P > 0$  e o escalar  $\alpha$  tais que*

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} PA + A^T P + \alpha P & PA_d \\ A_d^T P & -\alpha P \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

*Prova.* Considere a função de Lyapunov quadrática  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ . Como a relação (6) implica em  $P > 0$ , pode-se concluir que para algum  $\epsilon$  suficientemente pequeno a relação  $V(x(t)) \geq \epsilon \|x\|^2$  é verificada. Calculando agora a derivada temporal de  $V$  ao longo das trajetórias de (3) segue que

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T (PA + A^T P)x(t) + 2x(t)^T PA_d x(t - \tau).$$



Se  $x_t$  satisfaz

$$V(x(t + \theta)) \leq pV(x(t)) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]$$

para algum  $p > 1$ , então segue que, para algum  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq x(t)^T(PA + A^T P)x(t) + 2x(t)^T PA_d x(t - \tau) \\ &\quad + \alpha[p x(t)^T P x(t) - x(t - \tau)^T P x(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Escrevendo  $\vartheta^T M \vartheta$  com  $\vartheta = [x(t)^T \quad x(t - \tau)^T]^T$ , segue que, se a condição (6) é satisfeita então existe um  $\delta = p - 1 > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$\begin{aligned} x(t)^T(PA + A^T P)x(t) + 2x(t)^T PA_d x(t - \tau) \\ + \alpha[x(t)^T P x(t) - x(t - \tau)^T P x(t - \tau)] < -2\delta\alpha x(t)^T P x(t). \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, tem-se

$$\begin{aligned} x(t)^T(PA + A^T P)x(t) + 2x(t)^T PA_d x(t - \tau) \\ + \alpha(1 + \delta)x(t)^T P x(t) - \alpha x(t - \tau)^T P x(t - \tau) < -\delta\alpha x(t)^T P x(t). \end{aligned}$$

Considerando  $p = 1 + \delta$ , então se  $\mathcal{M} < 0$  segue que  $\dot{V}(x(t)) < 0$  se  $V(x(t + \theta)) \leq pV(x(t))$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ . Ainda, a condição  $\dot{V}(x(t)) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  do Teorema 4 também é verificada para  $\epsilon = \delta\alpha$ . ■

## 2.2 Sistemas lineares com atuadores saturantes

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos importantes sobre sistemas sujeitos a saturação do sinal de controle e como os efeitos desta restrição podem ser incorporados na descrição do sistema. Além disto, uma breve discussão sobre os métodos de projeto de laços de *anti-windup* é apresentada, tanto para sistemas lineares onde o único elemento não-linear é a saturação quanto para sistemas sujeitos a atrasos nos estados.

### 2.2.1 Sistema de interesse

Considere o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_q q(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é a saída do sistema e  $q(t) \in \mathbb{R}^l$  é um vetor de sinais exógenos (normalmente referências e perturbações). As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_q$  e  $C$  são constantes e de dimensões compatíveis.

Considere agora que o controlador utilizado é uma realimentação estática dos estados do sistema na forma

$$u(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Se nenhuma restrição é aplicada ao sinal de controle, o sistema (8) apresenta um comportamento linear em malha-fechada dado por

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + B_q q(t).$$

Como este sistema é linear, pode-se caracterizar a estabilidade interna e externa do sistema baseado nos autovalores da matriz  $(A + BF)$ . Se o sistema é estabilizável e

controlável, então a matriz de ganho  $F$  pode ser escolhida de tal forma que os autovalores da matriz de  $(A + BF)$  sejam posicionados em qualquer lugar do semi-plano esquerdo do plano complexo.

Considere agora que o sinal de controle é limitado em sua amplitude, ou seja, cada componente do vetor  $u(t)$  está restrita entre um valor máximo e mínimo. Assim,  $u(t)$  deve pertencer ao conjunto poliedral definido por

$$\mathcal{U} \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m; -u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\} \quad (9)$$

com  $u_{0(i)} > 0$  para  $\forall i = 1, \dots, m$ . A lei de controle efetivamente aplicada ao sistema é representada por  $u(t) = \text{sat}_{u_0}(Fx(t))$ , onde cada componente de  $u(t)$  é dado por

$$u_{(i)}(t) = \begin{cases} -u_{0(i)} & \text{se } F_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \\ F_{(i)}x(t) & \text{se } -u_{0(i)} \leq F_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)} \\ u_{0(i)} & \text{se } F_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \end{cases}, i = 1, \dots, m \quad (10)$$

Assim, o sistema com restrição de controle pode ser escrito na forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\text{sat}_{u_0}(u(t)) + B_qq(t). \quad (11)$$

Observe que o sistema (11) não é modificado caso o sinal  $BFx(t)$  seja somado e subtraído em seu lado direito, de tal forma que

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t) + B\text{sat}_{u_0}(Fx(t)) - BFx(t) + B_qq(t). \quad (12)$$

Definindo agora a não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada como  $\Psi_{u_0}(u(t)) = u(t) - \text{sat}_{u_0}(u(t))$ , ou seja,

$$\Psi_{u_{0(i)}}(u_{(i)}(t)) = \begin{cases} u_{(i)}(t) - u_{0(i)} & \text{se } u_{(i)}(t) > u_{0(i)} \\ 0 & \text{se } -u_{0(i)} \leq u_{(i)}(t) \leq u_{0(i)} \\ u_{(i)}(t) + u_{0(i)} & \text{se } u_{(i)}(t) < -u_{0(i)} \end{cases}, i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

pode-se reescrever (12) na forma

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) - B\Psi_{u_0}(Fx(t)) + B_qq(t). \quad (14)$$

É através de (14) que será analisada a estabilidade do sistema saturado. Resultados de estabilidade baseados em não-linearidades do tipo zona-morta descentralizada serão apresentados na Seção 2.2.2.2.

Finalmente, pode-se definir a chamada região de operação linear ou apenas região linear do sistema (14), representada por

$$S(F, u_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_{0(i)} \leq F_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}. \quad (15)$$

Nesta região, o valor de  $F_{(i)}x(t)$  não viola os limites de controle  $-u_{0(i)}$  e  $u_{0(i)}$ , fazendo com que o sistema (11) apresenta um comportamento localmente linear. Em (TARBOURIECH et al., 2011) são apresentadas algumas propriedades importantes sobre a região linear:

- Sem suposições adicionais, não existe a garantia de que as trajetórias do sistema inicializadas em  $S(F, u_0)$  permanecem confinadas a esta região. Neste caso, estas trajetórias podem deixar  $S(F, u_0)$ , fazendo com que alguma das entradas de controle sature e que o comportamento do sistema deixe de ser linear;

- Esta região é simétrica se os limites de saturação forem simétricos;
- $S(F, u_0)$  é compacta se  $m = n$  e não-limitada em alguma direção caso  $m < n$ ;
- Se  $(A + BF)$  é Hurwitz, então sempre é possível calcular conjuntos invariantes contidos no interior da região linear.

Estas propriedades serão de fundamental importância para a formulação do problema de interesse a ser resolvido ao longo deste trabalho. Esta formulação será apresentada na Seção 3.2.

Um problema bastante comum na literatura de sistemas com saturação é o problema de tolerância a perturbações. Neste caso, um sinal exógeno pode originar trajetórias que convergem a outros pontos de equilíbrio, a ciclos-limites ou até mesmo a trajetórias divergentes (TARBOURIECH et al., 2011). Um sinal exógeno  $q(t)$  é dito admissível se toda trajetória do sistema iniciada em uma dada região admissível é limitada. Normalmente o conjunto de perturbações admissíveis é caracterizado em função de limitantes na amplitude do sinal  $q(t)$  ( $q(t) \in \mathcal{L}_\infty$ ) ou na sua energia ( $q(t) \in \mathcal{L}_2$ ). Este problema também é conhecido como problema de estabilidade entrada-estado (KHALIL, 1992). Denotando por  $\mathcal{X}$  o conjunto de condições iniciais admissíveis, por  $\mathcal{R}$  o conjunto para os quais as trajetórias do sistema ficam limitadas e por  $\mathcal{Q}$  o conjunto de perturbações admissíveis, então pode-se definir o seguinte problema de tolerância à perturbações:

**Problema 1** *Dados os conjuntos  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{X}$ , garantir que, para qualquer sinal  $q(t) \in \mathcal{Q}$  e condição inicial tal que  $x(0) \in \mathcal{X}$ , todas as trajetórias de (14) são limitadas, isto é, ficam confinadas no interior de  $\mathcal{R}$ .*

De uma forma geral, as regiões associadas ao problema de tolerância a perturbações são ilustradas na Figura 1.

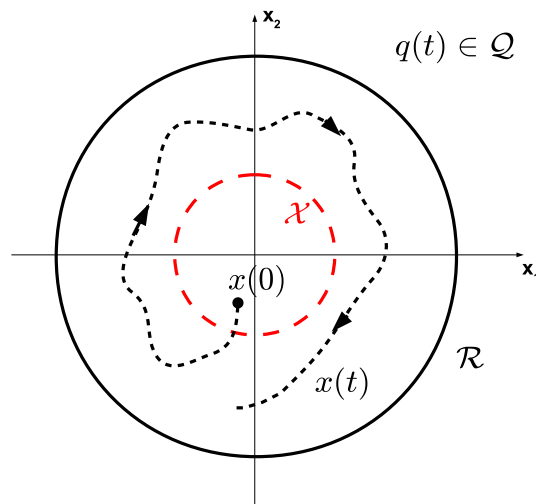


Figura 1: Regiões associadas ao problema de tolerância a perturbações

### 2.2.2 Modelos de saturação

A fim de considerar os efeitos da saturação na estabilidade do sistema em malha fechada, são encontradas diferentes abordagens na literatura. Se a saturação for o único

efeito não-linear presente no sistema considerado, a forma como esta é modelada está diretamente ligada ao conservadorismo das soluções obtidas. Além disto, a partir de uma modelagem adequada, é possível obter condições de estabilidade diretamente na forma de *LMIs*, evitando assim o uso de procedimentos iterativos. As modelagens mais usuais são: por não-linearidade de setor (HINDI; BOYD, 1998); politópica (MOLCHANOV; PYATNITSKIY, 1989); por regiões de saturação (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 1999) e por incerteza paramétrica limitada em norma (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2000). Uma visão geral sobre algumas destas modelagens e sua aplicação na determinação da estabilidade de sistemas pode ser encontrada em (TARBOURIECH et al., 2011).

A modelagem baseada em não-linearidades de setor será amplamente utilizada nos capítulos seguintes, uma vez que esta permite a formulação do problema de *anti-windup* diretamente na forma de *LMIs*, o que não era possível com as outras abordagens (ver Seção 2.2.3 que trata diretamente do problema de *anti-windup*). Além disso, esta formulação resulta em um número menor de *LMIs* em relação à abordagem politópica, onde é necessário testar a estabilidade do sistema para  $2^m$  vértices da inclusão politópica que representa o sistema em malha fechada. A condição de setor modificada e sua relação com a condição de setor clássica serão apresentadas a seguir.

### 2.2.2.1 Condição de setor clássica

Uma função  $\varphi : [0; \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  não-linear, sem memória, descentralizada, contínua por partes e localmente Lipschitz é dita uma não-linearidade de setor se ela satisfaz as condições definidas a seguir.

**Definição 2.2.1** (KHALIL, 1992) *Sejam  $K_1$  e  $K_2$  duas matrizes diagonais tais que  $K = K_2 - K_1$  seja positiva definida. Então  $\varphi(t, \alpha)$  pertence ao setor  $(K_1, K_2)$ ,  $\forall \alpha \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ , se*

$$[\varphi(t, \alpha) - K_1\alpha(t)]^T [\varphi(t, \alpha) - K_2\alpha(t)] \leq 0, \forall t \geq 0 \quad (16)$$

é verificada, onde  $\Theta$  é definido como a região de validade da condição de setor. Se  $\Theta$  está estritamente contido no  $\mathbb{R}^m$ , então a condição de setor (16) é satisfeita localmente. Se  $\Theta$  corresponder a todo espaço  $\mathbb{R}^m$ , então a condição de setor é satisfeita globalmente.

Por exemplo, para um sistema *SISO* (do inglês *Single-Input, Single-Output - SISO*) com um elemento não-linear do tipo zona-morta descentralizada definida em (13), segue que  $\alpha = Fx(t)$  e  $\varphi(t, \alpha) = \Psi_{u_0}(Fx(t))$ . Pode-se observar a partir da Figura 2 que a condição de setor (16) é verificada globalmente se  $K_1 = 0$  e  $K_2 = 1$  (setor  $(0, 1)$ ). Neste caso,  $\Theta$  corresponde a todo  $\mathbb{R}^n$ . Por outro lado, se  $K_1 = 0$  e  $K_2 = b$ ,  $b < 1$ , então (16) é verificada apenas localmente, onde o conjunto  $\Theta$  pode ser definido como  $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n; |Fx(t)| \leq a\}$ .

Para o caso de sistemas *MIMO* (do inglês, *Multi-Input, Multi-Output - MIMO*), pode-se definir o conjunto

$$S(F, u_0^\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n; |F_{(i)}x| \leq u_{0(i)}^\lambda, i = 1, \dots, m\} \quad (17)$$

onde

$$u_{0(i)}^\lambda = \frac{u_{0(i)}}{1 - \lambda_{(i)}}, \quad 0 \leq \lambda_{(i)} < 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Relativo a este conjunto, pode-se destacar as seguintes propriedades:

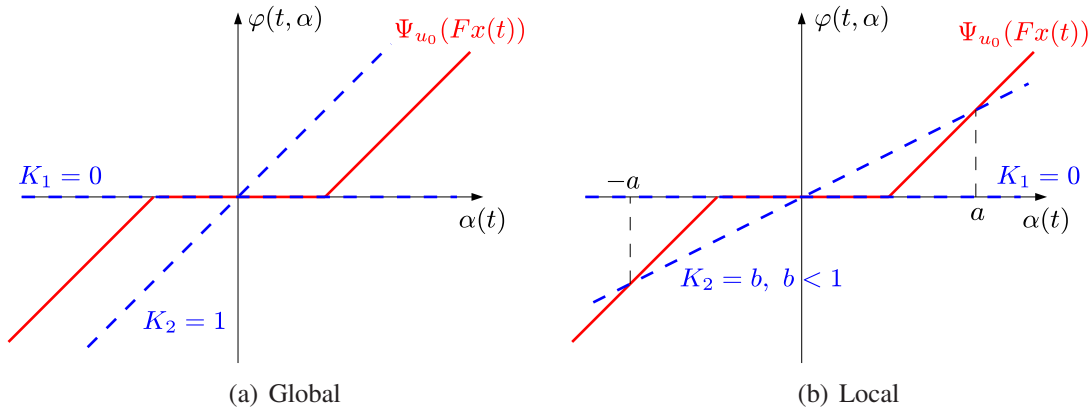


Figura 2: Condição de Setor clássica - não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada.

- Se  $\lambda_{(i)} = 0, \forall i = 1, \dots, m$ , então o conjunto  $S(F, u_0^\lambda)$  corresponde a região de operação linear do sistema definida em (15), isto é,  $S(F, u_0^\lambda) = S(F, u_0)$ ;
- Se  $\lambda_{(i)} \rightarrow 1, \forall i = 1, \dots, m$ , então o conjunto  $S(F, u_0^\lambda)$  aumenta de tamanho de forma a abranger todo o espaço  $\mathbb{R}^n$ .

Utilizando o conjunto  $S(F, u_0^\lambda)$  como região de validade  $\Theta$  da não-linearidade zona-morta, se  $x(t) \in S(F, u_0^\lambda)$ , então (13) é uma não-linearidade de setor com  $K_1 = 0$  e  $K_2 = \Lambda$ . Neste caso,  $\Lambda$  é uma matriz diagonal onde  $\Lambda_{(i,i)} = \lambda_{(i)}$  e  $\alpha(t) = Fx(t)$ . Desta forma, a condição de setor (16) pode ser reescrita como (HINDI; BOYD, 1998), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; REGINATTO, 2002)

$$\Psi_{u_0}(Fx(t))^T [\Psi_{u_0}(Fx(t)) - \Lambda Fx(t)] \leq 0. \quad (18)$$

Caso  $\Lambda = I_m$ , então  $S(F, u_0^\lambda)$  abrange todo o espaço  $\mathbb{R}^n$ , o que implica que a condição de setor (18) é verificada globalmente.

#### 2.2.2.2 Condição de setor modificada

A condição de setor modificada pode ser vista como uma generalização da condição de setor clássica, aplicada exclusivamente para não-linearidades do tipo zona-morta (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005). A ideia principal é substituir o produto  $\Lambda F$  em (18) por uma matriz genérica  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , introduzindo assim um grau de liberdade adicional às condições resultantes. Assim como a condição de setor clássica é definida em função do conjunto de validade  $S(F, u_0^\lambda)$ , a região de validade da condição de setor modificada é definida como

$$S(F - G, u_0) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; |(F_{(i)} - G_{(i)})x| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}. \quad (19)$$

Baseado no conjunto  $S(F - G, u_0)$ , o seguinte lema pode ser enunciado relativo a condição de setor modificada:

**Lema 1** (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005) Se  $x(t) \in S(F - G, u_0)$ , então a relação

$$\Psi_{u_0}(Fx(t))^T T [\Psi_{u_0}(Fx(t)) - Gx(t)] \leq 0 \quad (20)$$

é verificada para toda matriz  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva.

A prova formal deste lema pode ser encontrada em (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005) ou (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA Jr., 2006). Como dito anteriormente, a condição de setor clássica é um caso particular da condição (20) onde  $G = \Lambda F$ . Relembrando que a condição de setor clássica é satisfeita de forma global se  $\Lambda = I_m$ , então segue que a condição de setor modificada é satisfeita globalmente se  $G = F$ .

**Observação 1** *Uma das grandes vantagens da condição de setor modificada em relação às abordagens anteriores é que esta permite a obtenção de condições diretamente na forma de LMIs para a síntese do laço de anti-windup, evitando assim a utilização de procedimentos iterativos. Isto não é possível com a utilização da condição de setor clássica (18). Maiores detalhes neste sentido são apresentados em (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005).*

### 2.2.3 Problema de anti-windup

A síntese de malhas de *anti-windup* é um dos tópicos mais explorados no que se refere ao estudo de sistemas com saturação. Um ótimo ponto de partida nesta área é o *survey* (TARBOURIECH; TURNER, 2009), onde os autores discutem as principais técnicas de *anti-windup* e apresentam perspectivas para trabalhos futuros.

Inicialmente, o problema de *windup* foi detectado em malhas de controle com ação integral, sendo depois expandido para qualquer diferença entre a saída e a entrada de um elemento não-linear na malha de controle (DOYLE; SMITH; ENNS, 1987). No caso da ação integral, quando o sinal de controle está saturado, o erro continuará a ser integrado, fazendo com que o valor da parcela integral do controlador torne-se elevado. Para que o sistema volte a operar na região linear, é necessário que o erro inverta o seu sinal e permaneça nesta condição até que o integrador descarregue esta carga excessiva acumulada. Em alguns casos, este tempo pode ser longo, o que prejudica o desempenho em malha fechada do sistema. Para minimizar os efeitos da saturação no desempenho do sistema em malha fechada normalmente são utilizados controladores conhecidos como compensadores *anti-windup*.

A síntese de malhas de *anti-windup* normalmente é realizada em duas etapas: primeiro, um controlador que não leve em conta os efeitos da saturação é projetado visando o atendimento de quaisquer requisitos de desempenho especificados para o sistema em malha fechada. Na segunda etapa, um novo compensador que irá atuar apenas quando ocorre a saturação é projetado a fim de minimizar, na medida do possível, a perda de desempenho do sistema quando o sinal de controle satura. Neste tipo de problema, o objetivo do laço *anti-windup* é a melhoria de desempenho ou a maximização dos domínios de estabilidade do sistema. Para alcançar estes objetivos, a compensação de *windup* pode ser feita tanto de maneira estática quanto dinâmica. Uma das possíveis topologias de controle contendo um laço de compensação de *windup* mais usual é apresentado na Figura 3, onde  $v(t) = sat_{u_0}(u(t))$ . Note que a diferença entre o sinal de controle calculado e o sinal de controle efetivamente entregue à planta é utilizada como uma entrada adicional no controlador, corrigindo os seus estados de forma a minimizar os efeitos da saturação no desempenho do sistema em malha fechada.

Visando recuperar o desempenho de controladores PID, pode-se citar as técnicas *ad hoc* como o *back calculation* de (FERTIK; ROSS, 1967), os “integradores inteligentes” de (KRIKELIS, 1980) e o *anti-reset windup* de (ASTROM; WITTENMARK, 1984). As primeiras tentativas de se analisar formalmente a estabilidade de laços de *anti-windup*

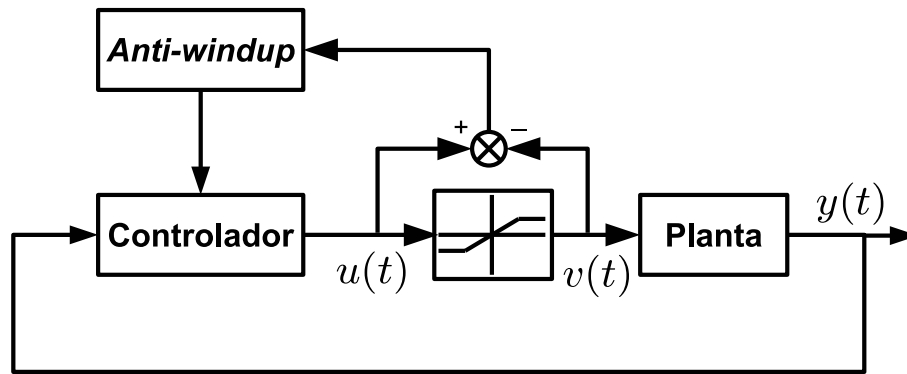


Figura 3: Topologia de controle com laço de *anti-windup*

foram os trabalhos (GLATTFELDER; SCHAUFELBERGER, 1983) e (KAPASOURIS; ATHANS; STEIN, 1988), onde foram aplicados os critérios do círculo e de Popov e em (CAMPO; MORARI, 1990), onde a análise de estabilidade é baseada no teorema dos pequenos ganhos escalonados (*scaled small gain theorem*). Outros métodos utilizados incluem análise por funções descritivas (ASTROM; RUNDQWIST, 1989), análise de ganhos incrementais (ROMANCHUK; SMITH, 1996) e a técnica de subespaços invariantes (KAPOOR; TEEL; DAOUTIDIS, 1998).

Em (WALGAMA; STERNBY, 1990), os autores observam que diversas técnicas de *anti-windup* apresentam características de observação de estados. Baseado em observações semelhantes, (KOTHARE et al., 1994) unifica as principais técnicas de *anti-windup* conhecidas, onde o laço de *anti-windup* pode ser determinado a partir de uma fatoração coprima do controlador nominal. Em (MIYAMOTO; VINNICOMBE, 1996), os autores propõem uma técnica que permite realizar o projeto baseado em desempenho  $H_\infty$ . Resultados menos conservadores foram obtidos pelo chamado *anti-windup*  $\mathcal{L}_2$ , onde uma lei de controle não-linear é utilizada a fim de compensar os efeitos da saturação.

Do ponto de vista deste trabalho, as técnicas mais relevantes são aquelas baseadas em *LMIs*. Em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; REGINATTO, 2002), os domínios de estabilidade do sistema são caracterizados explicitamente, tendo como objetivo a maximização da estimativa da região de atração da origem. A modelagem dos efeitos da saturação foi obtida através da condição de setor clássica. Em (CAO; LIN; HU, 2002), uma formulação baseada em *BMIs* relaxadas é proposta, usando agora como modelo de saturação condições politópicas menos conservadoras. A síntese de *anti-windup* estático baseada na condição de setor modificada é considerada em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005) para sistemas com e sem atraso nos estados. Em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2006) as mesmas ideias são estendidas para sistemas de tempo discreto, considerando a síntese de laços de *anti-windup* estáticos e dinâmicos. Neste tipo de modelagem, a estrutura da condição de setor clássica apresentada na Seção 2.2.2.1 é relaxada, adicionando graus de liberdade ao sistema e permitindo a obtenção de condições diretamente na forma de *LMIs*. Usando ideias similares, (LU; LIN, 2011) considera uma abordagem baseada em múltiplas funções de Lyapunov para a determinação dos domínios de atração do sistema.

Resultados relativos à síntese de compensadores dinâmicos de *anti-windup* através de técnicas *LMI* são apresentados em (GRIMM et al., 2003) e (HU; TEEL; ZACCARIAN, 2008) considerando o problema de tolerância a perturbações. Em (GRIMM et al., 2003)

este problema é abordado de forma global, ou seja, supondo sistemas assintoticamente estáveis. Já em (HU; TEEL; ZACCARIAN, 2008) o objetivo é a minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  do sinal de perturbação na saída controlada para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis. Em (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2006), a síntese de um compensador *anti-windup* dinâmico é considerada para o caso discreto e em (GOMES DA SILVA JR.; LIMON; ALAMO, 2005) a síntese simultânea do controlador e dos laços de *anti-windup* é proposta para sistemas com sinal de controle limitado em amplitude e taxa de variação.

Compensadores *anti-windup* dinâmicos também podem ser implementados através da técnica conhecida como condicionamento linear (*linear conditioning*), que consiste em alterar o comportamento do sistema através de uma função de transferência linear que atue durante e imediatamente após a ocorrência de saturação. Em (WESTON; POSTLETHWAITE, 2000) o comportamento das topologias de condicionamento linear foi interpretado em termos de uma única função de transferência  $M(s)$ . Esta função de transferência é representada como um dos elementos da fatoração coprima da planta, ou seja,  $G(s) = N(s)M^{-1}(s)$ . A interpretação da técnica de condicionamento linear como uma fatorização coprima da planta é o dual da teoria unificada de Kothare (KOTHARE et al., 1994), onde a síntese de laços de *anti-windup* é interpretada como uma fatoração coprima do controlador. Uma grande vantagem da metodologia proposta em (WESTON; POSTLETHWAITE, 2000) é que a síntese do compensador *anti-windup* pode ser feita independentemente do controlador considerado. Em (TURNER; POSTLETHWAITE, 2004) é proposta uma formulação LMI para a determinação de  $M(s)$  e em (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2007a) é abordado o problema de síntese robusta de laços de *anti-windup*. Em (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2007b) é apresentada uma visão geral sobre esta técnica, abordando o problema de síntese de controladores *anti-windup* de ordem plena e de ordem reduzida. Em (LI et al., 2011) o problema específico de rejeição à perturbações é tratado, onde a função de transferência da perturbação para laço não-linear é incorporada explicitamente no cálculo do *anti-windup*. Extensões para sistemas de tempo discreto foram apresentadas em (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003).

O problema de síntese de malhas de *anti-windup* em sistemas com atrasos é tratado em (PARK; CHOI; CHOO, 2000), (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) e (BENDER; GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2011). Em (PARK; CHOI; CHOO, 2000) é apresentado um método de sintonia de um laço de *anti-windup* dinâmico, considerando apenas atrasos nas entradas e saídas da planta. Já em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006), a condição de setor modificada é utilizada, permitindo a obtenção de condições tanto locais quanto globais para a garantia da estabilidade do sistema com atraso e saturações. Neste caso, um laço de *anti-windup* estático é introduzido com o objetivo de maximizar a região de condições iniciais admissíveis. As condições de estabilidade (dependentes e independentes do atraso) são obtidas através dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii e são formuladas diretamente através de LMIs. Em (BENDER; GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2011) é proposta uma metodologia de síntese de compensadores *anti-windup* dinâmicos tanto racionais quanto não-racionais, onde condições LMI foram obtidas através de funcionais de Lyapunov-Krasovskii. Nos desenvolvimentos dos capítulos seguintes a garantia de estabilidade será baseada na abordagem de Razumikhin. No que diz respeito a esta abordagem e sistemas com saturação pode-se destacar os trabalhos (CAO; LIN; HU, 2002) e (GHIGGI et al., 2008). Em (CAO; LIN; HU, 2002) são apre-



sentadas condições de estabilidade utilizando uma modelagem politópica menos conservadora. Estas condições são obtidas tanto através dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii quanto pela abordagem de Razumikhin. Já em (GHIGGI et al., 2008), a abordagem de Razumikhin é utilizada em conjunto com a condição de setor modificada apresentada na Seção 2.2.2.2 para a síntese de controladores e laços de *anti-windup* tanto estáticos quanto dinâmicos. Além disso, foram apresentados resultados para o problema de tolerância a perturbações e de projeto de controladores para sistemas com atrasos incertos e variantes no tempo.

## 2.3 Seguimento de referências e rejeição de perturbações periódicas

O projeto de controladores que garantam seguimento de referências e a rejeição de perturbações é de grande interesse prático, configurando-se como um dos principais tópicos de estudo para um série de autores ao longo dos anos. Nesta seção serão apresentadas as duas principais metodologias de seguimento/rejeição utilizadas ao longo deste trabalho, ambas baseadas no PMI e com um enfoque voltado para o seguimento/rejeição de sinais periódicos. Estas metodologias serão apresentadas tanto para sistemas de tempo contínuo como para sistemas de tempo discreto. Esta seção encerra-se com uma breve visão geral sobre as demais técnicas comumente utilizadas no problema de seguimento/rejeição.

### 2.3.1 Princípio do Modelo Interno

A ideia por trás do PMI é gerar no interior da malha de controle um sinal com as mesmas características dos sinais a serem seguidos e/ou rejeitados. Segundo (CHEN, 1970), o controlador (ou a planta a ser controlada) deve conter todos os modos instáveis (principalmente os criticamente ou marginalmente estáveis) dos sinais de referência e perturbação a fim de garantir o perfeito seguimento/rejeição. Assim, assumindo que o sinal de referência é definido por

$$r(s) = \frac{\phi_n(s)}{\phi(s)\phi_e(s)}, \quad (21)$$

onde  $\phi(s)$  é um polinômio cuja as raízes são os modos instáveis e marginalmente estáveis<sup>1</sup> de  $r(s)$ ,  $\phi_e(s)$  contém os modos estáveis<sup>2</sup> de  $r(s)$  e  $\phi_n(s)$  é um polinômio qualquer correspondente ao numerador de  $r(s)$ , então o seguimento será garantido se a função de transferência  $\Phi(s) = 1/\phi(s)$  for inserida no caminho direto do laço de controle.

Na topologia de controle apresentada na Figura 4 considera-se que o controlador  $C(s)$  tem como principal função garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, podendo também ser usado para garantir especificações de desempenho transitório. Supondo que o controlador e a planta podem ser escritos em função dos polinômios em  $s$  do seu numerador e denominador como

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \text{ e } G(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

segue que o sistema em malha fechada será estável se as raízes de  $\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  estiverem estritamente contidas no interior do semiplano esquerdo do plano

<sup>1</sup>Todas as raízes de  $\phi(s)$  pertencem ao semiplano direito fechado do plano complexo.

<sup>2</sup>Todas as raízes de  $\phi_e(s)$  pertencem ao semiplano esquerdo aberto do plano complexo.

complexo. Ainda baseado na Figura 4 é possível mostrar que o sinal de erro pode ser escrito em função do sinal de referência como

$$e(s) = \frac{1}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)}r(s)$$

ou, equivalentemente,

$$e(s) = \frac{\phi(s)D_c(s)D_p(s)}{\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}r(s).$$

Substituindo (21) na relação anterior segue o sinal de erro é representado por

$$e(s) = \frac{D_c(s)D_p(s)}{\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \frac{\phi_n(s)}{\phi_e(s)}.$$

Note que tanto as raízes de  $\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  quanto as raízes de  $\phi_e(s)$  estão contidas no semiplano esquerdo aberto do plano complexo, de tal forma que o Teorema do Valor Final (HAYKIN; VAN VEEN, 2002) pode ser aplicado. Assim, o erro em regime permanente do sistema em malha fechada é dado por

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{D_c(s)D_p(s)}{\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \frac{\phi_n(s)}{\phi_e(s)} = 0.$$

O mesmo raciocínio pode ser feito para o sinal de perturbação  $d(s)$ . Estes conceitos serão ilustrados nos exemplos a seguir.

**Exemplo 2.3.1** *Suponha que*

$$G(s) = \frac{0.1s + 1}{s + 1}$$

*e que se deseja seguir uma referência constante de amplitude unitária, isto é,  $r(s) = 1/s$ . A partir de  $r(s)$  pode-se escrever  $\phi(s) = s$  e  $\phi_e(s) = \phi_n(s) = 1$ . Para que esta referência seja seguida com erro nulo segue que  $\Phi(s) = 1/s$  e que o sistema em malha fechada seja estável. Neste caso, foi projetado o seguinte controlador através do método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR)*

$$C(s) = 2480 \frac{s + 60}{s + 40}.$$

*Assim, o sinal de erro é descrito por*

$$e(s) = \frac{(s + 1)(s + 40)}{(s + 10.23)(s + 69.53)(s + 209.2)}$$

*ou, aplicando o Teorema do Valor Final,*

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s + 1)(s + 40)}{(s + 10.23)(s + 69.53)(s + 209.2)} = 0.$$

**Exemplo 2.3.2** *Suponha que*

$$G(s) = \frac{0.1s + 1}{s + 1}$$

e que se deseja seguir uma referência que é uma combinação de um sinal senoidal e de uma exponencial decrescente tais que

$$r(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)(s + 5)}.$$

A partir de  $r(s)$  segue que  $\phi(s) = s^2 + 4$ ,  $\phi_e(s) = s + 5$  e  $\phi_n(s) = 1$ , ou seja, para que esta referência seja seguida com erro nulo em regime permanente é necessário que  $\Phi(s) = 1/(s^2 + 4)$  seja introduzido na malha de controle e que o sistema em malha fechada seja estável. Neste caso, isto é garantido para

$$C(s) = 12000 \frac{s^2 + 12s + 136}{(s + 11)(s + 20)},$$

o qual foi projetado através do LGR. Assim, o sinal de erro pode ser escrito como

$$e(s) = \frac{(s + 1)(s + 11)(s + 20)}{(s + 5)(s + 9.9)(s^2 + 13.75s + 173.5)(s^2 + 8.322s + 947.9)}$$

ou, aplicando o Teorema do Valor Final,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s + 1)(s + 11)(s + 20)}{(s + 5)(s + 9.9)(s^2 + 13.75s + 173.5)(s^2 + 8.322s + 947.9)} = 0.$$

Para o caso particular de um sinal senoidal de frequência  $\omega_0$ , o PMI pode ser analisado a partir da resposta em frequência considerando as funções de transferência da referência para a saída do sistema ( $T_r(s)$ ) e da perturbação para saída do sistema ( $T_d(s)$ ). Para a configuração de controle da Figura 4, tais funções de transferência são dadas por

$$T_r(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\Phi(s)C(s)G(s)}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{1}{\Phi(s)C(s)G(s)} + 1}$$

$$T_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G(s)}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)},$$

respectivamente. A introdução de  $\Phi(s)$  no caminho direto da malha de controle implica em  $|\Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)| = \infty$ . Logo, segue que

$$|T_r(j\omega_0)| = \left| \frac{\Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)} \right| = 1, \quad \angle T_r(j\omega_0) = 0^\circ,$$

$$|T_d(j\omega_0)| = \left| \frac{G(j\omega_0)}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)} \right| = 0, \quad \angle T_r(j\omega_0) = 0^\circ.$$

É fácil notar que se o módulo de  $T_r(j\omega_0)$  é unitário em uma dada frequência, a componente do sinal de referência nesta frequência é replicada na saída do sistema. Para o caso da perturbação, se o módulo de  $T_d(j\omega_0)$  é nulo, então a contribuição da componente de frequência  $\omega_0$  do sinal de perturbação na saída do sistema também é nula, garantido desta forma a rejeição deste sinal.

Uma das vantagens desta formulação é que a garantia de seguimento/rejeição é insensível às variações paramétricas da planta, garantindo assim seguimento com erro nulo

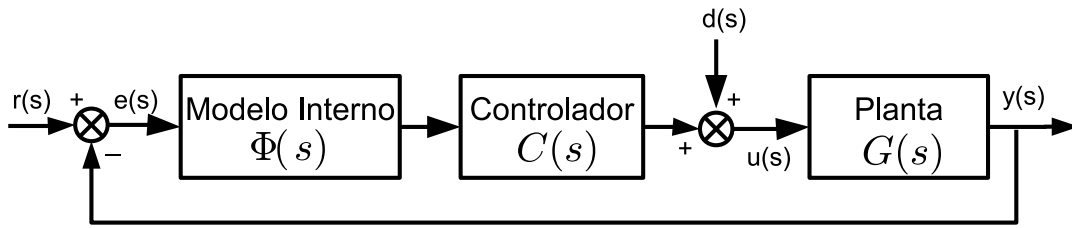


Figura 4: Sistema em malha fechada - modelo interno

e rejeição de perturbações de maneira robusta. Considerando agora a planta sujeita a incertezas aditivas da forma  $G_{\Delta}(s) = G(s) + \Delta G(s)$ , é fácil notar que

$$|T_r(j\omega_0)| = \left| \frac{\Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)(G(j\omega_0) + \Delta G(j\omega_0))}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)(G(j\omega_0) + \Delta G(j\omega_0))} \right| = 1,$$

$$|T_d(j\omega_0)| = \left| \frac{G(j\omega_0) + \Delta G(j\omega_0)}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)(G(j\omega_0) + \Delta G(j\omega_0))} \right| = 0.$$

continuam sendo verificadas se os polos de  $\Phi(s)$  não forem zeros do sistema incerto  $G(s) + \Delta G(s)$  e ainda se o sistema em malha fechada é robustamente estável. Este mesmo raciocínio pode ser estendido para sistemas de tempo discreto, através da utilização da Transformada Z.

Um das primeiras metodologias que utilizaram o PMI é a chamada abordagem servocompensador (*servocompensator approach*) de (FRANCIS; WONHAM, 1975) e (DAVISON, 1976), onde o controlador proposto consiste de um compensador que garante o seguimento/rejeição, adicionado a um controlador estabilizante. Posteriormente, este trabalho foi estendido para sistemas não-lineares em (BYRNES; ISIDORI, 2000) e referências. Atualmente, o princípio do modelo interno vem sendo utilizado associado a outras técnicas como controladores repetitivos (ver Seção 2.3.1.3), controladores por modos deslizantes (LU; HWANG, 2009), inversão estável do modelo da planta (WANG; CHU; TSAO, 2009) e controle adaptativo (JIANG; LIU, 2009). Na seções seguintes estes conceitos serão aplicados ao caso particular de sinais periódicos, onde a implementação clássica (CHEN, 1970) do PMI é o assunto das Seções 2.3.1.1 e 2.3.1.2. Nas Seções 2.3.1.3 e 2.3.1.4 serão apresentadas alternativas para a implementação do PMI, através controladores repetitivos.

### 2.3.1.1 Controladores ressonantes de tempo contínuo

O PMI pode ser utilizado para o seguimento/rejeição de um sinal periódico genérico, como uma onda triangular ou até mesmo uma onda quadrada, através da expansão deste sinal em Série de Fourier de Tempo Contínuo (do inglês, *Continuous-Time Fourier Series - CTFS*). Supondo que a frequência fundamental dos sinais de referência e perturbação são denotadas por  $\omega_{r(i)} = \frac{2\pi}{\tau_{r(i)}}$ ,  $i = 1 \dots, p$  e  $\omega_{d(j)} = \frac{2\pi}{\tau_{d(j)}}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , respectivamente, então estes sinais podem ser representados através da sua expansão em *CTFS* (HAYKIN; VAN VEEN, 2002) por

$$r_{(i)}(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} a_{r(i)k_1} e^{jk_1\omega_{r(i)}t}, \quad d_{(j)}(t) = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} a_{d(j)k_2} e^{jk_2\omega_{d(j)}t}. \quad (22)$$

A partir desta representação, pode-se definir os conjuntos  $\mathcal{K}_{0r(i)} \in \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{K}_{0d(j)} \in \mathbb{Z}$  dos índices  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $a_{r(i)k_1} \neq 0$  e  $a_{d(j)k_2} \neq 0$ , respectivamente. Considerando agora apenas as componentes não-nulas dos sinais  $r_{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  e  $d_{(j)}(t)$ ,  $j = 1, \dots, l$ , pode-se definir os polinômios

$$\begin{aligned}\phi_{r(i)}(s) &= \prod_{k_1 \in \mathcal{K}_{0r(i)}} (s + jk_1\omega_{r(i)}), \quad i = 1, \dots, p \\ \phi_{d(j)}(s) &= \prod_{k_2 \in \mathcal{K}_{0d(j)}} (s + jk_2\omega_{d(j)}), \quad j = 1, \dots, l\end{aligned}$$

de tal forma que o mínimo múltiplo comum entre  $\phi_{r(i)}(s)$ ,  $i = 1, \dots, p$  e  $\phi_{d(j)}(s)$ ,  $i = j, \dots, l$  seja representado por

$$\phi(s) = s^v + a_1s^{v-1} + a_2s^{v-2} + \dots + a_v$$

Seguindo a ideia apresentada no início da Seção 2.3.1, deve-se introduzir o compensador  $\Phi(s) = 1/\phi(s)$  na malha de controle a fim de implementar o PMI, desde que nenhum dos zeros do sistema seja uma raiz de  $\phi(s)$ . Este procedimento fica mais claro no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.3.3** *Considere que deseja-se seguir o sinal  $r(t) = 2\cos(2t) + 4\cos(5t)$  e rejeitar o sinal  $d(t) = 1.4\cos(2t) + 2\cos(8t)$ . Note que estes sinais são periódicos e podem ser representados através da CTFS como*

$$r(t) = 2e^{-j5t} + e^{-j2t} + e^{j2t} + 2e^{j5t} \quad e \quad d(t) = e^{-j8t} + 0.7e^{-j2t} + 0.7e^{j2t} + e^{j8t}.$$

Neste caso, para o sinal de referência segue que  $\omega_r = 1\text{rad/s}$  e  $\mathcal{K}_{0r} = \{-5, -2, 2, 5\}$  e para o sinal de perturbação tem-se  $\omega_d = 2\text{rad/s}$  e  $\mathcal{K}_{0d} = \{-4, -1, 1, 4\}$ .

A partir destes coeficientes é possível escrever os polinômios  $\phi_r(s)$  e  $\phi_d(s)$  na forma:

$$\begin{aligned}\phi_r(s) &= (s - j5)(s - j2)(s + j2)(s + j5) = (s^2 + 2^2)(s^2 + 5^2) \\ \phi_d(s) &= (s - j8)(s - j2)(s + j2)(s + j8) = (s^2 + 2^2)(s^2 + 8^2).\end{aligned}$$

Seguindo a formulação apresentada, o polinômio  $\phi(s)$  é composto pelo mínimo múltiplo comum dos elementos de  $\phi_r(s)$  e  $\phi_d(s)$ , ou seja, os elementos repetidos devem ser desconsiderados tais que

$$\phi(s) = (s^2 + 2^2)(s^2 + 5^2)(s^2 + 8^2) = s^6 + 93s^4 + 1956s^2 + 6400.$$

Desta forma, através do PMI, se o termo

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^6 + 93s^4 + 1956s^2 + 6400}$$

for inserido na malha de controle, então o perfeito seguimento de  $r(t)$  e a rejeição de  $d(t)$  são garantidos, desde que o sistema seja estável em malha fechada e a planta a ser controlada não possua zeros nas posições  $s = \pm j2, \pm j5, \pm j8$ . Na Figura 5 pode-se observar que de fato  $\Phi(s)$  apresenta picos de ganho infinito (normalmente chamados de picos de ressonância) nas frequências  $\omega_1 = 2\text{rad/s}$ ,  $\omega_2 = 5\text{rad/s}$  e  $\omega_3 = 8\text{rad/s}$ , associadas às raízes  $s_1 = -j2$ ,  $s_2 = j2$ ,  $s_3 = -j5$ ,  $s_4 = j5$ ,  $s_5 = -j8$ , e  $s_6 = j8$  de  $\Phi(s)$ .

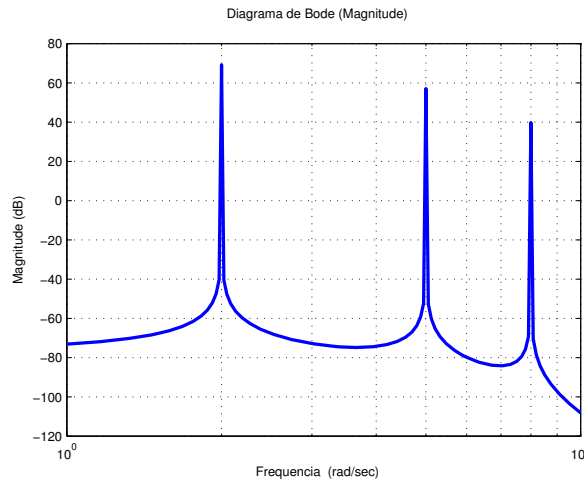


Figura 5: Diagrama de Bode (magnitude) de  $\Phi(s)$

Considerando uma abordagem no espaço de estados, a função de transferência  $\Phi(s)$  pode ser realizada através do controlador dinâmico (CHEN, 1970)

$$\dot{\xi}(t) = A_{\xi}\xi(t) + B_{\xi}e(t) \quad (23)$$

onde

$$A_{\xi} = \text{diag}\{\overbrace{\Gamma, \Gamma, \dots, \Gamma}^{p\text{-upla}}\} \quad B_{\xi} = \text{diag}\{\overbrace{\Lambda, \Lambda, \dots, \Lambda}^{p\text{-upla}}\}$$

com

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_v & -a_{v-1} & -a_{v-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad e \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Neste caso, o sistema (23) possui dimensão  $pv$ , onde as matrizes  $\Gamma$  e  $\Lambda$  são repetidas  $p$  vezes em uma estrutura bloco-diagonal, isto é, o compensador dinâmico  $\dot{\xi}(t) = \Gamma\xi(t) + \Lambda e_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  é inserido em cada canal de erro. Para não sobrecarregar a notação, considera-se  $\xi(t) \in \mathbb{R}^{p_0}$  onde  $p_0 = pv$ .

**Observação 2** Por se tratar de uma realização no espaço de estados, a representação do PMI através das matrizes  $\Gamma$  e  $\Lambda$  em (24) não é única. Em (BONAN et al., 2010) é utilizada um forma diagonal para a composição das matrizes  $\Gamma$  e  $\Lambda$  tais que

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A_{cr(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{cr(2)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{cr(s-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{cr(s)} \end{bmatrix} \quad e \quad \Lambda = \begin{bmatrix} B_{cr} \\ B_{cr} \\ \vdots \\ B_{cr} \\ B_{cr} \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde os elementos  $A_{cr(i)}$  e  $B_{cr(i)}$  são matrizes definidas por

$$A_{cr(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{\omega}_i^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1 \cdots s, \quad B_{cr} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

As frequências  $\bar{\omega}_i$  utilizadas na composição das matrizes  $A_{cr(i)}$  correspondem às frequências não repetidas que compõem os sinais de referência e perturbação. Esta formulação será considerada no exemplo de uma fonte ininterrupta de energia (do inglês, *Uninterruptible Power Supply - UPS*) apresentado na Seção 3.5.2.

**Observação 3** Cada um dos elementos  $s^2 + \omega_k^2$  em  $\phi_{r(i)}(s)$  e  $\phi_{d(j)}(s)$  introduz um pico de amplitude infinita (ressonância) em  $\omega_k$  na resposta em frequência do controlador, isto é, o ganho do controlador torna-se infinito nesta frequência (como no exemplo ilustrado na Figura 5). Seguindo a nomenclatura consolidada entre os autores que tratam de aplicações práticas como as UPS ((TEODORESCU et al., 2006), (COSTA-CASTELLO; GRIÑO; FOSSAS, 2007), (LENWARI et al., 1996) e referências), optou-se por denominar esta implementação do PMI de controlador ressonante. Assim estabelece-se uma diferença clara entre esta abordagem e os controladores repetitivos que serão apresentados na sequência deste trabalho.

**Observação 4** O PMI da forma como foi proposto apresenta limitações quando o sinal a ser seguido/rejeitado é um sinal periódico genérico, ou seja, com número infinito de harmônicas. Isto exigiria que um número infinito de modos fosse considerado na formulação de  $\Phi(s)$ , resultando assim em um controlador de ordem infinita. Uma maneira de contornar este problema é inserir apenas as harmônicas de maior contribuição na composição do sinal, às custas de um erro de seguimento associado às harmônicas não compensadas. Uma escolha adequada de  $\Phi(s)$  pode resultar em valores de erro dentro dos limites aceitáveis para uma grande variedade de aplicações práticas. Para o caso de sinais periódicos genéricos os controladores repetitivos se configuram como alternativa aos controladores ressonantes, conforme será descrito na Seção 2.3.1.3.

Por outro lado, na presença da saturação do sinal de controle, o PMI não é mais uma condição suficiente para a garantia de seguimento/rejeição. Neste caso, outros efeitos devem ser considerados, uma vez que alguns sinais de referências/ou perturbação podem levar a trajetórias que não apresentem erro nulo de seguimento ou até mesmo a trajetórias divergentes. Estes problemas foram em parte tratados nos trabalhos (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000), (CAO; LIN; WARD, 2004) e (FLORES; ECKHARD; GOMES DA SILVA JR, 2008) para referências constantes. Em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000), a topologia de controle utilizada considera a introdução de uma ação integral e de um laço de *anti-windup* conforme proposto inicialmente em (KRIKELIS; BARKAS, 1984). Uma metodologia para a síntese de uma realimentação de estados estabilizante e do ganho de *anti-windup* é proposta, com o objetivo de garantir que as trajetórias do sistema em malha-fechada não deixem um conjunto elipsoidal, desde que as condições iniciais pertençam a este conjunto e que as referências e perturbações do sistema pertençam a um dado conjunto admissível. Além disso, assume-se que o ponto de equilíbrio associado ao perfeito seguimento de referência está no interior da região linear do sistema. Finalmente, uma comparação entre a solução via equações algébricas de Riccati (do inglês, *Algebraic Riccati Equation - ARE*) e LMIs é apresentada considerando um modelo politópico para representar os efeitos da saturação no sistema.

Seguindo as mesmas ideias, mas utilizando um modelo politópico menos conservador, estes resultados foram melhorados em (CAO; LIN; WARD, 2004). Mesmo com este modelo menos conservador, as condições resultantes ainda foram apresentadas na forma de *BMI*s (do Inglês, *Bilinear Matrix Inequality - BMI*), necessitando assim de procedimentos iterativos para a determinação do ganho estabilizante e do laço de *anti-windup*. Em (FLORES; ECKHARD; GOMES DA SILVA JR, 2008) e (FLORES, 2008. 114f) os efeitos da saturação no sistema foram considerados através da condição de setor modificada apresentada em (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005), permitindo assim a obtenção de condições *LMI*s para a síntese simultânea do controlador e do laço de *anti-windup*. Além disso, os autores apresentam uma configuração de controle mais simples e mostram, por meio de exemplos, que os resultados obtidos são menos conservadores. Finalmente, é apresentada uma análise sobre os pontos de equilíbrio do sistema saturado para sistemas *SISO*. Foi mostrado que para sistemas assintoticamente estáveis em malha aberta é necessária a utilização de restrições adicionais sobre a amplitude dos sinais de referência e perturbação a fim de evitar a existência de pontos de equilíbrio que não garantam o erro nulo. Até o momento, nenhuma extensão para sistemas *MIMO* desta análise foi publicada.

No contexto de sinais variantes no tempo pode-se citar os trabalhos (QUEINNEC; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) e (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009). Em (QUEINNEC; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) são apresentadas condições na forma de *LMI*s considerando os seguintes casos: se o sinal de referência é nulo, então a origem do sistema é assintoticamente estável; se o sinal de referência é variante no tempo com uma taxa de variação conhecida, então garante-se que as trajetórias do sistema ficam confinadas em uma dada região para toda referência no interior de um dado conjunto admissível (análogo ao problema de tolerância a perturbações apresentado anteriormente); se o sinal de referência é (ou passa a ser) constante, então o perfeito seguimento deste sinal é garantido. A mesma linha de trabalho de (FLORES, 2008. 114f) foi utilizada em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009) para estabelecer condições que garantam o seguimento/rejeição de sinais periódicos em sistemas sujeitos a saturação e incertezas. Neste caso, uma abordagem com múltiplos elipsoides foi considerada para a obtenção de condições na forma de “quasi” *LMI*s que garantam a estabilidade do sistema em malha fechada. Este trabalho serviu de ponto de partida para os resultados apresentados no Capítulo 3 e no Apêndice A.

### 2.3.1.2 Controladores ressonantes de tempo discreto

Supondo que um sinal de tempo discreto periódico pode ser representado por uma soma finita de exponenciais complexas (através da sua expansão em Série de Fourier de Tempo Discreto (do inglês, *Discrete-Time Fourier Series - DTFS*)), para atender ao PMI o controlador resultante deverá apresentar um número finito de polos em posições correspondentes à frequência fundamental do sinal e aos seus componentes harmônicos.

Considere que a frequência fundamental dos sinais de referência e perturbação são dados por  $\Omega_{r(i)} = \frac{2\pi}{N_{r(i)}}$ ,  $i = 1 \dots, p$  e  $\Omega_{d(j)} = \frac{2\pi}{N_{d(j)}}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , respectivamente. Supondo agora que estes sinais são representados através da sua expansão em *DTFS* (HAYKIN; VAN VEEN, 2002), segue que cada componente dos vetores de referência e perturbação pode ser escrita como:

$$r_{(i)}(k) = \sum_{h_1 \in \langle N_{r(i)} \rangle} a_{r(i)h_1} e^{jh_1 \Omega_{r(i)} k}, \quad d_{(j)}(k) = \sum_{h_2 \in \langle N_{d(j)} \rangle} a_{d(j)h_2} e^{jh_2 \Omega_{d(j)} k}. \quad (26)$$



A partir desta representação, pode-se definir os conjuntos  $\mathcal{H}_{0r(i)} \in \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{H}_{0d(j)} \in \mathbb{Z}$  dos índices  $h_1$  e  $h_2$  tais que  $a_{r(i)h_1} \neq 0$  e  $a_{d(j)h_2} \neq 0$ , respectivamente. Considerando apenas os modos não-nulos que compõem os sinais  $r_{(i)}(k)$ ,  $i = 1 \dots, p$  e  $d_{(j)}(k)$ ,  $j = 1 \dots, l$ , pode-se definir os polinômios

$$\begin{aligned}\phi_{r(i)}(z) &= \prod_{h_1 \in \mathcal{H}_{0r(i)}} (z - e^{j\Omega_{r(i)}h_1}), \quad i = 1, \dots, p \\ \phi_{d(j)}(z) &= \prod_{h_2 \in \mathcal{H}_{0d(j)}} (z - e^{j\Omega_{d(j)}h_2}), \quad j = 1, \dots, l\end{aligned}$$

Seja agora o mínimo múltiplo comum entre  $\phi_{r(i)}(z)$ ,  $i = 1 \dots, p$  e  $\phi_{d(j)}(z)$ ,  $j = 1 \dots, l$  representado por

$$\phi(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_v z^{-v}.$$

Seguindo a mesma ideia apresentada para sistemas de tempo contínuo, a função de transferência  $\Phi(z) = 1/\phi(z)$  deve ser inserida na malha de controle a fim de garantir o seguimento/rejeição dos sinais de interesse. No espaço de estados, a realização de  $\Phi(z)$  pode ser obtida através do seguinte sistema dinâmico:

$$\xi(k+1) = A_\xi \xi(k) + B_\xi e(k) \quad (27)$$

onde

$$A_\xi = \text{diag}\{\overbrace{\Gamma, \Gamma, \dots, \Gamma}^{p\text{-upla}}\} \quad B_\xi = \text{diag}\{\overbrace{\Lambda, \Lambda, \dots, \Lambda}^{p\text{-upla}}\}$$

e

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_v & -\alpha_{v-1} & -\alpha_{v-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como no caso anterior, (27) é um sistema de dimensão  $pv$ , onde as matrizes  $\Gamma$  e  $\Lambda$  são repetidas  $p$  vezes, em cada um dos canais de erro. Novamente considera-se  $\xi(k) \in \mathbb{R}^{p_0}$  com  $p_0 = pv$ .

Considerando sistemas com saturação, pode-se destacar (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000), onde os resultados de (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) são estendidos para sistemas de tempo discreto e referências variantes no tempo. Neste trabalho, um método sistemático para o cálculo de um controlador estabilizante e dos conjuntos de estados admissíveis é proposto através de *BMI*s. Porém, a garantia de seguimento/rejeição só é verificada para sinais com taxa de variação limitada. Em (FLORES; GOMES DA SILVA JR., 2010) são apresentados resultados para a síntese simultânea de um controlador estabilizante e de um laço de *anti-windup* para o caso de referências constantes. Resultados menos conservadores e condições *LMI*s mais simples que as apresentadas em (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000) foram obtidas através da utilização das coordenadas do erro e da condição de setor modificada para o caso de referências constantes. Novos resultados para a síntese simultânea foram obtidos em (FLORES; SARTORI; GOMES DA SILVA JR., 2010), considerando o caso de referências e perturbações periódicas. Estes resultados são detalhados no Capítulo 5.

### 2.3.1.3 Controlador repetitivo de tempo contínuo

O controlador repetitivo foi inicialmente proposto em (INOUE; NAKANO; IWA, 1981) como uma forma alternativa de garantir o seguimento de referências periódicas e a rejeição de perturbações também de natureza periódica. A grande vantagem deste tipo de controlador é que o seguimento/rejeição é garantido para qualquer sinal com período fundamental  $\tau$ , independente de seu conteúdo harmônico. A ideia básica por trás deste controlador (que também dá origem ao seu nome) é o armazenamento do erro de seguimento durante um período completo e a consequente realimentação deste sinal de erro no sistema através de um controlador apropriado (YAMAMOTO, 1993). Esta sequência se repete a cada período do sinal de entrada. Normalmente, este comportamento é obtido através da introdução de um elemento de atraso na malha de controle com o mesmo valor do período fundamental em um laço de realimentação positiva, conforme mostrado na Figura 6. Neste caso, a função de transferência do erro para a saída do controlador é dada por

$$G_{rc}(s) = \frac{y_{rc}(s)}{e(s)} = \frac{1}{1 - e^{-\tau s}}. \quad (28)$$

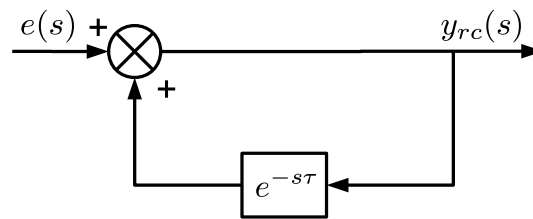


Figura 6: Configuração básica do controlador repetitivo.

Substituindo  $s = j\omega$  e  $e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau)$  segue que (28) é equivalente a

$$G_{rc}(j\omega) = \frac{1}{1 - \cos(\omega\tau) + j \sin(\omega\tau)}. \quad (29)$$

Observe que para valores de frequência  $\omega = 2k\pi/\tau$  rad/s,  $k = 0, 1, \dots$ , (29) pode ser escrita como

$$G_{rc}(j\frac{2k\pi}{\tau}) = \frac{1}{1 - \cos(\frac{2k\pi}{\tau}\tau) + j \sin(\frac{2k\pi}{\tau}\tau)} = \frac{1}{1 - \cos(2k\pi) + j \sin(2k\pi)}$$

Logo, o controlador proposto apresentará ganho infinito para sinais com frequência fundamental  $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$  rad/s e também para todos os sinais que apresentem frequências múltiplas inteiras de  $\omega_0$ . Seguindo a ideia apresentada na Seção 2.3.1, segue que  $|T_r(j\omega)| = 1$  e  $|T_d(j\omega)| = 0$  para todo  $\omega = k\omega_0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ .

Uma forma alternativa de entender a ideia básica associada aos controladores repetitivos é fazendo uma analogia com os controladores ressonantes apresentados na seção anterior. A partir da teoria que estabelece tal princípio sabe-se que, para garantir o seguimento de um sinal de referência na forma  $r(t) = \sin(\omega_1 t)$ , o sistema deve ser estável em malha fechada e, adicionalmente, o controlador ou o processo a ser controlado deve conter um termo na forma  $\Phi_1(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_1^2}$  em sua função de transferência, apresentando assim um par de polos complexos em  $s = \pm j\omega_1$ . A presença destes polos implica que o ganho de  $\Phi(j\omega_1)$  seja infinito na frequência  $\omega_1$ . De forma análoga, se o objetivo de

controle é, por exemplo, garantir o seguimento de  $r(t) = \sin(\omega_1 t)$  e, adicionalmente, rejeitar a interferência das  $k - 1$  primeiras harmônicas de  $\omega_1$ , o controlador resultante que implementa o PMI deve ser da forma

$$\Phi_k(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} \frac{1}{s^2 + (2\omega_1)^2} \cdots \frac{1}{s^2 + [k\omega_1]^2}. \quad (30)$$

Como pode-se observar, a função de transferência (30) apresenta  $k$  pares de polos complexos sobre o eixo imaginário e ganho infinito em  $\omega_1$  e em cada um dos  $k - 1$  múltiplos inteiros desta frequência. Assim, para o caso de referências periódicas, pode-se considerar o controlador repetitivo como uma implementação do PMI onde  $\omega_0 = \omega_1$  e  $k \rightarrow \infty$ . Para fins do PMI, o controlador repetitivo gera o mesmo efeito de um controlador com a estrutura de (30), porém com ordem infinita, ou seja, apresentando polos em  $s = \pm jk\omega_0$ ,  $k = 0, \dots, \infty$ . Observe que este modelo de ordem infinita é consequência do elemento de atraso.

Considerando a introdução de (30) na malha de controle e a partir de uma análise baseada no LGR, nota-se que é impossível estabilizar tal sistema se a função de transferência de laço apresentar um número finito de zeros (ver Figura 7). Além deste problema de estabilização, do ponto de vista prático, o ganho infinito em altas frequências do controlador repetitivo pode amplificar ruídos inerentes ao processo ou ainda excitar dinâmicas não-modeladas que podem degradar o desempenho do sistema em malha fechada ou até mesmo levá-lo à instabilidade.

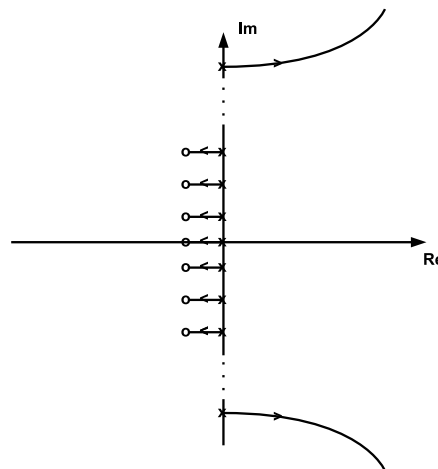


Figura 7: LGR ilustrativo.

Com o objetivo de contornar estes problemas de estabilização, (HARA et al., 1988) propôs a introdução de um filtro passa-baixas de primeira ordem (denotado por  $Q(s)$ ) em série com o elemento de atraso na malha de realimentação do controlador repetitivo. Esta metodologia (conhecida como *Q-filter repetitive control*) permite que o sistema seja estabilizável às custas de um erro de seguimento diretamente relacionado ao valor da frequência de corte do filtro  $Q(s)$ . Este erro deve-se ao fato que o ganho não é mais infinito em todas as frequências múltiplas da frequência fundamental e, principalmente, pelo ganho ser muito pequeno nas altas frequências. Neste caso, a estrutura do controlador repetitivo é alterada conforme apresentado na Figura 8.

A inclusão do termo  $Q(s) = \omega_c / (s + \omega_c)$  em série com o elemento de atraso resulta

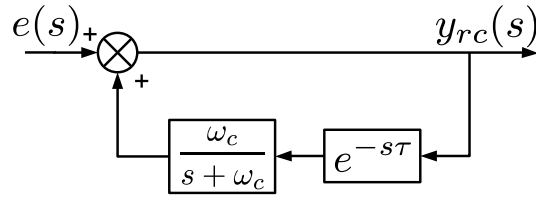


Figura 8: Estrutura básica do controlador repetitivo com o filtro  $Q(s)$ .

na seguinte função de transferência:

$$G_{rc}^f(s) = \frac{1}{1 - \frac{\omega_c}{s + \omega_c} e^{-\tau s}}. \quad (31)$$

Na Figura 9 é mostrado o diagrama de Bode de  $G_{rc}^f(s)$  para valores distintos de  $\omega_c$ . Note que, apesar do ganho nas frequências  $\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$  não ser infinito, o controlador de fato apresenta picos de ganho elevado nestas frequências. Quanto maior for o valor do ganho nestes picos, menor será o erro de seguimento para a harmônica considerada. Além disso, pode-se observar que para valores pequenos de  $\omega_c$  existe um erro nas frequências onde estão localizados estes picos. Isto resulta em um erro na fase do sinal de saída, fazendo com que este sinal esteja defasado em relação ao sinal de entrada. A relação que descreve a fase de  $G_{rc}^f(s)$  é dada por

$$\angle G_{rc}^f(j\omega) = \text{atan} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) - \text{atan} \left( \frac{\omega + \omega_c \text{sen}(w\tau)}{\omega_c - \omega_c \text{cos}(w\tau)} \right).$$

Note que para  $\omega \rightarrow 0$  a contribuição de fase do controlador repetitivo é  $-90^\circ$  e para  $\omega \gg \omega_c$  a contribuição de fase é praticamente nula. Já na faixa entre estes valores, a contribuição de fase do controlador repetitivo em múltiplos da frequência fundamental (onde ela deveria ser zero para o controlador repetitivo ideal) pode ser significativa. Note também que esta defasagem também tende a diminuir conforme o valor de  $\omega_c$  aumenta.

Na Figura 10 são apresentados os polos de  $G_{rc}^f(s)$  para diferentes valores de  $\omega_c$ . Relembrado, caso  $\omega_c \rightarrow \infty$ , os polos do controlador repetitivo estão exatamente sobre o eixo imaginário. Pode-se observar que, conforme  $\omega_c$  diminui, os polos se afastam do eixo imaginário, deixando de ser imaginários puros (modos oscilatórios) para assumir valores complexos (modos oscilatórios amortecidos).

É importante ressaltar que a maioria dos trabalhos que consideram o controlador repetitivo adota uma abordagem baseada em funções de transferência e propõem metodologias baseadas no domínio da frequência. Por outro lado, existe um crescente interesse em abordagens no espaço de estados, especialmente com o surgimento de novas técnicas para o tratamento de sistemas com atraso. Um dos primeiros trabalhos neste sentido foi (DOH; CHUNG, 2003), apresentando condições *LMI*s apenas para a sintonia da frequência de corte do filtro passa-baixas. Posteriormente, este trabalho foi estendido e analisado em (DOH; RYOO; CHUNG, 2006), (DOH; RYOO, 2008) e (CHEN; CHANG; ZHANG, 2010).

O trabalho (DOH; CHUNG, 2003) parte de uma possível realização do controlador repetitivo (com o filtro passa-baixas) dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{rc}(t) &= -\omega_c x_{rc}(t) + \omega_c x_{rc}(t - \tau) + e(t) \\ y_{rc}(t) &= \omega_c x_{rc}(t - \tau) + e(t), \end{aligned} \quad (32)$$

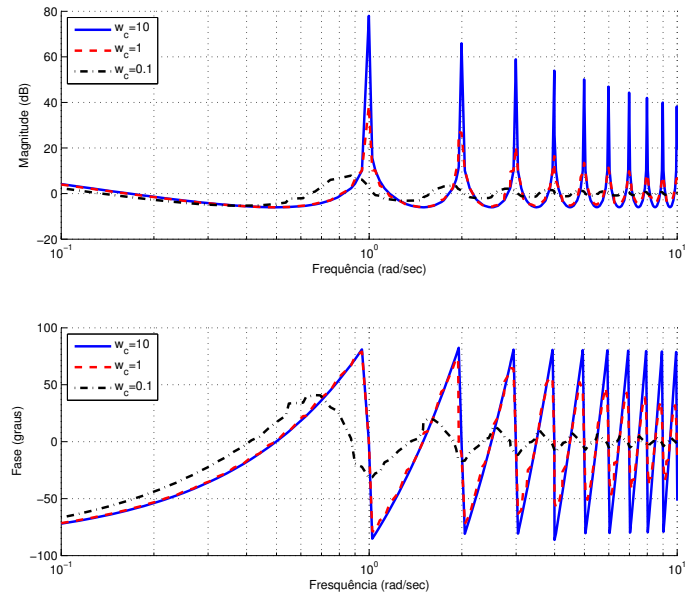


Figura 9: Diagrama de Bode de  $G_{rc}^f(s)$  com  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ .

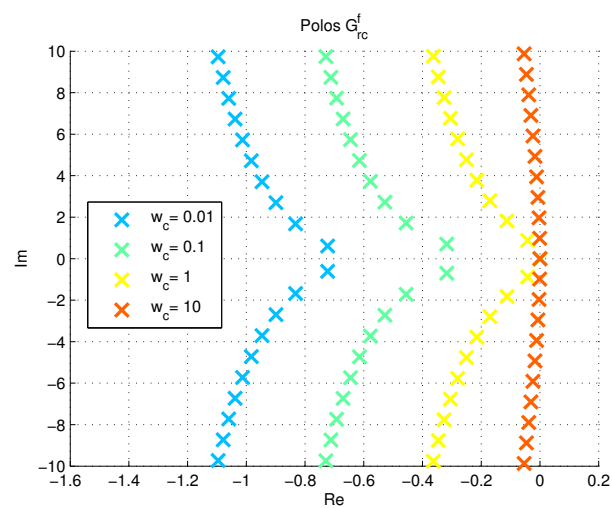


Figura 10: Polos de  $G_{rc}^f(s)$  com  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ .

onde  $x_{rc}(t) \in \mathbb{R}$ . Esta realização no espaço de estados resulta na mesma função de transferência definida em (31). Vale ressaltar que o filtro  $Q(s)$  tem um papel fundamental na realização do controlador no espaço de estados, uma vez que é este filtro que introduz a dinâmica responsável pela determinação de  $\dot{x}_{rc}(t)$ . Neste caso, o sistema original é combinado com (32) de forma a obter  $z(t) = [x(t)^T x_{rc}(t)^T]^T$ . A partir do sistema aumentado, condições independentes do atraso são obtidas através de um funcional de Lyapunov-Krasovskii com o objetivo de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Nesta mesma linha de trabalho pode-se destacar (ZHAO et al., 2009) e (CAI et al., 2009). Em (ZHAO et al., 2009), um algoritmo iterativo é responsável pela síntese do controlador e pelo cálculo de  $\omega_c$ . Em (CAI et al., 2009) o controlador repetitivo é aplicado para sistemas com atraso, de tal forma que o problema de seguimento de referências é substituído pelo problema de estabilização do sistema que representa a dinâmica do erro. Além disso, a teoria de (HARA et al., 1988) é estendida para tornar possível a sua aplicação para funções de transferência não-rationais.

No contexto de controladores repetitivos para sistemas *MIMO* pode-se destacar os trabalhos (SADEGH, 1995), (WEISS; HAFELE, 1999), (OWENS; LI; BANKS, 2004), (DANG; OWENS, 2006). Em (WEISS; HAFELE, 1999) é apresentada uma metodologia de síntese destes controladores considerando uma abordagem  $\mathcal{H}_\infty$ . Em (OWENS; LI; BANKS, 2004) e (DANG; OWENS, 2006), os autores apresentam uma análise de estabilidade baseada na teoria de Lyapunov e provam que estabilidade exponencial do sistema em malha fechada é garantida se o sistema *MIMO* linear for positivamente real/estritamente positivamente real ou se o sistema não-linear for passivo/estritamente passivo. Por outro lado, nenhum destes trabalho considera saturação do sinal de controle.

O controlador repetitivo esteve sempre ligado a aplicações práticas, sendo largamente utilizado na rejeição de perturbações em discos óticos (DOH; RYOO; CHUNG, 2006), no controle de vibração em barras engastadas (CHAO et al., 2009), controle ativo de ruído (STALLAERT et al., 2010), entre outros. Uma das aplicações mais comuns do controlador repetitivo são as *UPS*, onde este controlador é responsável por garantir o seguimento da senoide de referência mesmo na presença de grande conteúdo harmônico proveniente das cargas não-lineares (normalmente uma conjunto retificador-capacitor-resistor) conectadas ao sistema. No contexto de controladores repetitivos visando o controle de *UPS*, pode-se destacar (ZHANG et al., 2003), (ESCOBAR et al., 2007), (ESCOBAR et al., 2008), (ZHOU et al., 2009) e referências. Em (ESCOBAR et al., 2007), a estrutura de controle clássica do controlador repetitivo é adicionada a um laço de realimentação negativa. Através desta estrutura modificada, apenas as harmônicas ímpares são compensadas. Em (ZHOU et al., 2009) é proposto o chamado controlador repetitivo de dois modos, considerando dois geradores de referência em paralelo, compensando assim as harmônicas pares e ímpares. Assim como na teoria básica de controladores repetitivos, a maioria dos trabalhos relacionados ao controle de *UPS* consideram uma abordagem frequencial. No decorrer deste trabalho, um modelo de uma *UPS* inspirado no modelo proposto em (PEREIRA et al., 2009) será utilizado como exemplo de simulação. Partindo deste modelo, em (BONAN et al., 2011) são apresentados resultados práticos da implementação do controlador repetitivo no controle de sistemas *UPS*. Em (FLORES et al., 2011) é proposta uma metodologia de chaveamento entre condições distintas de  $\omega_c$  com o intuito de obter uma boa resposta transitória associada a um pequeno erro do sinal de saída. A estabilidade do sistema em malha fechada e a satisfação de requisitos de desempenho foram garantidas através de condições *LMIs*.

No contexto de restrições de controle e o projeto de laços de *anti-windup*, não foram

encontradas referências relativas ao controlador repetitivo em tempo contínuo. Algumas das referências encontradas (GHOSH; PADEN, 2000), (QUAN; CAI, 2010) tratam de sistemas não-lineares genéricos ou são aplicadas em conjunto com outras metodologias de controle como os controladores adaptativos. Esta aparente falta de referências serviu como motivação dos resultados que serão apresentados no Capítulo 4 deste trabalho.

#### 2.3.1.4 Controlador repetitivo de tempo discreto

Assim como no caso de sistemas de tempo contínuo, para sistemas de tempo discreto também é possível gerar sinais periódicos através de um elemento de atraso com valor igual ao período fundamental  $N$  dos sinais a serem seguidos/rejeitados. Este elemento de atraso é inserido na malha de controle através de uma realimentação positiva, como apresentado na Figura 11.

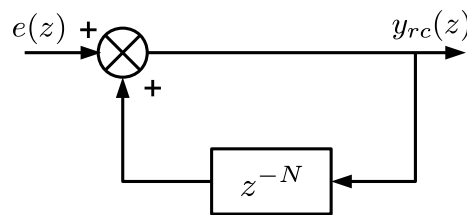


Figura 11: Configuração básica do controlador repetitivo de tempo discreto.

O controlador resultante pode ser representado pela função de transferência

$$G_{rc}(z) = \frac{y_{rc}(z)}{e(z)} = \frac{1}{1 - z^{-N}} \quad (33)$$

tal que  $G_{rc}(z)$  apresenta  $N$  polos igualmente espaçados sobre o círculo de raio unitário centrado na origem do plano complexo, nas posições  $z = e^{\pm j\Omega l}$ ,  $l = 0, 1, \dots, N/2$ , com  $\Omega = 2\pi/N$  (TOMIZUKA; TSAO; CHEW, 1989). Seguindo a formulação do PMI apresentada na Seção 2.3.1.2,  $G_{rc}$  pode ser realizada no espaço de estados por (27), desde que as matrizes  $\Gamma$  e  $\Lambda$  sejam substituídas por

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{(N-1,1)} & I_{(N-1)} \\ 1 & 0_{(1,N-1)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0_{(N-1,1)} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Note que a dimensão deste novo controlador é dependente do período fundamental dos sinais de interesse. Logo, se este período é composto de um número elevado de amostras, o controlador resultante acabará apresentando dimensão elevada, podendo originar problemas numéricos ou de implementação.

Uma das abordagens mais utilizadas no que se refere a controladores repetitivos de tempo discreto são os chamados *Prototype Repetitive Controller (PRC)* (TOMIZUKA; TSAO; CHEW, 1989). Esta metodologia considera um controlador de ordem similar à ordem da planta, formado por uma parcela correspondente ao termo repetitivo e outra parcela com uma aproximação da inversa da função de transferência da planta, assumindo que esta seja estável. A formulação destes controladores é apresentada a seguir.

Considere um sistema *SISO* de tempo-discreto descrito na forma

$$\begin{aligned} A(z^{-1})y(k) &= z^{-d}B(z^{-1})[u(k) + d(k)] \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m} \end{aligned} \quad (35)$$

onde  $u(k)$ ,  $y(k)$ , e  $d(k)$  são a entrada, a saída e um sinal de perturbação, respectivamente. Este sistema pode ser representado através de sua função de transferência

$$P(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}.$$

Assume-se que o sistema em malha aberta é assintoticamente estável e que o polinômio  $B(z^{-1})$  pode ser dividido em dois termos tais que  $B(z^{-1}) = B^c(z^{-1})B^u(z^{-1})$ . Neste caso,  $B^c(z^{-1})$  e  $B^u(z^{-1})$  contém, respectivamente, os zeros canceláveis e não-canceláveis de  $P(z^{-1})$ , ou seja, todas as raízes de  $B^c(z^{-1})$  estão localizadas no interior do círculo de raio unitário do plano complexo e ainda todas as raízes de  $B^u(z^{-1})$  estão fora ou sobre este mesmo círculo.

Assim, o PRC considera a introdução de um controlador com função de transferência dada por

$$G_{prc}(z) = \frac{k_r z^{-N+d} A(z^{-1}) B^u(z)}{(1 - z^{-N}) \rho B^c(z^{-1})} \quad (36)$$

$$\rho \geq \max_{\Omega \in [0, \pi]} |B^u(e^{-j\Omega})|^2$$

onde  $B^u(z)$  é obtido substituindo-se os elementos  $z^{-1}$  em  $B^u(z^{-1})$  por  $z$ . Com esta estrutura de controle, os polos e zeros canceláveis do sistemas são de fato cancelados pelo controlador, enquanto  $B^u(z)$  elimina o efeito da fase resultante dos zeros não-canceláveis. Supondo  $B^u(z^{-1}) = b_{0u} + b_{1u}z^{-1} + \dots + b_{hu}z^{-h}$  e  $z = e^{j\Omega} = \cos(\Omega) + j\sin(\Omega)$  segue que

$$B^u(z^{-1}) = b_{0u} + \sum_{k=1}^h b_{ku} \cos(k\Omega) - j \sum_{k=1}^h b_{ku} \sin(k\Omega)$$

e

$$B^u(z) = b_{0u} + \sum_{k=1}^h b_{ku} \cos(k\Omega) + j \sum_{k=1}^h b_{ku} \sin(k\Omega)$$

tais que a multiplicação de  $B^u(z^{-1})B^u(z)$  resultante desta escolha particular de controlador é dada por

$$B^u(z^{-1})B^u(z) = \left[ b_{0u} + \sum_{k=1}^h b_{ku} \cos(k\Omega) \right]^2 + \left[ \sum_{k=1}^h b_{ku} \sin(k\Omega) \right]^2.$$

Note que a multiplicação  $B^u(z^{-1})B^u(z)$  resulta em um número real, compensando assim a contribuição de fase dos zeros não-canceláveis da planta.

Segundo (TOMIZUKA; TSAO; CHEW, 1989), o parâmetro  $\rho$  está diretamente relacionado ao tempo de convergência do erro para zero. Neste caso, as seguintes escolhas de  $\rho$  (ou de um limitante superior para este valor) são sugeridas pelos autores:

- $\rho = B^u(1)^2$  se todas as raízes de  $B^u(z^{-1})$  estiverem no semiplano esquerdo fechado do plano complexo;
- $\rho = B^u(-1)^2$  se todas as raízes de  $B^u(z^{-1})$  estiverem no semiplano direito fechado do plano complexo;
- $\rho = (|b_{0u}| + |b_{1u}| + \dots + |b_{hu}|)^2$  caso contrário.



Além disso, os autores mostram que a interconexão de (35) e (36) é assintoticamente estável se  $0 < k_r < 2$ .

Como o *PRC* é baseado em cancelamentos de polos e zeros, estes controladores tendem a ser bastante sensíveis a incertezas e variações paramétricas na planta. Seguindo as ideias derivadas do controlador repetitivo para sistemas de tempo contínuo, (CHEW; TOMIZUKA, 1990a) modifica a estrutura do *PRC* através da introdução de um filtro passa-baixas em série com o elemento de atraso, às custas de um erro de seguimento tolerável. Esta nova implementação do *PRC* é conhecida como *Zero-Phase Repetitive Controller (ZPRC)*.

O *ZPRC* pode ser implementado por

$$G_{zprc}(z) = \frac{Q(z, z^{-1})\bar{k}_r z^{-N+d} A(z^{-1}) B^u(z)}{(1 - Q(z, z^{-1})z^{-N}) B^c(z^{-1})}, \quad (37)$$

$$\bar{k}_r = \frac{k_r}{\rho}, \quad \rho \geq \max_{\Omega \in [0, \pi]} |B^u(e^{-j\Omega})|^2.$$

onde  $Q(z, z^{-1})$  denota o filtro passa-baixas em série com o elemento de atraso, normalmente representado na forma

$$Q(z, z^{-1}) = \frac{1}{2q_0 + q_1} (q_0 z + q_1 + q_0 z^{-1}).$$

Devido a sua implementação simples, o *ZPRC* tornou-se o foco de uma série de trabalhos desde o seu surgimento: em (TSAO; TOMIZUKA, 1994) é apresentada uma relação entre o filtro passa-baixas e as dinâmicas não-modeladas, propondo uma condição para estabilidade robusta tanto em sistemas de fase mínima quanto em sistemas de fase não-mínima. Através da definição de uma matriz inversa de cancelamento de fase, (JEONG; FABIEN, 1999) apresenta uma extensão do *ZPRC* para sistemas *MIMO*; Em (SMITH; TOMIZUKA, 2000) são estudados os custos de implementação dos controladores repetitivos. Recentemente, o *ZPRC* vem sendo estudado em conjunto com aplicações práticas como em (JIANG et al., 2011) e (LIN; CHEN, 2011).

O problema de saturação do sinal de controle no contexto dos *ZPRC* foi brevemente estudado nos trabalhos de (MA, 1990), (RÖNNBÄCK; HILLERSTRÖM; STERNBY, 1993) e (SBARBARO; TOMIZUKA; BARRA, 2009). Em (MA, 1990) é mostrado que o *ZPRC* é robusto em relação a um grupo de não-linearidades que satisfazem uma determinada condição de setor. Além disso, é apresentada uma análise de estabilidade para não-linearidades do tipo saturação. O problema de *anti-windup* para controladores repetitivos de tempo discreto foi inicialmente analisado em (RÖNNBÄCK; HILLERSTRÖM; STERNBY, 1993), onde uma estratégia de *anti-windup* foi desenvolvida para o controle de uma bomba peristáltica. Em (SBARBARO; TOMIZUKA; BARRA, 2009) a natureza periódica dos sinais em regime permanente na presença de restrições é garantida através do método de iterações de Picard e o ganho de *anti-windup* é sintetizado de forma a recuperar o desempenho em malha fechada quando o controlador está saturado. Como uma descrição por funções de transferência é utilizada, não é possível caracterizar os conjuntos de condições iniciais e referências/perturbações admissíveis. Contribuições relativas à síntese de laços de *anti-windup* para sistemas de tempo discreto também serão apresentadas no Capítulo 5 e 6.

### 2.3.2 Outras metodologias

Além das metodologias apresentadas até agora, várias outras técnicas são utilizadas a fim de garantir o seguimento de referências e/ou rejeição de perturbações. Esta seção tem como objetivo apresentar brevemente algumas delas, em conjunto com algumas referências clássicas que podem auxiliar o leitor no entendimento destas metodologias.

Uma das técnicas de controle mais difundidas para a garantia de seguimento/rejeição são os controladores preditivos baseados em modelo (do inglês, *Model Predictive Control - MPC*). Neste caso, o modelo do processo é utilizado para prever o comportamento futuro do sistema e uma sequência de ações de controle em malha-aberta é calculada através da solução de um problema de otimização. O primeiro elemento desta sequência é então utilizado como entrada de controle e os demais elementos são descartados. Através de uma abordagem de horizontes deslizantes, um problema de otimização é resolvido a cada período de amostragem e as medidas do sistema são consideradas na correção da predição do modelo, conferindo assim um caráter de malha-fechada à estratégia. Note que se o objetivo for o seguimento e/ou a rejeição então o PMI deverá ser utilizado. Uma grande vantagem deste tipo de técnica é a facilidade de incorporar restrições ao problema de otimização. Suas maiores dificuldades são estabelecer a garantia de factibilidade do problema de otimização e a garantia da estabilidade do sistema (RAWLINGS, 2000). Uma análise mais profunda sobre este tipo de controle sob restrições pode ser encontrada em (MACIEJOWSKI, 2002) e (CAMACHO; BORDONS, 1997).

Nesta mesma linha de pesquisa, pode-se destacar os chamados condicionadores de referência (*reference governor*), estratégia de controle muito utilizada na década de 1990 e início dos anos 2000, através de uma série de trabalhos (GILBERT; KOLMANOVSKY, 1999), (GILBERT; KOLMANOVSKY, 2002), (ANGELI; CASAVOLA; MOSCA, 2000) e (BLANCHINI; MIANI, 2000). Uma visão geral sobre estes controladores pode ser encontrada em (REGINATTO, 2000. 190f). Este tipo de abordagem permite tratar de forma separada os problemas de desempenho em regime permanente e de satisfação de restrições. Isto pode ser obtido através da introdução de um elemento de controle que atua entre o sinal de referência e a entrada do sistema em malha-fechada. O projeto deste tipo de controlador normalmente é feito em duas partes: em uma primeira etapa, um controlador é projetado para o sistema sem levar em conta as restrições, com o objetivo de garantir os requisitos de desempenho e estabilidade. A característica não-linear do sistema (restrições) fica exclusivamente confinada ao condicionador de referência. O condicionador de referência ajusta as transições do sinal de controle de tal maneira que as restrições sejam respeitadas para um grande número de sinais de referência e condições iniciais. O sinal de controle é gerado como uma sequência de sinais admissíveis no que diz respeito à violação das restrições, tais que a saída do sistema tenda otimamente em direção ao valor da referência. Apesar de apresentar uma formulação genérica para o sinal de referência, os exemplos apresentados consideram apenas sinais constantes.

A abordagem conhecida com Regulação de Saída baseia-se em um controlador composto por uma realimentação de estados linear, que desconsidera a saturação, adicionada de um elemento não-linear. Pode-se provar que, para um dado elemento não-linear e não-negativo na realimentação, o sistema seguirá assintoticamente uma referência constante e ainda seu estado ficará confinado a um certo conjunto elipsoidal. A maioria dos trabalhos nesta área tratam o problema tanto na forma de realimentação de estados quanto na forma de realimentação de erro. Destes trabalhos destacam-se (LIN; STOORVOGEL; SABERI, 1996), onde a teoria de regulação de saída de (FRANCIS, 1977) é aplicada ao caso com saturação em conjunto com a noção de estabilidade semi-global. Em (TURNER; POS-

TLETHWAITE; WALKER, 2000) o trabalho de (LIN; STOORVOGEL; SABERI, 1996) é estendido para o caso multivariável. Em (HU; LIN, 2000) é caracterizada uma região de regulabilidade assintótica, isto é, um conjunto de condições iniciais do sistema e da referência/perturbação para o qual a regulação de saída ainda é possível. Os maiores problemas deste tipo de solução são a determinação de um termo não-linear adequado a fim de recuperar o desempenho do controlador nominal e ainda a falta de robustez no cálculo do seguimento de referência. Esta formulação é aplicada principalmente para sinais de referência e/ou perturbação constantes.

Finalmente, pode-se destacar os controladores de estrutura variável (do inglês, *Variable Structure Control - VSC*). Nos *VSCs* permite-se que o controlador altere sua estrutura, isto é, chaveie entre um dado conjunto de funções contínuas no espaço de estados do sistema. O grande desafio do *VSC* é como selecionar os parâmetros das funções as quais o controlador irá chavear e ainda qual lógica de chaveamento deve ser adotada. A recompensa decorrente da introdução de um controlador mais complexo é a possibilidade de combinar propriedades interessantes de cada uma das estruturas de controle. Dos *VSCs* existentes, pode-se destacar o controlador por modos deslizantes (do inglês, *Sliding Mode Control - SMC*). O *SMC* possui suas raízes no controle via relé, surgindo na antiga União Soviética no final dos anos 50, mas nunca publicado fora deste país até o final dos anos 70, quando os trabalhos (ITKIS, 1976) e (UTKIN, 1977) abriram as portas do *SMC* para o mundo. Após estes trabalhos, a lista de publicações envolvendo *SMC* cresceu rapidamente, fazendo com que esta metodologia de controle se consolidasse tanto no campo de sistemas lineares quanto no dos sistemas não-lineares. Uma noção geral desta metodologia pode ser encontrada em (PERRUQUETTI, 2002) ou (EDWARDS; SPURGEON, 1998). O uso do *SMC* é conhecido por apresentar uma série de vantagens, tanto de projeto quanto de robustez. Destas destacam-se a relativa simplicidade de projeto, podendo ser feito em duas etapas, a invariância para incertezas de modelo e perturbações externas e ainda uma grande variedade de objetivos de controle como regulação, seguimento de trajetória, seguimento de modelo e observação de estados. Do ponto de vista do *SMC*, o principal objetivo da lei de controle é levar a trajetória não-linear dos estados da planta em direção a uma superfície pré-especificada no espaço de estados em um tempo finito  $t_a$  e manter estas trajetórias sobre a superfície  $\forall t \geq t_a$ . Esta superfície é conhecida como superfície de chaveamento ou superfície deslizante. É ela que define a propriedade de chaveamento do sinal de controle, de tal forma que os vetores tangente às trajetórias dos estados do sistema apontem em sua direção. Uma das maiores limitações desta metodologia é o efeito conhecido como *chattering*, encontrado no sinal de controle. Nas proximidades da superfície deslizante o controlador tende a chavear rapidamente entre os controladores, inserindo desta forma harmônicas de alta frequência na planta. Este chaveamento pode provocar falhas nos atuadores ou ainda excitar dinâmicas não modeladas.

## 2.4 Comentários finais

A partir da revisão de bibliografia apresentada neste capítulo foi mostrado que o problema de seguimento e rejeição de sinais periódicos em sistemas com saturação ainda é um tópico pouco estudado no contexto das abordagens baseadas no PMI. Note que a única abordagem que apresenta um número maior de trabalhos relativos à saturação e a síntese de laços de *anti-windup* são os controladores repetitivos de tempo discreto, sem no entanto apresentar uma metodologia sistemática de síntese do laço de *anti-windup* ou caracterizar os conjunto de condições iniciais e referências/perturbações admissíveis. Nos

capítulos seguintes serão apresentadas as contribuições deste trabalho para contornar estes problemas.

### 3 ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLADORES RESONANTES

Este capítulo trata do problema de seguimento e rejeição de sinais periódicos considerando a introdução dos controladores ressonantes de tempo contínuo na malha de controle, conforme apresentado na Seção 2.3.1.1. O problema de interesse será formalizado, servindo de base para os desenvolvimentos deste capítulo e dos capítulos seguintes. De uma forma geral, a metodologia proposta visa a obtenção de condições *LMIs* para a síntese simultânea de uma realimentação de estados estabilizante e do laço de *anti-windup*, além de apresentar uma estimativa dos domínios de estabilidade do sistema e de referências e perturbações admissíveis. Exemplos numéricos serão utilizados para ilustrar alguns aspectos relevantes da metodologia proposta.

#### 3.1 Preliminares

Considere o sistema linear invariante no tempo sujeito à saturação no sinal de controle descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B \text{sat}_{u_0}(u(t)) + B_d d(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ e(t) &= y(t) - r(t)\end{aligned}\tag{38}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é a saída a ser regulada,  $d(t) \in \mathbb{R}^l$  é um vetor de perturbações,  $r(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de referências a ser seguido e  $e(t) \in \mathbb{R}^p$  é o erro de seguimento da referência.

Assume-se que as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas,  $B$  e  $C$  são de posto completo e que o número de entradas é maior ou igual ao número de saídas ( $m \geq p$ ). Além disso, assume-se que os pares  $(A, B)$  e  $(C, A)$  são controláveis e observáveis, respectivamente, e que a saturação dos atuadores é definida por (10). A suposição de  $m \geq p$  é uma condição necessária para a garantia do seguimento/rejeição através do PMI. Por exemplo, com apenas um sinal de controle seria possível atingir o perfeito seguimento em um sistema com duas saídas apenas em casos especiais, onde a estrutura do sistema é particular. Para a maioria dos sistemas reais isto não seria possível (CHEN, 1970, página 500).

Seguindo a formulação apresentada na Seção 2.3.1.1, a função de transferência  $\Phi(s)$  que implementa o PMI pode ser realizada no espaço de estados através do controlador dinâmico

$$\dot{\xi}(t) = A_\xi \xi(t) + B_\xi e(t) + B_\xi E_c (\text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)),\tag{39}$$

onde as matrizes  $A_\xi$  e  $B_\xi$  foram definidas em (24) e  $\xi(t) \in \mathbb{R}^{p_0}$ .

Além disso, o termo  $E_c(sat_{u_0}(u(t)) - u(t))$  em (39) corresponde a um compensador *anti-windup* estático, introduzido a fim de reduzir possíveis efeitos indesejados causados pela saturação dos atuadores (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005), (TURNER; POSTLETHWAITE, 2004).  $E_c \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é a matriz de ganho *anti-windup*, a ser determinada.

Com o objetivo de introduzir (39) na malha de controle é considerado o vetor de estados aumentados

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p_0}.$$

A partir de (38) e (39) segue que

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}_1 sat_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_2(sat_{u_0}(u(t)) - u(t)) + \mathbf{B}_q q(t), \quad (40)$$

onde  $q(t) = [r^T(t) \ d^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{p+l}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times p_0} \\ B_\xi C & A_\xi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{p_0 \times m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{V}E_c, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ B_\xi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & B_d \\ -B_\xi & 0_{p_0 \times l} \end{bmatrix}.$$

Partindo do pressuposto que todos estados estão disponíveis para realimentação, é introduzida uma realimentação estática de estados na forma

$$u(t) = F_1 x(t) + F_2 \xi(t) = Fz(t), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)} \quad (41)$$

com o objetivo de estabilizar o sistema (40). Esta estrutura particular de controle, ilustrada na Figura 12 supondo  $v(t) = sat_{u_0}(u(t))$ , leva ao sistema em malha fechada descrito por

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)z(t) - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\Psi_{u_0}(Fz(t)) + \mathbf{B}_q q(t), \quad (42)$$

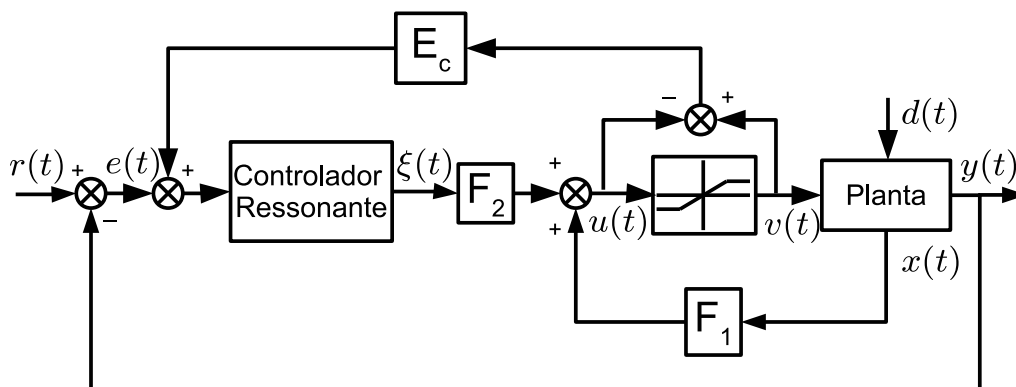


Figura 12: Controlador ressonante - sistema em malha fechada

**Observação 5** Na formulação apresentada neste trabalho a saída do compensador anti-windup é somada na entrada do controlador nominal (TURNER; POSTLETHWAITE, 2004), (GRIMM; TEEL; ZACCARIAN, 2004). Uma solução alternativa seria considerar a compensação anti-windup como uma entrada adicional no controlador (GRIMM et al., 2003), (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005), conforme ilustrado na Figura 3. Neste caso, a dimensão da matriz  $E_c$  deve ser ajustada de forma a evitar conflito de dimensões na composição do estado aumentado  $z(t)$ . Cabe ressaltar que os resultados apresentados a seguir podem ser reformulados de maneira quase direta para o tratamento desta configuração alternativa de anti-windup.

### 3.2 Formulação do problema

Considerando a interconexão de (38) e (39), devido ao elemento de saturação, o PMI não é mais uma condição suficiente para a garantia de seguimento/rejeição. Neste caso, o sistema em questão é não-linear, fazendo com que a sua estabilidade entrada-estado dependa dos valores de amplitude dos sinais de referência e perturbação.

Note também que a saída esperada é variante no tempo e que esta é uma combinação linear dos estados do sistema. Logo, não é mais possível se estabelecer um ponto de equilíbrio para os estados do sistema, mas sim uma trajetória de equilíbrio associada ao seguimento/rejeição. A caracterização desta trajetória não é trivial e depende dos sinais de referência e perturbação considerados. Uma alternativa para contornar este problema é a utilização de uma abordagem multi-elipsoidal, conforme apresentado a seguir.

Considere os seguintes conjuntos:

- $\mathcal{Z}_0 \Rightarrow$  Conjunto de condições iniciais admissíveis;
- $\mathcal{Q}_0 \Rightarrow$  Conjunto de referências e perturbações admissíveis;
- $\mathcal{J}_0 \Rightarrow$  Conjunto contido na interseção do conjunto de condições iniciais admissíveis com a região de operação linear do sistema, ou seja,  $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{Z}_0 \cap S(F, u_0)$ .

Baseado nestes conjuntos, é possível formular o seguinte problema:

**Problema 2** Calcular uma realimentação de estados (41) e um laço de anti-windup tais que, para todas as condições iniciais no interior de  $\mathcal{Z}_0$  e para todas as referências e perturbações tais que  $q(t)$  esteja no interior de  $\mathcal{Q}_0$ , então as trajetórias do sistema (42) iniciadas em  $\mathcal{Z}_0$  convergem para  $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{Z}_0 \cap S(F, u_0)$  em um tempo finito  $t_1$  e permanecem no interior deste conjunto para todo  $t \geq t_1$ .

Desta forma, se as trajetórias do sistema ficam confinadas no interior da região de operação linear para todo tempo  $t \geq t_1$ , então o sistema com saturação passa a comportar-se como um sistema puramente linear. Assim, a função zona-morta descentralizada em (42) assume valor nulo, resultando em

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)z(t) + \mathbf{B}_q q(t).$$

Neste caso, a presença na malha de controle de um controlador que implemente o PMI garante o seguimento dos sinais de referência e/ou a rejeição dos sinais de perturbação. Desta forma não é necessário impor condições sobre os pontos de equilíbrio do sistema ou a utilização das transformações de coordenadas consideradas em (TARBOURIECH; PIT-TET; BURGAT, 2000), (CAO; LIN; WARD, 2004) e (FLORES; ECKHARD; GOMES DA SILVA JR, 2008).

Um problema de otimização implícito ao Problema 2 é a determinação de uma realimentação de estados estabilizante e do laço de *anti-windup* tais que os tamanhos dos conjuntos  $\mathcal{Z}_0$  e/ou  $\mathcal{Q}_0$  sejam maximizados. Neste caso, é necessária a escolha de um critério de medida para o tamanho destes conjuntos, conforme apresentado em (BOYD et al., 1994).

No presente trabalho, os conjuntos  $\mathcal{Z}_0$ ,  $\mathcal{Q}_0$  e  $\mathcal{J}_0$  foram escolhidos como conjuntos elipsoidais definidos por:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0 &= \Omega(P, 1) = \{z \in \mathbb{R}^n; z^T P z \leq 1\}, P = P^T > 0, \\ \mathcal{J}_0 &= \Omega(J, 1) = \{z \in \mathbb{R}^n; z^T J z \leq 1\}, J = \eta P, \eta > 1, \\ \mathcal{Q}_0 &= \Omega(R, 1) = \{q \in \mathbb{R}^l; q^T R q \leq 1\}, R = R^T > 0.\end{aligned}$$

Note que a escolha de  $J = \eta P$ ,  $\eta > 1$  faz com que o conjunto  $\mathcal{J}_0$  seja uma versão contraída do conjunto  $\mathcal{Z}_0$ . Será visto na sequência deste trabalho que o parâmetro  $\eta$  é determinado através de um procedimento de otimização de forma a garantir que  $\mathcal{J}_0$  está contido no interior da região de operação linear do sistema. Além disso, é importante destacar que estes dois conjuntos podem ser associados à mesma função candidata de Lyapunov  $V(z(t)) = z(t)^T P z(t)$ . As regiões consideradas neste problema são ilustradas na Figura 13, onde todas as trajetórias iniciadas na região em cinza convergem para o interior do conjunto elipsoidal  $\mathcal{J}_0$  e ficam confinadas ao interior deste mesmo conjunto.

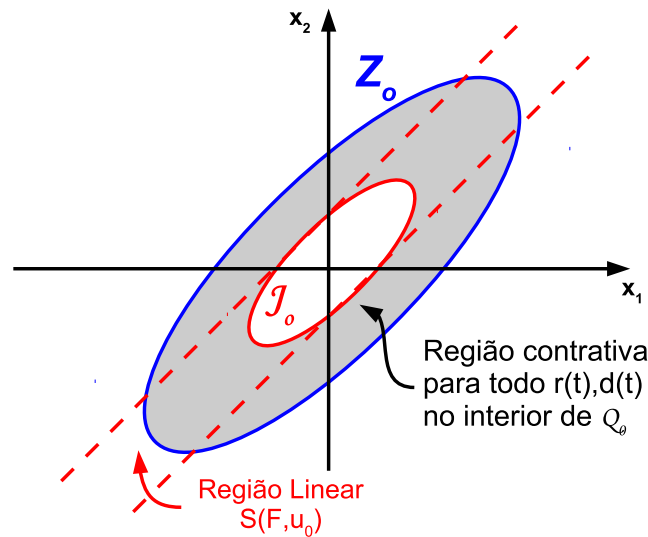


Figura 13: Regiões associadas à abordagem multi-elipsoidal.

**Observação 6** O problema da forma como foi proposto pode ser visto como um problema de tolerância a perturbações análogo ao Problema 1. Neste caso, a suposição de  $q(t) \in \Omega(R, 1)$  implica em uma restrição quadrática que reflete uma limitação na amplitude de  $q(t)$  (TARBOURIECH et al., 2011). Note que restrições tais que  $q(t) \in \mathcal{L}_\infty$  podem ser representadas diretamente desta maneira. Por exemplo, se a matriz  $R$  é uma matriz diagonal, então cada um dos termos que compõem o vetor  $q(t)$  estão limitados de tal



forma que

$$\|q_j(t)\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{R_{(j,j)}}}, \quad j = 1 \cdots, p+l.$$

Para as regiões da Figura 1, os conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(\eta P, 1)$  correspondem diretamente aos conjuntos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{R}$ , respectivamente. Neste caso, o conjunto para o qual é garantido que as trajetórias são limitadas estaria no interior do conjunto de condições iniciais admissíveis.

### 3.3 Resultado principal

O teorema a seguir apresenta condições para a determinação dos ganhos  $F$  e  $E_c$  de tal forma que o Problema 2 seja resolvido.

**Teorema 6** Se existirem matrizes  $W \in \mathbb{R}^{(n+p_0) \times (n+p_0)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$  simétricas definidas positivas, matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , uma matriz  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva e escalares positivos  $\lambda$  e  $\eta$  satisfazendo<sup>1</sup>

$$\begin{bmatrix} \text{Sim}\{\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1Y\} + \bar{\lambda}W & -\mathbf{B}_1L - \mathbf{V}M + X^T & \mathbf{B}_q \\ * & -2L & 0 \\ * & * & -\lambda R \end{bmatrix} < 0 \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{(i)} - X_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} \eta W & * \\ Y_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (45)$$

onde  $\bar{\lambda} = \lambda(-1 + 3\eta)$ , então os ganhos  $F = YW^{-1}$  e  $E_c = ML^{-1}$  são tais que todas as trajetórias de (42) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$ ,  $W = P^{-1}$ , tendem para o conjunto  $\Omega(J, 1) \subset S(F, u_0)$  em um tempo finito  $t_1$  e permanecem neste conjunto  $\forall t \geq t_1$ , desde que as referências e perturbações sejam tais que  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

*Prova.* Calculando a derivada temporal da função candidata de Lyapunov  $V(z(t)) = z(t)^T P z(t)$  ao longo das trajetórias do sistema (42) segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= z(t)^T ((\mathbf{A} + \mathbf{B}_1F)^T P + P(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1F))z(t) + 2z(t)^T P \mathbf{B}_q q \\ &\quad - 2z(t)^T P (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \Psi_{u_0}(Fz(t)) \end{aligned}$$

Baseado nos resultados de (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005) apresentados na Seção 2.2.2.2, se  $z(t) \in S(F - G, u_0)$ , então  $\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T [\Psi_{u_0}(Fz(t)) - Gz(t)] \leq 0$  é verificada para qualquer matriz  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva. Logo, se

$$\dot{V}(z(t)) - 2\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T \Psi_{u_0}(Fz(t)) + 2\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T Gz(t) < 0,$$

então  $\dot{V}(z(t)) < 0$  desde que  $z(t) \in S(F - G, u_0)$ .

Para garantir que as trajetórias do sistema em malha fechada iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem para  $\Omega(\eta P, 1)$  em um tempo finito  $t_1$  e permaneçam neste conjunto  $\forall t \geq t_1$ , necessita-se que  $\dot{V}(z(t)) < 0$  seja garantido para todo  $z(t)$  e  $q(t)$  tais que  $z(t)^T P z(t) \leq 1$

<sup>1</sup> $Y_{(i)}$  e  $X_{(i)}$  denotam a  $i$ -ésima linha das matrizes  $Y$  e  $X$ , respectivamente.

( $z(t)$  dentro de  $\Omega(P, 1)$ ),  $z(t)^T \eta P z(t) \geq 1$  ( $z(t)$  fora de  $\Omega(\eta P, 1)$ ) e  $q(t)^T R q(t) \leq 1$  ( $q(t)$  dentro de  $\Omega(R, 1)$ ). Utilizando o *S-procedure* (BOYD et al., 1994), isto pode ser obtido se existir um escalar positivo  $\lambda$  tal que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) & -2\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T(\Psi_{u_0}(Fz(t)) - Gz(t)) + \lambda(1 - z(t)^T P z(t)) \\ & +3\lambda(z(t)^T \eta P z(t) - 1) + \lambda(1 - q^T(t) R q(t)) < 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\Omega(P, 1) \in S(F - G, u_0). \quad (47)$$

Logo, escrevendo o lado esquerdo de (46) na forma

$$\begin{bmatrix} z(t)^T & \Psi_{u_0}(Fz(t))^T & q^T \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} z(t) \\ \Psi_{u_0}(Fz(t)) \\ q \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{P(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)\} - \lambda(1 - 3\eta)P & -P(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) + G^T T & P\mathbf{B}_q \\ * & -2T & 0 \\ * & * & -\lambda R \end{bmatrix},$$

então é suficiente que  $\mathcal{M} < 0$  para que (46) seja verificada. Pré- e pós-multiplicando  $\mathcal{M}$  por  $\text{diag}\{P^{-1}, T^{-1}, I\}$  e realizando as mudanças de variáveis  $W = P^{-1}$ ,  $X = GP^{-1}$ ,  $Y = FP^{-1}$ ,  $L = T^{-1}$ ,  $M = E_c T^{-1}$  e  $\bar{\lambda} = \lambda(-1 + 3\eta)$  segue que

$$\bar{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \text{Sim}\{\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y\} + \bar{\lambda}W & -\mathbf{B}_1 L - \mathbf{V}M + X^T & \mathbf{B}_q \\ * & -2L & 0 \\ * & * & -\lambda R \end{bmatrix}.$$

Desta forma, tem-se que (43) implica em  $\mathcal{M} < 0$  de tal forma que (46) é verificada.

A garantia que (44) é atendida implica que  $\Omega(P, 1)$  está no interior da região  $S(F - G, u_0)$ . Logo, a partir dos resultados de (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005), para todo  $z(t) \in \Omega(P, 1)$  segue que a não-linearidade  $\Psi_{u_0}(Fz(t))$  satisfaz a condição de setor modificada  $\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T[\Psi_{u_0}(Fz(t)) - Gz(t)] \leq 0$ . Este fato, em conjunto com (43), implica que existe um escalar  $\mu > 0$  tal que a relação

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\mu V(z(t)) < 0,$$

se verifica  $\forall z(t) \in \Phi = \{z \in \mathbb{R}^{n+p_0}; z^T P z \leq 1, z^T J z \geq 1\}$  e  $\forall q(t) \in q(t)^T R q(t) \leq 1$ . Desta forma,  $V(z(t)) \leq e^{-\mu t} V(z(0))$ ,  $\forall z(t) \in \Phi$  e  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ ,  $t \geq 0$ . Como  $J = \eta P$ , então existe um valor de tempo  $t = t_1$  o qual  $V(z(t_1)) = \frac{1}{\eta}$ , i.e.,  $z(t_1)^T \eta P z(t_1) = 1$ . Além disso, como  $\dot{V}(z(t)) < 0$  é verificada na superfície de  $\Omega(J, 1)$ , tem-se que todas as trajetórias entram em  $\Omega(J, 1)$  e permanecem em seu interior,  $\forall t \geq t_1$ . Finalmente, a relação (45) implica que  $\Omega(J, 1)$  está no interior da região de operação linear  $S(F, u_0)$ . ■

Baseado no Teorema 6, pode-se enunciar o seguinte corolário para a garantia do erro nulo de seguimento.

**Corolário 1** *Se o sistema (38) não possui zeros de transmissão em  $s = \pm j\omega_{r(i)k_1}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , e  $s = \pm j\omega_{d(j)k_2}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , e se as condições (43), (44) e (45) do Teorema 6 são verificadas, então  $\forall z(0) \in \Omega(P, 1)$  e para todo sinal de referência periódico  $r(t)$  e perturbação  $d(t)$  definido em (22) tais que  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ , segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .*

*Prova.* A partir do Teorema 6, se  $z(0) \in \Omega(P, 1)$  e  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ , as condições (43), (44) e (45) garantem que as trajetórias convergem para a região de operação linear do sistema em malha fechada e permanecem no interior desta região, a partir de algum tempo finito  $t = t_1$ . Neste caso, o comportamento do sistema é linear para todo  $t \geq t_1$ . Além disso, se nenhum dos modos da referência e perturbação são zeros de transmissão do sistema, então segue que nenhum polo do compensador (23) é cancelado (ver (CHEN, 1970) pp. 504-505). Baseado no PMI, segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . ■

**Observação 7** *O corolário anterior assume que não há cancelamento dos polos do controlador ressonante por parte dos zeros da planta. Suponha agora que a planta apresenta  $h$  pares de zeros em uma determinada harmônica  $\omega_k$  do sinal de referência e/ou perturbação. Neste caso, o seguimento e a rejeição podem ser garantidos através da introdução de  $h + 1$  pares de polos correspondentes a esta harmônica. Do ponto de vista do controlador repetitivo, a harmônica  $\omega_k$  seria considerada  $h + 1$  vezes na composição de  $\phi(s)$ .*

### 3.4 Problema de otimização

Baseado no Teorema 6, pode-se propor um problema de otimização para a obtenção dos ganhos  $F$  e  $E_c$  tendo como objetivo a maximização do tamanho dos conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e/ou  $\Omega(R, 1)$ .

Os tamanhos de  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$  podem ser medidos em relação aos conjuntos poliedrais  $\mathcal{X}_R = \text{conv}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_f\}$  e  $\mathcal{D}_R = \text{conv}\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_s\}$ , onde os vértices  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n+p_0}$ ,  $i = 1, \dots, f$  e  $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^{p+l}$ ,  $j = 1, \dots, s$  correspondem a direções nas quais os conjuntos deverão ser maximizados, conhecidas *a priori*. Logo, o objetivo do problema de otimização é maximizar escalares  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  de tal forma que  $\alpha\mathcal{X}_R \subset \Omega(P, 1)$  e  $\beta\mathcal{D}_R \subset \Omega(R, 1)$  sejam maximizados. A solução deste problema pode ser obtida através do seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{PO1:} \min (1 - \kappa)\gamma + \kappa\delta$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{x}_i^T \\ \mathbf{x}_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, f \quad (48)$$

$$\mathbf{d}_j^T R \mathbf{d}_j \leq \delta, \quad j = 1, \dots, s \quad (49)$$

Relações (43), (44) e (45).

Assumindo  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  e  $\beta = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ , a minimização de  $\gamma$  e  $\delta$  implica na maximização de  $\alpha$  e  $\beta$ . O escalar  $0 \leq \kappa \leq 1$  pode ser escolhido de forma a priorizar a maximização de  $\Omega(P, 1)$  ou  $\Omega(R, 1)$ .

Supondo que um dos conjuntos é conhecido, pode-se definir os seguintes subproblemas de otimização:

**PO1a:** Maximização de  $\Omega(P, 1)$  para  $\Omega(R, 1)$  dado. Neste caso, basta resolver o problema de otimização PO1 assumindo  $\kappa = 0$  e  $\delta = 1$  em (49);

**PO1b:** Maximização de  $\Omega(R, 1)$  para um conjunto  $\Omega(P, 1)$  dado. Neste caso, basta resolver o problema de otimização PO1 assumindo  $\kappa = 1$  e  $\gamma = 1$  em (48);

Note que para valores fixos dos escalares  $\lambda$  e  $\eta$ , as relações (43), (44) e (45) são de fato *LMIs*. Logo, a solução ótima de PO1 pode ser determinada por uma varredura nestas duas variáveis, ou seja, fixa-se  $\lambda$  e  $\eta$  em um *grid* e determina-se o valor de  $(1 - \kappa)\gamma + \kappa\delta$  para cada um dos pontos do *grid*. Os valores de  $\lambda$  e  $\eta$  que resultam no menor valor do critério de otimização são considerados parâmetros ótimos. A necessidade de fixar estes dois parâmetros deu origem ao termo “*quasi*” *LMIs* adotado neste trabalho.

**Observação 8** Considerando a aplicação do *S-procedure* em (46), pode-se considerar  $\dot{V}(z(t)) + \lambda_1(1 - z(t)^T P z(t)) + \lambda_2(z(t)^T \eta P z(t) - 1) + \lambda_3(1 - q^T(t) R q(t)) < 0$  onde  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são escalares positivos. No desenvolvimento apresentado, foi realizada uma escolha particular de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , tais que  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda$  e  $\lambda_2 = 3\lambda$ . Esta escolha particular introduz algum grau de conservadorismo nos resultados, em troca de uma redução do custo computacional já que é necessária a varredura em apenas duas variáveis ( $\lambda$  e  $\eta$ ) para a solução do problema de otimização apresentado nesta mesma seção.

### 3.5 Exemplos numéricos

A seguir serão apresentados três exemplos numéricos, sendo:

**Exemplo 1:** Exemplo *SISO* de dimensão unitária ( $n = m = p = l = 1$ ). Este exemplo tem como objetivo ilustrar as regiões consideradas na formulação do problema, ilustrando que de fato as trajetórias do sistema em malha fechada convergem para a região linear e ficam confinadas em um conjunto invariante no interior desta região;

**Exemplo 2:** Modelo da *UPS* inspirado em (PEREIRA et al., 2009). Neste exemplo será analisado o erro de seguimento conforme o número de harmônicas do sinal de perturbação consideradas na formulação do controlador ressonante é aumentado;

**Exemplo 3:** Exemplo *MIMO* apresentado em (FLORES et al., 2012). Neste caso, o objetivo de estudo é a melhoria no tempo de resposta e a redução do conservadorismo das soluções obtidas considerando a introdução ou não do laço de compensação de *anti-windup*.

Todos os exemplos foram implementados em Matlab (versão R2010b) e Simulink. Além disso, os problemas de otimização apresentados foram resolvidos através do *solver mincx* do LMILab. Nos exemplos de simulação onde são apresentadas as saídas do sistema e os sinais de referência, a escala de amplitude foi escolhida de forma a priorizar a visualização do seguimento. Neste caso, o sinal  $y(t)$  pode assumir valores bem maiores do que aqueles apresentados nas respectivas figuras.

#### 3.5.1 Exemplo 1 - sistema *SISO*

Neste exemplo, o objetivo é ilustrar os elipsoides  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(\eta P, 1)$ , além das trajetórias do sistema em malha fechada resultante. Neste caso, o sistema aumentado deve apresentar no máximo dois estados, de forma que as trajetórias sejam visualizadas no plano  $x(t) \times \xi(t)$ . Por este motivo foram escolhidos os seguintes escalares para a representação do sistema (38):

$$A = -2, B = 1, B_d = 1, C = 5 \text{ e } u_0 = 2$$

O sinal de referência a ser considerado é uma questão que requer cuidados. O sinal periódico mais simples que se pode seguir com a formulação apresentada neste capítulo

seria um sinal senoidal, resultando assim em  $\xi(t) \in \mathbb{R}^2$ . Desta forma, o plano  $x(t) \times \xi(t)$  seria tridimensional, o que dificulta a visualização das trajetórias do sistema. Visando contornar este problema, foram escolhidos como sinais de referência e perturbação sinais do tipo salto (degrau)<sup>2</sup> com amplitude definida a partir do conjunto  $\Omega(R, 1)$ . Assim, a garantia de seguimento/rejeição é obtida com a introdução de um integrador na malha de controle, resultando em  $\xi(t) \in \mathbb{R}$ .

As direções de maximização  $\mathcal{X}_R = \text{conv}\{\mathbf{x}_1\}$  e  $\mathcal{D}_R = \text{conv}\{\mathbf{d}_1\}$  foram escolhidas sendo  $\mathbf{x}_1 = [1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{d}_1 = [1 \ 0.5]^T$ . Desta forma, o conjunto  $\Omega(P, 1)$  é maximizado na direção correspondente ao estado da planta e o conjunto  $\Omega(R, 1)$  é maximizado em uma direção tal  $d_{max} = 0.5r_{max}$ .

Supondo  $\kappa = 0.5$  e fazendo uma varredura em  $\lambda$  e  $\eta$  segue que o valor ótimo de  $\min (1 - \kappa)\gamma + \kappa\delta$  é obtido para  $\lambda = 1.0258 \times 10^{-2}$  e  $\eta = 199.9634$ , resultando em  $\alpha = 0.6761$ ,  $\beta = 0.2437$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 2.1777 & -2.7022 \\ -2.7022 & 4.4331 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.5969 & -1.1938 \\ -1.1938 & 2.3876 \end{bmatrix} \times 10^8$$

$$F = \begin{bmatrix} -28.0263 & 36.6786 \end{bmatrix} \text{ e } E_c = 0.4334.$$

Na Figura 14 é apresentada a simulação do sistema (42) considerando  $r_{max} = 0.2437$ ,  $d_{max} = 0.1219$  e  $z(0) = [1.3607 \ 0.8925]^T$ . Para determinar os valores máximos de referência e perturbação foi utilizada a relação (49). Neste caso segue que  $\mathbf{d}_1^T R \mathbf{d}_1 = \delta$  ou, considerando  $\beta = 1/\sqrt{\delta}$ ,  $(\beta \mathbf{d}_1)^T R (\beta \mathbf{d}_1) = 1$ . Assim, na direção  $\mathbf{d}_1$ , o máximo sinal de referência e perturbação tal que  $q_{max} \in \partial\Omega(R, 1)$  é dado por  $q_{max} = \beta \mathbf{d}_1$ . Neste exemplo  $q_{max} = 0.2437[1 \ 0.5]^T$ , resultando nos valores de  $r_{max}$  e  $d_{max}$  apresentados. Da mesma forma, a escolha de condição inicial apresentada faz com que  $z(0)^T P z(0) = 1$ , isto é,  $z(0) \in \partial\Omega(P, 1)$ . Pode-se observar que o sistema permanece saturado por aproximadamente 0.5s e que de fato é possível seguir o sinal constante com erro nulo.

A Figura 15(a) apresenta o plano de fase do sistema aumentado considerando  $z(t) = [x(t)^T \ \xi(t)^T]^T$ , onde estão destacados os elipsoides  $\Omega(P, 1)$ ,  $\Omega(\eta P, 1)$  e a região de operação linear do sistema. Além disso, é apresentada a evolução da trajetória do sistema iniciada em  $z(0) = [1.3607 \ 0.8925]^T$ , onde observa-se que depois de um certo tempo esta trajetória de fato entra em  $\Omega(\eta P, 1)$ . No detalhamento deste conjunto apresentado na Figura 15(b) fica claro que a trajetória correspondente não deixa o interior de  $\Omega(\eta P, 1)$ .

Seguindo este mesmo raciocínio, na Figura 16(a), é apresentado o plano de fase do sistema para várias trajetórias iniciadas na fronteira de  $\Omega(P, 1)$ . Neste caso, é possível observar os mais distintos comportamentos como trajetórias que são iniciadas na região linear e deixam esta região depois de um certo tempo (trajetória na cor magenta) e trajetórias iniciadas fora da região linear que cruzam esta região em um certo tempo (trajetória na cor marrom). O detalhe de  $\Omega(\eta P, 1)$  apresentado na Figura 16(a) mostra que todas estas trajetórias convergem para uma mesma trajetória de equilíbrio no interior de  $\Omega(P, 1)$ .

### 3.5.2 Exemplo 2 - UPS

Nesta seção é considerado um sistema UPS seguindo a modelagem apresentada em (PEREIRA et al., 2009). Este modelo foi escolhido por retratar de forma fiel a plataforma experimental instalada no Laboratório de Sistemas de Controle, Automação e Robótica - LASCAR da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS. Assim, o objetivo é mostrar que a metodologia proposta pode ser efetivamente aplicada em plantas reais.

<sup>2</sup>Observe que um sinal constante (tipo salto ou degrau) pode ser visto como um sinal senoidal de frequência zero.

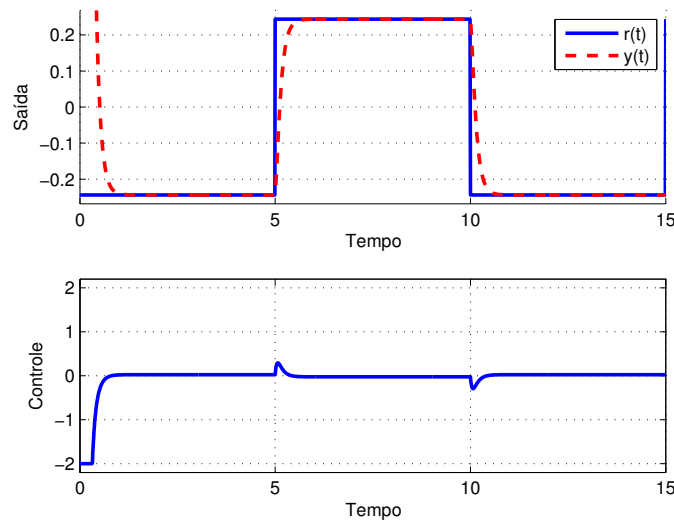


Figura 14: Sistema *SISO* - controlador ressonante - simulação do sistema (42) para  $r_{max} = 0.2437$ ,  $d_{max} = 0.1219$  e  $z(0) = [1.3607 \ 0.8925]^T$ .

Considere o conversor CC-CA ilustrado na Figura 17. Para este sistema, a tensão entre as chaves  $S1$  e  $S2$  é a variável controlada através de um sinal com modulação por largura de pulso (do inglês, *Pulse Width Modulation* - *PWM*). Considerando o modelo médio deste conversor de potência, o sistema *UPS* pode ser representado no espaço de estados por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_d i_d(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (50)$$

onde o estado  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  é composto pela corrente no indutor  $L_f$  e pela tensão no capacitor  $C_f$ , respectivamente,  $u(t)$  é o sinal com modulação *PWM*,  $y(t)$  é a tensão de saída e  $i_d(t)$  é uma corrente de distúrbio, adicionada ao modelo a fim de considerar os efeitos de cargas não-lineares conectadas à saída do sistema (normalmente representada por um conjunto retificador-capacitor).

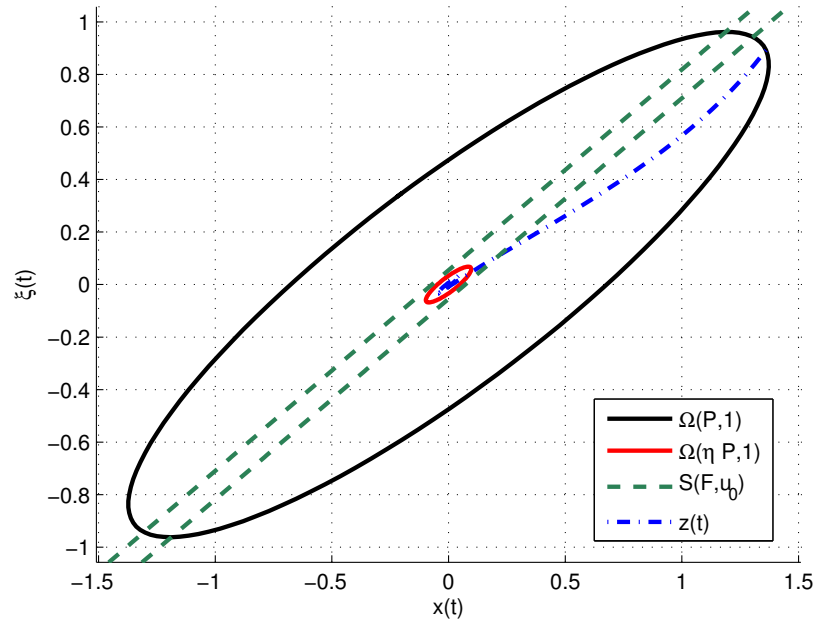
Baseado na teoria elementar circuitos, as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C$  que caracterizam (50) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_{L_f}}{L_f} & -\frac{1}{L_f} \\ \frac{1}{C_f} & -\frac{Y_0}{C_f} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{K_{pwm}}{L_f} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C_f} \end{bmatrix}, \quad \text{e } C = [0 \ 1]$$

onde  $R_{L_f}$  denota a resistência interna do indutor  $L_f$ ,  $Y_0$  denota a admitância nominal da carga considerada,  $L_f$  é a indutância do filtro de saída e  $C_f$  é a capacitância deste mesmo filtro.

Os valores numéricos considerado são os mesmos utilizados em (BONAN et al., 2011), ou seja,  $L_f = 1\text{mH}$ ,  $R_{L_f} = 15.0\text{m}\Omega$ ,  $C_f = 300.0\mu\text{F}$  e  $Y_0 = 0.2\Omega^{-1}$ . A tensão do barramento CC foi arbitrada em 600V, resultando desta forma em uma excursão de controle de  $u_0 = 300\text{V}$  (resultante da configuração em meia-ponte (*half-bridge*) do inversor).

O sinal de referência é um sinal senoidal com período  $\tau = 1/60\text{s}$  (60Hz) e amplitude máxima de 155.5635V ( $110V_{RMS}$ ), simulando a senoide padrão fornecida pela rede elétrica. O sinal de perturbação é um sinal periódico com o mesmo período da referência e



(a) Regiões consideradas

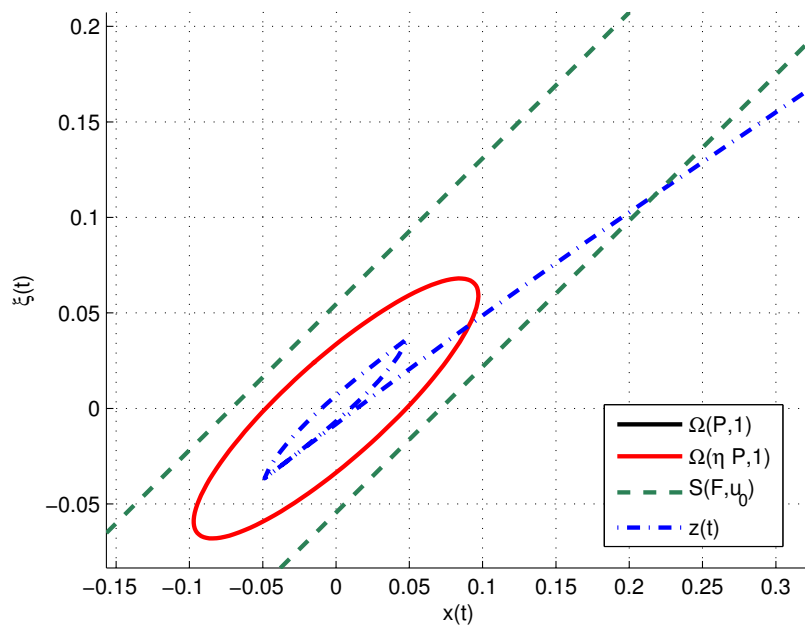
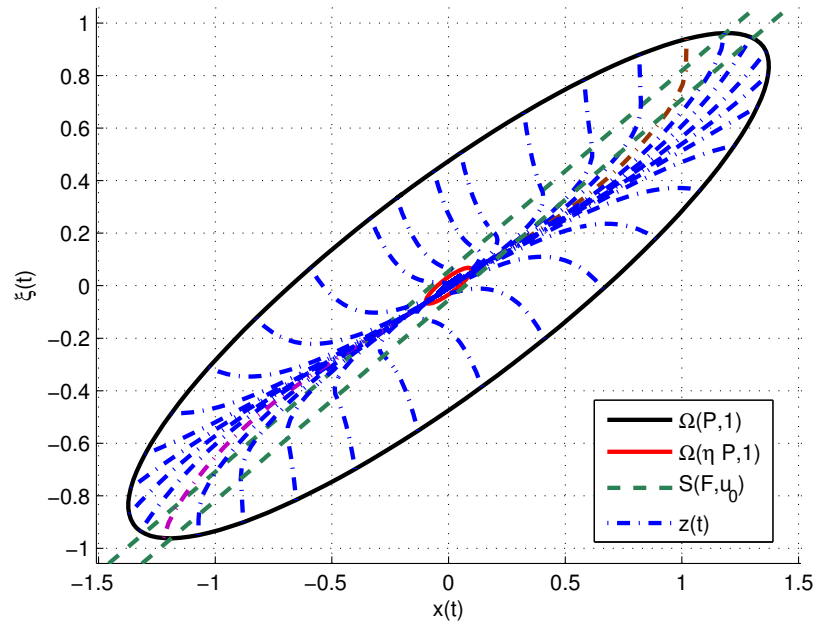
(b) Detalhe  $\Omega(\eta P,1)$ 

Figura 15: Sistema *SISO* - controlador ressonante - trajetória de (42) iniciada em  $z(0) = [1.3607 \ 0.8925]^T$ .



(a) Regiões consideradas

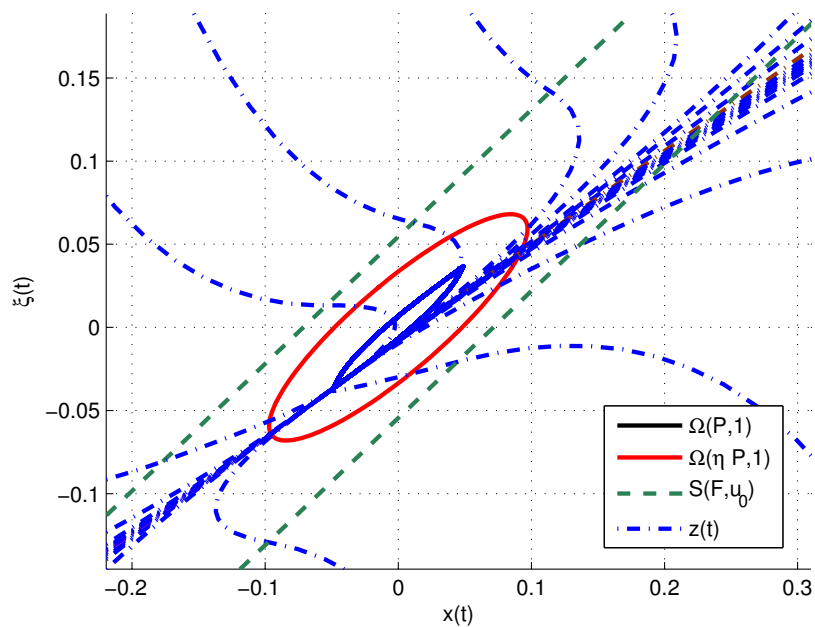
(b) Detalhe  $\Omega(\eta P, 1)$ 

Figura 16: Sistema *SISO* - controlador ressonante - trajetórias de (42) iniciadas na fronteira de  $\Omega(P, 1)$ .



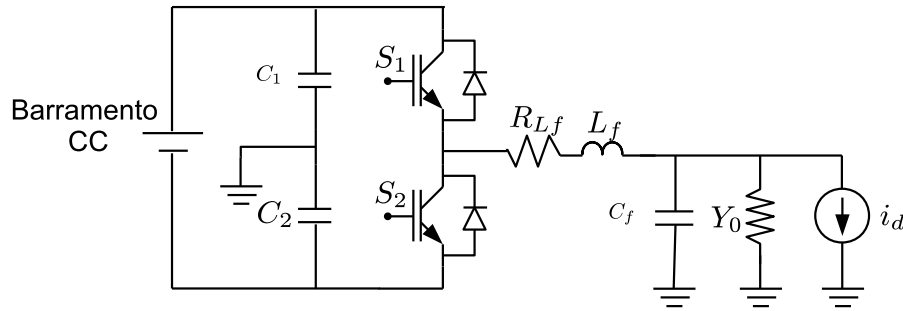


Figura 17: Topologia *UPS*.

elevado conteúdo harmônico, de forma que sua amplitude máxima seja de 50A. Baseado nos resultados experimentais de (BONAN et al., 2010), o perfil do sinal de perturbação que será utilizado nos exemplos deste capítulo é apresentado na Figura 18(a). Na Figura 18(b) é apresentado o espectro deste sinal, onde são mostradas as amplitudes das 7 primeiras harmônicas (obtidas através da *CTFS*). Pode-se observar que este sinal é composto principalmente por componentes múltiplas ímpares da frequência fundamental  $f = 60\text{Hz}$ . O efeito da inclusão de cada uma destas harmônicas no erro de seguimento/rejeição é o objetivo principal deste exemplo.

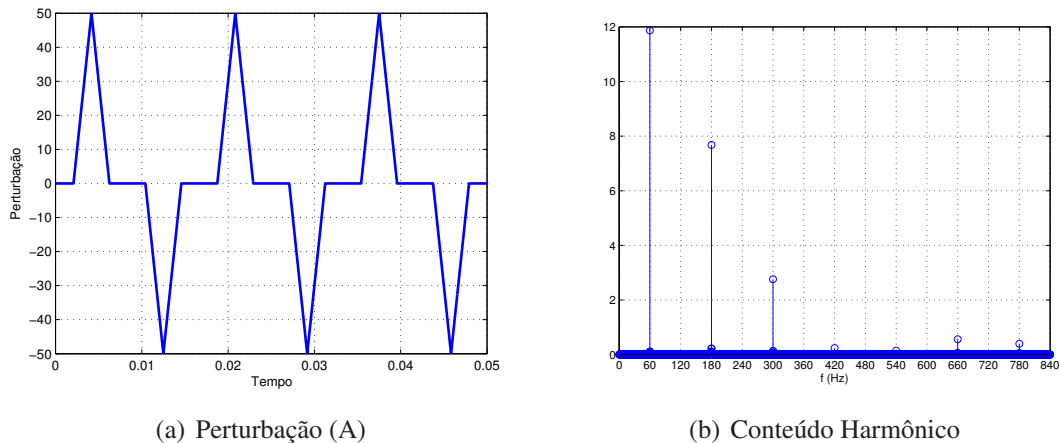


Figura 18: *UPS* - sinal de perturbação e seu conteúdo harmônico.

O problema de otimização escolhido foi maximizar o conjunto de condições iniciais para um dado conjunto de valores máximos dos sinais de referência e perturbação, ou seja, a solução de PO1a. Neste caso, como o conjunto  $\Omega(R, 1)$  é conhecido, então fixou-se  $\delta = 1$  e  $\kappa = 0$ , de forma a maximizar apenas  $\Omega(P, 1)$ . As direções de otimização foram arbitradas de tal forma que  $\mathbf{x}_1 = [1 \ 1 \ 0_{1 \times p_0}]^T$  e  $\mathbf{d}_1 = [155.5635 \ 50]^T$ .

Nas Figuras 19-21 são apresentados os resultados para a solução de PO1a considerando a varredura em  $\lambda$  e  $\eta$ . Os pontos em azul escuro são pontos onde não foi possível encontrar solução para PO1a e a barra colorida indica o valor do inverso do critério de otimização  $(1 - \kappa)\gamma + \kappa\delta$ . Além disso, em cada figura é destacado o ponto que resulta no menor critério de otimização. Os dados apresentados na Figura 19 foram obtidos considerando apenas a introdução da frequência fundamental no modelo interno. Na Figura 20 é considerada a frequência fundamental e sua terceira harmônica e na Figura 21 é

considerada a frequência fundamental e suas terceira e quinta harmônicas.

Não foi possível obter solução para o PO1a quando ocorre a adição de harmônicas de maior ordem. Isto se deve, provavelmente, a um problema de condicionamento nas matrizes do sistema aumentado. O termo independente de  $\phi(s)$  (denotado por  $a_v$ ) corresponde à multiplicação do valor ao quadrado de cada uma das frequências consideradas, isto é,  $a_v = \omega_1^2 \omega_2^2 \cdots \omega_k^2$ . Assim, para apenas a frequência fundamental segue que  $a_v = (2\pi 60)^2 = 1.4212 \times 10^5$ ; para a frequência fundamental e terceira harmônica tem-se  $a_v = (2\pi 60)^2 (2\pi 180)^2 = 1.8179 \times 10^{11}$ ; finalmente, para a frequência fundamental, terceira e quinta harmônicas segue que  $a_v = (2\pi 60)^2 (2\pi 180)^2 (2\pi 300)^2 = 6.4591 \times 10^{17}$ . O número de condicionamento da matriz  $\mathbf{A}$  em (42) tem a mesma ordem de grandeza que  $a_v$ .

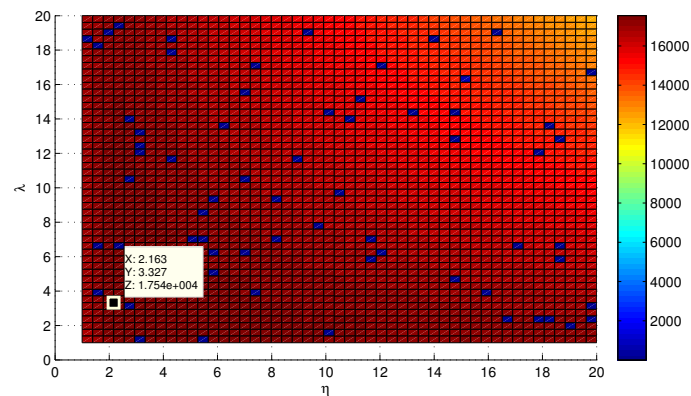


Figura 19: *UPS* - controlador ressonante - varredura em  $\lambda$  e  $\eta$  considerando apenas a frequência fundamental.

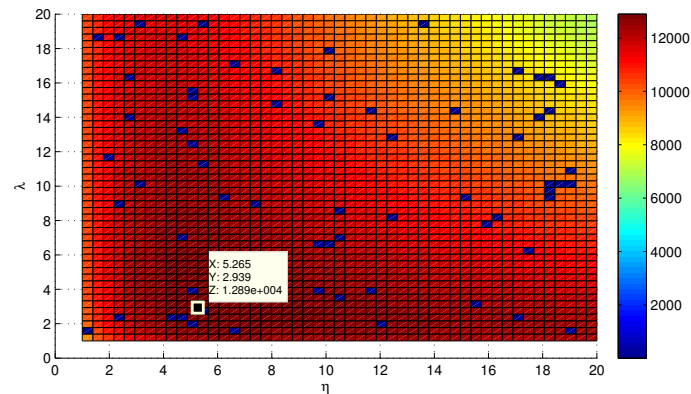


Figura 20: *UPS* - controlador ressonante - varredura em  $\lambda$  e  $\eta$  considerando a frequência fundamental e terceira harmônica.

Para cada um dos casos ilustrados nas Figuras 19-21, os valores do ganho  $F$  e  $E_c$  resultantes da solução de PO1a para os valores ótimos de  $\lambda$  e  $\eta$  são apresentados na Tabela 1. Note que o elemento  $F(1, 3)$  de cada um dos ganhos é da mesma ordem de grandeza que  $a_v$ , ou seja, podem assumir valores extremamente altos dependendo do número de harmônicas considerado. Normalmente, ganhos de valor elevado podem ocasionar problemas

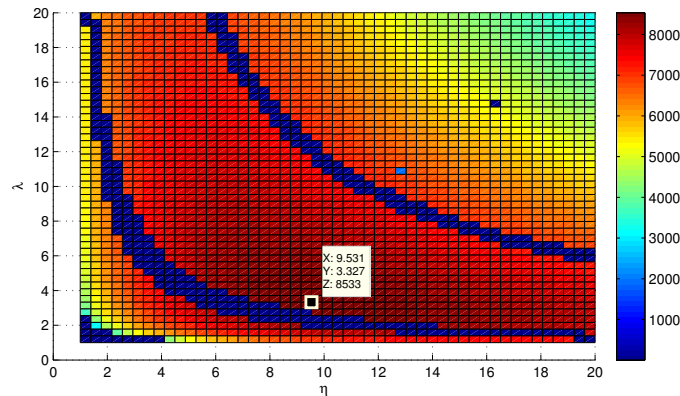


Figura 21: UPS - controlador ressonante - varredura em  $\lambda$  e  $\eta$  considerando a frequência fundamental, terceira e quinta harmônica.

de implementação como a amplificação de ruídos inerentes ao processo. Na Figura 22 são apresentados os erros de seguimento considerando a simulação do sistema para os ganhos da Tabela 1. Pode-se observar que de fato a introdução de mais harmônicas diminui o erro associado à perturbação. No melhor cenário possível ( $\omega_0$ ,  $3\omega_0$  e  $5\omega_0$ ), o erro máximo de seguimento em regime permanente é de 12.25V ou 7.5% em relação ao valor de referência.

Tabela 1: UPS - ganhos dos controladores ressonantes

Frequência fundamental ( $\omega_0$ )	
$E_c = 20.2129$	$F = \begin{bmatrix} -0.1000 & -0.1038 & 1.6788 \times 10^5 & 227.3145 \end{bmatrix}$
Frequência fundamental e terceira ( $\omega_0$ e $3\omega_0$ )	
$E_c = 23.5886$	$F = \begin{bmatrix} -0.0773 & -0.1159 & 1.0493 \times 10^{11} & 2.9986 \times 10^8 & \dots \\ \dots & 6.1761 \times 10^5 & 357.9318 \end{bmatrix}$
Frequência fundamental, terceira e quinta harmônica ( $\omega_0$ , $3\omega_0$ e $5\omega_0$ )	
$E_c = 19.8569$	$F = \begin{bmatrix} -0.1951 & -0.5172 & 1.0884 \times 10^{18} & 3.1892 \times 10^{15} & \dots \\ \dots & 8.8518 \times 10^{12} & 7.0720 \times 10^9 & 7.3826 \times 10^6 & 2.3830 \times 10^3 \end{bmatrix}$

Considerando  $\omega_0$ ,  $3\omega_0$  e  $5\omega_0$  na composição do controlador ressonante, a simulação do sistema para uma condição inicial  $z(0) = [8.5331 \times 10^3 \ 8.5331 \times 10^3 \ 0_{1 \times p_0}]^T$  (de tal forma que  $z(0)^T P z(0) = 1$ ) é apresentada na Figura 23. Pode-se observar que, apesar dos valores elevados do ganho, o sistema permanece saturado por pouco tempo.

Conforme mencionado na Observação 2, é possível implementar as matrizes  $\Gamma$  e  $\Lambda$  do PMI na forma diagonal. Nesta formulação não ocorre a multiplicação das frequências elevadas ao quadrado, resultando em matrizes mais bem condicionadas e reduzindo a chance de ocorrência de problemas numéricos. Os resultados da solução de PO1a considerando esta implementação são apresentados na Tabela 2. Pode-se observar que valor do maior elemento de  $F$  encontrado é da ordem de  $10^6$ , compatível com os resultados sem saturação apresentados em (PEREIRA et al., 2009).

Na Figura 24(a) é apresentado o erro de seguimento para os controladores da Tabela 2. Note que o erro de seguimento diminui conforme um número maior de harmônicas é introduzido no controlador ressonante. Por outro lado, a introdução de harmônicas

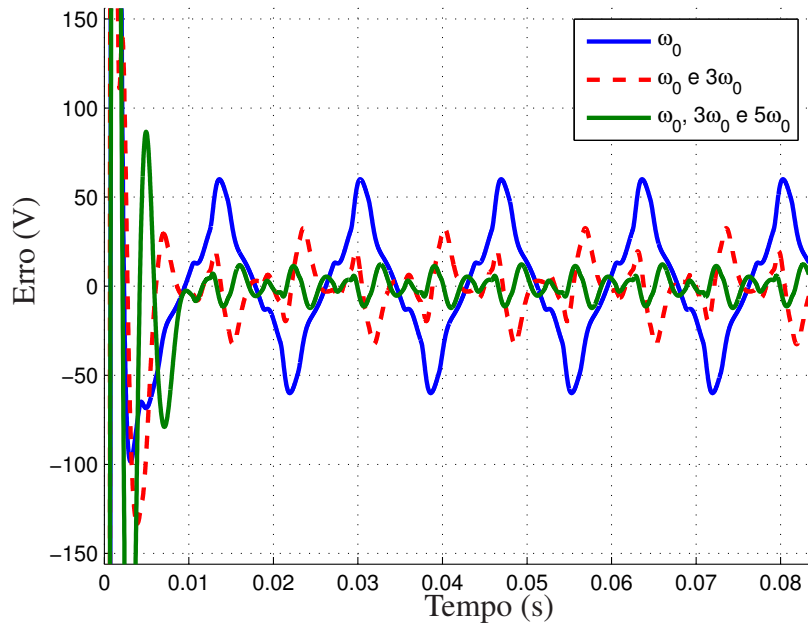


Figura 22: UPS - Erros de seguimento para diferentes configurações do controlador ressonante.

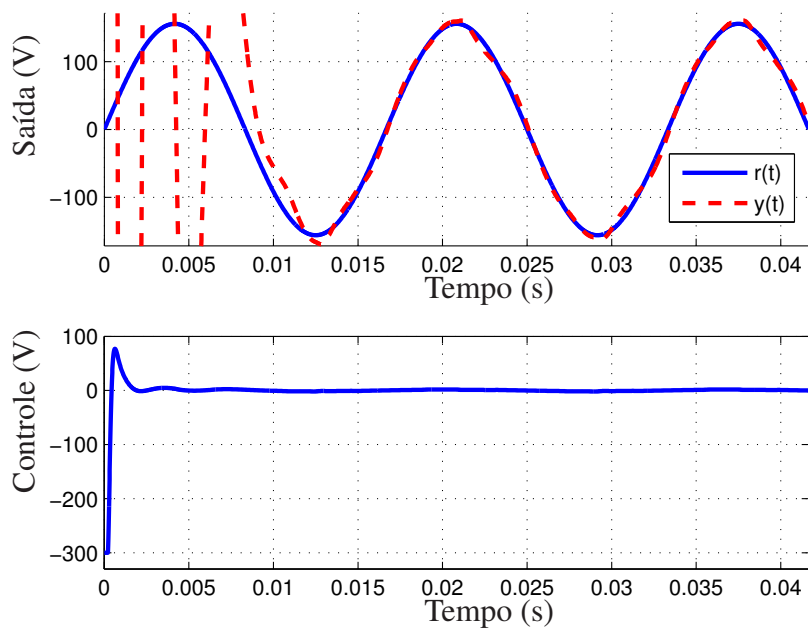


Figura 23: UPS - controlador ressonante - simulação considerando a frequência fundamental, terceira e quinta harmônica.

Tabela 2: UPS - ganhos dos controladores ressonantes - forma diagonal

$\omega_0$		
$\lambda = 1.2254$	$\eta = 50.7756$	$\alpha = 1.8405 \times 10^4$
$E_c = 35.8321$	$F = \begin{bmatrix} -0.0415 & -0.0118 & 303.0611 & 10.7085 \end{bmatrix}$	
$\omega_0$ e $3\omega_0$		
$\lambda = 2.0417$	$\eta = 60.1819$	$\alpha = 1.4687 \times 10^4$
$E_c = 29.9718$	$F = \begin{bmatrix} -0.0495 & -0.0273 & 803.9544 & 25.9517 & \dots \\ \dots & 9.4992 \times 10^3 & 22.2580 & & \end{bmatrix}$	
$\omega_0, 3\omega_0$ e $5\omega_0$		
$\lambda = 2.8766$	$\eta = 81.5307$	$\alpha = 7.8475 \times 10^3$
$E_c = 18.4594$	$F = \begin{bmatrix} -0.0820 & -0.0853 & 5.3886 \times 10^3 & 95.7108 & \dots \\ \dots & 4.3658 \times 10^4 & 78.5262 & 9.9858 \times 10^4 & 40.8439 \end{bmatrix}$	
$\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0$ e $7\omega_0$		
$\lambda = 1.8173$	$\eta = 150.3879$	$\alpha = 1.7145 \times 10^3$
$E_c = 21.7398$	$F = \begin{bmatrix} -0.5044 & -0.9306 & 6.0828 \times 10^4 & 1.0249 \times 10^3 & \dots \\ \dots & 4.0445 \times 10^5 & 827.8357 & 7.6100 \times 10^5 & 691.9992 & \dots \\ \dots & & 1.7127 \times 10^6 & 443.3392 & & \end{bmatrix}$	
$\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, 7\omega_0$ e $9\omega_0$		
$\lambda = 10.1062$	$\eta = 31.3879$	$\alpha = 1.4633 \times 10^3$
$E_c = 9.8266$	$F = \begin{bmatrix} -0.2123 & -0.4604 & 2.0109 \times 10^4 & 424.3290 & \dots \\ \dots & 1.1148 \times 10^5 & 345.0753 & 9.1249 \times 10^4 & 322.1445 & \dots \\ \dots & & 2.7061 \times 10^5 & 435.8002 & 1.3720 \times 10^6 & 255.7283 \end{bmatrix}$	

maiores que  $7\omega_0$  pouco contribuem para a diminuição deste erro (ver Figura 24(b)). No melhor cenário possível ( $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, 7\omega_0$  e  $9\omega_0$ ) o erro máximo de seguimento em regime permanente é de 1.72V ou 1.1% em relação ao valor de referência. Outro critério de desempenho diretamente associado ao erro de seguimento é a distorção harmônica total (do inglês, *Total Harmonic Distortion - THD*), a qual mede a fração de harmônicas diferentes da fundamental que estão presentes no sinal de saída. Os resultados percentuais de *THD* para o controlador ressonante na forma diagonal é apresentada na Figura 25, onde é possível observar que o valor de *THD* diminui drasticamente conforme o número de harmônicas consideradas aumenta, passando de 20% para o caso onde apenas  $\omega_0$  é considerada para menos de 1% para o caso onde são consideradas  $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, 7\omega_0$  e  $9\omega_0$ . Valores de *THD* menores que 5% atendem as normas que regulam o funcionamento dos sistemas UPS (ANSI/IEEE, 1986). Também é possível observar que não há uma melhora significativa na *THD* quando a nona harmônica é considerada.

Na Figura 26 é apresentada a simulação do sistema considerando  $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, 7\omega_0$  e  $9\omega_0$  para  $z(0) = [1.4633 \times 10^3 \ 1.4633 \times 10^3 \ 0_{1 \times p_0}]^T$ . Após um breve período saturado, o seguimento com erro de 1.1% é atingido em menos de meio período do sinal de referência. Vale observar que em nenhum momento foi imposta qualquer restrição sobre a resposta temporal do sistema. Mesmo assim, o fato do sistema atingir o regime permanente em menos de um ciclo do sinal de referência está de acordo com as normas que regem o comportamento dos sistemas UPS. Outro parâmetro utilizado para medir a qualidade do sinal entregue à UPS é o valor RMS (do inglês, *Root Mean Square*) do sinal de saída, o qual deve ser o mais próximo possível de  $110V_{RMS}$ . Nas Figuras 27(a) e 27(b) é apresentado o valor *RMS* da saída para as configurações do controlador ressonante apresentadas na

Tabela 2. Note que o aumento do número de hamônicas no controlador ressonante de fato faz com que o valor *RMS* da saída se aproxime do valor *RMS* do sinal de referência. No melhor caso, a diferença entre estes valores é da ordem de 0.0015%.

### 3.5.3 Exemplo 3 - sistema MIMO

Nesta seção será considerado o sistema multivariável apresentado em (FLORES et al., 2012), sendo as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C$  que definem o sistema (38) representadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 1 \\ -100 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -37 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -51 \\ 17 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 11 & 0 \\ 3 & 23 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } u_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Os sinais de referência e perturbação considerados são  $r_1(t) = \hat{r}_1 \text{sen}(2\pi t)$ ,  $r_2(t) = \hat{r}_2 \text{sen}(2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} t)$ ,  $d_1(t) = \hat{d}_1 \text{sen}(2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} t)$  e  $d_2(t) = \hat{d}_2 \text{sen}(2\pi \frac{\sqrt{5}}{5} t)$ . Para estes sinais de referência e perturbação segue que  $\phi_r(s) = (s^2 + (2\pi)^2)(s^2 + (\sqrt{2}\pi)^2)$  e  $\phi_d(s) = (s^2 + (\sqrt{2}\pi)^2)(s^2 + (2\sqrt{5}\pi/5)^2)$ , resultando em

$$\phi(s) = (s^2 + (2\pi)^2)(s^2 + (\sqrt{2}\pi)^2)(s^2 + (2\sqrt{5}\pi/5)^2).$$

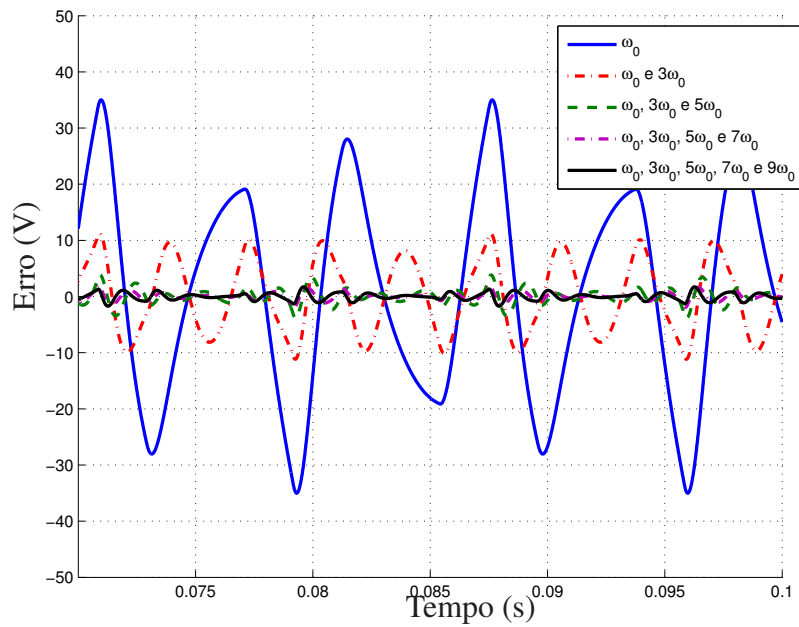
Neste exemplo será apresentada uma comparação dos resultados supondo  $E_c \neq 0$  e  $E_c = 0$ , com o objetivo de determinar quais as vantagens da introdução do compensador de *anti-windup*. Para o caso sem o laço de *anti-windup* é necessário resolver o problema de otimização PO1 considerando nula a matriz  $M$  em (43). As direções  $\mathcal{X}_R = \text{conv}\{x_1\}$  e  $\mathcal{D}_R = \text{conv}\{d_1\}$  foram escolhidas de tal forma que  $x = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$  e  $d = [2 \ 1 \ 1 \ 0.5]^T$ .

Para  $E_c \neq 0$  a solução de PO1 considerando  $\kappa = 0.1$  atinge o seu valor ótimo para  $\lambda = 9.8901 \times 10^{-5}$  e  $\eta = 45000$ , resultando em  $\alpha = 151.8844$ ,  $\beta = 2.8714$ ,

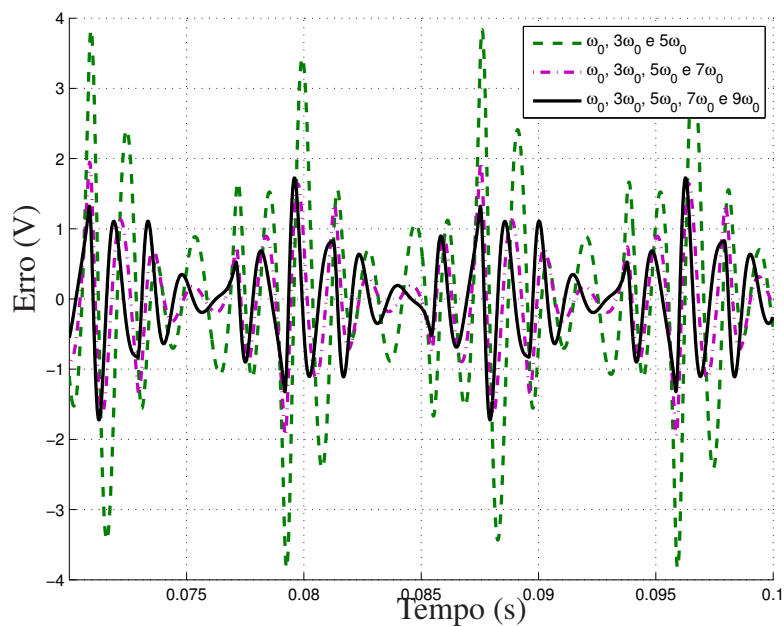
$$E_c = \begin{bmatrix} 110.0043 & 17.0715 \\ 45.4869 & 11.3595 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -4.1121 & -4.3989 & 2.2850 \times 10^{-6} & -0.1240 & 4.4486 \times 10^6 & 1.9194 \times 10^6 & \cdots \\ 3.05048 & -3.3849 & 6.2991 \times 10^{-5} & -0.4008 & -4.5348 \times 10^6 & -1.9744 \times 10^6 & \cdots \\ \cdots & 3.3922 \times 10^5 & 3.1178 \times 10^4 & 1.5251 \times 10^3 & 32.6358 & -5.6550 \times 10^6 & \cdots \\ \cdots & -3.5536 \times 10^5 & -3.3550 \times 10^4 & -1.8045 \times 10^3 & -49.4549 & 1.1475 \times 10^7 & \cdots \\ \cdots & -2.4260 \times 10^6 & -4.2528 \times 10^5 & -3.8772 \times 10^4 & -1.8321 \times 10^3 & -34.3372 & \cdots \\ \cdots & 5.0336 \times 10^6 & 9.1145 \times 10^5 & 8.6381 \times 10^4 & 4.5601 \times 10^3 & 117.3255 & \cdots \end{bmatrix}.$$

Na Figura 28 é apresentada a simulação do sistema para  $E_c \neq 0$ ,  $\hat{r}_1 = 5.7431$ ,  $\hat{r}_2 = 2.8715$ ,  $\hat{d}_1 = 2.8715$ ,  $\hat{d}_2 = 1.4358$  e  $z(0) = 154.0723[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$ . Estes valores de condição iniciais e referências/perturbação implicam em  $z(0)^T P z(0) = 1$  e  $q(t)^T R q(t) \leq 1$ . Note que os sinais de controle ficam saturados por aproximadamente meio período do sinal de referência e que o perfeito seguimento dos sinais de referência é obtido em cerca de um período deste mesmo sinal.



(a) Erro de seguimento



(b) Detalhe do erro de seguimento

Figura 24: UPS - erro de seguimento para o controlador ressonante - forma diagonal.

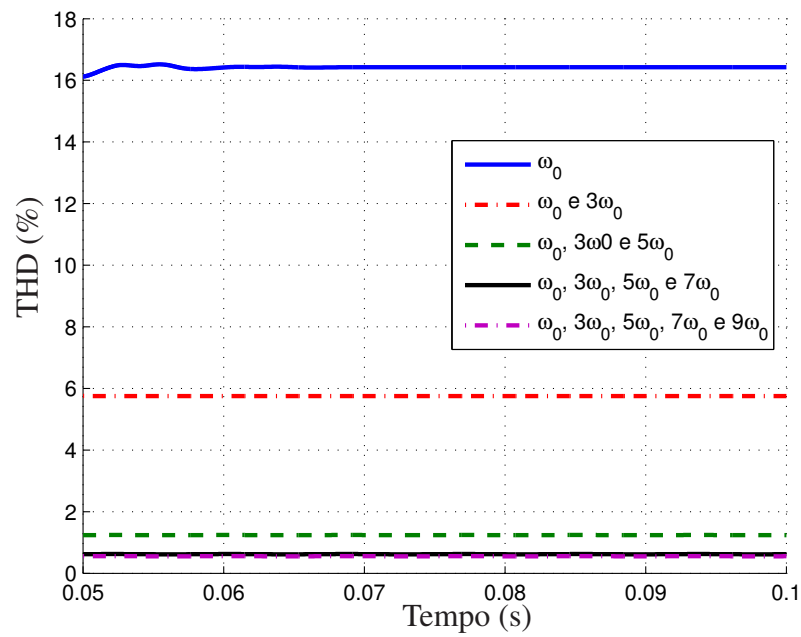


Figura 25: UPS - controlador ressonante - THD considerando  $\omega_0$ ,  $3\omega_0$ ,  $5\omega_0$ ,  $7\omega_0$  e  $9\omega_0$  - forma diagonal

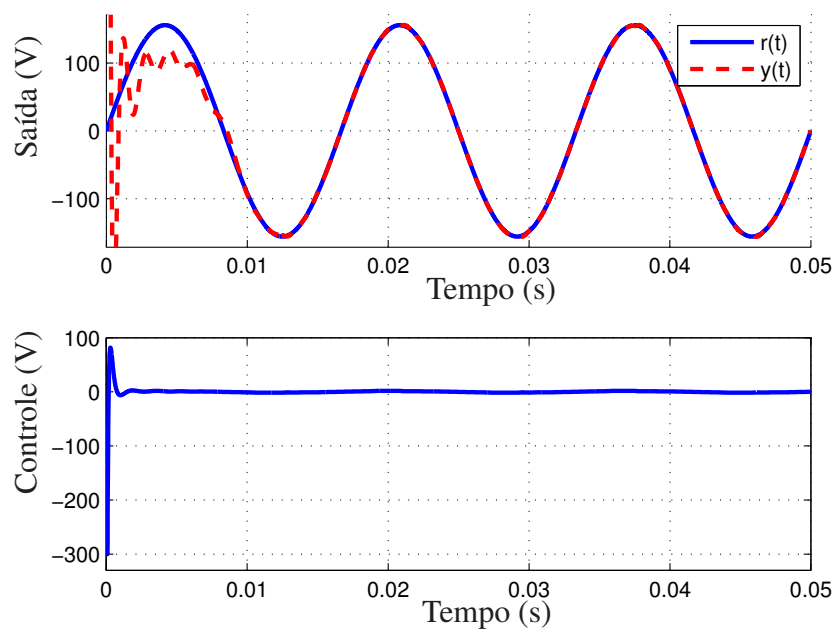


Figura 26: UPS - controlador ressonante - simulação considerando  $\omega_0$ ,  $3\omega_0$ ,  $5\omega_0$ ,  $7\omega_0$  e  $9\omega_0$  - forma diagonal



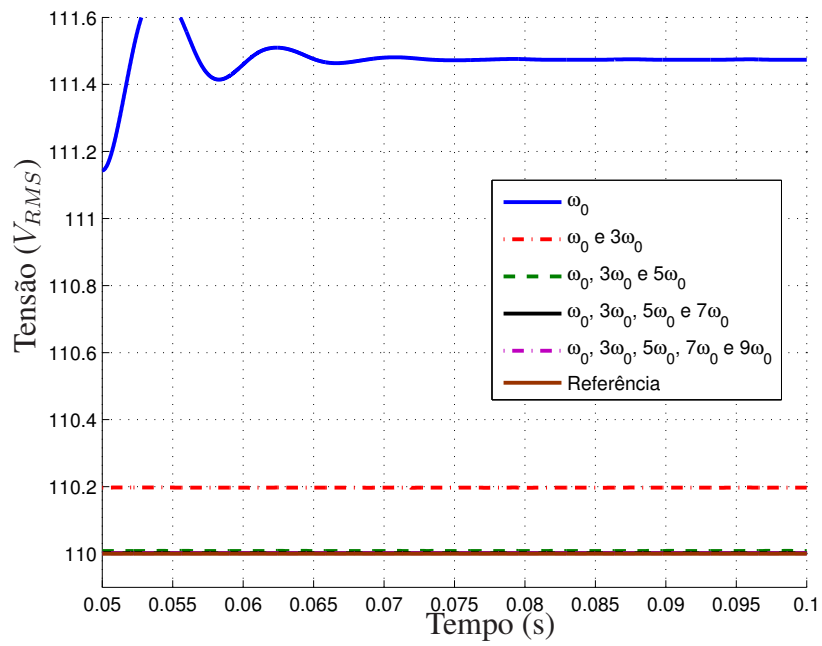
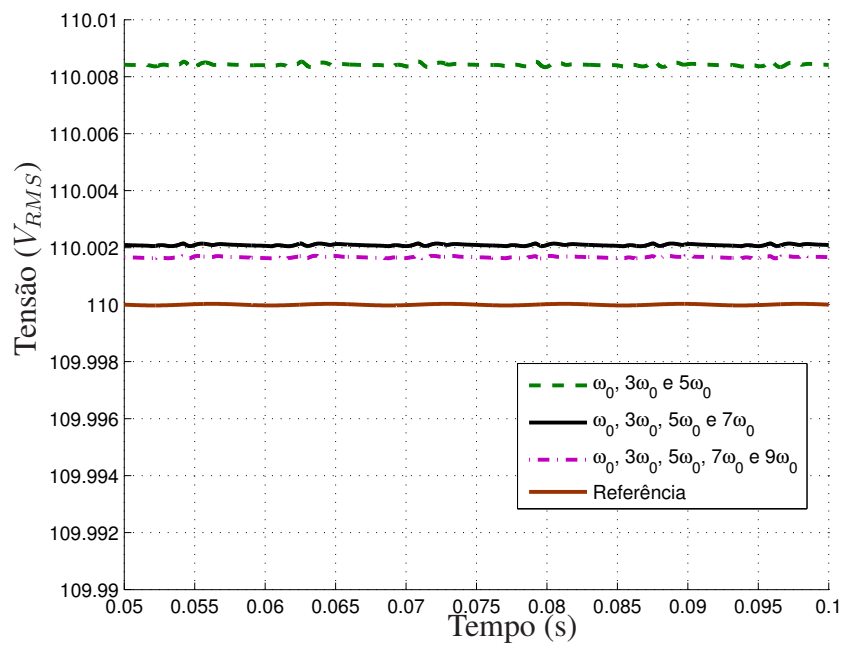
(a) Valor *RMS* da saída(b) Detalhe do valor *RMS* da saída

Figura 27: UPS - controlador ressonante - valor *RMS* dos sinais de saída apresentados na Figura 24.

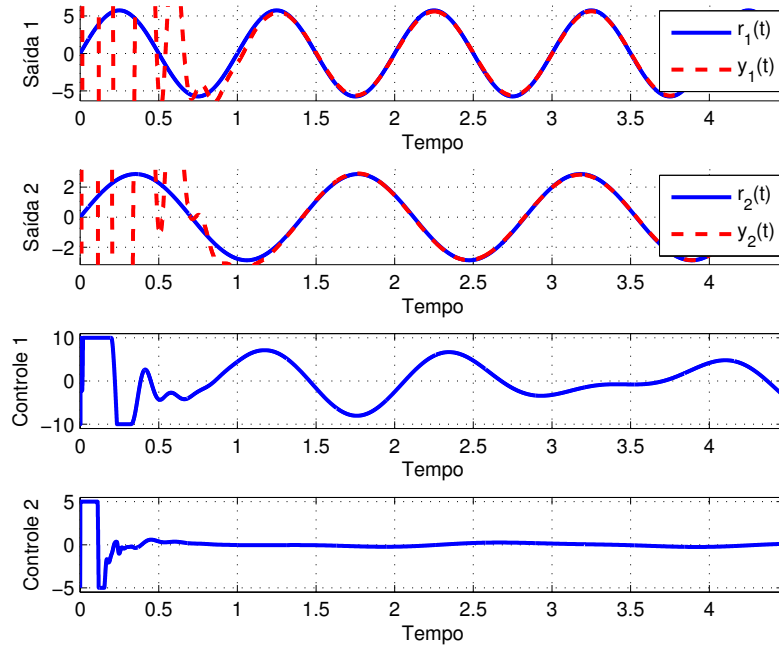


Figura 28: Sistema *MIMO* - controlador ressonante - simulação considerando  $E_c \neq 0$  e  $z(0) = 154.0723[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$

Da mesma forma, PO1 foi resolvido para o caso sem compensação *anti-windup*, ou seja, considerando  $E_c = 0$ . Os resultados obtidos para os valores ótimos  $\lambda = 7.970 \times 10^{-5}$  e  $\eta = 70000$  foram  $\alpha = 4.9420$ ,  $\beta = 0.4354$  e

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 69.9507 & -732.6506 & 7.8670 \times 10^{-6} & 0.3106 & 3.4125 \times 10^9 & 1.2512 \times 10^9 & \cdots \\ 334.3085 & -209.2080 & 4.1270 \times 10^{-8} & 2.1203 & 4.9694 \times 10^8 & 1.7157 \times 10^8 & \cdots \\ \cdots & 1.8233 \times 10^8 & 1.3273 \times 10^7 & 4.8300 \times 10^5 & 6.9644 \times 10^3 & -5.7835 \times 10^9 & \cdots \\ \cdots & 2.3062 \times 10^7 & 1.5161 \times 10^6 & 4.8673 \times 10^4 & 587.7740 & -7.9163 \times 10^8 & \cdots \\ \cdots & -2.0858 \times 10^9 & -2.9610 \times 10^8 & -2.0619 \times 10^7 & -6.7611 \times 10^5 & -6.7419 \times 10^3 & \cdots \\ \cdots & -2.6366 \times 10^8 & -3.3181 \times 10^7 & -1.9044 \times 10^6 & -3.7490 \times 10^4 & 608.8171 & \cdots \end{bmatrix}.$$

A primeira contribuição da introdução do laço de *anti-windup* na malha de controle é indireta, indicada pela redução do conservadorismo dos resultados. Isto pode ser observado pelo tamanho dos conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$  obtidos através da solução de PO1. Para o caso com a compensação de *anti-windup*, os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são bem maiores do que os valores obtidos para  $E_c = 0$ . Isto ocorre porque há uma redução no número de graus de liberdade (expresso na forma de variáveis *LMI*) para a solução de PO1 quando  $E_c = 0$ .

A outra contribuição do laço de *anti-windup* pode ser observada comparando as simulações apresentadas nas Figuras 29 e 30. Estas simulações foram realizadas considerando os mesmos sinais de referência e perturbação da Figura 28 e condição inicial dada por  $z(0) = [4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 0_{1 \times 6}]^T$ . Valores de condição inicial maiores que 4.9420 fazem com que as trajetórias do sistema sem o laço de *anti-windup* diverjam. Note que este valor é mais de trinta vezes menor do que o valor máximo que é garantido

para o caso com  $E_c \neq 0$ , ou seja, para  $E_c \neq 0$  é possível aplicar uma condição inicial  $z(0) = 154.0723[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$  com a garantia de que as trajetórias não divergem. Para os resultados apresentados na Figura 29, pode-se observar que os dois sinais de controle permanecem saturados por uma fração de tempo desprezível e que o perfeito seguimento é atingido em menos de meio período. A partir da Figura 30 pode-se observar que sem a compensação de *anti-windup* o desempenho do sistema piora consideravelmente uma vez que o sinal de controle  $u_1(t)$  permanece saturado por cerca três quartos do período do sinal de referência.

Na Tabela 3 são mostrados os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para diferentes valores de  $\kappa$ . Pode-se observar que para  $\kappa = 0$  apenas o conjunto  $\Omega(P, 1)$  é maximizado, resultando em um valor ínfimo para  $\beta$ . O contrário acontece para  $\kappa = 1$ , quando apenas  $\Omega(R, 1)$  é maximizado. O valor de  $\kappa = 0.1$  utilizado no exemplo desta seção foi escolhido de forma a obter um compromisso entre a condição inicial do sistema e os valores de referência e perturbação máximos admissíveis. Os valores de  $\lambda$  e  $\eta$  apresentados na mesma tabela correspondem aos valores que resultam no menor critério  $\min (1 - \kappa)\gamma + \kappa\delta$ .

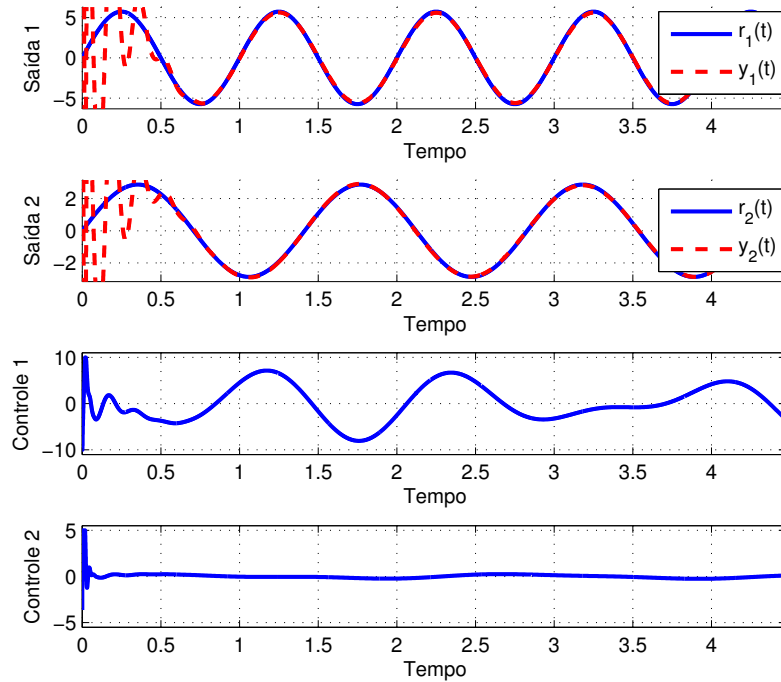


Figura 29: Sistema *MIMO* - controlador ressonante - simulação considerando  $E_c \neq 0$  e  $z(0) = [4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 0_{1 \times 6}]^T$

### 3.6 Comentários finais

Neste capítulo foi apresentada uma metodologia de síntese de realimentação de estados estabilizante e do laço de *anti-windup* a partir da introdução dos controladores ressonantes na malha de controle. Baseadas em de uma função de Lyapunov quadrática foram obtidas condições “*quasi*” *LMIs* que garantem que as trajetórias do sistema em malha

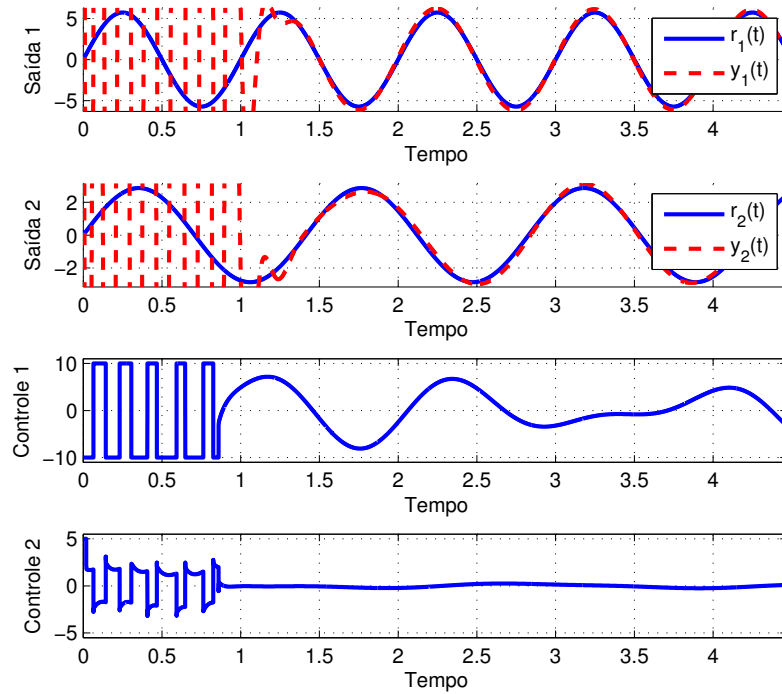


Figura 30: Sistema *MIMO* - controlador ressonante - simulação considerando  $E_c = 0$  e  $z(0) = [4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 4.9420 \ 0_{1 \times 6}]^T$

Tabela 3: Controlador ressonante - influência de  $\kappa$  nos valores  $\alpha$  e  $\beta$

$\kappa$	$\lambda$	$\eta$	$\alpha$	$\beta$
0	$1.0354 \times 10^{-4}$	30000	355.7622	$6.7256 \times 10^{-5}$
0.1	$9.8901 \times 10^{-5}$	45000	151.8844	2.8714
0.3	$1.1058 \times 10^{-4}$	40000	140.0581	2.9407
0.5	$1.0200 \times 10^{-4}$	42000	116.7919	3.0376
0.7	$1.4404 \times 10^{-4}$	27000	86.8786	3.3849
0.9	$1.3888 \times 10^{-4}$	25000	61.4632	3.7045
1	$1.6490 \times 10^{-4}$	18000	$6.8114 \times 10^5$	4.0937

fechada iniciadas em um dado conjunto elipsoidal convergem para um outro conjunto invariante no interior da região de operação linear do sistema. Além disso, foi proposto um problema de otimização para o cálculo destes ganhos visando a maximização dos conjuntos de condições iniciais e/ou referências e perturbações admissíveis. Três exemplos numéricos ilustraram a metodologia proposta destacando: as trajetórias do sistema em malha fechada; a possibilidade de aplicação da metodologia em problemas reais; os benefícios da utilização do laço de *anti-windup* no desempenho do sistema em malha fechada e no conservadorismo dos resultados obtidos. Os resultados teóricos apresentados neste capítulo foram publicados em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009).

## 4 ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLADORES REPETITIVOS

Neste capítulo, o seguimento de referências e a rejeição de perturbações será garantido através da utilização dos controladores repetitivos. A formulação destes controladores no espaço de estados será modificada de forma a considerar sinais de referência e perturbação com frequências não-múltiplas de uma mesma frequência fundamental. Como no capítulo anterior, o problema a ser resolvido é a obtenção de condições na forma de *LMI*s para a síntese simultânea de uma realimentação de estados estabilizante e do laço de *anti-windup* tais que todas as trajetória iniciadas em um conjunto elipsoidal convirjam em um tempo finito para outro conjunto positivamente invariante no interior da região de operação linear do sistema. Para a obtenção destas condições, foi considerada a abordagem de Razumikhin independente do valor do atraso.

### 4.1 Controlador repetitivo multi-periódico

Para sistemas *SISO* onde os sinais de referência e perturbação são múltiplos de uma mesma frequência fundamental, pode-se considerar a formulação do controlador repetitivo no espaço de estados apresentada em (32). Por outro lado, (32) apresenta como saída do controlador uma combinação do estado  $x_{rc}(t)$  atrasado e do sinal de erro, o que dificulta a realização de uma realimentação de estados tanto da planta como do controlador repetitivo. Por este motivo, pode-se considerar a seguinte realização no espaço de estados do controlador repetitivo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{rc}(t) &= -\omega_c x_{rc}(t) + \omega_c x_{rc}(t - \tau) + e(t) \\ y_{rc}(t) &= x_{rc}(t)\end{aligned}\quad (51)$$

onde  $x_{rc}(t) \in \mathbb{R}$ . Segue que a função de transferência de  $e$  para  $y_{rc}$  é dada por

$$G_{rc}^m(s) = \frac{y_{rc}(s)}{e(s)} = \frac{1}{s + \omega_c} \frac{1}{1 - \frac{\omega_c}{s + \omega_c} e^{-\tau s}}. \quad (52)$$

Note que as características originais do controlador repetitivo com filtro  $Q(s)$  são mantidas, sofrendo apenas uma penalização em altas frequências. Seguindo um raciocínio análogo ao apresentado na Seção 2.3.1.3, pode-se concluir que quanto maior o valor de  $\omega_c$  menor tende a ser o erro de seguimento associado.

No caso onde os sinais de referência e perturbação não são múltiplos de uma mesma frequência fundamental, pode-se definir o conjunto  $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_{n_\tau}\}$  como o conjunto de todos os períodos não-múltiplos (inteiros) dos sinais de referência e perturbação. Como

exemplo de composição deste conjunto, suponha que o objetivo de controle seja seguir os sinais  $r_1(t) = 7\text{sen}(2\pi t)$  e  $r_2(t) = \text{sen}(\pi t)$  e rejeitar o sinal  $d(t) = 4\text{sen}(\sqrt{2}\pi t)$ . A partir destes sinais pode-se definir  $\tau_{r_1} = 1\text{s}$ ,  $\tau_{r_2} = 2\text{s}$  e  $\tau_d = \sqrt{2}\text{s}$ , os quais resultariam em  $\mathcal{T} = \{1, \sqrt{2}\}$ . O elemento  $\tau_{r_2}$  não foi considerado na composição de  $\mathcal{T}$  uma vez que este período é múltiplo inteiro de  $\tau_{r_1}$  ( $\tau_{r_2} = 2\tau_{r_1}$ ).

Desta forma, pode-se considerar uma implementação em cascata de  $n_\tau$  controladores repetitivos “sintonizados” em cada um dos elementos de  $\mathcal{T}$ , conforme apresentado na Figura 31, onde

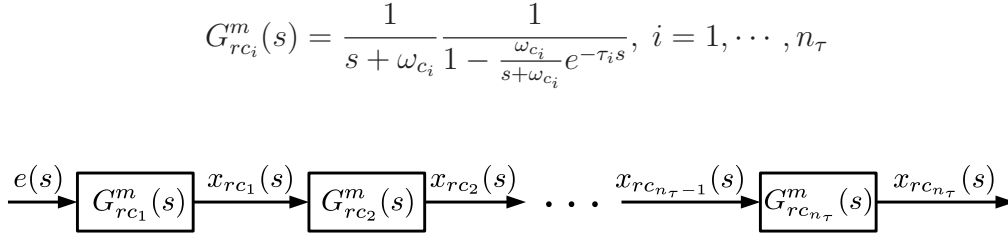


Figura 31: Representação em cascata do controlador repetitivo.

A função de transferência resultante desta configuração de controle é

$$G_{rc}^c(s) = \prod_{i=1}^{n_\tau} \frac{1}{s + \omega_{c_i}} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{c_i}}{s + \omega_{c_i}} e^{-\tau_i s}}. \quad (53)$$

O PMI para sistemas *MIMO* define que para a obtenção do perfeito seguimento e/ou rejeição de diferentes sinais de referência e perturbação, todos os canais de erro devem contar com os modos instáveis ou marginalmente estáveis de todos os sinais de referência e perturbação envolvidos (CHEN, 1970). Logo a função de transferência (53) deverá ser inserida em cada um dos  $j$ -ésimos canais de erro tais que

$$\frac{y_{rc_j}(s)}{e_j(s)} = \prod_{i=1}^{n_\tau} \frac{1}{s + \omega_{c_i}} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{c_i}}{s + \omega_{c_i}} e^{-\tau_i s}}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Esta representação multi-periódica do controlador repetitivo pode ser realizada no espaço de estados através da equação

$$\dot{\xi}(t) = A_\xi \xi(t) + \sum_{i=1}^{n_\tau} A_{d\xi_i} \xi(t - \tau_i) + B_\xi e(t), \quad (54)$$

onde as matrizes  $A_\xi$  e  $B_\xi$  são dadas por

$$A_\xi = \text{diag}\{\overbrace{\Gamma, \Gamma, \dots, \Gamma}^{p\text{-upla}}\}, \quad A_{d\xi_i} = \text{diag}\{\overbrace{\Gamma_{di}, \Gamma_{di}, \dots, \Gamma_{di}}^{p\text{-upla}}\}, \quad B_\xi = I_p \otimes \Lambda$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\tau \times 1}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -\omega_{c_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\omega_{c_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_{c_{n_\tau-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\omega_{c_{n_\tau}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\tau \times n_\tau}$$

e com  $\Gamma_{d_i} \in \mathbb{R}^{n_\tau \times n_\tau}$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$  sendo uma matriz diagonal com elementos dados por  $\Gamma_{d_i(j,j)} = \omega_{c_i}$  se  $j = i$  e 0 caso contrário. Por exemplo, as matrizes  $\Gamma_{d_1}$  e  $\Gamma_{d_2}$  seriam representas por

$$\Gamma_{d_1} = \begin{bmatrix} \omega_{c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{c_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente. De forma análoga ao controlador (23), (54) é uma equação de dimensão  $pn_\tau$ , onde as matrizes  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{d_i}$  e  $\Lambda$  são repetidas  $p$  vezes em uma estrutura bloco-diagonal. Por simplicidade, será considerado  $\xi(t) \in \mathbb{R}^{p_\tau}$  com  $p_\tau = pn_\tau$ .

Por outro lado, os efeitos da saturação sobre o desempenho do sistema em malha fechada precisam ser levados em conta. Com o objetivo de reduzir a perda de desempenho e ainda adicionar graus de liberdade ao problema de estabilização a ser formulado, um compensador *anti-windup* estático é adicionado a (54), resultando em

$$\dot{\xi}(t) = A_\xi \xi(t) + \sum_{i=1}^{n_\tau} A_{d\xi_i} \xi(t - \tau_i) + B_\xi e(t) + B_\xi E_c (\text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)) \quad (55)$$

onde  $E_c \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é uma matriz de ganho *anti-windup* a ser determinada.

## 4.2 Preliminares

Considere o sistema linear invariante no tempo sujeito a restrições no sinal de controle (38) apresentado na Seção 3.1. A partir deste sistema e da relação (55) pode-se definir o vetor de estados aumentado

$$z(t) = [x(t)^T \ \xi(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{n+p_\tau}$$

de tal forma que as relações (38) e (55) podem ser escritas como

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \sum_{i=1}^{n_\tau} \mathbf{A}_{d_i} z(t - \tau_i) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(u(t)) - \mathbf{B}_2 \Psi_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_q q(t), \quad (56)$$

onde  $q(t) = [r(t)^T \ d(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{p+l}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times p_\tau} \\ -B_\xi C & A_\xi \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{d_i} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times p_\tau} \\ 0_{p_\tau \times n} & A_{d\xi_i} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{p_\tau \times m} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \mathbf{V} E_c, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ B_\xi \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & B_d \\ B_\xi & 0_{p_\tau \times l} \end{bmatrix}.$$

Para estabilizar o sistema aumentado (56) é considerada uma realimentação estática de estados na forma

$$u(t) = F_1 x(t) + F_2 \xi(t) = Fz(t), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_\tau)}, \quad (57)$$

a qual origina o seguinte sistema em malha fechada:

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)z(t) + \sum_{i=1}^{n_\tau} \mathbf{A}_{d_i} z(t - \tau_i) - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \Psi_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_q q(t). \quad (58)$$



A condição inicial do sistema aumentado (58) é denotada por  $\phi_z$ , correspondendo ao valor da função  $\phi_z(t)$  restrita ao intervalo  $[-\hat{\tau}, 0]$ ,  $\hat{\tau} = \max\{\tau_1, \dots, \tau_{n_\tau}\}$ , ou seja,  $z(\theta) = \phi_z(\theta)$ ,  $\forall \theta \in [-\hat{\tau}, 0]$ . O sistema em malha fechada resultante é apresentado na Figura 32, onde  $v(t) = \text{sat}_{u_0}(u(t))$ . A estrutura de controle proposta é exatamente a mesma apresentada na Figura 12, apenas com a troca do bloco que implementa o controlador ressonante pelo bloco que implementa o controlador repetitivo *MIMO* definido em (55).

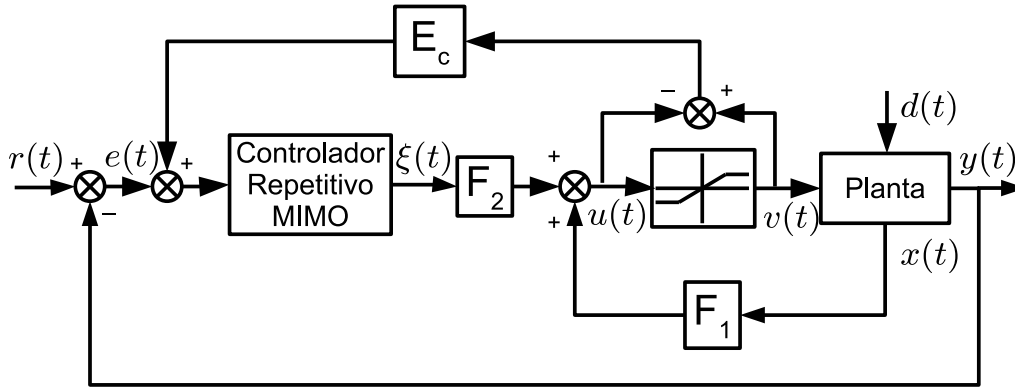


Figura 32: Controlador repetitivo - sistema em malha fechada.

### 4.3 Formulação do problema

Como foi visto na Seção 2.3.1.3, as frequências de corte  $\omega_{c_i}$ ,  $i = \dots, n_\tau$  tem papel preponderante no erro de seguimento do sistema em malha fechada. Por este motivo, o Problema 2 apresentado na Seção 3.2 pode ser reformulado em função destas variáveis como

**Problema 3** *Calcular o ganho estabilizante  $F$ , o ganho de anti-windup  $E_c$  e as frequências de corte  $\omega_{c_i}$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$  tais que,  $\forall z(0) \in \mathcal{Z}_0$  e  $\forall r(t), d(t)$  com  $q(t) \in \mathcal{Q}_0$ , todas as trajetórias do sistema (58) iniciadas em  $\mathcal{Z}_0$  convergem para o conjunto  $\mathcal{J}_0 \subset S(F, u_0) \cap \mathcal{Z}_0$  em um tempo finito  $t_1$  e permanecem no interior deste conjunto  $\forall t \geq t_1$ .*

Baseado no Problema 3, os seguintes sub-problemas podem ser enunciados:

- P2:** Dados  $\omega_{c_i}$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$ , determinar os ganhos  $F$  e  $E_c$  que maximizam o tamanho dos conjuntos admissíveis  $\mathcal{Z}_0$  e/ou  $\mathcal{Q}_0$ ;
- P3:** Dados  $\mathcal{Z}_0$  e/ou  $\mathcal{Q}_0$ , determinar os ganhos  $F$  e  $E_c$  tais que  $\omega_{c_i}$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$  assumam os maiores valores possíveis. Este sub-problema está diretamente relacionado com a minimização do erro de seguimento.

As demais considerações relativas ao modelo interno e à escolha dos conjuntos  $\mathcal{Z}_0$ ,  $\mathcal{J}_0$  e  $\mathcal{Q}_0$  são as mesmas apresentadas na Seção 3.2.

## 4.4 Resultado principal

O resultado principal deste capítulo será apresentado em duas partes: primeiro, será enunciado um lema que garante a convergência das trajetórias iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  para  $\Omega(\eta P, 1)$  e que este conjunto é invariante  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ , considerando a abordagem de Razumikhin; a partir deste lema será enunciado um teorema que apresenta condições para a determinação dos ganho  $F$  e  $E_c$  tais que o Problema 3 seja resolvido.

**Lema 2** *Considere o sistema (58) e a função de candidata de Lyapunov  $V(z(t)) = z(t)^T P z(t)$ . Se*

$$\dot{V}(z(t)) < 0 \begin{cases} \forall q(t) | q(t)^T R q(t) \leq 1 \\ \forall z(t) | z(t)^T P z(t) \leq 1 \text{ e } z(t)^T \eta P z(t) \geq 1 \\ \forall z(t) | z(t + \theta)^T P z(t + \theta) \leq \epsilon z(t)^T P z(t), \theta \in [-\hat{\tau}, 0] \end{cases} \quad (59)$$

com  $\epsilon > 1$  e  $\eta > 1$  então,  $\forall \phi_z \in \Omega(P, 1)$ , isto é,  $\forall z(t + \theta) \in \Omega(P, 1) \forall \theta \in [-\hat{\tau}, 0]$ , a trajetória correspondente nunca deixa  $\Omega(P, 1)$  e converge para  $\Omega(\eta P, 1)$ . Além disso,  $\Omega(\eta P, 1)$  é um conjunto positivamente invariante.

*Prova.* Esta prova segue ideias similares às apresentadas em (FRIDMAN; SHAKED, 2003b), relativas a uma abordagem de Razumikhin. Seja  $z_t$  a restrição de  $z(t)$  no intervalo  $[t - \hat{\tau}, t]$  e defina

$$\bar{V}(z_t) = \sup_{-\hat{\tau} \leq \theta < 0} V(z(t + \theta)). \quad (60)$$

Considere  $q(t) \in \Omega(R, 1)$  e suponha que  $\phi_z = z_0 \in \Omega(P, 1)$  e que  $z_0 \notin \text{int}\Omega(\eta P, 1)$ , isto é,  $\forall \theta \in [-\hat{\tau}, 0]$  segue que  $z(\theta) \notin \text{int}\Omega(\eta P, 1)$ . Logo, existe  $\theta = \theta_0 \in [-\hat{\tau}, 0]$  tal que  $V(z(\theta_0)) = \bar{V}(z_0)$  e, neste caso, duas situações podem ocorrer:

**a)**  $\theta_0 < 0$  e  $V(z(t)) < V(z(\theta_0))$ ,  $\forall t \in [\theta_0, 0]$ :

Neste caso, dada a continuidade das trajetórias do sistema, existe um escalar  $r > 0$  suficientemente pequeno e  $\epsilon > 1$  tais que, para  $0 < t \leq r$ ,  $r \leq \theta_0 + \hat{\tau}$ , tem-se  $\epsilon V(z(r)) < V(z(\theta_0))$ , ou seja,  $z(t) \in \Omega(P, 1)$ . Supondo agora que  $\epsilon V(z(r)) = V(z(\theta_0))$ , baseado em (59) segue que  $\dot{V}(z(r)) < 0$ , o que implica em  $V(z(r + \Delta t)) < V(z(r)) \leq 1$  para  $\Delta t \rightarrow 0$ . Seguindo esta linha de raciocínio, tem-se que  $\bar{V}(z_{\theta_0 + \hat{\tau} + \Delta t}) < \bar{V}(z_0)$ , o que implica em  $z(t) \in \Omega(P, 1)$ ,  $\forall t \in [\theta_0, \theta_0 + \hat{\tau}]$ .

O comportamento da função de Lyapunov neste intervalo é apresentado na Figura 33. Pode-se observar que em  $t = \theta_0$  a função de Lyapunov  $V(z(t))$  atinge o seu valor máximo dentro do intervalo  $[-\tau, 0]$ , ou seja, é equivalente a  $\bar{V}(z_0)$ . Neste item é mostrado que, no intervalo  $[0, r)$ ,  $V(z(t))$  não ultrapassa o valor  $\epsilon V(z(\theta_0))$ . No instante  $t = r$  segue que  $V(z(r)) = \epsilon V(z(\theta_0))$ , implicando assim em  $\dot{V}(z(r + \Delta t)) < 0$  com  $\Delta t \rightarrow 0$ .

**b)**  $\theta_0 = 0$ :

Neste caso,  $\bar{V}(z_0) = V(z(0))$ , de tal forma que  $z(\theta)^T P z(\theta) \leq \epsilon z(0)^T P z(0)$  para  $\epsilon > 1$  e, a partir de (59), segue que  $V(z(\Delta t)) < V(z(0)) \leq 1$  para  $\Delta t \rightarrow 0$ , isto é,  $z(\Delta t) \in \Omega(P, 1)$ .

Como o sistema é invariante no tempo, deslocando o intervalo  $[-\hat{\tau}, 0]$  para um intervalo qualquer  $[t - \hat{\tau}, t]$  e refazendo esta mesma análise conclui-se que  $\bar{V}(z_{\hat{\tau}}) \leq \bar{V}(z_0)$  e  $\bar{V}(z_{\hat{\tau} + \Delta t}) < \bar{V}(z_0)$  para  $\Delta t \rightarrow 0$ , o que implica em  $z(t) \in \Omega(P, 1)$ ,  $\forall t > 0$ . Além

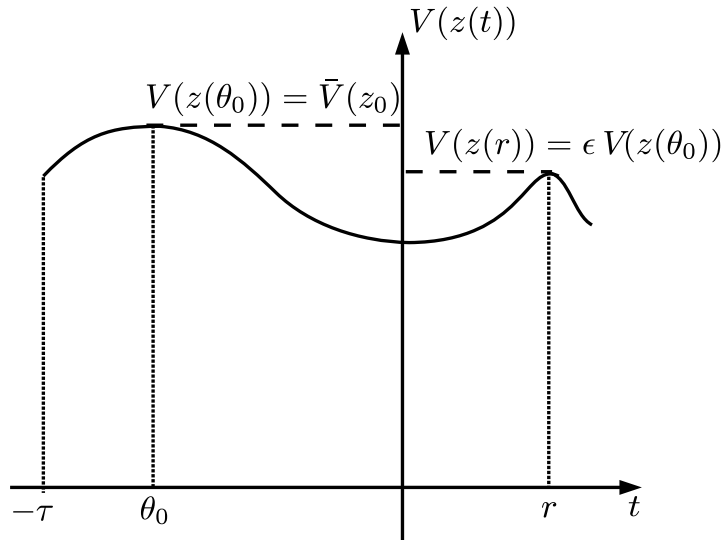


Figura 33: Ilustração de  $V(z(t))$  - Lema 2

disso, se  $z_t \in \Omega(P, 1)$  e  $z_t \notin \text{int}\Omega(\eta P, 1)$ , então segue que  $\bar{V}(z_t)$  é decrescente e que  $\bar{V}(z_{t+\hat{\tau}+\Delta t}) < \bar{V}(z_t)$  para  $\Delta t \rightarrow 0$ , o que garante que as trajetórias convergem para a região  $\Omega(\eta P, 1)$ .

Suponha agora que  $z_{t_1} \in \Omega(\eta P, 1)$  e que  $z(t_1)^T \eta P z(t_1) = 1$  e  $z(t_1 + \theta)^T \eta P z(t_1 + \theta) \leq 1, \forall \theta \in [-\hat{\tau}, 0]$ . Neste caso,  $\epsilon z(t_1)^T \eta P z(t_1) \geq z(t_1 + \theta)^T \eta P z(t_1 + \theta)$ . Logo, baseado em (59), segue que  $\dot{V}(z(t_1)) < 0$ , o que implica que  $z(t_1 + \Delta t) \in \Omega(\eta P, 1)$  com  $\Delta t \rightarrow 0$ . Isso conclui a prova de que o conjunto  $\Omega(\eta P, 1)$  é positivamente invariante. ■

Baseado no Lema 2, o seguinte teorema fornece condições independentes do valor do atraso para a determinação dos ganhos  $F$  e  $E_c$  que resolvem o Problema 3.

**Teorema 7** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W \in \mathbb{R}^{(n+p_\tau) \times (n+p_\tau)}$ ,  $S_i \in \mathbb{R}^{(n+p_\tau) \times (n+p_\tau)}$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$ , matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_\tau)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_\tau)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e escalares  $\lambda > 0$  e  $\eta > 1$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(W, Y, S) & -\mathbf{B}_1 L - \mathbf{V} M + X^T & \mathbf{B}_q \\ * & -2L & 0 \\ * & * & -\lambda R \end{bmatrix} < 0 \quad (61)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{(j)} - X_{(j)} & u_{0(j)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, \dots, m \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} \eta W & * \\ Y_{(j)} & u_{0(j)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, \dots, m \quad (63)$$

$$S_i - W > 0, i = 1, \dots, n_\tau \quad (64)$$

com  $\mathcal{H}(W, Y, S) = \text{Sim}\{\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y\} + [(-1 + 3\eta)\lambda + n_\tau]W + \sum_{i=1}^{n_\tau} \mathbf{A}_{d_i} S_i \mathbf{A}_{d_i}^T$ , então os ganhos  $F = YW^{-1}$  e  $E_c = ML^{-1}$  são tais que:

1. Todas as trajetórias de (58) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem para  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(F, u_0)$  onde  $P = W^{-1}$ ;

2.  $\Omega(\eta P, 1)$  é um conjunto invariante,  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

*Prova.*

Calculando a derivada da função candidata de Lyapunov  $V(z(t)) = z(t)^T P z(t)$  ao longo das trajetória do sistema (58), segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) = & z(t)^T \text{Sim}\{P(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)\} z(t) + 2z(t)^T \sum_{i=1}^{n_\tau} P \mathbf{A}_{d_i} z(t - \tau_i) \\ & - 2z(t)^T P(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \Psi_{u_0}(Fz(t)) + 2z(t)^T P \mathbf{B}_q q(t). \end{aligned}$$

Segundo (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003), a desigualdade  $EG + G^T E^T \leq E P E^T + G^T P^{-1} G$  se verifica para quaisquer matrizes  $E$  e  $G$  de dimensões apropriadas e  $P$  definida positiva. Aplicando esta propriedade ao termo  $2z(t)^T \sum_{i=1}^{n_\tau} P \mathbf{A}_{d_i} z(t - \tau_i)$  da relação anterior segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) \leq & z(t)^T (\text{Sim}\{P(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)\} + \sum_{i=1}^{n_\tau} P \mathbf{A}_{d_i} S_i \mathbf{A}_{d_i}^T P) z(t) \\ & - 2z(t)^T P(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \Psi_{u_0}(Fz(t)) + 2z(t)^T P \mathbf{B}_q q(t) \\ & + \sum_{i=1}^{n_\tau} z(t - \tau_i)^T S_i^{-1} z(t - \tau_i). \end{aligned}$$

Se (64) é verificada, então tem-se que  $S_i^{-1} < P$ , o que implica em  $z(t - \tau_i)^T S_i^{-1} z(t - \tau_i) < z(t - \tau_i)^T P z(t - \tau_i)$ . Neste caso, é possível mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n_\tau} z(t - \tau_i)^T S_i^{-1} z(t - \tau_i) < \sum_{i=1}^{n_\tau} z(t - \tau_i)^T P z(t - \tau_i)$$

e que

$$\dot{V}(z(t)) < \Xi(t) + \sum_{i=1}^{n_\tau} z(t - \tau_i)^T P z(t - \tau_i) \quad (65)$$

com

$$\begin{aligned} \Xi(t) = & z(t)^T (\text{Sim}\{P(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)\} + \sum_{i=1}^{n_\tau} P \mathbf{A}_{d_i} S_i \mathbf{A}_{d_i}^T P) z(t) \\ & - 2z(t)^T P(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \Psi_{u_0}(Fz(t)) + 2z(t)^T P \mathbf{B}_q q(t). \end{aligned}$$

Supondo agora que

$$\Xi(t) + \Theta(t) + n_\tau z(t)^T P z(t) < 0 \quad (66)$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta(t) = & -2\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T(\Psi_{u_0}(Fz(t)) - Gz(t)) + \lambda(1 - z(t)^T P z(t)) \\ & + 3\lambda(z(t)^T \eta P z(t) - 1) + \lambda(1 - q(t)^T R q(t)), \end{aligned}$$

então  $\exists \delta > 0$  tal que  $\Xi(t) + \Theta(t) + \epsilon n_\tau z(t)^T P z(t) < -\delta n_\tau z(t)^T P z(t)$  com  $\epsilon = 1 + \delta$ . Seguindo este argumento, se (66) é satisfeita, então

$$\begin{aligned} \Xi(t) + \Theta(t) + \sum_{i=1}^{n_\tau} z(t - \tau_i)^T P z(t - \tau_i) \\ < -(\epsilon + \delta) n_\tau z(t)^T P z(t) + \sum_{i=1}^{n_\tau} z(t - \tau_i)^T P z(t - \tau_i). \end{aligned} \quad (67)$$

Conforme visto na Seção 2.2.2.2, se  $z \in S(F - G, u_0)$ , então a condição de setor modificada  $\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T [\Psi_{u_0}(Fz(t)) - Gz(t)] \leq 0$  é verificada para qualquer matriz  $T$  diagonal definida positiva. Se  $z(t) \in S(F - G, u_0)$  e  $z(t)$  e  $q(t)$  são tais que  $z(t)^T Pz(t) \leq 1$ ,  $z(t)^T \eta Pz(t) \geq 1$  e  $q(t)^T Rq(t) \leq 1$ , então segue que  $\Theta(t) \geq 0$ . Por outro lado, supondo agora que  $z(t + \theta)^T Pz(t + \theta) \leq \epsilon z(t)^T Pz(t)$ ,  $\theta \in [-\hat{\tau}, 0]$ , tem-se

$$\sum_{i=1}^{n_\tau} z(t - \tau_i)^T Pz(t - \tau_i) \leq \sum_{i=1}^{n_\tau} \epsilon z(t)^T Pz(t) = n_\tau \epsilon z(t)^T Pz(t). \quad (68)$$

De (67) tem-se que  $\Xi(t) < -(\epsilon + \delta)n_\tau z(t)^T Pz(t) - \Theta(t)$ . Logo, se (66) é satisfeita, pode-se concluir a partir de (65) e (68) que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &< -(\epsilon + \delta)n_\tau z(t)^T Pz(t) - \Theta(t) + \sum_{i=1}^{n_\tau} z(t - \tau_i)^T Pz(t - \tau_i) \\ &< -\delta n_\tau z(t)^T Pz(t) < 0, \end{aligned}$$

$\forall z(t)$  tal que  $z(t + \theta)^T Pz(t + \theta) \leq \epsilon z(t)^T Pz(t)$ ,  $\theta \in [\hat{\tau}, 0]$ ,  $z(t) \in \Omega(P, 1) \cap S(F - G, u_0)$ ,  $z(t) \notin \text{int}\Omega(\eta P, 1)$  e  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

Baseado no Lema 2, pode-se concluir que se  $\phi_z \in \Omega(P, 1)$ , então a trajetória correspondente nunca deixa  $\Omega(P, 1)$  e converge para o conjunto  $\Omega(\eta P, 1)$  desde que  $\Omega(P, 1) \in S(F - G, u_0)$ . Note que pré- e pós-multiplicando (61) por  $\text{diag}\{P, T, I\}$ , segue que (61) implica em (66) para  $P = W^{-1}$  e  $T = L^{-1}$ .

A relação (62) é responsável por garantir que  $\Omega(P, 1)$  está incluso em  $S(F - G, u_0)$  e (63) implica que  $\Omega(\eta P, 1)$  está contido no interior da região de operação linear  $S(F, u_0)$ .

■

Baseado no Teorema 7, pode-se enunciar o seguinte corolário para a garantia do erro nulo de seguimento.

**Corolário 2** *Se o sistema (38) não possui zeros de transmissão em  $s = \pm jk\omega_i$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$ , e se as condições (61), (62), (63) e (64) do Teorema 7 são verificadas, então  $\forall z(0) \in \Omega(P, 1)$  e para todo sinal de referência periódico  $r(t)$  e perturbação  $d(t)$  tais que  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ , segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é um erro de seguimento tolerável associado ao valor de  $\omega_{c_i}$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$ .*

*Prova.* O resultado do Teorema 7 garante que as trajetórias do sistema em malha fechada convergem para a região  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(F, u_0)$ . Usando a mesma argumentação baseada na abordagem de Razumikhin é possível mostrar que existe um tempo finito  $t_1$  tal que  $z(t) \in \Omega(\eta P, 1)$ ,  $\forall t \geq t_1$ . Observe também que a verificação de (61) força com que  $\mathcal{H}(W, Y, S) < 0$ . Este fato garante que o sistema (58) é assintoticamente estável e se comporta linearmente (ou seja, nenhum dos sinais de controle violam o limite de saturação) em  $\Omega(\eta P, 1)$ . Logo, dado que a planta não apresente nenhum zero nas posições  $s = \pm jk\omega_i$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_\tau$ , o PMI pode ser aplicado, resultando assim no seguimento das referência e/ou rejeição das perturbações com um erro residual dependente do valor de  $\omega_c$ , conforme discutido na Seção 2.3.1.3. ■

**Observação 9** *A abordagem de Razumikhin a partir de uma função candidata de Lyapunov quadrática permite as análises de invariância e contratividade baseadas em conjuntos elipsoidais (curvas de nível da função de Lyapunov), o que desempenha um papel fundamental para lidar com o comportamento não-linear introduzido pelo saturação.*

Neste contexto, o uso de funcionais de Lyapunov-Krasovskii (e a possível obtenção de condições dependentes do valor do atraso) é mais complicado e permanece um problema em aberto pelas seguintes razões:

1. Dificuldade em caracterizar uma forma geométrica tratável para curvas de nível do funcional;
2. Não é possível garantir que  $\mathcal{J}_0 \subset S(F, u_0)$  através de LMIs, onde  $\mathcal{J}_0$  também é uma curva de nível do funcional;
3. Não é direta a garantia de que as trajetórias convergem para este conjunto (e consequentemente que ele é positivamente invariante).

## 4.5 Problema de otimização

Baseado no Teorema 7, pode-se propor dois problemas de otimização para a obtenção dos ganhos  $F$  e  $E_c$  a fim de resolver os problemas P2 e P3. O tamanho dos conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$  é medido de forma análoga ao capítulo anterior (Seção 3.4), ou seja, baseado nos conjuntos  $\mathcal{X}_R$  e  $\mathcal{D}_R$  formados por direções conhecidas *a priori*.

Supondo  $\omega_{c_i}$ ,  $i = 1 \dots, n_\tau$  conhecidos, a solução do problema P2 envolve a maximização dos escalares  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  tais que  $\alpha\mathcal{X}_R \subset \Omega(P, 1)$  e  $\beta\mathcal{D}_R \subset \Omega(R, 1)$ . Este objetivo pode ser alcançado através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{PO2:} \min (1 - \kappa)\gamma + \kappa\mu$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{x}_i^T \\ \mathbf{x}_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, f, \\ \mathbf{d}_j^T R \mathbf{d}_j \leq \mu, \quad j = 1, \dots, s, \\ \text{Relações (61), (62), (63) e (64).} \end{cases}$$

Para  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  e  $\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ , a minimização de  $\gamma$  e  $\mu$  implica na maximização de  $\alpha$  e  $\beta$ . A escolha do parâmetro  $\kappa$  segue os mesmos princípios discutidos na Seção 3.4, ou seja, de acordo com a prioridade em maximizar o conjunto de condições iniciais ou o conjunto de referências e perturbações admissíveis.

Para resolver o problema P3 considera-se os escalares  $\gamma$  e  $\mu$  dados e a maximização de  $\omega_{c_i}$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$  como segue:

$$\mathbf{PO3:} \max \sum_{i=1}^{n_\tau} \rho_i \omega_{c_i}$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{x}_i^T \\ \mathbf{x}_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, f, \\ \mathbf{d}_j^T R \mathbf{d}_j \leq \mu, \quad j = 1, \dots, s, \\ \text{Relações (61), (62), (63) e (64).} \end{cases}$$

onde  $\rho_i > 0$ ,  $i = 1 \dots, n_\tau$  são fatores escalares que representam os pesos de cada frequência no critério, o que permite priorizar a maximização de uma das frequências em detrimento de outra.

Note que para  $\lambda$ ,  $\eta$  e frequências de corte  $\omega_{c_i}$  fixos *a priori*, as relações (61)-(64) são efetivamente LMIs. Para reduzir o número de variáveis de varredura pode-se considerar todas as frequências de corte iguais, ou seja,  $\omega_{c_i} = \omega_c$ ,  $i = 1 \dots, n_\tau$ . Nos exemplos

de simulação foi observado que esta escolha particular tem pouca influência no valores ótimos resultantes da solução do problema de otimização PO2. Desta forma, em PO2 dois parâmetros devem ser fixados,  $\kappa$  e  $\omega_c$ . Para os demais parâmetros  $\lambda$  e  $\eta$  é realizada uma varredura em busca de valores que resultem no menor critério de otimização.

De qualquer forma, a escolha de  $\kappa$  e  $\omega_c$  não deve ser feita de forma arbitrária: como mencionado anteriormente,  $\kappa$  deve ser escolhido de acordo com a prioridade em maximizar  $\Omega(P, 1)$  ou  $\Omega(R, 1)$ . Por outro lado, altos valores de  $\omega_c$  implicam em erros de seguimento pequenos. De uma maneira geral acaba por se estabelecer um compromisso entre os valores de  $\omega_c$  e o tamanho dos conjuntos admissíveis, sendo que altos valores de  $\omega_c$  resultam em pequenos valores para os tamanhos de  $\alpha$  e  $\beta$ .

## 4.6 Exemplos numéricos

Neste capítulo são considerados os mesmos exemplos discutidos na Seção 3.5. A não ser que explicitamente mencionado, as matrizes e parâmetros que descrevem os sistemas são idênticos aos considerados nas Seções 3.5.1, 3.5.2 e 3.5.3.

### 4.6.1 Exemplo 1 - sistema SISO

Devido às restrições inerentes aos controladores ressonantes (cada modo senoidal insere dois estados no sistema aumentado), na Seção 3.5.1 foi considerado um sinal constante como sinal de referência. No caso do controlador repetitivo, supondo sistemas SISO e que todos os sinais envolvidos são múltiplos inteiros de uma mesma frequência fundamental, apenas um estado adicional é inserido no sistema aumentado. Desta forma, assume-se que os sinais de referência e perturbação são ondas triangulares de mesmo período ( $\tau = 10$ s) e amplitudes a serem determinadas através da solução do problema de otimização PO2.

Para  $\kappa = 0.5$  os valores de  $\lambda$  e  $\eta$  que resultam no menor critério  $(1 - \kappa)\gamma + \kappa\delta$  são 0.0021 e 39.7959, respectivamente. Para estes valores, segue que  $\alpha = 0.9769$ ,  $\beta = 0.1298$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 1.0431 & -0.6910 \\ -0.6910 & 0.7538 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1.1772 & -2.3543 \\ -2.3543 & 4.7086 \end{bmatrix} \times 10^8$$

$$F = \begin{bmatrix} -9.0048 & 10.8751 \end{bmatrix} \text{ e } E_c = 4.9901.$$

Considerando  $r_{max} = 0.1298$ ,  $d_{max} = 0.0649$  (calculados como descrito na Seção 3.5.1) e  $z(0) = [1.5386 \ 1.6096]^T$  (tais que  $q_{max} \in \partial\Omega(R, 1)$  e  $z(0) \in \partial\Omega(P, 1)$ ), segue que a simulação do sistema em malha fechada é apresentada na Figura 34. Note que o sinal de controle atinge os dois limites de saturação antes de permanecer confinado ao interior de  $S(F, u_0)$ . Este comportamento é melhor visualizado na Figura 35.

Na Figura 35(a) é apresentado o plano de fase do sistema aumentado supondo  $z_1(t) = x(t)$  e  $z_2(t) = \xi(t)$ , além dos elipsoides  $\Omega(P, 1)$ ,  $\Omega(\eta P, 1)$  e a região de operação linear do sistema calculados a partir da solução de PO2. Nesta mesma figura é apresentada a evolução da trajetória do sistema iniciada no ponto  $z(0) = [1.5386 \ 1.6096]^T$ . Note que esta trajetória é iniciada fora da região de operação linear, atravessa esta região, voltando a fazer com que o sinal de controle sature e, uma vez no interior de  $\Omega(\eta P, 1)$ , fica confinada a este conjunto. No detalhamento deste conjunto apresentado na Figura 35(b) fica claro que a trajetória correspondente não deixa o interior de  $\Omega(\eta P, 1)$ .

Seguindo este mesmo raciocínio, na Figura 36(a) é apresentado o plano de fase do sistema para várias trajetórias iniciadas na fronteira de  $\Omega(P, 1)$ . Neste caso, é possível

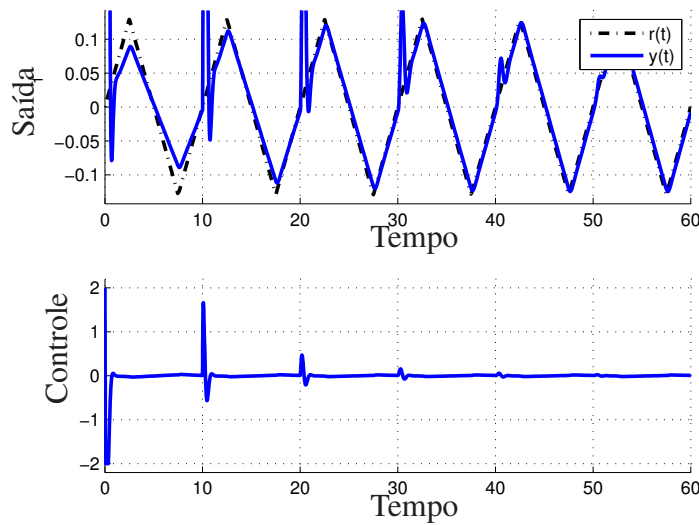


Figura 34: Sistema *SISO* - controlador repetitivo - simulação do sistema (42) para  $r_{max} = 0.1298$ ,  $d_{max} = 0.0649$  e  $z(0) = [1.5386 \ 1.6096]^T$ .

observar os mesmos comportamentos obtidos para os controladores ressonantes, isto é, trajetórias iniciadas na região linear e que deixam esta região depois de um certo momento e trajetórias iniciadas fora da região linear que cruzam esta região em um certo tempo. O detalhe de  $\Omega(\eta P, 1)$  apresentado na Figura 36(a) mostra que de fato todas estas trajetórias convergem para o interior de  $\Omega(P, 1)$ .

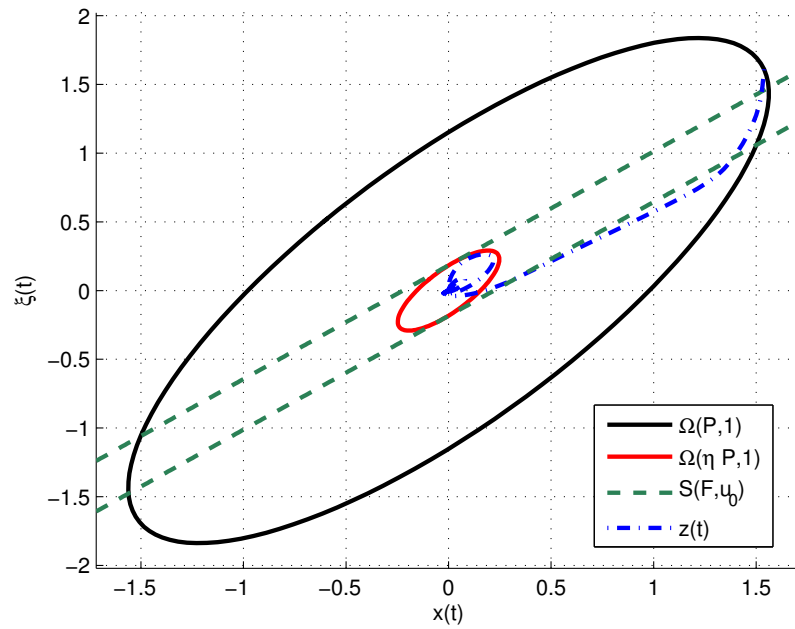
Comparando as duas abordagens propostas, segue que os resultados obtidos para o controlador repetitivo são menos conservadores, uma vez que os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são maiores do que os apresentados na Seção 3.5.1. Além disso, vale ressaltar mais uma vez que o controlador repetitivo garante o seguimento/rejeição de qualquer sinal periódico com período múltiplo de  $\tau = 10$ s.

#### 4.6.2 Exemplo 2 - UPS

Seguindo o procedimento adotado na Seção 3.5.2, o problema de otimização de interesse é maximizar o conjunto de condições iniciais para um dado conjunto de valores máximos dos sinais de referência e perturbação. Assim, PO2 pode ser escrito em uma formulação análoga à PO1a, ou seja, fixando-se  $\delta = 1$  em (49) e  $\kappa = 0$ , de forma a maximizar apenas  $\Omega(P, 1)$  (uma vez que  $\Omega(R, 1)$  é conhecido). As direções de otimização foram novamente arbitradas de tal forma que  $x_1 = [1 \ 1 \ 0_{1 \times p\tau}]^T$  e  $d_1 = [155.5635 \ 50]^T$ .

Nas Figuras 37-39 são apresentados os resultados para a solução de PO2 considerando a varredura em  $\lambda$  e  $\eta$  e supondo  $\omega_c = 50$ rad/s,  $\omega_c = 60$ rad/s e  $\omega_c = 66$ rad/s, respectivamente. Os pontos destacados em azul escuro são pontos onde não foi possível encontrar solução para o problema de otimização proposto. Note que o espaço de valores de  $\lambda$  e, principalmente,  $\eta$  para os quais é possível achar uma solução para PO2 diminui drasticamente conforme  $\omega_c$  aumenta. Para valores de  $\omega_c$  maiores que 66rad/s não foi possível encontrar um conjunto de parâmetros  $\lambda$  e  $\eta$  tais que PO2 fosse factível. No caso dos controladores ressonantes este efeito não é tão pronunciado, onde o erro de seguimento foi utilizado como critério para a escolha do número máximo de harmônicas e não à impossibilidade de encontrar uma solução.





(a) Regiões consideradas

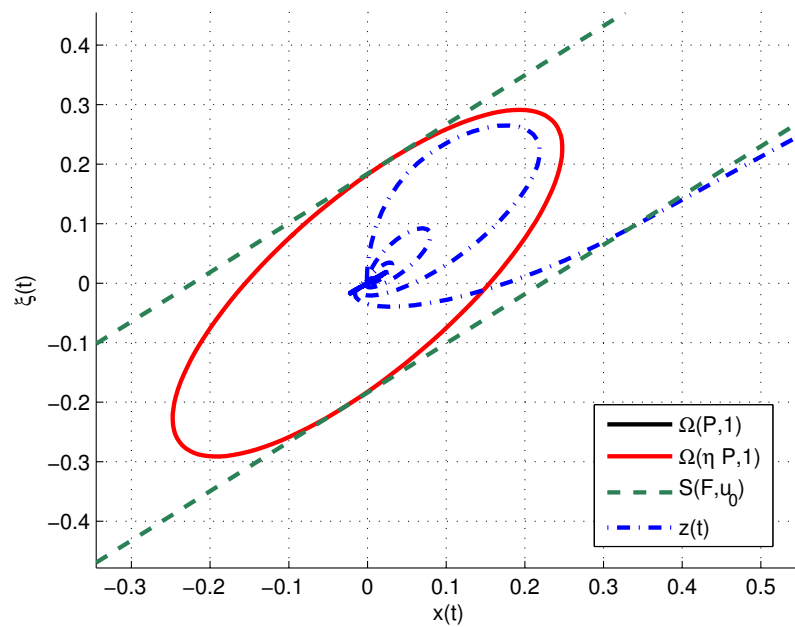
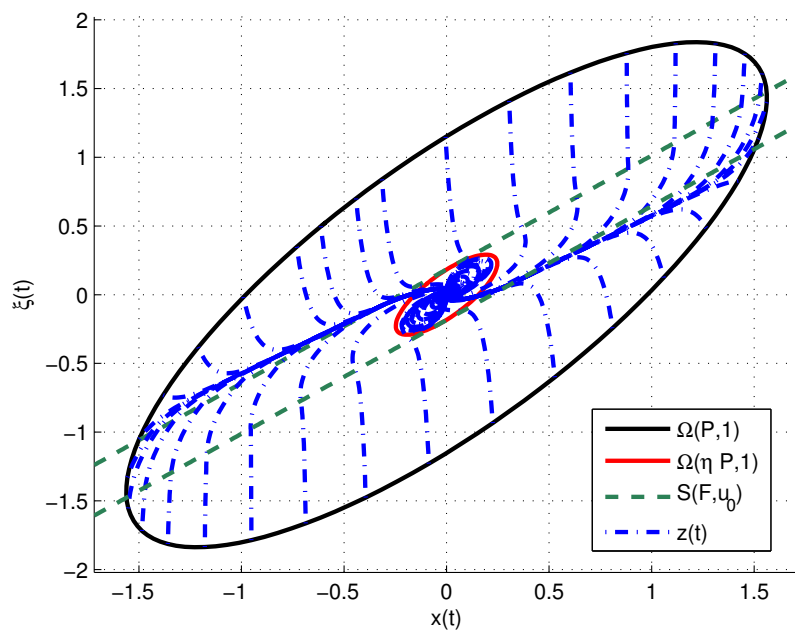
(b) Detalhe  $\Omega(\eta P,1)$ 

Figura 35: Sistema *SISO* - controlador repetitivo - trajetória de (42) iniciada em  $z(0) = [1.5386 \ 1.6096]^T$ .



(a) Regiões consideradas

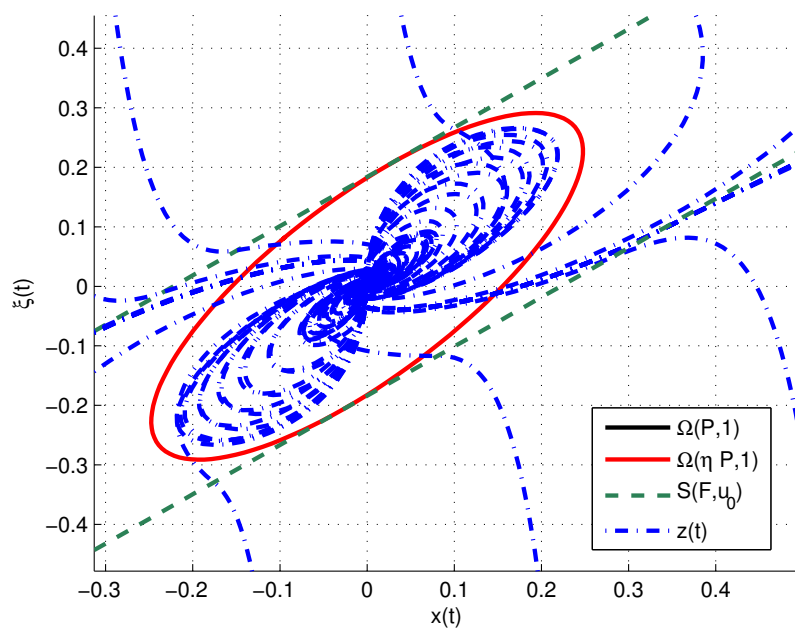
(b) Detalhe  $\Omega(\eta P, 1)$ 

Figura 36: Sistema *SISO* - controlador repetitivo - trajetórias de (42) iniciadas na fronteira de  $\Omega(P, 1)$ .

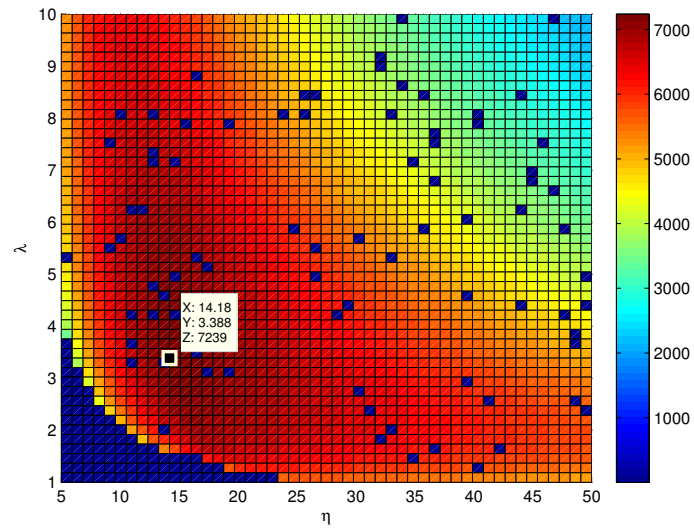


Figura 37: *UPS* - controlador repetitivo - varredura em  $\lambda$  e  $\eta$  considerando  $\omega_c = 50$ .

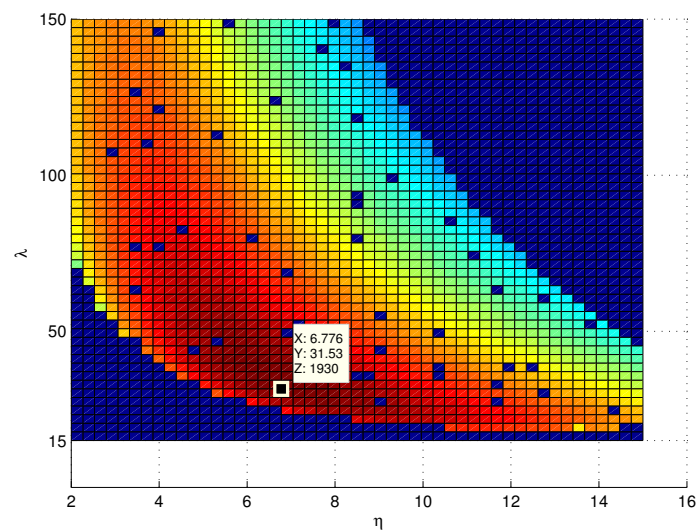


Figura 38: *UPS* - controlador repetitivo - varredura em  $\lambda$  e  $\eta$  considerando  $\omega_c = 60$ .

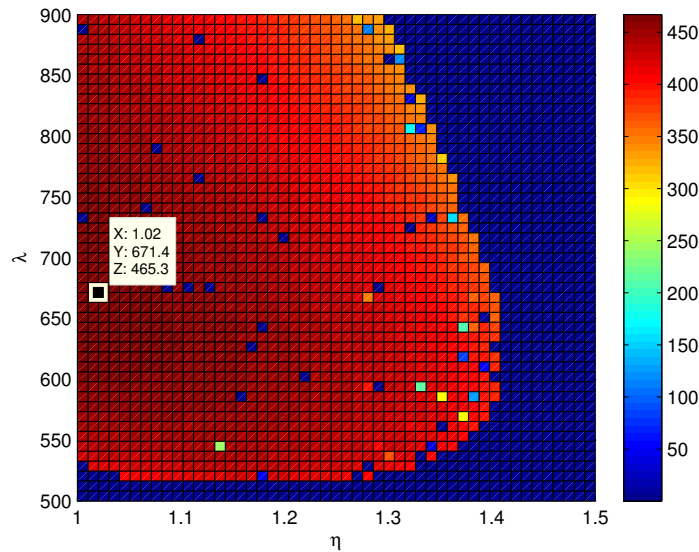


Figura 39: *UPS* - controlador repetitivo - varredura em  $\lambda$  e  $\eta$  considerando  $\omega_c = 66$ .

Os valores dos ganhos  $F$  e  $E_c$  resultantes da solução de PO2 para os valores ótimos de  $\lambda$  e  $\eta$  apresentados nas Figuras 37-39 podem ser encontrados na Tabela 4. Na Figura 40 são apresentados os erros de seguimento considerando a simulação do sistema para os ganhos da Tabela 4. Pode-se observar que o menor erro possível (no caso  $\omega_c = 66$ rad/s) ainda é cerca de dez vezes maior que o erro obtido para o controlador ressonante.

Tabela 4: *UPS* - ganhos dos controladores repetitivos

$\omega_c = 50$		
$E_c = 243.0228$	$F =$	$\begin{bmatrix} -0.0679 & -0.0856 & 252.4432 \end{bmatrix}$
$\omega_c = 60$		
$E_c = 133.9604$	$F =$	$\begin{bmatrix} -0.1293 & -0.2695 & 1.1197 \times 10^3 \end{bmatrix}$
$\omega_c = 66$		
$E_c = 13.5584$	$F =$	$\begin{bmatrix} -0.1932 & -0.6172 & 3.4072 \times 10^3 \end{bmatrix}$

Considerando  $\omega_c = 66$ rad/s, a simulação do sistema para uma condição inicial  $z(0) = [414.8182 \ 414.8182 \ 0_{1 \times p_0}]^T$  (de tal forma que  $z(0)^T P z(0) = 1$ ) é apresentada na Figura 41. Pode-se observar que existe uma defasagem entre o sinal de referência e a saída do sistema, resultante da frequência de corte do filtro passa-baixas não ser suficientemente grande. Esta diferença na fase já foi mencionada quando o Diagrama de Bode do controlador repetitivo foi apresentado (ver Figura 9). Esta defasagem é o principal responsável pelo erro pontual na casa de 10% apresentado na Figura 40 e não a deformação da saída decorrente no conteúdo harmônico como no caso do controlador ressonante. Como pode ser observado na Figura 42 a diferença entre o valor *RMS* do sinal de referência e o sinal de saída é muito pequena, na casa de 0.0118%. Finalmente, na Figura 43 é apresentada a *THD* do sinal de saída para os diferentes valores de  $\omega_c$  considerados. Note que a *THD* é menor que 5% para os três valores de  $\omega_c$  apresentados. Para  $\omega_c = 66$ rad/s, os resultados de *THD* e erro *RMS* do controlador repetitivo são da mesma ordem de grandeza quando comparados ao controlador ressonante com as frequências  $\omega_0$ ,  $3\omega_0$  e  $5\omega_0$ . Para

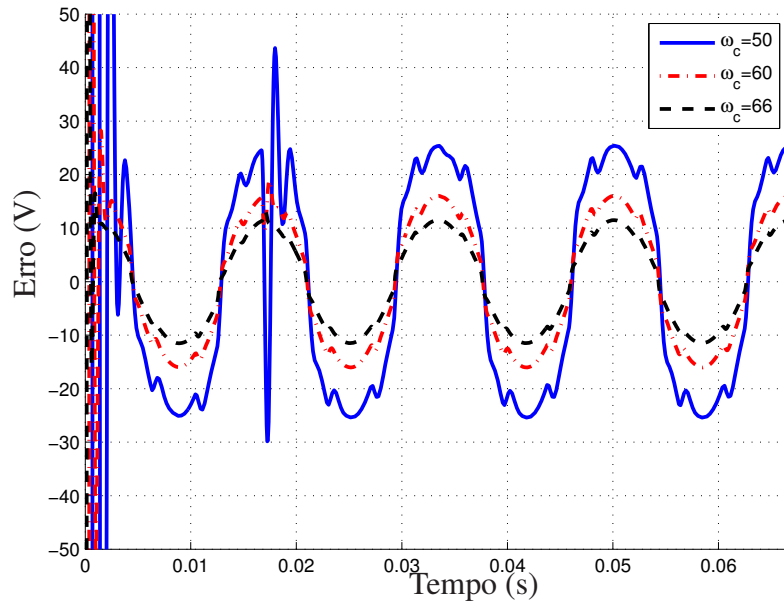


Figura 40: *UPS* - erros de seguimento para diferentes frequências de corte.

esta escolha particular de *UPS*, ambos controladores satisfazem os requisitos da norma (ANSI/IEEE, 1986).

#### 4.6.3 Exemplo 3 - sistema *MIMO*

Considere o sistema (38) com as mesmas matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_g$ ,  $C$  e limites de saturação  $u_0$  apresentadas na Seção 3.5.3. Os conjuntos de períodos dos sinais de referência e perturbação são definidos como  $\mathcal{T}_r = \{1, \sqrt{5}\}$  e  $\mathcal{T}_d = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ , respectivamente. Neste caso, a união de  $\mathcal{T}_r$  e  $\mathcal{T}_d$  resulta em  $\mathcal{T} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ .

De forma análoga ao apresentado no capítulo anterior, o objetivo deste exemplo é ilustrar a influência do laço de *anti-windup* no desempenho do sistema em malha fechada. O objetivo de otimização é maximizar os conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$  nas direções  $\mathcal{X}_R = \{\mathbf{x}\}$ ,  $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$  e  $\mathcal{D}_R = \{\mathbf{d}\}$ ,  $\mathbf{d} = [2 \ 1 \ 1 \ 0.5]^T$ . Além disso, assume-se que todas as implementações do controlador repetitivo apresentam a mesma frequência de corte do filtro passa-baixas, isto é,  $\omega_{c_i} = \omega_c$ ,  $i = 1, \dots, 3$ .

A partir destes dados, o problema de otimização PO2 foi resolvido considerando uma varredura nos parâmetros  $\eta$  e  $\lambda$ , supondo  $\omega_c = 3$  e  $\kappa = 0.1$ . Os valores ótimos para o critério de otimização de PO2 foram obtidos para  $\eta = 6578.9$  e  $\lambda = 2.7263 \times 10^{-5}$ , resultando em:  $\alpha = 98.0685$ ,  $\beta = 1.0372$ ,

$$E_c = \begin{bmatrix} 73.5427 & 7.9865 \\ 34.3475 & 6.5939 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.1364 & -2.9942 & 0 & -0.0240 & 27.7543 & 607.6818 & \dots \\ 3.4752 & 0.0308 & 0 & -0.0504 & -19.0174 & -249.0004 & \dots \\ \dots & 4365.9351 & -35.4740 & -802.2777 & -5748.4454 & & \\ \dots & -1975.8114 & 40.3454 & 646.7448 & 4872.0296 & & \end{bmatrix}$$

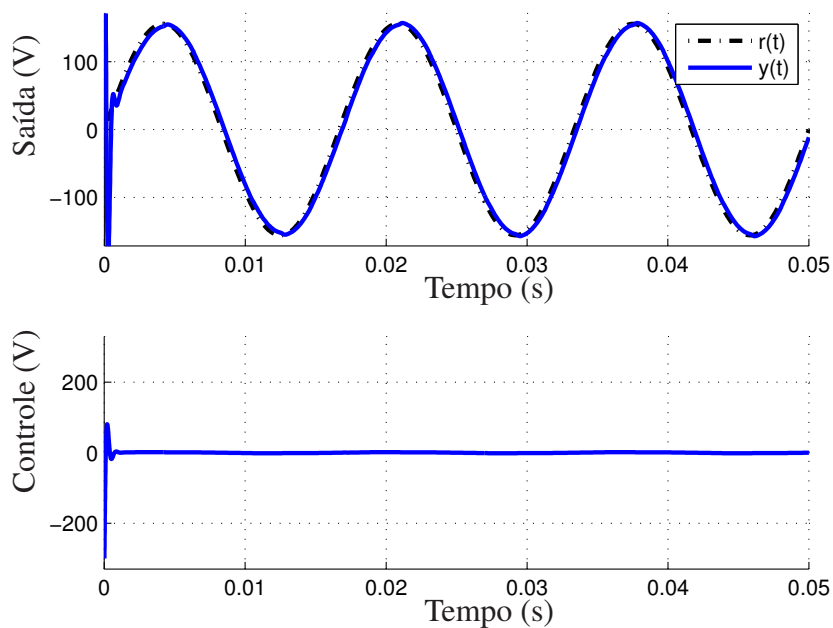


Figura 41: UPS - simulação considerando  $\omega_c = 66\text{rad/s}$ .

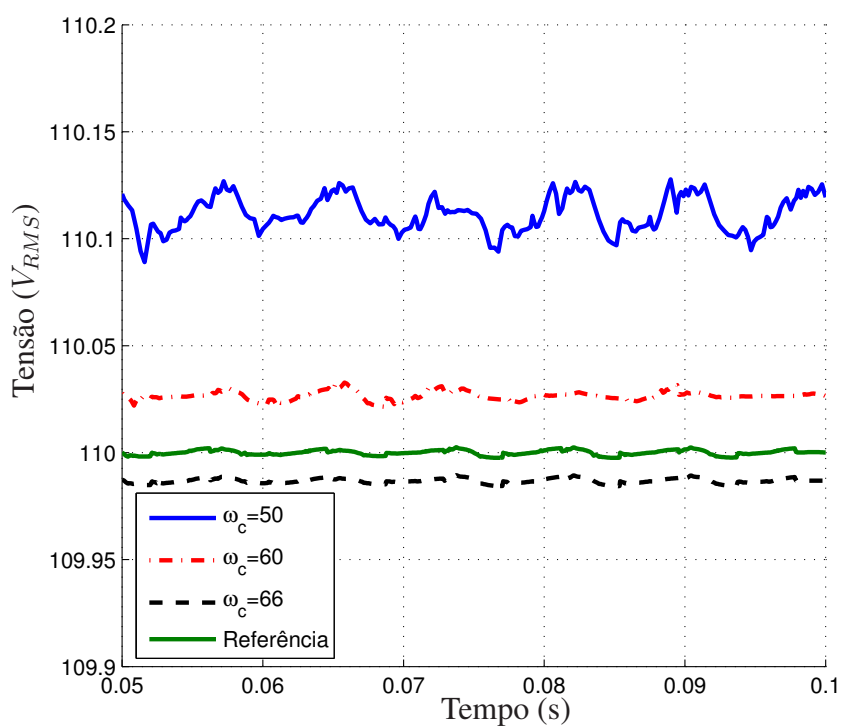


Figura 42: UPS - controlador repetitivo - valor RMS dos sinais de saída para diferentes valores de  $\omega_c$ .

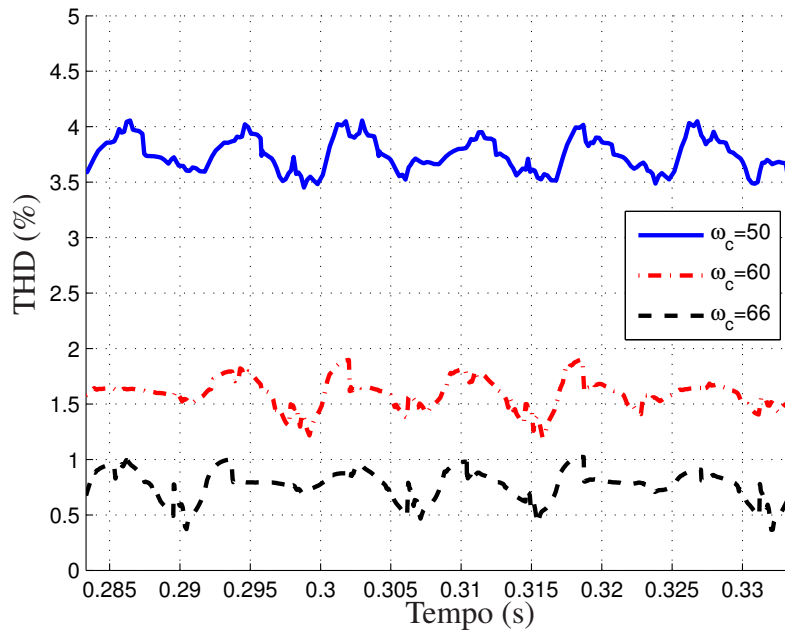


Figura 43: UPS - controlador repetitivo - THD do sinal de saída para diferentes valores de  $\omega_c$ .

Supondo agora o caso sem o compensador *anti-windup*, ou seja, removendo o termo relativo à matriz  $M$  em (61), o problema PO2 foi resolvido considerando os mesmos valores de  $\omega_c$  e  $\kappa$  do exemplo anterior. Neste caso, segue que a solução ótima é obtida para  $\eta = 5055.6$  e  $\lambda = 5.6444 \times 10^{-5}$ , resultando em:  $\alpha = 1.2896$ ,  $\beta = 0.0298$ ,

$$F = \begin{bmatrix} 58.3798 & -80.3093 & 0 & 0.1040 & 117.4589 & 1438.1500 & \cdots \\ 216.8853 & -176.8838 & 0 & 0.4299 & -11.0505 & -5716.0010 & \cdots \\ \cdots & 1.5734 \times 10^4 & 335.7198 & 9038.8082 & 5.7688 \times 10^4 & \cdots \\ \cdots & -2.0780 \times 10^4 & 1241.6451 & 35956.6139 & 2.2478 \times 10^5 & \cdots \end{bmatrix}.$$

Para ilustrar o desempenho do sistema em malha fechada com os ganhos computados considera-se que os sinais de referência e perturbação  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $d_1(t)$  e  $d_2(t)$  são ondas triangulares periódicas com amplitudes iguais a 2.0745, 1.0372, 1.0372 e 0.5186 e períodos iguais a  $1s$ ,  $\sqrt{5}s$ ,  $\sqrt{2}s$  e  $\sqrt{5}s$ , respectivamente. Neste caso os valores máximos de referência e perturbação foram calculados por um procedimento análogo ao apresentado na Seção 3.5.1 tais que  $q_{max}^T R q_{max} = 1$ . Os resultados de simulação com e sem a compensação *anti-windup* são apresentados nas Figuras 44 e 45, respectivamente, supondo uma condição inicial  $x(0) = [98.0685 \ 98.0685 \ 98.0685 \ 98.0685]^T$  e  $\xi(0) = 0_{6 \times 1}$  (tais que  $z(0)^T P z(0) = 1$ ). Assim como no caso dos controladores ressonantes, a contribuição do compensador *anti-windup* se dá de duas maneiras: o sistema com  $E_c \neq 0$  deixa a região saturada em um tempo menor se comparado com o caso com  $E_c = 0$ , melhorando de forma significativa a resposta transitória do sistema; além disso, existe um aumento nos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  (ou seja, os conjuntos admissíveis obtidos são maiores), resultantes do grau de liberdade adicional decorrente da matriz  $M$  na relação (61).

A relação entre o tamanho dos conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$  e os valores de  $\omega_c$  e  $\kappa$  pode ser observada na Tabela 5, onde os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para diferentes configurações

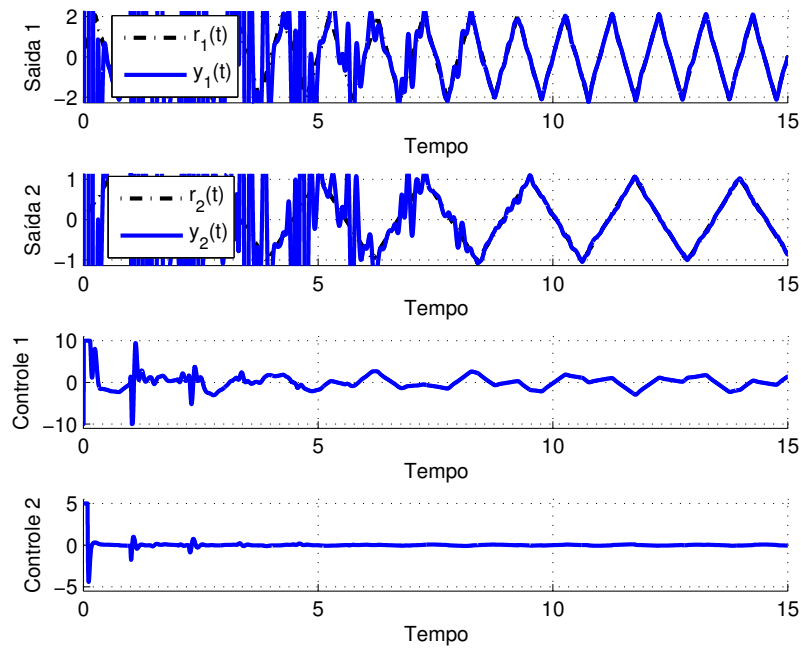


Figura 44: Sistema *MIMO* - controlador repetitivo - simulação considerando  $E_c \neq 0$  e  $x(0) = 98.0685[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$

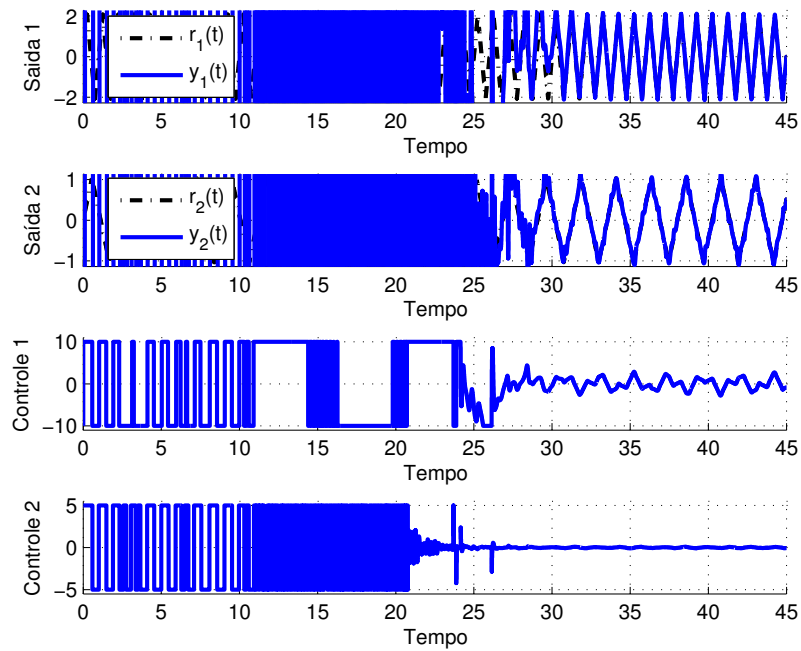


Figura 45: Sistema *MIMO* - controlador repetitivo - simulação considerando  $E_c = 0$  e  $x(0) = 98.0685[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 6}]^T$



destes parâmetros são apresentados. Note que de fato a escolha de  $\kappa$  e  $\omega_c$  influenciam diretamente no tamanho dos conjuntos resultantes.

Tabela 5: Controlador repetitivo - influência de  $\kappa$  e  $\omega_c$  nos valores de  $\alpha$  e  $\beta$

$\omega_c = 3$						
$\kappa$	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$\alpha$	139.03	87.63	71.03	50.23	37.83	0.00
$\beta$	0.00	1.04	1.26	1.83	3.17	4.31
$\omega_c = 5$						
$\kappa$	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$\alpha$	51.17	19.77	17.14	14.17	6.10	0.00
$\beta$	0.00	0.37	0.49	0.63	1.12	1.47

Na Tabela 6 é apresentada a solução de PO2 para diferentes combinações das frequências de corte  $\omega_{c_i}$ . Neste caso  $\bar{\omega}_c$  denota qualquer combinação  $\bar{\omega}_c = [\omega_{c_1} \ \omega_{c_2} \ \omega_{c_3}]$ . Além dos resultados do problema de otimização ( $\alpha$  e  $\beta$ ), também são apresentados nesta tabela os erros máximos das saídas do sistema quando este atinge seu regime permanente, denotadas por  $y_{1rp}(t)$  e  $y_{2rp}(t)$ . Estes valores são calculados em relação percentual a partir dos valores máximos dos sinais de referência (tais que  $q(t)^T Rq(t) = 1$ ), ou seja,

$$e_{1max}(\%) = 100 \frac{\max(\|r_1(t) - y_{1rp}(t)\|)}{r_{1max}} \text{ e } e_{2max}(\%) = 100 \frac{\max(\|r_2(t) - y_{2rp}(t)\|)}{r_{2max}}.$$

Como esperado, o erro de seguimento em cada um dos sinais de referência diminui conforme os valores de  $\omega_{c_i}$  associados a estes sinais aumentam. O mesmo se verifica para a rejeição de perturbação. Note que os valores de  $\alpha$  são pouco suscetíveis à combinação de  $\omega_{c_i}$  em  $\bar{\omega}$ , sendo fundamentalmente determinado por  $\max(\omega_{c_i})$ . Assim, a combinação  $\omega_{c_i} = \omega_c$  é a mais indicada se a maximização de  $\Omega(P, 1)$  é o principal objetivo do problema de otimização. Para os valores de  $\beta$  não é possível estabelecer um relação direta, provavelmente devido ao fato que o conjunto  $\Omega(P, 1)$  tem maior peso no problema de otimização (o valor de  $\kappa$  escolhido é  $\kappa = 0.1$ ).

Tabela 6: Controlador repetitivo - influência de  $\omega_{c_i}$  nos valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e erro de seguimento

$\bar{\omega}_c$	$\alpha$	$\beta$	$e_{1max}(\%)$	$e_{2max}(\%)$
[2 2 2]	124.6608	1.4232	40.2984	68.5070
[2 3 2]	101.7321	0.9825	23.5852	44.8618
[2 2 3]	100.3329	1.0854	13.4725	22.2324
[3 2 2]	111.5572	1.5523	29.9339	53.6972
[2 3 3]	103.4630	1.3683	12.8973	6.1588
[3 2 3]	104.5475	1.6717	11.9657	10.1464
[3 3 2]	99.6880	1.2581	15.9074	33.3702
[3 3 3]	98.0685	1.0372	11.3890	6.0057

## 4.7 Comentários finais

Neste capítulo foi mostrada uma abordagem que considera a introdução dos controladores repetitivos na malha de controle. A partir de uma função de Lyapunov quadrática

e da abordagem de Razumikhin foram obtidas condições “*quasi*” *LMI* para a síntese simultânea do controlador estabilizante e do laço de *anti-windup*. Através do exemplo da *UPS* foi observado que o controlador repetitivo apresenta um maior erro de seguimento quando comparado ao controlador ressonante com vários modos. Este erro se deve principalmente a um valor baixo de  $\omega_c$ , de tal forma que o sinal de saída do controlador está defasado em relação ao sinal de referência. Por outro lado, analisando o valor *RMS* e a *THD* do sinal de saída é possível concluir que as duas metodologias apresentam resultados equivalentes. Além disso, foi mostrado que as trajetórias do sistema aumentado ficam de fato confinadas no interior de um conjunto elipsoidal invariante e que o laço de *anti-windup* melhora o desempenho do sistema em malha fechada e reduz o conservadorismo das soluções propostas. Os resultados iniciais deste trabalho considerando sistemas *SISO* e incertezas limitadas em norma foram apresentados em (FLORES et al., 2010a). A extensão para sistemas *MIMO* da forma como foi apresentada neste capítulo foi publicada em (FLORES et al., 2012).

## 5 EXTENSÕES DO RESULTADOS PARA SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO

Neste capítulo, os resultados dos capítulos anteriores são estendidos para sistemas de tempo discreto. Em um primeiro momento será apresentada uma abordagem genérica idêntica àquela apresentada no Capítulo 3, considerando os controladores ressonantes da Seção 2.3.1.2. Esta mesma abordagem será considerada para a implementação do controlador repetitivo de tempo discreto apresentado na Seção 2.3.1.4. Exemplos numéricos serão utilizados para ilustrar a solução proposta.

### 5.1 Preliminares

Considere o sistema de tempo discreto sujeito a restrições no sinal de controle descrito por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B \text{sat}_{u_0}(u(k)) + B_d d(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ e(k) &= r(k) - y(k) \end{aligned} \quad (69)$$

sendo  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados do sistema,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  o vetor de entradas de controle,  $d(k) \in \mathbb{R}^l$  o vetor de perturbações,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  o vetor de saídas do sistema,  $e(k) \in \mathbb{R}^p$  o vetor de erro de seguimento e  $r(k) \in \mathbb{R}^p$  o de referências periódicas que se deseja seguir. As considerações relativas a  $A$ ,  $B$ ,  $B_d$ ,  $C$  e o número de entradas e saídas são as mesmas apresentadas na Seção 3.1.

Seguindo a formulação apresentada na Seção 2.3.1.2, o PMI para sistemas de tempo discreto pode ser implementado através da introdução na malha de controle do sistema dinâmico

$$\xi(k+1) = A_\xi \xi(k) + B_\xi e(k) + B_\xi E_c (\text{sat}_{u_0}(u(k)) - u(k)) \quad (70)$$

onde  $\xi(k) \in \mathbb{R}^{p_0}$  e  $E_c (\text{sat}_{u_0}(u(k)) - u(k))$  corresponde a um laço de *anti-windup* estático.  $E_c \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é a matriz de ganho *anti-windup*, a ser determinada.

A introdução do modelo interno no sistema em malha fechada é considerada através do vetor de estados aumentado  $z(k)^T = [x(k)^T \ \xi(k)^T]^T \in \mathbb{R}^{n+p_0}$ . A partir do sistema (69) e de (70), segue que

$$z(k+1) = \mathbf{A}z(k) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(u(k)) + \mathbf{B}_2 (\text{sat}_{u_0}(u(k)) - u(k)) + \mathbf{B}_q q(k) \quad (71)$$

onde  $q(k) = [r^T(k) \ d^T(k)]^T$  e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times p_0} \\ -B_\xi C & A_\xi \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{q_3 \times m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{V}E_c, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ B_\xi \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & B_d \\ B_\xi & 0_{q_3 \times l} \end{bmatrix}.$$

Partindo do pressuposto que todos estados estão disponíveis para realimentação, é introduzida uma realimentação de estados

$$u(k) = F_1x(k) + F_2\xi(k) = Fz(k), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)}, \quad (72)$$

tal que o sistema (71) pode ser reescrita como

$$z(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1F)z(k) - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\Psi_{u_0}(Fz(k)) + \mathbf{B}_q q(k) \quad (73)$$

## 5.2 Formulação do problema

O problema de interesse no caso discreto é análogo ao Problema 2 apresentado na Seção 3.2. Porém, nestes sistemas a garantia que as trajetórias convergem para  $\mathcal{J}_0$  não implica que este conjunto é um conjunto positivamente invariante.

Considerando os sistemas de tempo contínuo, a solução apresentada nos Capítulos 3 e 4 utiliza o *S-procedure* para garantir que a derivada da função de Lyapunov  $V(z(t)) = z^T(t)Pz(t)$  seja negativa na região dada pela diferença entre os conjuntos  $\mathcal{Z}_0$  e  $\mathcal{J}_0$ . Assim, quando uma trajetória iniciada no interior  $\mathcal{J}_0$  atinge a fronteira deste conjunto, o fato de  $\dot{V}(z(t)) < 0$  força que a trajetória retorne ao interior do conjunto, isto é, se  $z(t_1) \in \partial\Omega(\eta P, 1)$ ,  $z_{t_1} \in \text{int}\Omega(\eta P, 1)$  e  $\dot{V}(z(t_1)) < 0$ , então  $z(t_1 + \Delta t) \in \text{int}\Omega(\eta P, 1)$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ . Desta forma a invariância de  $\mathcal{J}_0$  é garantida de forma implícita. Este comportamento é ilustrado na Figura 46(a).

Para sistemas de tempo discreto, uma solução análoga consiste em fazer que  $\Delta V(z(k))$  seja negativa na região dada pela diferença entre os conjuntos  $\mathcal{Z}_0$  e  $\mathcal{J}_0$ . Considerando uma trajetória iniciada em  $\mathcal{J}_0$ , pode acontecer que exista uma amostra  $k_1$  tal que  $z(k_1) \notin \mathcal{J}_0$  e  $z(k) \in \mathcal{J}_0$ ,  $k < k_1$  (ver Figura 46(b)). Como  $\Delta V(z(k)) < 0$ , então garante-se que existe um  $k_2 > k_1$  tal que  $z(k_2) \in \mathcal{J}_0$ . Seguindo este raciocínio, pode-se observar que a garantia de que as trajetórias convergem para  $\mathcal{J}_0$  não implica diretamente na invariância deste conjunto.

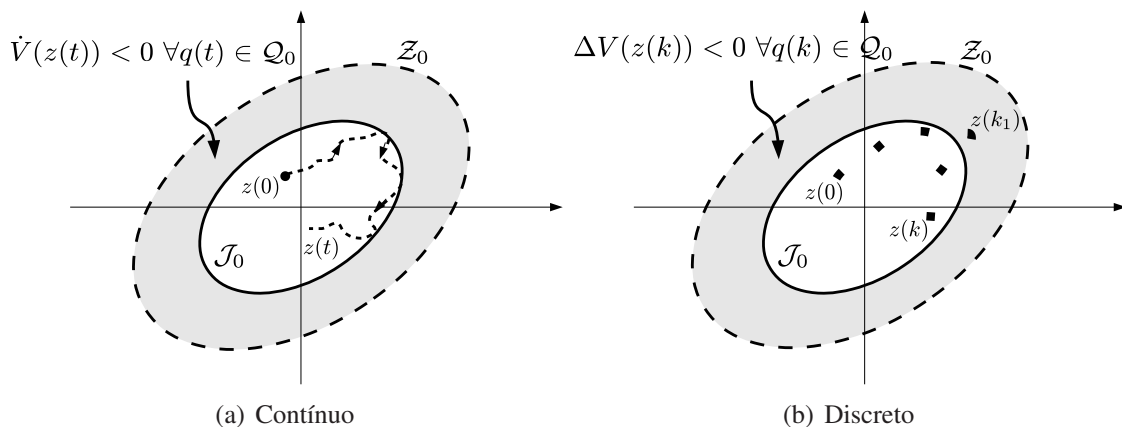


Figura 46: Regiões elipsoidais - sistemas de tempo discreto

Desta forma, é necessária a utilização de condições adicionais que forcem que  $\mathcal{J}_0$  seja positivamente invariante, prevenindo assim que as trajetórias “saltem” para fora do conjunto em uma dada amostra. A necessidade da utilização destas condições adicionais será analisada na Seção 5.3.

### 5.3 Resultado principal

O seguinte teorema estabelece condições para determinação dos ganhos  $F$  e  $E_c$  a fim de solucionar o Problema 2:

**Teorema 8** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W \in \mathbb{R}^{(n+p_0) \times (n+p_0)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$ , matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e escalares  $\lambda > 0$  e  $\eta > 1$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} -\bar{\lambda}W & * & * & * \\ X & -2L & * & * \\ 0 & 0 & -\lambda R & * \\ \mathbf{A}W + \mathbf{B}_1Y & -\mathbf{B}_1L - VM & \mathbf{B}_q & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{(i)} - X_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix} \eta W & * \\ Y_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (76)$$

com  $\bar{\lambda} = \lambda(1 - 3\eta) + 1$ , então os ganhos  $F = YW^{-1}$  e  $E_c = ML^{-1}$  são tais que:

1. Todas as trajetórias de (73) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem em um número finito de amostras para  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(F, u_0)$  e  $\Omega(\eta P, 1)$  é um conjunto positivamente invariante,  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ ;
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1F)$  é Schur-estável.

*Prova.* Considere a função candidata de Lyapunov quadrática  $V(z(k)) = z(k)^T P z(k)$ . Como deseja-se mostrar que todas as trajetórias iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem para  $\Omega(\eta P, 1)$ ,  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ , é necessário provar que  $\Delta V(z) = V(z(k+1)) - V(z(k)) < 0$ ,  $\forall z(k) \in \Omega(P, 1)$ ,  $z(k) \notin \Omega(\eta P, 1)$  e  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ . Isto pode ser verificado através da aplicação do S-procedure (BOYD et al., 1994), ou seja, se existe o escalar  $\lambda > 0$  tal que

$$\Delta V(z) + \lambda(1 - z(k)^T P z(k)) + 3\lambda(z(k)^T \eta P z(k) - 1) + \lambda(1 - q(k)^T R q(k)) < 0. \quad (77)$$

Com o objetivo de levar em conta os efeitos da saturação na estabilidade do sistema em malha fechada, considera-se a condição de setor modificada apresentada na Seção 2.2.2.2. Se  $z(k) \in S(F - G, u_0)$  então segue que  $\Psi_{u_0}(Fz(k))^T T [\Psi_{u_0}(Fz(k)) - Gz(k)] \leq 0$  é verificada para qualquer matriz  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva. Logo, se

$$\begin{aligned} \Delta V(z) + \lambda(1 - z(k)^T P z(k)) + 3\lambda(z(k)^T \eta P z(k) - 1) - 2\Psi_{u_0}(Fz(k))^T T \Psi_{u_0}(Fz(k)) \\ + 2\Psi_{u_0}(Fz(k))^T T Gz(k) + \lambda(1 - q(k)^T R q(k)) < 0 \end{aligned} \quad (78)$$

é satisfeita, então segue que  $\Delta V(z) < 0$ ,  $\forall z(k) \in S(F - G, u_0) \cap \Omega(P, 1)$ ,  $z(k) \notin \Omega(\eta P, 1)$ ,  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ .

Como  $\lambda > 0$ , note que uma condição suficiente para que (78) seja verificada é que

$$\begin{aligned} \Delta V(z) + (-1 + 3\eta)\lambda z(k)^T P z(k) - 2\Psi_{u_0}(Fz(k))^T T \Psi_{u_0}(Fz(k)) \\ + 2\Psi_{u_0}(Fz(k))^T T Gz(k) - q(k)^T \lambda R q(k) < 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Calculando  $V(z(k+1)) = z(k+1)^T P z(k+1)$  é possível escrever (79) na forma  $\vartheta^T \mathcal{M} \vartheta < 0$  onde  $\vartheta = [z(k)^T \Psi_{u_0}(Fz(k))^T q(k)^T]^T$  e

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T P \mathbb{A} - \bar{\lambda} P & * & * \\ \mathbb{B}^T P \mathbb{A} + TG & \mathbb{B}^T P \mathbb{B} - 2T & * \\ B_q^T P \mathbb{A} & B_q^T P \mathbb{B} & B_q^T P B_q - \lambda R \end{bmatrix} \quad (80)$$

com  $\mathbb{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F$  e  $\mathbb{B} = -(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ . Isolando alguns termos em (80) pode-se reescrever  $\mathcal{M}$  como

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -\bar{\lambda} P & G^T T & 0 \\ TG & -2T & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T \\ \mathbb{B}^T \\ B_q^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} & B_q \end{bmatrix}.$$

Assim, através da aplicação do complemento de Schur, segue que  $\mathcal{M} < 0$  é equivalente a

$$\bar{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} -\bar{\lambda} P & G^T T & 0 & \mathbb{A}^T \\ TG & -2T & 0 & \mathbb{B}^T \\ 0 & 0 & -\lambda R & B_q^T \\ \mathbb{A} & \mathbb{B} & B_q & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (81)$$

Note que pré- e pós-multiplicando (81) por  $\text{diag}\{P^{-1}, T^{-1}, I, I\}$  e considerando a mudança de variáveis  $W = P^{-1}$ ,  $X = GP^{-1}$ ,  $Y = FP^{-1}$ ,  $L = T^{-1}$  e  $M = E_c T^{-1}$ , segue que a satisfação de (74) implica em  $\bar{\mathcal{M}} < 0$  e que (77) é verificada para todo  $z(k) \in S(F - G, u_0)$ .

A relação (74) implica que as trajetórias iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  tendem para  $\Omega(\eta P, 1)$  em um número finito de amostras, isto é, existe um escalar  $\mu > 0$  tal que  $\Delta V(z) \leq -\mu V(z(k)) < 0$  é garantida  $\forall z(k) \in S(F - G, u_0) \cap \Omega(P, 1)$ ,  $z(k) \notin \Omega(\eta P, 1)$ ,  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ . Logo, é possível mostrar que  $V(z(k)) \leq \mu^{-k} V(z(0))$ ,  $\forall z(0) \in \Omega(P, 1)$ ,  $z(0) \notin \Omega(\eta P, 1)$ . Neste caso, pode-se concluir que existe um número finito de amostras  $k_1$  tal que  $\mu^{-k_1} V(z(0)) < \eta^{-1}$ , ou seja,  $z(k_1) \in \Omega(\eta P, 1)$ .

Para garantir a invariância de  $\Omega(\eta P, 1)$  é necessário que  $z(k+1)^T \eta P z(k+1) \leq 1$ ,  $\forall z(k) \in \Omega(\eta P, 1)$  e  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ . Esta condição pode ser verificada através da aplicação do *S-procedure* se existirem os escalares positivos  $\nu_1$  e  $\nu_2$  verificando

$$z(k+1)^T \eta P z(k+1) - 1 + \nu_1(1 - z(k)^T \eta P z(k)) + \nu_2(1 - q(k)^T R q(k)) < 0. \quad (82)$$

Desta forma, (82) é verificada se

$$z(k+1)^T P z(k+1) - \nu_1 z(k)^T P z(k) - \frac{\nu_2}{\eta} q(k)^T R q(k) < 0, \quad (83)$$

$$-1 + \nu_1 + \nu_2 < 0 \quad (84)$$

Supondo agora que  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(F, u_0)$ , se  $z(k) \in \Omega(\eta P, 1)$ , então segue que  $\Psi_{u_0}(Fz(k)) = 0$ . Como (74) é equivalente a (81), esta relação implica em

$$\tilde{\vartheta}^T \bar{\mathcal{M}} \tilde{\vartheta} < 0 \quad (85)$$

com  $\tilde{\vartheta} = [z(k)^T \ 0 \ q(k)^T]^T$ . Por outro lado, (85) pode ser expandida como

$$\begin{aligned} & z(k)^T \mathbb{A}^T P \mathbb{A} z(k) - \bar{\lambda} z(k)^T P z(k) + 2q(k)^T \mathbf{B}_q^T P \mathbb{A} z(k) + q(k)^T \mathbf{B}_q^T P \mathbf{B}_q q \\ & - q(k)^T \lambda R q(k) < 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Assim, se  $z(k) \in \Omega(\eta P, 1)$  então  $z(k+1) = \mathbb{A}z(k) + \mathbf{B}_q q(k)$  e pode-se concluir que (86) é equivalente a

$$z(k+1)^T P z(k+1) - [1 + \lambda(1 - 3\eta)] z(k)^T P z(k) - \lambda q(k)^T R q(k) < 0, \quad -\lambda < 0 \quad (87)$$

Considerando agora  $\nu_1 = 1 + \lambda(1 - 3\eta)$  e  $\nu_2 = \lambda\eta$ , tem-se que (74) implica em (83). Esta escolha particular de  $\nu_1$  e  $\nu_2$  também implica em  $\nu_1 + \nu_2 - 1 = \lambda(1 - 2\eta)$ . Como por definição  $\eta > 1$ , então segue que  $\lambda(1 - 2\eta) < 0$  e, conseqüentemente, que (84) é verificada. Baseado neste raciocínio segue que se (74) é verificada, então  $\Omega(\eta P, 1)$  é um conjunto positivamente invariante  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ .

Se (75) for verificada, então segue que  $\Omega(P, 1)$  está no interior de  $S(F - G, u_0)$  e que a condição de setor modificada  $\Psi_{u_0}(Fz(k))^T T [\Psi_{u_0}(Fz(k)) - Gz(k)] \leq 0$  é válida. Finalmente, (76) implica que  $\Omega(\eta P, 1)$  está no interior da região de operação linear  $S(F, u_0)$ . Isto conclui a prova do item 1.

Como a satisfação de (74) implica em  $\mathcal{M} < 0$ , a partir de (80) segue que  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)^T P (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F) - [1 + \lambda(1 - 3\eta)] P < 0$ , a qual é equivalente a  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)^T P (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F) - P + \lambda(3\eta - 1) P < 0$ . Como por definição  $\lambda > 0$  e  $\eta > 1$ , então tem-se que  $\lambda(3\eta - 1) P > 0$  e, conseqüentemente, que  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)$  é Schur-estável. Isto conclui a prova do segundo item do teorema. ■

Baseado no resultado do Teorema 8 e no PMI, então o seguinte corolário pode ser enunciado em relação ao seguimento/rejeição de sinais periódicos.

**Corolário 3** *Suponha que o sistema (69) não apresenta zeros de transmissão nas mesmas posições das raízes de  $\phi(z)$ . Se  $F$  e  $E_c$  são calculados a partir das condições do Teorema 8 então,  $\forall z(0) \in \Omega(P, 1)$  e para os sinais periódicos  $r_{(i)}(k)$ ,  $i = 1 \cdots p$  e  $d_{(j)}(k)$ ,  $j = 1 \cdots l$ , são tais que  $q(k) = [r(k)^T \ d(k)^T]^T \in \Omega(R, 1)$ , então segue que  $e(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

*Prova.* Partindo do fato que as trajetórias iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem para  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(F, u_0)$ ,  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ , então para  $k$  maior que um dado  $k_1$  o comportamento do sistema é linear. Logo, a presença do modelo interno no sistema em malha fechada garante o perfeito seguimento de  $r_{(i)}(k)$  e a rejeição de  $d_{(j)}(k)$ . ■

**Observação 10** *O resultado apresentado no Teorema 8 permite a síntese simultânea do ganho estabilizante  $F$  e do ganho do laço de anti-windup  $E_c$ . As condições apresentadas podem ser diretamente adaptadas para a abordagem clássica de anti-windup onde o ganho  $F$  (ou qualquer outro compensador dinâmico) é calculado em um primeiro passo desconsiderando os limites de saturação. Em um segundo momento, o ganho de anti-windup então pode ser calculado a partir das condições do Teorema 8 supondo  $F$  dado (e substituindo a matriz  $Y$  por  $FW$  nas relações (74) - (76)). Desta forma é possível considerar controladores estabilizantes de estrutura mais complexa do que a realimentação estática de estados, como por exemplo o ZPRC.*

## 5.4 Problema de otimização

Baseado no Teorema 8, pode-se propor um problema de otimização análogo ao problema PO1 apresentado na Seção 3.4 para o cálculo de  $F$  e  $E_c$ . Novamente, o tamanho dos conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$  será medido com base nos conjuntos  $\mathcal{X}_R$  e  $\mathcal{D}_R$  formados por direções conhecidas *a priori*. Assim, o procedimento adotado é maximizar os

escalares  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  de tal forma que  $\alpha \mathcal{X}_R \subset \Omega(P, 1)$  e  $\beta \mathcal{D}_R \subset \Omega(R, 1)$  sejam maximizados. Este objetivo pode ser alcançado a partir da resolução do seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{PO4:} \min (1 - \kappa)\gamma + \kappa\delta$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{x}_i^T \\ \mathbf{x}_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, f \quad (88)$$

$$\mathbf{d}_j^T R \mathbf{d}_j \leq \delta, \quad j = 1, \dots, s \quad (89)$$

Relações (74), (75) e (76).

Considerando  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  e  $\beta = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ , a minimização de  $\gamma$  e  $\delta$  implica na maximização de  $\alpha$  e  $\beta$ . O escalar  $0 \leq \kappa \leq 1$  pode ser escolhido de acordo com a prioridade na maximização de  $\Omega(P, 1)$  ou  $\Omega(R, 1)$ .

Note que, para escalares fixos  $\lambda$ , e  $\eta$ , as relações (74), (75) e (76) tornam-se *LMIs*. Logo, o valor ótimo destes parâmetros será determinado por uma varredura nestas duas variáveis, em busca do menor valor para o critério de otimização de PO4.

## 5.5 Exemplos numéricos

Nesta seção será considerado um exemplo *SISO* com o objetivo de ilustrar a influência do laço de *anti-windup* no desempenho e conservadorismo das soluções obtidas, de forma análoga ao que foi apresentado nas Seções 3.5.3 e 4.6.3. Serão consideradas implementações baseadas tanto no controlador ressonante quanto no controlador repetitivo.

### 5.5.1 Exemplo 1 - controlador ressonante

Considere o sistema em malha aberta (69) definido pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [10 \quad 0] \quad \text{e} \quad u_0 = 1.$$

O sinal a ser seguido é uma referência senoidal de período  $N_r = 50$  amostras e amplitude definida através da solução do problema de otimização PO4. Para este exemplo, nenhum sinal de perturbação é considerado. Note que o espectro deste sinal apresenta 50 componentes, porém todas as frequências diferentes da frequência fundamental apresentam coeficientes da *DFTS* nulos. Assim, um controlador ressonante com apenas dois estados é suficiente para a garantia do seguimento e/ou rejeição.

Com o objetivo de maximizar apenas  $\Omega(R, 1)$ , ou seja, considerando  $\kappa = 1$  e  $\gamma = 1$ , então o problema de otimização PO4 foi resolvido considerando a solução de problemas LMI sobre um *grid* em  $\eta$  e  $\lambda$  nas direções  $\mathcal{X}_R = \{\mathbf{x}\}$ ,  $\mathbf{x} = [20 \ 20 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathcal{W}_R = \{\mathbf{w}\}$ ,  $\mathbf{w} = [1 \ 0]^T$ . Os valores ótimos foram obtidos para  $\eta = 102.5749$  e  $\lambda = 6.5205 \times 10^{-5}$ , resultando em  $\beta = 9.9526$ ,

$$E_c = 203.6853 \quad \text{e} \quad F = [-0.0686 \quad -0.2572 \quad -0.0042 \quad 0.0043].$$

Considerando agora o sistema em malha fechada sem a compensação *anti-windup*, ou seja, removendo o termo relativo à matriz  $M$  em (74), os resultados para  $\eta = 90.6725$  e  $\lambda = 7.3796 \times 10^{-5}$  são  $\beta = 1.7614$  e

$$F = [-0.0247 \quad -0.2435 \quad -0.0014 \quad 0.0012].$$



Para fins de simulação, foram consideradas as condições iniciais  $x(0) = [20 \ 20]^T$  e  $\xi(0) = [0 \ 0]^T$  tais que a relação  $z(0)^T P z(0) = 1$  seja satisfeita. Como não há perturbação atuando no sistema, a amplitude do sinal de referência pode ser calculada através de  $r_{max} = \sqrt{R(1,1)} = 9.9526$  (tal que  $q_{max}^T R q_{max} = 1$ ). Na Figura 47 é apresentada a saída simulada e o sinal de controle resultante para os casos com e sem compensação *anti-windup*. Note que a contribuição associada ao laço de *anti-windup* se dá em duas partes: nos resultados de simulação, o sistema com  $E_c \neq 0$  deixa a região saturada em um tempo menor quando comparado ao caso com  $E_c = 0$ . Neste caso, o período transitório com  $E_c \neq 0$  é menor, implicando assim em um tempo menor de convergência para o sinal de referência; além disso, ocorre uma redução no conservadorismo de (74) decorrente do grau de liberdade adicional introduzido pela matriz de *anti-windup* (termo  $VM$  em (74)). Esta redução no conservadorismo é no sentido de que um conjunto maior de referências e perturbações admissíveis é obtido.

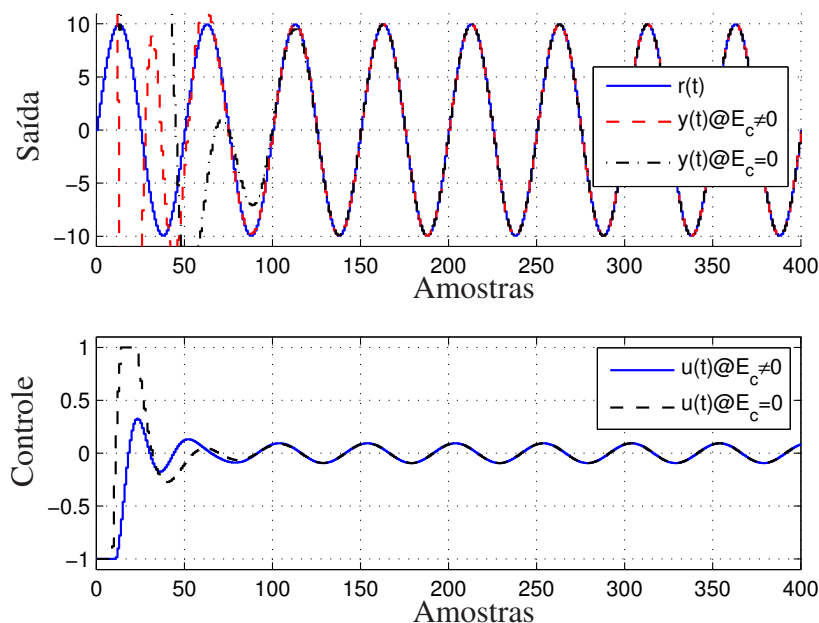


Figura 47: Sistema de tempo discreto - maximização de  $\Omega(R, 1)$  - simulação da saída e sinal de controle para  $r(k) = 9.9526 \sin(\frac{2\pi}{50}k)$ ,  $d(k) = 0$ ,  $x(0) = [20 \ 20]^T$  e  $\xi(0) = [0 \ 0]^T$ .

Na Figura 48 é apresentada um comparação entre os casos com  $E_c = 0$  e  $E_c \neq 0$  tendo como objetivo a maximização de  $\Omega(P, 1)$  (i.e.  $\kappa = 0$  e  $\delta = 1$ ) nas direções  $\mathcal{X}_R = \{\mathbf{x}\}$ ,  $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathcal{W}_R = \{\mathbf{w}\}$ ,  $\mathbf{w} = [0.1 \ 0]^T$ . Os valores ótimos da solução de PO4 foram obtidos para  $\eta = 975.5329$  e  $\lambda = 6.8362 \times 10^{-6}$ , sendo  $\alpha = 57.2569$ ,

$$E_c = 70.4956 \text{ e } F = [-0.1213 \quad -0.3036 \quad -0.0078 \quad 0.0086].$$

Considerando  $E_c = 0$  os resultados para  $\eta = 7.1124$  e  $\lambda = 4.9171 \times 10^{-4}$  são  $\alpha = 23.4315$  e

$$F = [-0.0092 \quad -0.0652 \quad -0.0005 \quad 0.0005].$$

Note que novamente a contribuição associada ao laço de *anti-windup* pode ser observada no tempo em que o sinal de controle permanece saturado (menor tempo de convergência

para a referência) e no valor de  $\alpha$  resultante da solução de PO4 (redução do conservadismo).

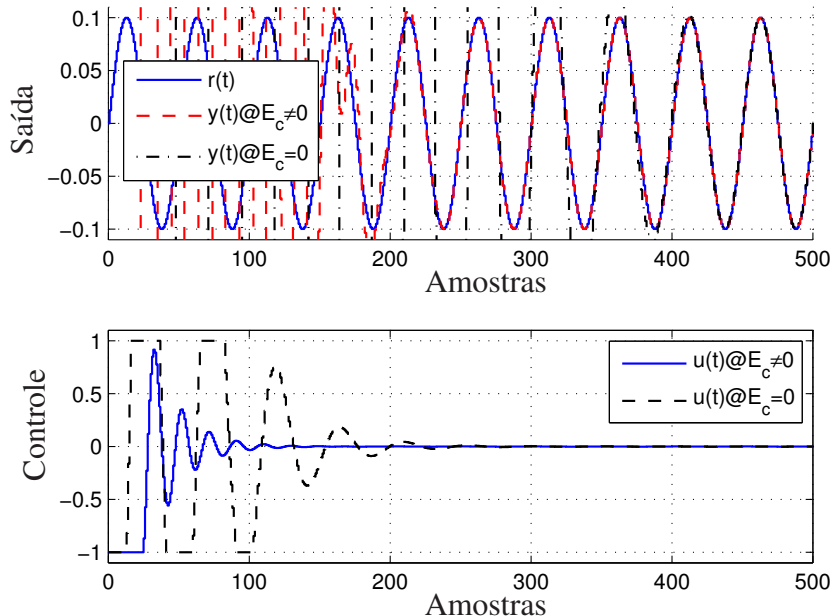


Figura 48: Sistema de tempo discreto - maximização de  $\Omega(P, 1)$  - simulação da saída e sinal de controle para  $r(k) = 0.1\sin(\frac{2\pi}{50}k)$ ,  $d(k) = 0$ ,  $x(0) = [10.1493 \ 71.1566]^T$  e  $\xi(0) = [0 \ 0]^T$ .

### 5.5.2 Exemplo 2 - controlador repetitivo

Nesta seção é considerado o mesmo exemplo numérico da seção anterior, sendo alterado apenas o período do sinal de referência. Como a implementação do controlador repetitivo discreto é dependente do período do sinal de referência, este período foi reduzido de 50 para 10 amostras.

Para a implementação do controlador repetitivo foi considerado o controlador dinâmico (70) com as matrizes  $\Gamma$  e  $\Lambda$  apresentadas em (34), ou seja, para  $N_r = 10$  amostras tem-se que

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{(9,1)} & I_9 \\ 1 & 0_{(1,9)} \end{bmatrix} \text{ and } \Lambda = \begin{bmatrix} 0_{(9,1)} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução do problema de otimização PO4 para  $\kappa = 0$  e  $\delta = 1$  (maximização de  $\Omega(P, 1)$ ) atinge seu valor ótimo para  $\eta = 99$  e  $\lambda = 5.1703 \times 10^{-5}$ , resultando em  $\alpha = 52.7361$ ,  $E_c = 0.9434$  e

$$F = \begin{bmatrix} -0.0738 & 0.0497 & 0.0271 & -0.0688 & 0.0487 & 0.0016 & \dots \\ \dots & -0.0030 & 0.0030 & -0.0021 & 0.0022 & -0.0015 & -0.0045 \end{bmatrix}$$

A solução do mesmo problema sem levar em conta o laço de *anti-windup* (e mesmos valores de  $\kappa$  e  $\delta$ ) tem seu valor ótimo obtido para  $\eta = 105$  e  $\lambda = 6.0546 \times 10^{-5}$ . Nestas

condições, os resultados são  $\alpha = 24.7251$  e

$$F = \begin{bmatrix} 0.2109 & -0.1929 & -0.0003 & -0.0771 & 0.0543 & 0.0207 & \dots \\ \dots & 0.0014 & -0.0027 & -0.0014 & -0.0002 & 0.0032 & 0.0084 \end{bmatrix}.$$

Nas Figuras 49 e 50 são apresentadas as simulações do sistema para  $r(k) = 0.1\sin(\frac{2\pi}{10}k)$ ,  $d(k) = 0$  e  $z(0) = [52.7361 \ 52.7361 \ 0_{1 \times 10}]^T$  (de tal forma que  $z(0)^T P z(0) = 1$ ). A inclusão do laço de *anti-windup* implica em uma redução no tempo de acomodação do sistema em malha fechada de cerca de 100 amostras, além da redução do conservadorismo observada em todos exemplos até agora. A escala de amplitude do sinal de saída foi escolhida de forma a evidenciar o seguimento do sinal de referência (limitada entre 0.2 e  $-0.2$ ), porém o sinal de saída atinge valores máximos da ordem de 5000. O objetivo destas figuras é ilustrar o momento em que o sinal de controle deixa de saturar e, após isto, quanto tempo o sistema leva para atingir seu regime permanente.

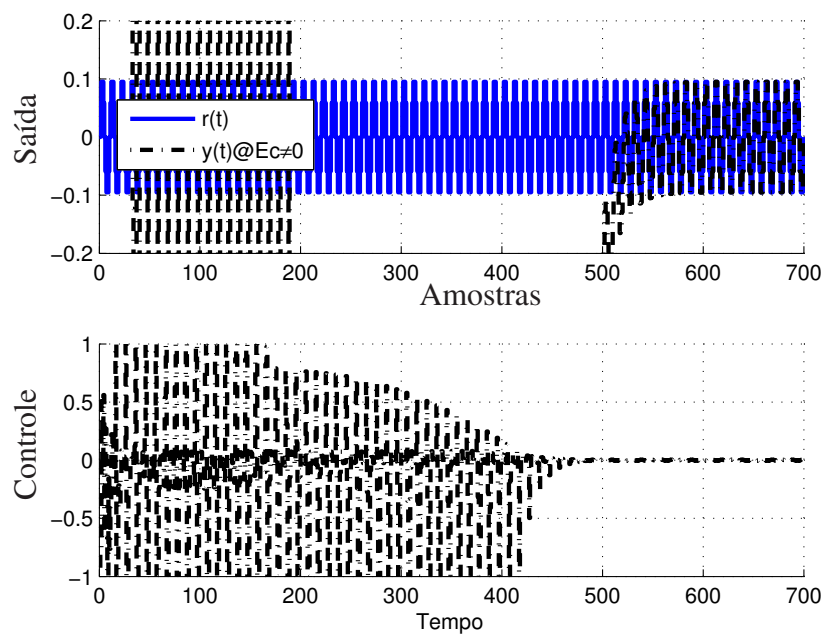


Figura 49: Sistema de tempo discreto - maximização de  $\Omega(P, 1)$  - controlador repetitivo e laço de *anti-windup*.

## 5.6 Comentários finais

Este capítulo apresentou uma extensão das metodologias apresentadas nos capítulos anteriores para sistemas de tempo discreto. Com uma única abordagem é possível realizar a síntese simultânea do controlador estabilizante e do laço de *anti-windup* tanto para os controladores ressonantes quanto os controladores repetitivos. Além disso, foi mostrado que o conjunto para o qual as trajetórias convergem é de fato um conjunto invariante. Por meio de exemplos foi ilustrado o comportamento da solução proposta, evidenciando as vantagens da introdução do compensador *anti-windup*. Os resultados deste capítulo foram publicados em (FLORES; SARTORI; GOMES DA SILVA JR., 2010) e submetidos para publicação em (FLORES; SARTORI; GOMES DA SILVA JR., 2012).

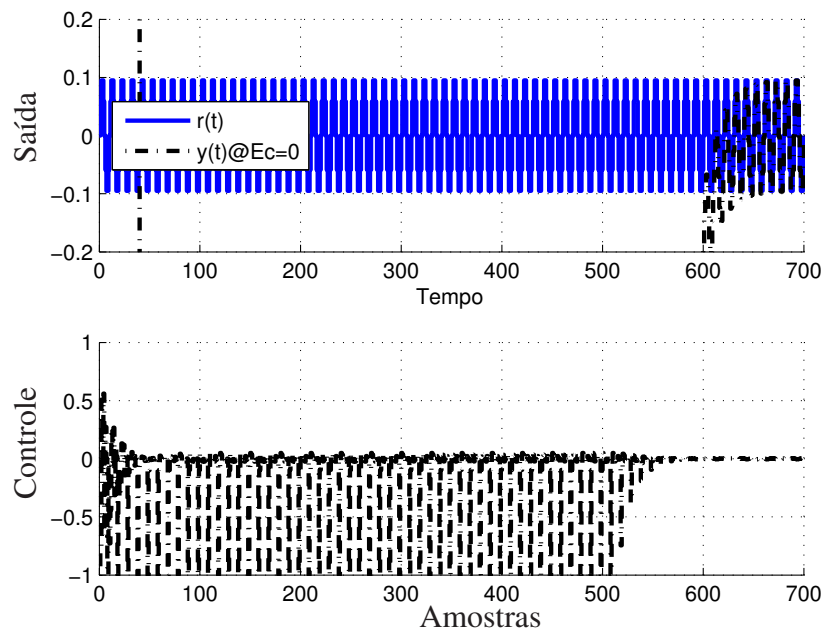


Figura 50: Sistema de tempo discreto - maximização de  $\Omega(P, 1)$  - controlador repetitivo sem laço de *anti-windup*.

## 6 SÍNTESE DE MALHAS DE *ANTI-WINDUP* UTILIZANDO CONDICIONAMENTO LINEAR

Nos capítulos precedentes, tratou-se do projeto conjunto de uma realimentação de estados mais um *anti-windup* estático. O foco principal do projeto foi a maximização dos conjuntos de condições iniciais e referências/perturbações admissíveis. Nenhum critério com relação ao desempenho do sistema em malha fechada foi considerado. Neste capítulo, será apresentada uma metodologia de síntese de laços de *anti-windup* dinâmicos para sistemas de tempo discreto considerando a técnica de condicionamento linear apresentada em (WESTON; POSTLETHWAITE, 2000). Através desta metodologia, o compensador *anti-windup* é projetado a posteriori, ou seja, depois de projetado o controlador estabilizante. Neste caso, o compensador *anti-windup* tem por objetivo principal a minimização da perda de desempenho nominal (i.e. do sistema linear em malha fechada) quando ocorre a saturação do sinal de controle. Por outro lado, a caracterização dos conjuntos admissíveis ainda é importante no sentido de determinar a amplitude dos sinais de referência e perturbação admissíveis.

O seguimento e a rejeição dos sinais de interesse é garantido através da introdução do *ZPRC* (ver Seção 2.3.1.4) na malha de controle, projetado *a priori* sem considerar a saturação do sinal de controle. O procedimento adotado consiste numa abordagem em duas etapas como segue: em um primeiro momento um compensador *anti-windup* de ordem plena é projetado considerando a abordagem proposta em (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003), garantindo assim a estabilidade assintótica global do sistema e a minimização da perda de desempenho quando ocorre a saturação, desde que o sistema em regime permanente opere no interior da região linear. Esta suposição de que o sistema em regime permanente opera na região linear se reflete diretamente em uma restrição sobre os valores máximos dos sinais de referência e perturbação. Por outro lado, nenhuma consideração sobre os sinais de referência e perturbação admissíveis é apresentada na literatura corrente sobre condicionamento linear. Para contornar este problema, em um segundo momento, é resolvido o problema de determinação dos conjuntos de condições iniciais e perturbações admissíveis para os quais é garantido o seguimento de referências e a rejeição de perturbações, seguindo a abordagem multi-elipsoidal apresentada no Capítulo 5. Exemplos numéricos serão utilizados para ilustrar a metodologia proposta.

### 6.1 Abordagem via condicionamento linear

#### 6.1.1 Formulação geral

A metodologia de compensação *anti-windup* apresentada em (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003) tem como objetivo sintetizar o compensador  $\Theta(z)$  seguindo a

topologia de controle da Figura 51. Nesta configuração, os sinais gerados pelos compensador *anti-windup* são injetados tanto na saída quanto na entrada do controlador  $K(z)$ .

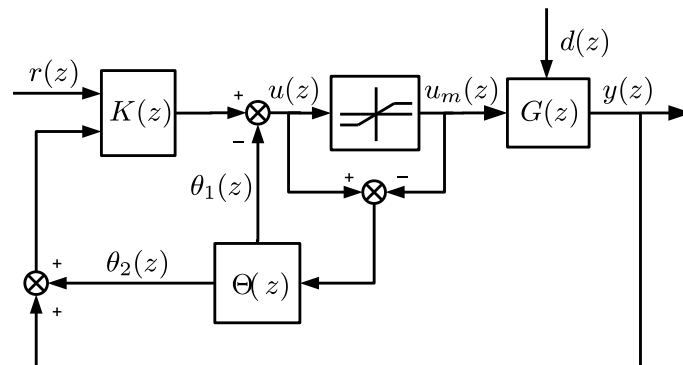


Figura 51: Estrutura genérica de *anti-windup* (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003).

Seguindo a formulação apresentada em (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003), considera-se que a planta  $G(z) = [G_1(z) \ G_2(z)]$  pode ser representada no espaço de estados por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu_m(k) + B_d d(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (90)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u_m(k) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas de controle,  $d(k) \in \mathbb{R}^l$  é o vetor de perturbações e  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  o vetor de saídas do sistema. As funções de transferência  $G_1(z) \sim (A, B_d, C, 0)$  e  $G_2(z) \sim (A, B, C, 0)$  representam as funções de transferência de perturbação e do sinal de controle para a saída do sistema, respectivamente. Como esta abordagem tem como objetivo a obtenção de resultados que garantam a estabilidade interna global (estabilidade assintótica), assume-se que a planta é assintoticamente estável, isto é, todos os autovalores da matriz  $A$  estão estritamente no interior do círculo de raio unitário centrado na origem do plano complexo. A configuração de controle apresentada na Figura 52 é um caso particular da configuração apresentada na Figura 51 considerando um parâmetro livre  $M(z)$  a ser determinado. Conforme apresentado em (WESTON; POSTLETHWAITE, 2000), a maioria das topologias de condicionamento linear podem ser analisadas do ponto de vista da Figura 52 e da matriz  $M(z)$ .

Considere também que o controlador estabilizante  $K(z) = [K_1(z) \ K_2(z)]$ , representado no espaço de estados por

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_{cy} y(k) + B_{cr} r(k) \\ y_c(k) &= C_c x_c(k) \end{aligned}, \quad (91)$$

foi projetado de forma a atender certos requisitos de desempenho associados ao sistema em malha fechada sem a ocorrência de saturação. Neste caso,  $x_c(k) \in \mathbb{R}^{n_c}$  é o vetor de estados do controlador,  $r(k) \in \mathbb{R}^p$  denota o sinal de referência periódico que se deseja seguir e  $K_1(z) \sim (A_c, B_{cr}, C_c, 0)$  e  $K_2(z) \sim (A_c, B_{cy}, C_c, 0)$  representam as funções de transferência da referência e do sinal de saída do sistema para a saída do controlador, respectivamente. No contexto desta tese,  $K(z)$  é a função de transferência do controlador

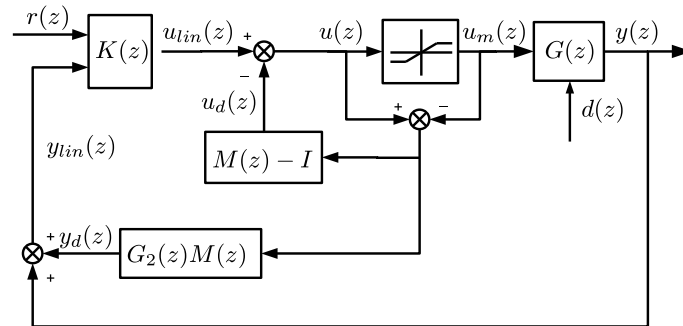


Figura 52: Configuração de controle via condicionamento linear (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003).

repetitivo de fase nula (ZPRC) apresentada na Seção 2.3.1.4, ou seja,

$$K_1(z) = -K_2(z) = \frac{k_r z^{-N+d} Q(z, z^{-1}) A(z^{-1}) B^u(z)}{(1 - Q(z, z^{-1}) z^{-N}) \rho B^c(z^{-1})} \quad (92)$$

$$\rho \geq \max_{\Omega \in [0, \pi]} |B^u(e^{-j\Omega})|^2.$$

As matrizes  $A_c$ ,  $B_{cy}$ ,  $B_{cr}$  e  $C_c$  do controlador podem ser obtidas através de qualquer uma das formas canônicas (controlável ou observável) usualmente empregadas para representar um sistema no espaço de estados a partir de sua função de transferência (CHEN, 1970). Supondo que a entrada do ZPRC é o sinal de erro de seguimento definido como  $e(k) = r(k) - y(k)$ , é fácil notar que  $K_1 = -K_2$ ,  $B_{cr} = B_c$  e  $B_{cy} = -B_c$ .

Em (WESTON; POSTLETHWAITE, 2000) foi mostrado para sistemas de tempo contínuo que esta metodologia apresenta um certo desacoplamento entre o laço de *anti-windup*, o sistema nominal e o controlador. O mesmo se verifica para o caso de sistemas discretos. Através de manipulações nos blocos do sistema representado na Figura 52 é possível mostrar que esta configuração de controle é equivalente à configuração apresentada na Figura 53. Neste caso, toda a dinâmica não-linear do sistema é “desacoplada” do laço nominal, podendo ser interpretada como uma perturbação na saída do sistema. A partir desta nova representação é possível dividir a configuração de *anti-windup* em três partes distintas, denominadas de laço de controle nominal, laço não-linear e filtro de perturbação. Cada uma destas partes é responsável por caracterizar uma parte do comportamento do sistema em malha fechada, como segue:

1. *Laço de controle nominal*: Este laço representa o comportamento que resultaria do sistema linear caso a saturação não estivesse presente;
2. *Laço não-linear*: Este laço concentra a parcela não-linear decorrente da saturação, dependendo da não-linearidade zona-morta e da matriz  $M$ . Este laço gera o sinal  $\tilde{u}$  quando  $u_{lim}$  viola os limites de saturação;
3. *Filtro de perturbação*: Esta parte determina como o sistema se recupera depois que a saturação deixa de ocorrer. O termo  $G_2(z)M(z)$  é o principal responsável pelo tempo de recuperação da saída do sistema quando a saturação cessa.

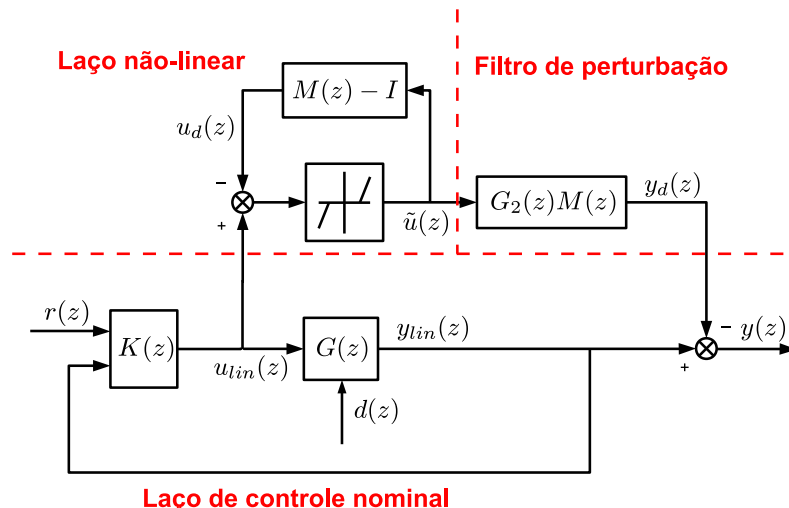


Figura 53: Forma alternativa para o diagrama de blocos da Figura 52.

Nesta abordagem, o objetivo do laço de *anti-windup* é garantir que a resposta do sistema saturado se desvie o mínimo possível daquela projetada para o sistema sem saturação. Assim, o desempenho do laço de *anti-windup* pode ser medido através do sinal  $y_d(k)$ . Como  $y(k) = y_{lin}(k) - y_d(k)$ , então  $y_d(k)$  mede diretamente o desvio do sistema saturado em relação ao desempenho nominal projetado. Desta forma, o problema de *anti-windup* pode ser definido como segue.

**Problema 4** (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003) *Determinar um compensador de anti-windup  $\Theta(z)$  tal que o sistema em malha fechada da Figura 53 seja internamente estável e que se<sup>1</sup>*

1.  $dist(u_{lin}, \mathcal{U}) = 0 \forall t \geq 0$ , então  $y_d(k) = 0 \forall t \geq 0$ ;
2.  $dist(u_{lin}, \mathcal{U}) \in \mathcal{L}_2$ , então  $y_d(k) \in \mathcal{L}_2$ ;
3. O operador  $\mathcal{T}_p : u_{lin} \mapsto y_d$  é bem definido e apresenta ganho  $\mathcal{L}_2$  finito.

O primeiro item do problema trata da operação nominal do sistema, isto é, se o sinal de controle não satura, então o sinal  $y_d(k)$  é nulo. Neste caso, a saída do sistema corresponde à saída do sistema linear. O segundo ponto do problema força que, se a energia acumulada enquanto o sistema está saturado for limitada, então o sinal  $y_d(k)$  também terá energia limitada. A suposição  $dist(u_{lin}, \mathcal{U}) \in \mathcal{L}_2$  significa que a energia de controle “excedente” com relação ao sinal de controle que é efetivamente entregue à planta (saturado) é limitada. Basicamente, esta hipótese implica que o sinal de controle converge para  $\mathcal{U}$ , ou seja, em algum momento o sinal de controle sairá da condição de saturação e o sistema em malha fechada passará a operar na região linear. Esta restrição se reflete no valor máximo dos sinais de referência e perturbação admissíveis, uma vez que em regime permanente estes sinais não podem fazer com que o sinal de controle sature. Entretanto, esta limitação nos sinais de referência e perturbação não é abordada nas principais referências de condicionamento linear, não deixando claro como determinar sinais de referência e perturbação a fim de satisfazer  $dist(u_{lin}, \mathcal{U}) \in \mathcal{L}_2$ . Finalmente, o terceiro item estabelece

<sup>1</sup>O conjunto  $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m; -u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}$  foi definido na Seção 2.2.1.



que existe limitante superior para o ganho do sinal  $u_{lin}$  no sinal  $y_d(k)$ . A minimização deste ganho está associada diretamente ao desempenho do laço de *anti-windup*.

Por outro lado, é possível estabelecer uma relação entre a restrição  $dist(u_{lin}, \mathcal{U}) \in \mathcal{L}_2$  e a abordagem multi-elipsoidal proposta: é fácil notar que se as trajetórias iniciadas em um dado conjunto elipsoidal convergem para um conjunto invariante no interior de  $\mathcal{U} \forall t \geq t_1$  então obrigatoriamente  $dist(u(k), \mathcal{U}) \in \mathcal{L}_2$ . Na sequência deste trabalho será mostrado como a abordagem multi-elipsoidal do Capítulo 5 pode ser aplicada em conjunto com a técnica de condicionamento linear para a determinação dos sinais de referência e perturbação admissíveis.

### 6.1.2 Determinação de $M(z)$

Para que os polos de  $G_2(z)$  não apareçam no filtro de perturbação representado por  $G_2(z)M(z)$ , estes polos devem ser cancelados pelos zeros de  $M(z)$ . Este raciocínio permite analisar  $M(z)$  como uma fatoração coprima (à direita) de  $G_2(z)$ , isto é,

$$G_2(z) = N(z)M^{-1}(z).$$

Como  $G_2(z)$  é estável, então  $M(z)$  é bi-estável e o filtro de perturbação  $G_2(z)M(z)$  é dado por  $N(z)$ . A partir desta estrutura de *anti-windup* pode-se mostrar que com uma escolha apropriada de  $M(z)$ , o sistema em malha fechada será globalmente assintoticamente estável no sentido interno e que se as hipóteses listadas no Problema 4 são satisfeitas, então  $\Theta(z)$  (na configuração de *anti-windup* da Figura 51) resolve o referido problema (WESTON; POSTLETHWAITE, 2000).

A escolha de  $M(z) = I$  corresponde ao chamado *IMC* (do inglês, *Internal Model Control - IMC*) *anti-windup* proposto em (KOTHARE et al., 1994). Por outro lado,  $M(z)$  pode ser visto como um grau de liberdade de projeto a fim de melhorar o desempenho do laço de *anti-windup*, isto é, recupere o desempenho nominal do sistema mais rapidamente. Como se trata de um compensador de ordem plena, a fatoração escolhida deve ter a mesma dimensão e o mesmo espaço de estados de  $G_2(z)$ . A partir da configuração apresentada na Figura 53, esta fatoração coprima pode ser caracterizada por (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996)

$$\begin{bmatrix} M(z) - I \\ N(z) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \dot{x}_a(k) \\ u_d(k) \\ y_d(k) \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} A + BK & B \\ \hline K & 0 \\ C & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix} \quad (93)$$

onde  $K$  deve ser escolhido de forma que  $A+BK$  seja Schur-estável. Segundo (WESTON; POSTLETHWAITE, 2000) esta configuração de compensação *anti-windup* possui a importante característica de que o laço não-linear e o filtro de perturbação são independentes do controlador, de forma que o condicionamento linear funciona para qualquer controlador estabilizante. O projeto de  $M(z)$  envolve a escolha de  $K$  tal que o tempo de acomodação e o amortecimento dos polos do filtro de perturbação sejam melhorados, mantendo a estabilidade do laço não-linear. Em (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003) é apresentado o seguinte teorema para a determinação de  $K$ :

**Teorema 9** *Existe um compensador anti-windup  $\Theta(z)$  que resolve o Problema 4 se existir a matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , a matriz diagonal definida positiva  $L \in$*

$\mathbb{R}^{m \times m}$ , a matriz  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e o escalar  $\mu$  tal que

$$\begin{bmatrix} W & -X^T & 0 & WC^T & WA^T + X^T B_d^T \\ * & -2L & I & 0 & LB_d^T \\ * & * & -\mu I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -W \end{bmatrix} < 0. \quad (94)$$

Além disso, se esta LMI é satisfeita, então  $K = XW^{-1}$  é tal que  $\|y_d\|_2 \leq \nu \|u_{lin}\|_2$ ,  $\nu = \sqrt{\mu}$ .

A prova deste teorema é apresentada em (TURNER; HERRMANN; POSTLETHWAITE, 2003), considerando apenas o laço não-linear. Se o laço não-linear é assintoticamente estável, então o sinal  $y_d(k)$  tende a zero quando o controle deixa de saturar, atendendo ao primeiro e segundo pontos do Problema 4. Como por suposição o sistema nominal é estável, então o sistema como um todo também será estável. Esta prova é baseada em uma função de Lyapunov quadrática  $V(x_a(k)) = x_a(k)^T P_a x_a(k)$  e um termo de desempenho  $\mathcal{L}_2$  entre os sinais  $y_d(k)$  e  $u_{lin}(k)$ , caracterizado pelo ganho  $\nu$ . Este termo é responsável por atender o terceiro item do problema.

Note que a minimização de  $\mu$  implica na minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  entre os sinais  $u_{lin}(k)$  e  $y_d(k)$ , minimizando assim o desvio de  $y(k)$  em relação a  $y_{lin}(k)$ . Além disso, note que apenas as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C$  são utilizadas na LMI (94). Assim, a determinação do compensador *anti-windup* independe do controlador  $K(z)$  considerado, sendo resumida à determinação de um ganho estático  $K$ .

## 6.2 Determinação dos conjuntos admissíveis $\Omega(P, 1)$ e $\Omega(R, 1)$

Como apresentado anteriormente, a abordagem de condicionamento linear é uma abordagem global no sentido do conjunto de condições iniciais e parte do pressuposto que a  $dist(u_{lin}, \mathcal{U}) \in \mathcal{L}_2$ , ou seja, o sinal de controle nominal deixa de saturar em algum momento. Esta restrição acaba se refletindo em uma limitação na amplitude máxima dos sinais de referência e perturbação admissíveis. Nesta seção, a abordagem apresentada no Capítulo 5 será utilizada para determinar o conjunto de condições iniciais e estados admissíveis considerando a introdução do condicionamento linear na malha de controle.

A partir da Figura 52 é possível reescrever o sistema (90), o controlador (96) e o laço de *anti-windup* definido em (93) através das relações

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + B \text{sat}_{u_0}(u_{lin}(k) - u_d(k)) + B_d d(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \quad (95)$$

$$\begin{cases} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) - B_c(y(k) + y_d(k)) + B_c r(k) \\ y_c(k) &= C_c x_c(k) \end{cases} \quad (96)$$

$$\begin{cases} x_a(k+1) &= (A + BK)x_a(k) + B\Psi_{u_0}(u_{lin}(k) - u_d(k)) \\ \begin{bmatrix} u_d(k) \\ y_d(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K \\ C \end{bmatrix} x_a(k) \end{cases} \quad (97)$$

com  $x_a \in \mathbb{R}^n$  e  $K$  determinado a partir da condição do Teorema 9. A partir destes sistemas é possível definir o vetor de estados aumentado

$$z(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \\ x_a(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+n_c}$$

tal que

$$z(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{F})z(k) - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\Psi_{u_0}(\mathbf{F}z(k)) + \mathbf{B}_q q(k) \quad (98)$$

onde  $q(k) = [r^T(k) \ d^T(k)]^T$  e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times n_c} & 0_{n \times n} \\ -B_c C & A_c & -B_c C \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n_c} & A + BK \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_c \times m} \\ 0_{n \times m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ 0_{n_c \times m} \\ -B \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & B_d \\ B_c & 0_{n_c \times l} \\ 0_{n \times p} & 0_{n_c \times l} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = [0_{p \times n} \quad C_c \quad -K]$$

Note que o sistema (98) é representado de uma forma análoga ao sistema (73), considerando que o ganho  $F$  de realimentação do estado aumentado agora é conhecido e dado por  $\mathbf{F}$ .

A determinação dos conjuntos de condições iniciais e/ou referências admissíveis pode ser feita através do seguinte teorema.

**Teorema 10** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W \in \mathbb{R}^{(2n+n_c) \times (2n+n_c)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$ , uma matriz  $X \in \mathbb{R}^{m \times (2n+n_c)}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e escalares  $\lambda > 0$  e  $\eta > 1$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} -\bar{\lambda}W & * & * & * \\ X & -2L & * & * \\ 0 & 0 & -\lambda R & * \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{F})W & -(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)L & B_q & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (99)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ \mathbf{F}_{(i)} - X_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (100)$$

$$\begin{bmatrix} \eta W & * \\ \mathbf{F}_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (101)$$

com  $\bar{\lambda} = \lambda(1 - 3\eta) + 1$ , então todas as trajetórias de (98) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem em um tempo finito para  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(\mathbf{F}, u_0)$  e  $\Omega(\eta P, 1)$  é um conjunto positivamente invariante,  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ .

*Prova.* A prova deste teorema segue os mesmos passos utilizados na prova do Teorema 10 considerando que o ganho  $\mathbf{F}$  e a matriz  $\mathbf{B}_2$  são dados do sistema aumentado. ■

Baseado no resultado do Teorema 10 e no fato que a inclusão do ZPRC na malha de controle faz com que o PMI se verifique, então o seguinte corolário pode ser enunciado em relação ao seguimento/rejeição de sinais periódicos.

**Corolário 4** *Suponha que o sistema (69) não apresenta zeros de transmissão nas mesmas posições das raízes de  $\phi(z)$ . Se o controlador estabilizante  $K(z)$  e o compensador anti-windup  $\Theta(z)$  são tais que as condições do Teorema 10 são verificadas, então  $\forall z(0) \in \Omega(P, 1)$  e supondo que os sinais periódicos  $r_{(i)}(k)$ ,  $i = 1 \dots, p$  e  $d_{(j)}(k)$ ,  $j = 1 \dots, l$ , são tais que  $q(k) = [r(k)^T \ d(k)^T]^T \in \Omega(R, 1)$ , então segue que  $e(k) \rightarrow \epsilon$  quando  $k \rightarrow \infty$ , onde  $\epsilon$  é um erro de seguimento tolerável associado filtro passa-baixas  $Q(z, z^{-1})$ .*

*Prova.* Partindo do fato que as trajetórias iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem para  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(\mathbf{F}, u_0)$ ,  $\forall q(k) \in \Omega(R, 1)$ , então para  $k$  maior que um dado  $k_1$  o comportamento do sistema é linear. Logo, a presença do ZPRC na malha de controle garante o seguimento de  $r_{(i)}(k)$  e a rejeição de  $d_{(j)}(k)$  com um erro  $\epsilon$  dependente do filtro  $Q(z, z^{-1})$ . ■

A partir dos Teoremas 9 e 10, a síntese de laços de *anti-windup* através da técnica de condicionamento linear tal que os conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$  sejam maximizados pode ser obtida através das seguintes etapas:

**Etapa 1 - Projeto do compensador anti-windup:** Nesta etapa, o objetivo é determinar o ganho  $K$  (e, conseqüentemente, o compensador *anti-windup*  $\Theta(z)$ ) tal que o o ganho  $\mathcal{L}_2$  do sinal  $u_{lin}(k)$  em  $y_d(k)$  seja o menor possível. Isto pode ser resolvido a partir do seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{PO5a:} \min \mu$$

sujeito a (94).

**Etapa 2 - Determinação dos conjuntos admissíveis:** A partir do valor de  $K$  obtido na etapa anterior, é possível caracterizar completamente o sistema aumentado (98). Assim, o problema de interesse agora é determinar quais são os maiores conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e/ou  $\Omega(R, 1)$  que satisfazem as condições do Teorema 10. Isto pode ser resolvido através do seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{PO5b:} \min (1 - \kappa)\gamma + \kappa\delta$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{x}_i^T \\ \mathbf{x}_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, f$$

$$\mathbf{d}_j^T R \mathbf{d}_j \leq \delta, \quad j = 1, \dots, s$$

Relações (99), (100) e (101).

onde  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{d}_j$  são as direções de maximização conhecidas *a priori*. Este problema de otimização (e as devidas considerações sobre  $\kappa$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ ) é idêntico ao problema de otimização PO4 apresentado na Seção 5.4.

### 6.3 Exemplos numéricos

Nesta seção será considerado o exemplo *SISO* de um disco ótico apresentado em (CHEW; TOMIZUKA, 1990b). O controlador utilizado é o ZPRC apresentado na Seção 2.3.1.4 e serão exploradas duas configurações de laço de *anti-windup*: um laço de *anti-windup* estático, onde somente o ganho  $E_c$  é sintetizado e a técnica de condicionamento linear apresentada neste capítulo. O objetivo de controle será a maximização do conjunto de condições iniciais para um dado conjunto  $\Omega(R, 1)$ .

O disco ótico modelado em (CHEW; TOMIZUKA, 1990b) pode ser representado por

$$G(z^{-1}) = z^{-3} \frac{-0.0972 - 0.0848z^{-1}}{1 - 1.6054z^{-1} + 0.7791z^{-2}}$$

de tal forma que,  $A(z^{-1}) = 1 - 1.6054z^{-1} + 0.7791z^{-2}$ ,  $B^c(z^{-1}) = -0.0972 - 0.0848z^{-1}$ ,  $B^u(z^{-1}) = 1$  e  $d = 3$ . Ainda baseado no resultados de (CHEW; TOMIZUKA, 1990b)

segue que  $Q(z, z^{-1}) = 0.25(z^{-1} + 2 + z)$ , de tal forma que o *ZPRC* é representado pela seguinte função de transferência

$$G_{ZPRC}(z^{-1}) = \frac{-4z^{-12} - 1.578z^{-13} + 5.727z^{-14} + 0.188z^{-15} - 3.116z^{-16}}{1.555 + 1.357z^{-1} - 0.388z^{-15} - 1.117z^{-16} - 1.067z^{-17} - 0.339z^{-18}}$$

Por sua vez, estas funções de transferência podem ser representadas no espaço de estados pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1.6054 & -0.7791 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, B = B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0972 \\ -0.0848 \end{bmatrix}^T$$

e

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{c(1,1)} & A_{c(1,2)} \\ A_{c(2,1)} & A_{c(2,2)} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{17 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$C_c = [ 0_{1 \times 11} \quad -2.5720 \quad -1.0149 \quad 3.6824 \quad 0.1214 \quad -2.0039 \quad 0 \quad 0 ]$$

onde  $A_{c(1,1)} = [ -0.8724 \quad 0_{1 \times 13} \quad 0.2500 \quad 0.7181 \quad 0.6862 ]$ ,  $A_{c(1,2)} = 0.2181$ ,  $A_{c(2,1)} = I_{17}$  e  $A_{c(2,2)} = 0_{17 \times 1}$ . Os sinais de referência e perturbação são sinais senoidais de período  $N_r = N_d = 16$  amostras e amplitude unitária. Assumindo o limite de saturação dado por  $u_0 = 2.5$ , três configurações distintas para o laço de *anti-windup* são consideradas: *ZPRC* sem compensação *anti-windup*; *ZPRC* com laço de *anti-windup* estático e, finalmente, *ZPRC* com compensação *anti-windup* via condicionamento linear. Para todos os casos, as direções de maximização foram arbitradas em  $\mathcal{X}_R = \{\mathbf{x}\}$ ,  $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 18}]^T$  e  $\mathcal{D}_R = \{\mathbf{d}\}$ ,  $\mathbf{d} = [1 \ 1]^T$ .

***ZPRC* com laço de *anti-windup* estático:** Neste caso, o problema PO4 apresentado no capítulo anterior é resolvido supondo o ganho  $F$  um dado do problema tal que  $\mathbf{F} = [0_{1 \times 4} \ C_c]$  (seguindo as ideias apresentadas na Observação 10). Neste caso, os valores ótimos para  $\kappa = 0$  e  $\delta = 1$  (maximização de  $\Omega(P, 1)$ ) foram obtidos para  $\eta = 10.1$  e  $\lambda = 0.00049$ , resultando em  $\alpha = 1.1570 \times 10^4$  e  $E_c = -0.0213$ . A simulação do sistema considerando  $r(k) = d(k) = \sin(\frac{2\pi}{16}k)$  e  $z(0) = 1.1570 \times 10^4 [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times 18}]^T$  é apresentada na Figura 54. Note que o sinal de controle permanece saturado por cerca de 1500 amostras e que o seguimento/rejeição é atingido quase imediatamente após o sinal de controle ficar confinado ao interior da região de operação linear do sistema.

***ZPRC* sem compensação *anti-windup*:** Neste caso é considerado apenas o problema de análise, onde são calculados os conjuntos de condições iniciais admissíveis, ou seja, trata-se da solução de PO5b supondo  $\kappa = 0$ ,  $\delta = 1$  e  $\mathbf{F} = [0_{1 \times 4} \ C_c]$ . Neste caso, os valores ótimos de  $\eta$  e  $\lambda$  são 15.1 e 0.0005, respectivamente, resultando em  $\alpha = 1.1058 \times 10^4$ . A simulação do sistema supondo os mesmos sinais de referência/perturbação e condições iniciais da Figura 54 é apresentada na Figura 55. Comparando com o caso anterior, a remoção do laço de *anti-windup* resulta em um menor valor de  $\alpha$  (aumento do conservadorismo) e uma piora significativa do desempenho do sistema, sendo que o sinal de controle permanece saturado por aproximadamente 3200 amostras.

***ZPRC* com compensação *anti-windup* via condicionamento linear:** Para esta configuração de *anti-windup* foi utilizado o procedimento em duas etapas discutido neste capítulo. Assim, o primeiro passo é a determinação do laço de *anti-windup*, isto é, determinar o ganho  $K$  a partir da solução do problema de otimização PO5a. Neste caso, o valor de  $K$  resultante é

$$K = [ -0.8336 \quad 0.8075 \quad -0.0043 \quad 3.6867 \times 10^{-5} ].$$

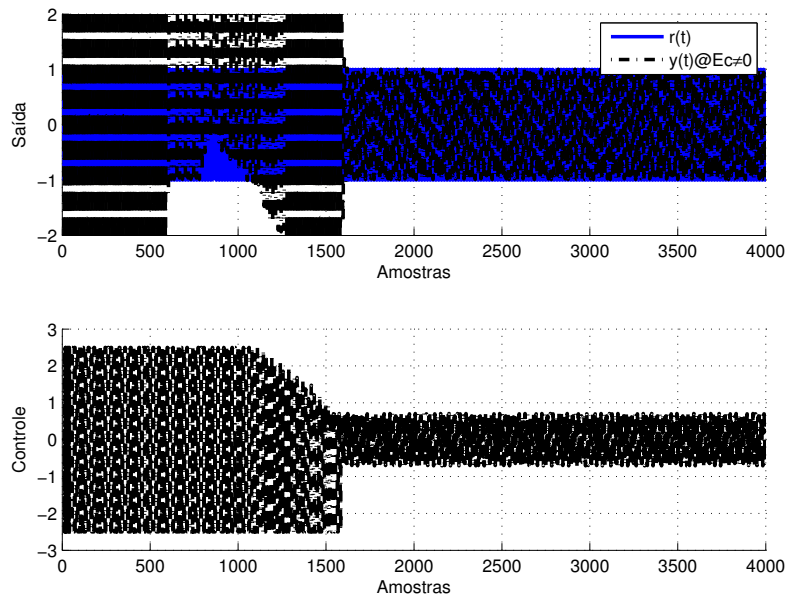


Figura 54: ZPRC com laço de *anti-windup* estático - simulação da saída e sinal de controle para  $r(k) = d(k) = \sin(\frac{2\pi}{16}k)$ ,  $x(0) = 1.1570 \times 10^4 [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  e  $\xi(0) = 0_{18 \times 1}$ .

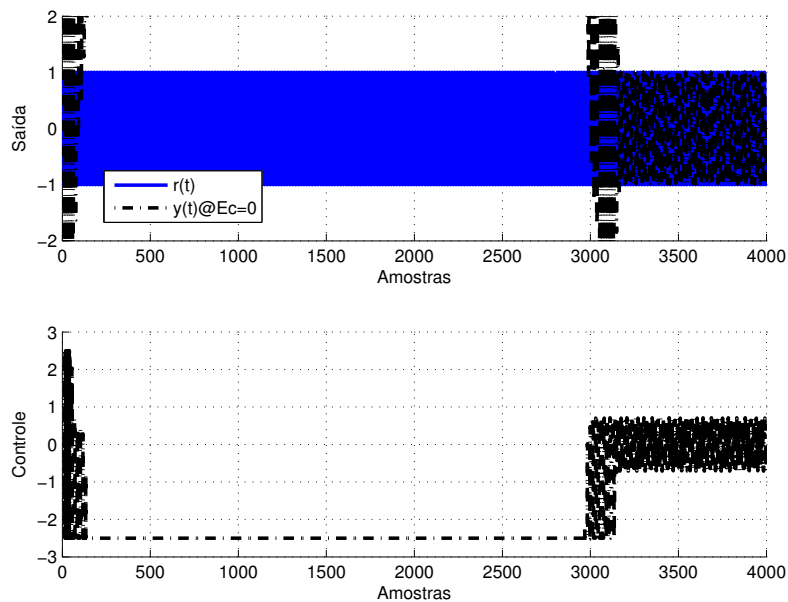


Figura 55: ZPRC sem laço de *anti-windup* - simulação da saída e sinal de controle para  $r(k) = d(k) = \sin(\frac{2\pi}{16}k)$ ,  $x(0) = 1.1570 \times 10^4 [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  e  $\xi(0) = 0_{18 \times 1}$ .

Em um segundo momento, o problema de análise foi resolvido com o objetivo de determinar os conjuntos admissíveis. Neste caso, o valor ótimo (supondo  $\kappa = 0$  e  $\delta = 1$ ) obtido para  $\lambda = 0.00057$  e  $\eta = 5.09$  é  $\alpha = 1.1182 \times 10^4$ . A simulação do sistema supondo os mesmos sinais de referência/perturbação e condições iniciais da Figura 54 é apresentada na Figura 56. O valor de  $\alpha$  obtido é menor que o apresentado para o caso com compensação de *anti-windup* estático, uma vez que na compensação *anti-windup* estática o ganho de *anti-windup*  $E_c$  é projetado com o objetivo específico de maximizar os conjuntos admissíveis. Para o caso do condicionamento linear o compensador *anti-windup* foi projetado de forma a minimizar o desvio de  $y(k)$  em relação a  $y_{lim}(k)$ , priorizando o desempenho do laço de *anti-windup*. O valor de  $\alpha$  obtido para o caso do condicionamento linear é muito parecido com o valor obtido para o caso do ZPRC sem compensação *anti-windup*. Por outro lado, há uma grande melhoria no desempenho do sistema, o qual deixa de saturar após aproximadamente 100 amostras. Na Figura 57 são apresentados os sinais  $u(k)$ ,  $u_d(k)$  e  $y_d(k)$  envolvidos na compensação via condicionamento linear. Note que, conforme apresentado na descrição da metodologia, os sinais  $u_d(k)$  e  $y_d(k)$  continuam agindo no sistema mesmo depois que o sistema passa a operar na região de operação linear. O detalhe das três metodologias no momento em que o seguimento é atingido é apresentado na Figura 58, onde (apesar de imperceptível) existe um pequeno erro de seguimento associado ao filtro  $Q(z, z^{-1})$ .

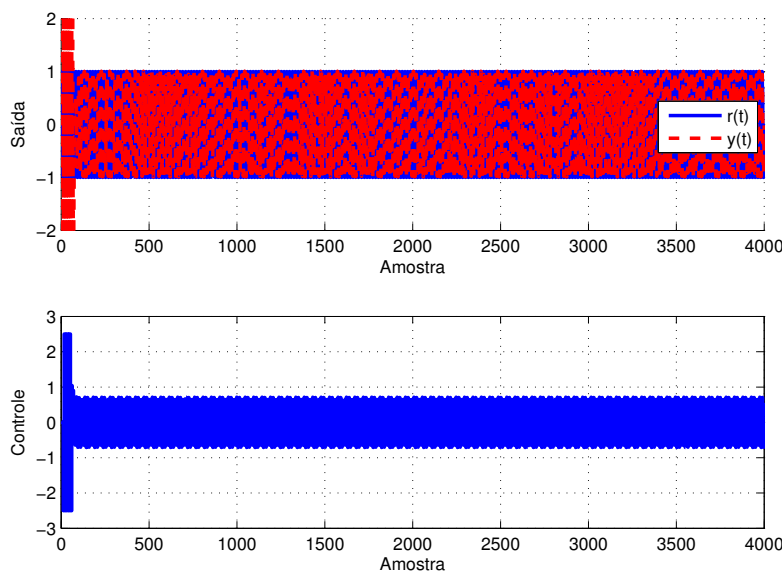


Figura 56: ZPRC com compensação *anti-windup* via condicionamento linear - simulação da saída e sinal de controle para  $r(k) = d(k) = \sin(\frac{2\pi}{16}k)$ ,  $x(0) = 1.1570 \times 10^4 [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  e  $\xi(0) = 0_{18 \times 1}$ .

## 6.4 Comentários finais

Neste capítulo, foi apresentada a técnica de compensação *anti-windup* baseada na metodologia conhecida como condicionamento linear. Uma das desvantagens desta metodologia é que os valores máximos dos sinais de referência e perturbação admissíveis

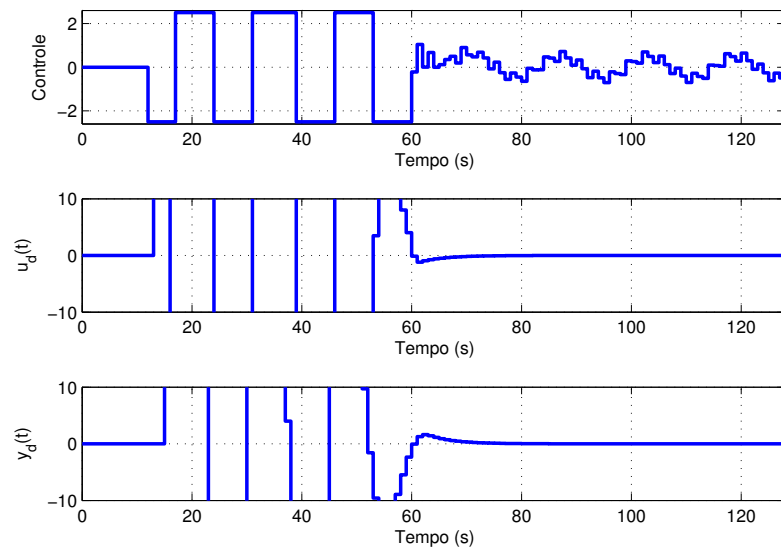


Figura 57: ZPRC com compensação *anti-windup* via condicionamento linear - Sinais  $u(k)$ ,  $u_d(k)$  e  $y_d(k)$ .

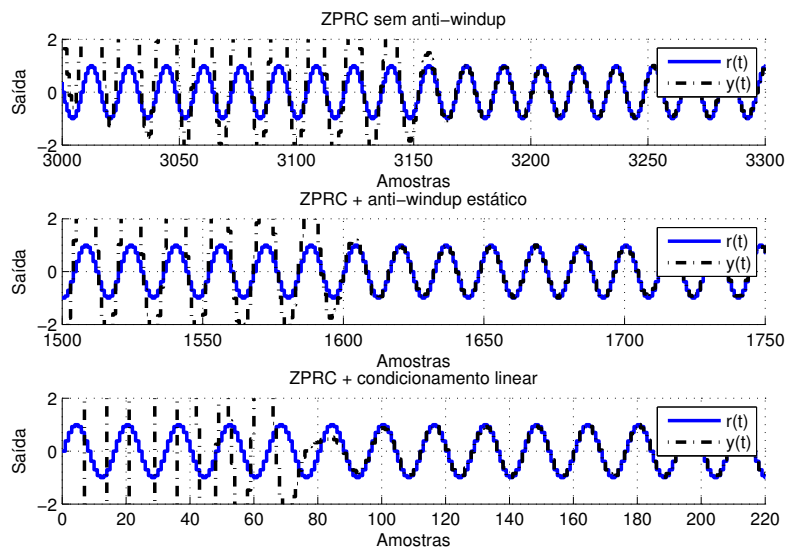


Figura 58: ZPRC - detalhe das três simulações.



não são formalmente caracterizados. Assim, a metodologia multi-elipsoidal apresentada no Capítulo 5 foi utilizada para a determinação dos conjuntos de condições iniciais admissíveis considerando compensação *anti-windup* através da técnica de condicionamento linear. Em uma abordagem em dois passos, onde primeiro um compensador *anti-windup* é determinado visando o melhor desempenho possível para o sistema saturado e depois, baseado neste compensador, são determinados os conjuntos admissíveis. Considerando o *ZPRC* como controlador nominal, exemplos numéricos mostram que a técnica de condicionamento linear melhora de forma expressiva o desempenho do sistema saturado sem introduzir um conservadorismo excessivo no tamanho dos conjuntos admissíveis.

## 7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O ponto de partida deste trabalho foi o desenvolvimento de um abordagem multi-elipsoidal, de forma a contornar os problemas de caracterização dos pontos de equilíbrio do sistema saturado discutidos em (FLORES, 2008. 114f). A partir desta abordagem foi possível formular o problema de seguimento e rejeição de sinais periódicos da forma como ele é apresentado no Capítulo 3, ou seja, formular resultados que garantam a convergência das trajetórias do sistema em malha fechada para o interior de um conjunto invariante contido na região de operação linear do sistema. Os problemas propostos foram resolvidos para sistemas de tempo contínuo da seguinte forma: foram obtidas condições na forma de “quasi” *LMI*s para a síntese simultânea do controlador estabilizante e do laço de *anti-windup*, ou seja, estas condições são *LMI*s supondo que alguns parâmetros são conhecidos *a priori*. Esta restrição ocorre nos escalares resultantes da aplicação do *S-procedure*, de forma a garantir que as trajetórias convergem para o conjunto invariante no interior da região linear; a metodologia proposta foi aplicada tanto para os controladores ressonantes quanto para os controladores repetitivos. No caso dos controladores repetitivos foi escolhida uma abordagem de Razumikhin independente do valor do atraso introduzido por estes controladores; finalmente, os conjuntos admissíveis foram plenamente caracterizados, permitindo assim determinar condições iniciais e valores máximos dos sinais de referência e perturbação para os quais o seguimento é garantido. Também foram obtidas condições para sistemas incertos com incerteza limitada em norma, conforme apresentado no Apêndice A.

Foram escolhidos três exemplos de simulação com o objetivo de ilustrar as peculiaridades das soluções propostas. Através de um exemplo simples de dimensão unitária foi mostrado que as trajetórias do sistema de fato ficam confinadas a um conjunto elipsoidal contido no interior da região de operação linear. O exemplo de uma fonte ininterrupta de energia foi utilizado para uma comparação sobre o erro de seguimento entre os controladores repetitivos e ressonantes. A partir deste exemplo foi possível concluir que os controladores ressonantes com quatro harmônicas apresentaram os melhores resultados, tanto no valor *RMS* quanto na *THD* do sinal de saída. Porém os resultados do controlador repetitivo não foram tão distantes, atendendo aos requisitos das normas que regulam o desempenho dos sistemas *UPS* com um controlador de estrutura muito mais simples. Este controlador apresentou uma pequena defasagem entre os sinais de entrada e saída, prejudicando assim a medida do erro pontual porém sem prejudicar as medidas de *THD* e valor *RMS*. Esta defasagem deve-se aos valores relativamente baixos da frequência de corte do filtro para os quais é possível garantir o seguimento/rejeição. Em todos os exemplos considerados, a contribuição do laço de *anti-windup* se deu de duas formas: na redução do conservadorismo das condições propostas, refletida no maior tamanho dos conjuntos admissíveis e na melhoria do desempenho transitório do sistema, reduzindo consideravel-

mente o tempo em que o sistema permanece saturado.

Na segunda parte deste trabalho as ideias apresentadas foram aplicadas para sistemas de tempo discreto. Em uma abordagem conjunta foi possível tratar tanto dos controladores ressonantes quanto dos controlares repetitivos, conforme visto nos exemplos numéricos. Além disso, outras possibilidades de controladores e configurações de *anti-windup* foram apresentadas. Foi proposta uma metodologia para a determinação dos conjuntos de condições iniciais e referências/perturbações para os compensadores *anti-windup* baseados na técnica de condicionamento linear. Neste caso, o controlador nominal estudado foi o *ZPRC*, estabelecendo uma comparação entre os casos sem laço de *anti-windup*, *anti-windup* estático e *anti-windup* via condicionamento linear através de um exemplo de um disco ótico. Foi mostrado que de fato a técnica do condicionamento linear apresenta os melhores resultados em termos de desempenho transitório.

As principais contribuições deste trabalho foram:

- Proposição da abordagem multi-elipsoidal, onde é garantido que as trajetórias do sistema convergem para um conjunto invariante no interior da região de operação linear;
- Formulação do problema de síntese simultânea considerando os controladores ressonantes na malha de controle e sua possível aplicação para sistemas *UPS*;
- Formulação em tempo contínuo do controlador repetitivo multi-periódico e a metodologia de síntese simultânea do laço de *anti-windup* e do controlador estabilizante;
- Apresentação de uma metodologia sistemática de síntese de laços de *anti-windup* considerando o *ZPRC*, permitindo a caracterização de conjuntos de condições iniciais e referências/perturbações admissíveis.

Os resultados apresentados nos capítulos anteriores apontam para algumas perspectivas de continuação deste trabalho, apresentadas a seguir.

- *Condições dependentes do valor do atraso*: Um das grandes vantagens dos controladores repetitivos é que o atraso inserido no sistema é conhecido e de valor fixo. Desta forma, estes controladores se configuram como candidatos ideais para as técnicas dependentes do valor do atraso. Por outro lado, estas técnicas são normalmente baseadas nos Funcionais de Lyapunov-Krasovskii, os quais impõem uma série de restrições na caracterização da abordagem multi-elipsoidal. Estas restrições foram brevemente discutidas no Capítulo 4. Até agora foram obtidos apenas resultados mais conservadores do que os resultantes da abordagem de Razumikhin supondo um funcional de estrutura simples. Além disso, estes resultados são fortemente dependentes do tipo de funcional considerado. A obtenção de condições menos conservadoras resultaria em um aumento do tamanho dos conjuntos admissíveis e, possivelmente, no valor de  $\omega_c$  considerado;
- *Aplicação da técnica de condicionamento linear para sistemas de tempo contínuo*: Os resultados de tempo discreto acenam para uma grande melhoria no desempenho do sistema quando se considera a técnica do condicionamento linear para a redução do efeito de *windup*. Além disso, a síntese do laço de *anti-windup* é feita de forma independente do controlador nominal considerado. Do ponto de vista dos controladores repetitivos, não seria necessário considerar o atraso característico deste controlador na síntese do compensador *anti-windup*, permitindo assim a obtenção

de um melhor desempenho transitório. Em uma segunda etapa as condições de estabilidade dos Capítulos 3 e 4 poderiam ser utilizadas como condição de análise para a determinação dos conjuntos admissíveis;

- *Aplicação das metodologias para sistemas reais:* As metodologias desenvolvidas neste trabalho apresentam potencial para aplicação em duas plantas reais instaladas no LASCAR. Para o sistema *UPS* é necessária apenas a validação dos resultados de simulação apresentados neste trabalho na plataforma experimental adquirida em parceria com a empresa CP Eletrônica. Como a implementação do controle é feita através de uma placa DSPACE, é possível aplicar tanto os resultados de tempo discreto quanto os resultados de tempo contínuo. Alguns resultados preliminares (sem considerar a saturação) relativo ao controle de sistemas *UPS* já foram publicados em (FLORES et al., 2010b), (BONAN et al., 2011) e (FLORES et al., 2011). Outra possibilidade de aplicação real trata do problema de controle ativo de vibrações em uma barra engastada. Neste caso o objetivo de interesse é a rejeição de perturbações periódicas, associadas aos modos de vibração da barra;
- *Extensão da abordagem multi-elipsoidal para outros controladores:* A metodologia apresentada é de certa forma genérica, diferindo apenas no tipo de controlador utilizado para a garantia de seguimento/rejeição. Acredita-se que é possível aplicar esta metodologia a outros controladores como o *VSC*. Neste caso, as trajetórias do sistema seriam levadas a um conjunto invariante na região de operação linear do sistema e no interior deste conjunto seria projetada uma superfície deslizando que governa o comportamento do sistema linear;
- *Síntese de observadores de estado ou controladores dinâmicos:* As abordagens de tempo contínuo apresentadas neste trabalho consideram que todos os estados do sistema estão disponíveis para a realimentação. Em algumas aplicações práticas isto nem sempre ocorre, implicando assim em uma limitação da técnica proposta. Assim, uma alternativa seria considerar a síntese de observadores de estados ou controladores dinâmicos, onde apenas a informação da saída do sistema é considerada. Por outro lado, a influência da dinâmica do observador de estados na caracterização dos conjuntos admissíveis é uma questão a ser investigada formalmente.

## REFERÊNCIAS

ANGELI, D.; CASAVOLA, A.; MOSCA, E. Constrained predictive control of nonlinear plants via polytopic linear system embedding. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.10, n.13, p.1091–1103, 2000.

ANSI/IEEE. **IEEE Std 944-1986**: IEEE recommended practice for the application and testing of uninterruptible power supplies for power generating stations. New York: IEEE, 1986. 22p.

ASTROM, K. J.; RUNDQWIST, L. Integrator windup and how to avoid it. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'89), 1989, Pittsburgh. **Proceedings...** New York: IEEE, 1989. p.1693–1698.

ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer Controlled Systems: theory and design**. New Jersey: Prentice Hall, 1984. 555p.

BENDER, F.; GOMES DA SILVA JR, J. M.; TARBOURIECH, S. Convex framework for the design of dynamic anti-windup for state-delayed systems. **IET Control Theory Applications**, Hertford, v.5, n.12, p.1388 –1396, 2011.

BLANCHINI, F. Set invariance in control: a survey. **Automatica**, Tarrytown, v.35, n.11, p.1747–1768, 1999.

BLANCHINI, F.; MIANI, S. Any domain of attraction for a linear constrained system is a tracking domain of attraction. **SIAM J. Control and Optimization**, Philadelphia, v.38, n.3, p.971–994, 2000.

BONAN, G. et al. Robust control design of multiple resonant controllers for sinusoidal tracking and harmonic rejection in Uninterruptible Power Supplies. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INDUSTRIAL ELECTRONICS (ISIE'10), 2010, Bari. **Proceedings...** New York: IEEE, 2010. p.303 –308.

BONAN, G. et al. Repetitive Controller Design for Uninterruptible Power Supplies: an LMI approach. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY (IECON'11), 37., 2011, Melbourne. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011. p.704–709.

BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. 193p.

BYRNES, C. I.; ISIDORI, A. Output regulation for nonlinear systems: an overview. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.10, n.3, p.323–337, 2000.

CAI, K.-Y. et al. Repetitive control by output error for a class of uncertain time-delay systems. **IET Control Theory & Applications**, Hertford, v.3, n.9, p.1283–1292, 2009.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. A. **Model Predictive Control in the Process Industry**. Secaucus: Springer-Verlag, 1997. 239p.

CAMPO, P. J.; MORARI, M. Robust control of processes subject to saturation nonlinearities. **Computers & Chemical Engineering**, Shannon, v.14, p.343–358, 1990.

CAO, Y.; LIN, Z.; HU, T. Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, Brookline, v.49, n.2, p.233–240, 2002.

CAO, Y.; LIN, Z.; WARD, D. G. Anti-windup design of output tracking systems subject to actuator saturation and constant disturbances. **Automatica**, Tarrytown, v.40, n.7, p.1221–1228, 2004.

CHAO, P. C. et al. Robust dual-stage and repetitive control designs for an optical pickup with parallel cantilever beams powered by piezo-actuation. **Microsystem Technologies**, Secaucus, v.16, n.1-2, p.317–331, 2009.

CHEN, C. **Linear System Theory and Design**. 2.ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1970. 679p.

CHEN, W.; CHANG, S.; ZHANG, W. Linear matrix inequality-based repetitive controller design for linear systems with time-varying input delay. **IET Control Theory Applications**, Hertford, v.4, n.6, p.1071–1078, 2010.

CHEW, K.; TOMIZUKA, M. Steady-State and Stochastic Performance of a Modified Discrete-Time Prototype Repetitive Controller. **ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v.112, n.1, p.35–41, 1990.

CHEW, K.; TOMIZUKA, M. Digital control of repetitive errors in disk drive systems. **IEEE Control Systems Magazine**, Brookline, v.10, n.1, p.16–20, 1990.

COSTA-CASTELLO, R.; GRIÑO, R.; FOSSAS, E. Resonant Control of a Single-Phase Full-Bridge Unity Power Factor Boost Rectifier. In: **IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS (ICCA'07)**, 16., 2007, Singapura. **Proceedings...** New York: IEEE, 2007. p.599–604.

DANG, H.; OWENS, D. MIMO multi-periodic repetitive control system: universal adaptive control schemes. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v.20, n.9, p.409–429, 2006.

DAVISON, E. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.21, n.1, p.25–34, 1976.

DOH, T.; RYOO, J. Robust stability condition and analysis on steady-state tracking errors of repetitive control systems. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Berlin, v.6, n.6, p.960–967, 2008.

DOH, T.-Y.; CHUNG, M. Repetitive control design for linear systems with time-varying uncertainties. **IEE Proceedings Control Theory and Applications**, Hertford, v.150, n.4, p.427–432, 2003.

DOH, T.-Y.; RYOO, J.; CHUNG, M. Design of a repetitive controller: an application to the track-following servo system of optical disk drives. **IEE Proceedings Control Theory and Applications**, Hertford, v.153, n.3, p.323–330, 2006.

DOYLE, J. C.; SMITH, R. S.; ENNS, D. F. Control of plants with input saturation nonlinearities. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'87), 1987, Minneapolis. **Proceedings...** New York: IEEE, 1987. p.1034–1039.

EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. **Sliding Mode Control: theory and applications**. Ann Arbor: CRC Press, 1998. 237p.

ESCOBAR, G. et al. Repetitive-Based Controller for a UPS Inverter to Compensate Unbalance and Harmonic Distortion. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Brookline, v.54, n.1, p.504–510, 2007.

ESCOBAR, G. et al. A Repetitive-Based Controller for the Compensation of  $6l \pm 1$  Harmonic Components. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Brookline, v.55, n.8, p.3150–3158, 2008.

FERTIK, H. A.; ROSS, C. W. Direct digital control algorithm with anti-windup feature. **ISA Transactions**, Chapel Hill, v.6, p.317–328, 1967.

FLORES, J. et al. Síntese de Controladores Repetitivos Chaveados: uma aplicação à fontes ininterruptas de energia (UPS). **Revista Controle & Automação**, Campinas, v.22, n.2, p.184–200, 2011.

FLORES, J.; GOMES DA SILVA JR., J. Estratégia de controle para o seguimento de referências em sistemas de tempo discreto com atuadores saturantes. **Revista Controle & Automação**, Campinas, v.21, n.1, p.14–28, 2010.

FLORES, J. V. **Estratégia de controle para o seguimento de referências em sistemas com atuadores saturantes**. 2008. 114f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

FLORES, J. V.; ECKHARD, D.; GOMES DA SILVA JR, J. M. On the Tracking Problem for Linear Systems subject to Control Saturation. In: IFAC WORLD CONGRESS, 17., 2008, Seoul. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2008. v.17, p.14168–14173.

FLORES, J. V. et al. Robust repetitive control with saturating actuators: an LMI approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'10), 2010, Baltimore. **Proceedings...** New York: IEEE, 2010. p.4259–4264. Referenciado no texto como FLORES et al., 2010a.

FLORES, J. V. et al. LMI-Based design of robust repetitive controllers for UPS systems. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA'10), 28., 2010, Bonito. **Anais...** Bonito: UNESP, 2010. p.4104–4109. Referenciado no texto como FLORES et al., 2010b.

FLORES, J. V. et al. Repetitive Control Design for MIMO Systems with Saturating Actuators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.57, n.1, p.192–198, 2012.

FLORES, J. V.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; SBARBARO, D. Robust Periodic Reference Tracking for Uncertain Linear Systems subject to Control Saturations. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'09), 48., 2009, Shanghai. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. p.7960–7965.

FLORES, J. V.; SARTORI, R.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Seguimento de referências periódicas em sistemas de tempo discreto com atuadores saturantes. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA'10), 28., 2010, Bonito. **Anais...** Bonito: UNESP, 2010. p.1420–1425.

FLORES, J. V.; SARTORI, R.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Tracking and rejection of periodic signals for discrete-time linear systems subject to control saturation. **IET Control Theory & Applications**, Hertford, 2012. Submetido para publicação.

FRANCIS, B. A.; WONHAM, W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators. **Applied Mathematics and Optimization**, Berlin, v.2, n.2, p.170–194, 1975.

FRANCIS, B. The Linear Multivariable Regulator Problem. **SIAM J. Control and Optimization**, Philadelphia, v.15, n.3, p.486–505, 1977.

FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Delay-dependent stability and  $\mathcal{H}_\infty$  control: constant and time-varying delays. **International Journal of Control**, Bristol, v.76, n.1, p.48–60, 2003. Referenciado no texto como FRIDMAN;SHAKED, 2003a.

FRIDMAN, E.; SHAKED, U. On reachable sets for linear systems with delay and bounded peak inputs. **Automatica**, Tarrytown, v.39, n.11, p.2005–2010, 2003. Referenciado no texto como FRIDMAN;SHAKED, 2003b.

GHIGGI, I. et al. Estabilização de Sistemas Discretos com Atrasos Variantes no Tempo e Saturação nos Atuadores. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA'08), 27., 2008, Juiz de Fora. **Anais...** Juiz de Fora: UFJF, 2008.

GHOSH, J.; PADEN, B. Nonlinear repetitive control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.45, n.5, p.949–954, 2000.

GILBERT, E.; KOLMANOVSKY, I. Fast reference governors for systems with state and control constraints and disturbance inputs. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.9, n.15, p.1117–1141, 1999.

GILBERT, E.; KOLMANOVSKY, I. Nonlinear tracking control in the presence of state and control constraints: a generalized reference governor. **Automatica**, Tarrytown, v.38, n.12, p.2063–2073, 2002.



GLATTFELDER, A.; SCHAUFELBERGER, W. Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.28, n.12, p.1074–1081, 1983.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; LEITE, V. J. S. Sistemas Lineares com Atrasos de Tempo. In: AGUIRRE, L. A. et al. (Ed.). **Enciclopédia de Automática - Controle & Automação**. São Paulo: Blucher, 2007. p.109–124.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; LIMON, D.; ALAMO, T. Dynamic Output Feedback for Discrete-Time Systems under Amplitude and Rate Actuator Constraints. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'05), 44., 2005, Seville. **Proceedings...** New York: IEEE, 2005. p.5588– 5593.

GOMES DA SILVA JR, J. M.; TARBOURIECH, S. Polyhedral regions of local stability for linear discrete-time systems with saturating controls. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.44, n.11, p.2081–2085, 1999.

GOMES DA SILVA JR, J. M.; TARBOURIECH, S. Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'00), 39., 2000, Sydney. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.4, p.3260–3265.

GOMES DA SILVA JR, J. M.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.50, n.1, p.106–111, 2005.

GOMES DA SILVA JR, J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.55, p.184–192, 2006.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Anti-windup Design for Time-delay Systems Subject to Input Saturation. An LMI-based Approach. **European Journal of Control**, London, v.12, n.6, p.622–634, 2006.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S.; REGINATTO, R. Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS (CCA'02), 17., 2002, Glasgow. **Proceedings...** New York: IEEE, 2002. v.2, p.1106–1111.

GRIMM, G. et al. Anti-windup for stable systems with input saturation: an LMI-based synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.48, n.9, p.1500–1525, 2003.

GRIMM, G.; TEEL, A. R.; ZACCARIAN, L. Linear LMI-based external anti-windup augmentation for stable linear systems. **Automatica**, Tarrytown, v.40, n.11, p.1987–1996, 2004.

GU, K.; KHARITONOV, V.; CHEN, J. **Stability of time-delay systems**. Boston: Birkhäuser, 2003. 376p.

- HARA, S. et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.33, n.7, p.659–668, 1988.
- HAYKIN, S.; VAN VEEN, B. **Signals and Systems**. 2.ed. West Sussex: John Wiley & Sons, 2002. 802p.
- HINDI, H.; BOYD, S. Analysis of Linear Systems with Saturation using Convex Optimization. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC98), 37., 1998, Tampa. **Proceedings...** New York: IEEE, 1998. p.903–908.
- HU, T.; LIN, Z. Output regulation of general linear systems with saturating actuators. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'00), 39., 2000, Sydney. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.4, p.3242–3247.
- HU, T.; TEEL, A. R.; ZACCARIAN, L. Anti-windup synthesis for linear control systems with input saturation: achieving regional, nonlinear performance. **Automatica**, Tarrytown, v.44, n.2, p.512 – 519, 2008.
- INOUE, T.; NAKANO, M.; IWA, S. High accuracy control of servomechanism for repeated contouring. In: ANNUAL SYMP. INCREMENTAL MOTION CONTR. SYST. AND DEVICES, 10., 1981, Berkeley. **Proceedings...** New York: IEEE, 1981. p.258–292.
- ITKIS, Y. **Control Systems of Variable Structure**. West Sussex: John Wiley & Sons, 1976. 214p.
- JEONG, D.; FABIEN, B. C. A discrete-time repetitive control system for MIMO plants. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'99), 1999, San Diego. **Proceedings...** New York: IEEE, 1999.
- JIANG, S. et al. Low THD, fast transient, and cost-effective synchronous-frame repetitive controller for three-phase UPS inverters. In: IEEE ENERGY CONVERSION CONGRESS AND EXPOSITION (ECCE'11), 3., 2011, Phoenix. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011. p.2819 –2826.
- JIANG, Y.; LIU, S. Global disturbance rejection of a class of nonlinear systems with unknown exosystems. **Journal of Control Theory and Applications**, Berlin, v.7, n.4, p.379–383, 2009.
- KAPASOURIS, P.; ATHANS, M.; STEIN, G. Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'88), 27., 1988, Austin. **Proceedings...** New York: IEEE, 1988. p.469–479.
- KAPOOR, N.; TEEL, A. R.; DAOUTIDIS, P. An anti-windup design for linear systems with input saturation. **Automatica**, Tarrytown, USA, v.34, n.5, p.559–574, 1998.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. New York: Macmillan Publishing Company, 1992. 576p.
- KOTHARE, M. V. et al. A Unified Framework for the Study of Anti-windup Designs. **Automatica**, Tarrytown, v.30, n.12, p.1869–1883, 1994.

- KRIKELIS, N. J. State feedback integral control with “intelligent” integrators. **International Journal of Control**, Bristol, v.32, n.3, p.465–473, 1980.
- KRIKELIS, N. J.; BARKAS, S. K. Design of tracking systems subject to actuator saturation and integrator wind-up. **International Journal of Control**, Bristol, v.39, n.4, p.667–682, 1984.
- LENWARI, W. et al. A High Performance Harmonic Current Control for Shynt Active Filters Based on Resonant Compensators. In: IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS CONFERENCE (IECON'06), 32., 1996, Paris. **Proceedings...** New York: IEEE, 1996. p.2109–2114.
- LI, G. et al. A novel robust disturbance rejection anti-windup framework. **International Journal of Control**, Bristol, v.84, n.1, p.123–137, 2011.
- LIN, C.-Y.; CHEN, P.-Y. Precision tracking control of a biaxial piezo stage using repetitive control and double-feedforward compensation. **Mechatronics**, Tarrytown, v.21, n.1, p.239–249, 2011.
- LIN, Z.; STOORVOGEL, A. A.; SABERI, A. Output regulation for linear systems subject to input saturation. **Automatica**, Tarrytown, v.32, n.1, p.29–47, 1996.
- LOZIER, J. A steady state approach to the theory of saturable servo systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.1, n.1, p.19–39, 1956.
- LU, L.; LIN, Z. Design of a Nonlinear Anti-Windup Gain by Using a Composite Quadratic Lyapunov Function. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.56, n.12, p.2997–3001, 2011.
- LU, Y.-S.; HWANG, C.-S. Tracking control of a harmonic drive actuator with sliding-mode disturbance observers. In: IEEE/ASME INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED INTELLIGENT MECHATRONICS (AIM'09), 2009, Singapore. **Proceedings...** New York: ASME, 2009. p.1798–1803.
- MA, C. C. H. Stability Robustness of Repetitive Control Systems With Zero Phase Compensation. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v.112, n.3, p.320–324, 1990.
- MACIEJOWSKI, J. M. **Predictive control with constraints**. Essex: Prentice Hall, 2002. 352p.
- MAHMOUD, M. **Robust control and filtering for time-delay systems**. New York: Marcel Dekker, 2000. 448p.
- MICHIELS, W.; NICULESCU, S.-I.; MOREAU, L. Using delays and time-varying gains to improve the static output feedback stabilizability of linear systems: a comparison. **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, Oxford, v.21, n.4, p.393–418, 2004.
- MIYAMOTO, A.; VINNICOMBE, G. Robust control of plants with saturation nonlinearity based on coprime factor representation. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'96), 35., 1996, Kobe. **Proceedings...** New York: IEEE, 1996. p.2838–2840.

MOLCHANOV, A. P.; PYATNITSKIY, Y. S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.13, n.1, p.59–64, 1989.

OWENS, D. H.; LI, L. M.; BANKS, S. P. Multi-periodic repetitive control system: a Lyapunov stability analysis for MIMO systems. **International Journal of Control**, Bristol, v.77, n.5, p.504–515, 2004.

PARK, J.-K.; CHOI, C.-H.; CHOO, H. Dynamic anti-windup method for a class of time-delay control systems with input saturation. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.10, n.6, p.457–488, 2000.

PEREIRA, L. F. A. et al. Robust PSC control design for sinusoidal tracking in uninterruptible power supplies. In: BRAZILIAN POWER ELECTRONICS CONFERENCE (COBEP '09), 10., 2009, Bonito. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009.

PERRUQUETTI, W. **Sliding Mode Control in Engineering**. New York: Marcel Dekker, 2002. 432p.

PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVERS, J. **Optimal Linear Controller Design for Periodic Inputs**. Berlin: Springer Verlag, 2009. 180p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences).

QUAN, Q.; CAI, K.-Y. A Survey of Repetitive Control for Nonlinear Systems. **Science Foundation in China**, Pequin, v.18, n.2, p.45, 2010.

QUEINNEC, I.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Anti-windup design for aircraft flight control. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT CONTROL (ISIC'06), 2006, Munich. **Proceedings...** New York: IEEE, 2006. p.2541–2546.

RAWLINGS, J. Tutorial overview of model predictive control. **IEEE Control Systems Magazine**, Piscataway, v.20, n.3, p.38–52, 2000.

REGINATTO, R. **Contribuições ao projeto de controladores não-lineares para sistemas com restrições no controle**. 2000. 190f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2000.

ROMANCHUK, B.; SMITH, M. Incremental gain analysis of linear systems with bounded controls and its application to the anti-windup problem. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'96), 35., 1996, Kobe. **Proceedings...** New York: IEEE, 1996. v.3, p.2942–2947.

RÖNNBÄCK, S.; HILLERSTRÖM, G.; STERNBY, J. Periodic-disturbance rejection and setpoint tracking with application to a peristaltic pump. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC'93), 1., 1993, Groningen. **Proceedings...** Paris: EUCA, 1993. p.202–208.

SADEGH, N. Synthesis of a stable discrete-time repetitive controller for MIMO systems. **Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control**, New York, v.117, n.1, p.92–98, 1995.

SASTRY, S. **Nonlinear Systems: analysis, stability and control**. Berlin: Springer, 1999. 682p. (Interdisciplinary Applied Mathematics, v.10).

SBARBARO, D.; TOMIZUKA, M.; BARRA, B. L. de la. Repetitive Control System Under Actuator Saturation and Windup Prevention. **ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v.131, n.4, p.44505–8, 2009.

SMITH, C.; TOMIZUKA, M. A cost effective repetitive controller and its design. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'00), 2000, Chicago. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.2, p.1169 –1174.

STALLAERT, B. et al. A novel design strategy for iterative learning and repetitive controllers of systems with a high modal density: application to active noise control. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Amsterdam, v.24, n.2, p.444 – 454, 2010.

TARBOURIECH, S. et al. **Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators**. Berlin: Springer, 2011. 430p.

TARBOURIECH, S.; PITTET, C.; BURGAT, C. Output tracking problem for systems with input saturations via nonlinear integrating actions. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.10, n.6, p.489–512, 2000.

TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA Jr., J. M. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.51, n.8, p.1364–1371, 2006.

TARBOURIECH, S.; QUEINNEC, I.; PITTET, C. Output-reference tracking problem for discrete-time systems with input saturations. **IEE Proceedings on Control Theory and Applications**, Hertford, v.147, n.4, p.447–455, 2000.

TARBOURIECH, S.; TURNER, M. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. **IET Control Theory and Applications**, Hertford, v.3, n.1, p.1–19, 2009.

TEODORESCU, R.; BLAABJERG, F.; LISERRE, M.; LOH, P. Proportional-resonant controllers and filters for grid-connected voltage-source converters. **IEE Proceedings Electric Power Applications**, Brookline, v.153, n.5, p.750–762, 2006.

TOMIZUKA, M.; TSAO, T. C.; CHEW, K. K. Analysis and Synthesis of Discrete-Time Repetitive Controller. **Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v.111, p.353–358, 1989.

TSAO, T.-C.; TOMIZUKA, M. Robust Adaptive and Repetitive Digital Tracking Control and Application to a Hydraulic Servo for Noncircular Machining. **ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v.116, n.1, p.24–32, 1994.

TURNER, M. C.; HERRMANN, G.; POSTLETHWAITE, I. Discrete-time antiwindup: part 1 - stability and performance. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC'03), 7., 2003, Cambridge. **Proceedings...** Paris: EUCA, 2003. p.539–544.

TURNER, M. C.; HERRMANN, G.; POSTLETHWAITE, I. Incorporating Robustness Requirements Into Antiwindup Design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.52, n.10, p.1842 –1855, 2007.

TURNER, M. C.; HERRMANN, G.; POSTLETHWAITE, I. Anti-windup Compensation using a Decoupling Architecture. In: TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; GLATTFELDER, A. (Ed.). **Advanced Strategies in Control Systems with Input and Output Constraints**. Berlin: Springer, 2007. p.121–171. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v.346).

TURNER, M. C.; POSTLETHWAITE, I. A new perspective on static and low order anti-windup synthesis. **International Journal of Control**, Bristol, v.77, n.1, p.27–44, 2004.

TURNER, M. C.; POSTLETHWAITE, I.; WALKER, D. J. Non-linear tracking control for multivariable constrained input linear systems. **International Journal of Control**, Bristol, v.73, n.12, p.1160–1172, 2000.

UTKIN, V. Variable structure systems with sliding modes. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.22, n.2, p.212–222, 1977.

WALGAMA, K. S.; STERNBY, J. Inherent observer property in a class of anti-windup compensators. **International Journal of Control**, Bristol, v.52, p.705–724, 1990.

WANG, Y.; CHU, K.; TSAO, T.-C. An analysis and synthesis of internal model principle type controllers. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'09), 2009, Saint Louis. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. p.488–493.

WEISS, G.; HAFELE, M. Repetitive control of MIMO systems using  $H_\infty$  design. **Automatica**, Tarrytown, v.35, n.7, p.1185–1199, 1999.

WESTON, P. F.; POSTLETHWAITE, I. Linear conditioning for systems containing saturating actuators. **Automatica**, Tarrytown, v.36, n.9, p.1347–1354, 2000.

XU, S.; LAM, J. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems. **International Journal of Systems Science**, Bristol, v.39, n.12, p.1095–1113, 2008.

YAMAMOTO, Y. Learning control and related problems in infinite-dimensional systems. In: TRENTELMAN, H. L.; WILLEMS, J. C. (Ed.). **Essays on Control: perspectives in the theory and its applications**. Boston: Birkhäuser, 1993. p.1–31.

ZACCARIAN, L.; NESIC, D.; TEEL, A. R.  $\mathcal{L}_2$  anti-windup for linear dead-time systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.54, n.12, p.1205 – 1217, 2005.

ZHANG, K. et al. Direct repetitive control of SPWM inverter for UPS purpose. **IEEE Transactions on Power Electronics**, Brookline, v.18, n.3, p.784–792, 2003.

ZHAO, F. et al. Robust Repetitive Control Design for a Class of Linear Systems with Time-varying Uncertainties. In: INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE (JCAI'09), 21., 2009, Hainan. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. p.637–641.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and optimal control**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1996. 596p.

ZHOU, K. et al. Plug-In Dual-Mode-Structure Repetitive Controller for CVCF PWM Inverters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Brookline, v.56, n.3, p.784–791, 2009.

## APÊNDICE A ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLADORES RESSONANTES PARA SISTEMAS COM INCERTEZA LIMITADA EM NORMA

Este apêndice tem como objetivo estender os resultados do Capítulo 3 para sistemas com incertezas nos parâmetros do sistema. Estas incertezas foram modeladas como incertezas limitadas em norma, seguindo a abordagem apresentada em (DOH; CHUNG, 2003). A formulação aqui apresentada pode ser estendida para incorporar o tratamento de incertezas para os controladores repetitivos e para sistemas de tempo discreto. Resultados alguns resultados neste sentido foram previamente publicados em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009) e (FLORES et al., 2010a).

### A.1 Estrutura de controle

Considere o sistema linear incerto, em tempo contínuo, invariante no tempo e descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B \text{sat}_{u_0}(u(t)) + B_d d(t) \\ y(t) &= (C + \Delta C)x(t) \\ e(t) &= r(t) - y(t)\end{aligned}\tag{102}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é a saída a ser regulada,  $d(t) \in \mathbb{R}^l$  é um vetor de perturbações,  $r(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de referências a ser seguido e  $e(t) \in \mathbb{R}^p$  é o erro de seguimento da referência. Assume-se que as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas,  $B$  e  $C$  são de posto completo e que o número de entradas é maior ou igual ao número de saídas ( $m \geq p$ ).

As matrizes  $\Delta A$  e  $\Delta C$  representam matrizes de incerteza nos parâmetros do modelo, definidas como (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996)

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{p1} \\ H_{p2} \end{bmatrix} \Xi E_p,\tag{103}$$

onde  $\Xi$  é uma matriz desconhecida cujos elementos satisfazem  $\{\Xi \in \mathfrak{R}^{n \times n}; \Xi(t)^T \Xi(t) \leq I\}$  e  $H_{p1}$ ,  $H_{p2}$  e  $E_p$  são matrizes reais, conhecidas e que caracterizam a estrutura das incertezas.

Baseado nos resultado da Seção 2.3.1.1 o controlador ressonante e o laço de *anti-windup* estático podem ser escritos como

$$\dot{\xi}(t) = A_\xi \xi(t) + B_\xi e(t) + B_\xi E_c (\text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)),\tag{104}$$



onde  $A_\xi$  e  $B_\xi$  são definidos por (23).

Com o objetivo de introduzir o controlador ressonante na malha de controle é considerado o vetor de estados aumentados

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p_0}.$$

A partir de (102) e (104) segue que

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})z(t) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_2(\text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)) + \mathbf{B}_q q(t), \quad (105)$$

onde  $q(t) = [r^T(t) \ d^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{p+l}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times p_0} \\ -B_\xi C & A_\xi \end{bmatrix}, \Delta\mathbf{A} = \mathbf{H}\Xi\mathbf{E}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{p1} \\ B_\xi H_{p2} \end{bmatrix}, \mathbf{E}^T = \begin{bmatrix} E_p^T \\ 0_{n \times p_0}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{p_0 \times m} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \mathbf{V}E_c, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ B_\xi \end{bmatrix}, \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & B_d \\ B_\xi & 0_{p_0 \times l} \end{bmatrix}.$$

Partindo do pressuposto que todos estados estão disponíveis, é introduzida a realimentação do estado aumentado  $u(t) = Fz(t)$ ,  $F \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)}$  com o objetivo de estabilizar o sistema (105). Esta escolha particular de controlador leva ao sistema em malha fechada descrito por

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)z(t) - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\Psi_{u_0}(Fz(t)) + \mathbf{B}_q q(t). \quad (106)$$

## A.2 Resultado principal

O teorema a seguir apresenta um condição para a determinação dos ganhos  $F$  e  $E_c$  de tal forma que o Problema 1 seja resolvido.

**Teorema 11** *Se existirem matrizes  $W \in \mathbb{R}^{(n+p_0) \times (n+p_0)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$  simétricas definidas positivas, matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_0)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , uma matriz  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva e escalares positivos  $\lambda$ ,  $\eta$  e  $\nu$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} He\{\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y\} + \bar{\lambda}W + \nu\mathbf{H}\mathbf{H}^T & W\mathbf{E}^T & -\mathbf{B}_1 L - \mathbf{V}M + X^T & \mathbf{B}_q \\ * & -\nu I & 0 & 0 \\ * & * & -2L & 0 \\ * & * & * & -\lambda R \end{bmatrix} < \mathbb{0} \quad (107)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{(i)} - X_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (108)$$

$$\begin{bmatrix} \eta W & * \\ Y_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (109)$$

onde  $\bar{\lambda} = \lambda(-1 + 3\eta)$ , então os ganhos  $F = YW^{-1}$  e  $E_c = ML^{-1}$  são tais que todas as trajetórias de (106) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  tendem para o conjunto  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(F, u_0)$  em um tempo finito  $t_1$  e permanecem neste conjunto  $\forall t \geq t_1$ , desde que as referências e perturbações sejam tais que  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

*Prova.* Considerando  $\mathbb{A} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$  e calculando a derivada temporal da função de Lyapunov candidata  $V(z(t)) = z(t)^T P z(t)$  ao longo das trajetórias do sistema (106), segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= z(t)^T ((\mathbb{A} + \mathbf{B}_1 F)^T P + P(\mathbb{A} + \mathbf{B}_1 F)) z(t) + 2z(t)^T P \mathbf{B}_q q \\ &\quad - 2z(t)^T P (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \Psi_{u_0}(Fz(t)) \end{aligned}$$

Baseado nos resultados de (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005) apresentados na Seção 2.2.2.2, se  $z \in S(F - G, u_0)$ , então  $\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T [\Psi_{u_0}(Fz(t)) - Gz(t)] \leq 0$  é verificada para qualquer matriz  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva. Logo, se

$$\dot{V}(z(t)) - 2\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T \Psi_{u_0}(Fz(t)) + 2\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T Gz(t) < 0,$$

então  $\dot{V}(z(t)) < 0$  desde que  $z(t) \in S(F - G, u_0)$ .

Para garantir que as trajetórias do sistema iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem para  $\Omega(\eta P, 1)$  em um tempo finito  $t_1$  e permaneçam neste conjunto  $\forall t \geq t_1$ , necessita-se que  $\dot{V}(z(t)) < 0$  seja garantido para todo  $z(t)$  e  $q(t)$  tais que  $z(t)^T P z(t) \leq 1$  (i.e.,  $z(t)$  dentro de  $\Omega(P, 1)$ ),  $z(t)^T \eta P z(t) \geq 1$  (i.e.,  $z(t)$  fora de  $\Omega(\eta P, 1)$ ) e  $q(t)^T R q(t) \leq 1$  (i.e.,  $q(t)$  dentro de  $\Omega(R, 1)$ ). Utilizando o *S-procedure* (BOYD et al., 1994), isto pode ser obtido se existir o escalar positivo  $\lambda$ , tal que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &- 2\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T (\Psi_{u_0}(Fz(t)) - Gz(t)) + \lambda(1 - z(t)^T P z(t)) \\ &+ 3\lambda(z(t)^T \eta P z(t) - 1) + \lambda(1 - q(t)^T R q(t)) < 0, \end{aligned} \quad (110)$$

$$\Omega(P, 1) \in S(F - G, u_0). \quad (111)$$

Logo, escrevendo o lado direito de (110) na forma

$$\begin{bmatrix} z(t)^T & \Psi_{u_0}(Fz(t))^T & q^T \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} z(t) \\ \Psi_{u_0}(Fz(t)) \\ q \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} He\{P(\mathbb{A} + \mathbf{B}_1 F)\} - \lambda(1 - 3\eta)P & -P(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) + G^T T & P \mathbf{B}_q \\ * & -2T & 0 \\ * & * & -\lambda R \end{bmatrix},$$

então é suficiente  $\mathcal{M} < 0$  para que (110) seja verificada. Pré- e pós-multiplicando  $\mathcal{M}$  por  $diag\{P^{-1}, T^{-1}, I\}$  e realizando as mudanças de variáveis  $W = P^{-1}$ ,  $J = \eta P$ ,  $X = GP^{-1}$ ,  $Y = FP^{-1}$ ,  $L = T^{-1}$  e  $M = E_c T^{-1}$  segue que

$$\bar{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} He\{(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})W + \mathbf{B}_1 Y\} + \bar{\lambda}W & -\mathbf{B}_1 L - \mathbf{V}M + X^T & \mathbf{B}_q \\ * & -2L & 0 \\ * & * & -\lambda R \end{bmatrix}.$$

Considerando ainda  $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{H}\Xi\mathbf{E}$ , então tem-se que a relação  $W\mathbf{E}^T\Xi\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\Xi\mathbf{E}W \leq \nu\mathbf{H}\mathbf{H}^T + \nu^{-1}W\mathbf{E}^T\mathbf{E}W$  é verificada (ver (MAHMOUD, 2000)). Logo, através do complemento de Schur, segue que (107) implica em  $\mathcal{M} < 0$  de tal forma que (110) é verificada.

A satisfação de (108) implica que  $\Omega(P, 1)$  está no interior da região  $S(F - G, u_0)$ . Logo, a partir dos resultados de (GOMES DA SILVA JR; TARBOURIECH, 2005), para todo  $z(t) \in \Omega(P, 1)$  segue que a não-linearidade  $\Psi_{u_0}(Fz(t))$  satisfaz a condição de setor

modificada  $\Psi_{u_0}(Fz(t))^T T [\Psi_{u_0}(Fz(t)) - Gz(t)] \leq 0$ . Este fato, em conjunto com (107), implica que existe um escalar  $\mu > 0$  tal que a relação

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\mu V(z(t)) < 0,$$

é garantida  $\forall z(t) \in \Phi = \{z \in \mathfrak{R}^{n+p_0}; z^T P z \leq 1, z^T J z \geq 1\}$  e  $\forall q(t) \in q(t)^T R q(t) \leq 1$ . Desta forma,  $V(z(t)) \leq e^{-\mu t} V(z(0))$ ,  $\forall z(0) \in \Phi$  e  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ . Como  $J = \eta P$ , então existe um valor de tempo  $t = t_1$  o qual  $V(z(t_1)) = \frac{1}{\eta}$ , i.e.,  $z(t_1)^T \eta P z(t_1) = 1$ . Além disso, como  $\dot{V}(z(t)) < 0$  é verificada na superfície de  $\Omega(J, 1)$ , tem-se que todas as trajetórias entram em  $\Omega(J, 1)$  e permanecem em seu interior,  $\forall t \geq t_1$ . Finalmente, a relação (109) implica que  $\Omega(J, 1)$  está no interior da região de operação linear  $S(F, u_0)$ .

■

Exemplos numéricos relativos aos resultados apresentados neste apêndice e sua extensão para os controladores repetitivos foram previamente publicados em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009) e (FLORES et al., 2010a).