

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Complexos Elípticos e Teoria de Hodge

Dissertação de Mestrado

JONIER AMARAL ANTUNES

Porto Alegre, 2 de Julho de 2012

Dissertação submetida por Jonier Amaral Antunes¹ como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha (PPG-MAT - UFRGS)

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPG-MAT - UFRGS)

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera (PPG-MAT - UFRGS)

Prof. Dr. Leonardo Fernandes Guidi (PPG-MAP - UFRGS)

¹Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Для S.R.C., моя любовь

„Vielleicht in den meisten Fällen, wo wir die Antwort auf eine Frage vergeblich suchen, liegt die Ursache des Mißlingens darin, daß wir einfachere und leichtere Probleme als das vorgelegte noch nicht oder noch unvollkommen erledigt haben. Es kommt dann Alles darauf an, diese leichteren Probleme aufzufinden und ihre Lösung mit möglichst vollkommenen Hilfsmitteln und durch verallgemeinerungsfähige Begriffe zu bewerkstelligen.“

D. Hilbert

(Trecho de seu discurso no Congresso Internacional de Matemáticos
Paris, 1900)

Agradecimentos

Pela minha formação acadêmica, agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul e aos diversos professores dos Institutos de Física e Matemática que conduziram meus primeiros passos no caminho que sigo hoje, em direção a tornar-me um pesquisador. Agradeço também a bolsa fornecida pelo CNPq que possibilitou a realização do meu mestrado.

Sou muito grato a todos os amigos e familiares que me auxiliaram e desafiaram, contribuindo para meu desenvolvimento. Deste grupo, algumas pessoas requerem agradecimento especial: os grandes amigos que fiz na física, por compartilharem excitações e frustrações, sem os quais eu provavelmente teria abandonado o meio científico; o grupo dos geômetras, organizado pelo professor Jaime Ripoll, que me acolheram com braços abertos quando decidi me aventurar na matemática; meus pais, por terem sido sempre uma fonte de segurança e estabilidade em minha vida e meu irmão, Dinler, por ter sido indubitavelmente a maior influência no surgimento de minha paixão pela pesquisa.

Por todo o auxílio na produção desta dissertação em particular, agradeço aos meus amigos e colegas de trabalho professor Luiz Fernando e Vinícius, que são as pessoas que me ensinaram a maior parte do que sei de matemática atualmente, além de terem proporcionado ótimas conversas sobre a estrutura do universo, o papel da matemática e sua organização, o futuro da ciência, entre outros.

Resumo

Este trabalho apresenta os conceitos envolvidos na definição de um complexo elíptico sobre uma variedade compacta M e desenvolve a teoria de Hodge neste complexo. O principal resultado em questão é o teorema de Hodge. No caso mais simples, dados dois fibrados vetoriais $E \rightarrow M$, $F \rightarrow M$ e um operador diferencial elíptico $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$, agindo nas seções destes fibrados, o teorema de Hodge garante que a dimensão de seu núcleo $\mathfrak{N}(L)$ é finita e que podemos decompor

$$\Gamma(E) = \mathfrak{N}(L) \oplus \mathfrak{Im}(L^*),$$

onde $\mathfrak{Im}(L^*)$ é a imagem da adjunta de L . Para a demonstração apresentada aqui, são empregadas as propriedades dos espaços de Sobolev $\mathcal{H}_m(E)$ das seções de E . Certa ênfase é dada na obtenção de propriedades globais a partir de resultados locais.

Abstract

This work presents concepts involved in the definition of an elliptic complex on a compact manifold M and develops the Hodge theory over this complex. The main result at hand is the Hodge theorem. In the simplest case, given two vector bundles $E \rightarrow M$, $F \rightarrow M$ and an elliptic differential operator $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$, acting on sections of these bundles, the Hodge theorem ensures that the dimension of its kernel $\mathfrak{N}(L)$ is finite and that we can decompose

$$\Gamma(E) = \mathfrak{N}(L) \oplus \mathfrak{Im}(L^*),$$

where $\mathfrak{Im}(L^*)$ is the range of the adjoint of L . In the proof presented here, we employ properties of the Sobolev spaces $\mathcal{H}_m(E)$ of sections of E . We give an emphasis to obtaining global properties from local results.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 3 |
| 1 Preliminares | 6 |
| 1.1 Notação | 6 |
| 1.2 Funções Suaves | 7 |
| 1.3 A Classe de Schwartz | 8 |
| 1.4 A Transformada de Fourier | 10 |
| 1.5 Variedades Diferenciáveis | 11 |
| 1.6 Fibrados Vetoriais | 12 |
| 1.7 Complexos de Cadeias | 14 |
| 2 Análise Local | 16 |
| 2.1 Espaços de Sobolev | 16 |
| 2.1.1 Operadores Diferenciais em \mathcal{H}_m | 18 |
| 2.1.2 Teorema de Sobolev | 20 |
| 2.1.3 Teorema de Rellich | 22 |
| 2.2 Operadores Elípticos | 24 |
| 2.2.1 Desigualdade a Priori | 25 |
| 2.2.2 Regularidade de Soluções | 32 |
| 3 Teorema de Hodge | 37 |
| 3.1 Espaços de Sobolev em Fibrados | 37 |
| 3.1.1 Restrições Locais e Definição | 37 |
| 3.1.2 Equivalência de Normas em $\mathcal{H}_m(E)$ | 39 |
| 3.1.3 Teorema de Rellich Global | 42 |
| 3.2 Operadores Elípticos em Fibrados | 43 |
| 3.2.1 Símbolos de Operadores Diferenciais | 43 |
| 3.2.2 Operadores Elípticos em $\mathcal{H}_m(E)$ | 48 |
| 3.3 Complexos Elípticos | 50 |
| 3.3.1 Laplacianos de um Complexo Elíptico | 51 |

| | | |
|-------|--|-----------|
| 3.3.2 | Teorema da Decomposição | 53 |
| 3.4 | Algumas Aplicações | 56 |
| 3.4.1 | Complexo de de Rham | 56 |
| 3.4.2 | Teorema da Assinatura | 62 |
| 3.4.3 | O Índice de um Complexo Elíptico | 65 |
| | Referências Bibliográficas | 68 |

Introdução

Os diversos objetos empregados em matemática são usualmente organizados em categorias naturais distintas, com eventuais níveis hierárquicos que caracterizam uma determinada área de estudos.

Dessa maneira, temos, por exemplo, conjuntos numéricos, grupos, módulos e homomorfismos identificando diretamente a Álgebra. De interesse da Análise, temos funções em abertos de \mathbb{R}^n com alguma classe de regularidade, os espaços formados por essas funções e operadores diferenciais aí agindo. O estudo de variedades, invariantes de espaços topológicos e deformações contínuas caracterizam a Topologia.

Entretanto, podemos citar muitos resultados que ultrapassaram alguns desses níveis e cuja descoberta refletiu-se no desenvolvimento de áreas integradoras de conceitos anteriormente independentes, como Geometria Algébrica, Topologia Algébrica e Topologia Diferencial.

Dentre estes, destacam-se teoremas como o de Riemann-Roch, relacionando a dimensão do espaço das funções meromorfas à topologia da superfície de Riemann onde estão definidas, e o teorema de Hirzebruch, que relaciona a assinatura de uma variedade à integral de uma classe característica sobre a variedade (ambos descritos em [10]).

Mais surpreendente ainda foi a generalização destas proposições sob a forma do interessante Teorema do Índice, primeiramente demonstrado por Michael Atiyah e Isadore Singer em 1963 ([9] e [10]). Ele expressa a igualdade entre uma propriedade analítica de um operador diferencial elíptico (o índice analítico) e a integral de classes características associadas a seu símbolo (o chamado índice topológico do operador).

Além de unificar tantos conceitos e resultados, o teorema do índice apresenta diversas ramificações, incluindo aplicações à física de partículas (por exemplo, [13]).

O índice de um operador diferencial L é a diferença entre as dimensões dos

núcleos de L e de seu adjunto L^* :

$$\text{Ind}(L) = \dim[\mathfrak{N}(L)] - \dim[\mathfrak{N}(L^*)]$$

Logo, para que o índice exista, estes espaços devem ter dimensão finita. Assim, a primeira exigência para que o teorema de Atiyah-Singer faça sentido é a existência de um índice para operadores elípticos. Esta condição é assegurada pelo teorema de Hodge, objeto de estudo principal desta dissertação.

Em sua forma mais simples, o teorema de Hodge afirma que, dado um operador elíptico $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ agindo sobre as funções diferenciáveis definidas em uma variedade compacta M , então os núcleos $\mathfrak{N}(L)$ e $\mathfrak{N}(L^*)$ são espaços vetoriais de dimensão finita. Além disso, existe uma decomposição ortogonal

$$C^\infty(M) = \mathfrak{N}(L) \oplus \mathfrak{Im}(L^*).$$

Este teorema está diretamente associado à equação diferencial

$$L^*u = f.$$

A primeira parte garante que, caso existam, as soluções formam um espaço afim de dimensão finita, igual a $\dim[\mathfrak{N}(L^*)]$. Para ver isso, basta perceber que se u_0 é solução, então todas as soluções são da forma $u_0 + v$, com $v \in \mathfrak{N}(L^*)$, devido à linearidade do operador.

Já a decomposição assegura uma condição necessária e suficiente para que existam tais soluções. Especificamente:

$$\exists u \text{ tal que } L^*u = f \iff f \in \mathfrak{Im}(L^*) \iff f \perp \mathfrak{N}(L)$$

No caso mais geral, o teorema afirma resultados análogos, substituindo funções por seções de fibrados vetoriais e operadores elípticos por laplacianos de complexos elípticos, como será apresentado adiante.

Obter resultados sobre operadores diferenciais em variedades, inevitavelmente, requer estender resultados locais (isto é, que valem em abertos de \mathbb{R}^n) para versões globais, sobre toda a variedade. Essa passagem exige o domínio de manipulação de ferramentas tanto analíticas quanto topológicas.

Assim, é natural que, ao escrever sobre o assunto, autores com maior familiaridade ou interesse em algum aspecto específico não se preocupem em ressaltar ou explorar sutilezas referentes a outras áreas.

O presente trabalho assume a proposta de ser uma introdução aos belos resultados acima discutidos, apresentando uma demonstração do Teorema de Hodge

com certo grau de detalhamento. Espera-se que nuances da obtenção dos resultados globais a partir dos locais fiquem devidamente esclarecidas.

No Capítulo 1, temos uma breve descrição das definições e propriedades que supõe-se previamente conhecidas. No capítulo 2, apresentamos os resultados locais que serão posteriormente utilizados, a saber, alguns teoremas sobre espaços de Sobolev e operadores elípticos em \mathbb{R}^n . No capítulo 3, estendemos as propriedades locais para uma variedade compacta. Ainda neste capítulo encontra-se a demonstração do Teorema de Hodge, seguida de algumas aplicações e discussão final.

A estrutura principal da demonstração do teorema de Hodge se assemelha a que pode ser vista em [1], com maior distinção na globalização de resultados locais. Os resultados locais são típicos de livros de equações diferenciais parciais, podendo ser encontrados em [4] e [5]. Alguns trechos específicos e parte da notação são baseados em [3] e os exemplos ao fim do Capítulo 3 são apresentados como em [2].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo descrevemos alguns objetos cujas propriedades básicas são empregadas em todo o trabalho, estabelecendo, também, a notação utilizada. Os resultados aqui apresentados devem ser entendidos como pré-requisitos, cujas demonstrações em detalhe podem ser encontradas nas referências bibliográficas correspondentes.

1.1 Notação

Ao longo do texto serão adotadas notações que priorizam a simplicidade da escrita, naturalmente permitindo interpretações incorretas, principalmente quando comparadas a outros trabalhos em áreas relacionadas. Fica aqui estabelecido seu uso específico.

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n . Representamos o produto interno canônico de \mathbb{R}^n e a norma associada por:

$$xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \quad \text{e} \quad |x| = (xx)^{1/2}$$

Analogamente, em \mathbb{C}^k adotamos a notação:

$$\bar{z}w = \bar{z}_1w_1 + \dots + \bar{z}_kw_k \quad \text{e} \quad |z| = (\bar{z}z)^{1/2},$$

na qual $\bar{z}_j \in \mathbb{C}$ é o número complexo conjugado a $z_j \in \mathbb{C}$.

Tanto em \mathbb{R}^n quanto em \mathbb{N}^n , expressamos os elementos da base canônica por $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $1 \leq j \leq n$, com apenas a j -ésima componente não-nula e igual a 1.

Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n = \{0, 1, \dots\}^n$, definimos os números inteiros

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \text{e} \quad \alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

e associados a α , denotamos, para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{e} \quad D^\alpha := (-i)^{|\alpha|} (\partial_1)^{\alpha_1} \dots (\partial_n)^{\alpha_n},$$

onde ∂_j é o operador derivada parcial na direção e_j e o imaginário puro $i \in \mathbb{C}$ foi acrescentado ao operador diferencial D^α com objetivo de simplificar a expressão para a transformada de Fourier da derivada (1.5). Assim, por exemplo, $D^{e_j} = -i\partial_j$.

Atribuímos ao espaço \mathbb{N}^n uma ordem parcial \leq dada por

$$\alpha \leq \beta \quad \iff \quad \alpha_l \leq \beta_l \quad 1 \leq l \leq n$$

e estendemos a notação de coeficiente binomial da seguinte forma: sejam α e β multi-índices tais que $\alpha \geq \beta$ e $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq |\alpha|$, então

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} \quad \text{e} \quad \binom{j}{\alpha} = \frac{j!}{\alpha!}.$$

Para ilustrar o emprego de multi-índices, temos a fórmula da expansão multinomial:

$$\left(\sum_{l=1}^k z_l \right)^j = \sum_{|\alpha|=j} \binom{j}{\alpha} z^\alpha, \quad (1.1)$$

onde $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$.

Denotaremos, ainda, a bola aberta de raio R e centro y por $B_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < R\}$ e a esfera $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$.

Quando estivermos trabalhando com desigualdades para fazer estimativas, os coeficientes envolvidos que não dependam das variáveis em questão serão aglutinados e sempre escreveremos C para representar qualquer combinação de constantes positivas. Assim, por exemplo,

$$f(x) \leq Cg(x) \text{ e } g(x) \leq Ch(x) \implies f(x) \leq Ch(x).$$

1.2 Funções Suaves

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por $C^l(U)$ o conjunto das funções l vezes diferenciáveis $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que as derivadas $(\partial_1)^{\alpha_1} \dots (\partial_n)^{\alpha_n} f$ sejam contínuas para quaisquer multi-índices $|\alpha| \leq l$.

Estaremos principalmente interessados nas funções l vezes diferenciáveis $u = (u_1, \dots, u_k) : U \rightarrow \mathbb{C}^k$. Neste caso,

$$u \in C^l(U, \mathbb{C}^k) \iff D^\alpha u := (D^\alpha u_1, \dots, D^\alpha u_k) \text{ é contínua } \forall |\alpha| \leq l.$$

Nos dois casos, denominamos *função suave*, com imagem em \mathbb{R} ou \mathbb{C}^k , um elemento de $C^\infty(U) := \bigcap_l C^l(U)$ ou de $C^\infty(U, \mathbb{C}^k) := \bigcap_l C^l(U, \mathbb{C}^k)$, respectivamente.

Empregando a notação da seção anterior, dadas $f, g \in C^\infty(U)$ e $u, v \in C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ temos a regra de Leibnitz:

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\beta f D^\gamma g, \quad (1.2)$$

a partir da qual podemos demonstrar as duas outras versões

$$D^\alpha(fu) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\beta f D^\gamma u$$

$$D^\alpha(\bar{u}v) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (-1)^{|\beta|} \overline{D^\beta u} D^\gamma v.$$

Basta aplicar (1.2) para as componentes $f u_j$ e $\bar{u}_j v_j$, observando que $D^\beta \bar{u}_j = (-1)^{|\beta|} \overline{D^\beta u_j} = (-1)^{|\beta|} \overline{(D^\beta u)_j}$.

No subespaço de $C^0(U, \mathbb{C}^k)$ dado pelas funções limitadas, temos a norma do supremo:

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

Podemos estender essa definição para o subespaço de $C^l(U, \mathbb{C}^k)$ no qual

$$\|u\|_{\infty, l} := \sup_{x \in U} \sum_{|\beta| \leq l} |D^\beta u(x)|$$

é finito.

Se U é um domínio (aberto conexo), toda sequência $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C^l(U, \mathbb{C}^k)$ que seja de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{\infty, l}$ converge para um elemento $u \in C^l(U, \mathbb{C}^k)$. Ou seja, o subespaço de $C^l(U, \mathbb{C}^k)$ onde $\|\cdot\|_{\infty, l}$ está definido é completo na norma $\|\cdot\|_{\infty, l}$. Isto acontece, pois se uma sequência de funções diferenciáveis e suas derivadas convergem uniformemente, então a derivada do limite das funções existe e é igual a função limite das derivadas, como pode ser encontrado no capítulo V, seção 6, de [6].

1.3 A Classe de Schwartz

Definição 1.1. *Denominamos Classe de Schwartz \mathcal{S} , o espaço vetorial das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ suaves, tais que, dados multi-índices α e β , exista uma constante*

$C = C(\alpha, \beta)$ que faça valer

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Isto é, todas as derivadas de f decrescem mais rapidamente que qualquer polinômio.

No caso mais geral, definimos o conjunto

$$\mathcal{S}^k := \{u = (u_1, \dots, u_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^k \mid u_i \in \mathcal{S}\}.$$

O suporte de uma função real é o fecho do conjunto de pontos nos quais a função é diferente de zero. Denotamos o conjunto das funções suaves com suporte compacto em \mathbb{R}^n por $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. É fácil ver que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$, pois multiplicar por polinômios e derivadas só diminui o suporte.

Por outro lado, considere os espaços L^p , das funções mensuráveis f tais que

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Tomando, em (1.3), $\beta = 0$ e escolhendo, no lugar de x^α , um polinômio adequado, por exemplo $(1 + |x|^2)^{s/p}$, $2s > n$, mostra-se que $\mathcal{S} \subset L^p$. O raciocínio envolve o seguinte cálculo, que será útil posteriormente:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^s} &= \int_{B_R(0)} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^s} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^s} \\ &= C + \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_R^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(1 + r^2)^s} \leq C \int_R^\infty \frac{dr}{r^{2s-n+1}} < \infty. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A última integral converge para todo $R > 0$, pois $2s - n + 1 > 1$.

A convolução entre duas funções $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy.$$

A primeira aplicação interessante da classe de Schwartz é o seguinte resultado, que representa a relevância da convolução em Análise:

Lema 1.2. *Se $f \in L^p$ ($1 \leq p \leq \infty$), e $g \in \mathcal{S}$, então para qualquer multi-índice α , $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$.*

A demonstração envolve limitar $D^\alpha g$ pela inversa de um polinômio adequado, de forma que a integral da convolução convirja uniformemente, comutando assim com a derivada. Ela pode ser encontrada no Capítulo 0 de [4].

A classe de Schwartz também é o ambiente natural para se desenvolver a Transformada de Fourier.

1.4 A Transformada de Fourier

Definição 1.3. A uma função $f \in \mathcal{S}$ associamos sua Transformada de Fourier, $\mathcal{F}(f) := \hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, via

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

Se $u \in \mathcal{S}^k$ definimos $\hat{u} := (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_k)$.

Utilizaremos a transformada de Fourier como uma ferramenta para limitar derivadas, nos valendo de suas principais características, listadas no seguinte lema.

Lema 1.4. A transformada de Fourier é um isomorfismo linear de \mathcal{S} em \mathcal{S} com as propriedades:

(a) Transformada da derivada: Seja $X^\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ o operador multiplicação, $(X^\alpha f)(x) = x^\alpha f(x)$. Então,

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \quad e \quad \widehat{X^\alpha f}(\xi) = (-1)^\alpha D^\alpha \hat{f}(\xi). \quad (1.5)$$

(b) Fórmula da Inversão:

$$f(x) = \mathcal{F}(\hat{f})(-x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} f(y) dy d\xi. \quad (1.6)$$

(c) Transformada do produto: $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}$.

(d) Teorema de Plancherel: $\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2}$.

A propriedade (a) garante que \mathcal{F} leva \mathcal{S} em \mathcal{S} , podendo ser demonstrada via integração por partes e o teorema da convergência dominada. A fórmula da inversão (b) mostra que \mathcal{F} é, de fato, um isomorfismo. Utilizando-se (b) e o Teorema de Fubini, demonstra-se (c) e (d). Demonstrações em detalhes podem ser encontradas em [5] (na seção 4.3) e com mesma notação adotada aqui em [3] (§1.1).

Os itens (a) e (b) do Lema 1.4 se aplicam diretamente para funções $u \in \mathcal{S}^k$, pois valem para cada coordenada u_j . Para estender (c), podemos tomar uma das funções em \mathcal{S}^k e aplicar multiplicação e convolução em cada coordenada, assim

$$\widehat{fu} = (\widehat{fu}_1, \dots, \widehat{fu}_k) = (2\pi)^{-n/2} (\hat{f} * \hat{u}_1, \dots, \hat{f} * \hat{u}_k) =: (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{u}.$$

Quanto a (d), basta tomar o produto interno em L^2 das funções com imagem em \mathbb{C}^k , utilizando o produto hermitiano canônico de \mathbb{C}^k :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(x)v(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_i(x)v_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{u}}_i(\xi)\hat{v}_i(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{u}}(\xi)\hat{v}(\xi) d\xi = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

1.5 Variedades Diferenciáveis

Um *atlas* sobre um espaço topológico X é uma coleção de sistemas de coordenadas locais $\{x_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n \mid U_\lambda \text{ aberto}\}$, tal que $\bigcup_\lambda U_\lambda = X$.

Definição 1.5. *Uma Variedade Diferenciável de dimensão n é um espaço topológico, M , de Hausdorff, com base enumerável e munido de um atlas $\{x_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ tal que as mudanças de coordenadas $x_\lambda \circ x_\mu^{-1} : x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ são difeomorfismos.*

Nesta dissertação, trabalharemos com variedades C^∞ , isto é, tais que as mudanças de coordenadas são suaves.

As condições topológicas impostas nesta definição, isto é, que M seja de Hausdorff com base enumerável, são fundamentais, pois garantem a existência de partições da unidade (estritamente) subordinadas a qualquer cobertura por abertos.

Mais especificamente, dada uma cobertura aberta $\{U_\lambda\}$ de M , existe uma família de funções suaves $\{\varphi_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ tais que:

- 1) para cada λ , $\varphi_\lambda \geq 0$ e o suporte de φ_λ está contido em U_λ ;
- 2) para todo $p \in M$, existe uma vizinhança V de p tal que apenas uma quantidade finita de φ_λ 's tem suporte intersectando V ;
- 3) para qualquer $p \in M$, temos $\sum_\lambda \varphi_\lambda(p) = 1$. Devido a (2), faz sentido falarmos na soma $\sum_\lambda \varphi_\lambda(p)$, pois ela envolve, em cada ponto, uma quantidade finita de termos não nulos.

A prova da existência de partições da unidade suaves baseia-se em obter um refinamento $\{U_l\}$ da cobertura dada, formado por domínios de sistemas de coordenadas $x_l : U_l \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $x_l(U_l) = B_3(0)$ e a família $\{x_l^{-1}(B_1(0))\}$ cobre M . Ou seja, cobrimos a variedade com sistemas de coordenadas na bola de raio 1 de \mathbb{R}^n , de forma que podemos estender as aplicações para uma vizinhança com imagem na bola de raio 3. Neste caso, as partições da unidade são construídas com auxílio de uma função de classe C^∞ que vale 1 na bola $B_1(0)$ e 0 fora de $B_2(0)$.

Essas construções serão utilizadas no capítulo 3 e podem ser vistas em detalhes, com todas as demonstrações necessárias, no capítulo VIII de [8].

Partições da unidade são as ferramentas básicas para a construção de objetos em variedades, como campos de vetores não triviais e métricas riemannianas.

Uma construção elementar sobre uma variedade diferencial é o *fibrado tangente* associado a ela. Isto é, a cada ponto de uma variedade $p \in M$, olhamos para o conjunto TM_p das classes de equivalência de curvas passando por p , onde a equivalência entre duas curvas ocorre quando os vetores tangentes das imagens das curvas por um sistema de coordenadas são iguais em \mathbb{R}^n . Podemos atribuir a TM_p uma estrutura de \mathbb{R} -espaço vetorial n -dimensional que independe do sistema de coordenadas. A união $TM = \bigcup_{p \in M} TM_p$ denominamos fibrado tangente de M .

O fibrado tangente, contudo, é apenas um exemplo particular de fibrado vetorial sobre uma variedade M .

1.6 Fibrados Vetoriais

Definição 1.6. Um Fibrado Vetorial de dimensão k é uma aplicação $\pi : E \rightarrow M$ entre as variedades diferenciáveis E e M , tal que exista uma cobertura de M por abertos $\{U_\lambda\}$ e difeomorfismos $h_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times \mathbb{C}^k$ que façam comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\lambda) & \xrightarrow{h_\lambda} & U_\lambda \times \mathbb{C}^k \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & U_\lambda & \end{array}$$

No diagrama, $\pi_1(p, z) = p$. Além disso, exige-se que as mudanças de coordenadas

$$h_\lambda \circ h_\mu^{-1} : (U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{C}^k \rightarrow (U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{C}^k$$

sejam da forma $h_\lambda \circ h_\mu^{-1}(p, z) = (p, g_{\lambda\mu}(p)z)$, onde as funções de transição $g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL(\mathbb{C}^k)$ são suaves.

Denominamos, na definição acima, E o *espaço total* e M o *espaço base*, mas por simplicidade de notação vamos nos referir usualmente a E como um fibrado sobre M . Denotamos por $E_p := \pi^{-1}(p)$ a *fibra* sobre o ponto p . Podemos atribuir uma estrutura de \mathbb{C} -espaço vetorial com dimensão k a cada fibra E_p , utilizando uma trivialização local h_λ e a estrutura de espaço vetorial de \mathbb{C}^k . A condição sobre a forma da mudança de coordenadas $h_\lambda \circ h_\mu^{-1}$ garante que essa estrutura

independe da trivialização escolhida. Dessa forma, a aplicação linear invertível $g_{\lambda\mu}(p) \in GL(\mathbb{C}^k)$ basicamente representa a mudança de base em E_p correspondente à mudança de coordenadas $h_\lambda \circ h_\mu^{-1}$ em M .

Podemos fazer a definição acima na categoria dos espaços topológicos e funções contínuas sem supor que os conjuntos são variedades e que as aplicações são suaves, mas essa generalização não nos interessa aqui.

Entendemos por *homomorfismo* entre os fibrados $\pi : E \rightarrow M$ e $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$ uma função diferenciável $h : E \rightarrow \tilde{E}$ que faz comutar o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & \tilde{E} \\ & \searrow \pi & \swarrow \tilde{\pi} \\ & & M \end{array}$$

e tal que a restrição a cada fibra $h|_{E_p} : E_p \rightarrow \tilde{E}_p$ é uma aplicação linear. Quando h é ainda um difeomorfismo e cada restrição $h|_{E_p}$ é um isomorfismo linear, dizemos que h é um *isomorfismo* de fibrados.

Uma seção do fibrado $\pi : E \rightarrow M$ é uma função $s : M \rightarrow E$ tal que

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow s & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

comuta. Ou seja, s atribui a cada ponto $p \in M$ um vetor $s(p) \in E_p$. Denotamos o espaço de todas as seções suaves de um fibrado E por $\Gamma(E)$. Naturalmente, $\Gamma(E)$ é um espaço vetorial com respeito a soma e multiplicação por escalar ponto a ponto (a seção nula está bem definida, pois as mudanças de coordenadas são lineares).

O exemplo mais elementar de fibrado é o fibrado trivial $M \times \mathbb{C}^k \rightarrow M$, com projeção $(p, z) \mapsto p$. Neste caso, $\Gamma(E)$ se identifica com o espaço das funções suaves de M em \mathbb{C}^k . Quando um fibrado $E \rightarrow M$ é isomorfo ao fibrado $M \times \mathbb{C}^k \rightarrow M$ ele é denominado trivial. Como para qualquer fibrado as trivializações locais $h_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times \mathbb{C}^k$ são, por definição, isomorfismos de fibrados, segue que cada fibrado $\pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda$ é trivial.

O já citado fibrado tangente TM , com fibra TM_p sobre o ponto $p \in M$, é um fibrado vetorial real de mesma dimensão da variedade M . As trivializações locais são dadas por coordenadas locais e suas derivadas, $(p, v) \mapsto (x_\lambda(p), Dx_\lambda(p)v)$ de forma que temos as funções de transição $g_{\lambda\mu}(p) = D(x_\lambda \circ x_\mu^{-1})(p)$. Cada seção de TM é chamada de campo de vetores tangentes a M .

Um exemplo mais interessante, trata-se da *álgebra exterior*. Seja TM_p^* o dual ao espaço tangente no ponto p e considere a álgebra tensorial $\mathcal{T}(TM_p^*)$, isto é, a álgebra livre gerada pelos vetores cotangentes no ponto p . Sendo $\{dx^j\}_{j=1}^n$ uma base de TM_p^* dada por um sistema de coordenadas em p , $\mathcal{T}(TM_p^*)$ é gerado por expressões do tipo $dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}$. Podemos quocientar a álgebra tensorial pelo ideal gerado por elementos do tipo $\omega \otimes \omega$ e obter a álgebra exterior no ponto p , $\Lambda(TM_p)$. Dessa forma, $\Lambda(TM_p)$ é gerado por expressões como $dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$, sujeitas a relações de linearidade e anticomutatividade. Escreveremos também $dx^\gamma = (dx^1)^{\gamma_1} \wedge \cdots \wedge (dx^n)^{\gamma_n}$, onde subentende-se que $(dx^j)^0 = 1$ e $(dx^j)^l = 0$ sempre que $l > 1$.

Atribui-se à união $\Lambda(M) := \bigcup_{p \in M} \Lambda(TM_p)$ uma estrutura natural de fibrado vetorial real com dimensão 2^n . O espaço das seções suaves deste fibrado, denotado $\Omega(M) := \Gamma(\Lambda(M))$ é conhecido como a álgebra das formas diferenciais em M . Podemos obter uma decomposição $\Lambda(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(M)$, onde cada subfibrado $\Lambda^k(M)$ com dimensão $\binom{n}{k}$ é gerado localmente por combinações de tamanho, k , ou seja, temos uma base local $\{dx^\gamma \mid |\gamma| = k\}$. Neste caso, o espaço das seções suaves é denotado por $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(M))$, conhecido como o conjunto das k -formas diferenciais em M .

A construção da álgebra das formas diferenciais, bem como suas propriedades, pode ser encontrada em livros básicos de geometria diferencial, por exemplo [11].

Uma *Métrica Hermitiana* no fibrado $\pi : E \rightarrow M$, é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ atribui em E_p uma forma bilinear com imagem em \mathbb{C} , antilinear na primeira entrada, positivo definida, isto é, um produto hermitiano. A existência de uma métrica hermitiana em qualquer fibrado, decorre do fato de que podemos atribuir uma métrica hermitiana em cada aberto U_λ via trivializações locais, utilizando o produto hermitiano canônico de \mathbb{C}^k . Cada uma dessas métricas locais se estende suavemente para toda a variedade se a multiplicarmos por uma função suave que vá a zero fora do respectivo aberto U_λ . Uma métrica global pode ser definida como a soma das métricas locais com auxílio de uma partição da unidade adequada.

1.7 Complexos de Cadeias

A álgebra das formas diferenciais $\Omega(M)$ tem uma estrutura mais fina que a apresentada anteriormente, dada pelo operador derivada exterior $d^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$.

Em coordenadas locais, uma k -forma se escreve como:

$$\omega(p) = \sum_{|\gamma|=k} w_\gamma(p) dx^\gamma.$$

Neste caso, a derivada exterior é dada pela $(k + 1)$ -forma:

$$d^k \omega(p) = \sum_{|\gamma|=k} \sum_{j=1}^n \partial_j w_\gamma(p) dx^j \wedge dx^\gamma.$$

Percebe-se, imediatamente, que d^k é linear. Como as derivadas segundas comutam, $\partial_j \partial_l w_\gamma = \partial_l \partial_j w_\gamma$, e o produto exterior é alternado, $dx^j \wedge dx^l = -dx^l \wedge dx^j$ segue que $d^{k+1} \circ d^k = 0$.

Assim, temos a sequência de espaços vetoriais e operadores lineares

$$\dots \rightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{d^k} \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \dots$$

tais que a imagem de uma aplicação está contida no núcleo da seguinte: $\mathfrak{Im}(d^{k-1}) \subset \mathfrak{N}(d^k)$. Essa sequência é conhecida como *Complexo de de Rham* e trata-se de um particular complexo de cocadeias.

Definição 1.7. Um Complexo de Cadeias $(C_\bullet, \delta_\bullet)$ é uma sequência de módulos ligados por homomorfismos de módulos

$$\dots \leftarrow C^{k-2} \xleftarrow{\delta_{k-1}} C^{k-1} \xleftarrow{\delta_k} C^k \xleftarrow{\delta_{k+1}} C^{k+1} \leftarrow \dots$$

tais que $\delta_k \circ \delta_{k+1} = 0$. O conceito dual, um Complexo de Cocadeias (C^\bullet, d^\bullet) é uma sequência de módulos com homomorfismos

$$\dots \rightarrow C^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} C^k \xrightarrow{d^k} C^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} C^{k+2} \rightarrow \dots$$

tais que $d^k \circ d^{k-1} = 0$.

Associado a um complexo de cadeias $(C_\bullet, \delta_\bullet)$ temos o seu k -ésimo grupo de homologia, definido como o quociente:

$$H_k(C_\bullet, \delta_\bullet) := \mathfrak{N}(\delta_k) / \mathfrak{Im}(\delta_{k+1}).$$

Analogamente, definimos o k -ésimo grupo de cohomologia de um complexo de cocadeias (C^\bullet, d^\bullet) por:

$$H^k(C^\bullet, d^\bullet) := \mathfrak{N}(d^k) / \mathfrak{Im}(d^{k-1}).$$

Quando os módulos de um complexo de (co)cadeias são espaços vetoriais, os grupos de (co)homologia também o são. Este é o caso no complexo de de Rham, para o qual temos os espaços de cohomologia associados $H_{dR}^k(M)$, que denominamos a cohomologia de de Rham da variedade M . A cohomologia de de Rham de uma variedade é um importante invariante topológico, associado, por exemplo, a condições de integrabilidade de certas equações diferenciais.

Se certo complexo de cocadeias é composto de espaços de seções em fibrados vetoriais e os homomorfismos são operadores diferenciais, dizemos que é um *complexo diferencial*.

Capítulo 2

Análise Local

Apresentamos, aqui, as propriedades locais dos objetos de interesse deste trabalho. Mais especificamente, introduzimos o conceito local de Operador Diferencial Elíptico, para o qual vale o teorema de Hodge.

Inicialmente, definimos espaços de Sobolev, para onde estenderemos a atuação dos operadores, pois suas propriedades serão de extrema utilidade.

De particular importância, ressaltamos o Teorema de Rellich, sobre a compacidade da inclusão de espaços de Sobolev, e a Desigualdade a Priori, com a qual percebe-se a vantagem de trabalharmos com os operadores elípticos nestes espaços.

Para empregarmos os resultados locais nos teoremas apresentados no Capítulo 3, poderemos tomar condições bem restritas sobre os abertos e as funções neles definidas. Dessa forma, não priorizamos, neste capítulo, maior generalidade.

2.1 Espaços de Sobolev

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $C^\infty(U; \mathbb{C}^k)$ o espaço vetorial das funções suaves $u : U \rightarrow \mathbb{C}^k$. Definimos em $C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ a norma $\|\cdot\|_m$ por

$$\|u\|_m^2 := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_U \left| D^\alpha u(x) \right|^2 dx. \quad (2.1)$$

Note que o lado direito da igualdade acima, quando é finito, é meramente a soma dos quadrados da norma $L^2(U)$ das funções $D^\alpha u$. Decorre que (2.1) determina uma norma no subespaço de $C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ onde está definida. Em particular, é uma norma no espaço $C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ das funções suaves com suporte compacto em U .

Definição 2.1. Denotamos por $\mathcal{H}_m(U)$ o completamento, na norma $\|\cdot\|_m$, do

supespaço de $C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ para o qual (2.1) está definida. $\mathcal{H}_m(U)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m sobre U .

O completamento de $C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ com a norma $\|\cdot\|_m$ é um subespaço de $\mathcal{H}_m(U)$ que será denotado por $\mathcal{H}_m^0(U)$.

Segue desta definição que $\mathcal{H}_m(U)$ e $\mathcal{H}_m^0(U)$ são espaços de Hilbert com respeito ao produto interno

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_U \overline{D^\alpha u(x)} D^\alpha v(x) dx.$$

Caso $u \in \mathcal{H}_m(U) \cap C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$, então $u \in \mathcal{H}_{m-1}(U)$ pois a soma em (2.1) para $\|u\|_{m-1}$ exclui os termos com $|\alpha| = m$, sendo menor que $\|u\|_m$. Consequentemente, existe uma constante C tal que $\|u\|_{m-1} \leq C\|u\|_m$ para qualquer $u \in \mathcal{H}_m(U)$, ou seja, a inclusão $\mathcal{H}_m(U) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(U)$ é contínua.

Iremos obter uma definição equivalente para a norma $\|\cdot\|_m$, mais natural para se trabalhar com estimativas. Intuitivamente, ela apenas descreve o fato de que controlar a m -ésima derivada de uma função u é equivalente a controlar sua transformada de Fourier \hat{u} , vezes um polinômio de grau m .

Proposição 2.2. *Seja $\|\cdot\|'_m$ a aplicação definida no espaço de Schwartz \mathcal{S}^k por*

$$\|u\|'_m{}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.2)$$

Então, existem constantes c e C tal que para qualquer $u \in C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ com $\|u\|'_m < \infty$, vale

$$c\|u\|'_m \leq \|u\|_m \leq C\|u\|'_m \quad (2.3)$$

e, portanto, $\|\cdot\|'_m$ define uma norma em $\mathcal{H}_m^0(U)$ equivalente a $\|\cdot\|_m$.

Observação. A fim de aplicarmos a transformada de Fourier em elementos de $C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k)$, identificamos aqui as inclusões

$$C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k) \subset \mathcal{S}^k,$$

estendendo uma função $u \in C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ como zero fora de U .

Demonstração. Devido às propriedades da transformada de Fourier (Lema 1.4), temos

$$\begin{aligned} \|u\|_m^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_U |D^\alpha u(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\widehat{D^\alpha u}\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

de forma que basta mostrar que existem constantes c e C , tais que

$$c(1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq C(1 + |\xi|^2)^m. \quad (2.4)$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 &= \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} |\xi_1^{\alpha_1}|^2 \cdots |\xi_n^{\alpha_n}|^2 \leq \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \binom{j}{\alpha} (\xi_1^2)^{\alpha_1} \cdots (\xi_n^2)^{\alpha_n} \\ &\leq \sum_{j=0}^m |\xi|^{2j} \leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |\xi|^{2j} = (1 + |\xi|^2)^m, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde utilizamos a expansão multinomial (1.1) e o fato que qualquer coeficiente binomial é maior ou igual a 1, portanto podemos multiplicar cada termo pelo coeficiente desejado, aumentando o resultado da soma.

Analogamente, do outro lado,

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^m &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |\xi|^{2j} \leq m! \sum_{j=0}^m \left(\sum_{l=1}^n \xi_l^2 \right)^j \\ &\leq m! \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \binom{j}{\alpha} (\xi_1^2)^{\alpha_1} \cdots (\xi_n^2)^{\alpha_n} \leq m! \sum_{j=0}^m j! \sum_{|\alpha|=j} |\xi_1^{\alpha_1}|^2 \cdots |\xi_n^{\alpha_n}|^2 \\ &\leq (m!)^2 \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} |\xi^\alpha|^2 = (m!)^2 \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2, \end{aligned}$$

de onde seguem (2.4) e a proposição. □

2.1.1 Operadores Diferenciais em \mathcal{H}_m

Mostraremos, a seguir, que operadores diferenciais agindo em $C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ podem ser estendidos como operadores contínuos sobre $\mathcal{H}_m(U)$.

Seja $\mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$ o espaço dos operadores lineares de \mathbb{C}^k em \mathbb{C}^k . Dado $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$, escreveremos $TD^\beta : C^\infty(U, \mathbb{C}^k) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ para representar a aplicação que leva $u \in C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ na função

$$(TD^\beta u)(x) := T(D^\beta u(x)).$$

Considere agora aplicações lineares dependentes de x . Isto é, funções $a : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$. Neste caso, dada $u \in C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ denotamos por $aD^\beta u$ a função

$$(aD^\beta u)(x) := a(x)(D^\beta u(x)).$$

Fica subentendido, quando necessário, o isomorfismo $\mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k) \approx \mathbb{C}^{k^2}$, transportando todas as definições que fizemos em \mathbb{C}^{k^2} para as lineares.

Seja U aberto limitado. Um operador diferencial de ordem r é uma aplicação da forma

$$L = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta D^\beta : C^\infty(U, \mathbb{C}^k) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C}^k),$$

com a_β suave. Dizemos que L está definido em uma vizinhança do fecho de U , que denotaremos \bar{U} , quando as aplicações $a_\beta : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$, se estendem suavemente para uma vizinhança de \bar{U} . Isto é, quando forem restrições de aplicações suaves de \mathbb{R}^n em \mathbb{C}^k .

Proposição 2.3. *Nas condições descritas acima, se U for limitado, L se estende como um operador contínuo $L : \mathcal{H}_m(U) \rightarrow \mathcal{H}_{m-r}(U)$ para qualquer $m \geq r$.*

Demonstração. Como as funções a_β estendem-se suavemente para uma vizinhança de \bar{U} , então todas as suas derivadas são contínuas em \bar{U} , que é compacto. Logo, existe uma cota M tal que $|D^\alpha a_\beta(x)| \leq M$ para quaisquer multi-índices $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq r$ e $x \in U$.

Se $u \in \mathcal{H}_m(U) \cap C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$, então

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{m-r}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m-r} \int_U \left| D^\alpha \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta(x) D^\beta u(x) \right|^2 dx \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m-r} \sum_{|\beta| \leq r} \int_U \left| D^\alpha (a_\beta D^\beta u)(x) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

onde usamos que, dado $N \in \mathbb{N}$, para qualquer conjunto $\{v_j \in \mathbb{C}^k \mid 1 \leq j \leq N\}$ de N vetores em \mathbb{C}^k temos

$$\left| \sum_{j=1}^N v_j \right|^2 \leq N \sum_{j=1}^N |v_j|^2, \quad (2.6)$$

uma vez que, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz duas vezes:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^N v_j \right|^2 &= \sum_{j,l=1}^N \bar{v}_j v_l \leq \sum_{j,l=1}^N |v_j| |v_l| = \left(\sum_{j=1}^N |v_j| \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{l=1}^N 1^2 \right) \left(\sum_{j=1}^N |v_j|^2 \right) = N \sum_{j=1}^N |v_j|^2. \end{aligned}$$

Assim, pela regra de Leibnitz (1.2)

$$\begin{aligned}
\|Lu\|_{m-r}^2 &\leq C \sum_{|\alpha|\leq m-r} \sum_{|\beta|\leq r} \int_U \left| \sum_{\gamma+\eta=\alpha} \binom{\alpha}{\eta} D^\gamma a_\beta(x) D^\eta D^\beta u(x) \right|^2 dx \\
&\leq C \sum_{|\alpha|\leq m-r} \sum_{|\beta|\leq r} \sum_{\gamma+\eta=\alpha} \int_U |D^\gamma a_\beta(x) D^{\beta+\eta} u(x)|^2 dx \\
&\leq C \sum_{|\alpha|\leq m-r} \sum_{|\beta|\leq r} \sum_{\eta\leq\alpha} M^2 \int_U |D^{\beta+\eta} u(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

Nas somas acima, $|\beta| \leq r$ e $|\eta| \leq |\alpha| \leq m - r$, dessa maneira, $|\beta + \eta| \leq m$, o que implica

$$\|Lu\|_{m-r}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \int_U |D^\alpha u(x)|^2 dx = C \|u\|_m^2 \quad (2.7)$$

e a constante final $C = C(L, U, m)$ não depende da função u .

Dado um elemento $u \in \mathcal{H}_m(U)$, existe uma seqüência de Cauchy de funções suaves $\{u_j\}_{j=1}^\infty$, convergindo a u na norma $\|\cdot\|_m$. Mas, devido a (2.7), $\{Lu_j\}_{j=1}^\infty$ é de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{m-r}$, portanto converge para um elemento $Lu \in \mathcal{H}_{m-r}(U)$. \square

2.1.2 Teorema de Sobolev

Veremos agora o que os espaços de Sobolev impõem sobre a diferenciabilidade de seus elementos.

Teorema 2.4 (Sobolev). *Seja U um domínio (aberto conexo). Para qualquer $l \in \mathbb{N}$ satisfazendo $l < m - n/2$ temos que $\mathcal{H}_m^0(U) \subset C^l(U)$.*

Demonstração. Considere, inicialmente, $u \in C_c^\infty(U) \subset \mathcal{S}^k$. Então, pela fórmula da inversão (1.6)

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left| (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi) d\xi \right| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-l}{2}} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{m-l}{2}} |\hat{u}(\xi)| d\xi
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz juntamente com a norma equivalente de Sobolev dada pela expressão (2.2) temos

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m-l} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-m+l} d\xi \right) \\ &\leq C \|u\|_{m-l}^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-m+l} d\xi \leq C \|u\|_{m-l}^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A integral na última linha é limitada, como mostramos anteriormente, escolhendo $s = m - l$ na desigualdade (1.4). Observe que $2s = 2(m - l) > n$.

Como u é arbitrária, podemos aplicar a desigualdade anterior em $D^\beta u, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$. Segue-se que

$$|D^\beta u(x)| \leq C \|D^\beta u\|_{m-l} \leq C \|u\|_{m-l+|\beta|} \leq C \|u\|_m$$

sempre que $|\beta| \leq l$, portanto:

$$\|u\|_{\infty, l} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\beta| \leq l} |D^\beta u(x)| \leq C \|u\|_m \quad (2.9)$$

Isto significa que uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_m$, é também de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{\infty, l}$, portanto convergente para uma função em $C^l(U)$ (conforme discutido na §1.2). □

Como consequência do teorema de Sobolev, temos o seguinte resultado, de verificação imediata.

Corolário 2.5. *Se uma função $u : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ pertence a $\mathcal{H}_m^0(U)$ para qualquer m , então u é suave. Ou seja,*

$$\bigcap_m \mathcal{H}_m^0(U) \subset C^\infty(U).$$

O teorema acima também vale em $\mathcal{H}_m(U)$, o que podemos obter observando que diferenciabilidade é uma característica local. Mais especificamente, basta multiplicar $u \in \mathcal{H}_m(U)$ por uma função localizadora ϕ com suporte na vizinhança de um ponto, de forma que $\phi u \in \mathcal{H}_m^0(U)$. Esse raciocínio será desenvolvido com mais detalhe no Teorema 2.13.

2.1.3 Teorema de Rellich

Para o próximo resultado, precisaremos de mais uma relação e um lema.

Existe uma constante C tal que dados ξ e η arbitrários em \mathbb{R}^n ,

$$1 + |\xi|^2 \leq C(1 + |\xi - \eta|^2)(1 + |\eta|^2) \quad (2.10)$$

Para verificar essa desigualdade, veja que, da desigualdade triangular

$$|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|.$$

e da inequação (2.6) segue

$$|\xi|^2 \leq (|\xi - \eta| + |\eta|)^2 \leq 2(|\xi - \eta|^2 + |\eta|^2).$$

Obtemos finalmente,

$$1 + |\xi|^2 \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2) \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2|\eta|^2).$$

Mas o lado direito da desigualdade acima é exatamente o lado direito de (2.10) com $C = 2$.

Lema 2.6 (Arzelà-Ascoli). *Seja $\{u_j\}_{j=0}^\infty \subset C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$ uma sequência uniformemente limitada de funções, isto é, $|u_j| \leq M, \forall j \in \mathbb{N}$, tais que suas derivadas primeiras também formam uma sequência uniformemente limitada $\{\partial_i u_j\}_{j=0}^\infty$. Então, existe uma subsequência $\{u_{j_i}\}_{i=0}^\infty \subset \{u_j\}_{j=0}^\infty$ e uma função contínua u , tal que $u_{j_i} \rightarrow u$ uniformemente em compactos de \mathbb{R}^n .*

Este lema é um resultado clássico em análise. A prova baseia-se em mostrar que a limitação uniforme das derivadas implica, pelo teorema do valor médio, a *equicontinuidade* da sequência $\{u_j\}_{j=0}^\infty$. Isto é, dado $x \in U$ e $\varepsilon > 0$ o teorema do valor médio garante que, para y suficientemente próximo a x e qualquer $j \in \mathbb{N}$:

$$|u_j(y) - u_j(x)| \leq \sup_i \sup_{t \in [0,1]} \{|\partial_i u_j(x + t(y-x))|\} |y-x| < \varepsilon.$$

Então, o lema segue do fato de que uma sequência limitada e equicontínua de funções admite subsequência convergente em compactos. O resultado pode ser visto em livros de espaços métricos, como no capítulo 9, seção 7, de [7].

Teorema 2.7 (Rellich). *Dados um aberto limitado U e uma sequência de funções $\{u_j\}_{j=0}^\infty \in \mathcal{H}_m^0(U)$, uniformemente limitada na norma $\|\cdot\|_m$, então existe uma subsequência $\{u_{j_i}\}_{i=0}^\infty \subset \{u_j\}_{j=0}^\infty$ convergente na norma $\|\cdot\|_{m-1}$. Ou seja, a inclusão $\mathcal{H}_m^0(U) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-1}^0(U)$ é um operador compacto.*

Demonstração. Como U é limitado, podemos tomar um elemento $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\phi|_U \equiv 1$. Então, estendendo as funções como zero fora de U , temos $u_j = \phi u_j$ e, pelo Lema 1.4

$$\hat{u}_j = (2\pi)^{-n/2} \hat{\phi} * \hat{u}_j.$$

Segue-se que

$$|\hat{u}_j(\xi)| \leq C \int |\hat{\phi}(\xi - \eta)| |\hat{u}_j(\eta)| d\eta,$$

de onde, por (2.10) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^{m/2} |\hat{u}_j(\xi)| &\leq C \int (1 + |\xi - \eta|^2)^{m/2} |\hat{\phi}(\xi - \eta)| (1 + |\eta|^2)^{m/2} |\hat{u}_j(\eta)| d\eta \\ &\leq C \left(\int (1 + |\eta|^2)^m |\hat{\phi}(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \left(\int (1 + |\eta|^2)^m |\hat{u}_j(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \\ &\leq C \|\phi\|_m \|u_j\|_m \leq C \end{aligned}$$

Devido ao Lema 1.2 sabemos que $\partial_i \hat{u}_j = (2\pi)^{-n/2} \partial_i \hat{\phi} * \hat{u}_j$. Analogamente à estimativa anterior, obtemos

$$(1 + |\xi|^2)^{m/2} |\partial_i \hat{u}_j(\xi)| \leq C \left\| \widehat{\partial_i \phi} \right\|_m \|u_j\|_m = C \|X_i \phi\|_m \|u_j\|_m \leq C,$$

onde foi usado o fato que $X_i \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dessa forma, as sequências \hat{u}_j e $\partial_i \hat{u}_j$ são uniformemente limitadas. Portanto, podemos empregar o teorema de Arzelà-Ascoli, (Lema 2.6), e obter uma subsequência $\{\hat{u}_{j_l}\}_{l=0}^\infty$ que convirja uniformemente em compactos.

Afirmamos que $\{u_{j_l}\}_{l=0}^\infty$ converge na norma $\|\cdot\|_{m-1}$. Para ver isso, basta notar que para qualquer $R > 0$,

$$\begin{aligned} \|u_{j_i} - u_{j_s}\|_{m-1}^2 &= \int_{B_R(0)} (1 + |\xi|^2)^{m-1} |(\hat{u}_{j_i} - \hat{u}_{j_s})(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} (1 + |\xi|^2)^m (1 + |\xi|^2)^{-1} |(\hat{u}_{j_i} - \hat{u}_{j_s})(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{B_R(0)} |\hat{u}_{j_i} - \hat{u}_{j_s}|^2 \int_{B_R(0)} (1 + |\xi|^2)^{m-1} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{1 + R^2} \|u_{j_i} - u_{j_s}\|_m^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Na última desigualdade utilizamos que $|\xi| \geq R \Rightarrow (1 + |\xi|^2)^{-1} \leq (1 + R^2)^{-1}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, toma $R > 0$ tal que $1 + R^2 \geq 8M/\varepsilon$, onde $M \geq \|u_j\|_m^2, \forall j$. Fixado R , temos que $\{\hat{u}_{j_l}\}_{l=0}^\infty$ converge uniformemente no compacto $B_R(0)$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$i, s > N \implies \sup_{B_R(0)} |\hat{u}_{j_i} - \hat{u}_{j_s}|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2 \int_{B_R(0)} (1 + |\xi|^2)^{m-1} d\xi}.$$

Logo,

$$\|u_{j_i} - u_{j_s}\|_{m-1}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \frac{2(\|u_{j_i}\|^2 + \|u_{j_s}\|^2)}{8M} \leq \varepsilon. \quad (2.12)$$

□

2.2 Operadores Elípticos

A partir de agora, trabalharemos sempre em um aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^n$, com operadores diferenciais definidos em uma vizinhança de \bar{U} . Como dito anteriormente (§2.1.1), isto significa que, se o operador L é dado por

$$L = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta D^\beta : C^\infty(U, \mathbb{C}^k) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C}^k),$$

então as funções a_β se estendem suavemente e, nestas condições, a Proposição 2.3 garante que $L : \mathcal{H}_m(U) \rightarrow \mathcal{H}_{m-r}(U)$ é contínuo para qualquer $m \geq r$.

Definição 2.8. *Um operador diferencial $L = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta D^\beta$ é denominado Operador Elíptico em U se, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$ e para todo $x \in U$, a aplicação linear*

$$\sum_{|\beta|=r} a_\beta(x) \xi^\beta : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$$

é invertível.

A função definida em U , polinomial em $\xi \in \mathbb{R}^n$ e com imagem em $\mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$, dada por $\sigma_L(\xi) = \sum_{|\beta|=r} a_\beta \xi^\beta$ é chamada de *Símbolo Principal* do operador L .

A definição de operador elíptico aqui apresentada estende o conceito bem conhecido de elipticidade quando $a_\beta : U \rightarrow \mathbb{C}$. Neste caso, um operador é elíptico se para todo $x \in U$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ seu símbolo principal é não nulo. Este, por sua vez, generaliza o operador laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^n (\partial_j)^2$, que é o arquétipo de operador elíptico.

Quando $|\beta| = 2$, podemos dizer que $\beta = e_i + e_j \in \mathbb{N}^n, 1 \leq i, j \leq n$. Neste caso, tomando $a_\beta(x) = \delta_{ij} I_k$, onde $I_k : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ é a identidade, temos que

$$-\Delta = \sum_{|\beta|=2} a_\beta D^\beta.$$

Decorre trivialmente que $\sigma_\Delta(\xi) = -|\xi|^2 I_k$ é invertível, de forma que o laplaciano permanece elíptico perante a definição 2.8.

2.2.1 Desigualdade a Priori

Nos encaminhamos, agora, para obter a Desigualdade a Priori (teorema 2.11), cuja demonstração dependerá de versões mais restritas, a serem apresentadas previamente.

Proposição 2.9 (Coeficientes constantes). *Seja $L = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta D^\beta$ um operador elíptico com coeficientes a_β constantes e ordem r . Então, dado $m \geq r$ existe uma constante $C = C(L)$ tal que para qualquer $u \in \mathcal{S}^k$*

$$\|u\|_m \leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}) \quad (2.13)$$

Demonstração. Seja $L_0 = \sum_{|\beta|=r} a_\beta D^\beta$, a parte que contém os termos de maior grau. Observe que $\forall u \in \mathcal{S}^k$,

$$\widehat{L_0 u}(\xi) = \sum_{|\beta|=r} a_\beta \widehat{D^\beta u}(\xi) = \left(\sum_{|\beta|=r} a_\beta \xi^\beta \right) \hat{u}(\xi).$$

Por outro lado, a elipticidade de L garante que para qualquer $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, $|\sigma_L(\xi)| \neq 0$, de forma que temos o ínfimo não-nulo

$$0 < A := \inf_{|\xi|=1} |\sigma_L(\xi)|,$$

logo, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$A|\xi|^r \leq \left| \sum_{|\beta|=r} a_\beta \xi^\beta \right|.$$

Acima, o símbolo pode ser considerado em qualquer ponto $x \in U$, pois é constante. Obtivemos, dessa forma,

$$A|\xi|^r |\hat{u}(\xi)| \leq \left| \widehat{L_0 u}(\xi) \right|. \quad (2.14)$$

Como $|\xi| \leq 1 \Rightarrow (1 + |\xi|^2)^r \leq 2^r$ e $1 \leq |\xi| \Rightarrow (1 + |\xi|^2)^r \leq 2^r |\xi|^{2r}$, temos também que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} (1 + |\xi|^2)^{m-r} (1 + |\xi|^2)^r |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{B_1(0)} (1 + |\xi|^2)^{m-r} (1 + |\xi|^2)^r |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} (1 + |\xi|^2)^{m-r} (2^r |\xi|^{2r}) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{B_1(0)} (1 + |\xi|^2)^{m-r} (2^r) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Estes integrandos são sempre positivos, de forma que as integrais dentro e fora da bola $B_1(0)$ são menores que as integrais em todo \mathbb{R}^n . Assim, aplicando a desigualdade (2.14),

$$\begin{aligned}
\|u\|_m^2 &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m-r} |\widehat{L_0 u}(\xi)|^2 d\xi + \|u\|_{m-r}^2 \right) \\
&\leq C(\|L_0 u\|_{m-r}^2 + \|u\|_{m-1}^2) \leq C(\|L_0 u\|_{m-r} + \|u\|_{m-1})^2,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

na qual usamos que a inclusão $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-r}(\mathbb{R}^n)$ é contínua, ou seja, $\|u\|_{m-r} \leq C\|u\|_{m-1}$. Para obtermos a desigualdade procurada, basta comparar L_0 com L :

$$\begin{aligned}
\|u\|_m &\leq C(\|Lu + (L_0 - L)u\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}) \\
&\leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|(L - L_0)u\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}),
\end{aligned}$$

mas $L - L_0 = \sum_{|\beta| \leq r-1} a_\beta D^\beta$ é um operador diferencial de ordem $r - 1$, logo induz uma aplicação contínua $L - L_0 : \mathcal{H}_{m-1}(U) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-r}(U)$. Ou seja,

$$\|(L - L_0)u\|_{m-r} \leq C\|u\|_{m-1},$$

de onde segue (2.13). □

Antes de estendermos o resultado para operadores com coeficientes variáveis para qualquer aberto U , vamos obtê-lo em bolas com raio pequeno, onde é mais fácil fazer comparações com um operador constante.

A partir de agora a transformada de Fourier deixa de ser uma ferramenta adequada, pois, ao contrário de operadores diferenciais com coeficientes constantes, transformar um operador qualquer não resulta em uma aplicação simples, como a multiplicação por um polinômio.

Proposição 2.10 (Vizinhança de um ponto). *Seja L elíptico em uma vizinhança de \bar{U} , com U aberto convexo e limitado. Então, dados $m \geq r$ e qualquer $p \in U$ existe um raio $R > 0$ tal que para qualquer função suave $u : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ com suporte em $B_R(p)$ vale*

$$\|u\|_m \leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}) \quad (2.17)$$

e a constante $C = C(L, m, p)$ não depende de u .

Demonstração. A ideia, naturalmente, é comparar L com o operador elíptico de coeficientes constantes $L_p = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta(p) D^\beta$. Então, teremos que estimar o operador

$$L - L_p = \sum_{|\beta| \leq r} (a_\beta - a_\beta(p)) D^\beta.$$

Mas as funções suaves $a_\beta(x) - a_\beta(p)$ se anulam em $x = p$. Então, devido à convexidade do aberto, o teorema fundamental do cálculo nos permite escrever

$$a_\beta(x) - a_\beta(p) = \sum_{j=1}^n (x_j - p_j) A_\beta^j(x),$$

onde $A_\beta^j : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$ são suaves em uma vizinhança de \bar{U} . Logo, lembrando que X_j é o operador tal que $(X_j u)(x) = x_j u(x)$,

$$L - L_p = \sum_{i=1}^n (X_i - p_i) \left(\sum_{|\beta| \leq r} A_\beta^i D^\beta \right) = \sum_{i=1}^n (X_i - p_i) Q^i, \quad (2.18)$$

onde cada Q^i é um operador diferencial de ordem r .

Dados $R > 0$ qualquer e u suave com suporte em $B_R(p)$,

$$\begin{aligned} \|(X_i - p_i) Q^i u\|_{m-r}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m-r} \int_U \left| D^\alpha (X_i - p_i) Q^i u(x) \right|^2 dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m-r} \int_{B_R(p) \cap U} \left| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\beta (X_i - p_i) D^\gamma Q^i u \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Só que $D^\beta (X_i - p_i) \equiv 0$ exceto quando $\beta = e_i$ ou $\beta = 0$. O primeiro caso só ocorre se $e_i \leq \alpha$ e então temos $\gamma = \alpha - e_i$. O segundo implica $\gamma = \alpha$. Assim,

$$\begin{aligned} \|(X_i - p_i) Q^i u\|_{m-r}^2 &\leq C \left(\sum_{\substack{|\alpha| \leq m-r \\ e_i \leq \alpha}} \int_{B_R(p) \cap U} |D^{\alpha-e_i} Q^i u(x)|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m-r} \int_{B_R(p) \cap U} |x_i - p_i|^2 |D^\alpha Q^i u(x)|^2 dx \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

O primeiro termo do lado direito envolve as derivadas de $Q^i u$ apenas até a ordem $m - r - 1$, pois $|\alpha - e_i| = |\alpha| - 1$, então ele é menor que $\|Q^i u\|_{m-r-1}^2$. Para o segundo termo, como $x \in B_R(p) \implies |x_i - p_i| \leq R$, basta apenas estimar

$$\begin{aligned} |D^\alpha Q^i u(x)|^2 &= \left| \sum_{\eta+\lambda=\alpha} \binom{\alpha}{\lambda} \sum_{|\beta| \leq r} D^\eta A_\beta^i D^\beta D^\lambda u(x) \right|^2 \\ &\leq C \sum_{\eta+\lambda=\alpha} \sum_{|\beta| \leq r} |D^\eta A_\beta^i D^{\lambda+\beta} u(x)|^2. \end{aligned}$$

Contudo, as aplicações A_β^i são suaves numa vizinhança de \bar{U} , logo todas as suas derivadas estão limitadas em U . Decorre que

$$|D^\alpha Q^i u(x)|^2 \leq C \sum_{\eta+\lambda=\alpha} \sum_{|\beta| \leq r} |D^{\lambda+\beta} u(x)|^2.$$

Como, na inequação (2.19), $|\alpha| \leq m - r$, então

$$|\lambda + \beta| \leq |\eta + \lambda| + |\beta| \leq |\alpha| + r \leq m.$$

Portanto, a partir de (2.19),

$$\begin{aligned} \|(X_i - p_i)Q^i u\|_{m-r}^2 &\leq C \left(\|Q^i u\|_{m-r-1}^2 + R^2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{B_R(p) \cap U} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right) \\ &\leq C(\|u\|_{m-1}^2 + R^2 \|u\|_m^2) \end{aligned}$$

e, aplicando na igualdade (2.18),

$$\|(L - L_p)u\|_{m-r} \leq C(\|u\|_{m-1} + R\|u\|_m). \quad (2.20)$$

É importante perceber que a constante obtida com as contas acima não depende de R nem de u .

Aplicamos a estimativa (2.13) da proposição anterior ao operador elíptico de coeficientes constantes L_p ,

$$\begin{aligned} \|u\|_m &\leq C(\|L_p u\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}) \\ &\leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|(L - L_p)u\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}) \\ &\leq C(\|Lu\|_{m-r} + R\|u\|_m + \|u\|_{m-1}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Na última etapa, utilizamos a desigualdade (2.20). Dessa maneira, podemos obter $R \leq 1/(2C)$ tal que se u é uma função com suporte em $B_R(p)$ as contas acima implicam em

$$\|u\|_m \leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}) + 1/2\|u\|_m,$$

ou, equivalentemente,

$$1/2\|u\|_m \leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}), \quad (2.22)$$

que é a estimativa desejada. □

Teorema 2.11 (Desigualdade a Priori). *Seja U aberto convexo e limitado e L operador elíptico em uma vizinhança de \bar{U} . Então, existe uma constante $C = C(L, m)$, tal que*

$$\|u\|_m \leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}) \quad (2.23)$$

para qualquer u suave em uma vizinhança de \bar{U} .

Demonstração. Dados U e L , a coleção de abertos $\{B_R(p) \mid p \in U\}$, na qual $R = R(p)$ é determinado, pela proposição 2.10, é uma cobertura do fecho de U , que é compacto. Tomando uma subcobertura finita $\{B_R(p_j)\}$ e uma partição da unidade suave subordinada $\{\varphi_j\}$, temos que $u = \sum_j \varphi_j u$, onde o suporte da função suave $\varphi_j u$ está contido em $B_R(p_j)$.

Podemos, então, aplicar a desigualdade (2.17) para cada $\varphi_j u$, obtendo:

$$\|u\|_m \leq \sum_j \|\varphi_j u\|_m \leq C \sum_j (\|L(\varphi_j u)\|_{m-r} + \|\varphi_j u\|_{m-1}). \quad (2.24)$$

A constante C pode ser tomada como o máximo das constantes para cada j , pois temos uma quantidade finita delas. Estimaremos cada termo de (2.24) separadamente.

Fixado j , considere o comutador,

$$[L, \varphi_j] := L\varphi_j - \varphi_j L.$$

Afirmamos que $[L, \varphi_j]$ é um operador diferencial de grau $r - 1$. Basta ver que,

dada $u \in C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$,

$$\begin{aligned}
L(\varphi_j u)(x) &= \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta(x) D^\beta(\varphi_j u)(x) \\
&= \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta(x) \left(\sum_{\substack{\gamma+\eta=\beta \\ \gamma \neq 0}} \binom{\beta}{\eta} D^\gamma \varphi_j D^\eta u \right)(x) \\
&= \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta(x) \left(\varphi_j(x) D^\beta u(x) + \sum_{\substack{\gamma+\eta=\beta \\ \gamma \neq 0}} \binom{\beta}{\eta} D^\gamma \varphi_j(x) D^\eta u(x) \right) \quad (2.25) \\
&= \varphi_j(x) Lu(x) + \sum_{|\beta| \leq r} \sum_{\substack{\gamma+\eta=\beta \\ \gamma \neq 0}} \binom{\beta}{\eta} a_\beta(x) D^\gamma \varphi_j(x) D^\eta u(x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[L, \varphi_j]u(x) &= L(\varphi_j u)(x) - \varphi_j Lu(x) \\
&= \sum_{|\beta| \leq r} \sum_{\substack{\gamma+\eta=\beta \\ \gamma \neq 0}} \binom{\beta}{\eta} a_\beta D^\gamma \varphi_j D^\eta u(x).
\end{aligned}$$

Entretanto, nas somas acima, $|\beta| \leq r$ e $\gamma \neq 0$, logo $|\gamma| \geq 1$ e, assim, obtemos que o operador diferencial tem grau

$$|\eta| = |\beta| - |\gamma| \leq r - 1.$$

Concluimos, da proposição 2.3 que

$$\|[L, \varphi_j]u\|_{m-r} \leq C\|u\|_{m-1},$$

de onde

$$\begin{aligned}
\|L(\varphi_j u)\|_{m-r} &\leq \|\varphi_j Lu\|_{m-r} + \|[L, \varphi_j]u\|_{m-r} \\
&\leq \|\varphi_j Lu\|_{m-r} + C\|u\|_{m-1}.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Retomando a inequação (2.24), precisamos estimar o termo $\|\varphi_j u\|_{m-1}$. Observe que qualquer φ_j é suave com suporte compacto, logo, existe uma constante M tal que $|D^\eta \varphi_j| \leq M$ para qualquer $|\eta| \leq m - 1$.

Resta apenas calcular:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_j u\|_{m-1}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_U \left| D^\alpha \varphi_j u(x) \right|^2 dx \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_{B_R(p_j) \cap U} \left| \sum_{\eta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\eta \varphi_j D^\gamma u(x) \right|^2 dx \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_{\eta+\gamma=\alpha} \int_{B_R(p_j) \cap U} |D^\eta \varphi_j(x)|^2 |D^\gamma u(x)|^2 dx \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_{\eta+\gamma=\alpha} \int_U M^2 |D^\gamma u(x)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Na expressão acima, $|\gamma| \leq |\alpha| \leq m-1$, logo,

$$\|\varphi_j u\|_{m-1}^2 \leq C \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_U |D^\alpha u(x)|^2 dx = C \|u\|_{m-1}^2. \tag{2.28}$$

Exatamente o mesmo raciocínio pode ser aplicado com Lu no lugar de u . Segue de (2.26) que

$$\|L(\varphi_j u)\|_{m-r} \leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}). \tag{2.29}$$

Aplicando as estimativas (2.28) e (2.29) em (2.24) e tomando o máximo das constantes, obtemos finalmente

$$\|u\|_m \leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1}).$$

□

Observação. O teorema acima ainda se aplica caso tenhamos $u \in \mathcal{H}_m(U)$ que seja limite, na norma $\|\cdot\|_m$, de uma sequência $\{u_l\}_{l=0}^\infty$ de funções suaves em vizinhança de \bar{U} . Confirmamos esta afirmação aplicando a desigualdade a priori nas funções u_l , observando que

$$\begin{aligned}
\|u\|_m &\leq \|u - u_l\|_m + \|u_l\|_m \\
&\leq \|u - u_l\|_m + C(\|Lu_l\|_{m-r} + \|u_l\|_{m-1}) \\
&\leq \|u - u_l\|_m + C(\|L(u - u_l)\|_{m-r} + \|Lu\|_{m-r} + \|u - u_l\|_{m-1} + \|u\|_{m-1}) \\
&\leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1} + \|u - u_l\|_m).
\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $\varepsilon > 0$, escolhemos l tal que

$$\|u\|_m \leq C(\|Lu\|_{m-r} + \|u\|_{m-1} + \varepsilon), \tag{2.30}$$

que é equivalente à (2.23).

Em particular, a desigualdade a priori vale para qualquer $u \in \mathcal{H}_m^0(U)$.

2.2.2 Regularidade de Soluções

Obteremos, a seguir, uma das propriedades mais impressionantes dos operadores elípticos, a garantia de suavidade das soluções de equações do tipo $Lu = v$, com v suave.

Primeiramente, lembremos do resultado bem conhecido da teoria de equações diferenciais que garante que uma função $f \in C^2(U)$ harmônica, ou seja, que satisfaz $\Delta f = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f = 0$, é necessariamente $C^\infty(U)$. O teorema também vale para o caso que consideramos *soluções fracas* (aqui entendidas como elementos de $\mathcal{H}_m(U)$).

De fato, como veremos no teorema 2.13, o operador Δ também pode ser substituído por qualquer operador elíptico e a função nula por qualquer função suave e, ainda assim, a mesma regularidade estará garantida.

A técnica que utilizaremos (como em [4]) envolve uma caracterização de $\mathcal{H}_m^0(U)$ em termos de quocientes diferenciais, como apresentaremos agora.

Considere uma função $u : U \rightarrow \mathbb{C}^k$. Para cada $1 \leq j \leq n$ representamos da seguinte maneira o *quociente diferencial*:

$$\Delta_h^j u(x) := \frac{u(x + he_j) - u(x)}{h},$$

no qual $x \in U$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ são tais que $x + he_j \in U$.

Proposição 2.12. *Seja uma função $u \in \mathcal{H}_m^0(U)$. Então, $u \in \mathcal{H}_{m+1}^0(U)$ se, e somente se, $\forall j, 1 \leq j \leq n$,*

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^j u\|_m < \infty. \quad (2.31)$$

Observação. Como estamos trabalhando com funções que se anulam fora de U , a função $\Delta_h^j u(x)$ está definida para quaisquer $x \in U$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Basta supor $u(x + he_j) = 0$ sempre que $x + he_j \notin U$.

Relembrando a definição de limite superior para uma função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} f := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|h| \leq \varepsilon} \{f(h)\},$$

percebe-se que para a condição (2.31) ser satisfeita, é suficiente que as normas $\|\Delta_h^j u\|_m$ sejam uniformemente limitadas em h .

Demonstração. Antes de mais nada, vamos provar que

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^j u\|'_m = \|\partial_j u\|'_m. \quad (2.32)$$

Para tanto, veja que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta_h^j u)(\xi) &= \frac{1}{h} \left((2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-he_j)\xi} u(x) dx - \hat{u}(\xi) \right) = \frac{e^{ih\xi_j} - 1}{h} \hat{u}(\xi) \\ &= \frac{2ie^{ih\xi_j/2} \text{sen}(h\xi_j/2)}{h} \hat{u}(\xi),\end{aligned}$$

logo,

$$|\mathcal{F}(\Delta_h^j u)(\xi)| = 2 \left| \frac{\text{sen}(h\xi_j/2)}{h} \right| |\hat{u}(\xi)|.$$

Quando $h \rightarrow 0$ temos o limite clássico $2h^{-1}\text{sen}(h\xi_j/2) \rightarrow \xi_j$ de onde podemos facilmente ver que as funções $2|h^{-1}\text{sen}(h\xi_j/2)|$ são superiormente limitadas por $|\xi_j|$. Assim, caso a função

$$(1 + |\xi|^2)^m |\xi_j \hat{u}(\xi)|^2 = (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{\partial_j u}(\xi)|^2$$

seja integrável, isto é, se $\|\partial_j u\|'_m < \infty$, podemos aplicar o teorema da convergência dominada para obtermos:

$$\begin{aligned}\|\partial_j u\|_m'^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\xi_j \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m \lim_{h \rightarrow 0} 4 \left| \frac{\text{sen}(h\xi_j/2)}{h} \right|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\mathcal{F}(\Delta_h^j u)(\xi)|^2 d\xi = \limsup_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^j u\|_m'^2.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Caso contrário, $\|\partial_j u\|'_m = \infty$. Então, dado $N \in \mathbb{N}$, podemos tomar $R > 0$ tal que

$$\int_{B_R(0)} (1 + |\xi|^2)^m |\xi_j \hat{u}(\xi)|^2 d\xi > 4N.$$

Como $\text{sen}(x)/x \rightarrow 1$ para $x \rightarrow 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall |\xi| \leq R$ e $\forall |h| \leq \delta$,

$$2 \left| \frac{\text{sen}(h\xi_j/2)}{h} \right| \geq \frac{|\xi_j|}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^j u\|_m'^2 &\geq \int_{B_R(0)} (1 + |\xi|^2)^m 4 \left| \frac{\text{sen}(h\xi_j/2)}{h} \right|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{B_R(0)} (1 + |\xi|^2)^m |\xi_j|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi > N,\end{aligned}\tag{2.34}$$

de onde segue que $\limsup_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^j u\|'_m = \infty$ e em qualquer um dos casos asseguramos a igualdade (2.32). Agora podemos demonstrar a proposição.

Se $u \in \mathcal{H}_{m+1}^0(U)$, então

$$\begin{aligned} \|\partial_j u\|_m'^2 &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \int_U \left| D^\alpha \partial_j u(x) \right|^2 dx \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m+1} \int_U \left| D^\alpha u(x) \right|^2 dx = C \|u\|_{m+1}^2 < \infty. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Aplicando a relação (2.32), decorre (2.31).

Agora, se $\|\partial_j u\|'_m = \limsup_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^j u\|'_m < \infty$ para qualquer j , $0 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{m+1}'^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m+1} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m (1 + |\xi|^2) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|u\|_m'^2 + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\xi_j \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|u\|_m'^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_m'^2 < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $u \in \mathcal{H}_{m+1}^0(U)$. □

Teorema 2.13. *Considere uma função $u \in \mathcal{H}_m(U)$ em um aberto, $U \subset \mathbb{R}^n$, e um operador diferencial elíptico $L = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta D^\beta$, $r \leq m$, definido em alguma vizinhança de \bar{U} . Se $Lu \in C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$, então $u \in C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$.*

Demonstração. Como diferenciabilidade é um conceito local, mostraremos que, dado $p \in U$ e uma vizinhança de p convexa e conexa, $V \subset U$, tal que o fecho de V esteja contido em U , então $u|_V \in C^\infty(V, \mathbb{C}^k)$.

Sejam $p \in V \subset U$ como acima. Tome $\varphi \in C_c^\infty(U)$ tal que $\varphi \equiv 1$ em V . Considere a função $\varphi u : U \rightarrow \mathbb{C}^k$. Naturalmente, $(\varphi u)|_V = u$, portanto, basta mostrar que $\varphi u \in C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$.

Afirmamos que $\varphi u \in \mathcal{H}_m^0(U)$. Para confirmar, note que se $\{u_l\}_{l=0}^\infty \subset C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$ é uma sequência convergindo para u na norma $\|\cdot\|_m$, então $\{\varphi u_l\}_{l=0}^\infty \subset C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k)$

é uma sequência convergindo para φu na norma $\|\cdot\|_m$. Isto decorre da limitação de φ e todas suas derivadas, que implica em

$$\|\varphi u_l - \varphi u\|_m = \|\varphi(u_l - u)\|_m \leq C\|u_l - u\|_m.$$

Assim, poderemos aplicar a proposição 2.12, para mostrar que $\varphi u \in \mathcal{H}_{m+1}^0(U)$ caso consigamos limitar uniformemente $\|\Delta_h^j(\varphi u)\|_m$.

De acordo com a observação logo após o teorema 2.11, a desigualdade a priori (2.23) vale para a função $\Delta_h^j(\varphi u)$, de onde segue:

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^j(\varphi u)\|_m &\leq C(\|L\Delta_h^j(\varphi u)\|_{m-r} + \|\Delta_h^j(\varphi u)\|_{m-1}) \\ &\leq C(\|\Delta_h^j L(\varphi u)\|_{m-r} + \|[L, \Delta_h^j](\varphi u)\|_{m-r} + \|\Delta_h^j(\varphi u)\|_{m-1}), \end{aligned} \quad (2.36)$$

na qual utilizamos o comutador $[L, \Delta_h^j] = L\Delta_h^j - \Delta_h^j L$. Vamos analisar separadamente cada termo no lado direito da desigualdade acima.

No primeiro termo, aparece a função $L(\varphi u) = \varphi Lu + [L, \varphi]u$. Mas $Lu \in C^\infty(U, \mathbb{C}^k)$, logo $\varphi Lu \in C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k)$. Ao longo da prova do teorema 2.11, foi demonstrado que $[L, \varphi]$ é um operador de ordem $r-1$, então, se $u \in \mathcal{H}_m(U)$, segue que $[L, \varphi]u \in \mathcal{H}_{m-r+1}(U)$. Mais ainda, como φ e todas suas derivadas têm suporte compacto em U , temos que $[L, \varphi]u \in \mathcal{H}_{m-r+1}^0(U)$. Assim, $L(\varphi u) \in \mathcal{H}_{m-r+1}^0(U)$ e, pela proposição 2.12,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^j L(\varphi u)\|_{m-r} < \infty. \quad (2.37)$$

O segundo termo envolve o operador $[L, \Delta_h^j] = \sum_{|\beta| \leq r} [a_\beta, \Delta_h^j] D^\beta$, pois D^β e Δ_h^j comutam. De fato:

$$\begin{aligned} \Delta_h^j D^\beta u(x) &= \frac{D^\beta u(x + he_j) - D^\beta u(x)}{h} = D^\beta \frac{u(x + he_j) - u(x)}{h} \\ &= D^\beta \Delta_h^j u(x). \end{aligned}$$

Vejamus a atuação dos coeficientes $[a_\beta, \Delta_h^j]$ em uma função $v \in \mathcal{H}_{m-r}^0(U)$:

$$\begin{aligned} [a_\beta, \Delta_h^j]v(x) &= \frac{a_\beta(x)[v(x + he_j) - v(x)] - a_\beta(x + he_j)v(x + he_j) + a_\beta(x)v(x)}{h} \\ &= -\Delta_h^j a_\beta(x)v(x + he_j). \end{aligned}$$

Pela suavidade de a_β , no limite $h \rightarrow 0$ obtemos $\Delta_h^j a_\beta(x) \rightarrow \partial_j a_\beta(x)$. Observando também que a norma da função transladada $v(x + he_j)$ é igual a $\|v\|_{m-r}$, resulta que:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|[a_\beta, \Delta_h^j]v\|_{m-r} \leq C\|v\|_{m-r}.$$

Aqui, a constante está associada à limitação das derivadas de a_β . Fazendo agora $v = D^\beta \varphi u$, segue que:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|[L, \Delta_h^j](\varphi u)\|_{m-r} \leq C \sum_{|\beta| \leq r} \|D^\beta \varphi u\|_{m-r} \leq C \|\varphi u\|_m < \infty. \quad (2.38)$$

Por último, no terceiro termo do lado direito da desigualdade (2.36) aparece a função $\varphi u \in \mathcal{H}_m^0(U)$. Novamente, pela proposição 2.12:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^j(\varphi u)\|_{m-1} < \infty. \quad (2.39)$$

Aplicando (2.37), (2.38) e (2.39) em (2.36),

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\Delta_h^j(\varphi u)\|_m < \infty \quad (2.40)$$

e, portanto, $\varphi u \in \mathcal{H}_{m+1}^0(U)$. Indutivamente, temos que

$$\varphi u \in \mathcal{H}_{m+j}^0(U) \implies \varphi u \in \mathcal{H}_{m+j+1}^0(U)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, ou seja, $\varphi u \in \mathcal{H}_N^0(U)$, $\forall N \geq m$.

Aplicamos agora o teorema de Sobolev (teorema 2.4), para garantir que $\varphi u \in C^l(U, \mathbb{C}^k)$, para qualquer $l \in \mathbb{N}$, logo $u|_V \in C^\infty(V, \mathbb{C}^k)$.

□

Capítulo 3

Teorema de Hodge

Neste capítulo, apresentamos o resultado principal deste trabalho, o Teorema da Decomposição de Hodge (teorema 3.14), seguido de algumas aplicações.

As duas primeiras seções estendem, respectivamente, as definições de Espaço de Sobolev e de Operadores Diferenciais para o contexto de Fibrados Vetoriais. Suas propriedades são diretamente obtidas dos teoremas locais, o que exige a realização de algumas contas envolvendo mudanças de coordenadas.

Como o objetivo aqui é, justamente, explicitar a passagem do local para o global, alguns desses cálculos e estimativas acabam sendo mais extensos e aparentando maior complexidade do que a geralmente encontrada em livros que apresentam tais resultados.

3.1 Espaços de Sobolev em Fibrados

Nesta seção estaremos sempre trabalhando com um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$, de dimensão k , sobre uma variedade diferenciável compacta M , n -dimensional. Para maior simplicidade de notação, omitiremos o centro de bolas em \mathbb{R}^n , que estejam centradas na origem, $B_R := B_R(0)$.

3.1.1 Restrições Locais e Definição

Assim como foi discutido nas seções 1.5 e 1.6, podemos tomar uma cobertura $\{U_\lambda\}$ de M com sistemas de coordenadas locais $x_\lambda : U_\lambda \rightarrow B_3 \subset \mathbb{R}^n$ tais que as imagens inversas das bolas de raio 1 ainda cobrem M . Associadas a essa cobertura, obtemos (diminuindo o tamanho dos abertos, caso necessário) trivializações locais, $h_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times \mathbb{C}^k$, do fibrado $\pi : E \rightarrow M$. Devido à compacidade de M , iremos supor que a cobertura é finita.

Considere uma seção $s : M \rightarrow E$. Utilizaremos a seguinte notação para sua restrição local:

$$s^\lambda := \pi_2 \circ h_\lambda \circ s \circ x_\lambda^{-1} : B_3 \rightarrow \mathbb{C}^k.$$

Acima, $\pi_2 : U_\lambda \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ é a projeção na segunda coordenada. Assim, s^λ é simplesmente a composição:

$$B_3 \xrightarrow{x_\lambda^{-1}} U_\lambda \xrightarrow{s} \pi^{-1}(U_\lambda) \xrightarrow{h_\lambda} U_\lambda \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{C}^k,$$

ilustrada na Figura 3.1.

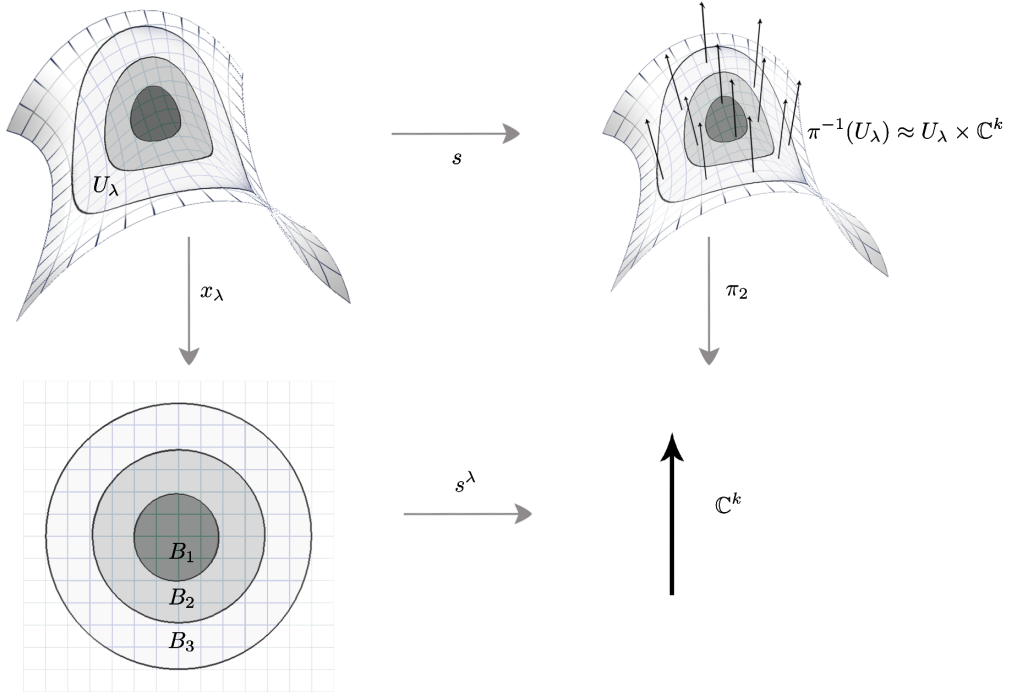


Figura 3.1: A restrição local s^λ é a aplicação que faz o diagrama acima comutar.

Para restrições locais se aplicam os resultados do Capítulo 2, uma vez que tratam-se de funções definidas em abertos de \mathbb{R}^n com valores em \mathbb{C}^k .

A partir de agora, denotaremos as normas em $\mathcal{H}_m(B_1)$ e $\mathcal{H}_m(B_3)$ por $\|\cdot\|_{m,1}$ e $\|\cdot\|_{m,3}$, respectivamente. Caso $v \in C^\infty(B_3, \mathbb{C}^k)$, temos:

$$\|v\|_{m,1}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{B_1} |D^\alpha v(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \|v\|_{m,3}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{B_3} |D^\alpha v(x)|^2 dx,$$

de forma que, para qualquer elemento $u \in \mathcal{H}_m(B_3)$,

$$\|u\|_{m,1} \leq \|u\|_{m,3}. \quad (3.1)$$

No lado direito estamos identificando u com sua restrição $u|_{B_1} \in \mathcal{H}_m(B_1)$, de forma que $\|u\|_{m,1} := \|u|_{B_1}\|_{m,1}$.

Definição 3.1. *O espaço das seções de Sobolev de ordem m do fibrado $\pi : E \rightarrow M$, denotado $\mathcal{H}_m(E)$, é definido como o conjunto das seções $s : M \rightarrow E$ tais que todas as restrições locais s^λ estejam no espaço de sobolev $\mathcal{H}_m(B_3)$.*

Atribuímos, para $s \in \mathcal{H}_m(E)$ sua norma

$$\|s\|_m := \sum_{\lambda} \|s^\lambda\|_{m,1}. \quad (3.2)$$

3.1.2 Equivalência de Normas em $\mathcal{H}_m(E)$

A norma local $\|\cdot\|_{m,1}$, utilizada na expressão (3.2) para definir a norma global em $\mathcal{H}_m(E)$, poderia ser substituída por $\|\cdot\|_{m,3}$, resultando em uma norma global equivalente. Isto acontece porque tanto a família de abertos $\{U_\lambda = x_\lambda^{-1}(B_3)\}$ quanto a família $\{x_\lambda^{-1}(B_1)\}$ cobrem a variedade. Mais especificamente, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *Existem constantes c e C tais que, para qualquer $s \in \mathcal{H}_m(E)$,*

$$c\|s\|_m \leq \sum_{\lambda} \|s^\lambda\|_{m,3} \leq C\|s\|_m. \quad (3.3)$$

Demonstração. A constante $c = 1$ satisfaz a proposição, pois decorre da inequação (3.1) que

$$\|s\|_m = \sum_{\lambda} \|s^\lambda\|_{m,1} \leq \sum_{\lambda} \|s^\lambda\|_{m,3}.$$

Para mostrar a segunda desigualdade, fixemos, primeiramente, um índice ν . Vamos demonstrar que existe C tal que

$$\|s^\nu\|_{m,3} \leq C \sum_{\lambda} \|s^\lambda\|_{m,1}$$

apenas para o caso em que $s^\lambda \in C^\infty(B_3, \mathbb{C}^k)$, o caso geral decorre como limite.

Assim, podemos decompor a norma em duas parcelas:

$$\|s^\nu\|_{m,3}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{B_3} \left| D^\alpha s^\nu(x) \right|^2 dx = \|s^\nu\|_{m,1}^2 + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{B_3 \setminus B_1} \left| D^\alpha s^\nu(x) \right|^2 dx. \quad (3.4)$$

Como os abertos $\{x_\lambda^{-1}(B_1)\}$ cobrem a variedade, em particular eles cobrem a imagem inversa $x_\nu^{-1}(B_3 \setminus B_1)$. Então temos uma inclusão

$$x_\nu^{-1}(B_3 \setminus B_1) \subset \bigcup_\lambda (x_\lambda^{-1}(B_1) \cap x_\nu^{-1}(B_3 \setminus B_1)).$$

Considere certo índice μ tal que $x_\mu^{-1}(B_1) \cap x_\nu^{-1}(B_3 \setminus B_1) \neq \emptyset$. Denotemos por I e II as imagens dessa intersecção pelas cartas x_ν e x_μ . Isso significa que

$$I \subset B_3 \setminus B_1 \quad \text{e} \quad II \subset B_1.$$

Essa situação está representada na Figura 3.2.

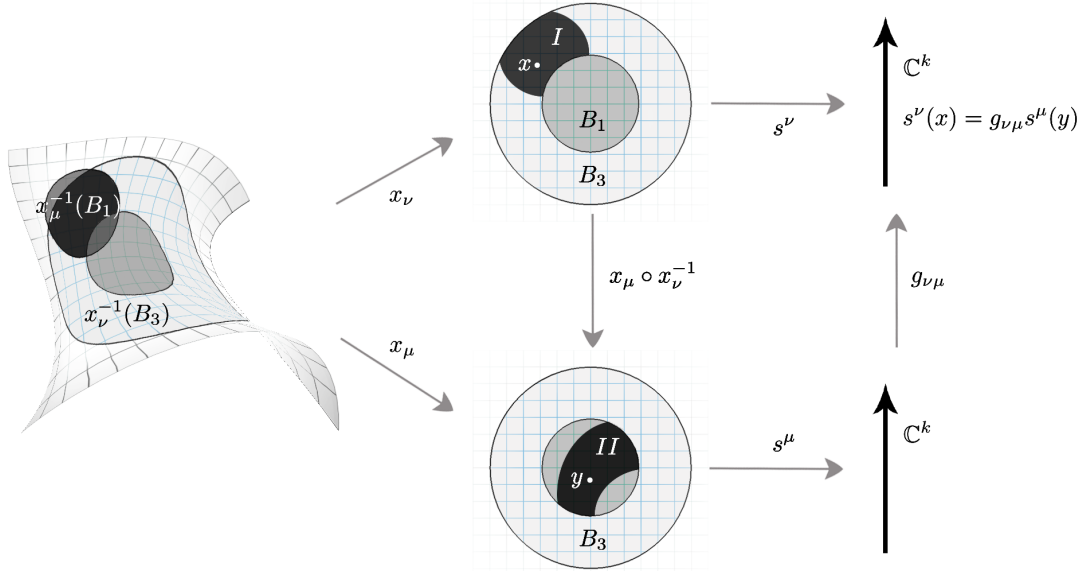


Figura 3.2: As regiões mais escuras representam a intersecção $x_\mu^{-1}(B_1) \cap x_\nu^{-1}(B_3 \setminus B_1)$ e suas imagens por x_ν e x_μ . As restrições locais se transformam pela mudança de coordenadas da variedade $x_\mu \circ x_\nu^{-1}$ e pela função de transição $g_{\nu\mu}$.

O conjunto $B_3 \setminus B_1$ se decompõe em uma quantidade finita de regiões como I , logo, para estimarmos o último termo da equação (3.4) precisaremos estimar uma soma finita de expressões do tipo

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_I |D^\alpha s^\nu(x)|^2 dx.$$

Lembrando que as mudanças de coordenadas do fibrado (conforme §1.6) têm a forma

$$\pi_2 \circ h_\nu \circ h_\mu^{-1}(p, z) = g_{\nu\mu}(p)z = g_{\nu\mu}(p)\pi_2(p, z),$$

segue que, para qualquer $x \in I$,

$$\begin{aligned} s^\nu(x) &= \pi_2 \circ h_\nu \circ s \circ x_\nu^{-1}(x) = \pi_2 \circ h_\nu \circ (h_\mu^{-1} \circ h_\mu) \circ s \circ x_\nu^{-1}(x) \\ &= g_{\nu\mu}(x_\nu^{-1}(x)) \pi_2 \circ h_\mu \circ s \circ (x_\mu^{-1} \circ x_\mu) \circ x_\nu^{-1}(x) \\ &= g_{\nu\mu}(x_\nu^{-1}(x)) s^\mu(x_\mu \circ x_\nu^{-1}(x)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Isto é, as restrições locais mudam de coordenadas na imagem com a aplicação linear $g_{\nu\mu}$ e no domínio com o difeomorfismo $x_\mu \circ x_\nu^{-1}$. Voltando ao termo que queremos limitar,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_I \left| D^\alpha s^\nu(x) \right|^2 dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_I \left| D^\alpha [(g_{\nu\mu} \circ x_\nu^{-1}) s^\mu(x_\mu \circ x_\nu^{-1})] (x) \right|^2 dx.$$

A função de transição $g_{\nu\mu}$ é suave em uma vizinhança do compacto $\overline{x_\nu^{-1}(I)}$, portanto todas suas derivadas são limitadas, de onde

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_I \left| D^\alpha s^\nu(x) \right|^2 dx &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \int_I \left| D^\alpha s^\mu(x_\mu \circ x_\nu^{-1})(x) \right|^2 dx \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{II} |D^\alpha s^\mu(y)|^2 |\det[D(x_\nu \circ x_\mu^{-1})(y)]| dy. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Na última linha, utilizamos a mudança de coordenadas $y = x_\mu \circ x_\nu^{-1}(x)$. Pela continuidade do determinante, e suavidade da mudança de coordenadas, temos que $\det[D(x_\nu \circ x_\mu^{-1})(y)]$ é limitado em II . Como $II \subset B_1$, segue-se, finalmente:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_I \left| D^\alpha s^\nu(x) \right|^2 dx \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{II} |D^\alpha s^\mu(y)|^2 dy \leq C \|s^\mu\|_{m,1}^2. \quad (3.7)$$

Fixando outros índices λ tais que $x_\lambda^{-1}(B_1) \cap x_\nu^{-1}(B_3 \setminus B_1) \neq \emptyset$, decompos $B_3 \setminus B_1$ em regiões como I e pelo mesmo argumento que levou à estimativa (3.7), obtemos

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{B_3 \setminus B_1} \left| D^\alpha s^\nu(x) \right|^2 dx \leq C \sum_\lambda \|s^\lambda\|_{m,1}^2$$

e a igualdade (3.4) implica em

$$\|s^\nu\|_{m,3} \leq C \sum_\lambda \|s^\lambda\|_{m,1} = C \|s\|_m, \quad (3.8)$$

que conclui a demonstração. □

3.1.3 Teorema de Rellich Global

Naturalmente, a inclusão contínua dos espaços de Sobolev locais $\mathcal{H}_m(B_1) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(B_1)$ se estende para a inclusão contínua $\mathcal{H}_m(E) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(E)$, pois:

$$\|s\|_{m-1} = \sum_{\lambda} \|s^{\lambda}\|_{m-1,1} \leq \sum_{\lambda} \|s^{\lambda}\|_{m,1} = \|s\|_m$$

Teorema 3.3 (Rellich Global). *A inclusão $\mathcal{H}_m(E) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(E)$ é compacta. Isto é, qualquer sequência $\{s_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}_m(E)$ uniformemente limitada na norma $\|\cdot\|_m$ admite subsequência $\{s_{j_l}\}_{l=0}^{\infty}$ convergente na norma $\|\cdot\|_{m-1}$.*

Demonstração. A ideia da demonstração consiste em aplicar o teorema de Rellich local para cada um dos abertos da cobertura, obtendo uma subsequência que convirja localmente e, por consequência, globalmente. Para tanto, atribuímos uma ordem total estrita qualquer para o conjunto finito dos índices da cobertura $\{U_{\lambda}\}$, $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$.

Considere a função $\phi \in C^{\infty}(B_3)$ que vale 1 em B_1 e 0 fora de B_2 . Para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e qualquer restrição $s_j^{\lambda} \in \mathcal{H}_m(B_3)$, é imediato ver que $\phi s_j^{\lambda} \in \mathcal{H}_m^0(B_3)$, já que se anula fora do compacto $\overline{B_2} \subset B_3$. A sequência $\{\phi s_j^{\lambda}\}_{j=0}^{\infty}$ é uniformemente limitada na norma $\|\cdot\|_{m,3}$, pois ϕ e todas suas derivadas são limitadas, de onde

$$\|\phi s_j^{\lambda}\|_{m,3} \leq C \|s_j^{\lambda}\|_{m,3} \leq C \sum_{\lambda} \|s_j^{\lambda}\|_{m,3} \leq C \|s_j\|_m \leq C.$$

Assim, para λ_1 , aplicamos o teorema local de Rellich, teorema 2.7, na sequência limitada $\{\phi s_j^{\lambda_1}\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}_m^0(B_3)$ para obtermos uma subsequência $\{\phi s_{j_1}^{\lambda_1}\}_{j_1=0}^{\infty}$ convergente na norma $\|\cdot\|_{m-1,3}$. Fixando esses índices e considerando agora λ_2 , aplicamos o teorema 2.7 na sequência limitada $\{\phi s_{j_1}^{\lambda_2}\}_{j_1=0}^{\infty}$ e nos restringimos a uma nova subsequência convergente $\{\phi s_{j_2}^{\lambda_2}\}_{j_2=0}^{\infty}$.

Seguindo o mesmo raciocínio até λ_N , obtemos um subconjunto de índices $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ tal que para qualquer λ , a sequência $\{\phi s_{j_l}^{\lambda}\}_{l=0}^{\infty}$ é de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{m-1,3}$.

Como, para quaisquer j e λ , vale $\phi s_j^{\lambda} = s_j^{\lambda}$ em B_1 , a desigualdade (3.1) implica

$$\|s_j^{\lambda}\|_{m-1,1} = \|\phi s_j^{\lambda}\|_{m-1,1} \leq \|\phi s_j^{\lambda}\|_{m-1,3}. \quad (3.9)$$

Decorre que

$$\|s_{j_l} - s_{j_i}\|_{m-1} = \sum_{\lambda} \|s_{j_l}^{\lambda} - s_{j_i}^{\lambda}\|_{m-1,1} \leq \sum_{\lambda} \|\phi(s_{j_l}^{\lambda} - s_{j_i}^{\lambda})\|_{m-1,3}. \quad (3.10)$$

Mas o termo do lado direito vai a zero, portanto, $\{s_{j_l}\}_{l=0}^{\infty}$ é de Cauchy na norma $\|\cdot\|_{m-1}$, sendo a subsequência procurada. \square

3.2 Operadores Elípticos em Fibrados

Ao longo dessa seção, considere fixos os fibrados $\pi_E : E \rightarrow M$, k dimensional e $\pi_F : F \rightarrow M$, l dimensional. Suas trivializações locais serão denotadas, respectivamente,

$$h_\lambda^E : \pi_E^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times \mathbb{C}^k \quad \text{e} \quad h_\lambda^F : \pi_F^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times \mathbb{C}^l.$$

Temos também as funções de transição associadas $g_{\lambda\mu}^E$ e $g_{\lambda\mu}^F$, definidas na intersecção dos abertos U_λ e U_μ , domínios de sistemas de coordenadas locais em M .

3.2.1 Símbolos de Operadores Diferenciais

Definição 3.4. *Um Operador Diferencial de ordem r agindo nas seções de E com imagem nas seções de F , é uma aplicação linear $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ que localmente se escreve como combinação linear de derivadas com ordem menor ou igual a r . Isto é, dado o sistema de coordenadas, $x_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a seção $s \in \Gamma(E)$, com restrição local $s^\lambda : B_3 \rightarrow \mathbb{C}^k$, temos a seção $Ls \in \Gamma(F)$, cuja restrição local $(Ls)^\lambda : B_3 \rightarrow \mathbb{C}^l$ é dada por:*

$$(Ls)^\lambda(x) = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta^\lambda(x) D^\beta s^\lambda(x).$$

Supomos as funções $a_\beta^\lambda : B_3 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$ suaves.

Como Ls é uma seção do fibrado F , suas coordenadas devem se transformar de forma análoga à transformação determinada em (3.5):

$$(Ls)^\lambda(x) = g_{\lambda\mu}^F(x_\lambda^{-1}(x))(Ls)^\mu(x_\mu \circ x_\lambda^{-1}(x)) \quad (3.11)$$

Inserindo, na igualdade acima, as expressões para $(Ls)^\lambda$ e $(Ls)^\mu$ e a transformação

$$s^\lambda(x) = g_{\lambda\mu}^E(x_\lambda^{-1}(x))s^\mu(x_\mu \circ x_\lambda^{-1}(x))$$

é possível encontrar a regra de transformação para os coeficientes a_β^λ . Essa conta envolve a aplicação da regra de Leibnitz e uma generalização da regra da cadeia para muitas variáveis (que pode ser encontrada em [12], Lemma 3), resultando em uma expressão geral da forma

$$a_\gamma^\mu(y) = g_{\mu\lambda}^F \sum_{|\gamma| \leq |\beta| \leq r} \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ |\gamma| \leq |\alpha|}} \binom{\beta}{\alpha} a_\beta^\lambda(x) (D^{\beta-\alpha} g_{\lambda\mu}^E) P_{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right).$$

A expressão $P_{\alpha\gamma}(\partial y/\partial x)$ é um polinômio homogêneo de grau $|\gamma|$ nas derivadas parciais $\partial^{|\zeta|} y^j / \partial x^\zeta$ com ordem menor que $|\alpha|$. Como na seção anterior, $y := x_\mu \circ x_\lambda^{-1}(x)$. Perceba que os coeficientes a_β^λ transformam-se na imagem pela função de transição $g_{\mu\lambda}^F$ e no domínio pelas derivadas da função $g_{\lambda\mu}^E$, combinados com derivadas da mudança de coordenadas. Dessa maneira, no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{C}^k & \xrightarrow{a_\gamma^\mu} & \mathbb{C}^l \\
 \nearrow^{\pi_2 \circ h_\mu^E} & \downarrow^{g_{\lambda\mu}^E} & & \downarrow^{g_{\mu\lambda}^F} \\
 \pi_E^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu) & & & \pi_F^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu) \\
 \searrow_{\pi_2 \circ h_\lambda^E} & \downarrow^{a_\gamma^\lambda} & & \downarrow^{\pi_2 \circ h_\lambda^F} \\
 & \mathbb{C}^k & \xrightarrow{a_\gamma^\lambda} & \mathbb{C}^l
 \end{array}$$

o retângulo central falha em comutar devido a termos associados à transformação do operador D^γ via regra da cadeia.

A transformação acima não nos interessa no caso geral. Contudo, se estivermos considerando apenas os índices com ordem mais alta, $|\gamma| = r$, não há derivadas de $g_{\lambda\mu}^E$, simplificando um pouco a expressão:

$$\begin{aligned}
 a_\gamma^\mu(y) &= g_{\mu\lambda}^F \sum_{|\beta|=r} a_\beta^\lambda(x) g_{\lambda\mu}^E \sum_{e_{j_1} + \dots + e_{j_r} = \gamma} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \frac{\partial y^{j_{\sigma(1)}}}{\partial x^1} \dots \frac{\partial y^{j_{\sigma(r)}}}{\partial x^n} \\
 &= g_{\mu\lambda}^F \sum_{|\beta|=r} a_\beta^\lambda(x) g_{\lambda\mu}^E \sum_{e_{j_1} + \dots + e_{j_r} = \gamma} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} dy^{j_{\sigma(1)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) \dots dy^{j_{\sigma(r)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\
 &= g_{\mu\lambda}^F \sum_{|\beta|=r} a_\beta^\lambda(x) g_{\lambda\mu}^E \sum_{e_{j_1} + \dots + e_{j_r} = \gamma} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} dy^{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dy^{j_{\sigma(r)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nas igualdades acima, σ está variando nas permutações do conjunto $\{1, \dots, r\}$. Na última linha, denotamos

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right),$$

onde o termo $\partial/\partial x^l$ se repete β_l vezes.

Dentre os resultados mais elementares sobre transformações de coordenadas, temos que as derivadas parciais $\{\partial/\partial x^l\}$, que podem ser identificadas com vetores tangentes, se transformam, perante a mudança de coordenadas $y = x_\mu \circ x_\lambda^{-1}$, da mesma maneira que as componentes de uma 1-forma na base dual $\{dx^j\}$. Isto

segue imediatamente da dualidade da base, isto é $dx^j(\partial_k) = \delta_k^j$. Isso sugere compararmos a expressão anterior, que está associada à transformação de derivadas parciais, com a transformação de componentes de uma 1-forma. Assim, dada uma 1-forma $\xi = \sum_j \xi_\lambda^j dx_\lambda^j = \sum_j \xi_\mu^j dy^j$, temos que:

$$\xi^\beta = (\xi_\lambda^1)^{\beta_1} \dots (\xi_\lambda^n)^{\beta_n} = \xi \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{\beta_1} \dots \xi \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{\beta_n} = \bigotimes^r \xi \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right).$$

No último termo está presente o produto de r cópias da mesma 1-forma ξ , logo é invariante frente a qualquer uma das $r!$ permutações de seus termos. Segue que,

$$\begin{aligned} \bigotimes^r \xi &= \sum_{j_1} \xi_\mu^{j_1} dy^{j_1} \otimes \dots \otimes \sum_{j_r} \xi_\mu^{j_r} dy^{j_r} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \left(\sum_{j_{\sigma(1)}} \xi_\mu^{j_{\sigma(1)}} dy^{j_{\sigma(1)}} \right) \otimes \dots \otimes \left(\sum_{j_{\sigma(r)}} \xi_\mu^{j_{\sigma(r)}} dy^{j_{\sigma(r)}} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{j_1} \dots \sum_{j_r} \sum_{\sigma \in S_r} \xi_\mu^{j_{\sigma(1)}} \dots \xi_\mu^{j_{\sigma(r)}} dy^{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dy^{j_{\sigma(r)}} \end{aligned}$$

Se definirmos $\gamma = e_{j_1} + \dots + e_{j_r}$ podemos reescrever as somas em j_l como uma soma em γ . Observando que $\xi_\mu^{j_{\sigma(1)}} \dots \xi_\mu^{j_{\sigma(r)}} = \xi_\mu^{j_1} \dots \xi_\mu^{j_r} = \xi_\mu^\gamma$ decorre:

$$\begin{aligned} \xi^\beta &= \frac{1}{r!} \sum_{|\gamma|=r} \sum_{e_{j_1} + \dots + e_{j_r} = \gamma} \sum_{\sigma \in S_r} \xi_\mu^\gamma dy^{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dy^{j_{\sigma(r)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \sum_{|\gamma|=r} \sum_{e_{j_1} + \dots + e_{j_r} = \gamma} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} dy^{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dy^{j_{\sigma(r)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \xi_\mu^\gamma, \end{aligned} \tag{3.13}$$

na qual está presente o mesmo termo que apareceu em (3.12).

Essa observação justifica a consistência da seguinte definição.

Definição 3.5. *Dado o operador diferencial $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$, definimos seu Símbolo Principal, como o homomorfismo de fibrados $\sigma_L : TM^* \otimes E \rightarrow F$ que associa para cada vetor cotangente $\xi \in TM_p^*$ e cada elemento $v \in E_p$ um elemento $\sigma_L(\xi)v \in F_p$, com coordenadas locais*

$$(\sigma_L(\xi)v)^\lambda := \sum_{|\beta|=r} a_\beta^\lambda(x_\lambda(p)) \xi_\lambda^\beta v^\lambda \in \mathbb{C}^l.$$

Para nos certificarmos de que a expressão acima define, efetivamente, um vetor $\sigma_L(\xi)v \in F_p$, é necessário verificar que as coordenadas se transformam de acordo com as funções de transição $g_{\lambda\mu}^F$. Mas isto decorre da transformação de coordenadas de v ,

$$v^\lambda = g_{\lambda\mu}^E(p)v^\mu$$

e da discussão anterior, sintetizada nas relações (3.12) e (3.13). Dessa maneira,

$$\begin{aligned} (\sigma_L(\xi)v)^\lambda &:= \sum_{|\beta|=r} a_\beta^\lambda(x) \xi_\lambda^\beta v^\lambda \\ &= \sum_{|\beta|=r} a_\beta^\lambda(x) \sum_{|\gamma|=r} \sum_{e_{j_1}+\dots+e_{j_r}=\gamma} \frac{1}{r!} \times \\ &\quad \times \sum_{\sigma \in S_r} dy^{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dy^{j_{\sigma(r)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \xi_\mu^\gamma (g_{\lambda\mu}^E v^\mu) \\ &= \sum_{|\gamma|=r} g_{\lambda\mu}^F \left(g_{\mu\lambda}^F \sum_{|\beta|=r} a_\beta^\lambda(x) g_{\lambda\mu}^E \times \right. \\ &\quad \times \sum_{e_{j_1}+\dots+e_{j_r}=\gamma} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} dy^{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dy^{j_{\sigma(r)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \left. \right) \xi_\mu^\gamma v^\mu \\ &= g_{\lambda\mu}^F \sum_{|\gamma|=r} a_\gamma^\mu(y) \xi_\mu^\gamma v^\mu = g_{\lambda\mu}^F (\sigma_L(\xi)v)^\mu, \end{aligned} \tag{3.14}$$

como queríamos.

As definições acima generalizam as definições do Capítulo 2, pois este trata de abertos no \mathbb{R}^n , isto é, apenas uma vizinhança $U_\lambda = U$ no atlas. Neste caso podemos omitir o índice λ . Além disso, uma seção do fibrado $U \times \mathbb{C}^k$ é uma função $u : U \rightarrow \mathbb{C}^k$. Assim, um operador diferencial é dado por

$$Lu(x) = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta(x) D^\beta u(x)$$

e seu símbolo principal

$$\sigma_L(\xi) = \sum_{|\beta|=r} a_\beta \xi^\beta,$$

como no capítulo anterior.

Estendemos também a caracterização de elipticidade da maneira óbvia:

Definição 3.6. Um Operador Diferencial Elíptico $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ é um operador diferencial cujo símbolo, para cada $p \in M$ e $\xi \in TM_p^*$ não nulo, induz um isomorfismo $\sigma_L(\xi) : E_p \rightarrow F_p$.

Segue-se da definição que, caso exista um operador elíptico $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$, então, necessariamente, as dimensões dos fibrados E e F são iguais, $k = l$. Neste caso as matrizes $a_\beta^\lambda(x)$ são quadradas.

Observe, também, que um operador elíptico $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ é localmente elíptico, isto é, o operador local $L^\lambda : C^\infty(B_3, \mathbb{C}^k) \rightarrow C^\infty(B_3, \mathbb{C}^k)$ dado por

$$L^\lambda u(x) = \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta^\lambda(x) D^\beta u(x) \quad (3.15)$$

é elíptico. Então, os resultados locais sobre operadores elípticos do capítulo anterior se aplicam a L^λ .

Antes de estudarmos as propriedades de operadores elípticos, demonstraremos um último resultado geral sobre símbolos.

Proposição 3.7. *Considere operadores diferenciais $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ e $L' : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(G)$ quaisquer. Fixado $p \in M$ e $\xi \in TM_p^*$, o símbolo da composição $L'L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(G)$ satisfaz: $\sigma_{L'L}(\xi) = \sigma_{L'}(\xi)\sigma_L(\xi) : E_p \rightarrow G_p$.*

Demonstração. Para simplicidade de notação, vamos tomar uma trivialização local mas omitir o índice associado. Assim, os operadores ficam expressos em coordenadas como

$$L = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha \quad \text{e} \quad L' = \sum_{|\beta| \leq r'} b_\beta D^\beta$$

e a composta, no mesmo sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} L'L &= \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{|\beta| \leq r'} a_\alpha D^\alpha (b_\beta D^\beta) = \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{|\beta| \leq r'} a_\alpha \sum_{\eta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\eta b_\beta D^\gamma D^\beta \\ &= \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{|\beta| \leq r'} \sum_{\eta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} a_\alpha D^\eta b_\beta D^{\gamma+\beta}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para calcularmos o símbolo principal de $L'L$, basta considerarmos as derivadas de maior ordem, $r + r'$. Neste caso temos $|\beta| = r'$ e $|\alpha| = |\gamma| = r$, que implica $\gamma = \alpha$ e $\eta = 0$. Logo,

$$\sigma_{L'L}(\xi) = \sum_{|\alpha|=r} \sum_{|\beta|=r'} a_\alpha b_\beta \xi^{\alpha+\beta} = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \xi^\alpha \sum_{|\beta|=r'} b_\beta \xi^\beta = \sigma_{L'}(\xi)\sigma_L(\xi),$$

como queríamos demonstrar. \square

3.2.2 Operadores Elípticos em $\mathcal{H}_m(E)$

Como era de se esperar, um operador diferencial $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ de ordem r se estende para uma aplicação contínua $L : \mathcal{H}_m(E) \rightarrow \mathcal{H}_{m-r}(F)$, sempre que $m \geq r$.

Para nos certificarmos disso, basta observar que dada uma seção $s \in \mathcal{H}_m(E)$, por definição $s^\lambda \in \mathcal{H}_m(B_3)$, portanto, a proposição 2.3 assegura que $L^\lambda s^\lambda \in \mathcal{H}_{m-r}(B_3)$. Aqui, entendemos o operador $L^\lambda : C^\infty(B_3, \mathbb{C}^k) \rightarrow C^\infty(B_3, \mathbb{C}^k)$ determinado pela relação (3.15).

Definimos, finalmente, a seção $Ls \in \mathcal{H}_{m-r}(F)$ pelas coordenadas locais $(Ls)^\lambda := L^\lambda s^\lambda$. Observe que a transformação dos coeficientes a_β^λ , perante uma mudança de coordenadas, assegura a relação $(Ls)^\lambda = g_{\lambda\mu}^F(Ls)^\mu$, conforme discussão que segue (3.11). Assim, garantimos que Ls está bem definida.

Além disso,

$$\|Ls\|_{m-r} = \sum_\lambda \|(Ls)^\lambda\|_{m-r,1} \leq C \sum_\lambda \|s^\lambda\|_{m,1} = C\|s\|_m.$$

Segue-se abaixo a generalização dos resultados locais da seção 2.2.

Teorema 3.8 (Desigualdade a priori global). *Dado um operador elíptico $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ de ordem r , existe uma constante, $C = C(L, M, m)$, tal que para qualquer seção suave $s \in \Gamma(E)$ temos*

$$\|s\|_m \leq C(\|Ls\|_{m-r} + \|s\|_{m-1}).$$

Demonstração. Lembramos que o operador L se expressa localmente em termos de operadores elípticos L^λ , definidos em B_3 , que é uma vizinhança de $\overline{B_1}$. Da mesma forma, as restrições locais s^λ são suaves em B_3 . Assim, podemos aplicar o teorema 2.11 no aberto B_1 , para cada restrição.

A partir da definição da norma $\|\cdot\|_m$, (3.2):

$$\begin{aligned} \|s\|_m &= \sum_\lambda \|s^\lambda\|_{m,1} \leq \sum_\lambda C \left(\|L^\lambda s^\lambda\|_{m-r,1} + \|s^\lambda\|_{m-1,1} \right) \\ &\leq C \left(\sum_\lambda \|(Ls)^\lambda\|_{m-r,1} + \sum_\lambda \|s^\lambda\|_{m-1,1} \right) \\ &\leq C(\|Ls\|_{m-r} + \|s\|_{m-1}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

□

Teorema 3.9 (Regularidade de soluções fracas). *Dada uma seção $s \in \mathcal{H}_m(E)$ e um operador elíptico $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$. Se $Ls \in \Gamma(F)$, então $s \in \Gamma(E)$.*

Demonstração. Analogamente à demonstração do teorema anterior, basta aplicar o teorema 2.13 em cada restrição local $s^\lambda \in \mathcal{H}_m(B_3)$. Neste caso,

$$L^\lambda s^\lambda \in C^\infty(B_3, \mathbb{C}^k) \implies s^\lambda \in C^\infty(B_3, \mathbb{C}^k).$$

Isso mostra que a seção local $s|_{U_\lambda}$ é suave para qualquer λ . O teorema segue do fato que diferenciabilidade é uma propriedade local. \square

Temos ainda um último resultado sobre a atuação de operadores elípticos em seções de Sobolev que será necessário para a demonstração do Teorema de Hodge.

Teorema 3.10. *Seja $L : \mathcal{H}_m(E) \rightarrow \mathcal{H}_{m-r}(F)$ um operador elíptico de ordem r . A imagem $L(\mathcal{H}_m(E))$ é fechada em $\mathcal{H}_{m-r}(F)$.*

Demonstração. Podemos nos restringir ao complemento ortogonal do núcleo de L , que denotaremos

$$V := \mathfrak{N}(L)^\perp,$$

uma vez que $L(V) = L(\mathcal{H}_m(E))$. Note que V é fechado em $\mathcal{H}_m(E)$ e que o operador L , restrito a V , é injetivo.

É suficiente mostrar que existe uma constante C tal que, para qualquer $v \in V$,

$$\|v\|_m \leq C \|Lv\|_{m-r}, \quad (3.18)$$

pois, então, dada uma sequência $\{Lw_j\}_{j=0}^\infty \subset L(V)$, convergente na norma $\|\cdot\|_{m-r}$, a desigualdade acima garante que $\{w_j\}_{j=0}^\infty \subset V$ é de Cauchy na norma $\|\cdot\|_m$. Logo, ela converge para algum $w \in V$, de onde $\{Lw_j\}_{j=0}^\infty$ converge para $Lw \in L(V)$, garantindo que $L(V)$ é fechado.

Suponha que não exista alguma constante que satisfaça (3.18). Então podemos obter uma sequência $\{v_j\}_{j=0}^\infty \subset V$ tal que $\|v_j\|_m > j \|Lv_j\|_{m-r}$, ou, equivalentemente,

$$\left\| L \left(\frac{v_j}{\|v_j\|_m} \right) \right\|_{m-r} < \frac{1}{j}.$$

Mas a sequência $\{v_j/\|v_j\|_m\}_{j=0}^\infty$ é limitada em $\mathcal{H}_m(E)$. De fato, todos os elementos têm norma igual a 1. Pelo teorema 3.3, existe uma subsequência convergente na norma $\|\cdot\|_{m-1}$. Denotemos essa subsequência por $\{\tilde{v}_j\}_{j=0}^\infty$.

Aplicando o Teorema 3.8, temos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_l - \tilde{v}_j\|_m &\leq C (\|L(\tilde{v}_l - \tilde{v}_j)\|_{m-r} + \|\tilde{v}_l - \tilde{v}_j\|_{m-1}) \\ &< C \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{j} + \|\tilde{v}_l - \tilde{v}_j\|_{m-1} \right). \end{aligned}$$

Assim, $\{\tilde{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ é de Cauchy na norma $\|\cdot\|_m$, convergindo para um elemento $\tilde{v} \in V$. Como $\|\tilde{v}_j\|_m = 1$, para qualquer j , também temos $\|\tilde{v}\|_m = 1$. Segue que

$$\|L\tilde{v}\|_{m-r} \leq \|L(\tilde{v} - \tilde{v}_j)\|_{m-r} + \|L\tilde{v}_j\|_{m-r} \leq \|\tilde{v} - \tilde{v}_j\|_m + 1/j.$$

Portanto, $L\tilde{v} = 0$ e a injetividade de L restrito a V garante que $\tilde{v} = 0$. Mas isso é um absurdo, pois $\|\tilde{v}\|_m = 1$. Decorre que existe C satisfazendo (3.18). \square

3.3 Complexos Elípticos

Associado a um operador diferencial $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ temos o complexo diferencial:

$$0 \longrightarrow \Gamma(E) \xrightarrow{L} \Gamma(F) \longrightarrow 0, \quad (3.19)$$

no qual o primeiro operador é a inclusão do zero $0 \mapsto 0 \in \Gamma(E)$, e o último é a projeção no zero $s \mapsto 0, \forall s \in \Gamma(F)$. Qualquer composição em (3.19) se anula, como pode ser facilmente verificado.

Para qualquer ponto $p \in M$ e qualquer vetor cotangente $\xi \in TM_p^*$, obtemos, a partir deste complexo, uma sequência

$$0 \longrightarrow E_p \xrightarrow{\sigma_L(\xi)} F_p \longrightarrow 0, \quad (3.20)$$

formada pelos símbolos dos operadores em (3.19).

No caso em que L for um operador elíptico, $\sigma_L(\xi)$ é um isomorfismo. Mas isso é equivalente a dizer que a sequência (3.20) é *exata*, isto é, que a imagem de qualquer aplicação na sequência é igual ao núcleo da aplicação seguinte.

A observação acima motiva a seguinte definição, que generaliza o conceito de operador elíptico:

Definição 3.11. *Um Complexo Elíptico é um complexo diferencial $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$, dado por uma sequência finita de operadores diferenciais agindo sobre seções de fibrados, $d^k : \Gamma(E^k) \rightarrow \Gamma(E^{k+1})$, tal que, para quaisquer $p \in M$ e $\xi \in TM_p^*$ a sequência dos símbolos associada*

$$\dots \longrightarrow E_p^{k-1} \xrightarrow{\sigma_{d^{k-1}}(\xi)} E_p^k \xrightarrow{\sigma_{d^k}(\xi)} E_p^{k+1} \xrightarrow{\sigma_{d^{k+1}}(\xi)} E_p^{k+2} \longrightarrow \dots$$

é *exata*, ou seja, $\mathfrak{Im}(\sigma_{d^k}(\xi)) = \mathfrak{N}(\sigma_{d^{k+1}}(\xi)), \forall k$.

3.3.1 Laplacianos de um Complexo Elíptico

Dado um complexo diferencial $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$, fixemos uma métrica hermitiana em cada fibrado E^k . Tomando uma medida μ em M , podemos atribuir um produto hermitiano a $\Gamma(E^k)$ por

$$\langle s_1, s_2 \rangle^k := \int_M \overline{s_1} \cdot s_2 \, d\mu.$$

Na integral acima, $\overline{s_1} \cdot s_2$ representa a função que associa a cada ponto $p \in M$ o produto hermitiano em E_p^k entre $s_1(p)$ e $s_2(p)$.

Estando os espaços $\Gamma(E^k)$ munidos de produto interno, podemos obter a adjunta à aplicação d^k , isto é, o único operador diferencial $\delta_k : \Gamma(E^k) \rightarrow \Gamma(E^{k-1})$ tal que

$$\langle \delta_k \tilde{s}, s \rangle^{k-1} = \langle \tilde{s}, d^{k-1} s \rangle^k.$$

Naturalmente, $\delta_{k-1} \circ \delta_k = 0$, pois para quaisquer $\tilde{s} \in \Gamma(E^k)$ e $s \in \Gamma(E^{k-2})$,

$$\langle \delta_{k-1} \delta_k \tilde{s}, s \rangle^{k-2} = \langle \delta_k \tilde{s}, d^{k-2} s \rangle^{k-1} = \langle \tilde{s}, d^{k-1} d^{k-2} s \rangle^k = 0.$$

Assim, $(\Gamma(E^\bullet), \delta_\bullet)$ forma um complexo diferencial de cadeias, chamado de complexo adjunto ao complexo elíptico $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$.

Definição 3.12. *Denominamos os operadores $\Delta_k = \delta_{k+1} d^k + d^{k-1} \delta_k$ Laplacianos do Complexo Elíptico $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$. As seções $s \in \Gamma(E^k)$ tais que $\Delta_k s = 0$ são chamadas de seções harmônicas.*

Proposição 3.13. *As seguintes afirmações sobre o complexo diferencial $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$ são equivalentes.*

- (1) $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$ é um complexo elíptico;
- (2) os laplacianos $\Delta_k : \Gamma(E^k) \rightarrow \Gamma(E^k)$ são operadores elípticos;
- (3) o operador $d + \delta := \bigoplus_k (d^{2k} + \delta_{2k}) : \bigoplus_k \Gamma(E^{2k}) \rightarrow \bigoplus_k \Gamma(E^{2k+1})$ é elíptico.

Demonstração. Fixando $\xi \in TM_p^*$, utilizaremos a notação simplificada para o símbolo

$$\sigma_k := \sigma_{d^k}(\xi) : E_p^k \rightarrow E_p^{k+1},$$

com adjunta

$$\sigma_k^* := \sigma_{\delta_{k+1}}(\xi) : E_p^{k+1} \rightarrow E_p^k.$$

Como o símbolo é linear e preserva a composição (pela proposição 3.7), segue-se que

$$\sigma_{\Delta_k} := \sigma_{\Delta_k}(\xi) = \sigma_k^* \sigma_k + \sigma_{k-1} \sigma_{k-1}^*. \quad (3.21)$$

Da equação acima decorre que $\mathfrak{N}(\sigma_{\Delta_k}) \supset \mathfrak{N}(\sigma_k) \cap \mathfrak{N}(\sigma_{k-1}^*)$. Mais ainda, se $v \in \mathfrak{N}(\sigma_{\Delta_k})$, então

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{v} \cdot \sigma_{\Delta_k} v = \bar{v} \cdot \sigma_k^* \sigma_k v + \bar{v} \cdot \sigma_{k-1} \sigma_{k-1}^* v \\
&= \overline{\sigma_k v} \cdot \sigma_k v + \overline{\sigma_{k-1}^* v} \cdot \sigma_{k-1}^* v \\
&= |\sigma_k v|^2 + |\sigma_{k-1}^* v|^2,
\end{aligned}$$

de onde $\sigma_k v = \sigma_{k-1}^* v = 0$, portanto $\mathfrak{N}(\sigma_{\Delta_k}) = \mathfrak{N}(\sigma_k) \cap \mathfrak{N}(\sigma_{k-1}^*)$. Agora provaremos as equivalências (1) \Leftrightarrow (2) e (2) \Leftrightarrow (3).

Seja $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$ um complexo elíptico. Queremos mostrar que σ_{Δ_k} é um isomorfismo. Tomando $v \in \mathfrak{N}(\sigma_{\Delta_k})$, temos que $v \in \mathfrak{N}(\sigma_k) = \mathfrak{Im}(\sigma_{k-1})$, pela elipticidade do complexo. Isto significa que existe $v' \in E_p^{k-1}$ tal que $v = \sigma_{k-1} v'$. Sabemos também que $v \in \mathfrak{N}(\sigma_{k-1}^*)$, logo $\sigma_{k-1}^* \sigma_{k-1} v' = 0$. Portanto,

$$|v|^2 = |\sigma_{k-1} v'|^2 = \overline{\sigma_{k-1} v'} \cdot \sigma_{k-1} v' = \overline{\sigma_{k-1}^* \sigma_{k-1} v'} \cdot v' = 0, \quad (3.22)$$

garantindo que $\sigma_{\Delta_k} : E_p^k \rightarrow E_p^k$ é injetiva, logo um isomorfismo. Isso prova (1) \Rightarrow (2).

Por outro lado, se Δ_k é elíptico, σ_{Δ_k} é um isomorfismo. Basta mostrar que $\mathfrak{N}(\sigma_k) \subset \mathfrak{Im}(\sigma_{k-1})$, pois $d^k \circ d^{k-1} = 0$ implica em $\sigma_k \sigma_{k-1} = 0$. Assim, dado $w \in \mathfrak{N}(\sigma_k)$, defina $\tilde{w} := \sigma_{\Delta_k}^{-1} w$. Então,

$$w = \sigma_k^* \sigma_k \tilde{w} + \sigma_{k-1} \sigma_{k-1}^* \tilde{w}.$$

O segundo termo no lado direito já está em $\mathfrak{Im}(\sigma_{k-1})$ e o primeiro é zero, pois de $\sigma_k w = 0$ decorre que

$$0 = \sigma_k \sigma_k^* \sigma_k \tilde{w} + \sigma_k \sigma_{k-1} \sigma_{k-1}^* \tilde{w} = \sigma_k \sigma_k^* \sigma_k \tilde{w}$$

de onde segue

$$|\sigma_k^* \sigma_k \tilde{w}|^2 = \overline{\sigma_k^* \sigma_k \tilde{w}} \cdot \sigma_k^* \sigma_k \tilde{w} = \overline{\sigma_k \tilde{w}} \cdot \sigma_k \sigma_k^* \sigma_k \tilde{w} = 0, \quad (3.23)$$

concluindo (2) \Rightarrow (1).

Para demonstrarmos a equivalência (2) \Leftrightarrow (3), observamos que

$$(d + \delta)^* = \bigoplus_k (d_{2k}^* + \delta_{2k}^*) = \bigoplus_k (d_{2k-1} + \delta_{2k-1})$$

é a adjunta de $d + \delta$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
(d + \delta)(d + \delta)^* &= \bigoplus_k (d_{2k} + \delta_{2k}) \bigoplus_k (d_{2k-1} + \delta_{2k-1}) \\
&= \bigoplus_k (d_{2k} d_{2k-1} + \delta_{2k} d_{2k-1} + d_{2k-2} \delta_{2k-1} + \delta_{2k-2} \delta_{2k-1}) \\
&= \bigoplus_k (\delta_{2k} d_{2k-1} + d_{2k-2} \delta_{2k-1}) = \bigoplus_k \Delta_{2k-1}.
\end{aligned} \quad (3.24)$$

De forma análoga,

$$(d + \delta)^*(d + \delta) = \bigoplus_k \Delta_{2k}. \quad (3.25)$$

As contas acima se traduzem, em termos dos símbolos, por

$$\sigma_{d+\delta}\sigma_{d+\delta}^* = \bigoplus_k \sigma_{\Delta_{2k}} \quad \text{e} \quad \sigma_{d+\delta}^*\sigma_{d+\delta} = \bigoplus_k \sigma_{\Delta_{2k-1}}, \quad (3.26)$$

de onde podemos concluir que $\sigma_{d+\delta}$ é um isomorfismo se e somente se todos os σ_{Δ_k} são isomorfismos. □

3.3.2 Teorema da Decomposição

Aplicaremos agora a teoria desenvolvida para operadores elípticos atuando sobre espaços de Sobolev de fibrados em um complexo elíptico.

Para tanto, seja r o maior grau dentre os operadores do complexo. Fixando algum $m \geq 2r$, podemos estender qualquer laplaciano associado como uma aplicação $\mathcal{H}_m(E) \rightarrow \mathcal{H}_{m-2r}(E)$, pois sua ordem será no máximo $2r$. Este é o procedimento desenvolvido no primeiro item do teorema abaixo.

Denotamos por $L^2(E) = \mathcal{H}_0(E)$, o espaço de Hilbert das seções com quadrado integrável, identificadas a menos de conjuntos de medida nula. No segundo item do teorema abaixo, utilizaremos $m = 2r$, estendendo os laplacianos para aplicações $\mathcal{H}_{2r}(E) \rightarrow L^2(E)$.

Teorema 3.14 (Decomposição de Hodge). *Seja $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$ um complexo elíptico de fibrados vetoriais sobre a variedade compacta M . Então:*

(a) $\mathfrak{N}(\Delta_k) := \{s \in \Gamma(E^k) \mid \Delta_k s = 0\}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, para qualquer k ;

(b) Os espaços $L^2(E^k)$ e $\Gamma(E^k)$ admitem as seguintes decomposições ortogonais:

$$L^2(E^k) = \mathfrak{N}(\Delta_k) \oplus \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k)) \quad (3.27)$$

$$\Gamma(E^k) = \mathfrak{N}(\Delta_k) \oplus \mathfrak{Im}(\Delta_k). \quad (3.28)$$

Acima, $\Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))$ é a imagem da aplicação $\Delta_k : \mathcal{H}_{2r}(E^k) \rightarrow L^2(E^k)$ e $\mathfrak{Im}(\Delta_k)$ é a imagem de $\Delta_k : \Gamma(E^k) \rightarrow \Gamma(E^k)$;

(c) A aplicação natural $s \mapsto [s]$ do espaço das formas harmônicas $\mathfrak{N}(\Delta_k)$ no espaço de cohomologia $H^k(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$ é um isomorfismo.

Demonstração. (a) Observamos que os núcleos das aplicações $\Delta_k : \Gamma(E^k) \rightarrow \Gamma(E^k)$ e $\Delta_k : \mathcal{H}_m(E^k) \rightarrow \mathcal{H}_{m-2r}(E^k)$, denotados \mathfrak{N}_1 e \mathfrak{N}_2 , respectivamente, são iguais.

É imediato ver que $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$, pois $\Gamma(E^k) \subseteq \mathcal{H}_m(E^k)$. Por outro lado, se $s \in \mathfrak{N}_2$ então $s \in \mathcal{H}_m(E^k)$ é solução fraca de $\Delta_k s = 0$. Decorre do teorema 3.9 que $s \in \mathfrak{N}_1 \subset \Gamma(E^k)$. Logo, $\mathfrak{N}(\Delta_k) := \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$.

Assim, basta mostrar que o fecho da bola unitária, $\bar{B} = \{v \in \mathfrak{N}(\Delta_k) \mid \|v\|_m \leq 1\}$, é compacto.

A restrição da inclusão $\mathcal{H}_m(E^k) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(E^k)$ ao núcleo, que denotaremos por $i : \mathfrak{N}(\Delta_k) \rightarrow \mathcal{H}_{m-1}(E^k)$, é injetiva, contínua e sua inversa, onde está definida, é contínua. A continuidade da inversa decorre da desigualdade a priori, que em $\mathfrak{N}(\Delta_k)$ assume a forma

$$\|s\|_m \leq C\|s\|_{m-1}.$$

Segue-se que o mapa i é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Além disso, pelo Teorema de Rellich (Teorema 3.3), a inclusão $\mathcal{H}_m(E^k) \hookrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(E^k)$ é um operador compacto, de onde a imagem da bola fechada, $i(\bar{B})$, é relativamente compacta. Como i é um homeomorfismo, $i(\bar{B})$ também é fechada, logo compacta, e, portanto, \bar{B} é compacta.

(b) Primeiramente, verificamos que o núcleo de Δ_k é o complemento ortogonal de $\Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))$ em $L^2(E^k)$, isto é

$$\mathfrak{N}(\Delta_k) = \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))^\perp := \{v \in L^2(E^k) \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))\}.$$

Temos a inclusão $\mathfrak{N}(\Delta_k) \subseteq \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))^\perp$, pois tomando uma seção $s \in \mathfrak{N}(\Delta_k)$ e qualquer $\Delta_k s' \in \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))$, segue que

$$\begin{aligned} \langle s, \Delta_k s' \rangle &= \langle s, d^{k-1} \delta_k s' \rangle + \langle s, \delta_{k+1} d^k s' \rangle = \langle \delta_k s, \delta_k s' \rangle + \langle d^k s, d^k s' \rangle \\ &= \langle d^{k-1} \delta_k s, s' \rangle + \langle \delta_{k+1} d^k s, s' \rangle = \langle \Delta_k s, s' \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para verificarmos a inclusão contrária, $\mathfrak{N}(\Delta_k) \supseteq \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))^\perp$, considere alguma seção $t \in \Gamma(E^k) \cap L^2(E^k)$ ortogonal ao espaço $\Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))$. Então para qualquer $\tilde{s} \in \Gamma(E^k)$,

$$\langle \Delta_k t, \tilde{s} \rangle = \langle t, \Delta_k \tilde{s} \rangle = 0.$$

A inclusão resulta do fato de que $\Gamma(E^k)$ é denso em $L^2(E^k)$.

Assim, concluímos que

$$L^2(E^k) = \overline{\Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))} \oplus \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))^\perp = \overline{\Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))} \oplus \mathfrak{N}(\Delta_k).$$

Mas pelo teorema 3.10, a imagem do operador elíptico $\Delta_k : \mathcal{H}_{2r}(E^k) \rightarrow L^2(E^k)$ é fechada, logo

$$L^2(E^k) = \mathfrak{N}(\Delta_k) \oplus \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k)).$$

Para provarmos (3.28), observamos que $L^2(E^k) \supset \Gamma(E^k)$. Assim, dada uma seção suave $s \in \Gamma(E^k)$, utilizamos a decomposição (3.27), para obtermos s_H harmônica e $\Delta_k s_I \in \Delta_k(\mathcal{H}_{2r}(E^k))$ tais que

$$s = s_H + \Delta_k s_I.$$

Mas isso significa que $\Delta_k s_I = s - s_H$ é suave. Pelo teorema 3.9 isso implica que $s_I \in \Gamma(E^k)$. Logo, $\Delta_k s_I \in \mathfrak{Im}(\Delta_k)$ e a decomposição está demonstrada.

(c) A aplicação está bem definida, pois cada seção harmônica s está em $\mathfrak{N}(d^k)$, o que pode ser confirmado pela conta usual:

$$0 = \langle \Delta_k s, s \rangle = \langle d^{k-1} \delta_k s, s \rangle + \langle \delta_{k+1} d^k s, s \rangle = \|\delta_k s\|^2 + \|d^k s\|^2. \quad (3.30)$$

Assim, s define uma classe de cohomologia $[s] = s + \mathfrak{Im}(d^{k-1})$. Desejamos mostrar que a aplicação linear $\mathfrak{N}(\Delta_k) \rightarrow H^k(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$ é um isomorfismo.

Para a injetividade, considere alguma seção no núcleo, isto é $d^{k-1} t \in \mathfrak{Im}(d^{k-1})$ harmônica. Mas a equação (3.30) garante também que uma seção harmônica está em $\mathfrak{N}(\delta_k)$, logo $\delta_k d^{k-1} t = 0$. Isso significa:

$$\|d^{k-1} t\|^2 = \langle d^{k-1} t, d^{k-1} t \rangle = \langle \delta_k d^{k-1} t, t \rangle = 0.$$

Portanto, $d^{k-1} t = 0$ de onde concluímos a injetividade.

Para verificarmos a sobrejetividade, seja $s \in \Gamma(E^k)$ com $d^k s = 0$. Precisamos encontrar alguma seção harmônica cuja classe de equivalência na cohomologia seja igual a $[s]$. Pela decomposição (3.28) podemos escrever $s = s_H + \Delta_k s_I$, com s_H harmônica e $s_I \in \Gamma(E^k)$. Desta decomposição decorre que $d^k \Delta_k s_I = d^k s - d^k s_H = 0$. Consequentemente,

$$0 = d^k (d^{k-1} \delta_k + \delta_{k+1} d^k) s_I = d^k \delta_{k+1} d^k s_I,$$

de onde segue que

$$0 = \langle d^k \delta_{k+1} d^k s_I, d^k s_I \rangle = \langle \delta_{k+1} d^k s_I, \delta_{k+1} d^k s_I \rangle,$$

ou seja, $\delta_{k+1} d^k s_I = 0$. Logo,

$$0 = \langle \delta_{k+1} d^k s_I, s_I \rangle = \langle d^k s_I, d^k s_I \rangle,$$

portanto, $d^k s_I = 0$. Assim,

$$\Delta_k s_I = (d^{k-1} \delta_k + \delta_{k+1} d^k) s_I = d^{k-1} (\delta_k s_I), \quad (3.31)$$

isto é, $\Delta_k s_I \in \mathfrak{Im}(d^{k-1})$, sendo igual a zero na cohomologia. Finalmente, $[s] = [s_H]$, isto é $s_H \mapsto s$, e a aplicação $\mathfrak{N}(\Delta_k) \rightarrow H^k(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$ é sobrejetiva. \square

O teorema acima se aplica também para o caso de um complexo elíptico com apenas um operador, resultando no seguinte caso particular.

Corolário 3.15. *Seja $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ um operador elíptico levando seções do fibrado $E \rightarrow M$ em seções de $F \rightarrow M$, sobre variedade compacta M . Então, o núcleo $\mathfrak{N}(L)$ tem dimensão finita e existe uma decomposição ortogonal:*

$$\Gamma(E) = \mathfrak{N}(L) \oplus \mathfrak{Im}(L^*),$$

na qual L^* é o operador adjunto a L .

Demonstração. Como discutido anteriormente, o operador define um complexo elíptico:

$$0 \longrightarrow \Gamma(E) \xrightarrow{L} \Gamma(F) \longrightarrow 0.$$

O núcleo do laplaciano associado $L^*L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ tem dimensão finita, pelo teorema 3.14. Isso significa que $\mathfrak{N}(L) = \mathfrak{N}(L^*L)$ tem dimensão finita.

A decomposição (3.28) se torna, neste contexto,

$$\Gamma(E) = \mathfrak{N}(L) \oplus \mathfrak{Im}(L^*L).$$

Obviamente, $\mathfrak{Im}(L^*L) \subset \mathfrak{Im}(L^*)$, então $\Gamma(E) = \mathfrak{N}(L) + \mathfrak{Im}(L^*)$. Mas se $L^*s \in \mathfrak{Im}(L^*)$ e $h \in \mathfrak{N}(L)$, então

$$\langle L^*s, h \rangle = \langle s, Lh \rangle = 0,$$

garantindo que a decomposição é ortogonal. □

3.4 Algumas Aplicações

A partir de agora, desenvolveremos todas as contas acima nos exemplos particulares do complexo de de Rham e sua complexificação, visando o teorema da assinatura. O capítulo termina com uma discussão sobre o índice, que fornece mais uma possível motivação para se estudar os resultados apresentados aqui.

3.4.1 Complexo de de Rham

O desenvolvimento do teorema de Hodge ocorreu inicialmente com o complexo de de Rham, que motiva a notação utilizada para um complexo diferencial arbitrário. Este complexo foi apresentado no Capítulo 1 como um complexo diferencial

$$\dots \rightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{d^k} \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \dots$$

no qual os operadores são conhecidos como derivação exterior. Localmente, para uma k -forma $\omega \in \Omega^k(M)$, temos:

$$d^k \omega(p) = \sum_{|\gamma|=k} \sum_{j=1}^n \partial_j w_\gamma(p) dx^j \wedge dx^\gamma. \quad (3.32)$$

A cohomologia associada é a cohomologia de de Rham:

$$H_{dR}^k(M) := \mathfrak{N}(d^k) / \mathfrak{I}\mathfrak{m}(d^{k-1}).$$

A teoria desenvolvida nesse trabalho trata de fibrados vetoriais complexos. Por isso, utilizaremos a complexificação do complexo de de Rham. Assim, considere o produto tensorial $\Omega^k(M) \otimes \mathbb{C}$, que basicamente estende a multiplicação por escalares reais em $\Omega^k(M)$ para permitir multiplicação por escalares complexos. Aplicações lineares definidas nas formas se estendem para a complexificação. Por exemplo, temos a derivada exterior $d^k : \Omega^k(M) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Omega^{k+1}(M) \otimes \mathbb{C}$ definida por

$$d^k(\omega \otimes z) = (d^k \omega) \otimes z$$

para $\omega \in \Omega^k(M)$ e $z \in \mathbb{C}$. Ao longo desta seção, iremos omitir o produto tensorial por \mathbb{C} na notação, considerando apenas que as formas diferenciais têm imagem nos complexos. Na seção seguinte a distinção entre formas reais e complexas será necessária.

Como era de se esperar, a teoria desenvolvida pode ser aplicada no complexo de de Rham (complexificado) devido ao seguinte resultado:

Proposição 3.16. *O complexo de de Rham $(\Omega^\bullet(M), d^\bullet)$ de uma variedade compacta M é um complexo elíptico. O símbolo principal dos operadores d^k e de seus adjuntos δ_k são $\sigma_{d^k}(\xi) = i \text{ ext}(\xi)$ e $\sigma_{\delta_k}(\xi) = -i \text{ int}(\xi)$.*

Observação. Dado um vetor cotangente $\xi \in TM_p^*$, a multiplicação exterior $\text{ext}(\xi) : \Lambda^k(M)_p \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)_p$ é a aplicação linear

$$\omega \mapsto \text{ext}(\xi)\omega := \xi \wedge \omega.$$

De forma dual, a multiplicação interior $\text{int}(\xi) : \Lambda^k(M)_p \rightarrow \Lambda^{k-1}(M)_p$ é a linear que definimos da seguinte maneira. Tome uma base $\{dx^j\}_{j=1}^n$ de TM_p^* , logo temos as bases $\{dx^\gamma \mid |\gamma| = k\}$ e $\{dx^\eta \mid |\eta| = k-1\}$ de $\Lambda^k(M)_p$ e $\Lambda^{k-1}(M)_p$. Com respeito a estas bases, definimos a multiplicação interior por

$$\text{int}(dx^j)dx^\gamma = \begin{cases} (-1)^N dx^{\gamma - e_j} & \text{se } \gamma_j = 1 \\ 0 & \text{do contrário,} \end{cases}$$

onde N é o número de $(dx^l)^\eta$ diferentes de 1, para $l < j$. Isto é, $\text{int}(dx^j)$ anula as formas que não possuem o termo dx^j e para as demais apenas cancela o termo dx^j mantendo o sinal correspondente a sua posição. Estendemos a multiplicação interior para todas as formas linearmente. Para que a definição independa do sistema de coordenadas, é necessário utilizarmos uma métrica nas formas e supormos que a base $\{dx^j\}$ é ortonormal.

Demonstração. Na expressão local (3.32), a função $\partial_j \omega_\gamma = -iD^{e_j} \omega_\gamma$ é a componente de $d^k \omega$ na base $dx^j \wedge dx^\gamma$, isto é, sua restrição local. Assim, fixando $\xi \in TM_p^*$, temos o símbolo

$$\begin{aligned} \sigma_{d^k}(\xi)\omega(p) &= \sum_{|\gamma|=k} \sum_{j=1}^n i\xi_j \omega_\gamma(p) dx^j \wedge dx^\gamma = i \sum_j \xi_j dx^j \wedge \sum_{|\gamma|=k} \omega_\gamma(p) dx^\gamma \\ &= i\xi \wedge \omega(p) = i \text{ext}(\xi)\omega(p). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Poderíamos agora demonstrar a elipticidade do complexo diretamente, a partir da definição, mas para explicitarmos os símbolos dos operadores envolvidos utilizaremos a proposição 3.13 e mostraremos que os laplacianos associados são operadores elípticos. No caso de $\Delta_0 = \delta_1 d^0 : \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, já sabemos que isso é verdade, pois este trata-se do laplaciano usual operando em funções. Os demais $\Delta_k = \delta_{k+1} d^k + d^{k-1} \delta_k$ são denominados operadores de Laplace-de Rham. Esta observação é a justificativa do motivo pelo qual denominamos os operadores Δ_k laplacianos em qualquer complexo, pois eles generalizam o laplaciano usual.

Fixada uma métrica nas 1-formas, determinamos uma métrica nas k -formas pelo determinante de tamanho k

$$\langle dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}, dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_k} \rangle = \begin{vmatrix} \langle dx^{j_1}, dx^{l_1} \rangle & \cdots & \langle dx^{j_1}, dx^{l_k} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle dx^{j_k}, dx^{l_1} \rangle & \cdots & \langle dx^{j_k}, dx^{l_k} \rangle \end{vmatrix}.$$

Assim, fixados multi-índices $|\eta| = k$ e $|\gamma| = k - 1$, considere o produto interno $\langle dx^\eta, dx^j \wedge dx^\gamma \rangle$. A primeira coluna do determinante será da forma $[\langle dx^l, dx^j \rangle]$, com j fixo e l variando. Caso estejamos trabalhando com uma base ortonormal, essa coluna será nula exceto se $dx^l = dx^j$ para algum l . Isso quer dizer que se $\eta_j \neq 1$, então $\langle dx^\eta, dx^j \wedge dx^\gamma \rangle = 0$. Caso contrário, podemos retirar a linha e a coluna que contêm o termo $\langle dx^l, dx^j \rangle = 1$, reduzindo-o para um determinante de tamanho $k - 1$ e acrescentando um sinal que indica quantos l 's menores que j aparecem no determinante. Ou seja, em qualquer um dos casos,

$$\langle dx^\eta, dx^j \wedge dx^\gamma \rangle = \langle \text{int}(dx^j) dx^\eta, dx^\gamma \rangle.$$

Por linearidade, isso quer dizer que para quaisquer $\xi \in TM_p^*$, $\omega \in \Lambda^k(M)_p$ e $\tau \in \Lambda^{k-1}(M)_p$,

$$\langle \omega, i \operatorname{ext}(\xi)\tau \rangle = \langle -i \operatorname{int}(\xi)\omega, \tau \rangle. \quad (3.34)$$

Isso quer dizer que a aplicação adjunta a $\sigma_{d^{k-1}}(\xi)$ é

$$\sigma_{\delta_k}(\xi) = -i \operatorname{int}(\xi). \quad (3.35)$$

Finalmente, temos que:

$$\sigma_{\Delta_k} = \sigma_{d^{k-1}\delta_k + \delta_{k+1}d^k} = \sigma_{d^{k-1}}\sigma_{\delta_k} + \sigma_{\delta_{k+1}}\sigma_{d^k} = \operatorname{ext} \operatorname{int} + \operatorname{int} \operatorname{ext}$$

Seja $\xi = \sum_j \xi_j dx^j$. Então,

$$\sigma_{\Delta_k}(\xi)(dx^\gamma) = \sum_l \sum_j \xi_l \xi_j [\operatorname{ext}(dx^l) \operatorname{int}(dx^j) + \operatorname{int}(dx^l) \operatorname{ext}(dx^j)] dx^\gamma. \quad (3.36)$$

Podemos separar a soma em j em duas partes, uma para j tais que $\gamma_j = 1$ e outra quando $\gamma_j \neq 1$. No primeiro caso, $\operatorname{ext}(dx^j)dx^\gamma = 0$ e no segundo $\operatorname{int}(dx^j)dx^\gamma = 0$. Desse modo, ficamos com:

$$\sigma_{\Delta_k}(\xi)(dx^\gamma) = \sum_l \xi_l \left[\sum_{\gamma_j=1} \xi_j \operatorname{ext}(dx^l) \operatorname{int}(dx^j) + \sum_{\gamma_j \neq 1} \xi_j \operatorname{int}(dx^l) \operatorname{ext}(dx^j) \right] dx^\gamma.$$

Agora separamos a soma em l em três partes: $l = j$; $l \neq j$ e $\gamma_l = 1$; $l \neq j$ e $\gamma_l \neq 1$. Vamos analisar cada caso separadamente,

$$\begin{aligned} A &= \left[\sum_{\gamma_j=1} \xi_j^2 \operatorname{ext}(dx^j) \operatorname{int}(dx^j) + \sum_{\gamma_j \neq 1} \xi_j^2 \operatorname{int}(dx^j) \operatorname{ext}(dx^j) \right] dx^\gamma \\ &= \sum_{\gamma_j=1} \xi_j^2 dx^j \wedge (-1)^N dx^{\gamma-e_j} + \sum_{\gamma_j \neq 1} \xi_j^2 \operatorname{int}(dx^j) dx^j \wedge dx^\gamma \\ &= \sum_{\gamma_j=1} \xi_j^2 dx^\gamma + \sum_{\gamma_j \neq 1} \xi_j^2 dx^\gamma = |\xi|^2 dx^\gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \left[\sum_{\gamma_j=1} \sum_{\gamma_l=1} \xi_l \xi_j \operatorname{ext}(dx^l) \operatorname{int}(dx^j) + \sum_{\gamma_j \neq 1} \sum_{\gamma_l=1} \xi_l \xi_j \operatorname{int}(dx^l) \operatorname{ext}(dx^j) \right] dx^\gamma \\ &= \sum_{\gamma_j=1} \sum_{\gamma_l=1} \xi_l \xi_j dx^l \wedge (-1)^N dx^{\gamma-e_j} + \sum_{\gamma_j \neq 1} \sum_{\gamma_l=1} \xi_l \xi_j \operatorname{int}(dx^l) dx^j \wedge dx^\gamma \\ &= \sum_{\gamma_j \neq 1} \sum_{\gamma_l=1} \xi_l \xi_j \operatorname{int}(dx^l) dx^j \wedge dx^\gamma = - \sum_{\gamma_j \neq 1} \sum_{\gamma_l=1} \xi_l \xi_j dx^j \wedge \operatorname{int}(dx^l) dx^\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \left[\sum_{\gamma_j=1} \sum_{\gamma_l \neq 1} \xi_l \xi_j \text{ext}(dx^l) \text{int}(dx^j) + \sum_{\gamma_j \neq 1} \sum_{\gamma_l \neq 1} \xi_l \xi_j \text{int}(dx^l) \text{ext}(dx^j) \right] dx^\gamma \\
&= \sum_{\gamma_j=1} \sum_{\gamma_l \neq 1} \xi_l \xi_j dx^l \wedge (-1)^N dx^{\gamma-e_j} + \sum_{\gamma_j \neq 1} \sum_{\gamma_l \neq 1} \xi_l \xi_j \text{int}(dx^l) dx^j \wedge dx^\gamma \\
&= \sum_{\gamma_j=1} \sum_{\gamma_l \neq 1} \xi_l \xi_j dx^l \wedge (-1)^N dx^{\gamma-e_j} = \sum_{\gamma_j=1} \sum_{\gamma_l \neq 1} \xi_l \xi_j dx^l \wedge \text{int}(dx^j) dx^\gamma
\end{aligned}$$

Permutando os índices mudos j e l , percebemos que $B = -C$, consequentemente, $\sigma_{\Delta_k}(\xi) dx^\gamma = A + B + C = |\xi|^2 dx^\gamma$. Por linearidade,

$$\sigma_{\Delta_k}(\xi) = |\xi|^2 I_{\Lambda^k(M)_p}, \quad (3.37)$$

onde $I_{\Lambda^k(M)_p}$ é a identidade de $\Lambda^k(M)_p$. Assim, se $\xi \neq 0$, $\sigma_{\Delta_k}(\xi) : \Lambda^k(M)_p \rightarrow \Lambda^k(M)_p$ é um isomorfismo, de onde segue que o complexo é elíptico. \square

Agora podemos aplicar o teorema 3.14 no complexo $(\Omega^\bullet(M), d^\bullet)$ e obter o teorema original, enunciado por Hodge em 1935.

Teorema 3.17 (Hodge). *Seja M variedade riemanniana compacta, de dimensão n e $\Delta_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ os operadores de Laplace-de Rham associados. Então:*

- (a) $\mathfrak{N}(\Delta_k)$ é um espaço vetorial de dimensão finita;
- (b) O espaço das k -formas diferenciais admite uma decomposição ortogonal:

$$\Omega^k(M) = \mathfrak{N}(\Delta_k) \oplus \mathfrak{Im}(d^{k-1}) \oplus \mathfrak{Im}(\delta_{k+1});$$

(c) A aplicação $\mathfrak{N}(\Delta_k) \rightarrow H_{dR}^k(M)$ que leva uma k -forma harmônica ω em sua classe $[\omega]$ na cohomologia de de Rham é um isomorfismo.

Observação. Na decomposição do item (b) escrevemos $\mathfrak{Im}(d^{k-1}) \oplus \mathfrak{Im}(\delta_{k+1})$ ao invés de $\mathfrak{Im}(\Delta_k)$, mas esses dois conjuntos são iguais. A inclusão $\mathfrak{Im}(\Delta_k) \subset \mathfrak{Im}(d^{k-1}) \oplus \mathfrak{Im}(\delta_{k+1})$ é óbvia, o que significa:

$$\Omega^k(M) = \mathfrak{N}(\Delta_k) + \mathfrak{Im}(d^{k-1}) \oplus \mathfrak{Im}(\delta_{k+1}).$$

Mas se $\omega \in \mathfrak{N}(\Delta_k)$, isto é, $\Delta_k \omega = 0$, temos que $d^k \omega = 0 = \delta_k \omega$, como visto na igualdade (3.30). Portanto, ω é perpendicular a $\mathfrak{Im}(\delta_{k+1})$ e $\mathfrak{Im}(d^{k-1})$, visto que:

$$\langle \omega, \delta_{k+1} \tau \rangle = \langle d^k \omega, \tau \rangle = 0 = \langle \delta_k \omega, \tau' \rangle = \langle \omega, d^{k-1} \tau' \rangle \quad (3.38)$$

para qualquer $\delta_{k+1} \tau \in \mathfrak{Im}(\delta_{k+1})$ e $d^{k-1} \tau' \in \mathfrak{Im}(d^{k-1})$.

Se a variedade riemanniana M é orientável, isto é, se existe uma n -forma volume $\nu \in \Omega^n(M)$ que não se anula em nenhum ponto, a álgebra das formas está munida de isomorfismos $\star_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$, definidos por

$$\omega \wedge \star_k \tau = (\omega \cdot \tau) \nu,$$

para quaisquer $\omega, \tau \in \Omega^k(M)$. Na expressão acima, \cdot é o produto interno em $\Lambda^k(M)$ induzido pela métrica riemanniana. A aplicação \star é denominada operador de Hodge. Fixando um sistema de coordenadas locais tal que $\{dx^j\}_{j=1}^n$ seja um conjunto ortogonal e organizando os índices de forma que $\nu = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, temos que

$$dx^n \wedge \star_k dx^\gamma = \delta_\eta^\gamma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Assim, concluímos que $\star_k dx^\gamma = \varsigma(\gamma) dx^{\gamma^c}$, onde γ^c é um multi-índice tal que $\gamma + \gamma^c \geq (1, \dots, 1)$, ou seja, é complementar a γ . O sinal $\varsigma(\eta) = \pm 1$ é tal que

$$\varsigma(\gamma) dx^\gamma \wedge dx^{\gamma^c} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Por outro lado $\star_{n-k} dx^{\gamma^c} = \varsigma(\gamma^c) dx^\gamma$, onde o sinal $\varsigma(\gamma^c) = \pm 1$ é tal que

$$\varsigma(\gamma^c) dx^{\gamma^c} \wedge dx^\gamma = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Como o produto exterior é antissimétrico, $dx^\gamma \wedge dx^{\gamma^c} = (-1)^{k(n-k)} dx^{\gamma^c} \wedge dx^\gamma$. Isso quer dizer que $\varsigma(\gamma^c)\varsigma(\gamma) = (-1)^{k(n-k)}$, de onde:

$$\star_{n-k} \star_k = (-1)^{k(n-k)}. \quad (3.39)$$

Como supomos M compacta e sem bordo, o teorema de Stokes diz que

$$\int_M d^{k-1} \omega = 0$$

para qualquer $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Em particular, dados $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\beta \in \Omega^{n-k-1}(M)$, pelas propriedades da derivada exterior:

$$0 = \int_M d^{n-1}(\alpha \wedge \beta) = \int_M d^k \alpha \wedge \beta + (-1)^k \int_M \alpha \wedge d^{n-k-1} \beta. \quad (3.40)$$

Logo, tomando $\tau \in \Omega^k(M)$ e $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ quaisquer,

$$\begin{aligned} \int_M \tau \wedge \star_k \delta_{k+1} \omega &= \int_M (\tau \cdot \delta_{k+1} \omega) \nu = \langle \tau, \delta_{k+1} \omega \rangle = \langle d^k \tau, \omega \rangle = \int_M (d^k \tau \cdot \omega) \nu \\ &= \int_M d^k \tau \wedge \star_{k+1} \omega = (-1)^{k+1} \int_M \tau \wedge d^{n-k-1} \star_{k+1} \omega. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade das formas escolhidas, isso quer dizer que

$$\star_k \delta_{k+1} = (-1)^{k+1} d^{n-k-1} \star_{k+1},$$

ou, aplicando a equação (3.39),

$$\delta_k = -(-1)^{n(k+1)} \star_{n-k+1} d^{n-k} \star_k. \quad (3.41)$$

Finalmente podemos demonstrar a última decorrência do teorema de Hodge para o complexo de de Rham que apresentaremos.

Teorema 3.18 (Dualidade de Poincaré). *Seja M variedade riemanniana compacta orientável. A aplicação \star_k induz um isomorfismo $\star_k : \mathfrak{N}(\Delta_k) \rightarrow \mathfrak{N}(\Delta_{n-k})$ e, conseqüentemente, $H_{dR}^k(M) \simeq H_{dR}^{n-k}(M)$.*

Demonstração. Da relação (3.41) concluímos que:

$$\begin{aligned} \star_k \Delta_k &= \star_k (d^{k-1} \delta_k + \delta_{k+1} d^k) = (-1)^k \delta_{n-k+1} \star_{k-1} \delta_k + (-1)^{k+1} d^{n-k-1} \star_{k+1} d^k \\ &= \delta_{n-k+1} d^{n-k} \star_k + d^{n-k-1} \delta_{n-k} \star_k = \Delta_{n-k} \star_k. \end{aligned}$$

Dessa maneira, o operador de Hodge leva formas harmônicas em formas harmônicas, pois se $\omega \in \mathfrak{N}(\Delta_k)$, então

$$\Delta_{n-k} \star_k \omega = \star_k \Delta_k \omega = 0. \quad (3.42)$$

Naturalmente, a aplicação linear $\star_k : \mathfrak{N}(\Delta_k) \rightarrow \mathfrak{N}(\Delta_{n-k})$, assim definida, possui a inversa $(-1)^{k(n-k)} \star_{n-k} : \mathfrak{N}(\Delta_{n-k}) \rightarrow \mathfrak{N}(\Delta_k)$, logo é um isomorfismo.

Nestas condições, a afirmação $H_{dR}^k(M) \simeq H_{dR}^{n-k}(M)$ é uma decorrência direta do teorema de Hodge. □

3.4.2 Teorema da Assinatura

Seja M uma variedade riemanniana compacta orientável com dimensão $4l$ e Δ_{2l} o $2l$ -ésimo operador de Laplace-de Rham. Neste caso, defina a bilinear $\mathcal{B} : \mathfrak{N}(\Delta_{2l}) \times \mathfrak{N}(\Delta_{2l}) \rightarrow \mathbb{R}$ que associa para $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}(\Delta_{2l})$ o valor

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) := \int_M \alpha \wedge \beta.$$

Como as formas são pares, $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$, de onde \mathcal{B} é simétrica. Pela definição do operador de Hodge, temos também que

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \star_{2l} \beta \rangle,$$

que é a composição de um produto interno com um isomorfismo, logo \mathcal{B} é não-degenerada. Neste caso, lembrando que o teorema de Hodge garante que a dimensão de $\mathfrak{N}(\Delta_{2l})$ é finita, podemos falar da assinatura de \mathcal{B} , isto é, a diferença entre a dimensão do subespaço para o qual \mathcal{B} é estritamente positiva e a dimensão do subespaço onde é estritamente negativa. Neste contexto, a equação (3.39) se torna

$$(\star_{2l})^2 = \star_{2l}\star_{2l} = I,$$

na qual $I : \mathfrak{N}(\Delta_{2l}) \rightarrow \mathfrak{N}(\Delta_{2l})$ é a identidade. Assim, podemos decompor $\mathfrak{N}(\Delta_{2l})$ em dois subespaços associados aos autovalores 1 e -1 de \star_{2l} . Denotamos eles por

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_+ &= \{\omega \in \mathfrak{N}(\Delta_{2l}) \mid \star_{2l}\omega = \omega\} \\ \mathfrak{N}_- &= \{\omega \in \mathfrak{N}(\Delta_{2l}) \mid \star_{2l}\omega = -\omega\}.\end{aligned}$$

É imediato verificar que dados $v \in \mathfrak{N}_+$ e $\tau \in \mathfrak{N}_-$ então $\mathcal{B}(v, v) > 0$ e $\mathcal{B}(\tau, \tau) < 0$. Definimos $\text{Sig}(M)$ como a assinatura de \mathcal{B} . Pelas observações acima,

$$\text{Sig}(M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{N}_+ - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{N}_-. \quad (3.43)$$

Salientamos acima que a dimensão está sendo calculada considerando-se a estrutura de \mathbb{R} -espaço vetorial.

Nas condições acima, isto é, com M orientável de dimensão $4l$, e considerando a complexificação da álgebra das formas, $\bigoplus_k \Omega^k(M) \otimes \mathbb{C}$, temos a aplicação

$$\tau_k = i^{k(k-1)+2l} \star_k : \Omega^k(M) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Omega^{4l-k}(M) \otimes \mathbb{C}.$$

O expoente no imaginário puro foi escolhido de forma que $\tau_{4l-k}\tau_k = 1$, que obtemos calculando:

$$\begin{aligned}\tau_{4l-k}\tau_k &= i^{(4l-k)(4l-k-1)+2l} \star_{4l-k} i^{k(k-1)+2l} \star_k \\ &= i^{k(k+1)+2l+k(k-1)+2l} \star_{4l-k} \star_k = (-1)^{k^2} (-1)^{k(4l-k)} = 1.\end{aligned} \quad (3.44)$$

Definimos, então, uma aplicação idempotente:

$$\tau := \bigoplus_k \tau_k : \Omega(M) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Omega(M) \otimes \mathbb{C}.$$

Como $\tau^2 = 1$, podemos decompor a álgebra das formas nos autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 ,

$$\Omega(M) \otimes \mathbb{C} = \Omega_+(M) + \Omega_-(M),$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega_+(M) &= \{\omega \in \Omega(M) \otimes \mathbb{C} \mid \tau\omega = \omega\} \\ \Omega_-(M) &= \{\omega \in \Omega(M) \otimes \mathbb{C} \mid \tau\omega = -\omega\}.\end{aligned}$$

Denotando $\mathcal{D} := \oplus_k (d^k + \delta_k) : \Omega(M) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Omega(M) \otimes \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\tau &= \oplus_k (d^{4l-k} + \delta_{4l-k})\tau_k = \oplus_k i^{k(k-1)+2l} (d^{4l-k} + \delta_{4l-k})\star_k \\
&= \oplus_k i^{k(k-1)+2l} [(-1)^k \star_{k-1} \delta_k + (-1)^{k+1} \star_{k+1} d^k] \\
&= \oplus_k [i^{k(k-1)+2l} (-i^{-2(k-1)}) \star_{k-1} \delta_k + i^{k(k-1)+2l} (-i^{2k}) \star_{k+1} d^k] \\
&= \oplus_k [-i^{(k-2)(k-1)+2l} \star_{k-1} \delta_k - i^{k(k+1)+2l} \star_{k+1} d^k] \\
&= \oplus_k (-\tau_{k-1}\delta_k - \tau_{k+1}d^k) = -\tau\mathcal{D}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Isso quer dizer que se restringirmos \mathcal{D} aos autoespaços de τ , teremos uma troca entre os autovalores 1 e -1 , resultando em aplicações

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D} : \Omega_+(M) \rightarrow \Omega_-(M) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_- = \mathcal{D} : \Omega_-(M) \rightarrow \Omega_+(M). \tag{3.46}$$

Como \mathcal{D} é auto-adjunto decorre que $\mathcal{D}_- = \mathcal{D}_+^*$. Além disso, a conta acima garante que τ leva o núcleo de \mathcal{D} em si mesmo.

Teorema 3.19 (Assinatura). *Seja M variedade riemanniana compacta com dimensão $4l$. Sejam $\text{Sig}(M)$ e \mathcal{D}_+ definidos como acima. Então,*

$$\text{Sig}(M) = \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}(\mathcal{D}_+)] - \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}(\mathcal{D}_+^*)] \tag{3.47}$$

Demonstração. Os núcleos de \mathcal{D}_+ e $\mathcal{D}_+^* = \mathcal{D}_-$ são somas em k de intersecções $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(d^k) \cap \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\delta_k)$ e estes são iguais a $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k)$, conforme equação (3.30). Aqui, estamos considerando os núcleos na complexificação $\Omega^k(M) \otimes \mathbb{C}$, esse é o motivo do índice \mathbb{C} .

Para expressarmos o lado direito de (3.47) em termos dos núcleos $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k)$, gostaríamos de decompor cada $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k)$ em autoespaços de τ associados aos valores 1 e -1 . Mas, com exceção de $k = 2l$, estes espaços não são invariantes pela ação de τ , já que

$$\tau : \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) \rightarrow \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k}).$$

Por essa razão, trabalharemos com as somas $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})$, que são invariantes. Assim, definimos

$$[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})]_+ \quad \text{e} \quad [\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})]_-$$

da maneira óbvia: $\tau\omega = \omega$ e $\tau\omega = -\omega$, respectivamente. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}(\mathcal{D}_+)] - \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}(\mathcal{D}_+^*)] &= \sum_{k=0}^{2l-1} \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})]_+ \\
&\quad + \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2l})]_+ - \sum_{k=0}^{2l-1} \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})]_- \\
&\quad - \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2l})]_-
\end{aligned}$$

Para calcularmos a dimensão do espaço $[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})]_+$, observamos que dados $u \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k)$ e $v \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})$, a informação $u + v \in [\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})]_+$ é equivalente a:

$$u + v = \tau(u + v) = \tau u + \tau v.$$

Como $\tau u \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})$ e $\tau v \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k)$ e esses dois espaços são linearmente independentes, isso quer dizer que $v = \tau u$. Analogamente, se $u + v \in [\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})]_-$ concluimos que $v = -\tau u$. Isso mostra que as aplicações lineares

$$\psi_{\pm}^k : \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) \rightarrow [\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k) + \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{4l-k})]_{\pm}$$

definidas como $\psi_{\pm}^k(u) = u \pm \tau u$ são sobrejetivas. É imediato ver que cada ψ_{\pm}^k é injetiva, logo um isomorfismo.

Finalmente, observando que a dimensão real de um \mathbb{R} -espaço vetorial é igual a dimensão complexa de sua complexificação, obtemos que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}(\mathcal{D}_+)] - \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}(\mathcal{D}_+^*)] &= \sum_{k=0}^{2l-1} \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k)] + \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2l})]_+ \\ &\quad - \sum_{k=0}^{2l-1} \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_k)] - \dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2l})]_- \\ &= \dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{N}_+ - \dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{N}_- = \text{Sig}(M), \end{aligned}$$

devido à equação (3.43). □

3.4.3 O Índice de um Complexo Elíptico

Como discutido anteriormente, o corolário 3.15 garante que associado a um operador elíptico temos um número $\dim[\mathfrak{N}(L)]$ que determina a dimensão do espaço de soluções da equação diferencial:

$$Ls = f.$$

Tal número não é facilmente calculável no caso geral. Contudo uma fórmula pode ser obtida para outro número associado ao operador elíptico L , seu índice:

$$\text{Ind}(L) = \dim[\mathfrak{N}(L)] - \dim[\mathfrak{N}(L^*)].$$

A verificação do fato $\dim[\mathfrak{N}(L^*)] < \infty$ é análoga à demonstração do corolário 3.15. Lá aplicamos o teorema 3.14 ao laplaciano L^*L do complexo

$$0 \longrightarrow \Gamma(E) \xrightarrow{L} \Gamma(F) \longrightarrow 0.$$

Se aplicarmos o mesmo teorema ao laplaciano $LL^* : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F)$, obtemos a finitude da dimensão do núcleo de L^* , e portanto $\text{Ind}(L) < \infty$.

No caso geral, dado um complexo elíptico $(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet)$ definimos seu índice como a soma alternada das dimensões dos núcleos dos laplacianos associados:

$$\text{Ind}(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet) = \sum_k (-1)^k \dim[\mathfrak{N}(\Delta_k)] = \sum_k \dim[\mathfrak{N}(\Delta_{2k})] - \sum_k \dim[\mathfrak{N}(\Delta_{2k-1})].$$

Utilizando as equações (3.24) e (3.25) da proposição 3.13, temos que

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Gamma(E^\bullet), d^\bullet) &= \dim[\mathfrak{N}(\oplus_k \Delta_{2k})] - \dim[\mathfrak{N}(\oplus_k \Delta_{2k-1})] \\ &= \dim[\mathfrak{N}((d + \delta)^*(d + \delta))] - \dim[\mathfrak{N}((d + \delta)(d + \delta)^*)] \\ &= \dim[\mathfrak{N}(d + \delta)] - \dim[\mathfrak{N}((d + \delta)^*)] \\ &= \text{Ind}(d + \delta), \end{aligned} \tag{3.48}$$

onde o operador $(d + \delta) = \bigoplus_k (d^{2k} + \delta_{2k}) : \bigoplus_k \Gamma(E^{2k}) \rightarrow \bigoplus_k \Gamma(E^{2k-1})$ é elíptico, pela proposição 3.13. Assim, o índice de um complexo elíptico pode ser equivalentemente calculado como o índice de um operador elíptico apropriado.

A fórmula do índice, obtida por Michael Atiyah e Isadore Singer em 1963 determina o índice de um operador elíptico (ou complexo, pela observação acima) em termos de informação topológica determinada pelo operador. Não vamos apresentar este resultado, pois isso exigiria definir classes características e apresentar alguns conceitos de K-teoria.

Voltemos para o complexo de de Rham. O item (c) do teorema de Hodge diz que os núcleos dos laplacianos são isomorfos aos espaços de cohomologia do fibrado, neste caso, à cohomologia de de Rham. Assim,

$$\text{Ind}(\Omega^\bullet(M), d^\bullet) = \sum_k (-1)^k \dim[H_{dR}^k(M)] \tag{3.49}$$

As dimensões dos espaços de cohomologia são conhecidas como números de Betti $b_k = \dim[H_{dR}^k(M)]$ e representam, intuitivamente, a quantidade de “buracos $(k + 1)$ -dimensionais” da variedade. Sua soma alternada resulta na característica de Euler-Poincaré da variedade $\chi(M)$ que também pode ser obtida como a soma alternada da quantidade de k -células em uma triangularização de M . Dessa maneira,

$$\text{Ind}(\Omega^\bullet(M), d^\bullet) = \chi(M).$$

O teorema de Atiyah-Singer, neste caso, pode ser expresso pela fórmula de Gauss-Bonnet, que determina $\chi(M)$ como a integral de componentes do tensor de curvatura de M . Mais especificamente é a integral da *classe de Euler* associada à conexão de Levi-Civita.

Já no exemplo seguinte, temos o operador elíptico $\mathcal{D}_+ : \Omega_+(M) \rightarrow \Omega_-(M)$ e a expressão para seu índice

$$\text{Ind}(\mathcal{D}_+) = \text{Sig}(M).$$

Aqui, a fórmula de Atiyah-Singer é dada pelo teorema de Hirzebruch, que expressa o invariante topológico $\text{Sig}(M)$ em termos de classes características.

Definições mais precisas e resultados citados acima podem ser encontrados nos artigos originais de Atiyah e Singer ([9] e [10]), como também nas referências [2] e [3], com diferentes objetivos e grau de detalhamento. Desenvolver tal teoria foge do objetivo desse trabalho, pois se trata de um universo inteiro de relações cujas consequências ainda estão sendo descobertas e que têm o teorema de Hodge como apenas porta de entrada.

Referências Bibliográficas

- [1] Ramanan, S: *Global Calculus*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.
- [2] Yanlin, Yu: *The Index Theorem and the Heat Equation Method*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 2001.
- [3] Gilkey, Peter B.: *Invariance Theory, the heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem*. 2ed, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1995.
- [4] Folland, Gerald B.: *Introduction to Partial Differential Equations*. 2ed, Princeton University Press, New Jersey, 1995.
- [5] Evans, Lawrence C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.
- [6] Lima, Elon L.: *Curso de Análise*. vol.2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [7] Royden, H. L.: *Real Analysis*. The Macmillan Company, New York, 1963.
- [8] Lima, Elon L.: *Variedades Diferenciáveis*. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [9] Atiyah, Michael F.; Singer, Isadore M. *The Index of Elliptic Operators: I*. The Annals of Mathematics, Vol. 87, No. 3, 484–530, 1968.
- [10] Atiyah, Michael F.; Singer, Isadore M. *The Index of Elliptic Operators: III*. The Annals of Mathematics, Vol. 87, No. 3, 546–604, 1968.
- [11] Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E.; Ratiu, Tudor. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Applied Mathematical Sciences; v. 75, Springer, New York, 2009.

-
- [12] Peet, Matthew M. *A Generalized Chain Rule and a Bound on the Continuity of Solutions and Converse Lyapunov Functions*. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P. R. China, 2009.
- [13] Atiyah, Michael F.; Hitchin, Nigel. *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*. M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, 1988.