

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS SUBMETIDAS A
RESTRIÇÕES DE FLEXIBILIDADE, VOLUME E FREQUÊNCIA NATURAL**

por

Rodrigo Muza Mosmann

Dissertação para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, outubro de 2003.

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS SUBMETIDAS A
RESTRIÇÕES DE FLEXIBILIDADE, VOLUME E FREQUÊNCIA NATURAL**

por

Rodrigo Muza Mosmann
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Área de concentração: Mecânica dos sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Inácio Benvegno Morsch

Prof. Dr. Rogério Marczak

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, outubro de 2003.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Professor Jun Sérgio Ono Fonseca, não só pela orientação (do brilhante professor, que admiro muito), mas também pela agradável convivência (embora muito pequena, devido à distância entre nós).

Gostaria de agradecer (imensamente) também ao amigo Eduardo Lenz Cardoso, por toda a ajuda dada no estudo de Otimização e Elementos Finitos e incentivo pessoal.

Aos professores Ignácio Iturrioz, Inácio Benvegnu Morsch e Rogério Marczak, membros integrantes da banca examinadora, pelas correções e sugestões do trabalho.

À toda a minha família, em especial à minha mãe e ao meu avô, por terem me feito chegar onde cheguei.

Aos amigos do GMAp, Hervandil Sant'Anna, Carlos Guilherme e Tiago Becker, pelas dicas em geral.

Aos professores Adriane Petry e Álvaro de Bortolli, pela curiosidade à pesquisa que despertaram em mim.

À minha namorada Luciana, por todo o apoio dado durante a execução deste trabalho.

Por fim, à Universidade, que abriu as portas e serviu de base para este estudo e a todas as pessoas que aqui não foram citadas, mas que de alguma forma contribuíram no desenvolvimento dessa dissertação.

RESUMO

Este trabalho trata dos problemas de otimização de minimização de volume com restrição de flexibilidade e frequência natural e minimização de flexibilidade com restrição de volume. Os problemas são resolvidos para estruturas bidimensionais e tridimensionais.

As equações diferenciais de equilíbrio são solucionadas de forma aproximada através do método dos elementos finitos, em um subespaço de dimensão finita.

O método utilizado no estudo é o da otimização topológica, o qual consiste em encontrar dentro de um domínio pré-existente uma distribuição ideal de material. São avaliadas técnicas como programação linear e critério de ótimo. Em ambos os casos são utilizadas sensibilidades calculadas analiticamente.

Para a otimização com restrição modal, problemas característicos como autovalores repetidos e normalização do autovetor são tratados.

Ferramentas usadas na otimização topológica, como método da continuação, penalização e filtragem são discutidos.

São abordados também problemas e características inerentes ao processo de otimização topológica, tais como instabilidades de tabuleiros, dependência de malha e sensibilidade da topologia a diferentes condições de contorno.

Os resultados obtidos permitem avaliações referentes à otimização topológica (geometrias, ou seja, topologias resultantes) sob diferentes condições, utilizando-se as ferramentas discutidas nesse trabalho.

ABSTRACT

“TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURES UNDER COMPLIANCE, VOLUME AND NATURAL FREQUENCY CONSTRAINTS”

This work presents the problem of volume minimization with compliance and natural frequency constraints and minimization of compliance with volume constraint. The problems are solved to the two-dimensional and tri-dimensional continuous structures.

The equilibrium differential equations are solved using the finite element method, approximating the solution in a finite dimensional space by a system of linear equations.

The approach chosen for the optimization was the topology optimization technique, formulated as finding the best material distribution over a fixed domain. Two techniques were evaluated for solution of the optimization, optimality criteria and sequential linear programming. In all cases, the sensibility analyses are solved using analytic calculations.

The sensibilities analysis applied to compliance and volume are straightforward. However, the modal problem presents some difficulties in the optimization technique, like for example, repeated eigenvalue and the normalization of the eigenvector.

Optimization tools like “the continuation method”, penalization and neighborhood filter are studied and used.

Characteristics and problems of the topology optimization, like checkerboards patterns, mesh and boundary conditions dependency are also studied.

The results obtained permit to evaluate the final topology, under different conditions and using the tools discussed in this work.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
3.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA MECÂNICA GERAL.....	4
3.1.	MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS	4
3.1.1.	<i>ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)</i>	6
3.1.2.	<i>ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)</i>	7
3.2.	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....	9
3.2.1.	<i>HISTÓRICO</i>	9
3.2.2.	<i>REVISÃO DO MÉTODO</i>	10
3.3.	O PROBLEMA MODAL.....	11
4.	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	13
4.1.	INTRODUÇÃO	13
4.2.	CONCEITOS BÁSICOS.....	13
4.2.1.	<i>FUNÇÃO OBJETIVO</i>	14
4.2.2.	<i>VARIÁVEIS DE PROJETO</i>	14
4.2.3.	<i>RESTRICÇÕES</i>	15
4.2.4.	<i>MÁXIMOS E MÍNIMOS</i>	15
4.3.	TIPOS DE PROBLEMA.....	17
4.4.	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	19
4.4.1.	<i>FUNCIONAIS SEM RESTRICÇÕES</i>	19
4.4.2.	<i>FUNCIONAIS COM RESTRICÇÕES</i>	19
4.5.	CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)	20
4.6.	TÉCNICAS DE SOLUÇÃO	21
4.6.1.	<i>CRITÉRIO DE ÓTIMO (CO)</i>	21
4.6.2.	<i>PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA</i>	21
4.6.3.	<i>PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP)</i>	22
5.	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	25
5.1.	ASPECTOS GERAIS	25
5.2.	CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	29
5.2.1.	<i>INSTABILIDADE DE TABULEIRO</i>	29
5.2.2.	<i>DEPENDÊNCIA DA MALHA</i>	31
5.3.	FILTRAGEM	31

6.	IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO	33
6.1.	FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ESTUDADOS	34
6.2.	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	35
6.2.1.	<i>DERIVADA DO VOLUME</i>	35
6.2.2.	<i>DERIVADA DO TRABALHO EXTERNO</i>	35
6.2.3.	<i>DERIVADA DE AUTOVALORES SIMPLES</i>	37
6.2.4.	<i>DERIVADA DE AUTOVALORES REPETIDOS</i>	39
6.2.5.	<i>DERIVADA DE AUTOVALORES POR DIFERENÇAS FINITAS À FRENTE</i>	42
6.3.	SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS	42
6.3.1.	<i>CRITÉRIO DE ÓTIMO (FLEXIBILIDADE/VOLUME)</i>	43
6.3.2.	<i>PROGRAMAÇÃO LINEAR</i>	45
6.4.	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	45
7.	RESULTADOS	47
7.1.	PROBLEMAS DE TESTE.....	47
7.2.	MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO DE VOLUME	53
7.2.1.	<i>MÉTODO DA CONTINUAÇÃO</i>	53
7.2.2.	<i>TOLERÂNCIA NO CRITÉRIO DE ÓTIMO (CO)</i>	60
7.2.3.	<i>CRITÉRIO DE ÓTIMO (CO) x PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP)</i>	63
7.2.4.	<i>INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO</i>	66
7.2.5.	<i>FILTRAGEM</i>	71
7.2.6.	<i>MÚLTIPLOS CASOS DE CARREGAMENTO</i>	84
7.3.	MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FLEXIBILIDADE	91
7.4.	MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FREQUÊNCIA NATURAL 101	
7.5.	ALGUNS CASOS TRIDIMENSIONAIS	118
8.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE.....	127
9.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	129
AI.	APÊNDICE I: ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS (FORMULAÇÃO).....	132
AI.1.	ELEMENTO DE BARRAS	132
AI.2.	ELEMENTO TRIANGULAR DE DEFORMAÇÕES CONSTANTES (CST)	136
AI.3.	ELEMENTO QUADRILÁTERO BILINEAR ISOPARAMÉTRICO	139
AI.4.	ELEMENTO HEXAÉDRICO TRILINEAR ISOPARAMÉTRICO	142
AII.	APÊNDICE II: DETALHES DO PROGRAMA IMPLEMENTADO	145
AII.1.	ENTRADA E SAÍDA DE DADOS	145

AII.2.	ESQUEMA DOS CÁLCULOS EMPREGADOS	146
AIII.	APÊNDICE III: O MÉTODO DE JACOBI.....	154
AIII.1.	SOLUÇÃO STANDARD	154
AIII.2.	SOLUÇÃO GENERALIZADA.....	155
AIV.	APÊNDICE IV: O MÉTODO DE LANCZOS	159
AIV.1.	ELABORAÇÃO DO PROBLEMA	159
AIV.2.	ALGORITMO DE SOLUÇÃO.....	162

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Funções dos elementos das matrizes de rigidez e massa (Jacobi)	
∇	Vetor gradiente	
λ	Coefficiente de Lamé Multiplicador de Lagrange Vetor de Autovalores	[N/m ²]
μ	Coefficiente de Lamé Multiplicador de Lagrange	[N/m ²]
γ	Funções dos elementos das matrizes de rigidez e massa (Jacobi)	
Ω	Domínio	[m ³]
ν	Coefficiente de Poisson	
ω	Frequência Natural	Hz
ϕ	Autovetores	
ρ	Densidade de material	
ϵ	Deformação específica	[N/m ²]
θ	Rotação imposta pelo método de Jacobi	
Γ_d	Superfície de aplicação das condições de contorno de Dirichlet	[m ²]
Ω^e	Domínio do elemento	[m ³]
σ_{ij}	Tensão na direção de j perpendicular ao eixo i	[N/m ²]
ϵ_{ij}	Deformação infinitesimal na direção j perpendicular ao eixo i	
Γ_n	Superfície de aplicação das condições de contorno de Neuman	[m ²]
$\delta \mathbf{u}$	Deslocamento virtual	[m]
\cdot^{-1}	Inversa de uma matriz quadrada	
\cdot^T	Transposta de uma matriz ou vetor	
$ \mathbf{J} $	Determinante da matriz jacobiana	
A	Área do elemento	
\mathbf{a}_i	Limites móveis	
\mathbf{b}	Vetor das forças de corpo	[N/m ³]
\mathbf{B}	Matriz das derivadas das funções de interpolação	
\mathbf{C}	Matriz de amortecimento	
\mathbf{C}_{ijkl}	Tensor constitutivo de 4ª ordem de propriedades elásticas	
\det	Determinante de uma matriz	

diag	Diagonal principal de uma matriz	
E	Módulo de elasticidade longitudinal	[N/m ²]
E⁰_{ijkl}	Tensor constitutivo do material de base	[N/m ²]
E_{ijkl}	Tensor constitutivo efetivo	[N/m ²]
f	Vetor de forças	[N]
G	Módulo de elasticidade transversal	[N/m ²]
g(x)	Conjunto das restrições de desigualdade	
h(x)	Conjunto das restrições de igualdade	
I	Matriz identidade	
iter	Iteração atual	
J	Matriz jacobiana	
k	Passo de iteração (Jacobi)	
K	Matriz de rigidez global	
	Conjunto dos pontos viáveis	
K_e	Matriz de rigidez local	
l	Passo de iteração anterior (método de Jacobi)	
L	Função de Lagrange	
M	Matriz de massa	
n	Vetor normal unitário a uma superfície	
Nelem	Número de elementos	
N_i	Função de interpolação do nó i	
s	Expoente do critério de convergência de Jacobi	
S(x)	Função objetivo	
t	Vetor de trações superficiais (Cauchy)	[N/m ²]
u	Vetor de deslocamentos	[m]
x	Vetor de deslocamentos	[m]
\dot{x}	Vetor velocidades	[m/s]
\ddot{x}	Vetor aceleração	[m/s ²]
x[*]	Ponto extremo de um funcional	

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Deformação e tensor de tensões. _____	5
Figura 2: Estado plano de tensões. _____	7
Figura 3: Estado plano de deformações. _____	8
Figura 4: Mínimos e máximos de uma função objetivo. _____	16
Figura 5: Função convexa. _____	16
Figura 6: Função não convexa. _____	17
Figura 7: Representação de um processo de otimização dimensional. _____	17
Figura 8: Parâmetros usados em uma geometria que sofrerá otimização de forma. _____	18
Figura 9: Ilustração do processo de otimização topológica, onde os elementos pintados e vazios representam respectivamente a presença e a ausência de material. _____	18
Figura 10: Representação geométrica das condições de KKT. _____	20
Figura 11: Ilustração do problema de otimização topológica. _____	25
Figura 12: Representação da influência do expoente de penalização no tensor constitutivo. ____	27
Figura 13: Comparação entre formulação convexa e não-convexa. _____	28
Figura 14: Penalização da função objetivo _____	29
Figura 15: Instabilidade de tabuleiro. _____	30
Figura 16: Representação do modelo de filtragem espacial de pesos médios, onde os elementos filtrados são aqueles que possuem seus centróides contidos no círculo de raio \square . _____	31
Figura 17: Metodologia empregada na otimização. _____	33
Figura 18: Esquema utilizado na bisseção. _____	44
Figura 19: Problema 1 (placa de 0,2x0,1x0,001m apoiada na base). _____	47
Figura 20: Problema 2 (placa de 0,2x0,1x0,001m, engastada na base, com deslocamento livre no centro). _____	47
Figura 21: Problema 3 (placa de 0,2x0,1x0,001m, apoiada na base, com deslocamento livre no centro). _____	48
Figura 22: Problema 4 (placa de dimensões 0,08x0,05x0,001m, com carga na extremidade inferior direita). _____	48
Figura 23: Problema 5 (duplo caso de carregamento). _____	49
Figura 24: Problema 6 (placa de dimensões 8x5x0,1m, tipo ponte com apoios nas pontas). ____	49
Figura 25: Problema 7 (placa de dimensões 8x5x1, com massa concentrada no nó do canto inferior direito). _____	50
Figura 26: Problema 8 (estrutura resolvida por Kikuchi). _____	50

Figura 27: Problema 9 (estrutura similar à resolvida por Kikuchi).	51
Figura 28: Problema 10 (viga tridimensional, simétrica, de dimensões 0,08x0,05x0,05mm).	51
Figura 29: Problema 11 (viga tridimensional, com carga descentralizada, de dimensões 0,08x0,05x0,025m).	52
Figura 30: Problema 12 (barra tridimensional apoiada).	52
Figura 31: Problema 13 (viga tridimensional com massa no centro da face direita e engaste na face esquerda).	52
Figura 32: Resultado do problema 1, sem penalização do tensor constitutivo.	53
Figura 33: Resultado do problema 1, ao final do segundo nível de otimização, com penalização do tensor constitutivo usando-se expoente 2.	54
Figura 34: Resultado do problema 1, ao final do terceiro nível de otimização, com penalização do tensor constitutivo usando-se expoente 3.	54
Figura 35: Curva de convergência da função objetivo do problema 1, resolvido com CO.	55
Figura 36: Variação do volume no problema 1, resolvido com CO.	55
Figura 37: Resultado do problema 1, obtido para um nível maior de refinamento (1089 elementos).	56
Figura 38: Gráfico de convergência da função objetivo para a malha com 1089 elementos.	56
Figura 39: Variação da restrição para a malha com 1089 elementos.	57
Figura 40: Distribuição aleatória de densidades para o problema 1 com 1089 elementos.	58
Figura 41: Resultado obtido para a distribuição aleatória de densidades.	58
Figura 42: Convergência da função objetivo para a malha de 1089 elementos com distribuição inicial aleatória de densidades.	59
Figura 43: Variação da restrição para malha de 1089 elementos e distribuição inicial aleatória de densidades.	59
Figura 44: Variação da função objetivo para tolerância no CO de 10^{-4} .	60
Figura 45: Variação da restrição para tolerância no CO de 10^{-4} .	61
Figura 46: Variação da função objetivo para tolerância do CO de 10^{-10} .	61
Figura 47: Variação da restrição para tolerância do CO de 10^{-10} .	62
Figura 48: Topologias obtidas com tolerância do CO de 10^{-10} .	62
Figura 49: Resultado do problema 1 com penalização do tensor constitutivo, usando-se o método da continuação, LP e malha com 1089 elementos.	63
Figura 50: Convergência da função objetivo usando LP para malha com 1089 elementos.	64
Figura 51: Variação da restrição usando LP para a malha com 1089 elementos.	64

Figura 52: Resultado do problema 1 com penalização do tensor constitutivo usando-se o método da continuação, LP e malha com 625 elementos. _____	64
Figura 53: Convergência da função objetivo usando LP para a malha com 625 elementos. ____	65
Figura 54: Variação da restrição usando LP para a malha com 625 elementos. _____	65
Figura 55: Resultado obtido com uma malha de 625 elementos, CO, método da continuação em três níveis e tolerância do CO de 10^{-12} . _____	66
Figura 56: Resultado obtido com uma malha de 1089 elementos, CO, método da continuação em três níveis e tolerância do CO de 10^{-12} . _____	67
Figura 57: Gráfico de convergência para o problema 2 com engaste na base e malha com 625 elementos. _____	67
Figura 58: Variação da restrição para o problema 2 com engaste na base e malha com 625 elementos. _____	68
Figura 59: Gráfico de convergência para o problema 2 com engaste na base e malha com 1089 elementos. _____	68
Figura 60: Variação da restrição para o problema 2 com engaste na base e malha com 1089 elementos. _____	68
Figura 61: Minimização de flexibilidade com restrição de volume para o problema 3. Nota-se a presença da instabilidade de tabuleiro no topo da figura. _____	69
Figura 62: Resultado obtido para o problema 3 com uma malha de 1089 elementos. _____	70
Figura 63: Gráfico de convergência para o problema 3, com apoio na base e malha com 625 elementos. _____	70
Figura 64: Variação da restrição para o problema 3, com apoio na base e malha com 625 elementos. _____	70
Figura 65: Gráfico de convergência para o problema 3, com apoio na base e malha com 1089 elementos. _____	71
Figura 66: Variação da restrição para o problema 3, com apoio na base e malha com 1089 elementos. _____	71
Figura 67: Análise do caso da Figura 20 com filtragem espacial de pesos médios abrangendo 4 elementos. _____	72
Figura 68: Convergência da função objetivo do problema 3, para um raio de 0,0045m, na malha com 625 elementos. _____	73
Figura 69: Variação da restrição do problema 3, para um raio de 0,0045m, na malha com 625 elementos. _____	73
Figura 70: Resultado para filtragem de 8 elementos. _____	73

Figura 71: Convergência da função objetivo do problema 3 para raio de filtragem de 0,0065m, na malha com 625 elementos. _____	74
Figura 72: Variação da restrição do problema 3 para raio de filtragem de 0,0065m, na malha com 625 elementos. _____	74
Figura 73: Malha de 1089 elementos e raio de 0,0035m, abrangendo 4 elementos. _____	75
Figura 74: Malha de 1089 elementos e raio de 0,0045m, abrangendo 8 elementos _____	75
Figura 75: Variação da função objetivo para filtragem com raio de 0,0035m (malha de 1089 elementos). _____	76
Figura 76: Variação da restrição para filtragem com raio de 0,0035m (malha de 1089 elementos). _____	76
Figura 77: Variação da função objetivo para filtragem com raio de 0,0045m (malha de 1089 elementos). _____	77
Figura 78: Variação da restrição para filtragem com raio de 0,0045m (malha de 1089 elementos). _____	77
Figura 79: Ótimo global para o problema da viga com carga na ponta, malha de 640 elementos e limite móvel fixado em 0,2. _____	78
Figura 80: Instabilidade de tabuleiro no final do processo de filtragem para o problema da viga com carga na ponta, malha de 640 elementos, filtro de raio 0,004m (8 elementos) e limite móvel fixado em 0,2. _____	78
Figura 81: Resultado no final do processo de otimização para o problema da viga com carga na ponta, filtragem com raio de 0,004m (8 elementos) e limite móvel variando entre 0,08 e 0,2. _____	78
Figura 82: Convergência da função objetivo para malha com 640 elementos, CO e limites móveis fixados em 0,2. É possível visualizar a troca de nível de otimização nos saltos do gráfico. _____	79
Figura 83: Variação da restrição para malha com 640 elementos, CO e limites móveis fixados em 0,2. _____	79
Figura 84: Convergência da função objetivo para malha com 640 elementos, CO e limites móveis variando dinamicamente. _____	80
Figura 85: Variação da restrição para malha com 640 elementos, CO e limites móveis variando. _____	80
Figura 86: Resultado para viga com carga na ponta e malha com 1749 elementos. _____	81
Figura 87: Convergência da função objetivo para malha com 1749 elementos, CO e sem filtro. _____	81
Figura 88: Variação da restrição para malha com 1749 elementos, CO e sem filtro. _____	82

Figura 89: Resultado para viga com carga na ponta, malha com 1749 elementos e raio de 0,002m.	82
Figura 90: Convergência da função objetivo para malha com 1749 elementos, CO e com filtro.	83
Figura 91: Variação da restrição para malha com 1741 elementos, CO e com filtro.	83
Figura 92: Estrutura formada para malha com 1749 elementos e otimização em três níveis, sem filtragem.	84
Figura 93: Caso similar ao anterior, com raio de filtragem de 0,002m (abrangendo 4 elementos).	84
Figura 94: Convergência da função objetivo com dois casos de carregamento, sem filtragem.	85
Figura 95: Variação da restrição com dois casos de carregamento, sem filtragem.	85
Figura 96: Convergência da função objetivo com dois casos de carregamento, usando filtragem com raio de 0,002m.	86
Figura 97: Variação da restrição com dois casos de carregamento, usando filtragem com raio de 0,002m.	86
Figura 98: Resultado da análise de otimização da estrutura tipo ponte, sem penalização do tensor constitutivo (simp=1).	87
Figura 99: Resultado da análise de otimização da estrutura tipo ponte no final do processo de continuação (expoente 3).	87
Figura 100: Convergência para a função objetivo da estrutura tipo ponte, sem filtragem espacial dos pesos médios.	88
Figura 101: Variação da restrição da estrutura tipo ponte, sem filtragem espacial dos pesos médios.	88
Figura 102: Filtragem com raio de 0,2m, abrangendo 4 elementos.	89
Figura 103: Convergência para a função objetivo da estrutura tipo ponte, com filtragem espacial dos pesos médios utilizando raio 0,2m (abrangência de 4 elementos).	89
Figura 104: Variação do volume da estrutura tipo ponte, com filtragem espacial dos pesos médios utilizando raio 0,2m (abrangência de 4 elementos).	90
Figura 105: Minimização de volume com restrição de flexibilidade e penalização do tensor constitutivo com expoente 3 (SIMP=3).	91
Figura 106: Convergência da função objetivo para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 3.	91
Figura 107: Variação da restrição para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 3.	92

Figura 108: Minimização de volume com restrição de flexibilidade com SIMP=3 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	92
Figura 109: Convergência da função objetivo para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 3 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	93
Figura 110: Variação da restrição para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 3 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	93
Figura 111: Minimização de volume com restrição de flexibilidade com SIMP=2 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	94
Figura 112: Convergência da função objetivo para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 2 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	94
Figura 113: Variação da flexibilidade para a minimização do volume, com restrição de trabalho externo, utilizando-se SIMP = 3 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	95
Figura 114: Resultado obtido com penalização da função objetivo com expoente 1/7 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	95
Figura 115: Convergência da função objetivo com penalização usando-se expoente 1/7 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	96
Figura 116: Variação da restrição com penalização da função objetivo usando-se expoente 1/7 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	96
Figura 117: Resultado obtido com penalização da função objetivo com expoente 1/9 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	96
Figura 118: Convergência da função objetivo com penalização usando-se expoente 1/9 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	97
Figura 119: Variação da restrição com penalização da função objetivo usando-se expoente 1/9 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	97
Figura 120: Resultado obtido com penalização da função objetivo com expoente 1/15 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	97
Figura 121: Convergência da função objetivo com penalização usando-se expoente 1/15 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	98
Figura 122: Variação da restrição com penalização da função objetivo usando-se expoente 1/15 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).	98

Figura 123: Topologia obtida para o problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade para a viga do problema 4 com 1749 elementos, após convergência do primeiro nível de otimização (com filtragem).	99
Figura 124: Topologia obtida para o problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade para a viga do problema 4 com 1749 elementos, após convergência do segundo nível de otimização (sem filtragem - limpeza das densidades intermediárias).	99
Figura 125: Convergência da função objetivo para o problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade da viga do problema 4, com 1749 elementos.	100
Figura 126: Variação da restrição para o problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade da viga do problema 4, com 1749 elementos.	100
Figura 127: Topologia obtida após convergência do segundo nível de otimização, penalização da função objetivo com expoente 1/5 e frequência natural limite de 27Hz.	101
Figura 128: Topologia obtida após convergência do primeiro nível de otimização, com penalização usando-se expoente 1/5, com filtragem de raio 0,5 e ajuste de peso 0,3 e frequência natural limite de 27Hz.	102
Figura 129: Convergência da função objetivo para o problema da viga com massa concentrada na ponta, filtro de raio 0,5, ajuste de peso 0,3 e frequência natural limite de 27Hz.	102
Figura 130: Variação da restrição para o problema da viga com massa concentrada na ponta, filtro de raio 0,5, ajuste de peso 0,3 e frequência natural limite de 27Hz.	103
Figura 131: Topologia obtida para uma filtragem continuada, variando o ajuste de peso de 0,5 a 0,1 em cinco níveis.	103
Figura 132: Convergência da função objetivo para o problema da viga com massa na ponta e filtragem continuada.	104
Figura 133: Variação da restrição para o problema da viga com massa na ponta e filtragem continuada.	105
Figura 134: Detalhe da variação do primeiro modo de vibração para o problema da viga com massa na ponta e filtragem continuada.	105
Figura 135: Topologia formada para o problema 9 com SIMP = 3 e solução modal por JACOBI.	106
Figura 136: Convergência da função objetivo para o problema 9, resolvido por JACOBI.	106
Figura 137: Variação da primeira frequência natural para o problema 9, resolvido por JACOBI.	107
Figura 138: Topologia formada para o problema 9 com SIMP = 3 e solução modal por LANCZOS.	107

Figura 139: Convergência da função objetivo para o problema 9, resolvido por LANCZOS.	108
Figura 140: Variação da primeira frequência natural para o problema 9, resolvido por LANCZOS.	108
Figura 141: Variação das frequências naturais para o problema 9, resolvido por LANCZOS.	109
Figura 142: Topologia formada para o problema 9 com filtragem de raio 0,08.	109
Figura 143: Variação da função objetivo para o problema 9, com filtragem de raio 0,08.	110
Figura 144: Variação da restrição para o problema 9, com filtragem de raio 0,08.	110
Figura 145: Topologia formada para o problema 9, sem filtragem, para uma malha com 1250 elementos.	111
Figura 146: Convergência da função objetivo para o problema 9, sem filtragem, para uma malha com 1250 elementos.	111
Figura 147: Variação da restrição para o problema 9, sem filtragem, para uma malha com 1250 elementos.	112
Figura 148: Topologia formada para o problema 9, com filtro de raio 0,05 (abrangência de 4 elementos) e ajuste de peso 0,5, para uma malha com 1250 elementos.	112
Figura 149: Convergência da função objetivo para o problema 9, com filtro de raio 0,05 (abrangência de 4 elementos) e ajuste de peso 0,5, para uma malha com 1250 elementos.	113
Figura 150: Variação da restrição para o problema 9, com filtro de raio 0,05 (abrangência de 4 elementos) e ajuste de peso 0,5, para uma malha com 1250 elementos.	113
Figura 151: Topologia formada na solução do problema 8 para uma restrição de 2,5Hz. Nota-se a formação de reforços sobre a estrutura básica.	114
Figura 152: Convergência do volume para o problema 8 com restrição de 2,5Hz para o primeiro modo de vibração.	114
Figura 153: Variação das frequências naturais para o problema 8 com restrição de 2,5Hz.	115
Figura 154: Topologia formada na solução do problema 8 para uma restrição de 4Hz para o primeiro modo de vibração.	115
Figura 155: Convergência da função objetivo para o problema 8 com restrição de 4Hz para o primeiro modo.	116
Figura 156: Variação das frequências naturais para o problema 8 com restrição de 4Hz para o primeiro modo de vibração.	116
Figura 157: Deformações dos dois primeiros modos de vibração para o problema de minimização de volume com restrição de 4Hz para o primeiro modo de vibração.	117
Figura 158: Vista anterior da topologia obtida para a viga tridimensional com carga na ponta.	118

Figura 159: Vista posterior da topologia obtida para a viga tridimensional com carga na ponta.	118
Figura 160: Convergência da função objetivo para o problema tridimensional da viga com carga na ponta.	119
Figura 161: Variação da restrição para o problema tridimensional da viga com carga na ponta.	119
Figura 162: Topologia resultante da otimização da estrutura do problema 11.	120
Figura 163: Convergência da função objetivo para o problema 11.	120
Figura 164: Variação da restrição para o problema 11.	121
Figura 165: Topologia obtida para o problema 12 com uma malha de 343 elementos.	122
Figura 166: Convergência da função objetivo para o problema 12, com uma malha de 343 elementos.	122
Figura 167: Variação da restrição para o problema 12, com uma malha de 343 elementos.	122
Figura 168: Resultado obtido para o problema 12 com malha de 1331 elementos.	123
Figura 169: Convergência da função objetivo para o problema 12, com uma malha de 1331 elementos.	123
Figura 170: Variação da restrição para o problema 12, com uma malha de 1331 elementos.	124
Figura 171: Topologia formada na solução do problema 13 (malha de 9396 elementos e frequência natural limite de 2Hz).	124
Figura 172: Vista em corte da topologia formada na solução do problema 13 (malha de 9396 elementos e frequência natural limite de 2Hz).	125
Figura 173: Variação do volume para o problema 13 (malha de 9396 elementos e frequência natural limite de 2Hz).	125
Figura 174: Variação das frequência naturais do primeiro, segundo e terceiro modos de vibração para o problema 13 (malha de 9396 elementos e frequência natural limite de 2Hz).	126
Figura 175: Elemento de barra.	132
Figura 176: Representação da transformação de coordenadas do elemento de barras.	134
Figura 177: Elemento triangular de 3 nós.	136
Figura 178: Deslocamento unitário aplicado no primeiro nó do elemento.	137
Figura 179: Elemento bilinear isoparamétrico.	139
Figura 180: Deslocamento unitário aplicado no primeiro nó.	140
Figura 181: Elemento hexaédrico de 8 nós.	142
Figura 182: Esquema de gerenciamento de dados do programa e alguns arquivos gerados.	145
Figura 183: Esquema geral de funcionamento do programa e alguns arquivos gerados.	146

Figura 184: Solução linear estática pelo método dos elementos finitos. _____	147
Figura 185: Solução modal. _____	147
Figura 186: Esquema empregado na otimização. _____	148
Figura 187: Detalhamento do processo de LP comentado na Figura 186. _____	149
Figura 188: Detalhamento do processo de CO comentado na Figura 186. _____	150
Figura 189: Esquema de alteração dos limites móveis para problemas de minimização. ____	151
Figura 190: Determinação da vizinhança. _____	152
Figura 191: FEPM _____	153

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Resultados obtidos no problema 1, para uma malha de 625 elementos, usando-se o método da continuação e CO.....	56
Tabela 2: Resultados obtidos no problema 1, usando-se o método da continuação e CO em uma distribuição uniforme de densidades (malha de 1089 elementos).....	57
Tabela 3: Resultados obtidos no problema 1 usando-se o método da continuação e CO em uma distribuição aleatória de densidades (malha de 1089 elementos).....	58
Tabela 4: Resultados obtidos no problema 1 usando-se o método da continuação e CO em uma distribuição uniforme de densidades e tolerância para o CO de 10^{-10} (malha de 1089 elementos).....	62
Tabela 5: Resultados obtidos resolvendo-se o problema 1 com uma malha de 1089 elementos e usando-se LP.....	63
Tabela 6: Resultados obtidos no problema 2 usando-se o método da continuação e CO para uma malha com 625 elementos.	66
Tabela 7: Resultados obtidos no problema 2 usando-se o método da continuação e CO para uma malha com 1089 elementos.	67
Tabela 8: Resultados obtidos no problema 3, usando-se o método da continuação e CO, para uma malha de 625 elementos.	69
Tabela 9: Resultados obtidos no problema 3, usando-se o método da continuação e CO, para uma malha de 1089 elementos.	69
Tabela 10: Resultados obtidos no problema 3, para a malha de 625 elementos e filtragem com raio de 0,0045m, abrangendo 4 elementos.	72
Tabela 11: Resultados obtidos no problema 2, para uma malha de 625 elementos, com filtragem de raio igual a 0,0065m, abrangendo 8 elementos.	74
Tabela 12: Resultados obtidos no problema 3, (malha de 1089 elementos) com filtragem de raio 0,0035m, abrangendo 4 elementos.	75
Tabela 13: Resultados obtidos no problema 3, (malha de 1089 elementos) com filtragem com raio de 0,0045m, abrangendo 8 elementos.	76
Tabela 14: Resultados obtidos no problema 4, com raio de filtragem de 0,004m e limites fixados em 0,2.	79
Tabela 15: Resultados obtidos no problema 4, com raio de filtragem de 0,004m e limites móveis variando.	80
Tabela 16: Resultados obtidos no problema 4, com uma malha de 1749 elementos, sem filtro. .	81

Tabela 17: Resultados obtidos no problema 4, com raio de filtragem de 0,002m.	82
Tabela 18: Resultados obtidos no problema 5, sem filtragem.	84
Tabela 19: Resultados obtidos no problema 5, com filtragem.	85
Tabela 20: Resultados obtidos no problema 6, sem filtragem.	88
Tabela 21: Resultados obtidos no problema 6, com filtragem usando raio 0,2m.	89
Tabela 22: Percentuais de volume para as otimizações com filtragem.	98
Tabela 23: Valores encontrados para a função objetivo nos diferentes níveis de otimização adotados.	104
Tabela 24: Resultados obtidos no problema 10.	119
Tabela 25: Resultados obtidos no problema 11.	121
Tabela 26: Resultados obtidos no problema 12, com malha de 343 elementos.	121
Tabela 27: Resultados obtidos no problema 12, com malha de 1331 elementos.	123

1. INTRODUÇÃO

No passado, os projetos nas indústrias eram, em geral, desenvolvidos com cálculos estruturais mais rudimentares, baseando-se de maneira intensa em experiências anteriores. Após a etapa de projetos eram então realizados os testes e validações experimentais. Algumas empresas possuem metodologias próprias para a concepção de seus produtos, utilizando análise estrutural como ferramenta. Desta forma, a etapa de tentativa e erro em protótipos é feita por simulação computacional, que quase sempre, é mais barata e mais rápida.

Uma nova concepção de engenharia se baseia naquilo que a natureza e as tendências gerais sempre buscam: o ótimo. Porém, em se tratando de uma ciência exata, fala-se da busca do ótimo assistido por ferramentas adequadas para tanto.

Este trabalho consiste no estudo e desenvolvimento de ferramentas para a otimização estrutural. Entretanto, para que se possa obter uma estrutura otimizada, faz-se necessário o conhecimento de todas as ferramentas envolvidas no processo. As equações de equilíbrio de um problema estrutural de grande porte são usualmente resolvidas de forma discreta. O Método dos Elementos Finitos é utilizado em grande escala. Os primeiros estudos sobre elementos finitos foram desenvolvidos na década de 40, pelos trabalhos de Courant [Courant, 1943], com a criação do elemento triangular de deformações constantes. A denominação “Elemento Finito” foi feita pela primeira vez por Clough [Clough, 1960]. Com o passar do tempo, os elementos foram ganhando formulações mais sofisticadas e hoje, a pesquisa e a utilização desse método já é bastante difundida.

Outro tópico explorado pelo trabalho, a solução do equilíbrio modal, também possui estudos bastante antigos e conhecidos. Inúmeros métodos de solução já foram implementados para a obtenção das frequências e modos de vibração, essenciais para caracterizar a resposta dinâmica dos componentes.

Dentre os tipos de otimizações estruturas mais comuns estão: a otimização dimensional, a otimização de forma e a otimização topológica (escolhida para o trabalho). As duas primeiras consistem basicamente em extremizar uma função alterando variáveis como propriedades (momento de inércia, por exemplo) e forma, respectivamente.

A otimização topológica possui uma filosofia um pouco diferente das anteriores. Topologia diz respeito ao número de ligações entre peças. Matematicamente, são características invariantes sob transformações conformes de coordenadas. Na natureza discreta, é como cada elemento de um meio se conecta com os demais. Em outras palavras, é como determinar a conectividade ótima de uma estrutura. Desta forma, parte-se de um domínio de projeto pré-

estabelecido e determina-se aquele que extremiza a função objetivo, respeitando as restrições estabelecidas (se houver).

As primeiras otimizações topológicas, conforme referências anteriores [Cardoso, 2000], datam de 1904, com o trabalho de Michell, baseado nos estudos de Maxwell, 1869, os quais realizam a minimização de volume de uma estrutura formada por barras.

A solução do problema de otimização deste trabalho é feita utilizando critério de ótimo e programação linear. Karush, 1939, Kuhn e Tucker, 1951, propuseram estudos que são conhecidos hoje como o critério de ótimo de KKT. Os primeiros estudos com critérios de ótimo na forma discreta se deram na década de 70, com Haftka, entre outros, apud [Cardoso, 2000].

A programação matemática se fez bastante útil com o desenvolvimento dos computadores. A programação linear, principalmente, torna-se prática quando existe um grande número de variáveis de projeto.

Os trabalhos de otimização topológica mais difundidos tratam da minimização do volume com restrição de flexibilidade, e vice versa. Entretanto, necessidades de mercado e tecnológica, assim como curiosidades de pesquisadores forçaram o estudo de outras extremizações e restrições, tais como tensão, frequência natural e flambagem.

O problema de minimização de volume com restrição modal apresenta algumas características bastante interessantes no que diz respeito ao cálculo de autovalores e autovetores. Sabe-se que os modos normais de um problema modal podem ser dados de várias formas, bastando apenas respeitar a proporcionalidade dos membros dos autovetores. Na otimização, entretanto, deve-se tomar cuidados com essa propriedade, pois na maioria dos casos, utiliza-se o autovetor no cálculo da função objetivo e/ou restrições. Assim, dependendo da normalização adotada para o autovetor, poderá haver erros nos cálculos de otimização.

De forma geral, os problemas mais comuns referentes à otimização topológica são a dependência de malha (domínio), os mínimos locais e, principalmente, a instabilidade de tabuleiro [Sigmund e Petersson, 1998].

2. OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O objetivo principal do trabalho é estudar o problema de otimização que envolve a minimização do volume com restrições de frequência natural e flexibilidade, para estruturas bi e tridimensionais. Objetiva-se também o estudo do problema clássico de minimização da flexibilidade com restrição de volume, a fim de testar as ferramentas adotadas no trabalho e compará-las com as existentes na literatura.

Para a obtenção dos objetivos expostos, fez-se necessário o estudo desde os fundamentos teóricos que envolvem a mecânica dos sólidos até o tema otimização propriamente dito. Assim, o trabalho está organizado da seguinte forma:

Nos dois primeiros capítulos estão resumidos o conteúdo e os objetivos do trabalho.

No terceiro capítulo estão expostos os fundamentos teóricos da mecânica dos sólidos necessários para o trabalho, tais como: uma revisão sobre a mecânica dos sólidos e o método dos elementos finitos, utilizado para a solução das equações de equilíbrio; a solução do problema de autovalor, base do desenvolvimento da restrição modal para o problema de minimização de volume.

No quarto capítulo são estudados aspectos gerais do problema de otimização, tais como conceitos gerais (função objetivo, variáveis de projeto, restrições e sensibilidade), formulação do problema, condições de KKT e técnicas de solução (critérios de ótimo e programação linear).

No quinto capítulo, é tratado o assunto da otimização topológica, como conceitos gerais e problemas associados ao método.

O sexto capítulo trata da implementação do conceito de otimização topológica, os quais envolvem as análises de sensibilidade e as deduções dos problemas de otimização presentes no trabalho.

Os capítulos restantes apresentam os resultados obtidos, bem como as conclusões e sugestões de melhoria.

Nos apêndices I e II são mostrados respectivamente as formulações dos elementos finitos utilizados e os detalhes do programa implementado. No apêndice III é apresentado o método de Jacobi para solução de autovalores [Bathe, 1996] e no apêndice IV tem-se o método de Lanczos.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA MECÂNICA GERAL

3.1. MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

A formulação do problema de otimização faz com que as variáveis de projeto, função objetivo e restrições aplicadas dependam de forma direta ou indireta das equações de equilíbrio. Adotou-se para esse trabalho a teoria da elasticidade infinitesimal linear, restrita a pequenas deformações [Boresi et al, 1978].

Admitiu-se, portanto, que as deformações resultantes dos carregamentos prescritos são infinitesimais e encontram-se no regime elástico, havendo linearidade de material (relação constitutiva isotrópica) e geométrica.

As equações de equilíbrio são escritas em função das forças de corpo e das forças de superfície. Assim, se o corpo está em equilíbrio, para o caso estático, tem-se:

$$\int_s \underline{t} ds + \int_v \underline{b} dv = \underline{0} \quad (1)$$

onde \underline{b} representa as forças de corpo e \underline{t} as de superfície. As tensões de Cauchy ($\underline{\sigma}$) são representadas por:

$$\underline{t} = \underline{\sigma} n \quad (2)$$

onde n é o vetor normal à superfície.

$$\int_s \underline{\sigma} n ds + \int_v \underline{b} dv = \underline{0} \quad (3)$$

Partindo-se da condição de que a quantidade de força que está entrando em toda a superfície é igual à variação da força interna, tem-se:

$$\int_v \nabla \cdot \underline{\sigma} dv + \int_v \underline{b} dv = \underline{0} \quad (4)$$

$$\int_v (\nabla \cdot \underline{\sigma} + \underline{b}) dv = \underline{0} \quad (5)$$

Para que o corpo esteja em equilíbrio, cada parte do mesmo deve obedecer à seguinte relação:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = \underline{0} \quad (6)$$

A relação entre o campo de deslocamentos u (apresentado na Figura 1) e deformações é o que se mostra na equação (7).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

onde ε_{ij} refere-se à componente do tensor de deformações infinitesimais na direção j , ortogonal ao eixo i .

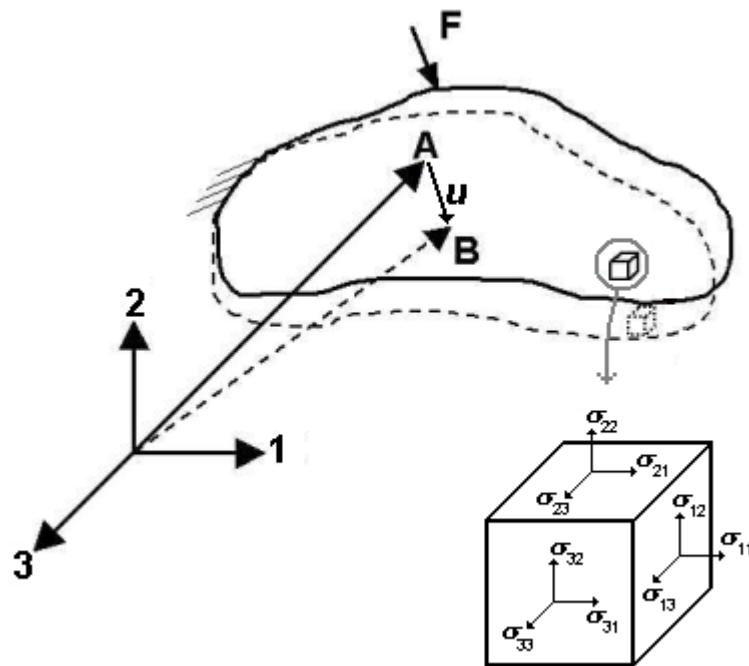


Figura 1: Deformação e tensor de tensões.

As tensões apresentadas na equação (2) e as deformações da expressão (7) estão relacionadas pela expressão (8).

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (8)$$

onde C é o tensor constitutivo de 4ª ordem das propriedades elásticas. Como para o trabalho foi adotada a relação constitutiva isotrópica linear, a equação (8) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé.

Para os casos bidimensionais, adotaram-se as teorias do Estado Plano de Tensões e Estado Plano de Deformações.

3.1.1. ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

No EPT são necessárias basicamente duas condições:

- Uma das dimensões (no caso da Figura 2, a direção definida pelo eixo 3) deve ser bastante inferior às demais, as quais formarão um plano;
- As cargas devem necessariamente estar contidas no plano mencionado.

Logo, as tensões fora do plano são nulas, como pode-se observar na expressão (10).

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \varepsilon_{33} \neq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Simplificando a expressão (9), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \mu & 0 \\ \mu & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

As constantes de Lamé, para esse caso, passam a ser:

$$\lambda = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (12)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (13)$$

onde E e ν são respectivamente o Módulo de Elasticidade Longitudinal e o coeficiente de Poisson e G corresponde ao módulo de Elasticidade Transversal.

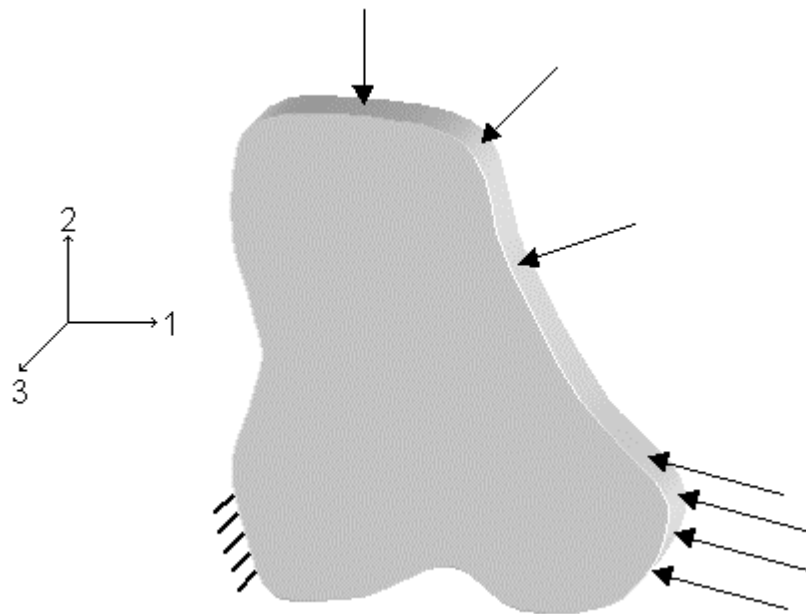


Figura 2: Estado plano de tensões.

3.1.2. ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)

Para que tenha-se um EPD definido, é necessário que as deformações fora do plano de análise (como representa a região em cinza da Figura 3) sejam nulas.

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} &= 0 \\ \sigma_{33} &\neq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

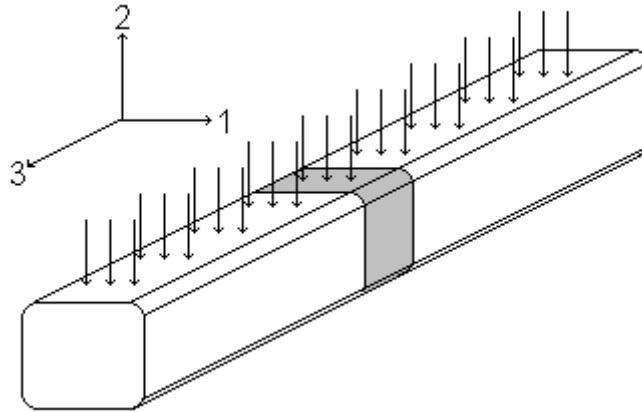


Figura 3: Estado plano de deformações.

Desta forma, o tensor de deformações passa a ser:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

A relação entre tensão e deformação é semelhante ao caso obtido no EPT

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & 0 \\ \mu & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

e as constantes de Lamé são:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (17)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (18)$$

3.2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Problemas de geometria e carregamento complexos, como os freqüentemente encontrados na indústria, são de difícil solução analítica, devido à impossibilidade (em geral) de formulação por expressões algébricas. Sem dúvida, o MEF é a ferramenta numérica mais utilizada na atualidade para a solução de análises estruturais. Por essa razão, será empregado no trabalho.

3.2.1. HISTÓRICO

Os primeiros trabalhos na área de estruturas foram desenvolvidos entre 1850 e 1875, por autores como Navier, St. Venant, Maxwell, Castigliano, Mohr, dentre outros.

Aproximadamente em 1920, Maney (EUA) e Ostenfeld (Dinamarca) iniciaram estudos na área da análise matricial de estruturas, trabalhando com barras e resolvendo os deslocamentos das mesmas.

No início dos anos 40, McHenry, Hrenikoff e Newmark realizaram trabalhos substituindo um meio contínuo por barras. Argyris, Turner, Clough, Martin e Topp foram os primeiros a aproximar um meio contínuo por elementos com propriedades simplificadas, apud [Selke et al, 1990].

Porém, o primeiro “elemento finito contínuo” propriamente dito foi desenvolvido por Courant [Courant, 1943]. Ele criou o até hoje conhecido CST (triângulo de deformações constantes).

Por volta dos anos 50, trabalhos como de Argyris e Kelsey [Argyris e Kelsey, 1960] foram responsáveis por unificar conceitos como análise estrutural e mecânica do contínuo, base para os problemas de análise matricial.

Também nos anos 50, apareceram os primeiros computadores digitais, os quais são fundamentais na solução de problemas matriciais.

A denominação “Elemento Finito” foi feita pela primeira vez por Clough [Clough, 1960].

A partir destes trabalhos possibilitou-se a solução de um problema contínuo da mecânica dos sólidos por métodos numéricos, desde que a discretização do mesmo seja possível.

Nos dias de hoje, as formulações de elementos e soluções já são suficientes para a solução da maioria dos problemas de engenharia. A maior preocupação, portanto, fica por conta do desenvolvimento das ferramentas de discretização (construtores de malhas, cargas e condições de contorno) e visualizadores, conhecidos com pré e pós-processadores.

3.2.2. REVISÃO DO MÉTODO

Partindo-se da forma bilinear do funcional de energia Π , tem-se:

$$\Pi = B(u, v) + f(u) \quad (19)$$

onde

$$B(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T(u) C \varepsilon(v) d\Omega \quad (20)$$

corresponde à parcela da energia de deformação, C é o tensor constitutivo de 4ª ordem das propriedades elásticas, ε é o vetor deformação, u e v são os componentes do vetor deslocamento e

$$f(u) = - \int_{\Omega} b \cdot u \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot u \cdot d\Gamma \quad (21)$$

corresponde à parcela do trabalho das forças externas. O primeiro e o segundo termos da equação (21) correspondem respectivamente ao trabalho das forças de corpo e ao trabalho das forças de superfície.

Minimizando-se o funcional de energia (19) em relação ao campo de deslocamentos e igualando a zero,

$$\delta\Pi = 0 \quad (22)$$

obtem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma^T \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} b^T \delta u d\Omega - \int_{\Gamma} t^T \delta u d\Gamma = 0 \quad (23)$$

Se a equação (23), que tem dimensão de energia, for satisfeita, os deslocamentos são válidos e o corpo está em equilíbrio. A expressão citada representa a formulação geral dos elementos finitos, onde da primeira parcela determina-se a matriz de rigidez e das demais, o vetor de cargas.

Na forma matricial, a equação (23) pode ser escrita como:

$$Ku = f \quad (24)$$

onde K corresponde à matriz de rigidez global, u ao vetor de deslocamentos e f ao vetor de cargas do problema. Uma descrição melhor elaborada do método dos elementos finitos, correlacionando os elementos e suas funções de interpolação, encontra-se no APÊNDICE I.

3.3. O PROBLEMA MODAL

A equação do movimento é dada por [Tamagna, 1993]:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (25)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ correspondem respectivamente às matrizes de massa, amortecimento e rigidez e $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$ e $\{x\}$ aos vetores aceleração, velocidade e deslocamento e F à carga de excitação do sistema.

Simplificando a equação (25) para o caso de vibração livre, sem amortecimento, tem-se:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (26)$$

As soluções para deslocamento e aceleração são apresentadas respectivamente nas equações (27) e (28).

$$\{x\} = \{\phi\} e^{i\omega t} \quad (27)$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{\phi\} e^{i\omega t} \quad (28)$$

Substituindo-se as equações (27) e (28) na equação (25)

$$-\omega^2 [M]\{\phi\} e^{i\omega t} + [K]\{\phi\} e^{i\omega t} = 0 \quad (29)$$

e dividindo-se a equação (29) por $e^{i\omega t}$ tem-se:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = 0 \quad (30)$$

Se o determinante de $([K] - \omega^2 [M])$ resultar em um valor diferente de zero, obtém-se então a solução trivial (31). Caso contrário, obtém-se a solução proposta pela expressão (32).

$$\{\phi\} = 0 \quad (31)$$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

ou

$$\det([K] - \lambda [M]) = 0 \quad (32)$$

Trata-se, portanto, de um problema de autovalores, para $\lambda = \omega^2$.

4. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

4.1. INTRODUÇÃO

Tanto na natureza, quanto nas organizações humanas (empresas, por exemplo), procura-se sempre o aperfeiçoamento para os objetos e as ações realizadas. Nota-se portanto, a busca pelo ótimo, que consiste em encontrar dentro de um problema, a melhor decisão ou solução.

Adaptando-se o conceito de aplicação de otimização para organizações empresariais descrito por Secchi [Secchi, 2001], os três níveis que podem ser otimizados são:

- nível gerencial;
- nível de projeto e processo;
- nível produtivo.

Este trabalho preocupa-se em estudar basicamente o problema que envolve o nível de projeto. Entretanto, a concepção de um produto de diferentes formas irá, sem dúvida, influenciar outras esferas da organização de uma empresa. Por exemplo, um mesmo produto, injetado sob pressão, poderia ter sua massa minimizada com diferentes topologias, ou seja, poderia ter diferentes formas geométricas (diferentes números de furos de alívio ou diferentes formas para os alívios) com similar quantidade de material. O fato de uma peça ter mais ou menos furos internos implica no custo de ferramental, facilidade (portanto, tempo) de produção, etc. Nota-se portanto que a otimização de massa, por exemplo, não necessariamente otimiza o maior objetivo de uma empresa (maximização do lucro). Logo, deve-se ter em mente, antes de qualquer concepção de projeto, como a condução do mesmo irá influenciar todo o ciclo de uma empresa.

Como pode-se observar no parágrafo anterior, o controle da complexidade de uma estrutura otimizada, pode, em determinadas circunstâncias, ser mais importante que a otimização de uma única grandeza (no exemplo citado, minimização da massa). Um excelente apanhado sobre o controle de complexidade encontra-se feito por Cardoso [Cardoso, 2000].

4.2. CONCEITOS BÁSICOS

Os componentes básicos do problema de otimização estão bem descritos por Secchi [2001], os quais são:

- Função Objetivo: representa o objeto, quantificado matematicamente, a ser maximizado ou minimizado.
- O modelo do processo: representa a forma como serão tratadas (equacionadas) a função objetivo e as variáveis de projeto, bem como as restrições (igualdade e desigualdade).
- Restrições: representam os limites impostos para o sistema.

4.2.1. FUNÇÃO OBJETIVO

Função objetivo é um escalar que representa o lucro, custo, energia, produção, distância, etc., em termos das variáveis de decisão do processo ou sistema em análise. Em outras palavras, é a função matemática cujo máximo ou mínimo deseja-se encontrar.

Em um determinado processo, podem existir inúmeras variáveis de projeto. O equacionamento destas, ou seja, formação da função objetivo, pode ser feito considerando-se uma variável de projeto, ou mais delas, denominadas respectivamente por $f(x)$ ou $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)]$.

As funções objetivos presentes nesse trabalho envolvem volume e trabalho externo.

4.2.2. VARIÁVEIS DE PROJETO

São as variáveis independentes (parâmetros) da função objetivo.

Para que o projeto seja tido como admissível, é necessário que os valores assumidos como variáveis de projeto satisfaçam todas as restrições impostas.

As variáveis de projetos podem ser do tipo discreta, assumindo apenas alguns valores dentro de um conjunto, como mostra a expressão (33); ou contínua, assumindo valores dentro de um intervalo, como mostra a expressão (34).

$$\{x \in X \mid x = (k_1, k_2, \dots, k_N)\} \quad (33)$$

$$\{x \in X \mid k_{\min} < x < k_{\max}\} \quad (34)$$

Caso haja mais de uma variável de projeto, é interessante que as mesmas sejam escolhidas de forma independente umas das outras, para que não se criem dificuldades para o problema [Arora, 1989].

4.2.3. RESTRIÇÕES

São os limites impostos às variáveis de projeto (restrições laterais) ou às funções das variáveis de projeto (restrições gerais). As restrições podem se dar na forma de igualdade ou desigualdade.

O problema de otimização sujeito a restrições de igualdade e desigualdade pode ser escrito por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Extremizar } S(x) \\
 & \text{Sujeito a: } h_j(x) = 0, j=1,2,\dots,m \\
 & \quad g_j(x) \leq 0, j=1,2,\dots,p \\
 & \quad x \in X \subseteq \mathfrak{R}^n
 \end{aligned} \tag{35}$$

onde $h_j(x)$ representa as restrições de igualdade e $g_j(x)$ as restrições de desigualdade.

Uma restrição de desigualdade é chamada ativa em um ponto viável x se $g_j(x) = 0$. Caso contrário, esta restrição é chamada inativa. O conjunto dos pontos viáveis é definido pela expressão (36).

$$K = \{x \in X \subseteq \mathfrak{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\} \tag{36}$$

4.2.4. MÁXIMOS E MÍNIMOS

Os máximos e mínimos de uma função objetivo descrita por $S : X \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ podem ser basicamente de dois tipos:

- Mínimo/máximo global: também chamado de absoluto. Pode-se dizer que x^* é um mínimo global de S se $S(x^*) \leq S(x) \forall x \in X$;
- Mínimo/máximo local: também chamado de mínimo/máximo relativo. Pode-se dizer que x^* é um ponto mínimo local de S se existe $\varepsilon > 0$, tal que $S(x^*) \leq S(x) \forall x$ e que $\|x - x^*\| < \varepsilon$.

Uma função é dita convexa, [Rockafellar, 1997], quando:

$$f(\alpha x_2 + (1-\alpha)x_1) \leq \alpha f(x_2) + (1-\alpha)f(x_1) \quad (37)$$

$$0 < \alpha < 1$$

onde x_1 e x_2 são pontos do domínio. A equação (37) diz que uma reta que une dois pontos de uma função deve ter todos os seus pontos acima do gráfico dessa função, no intervalo de x_1 a x_2 , como mostra a Figura 5.

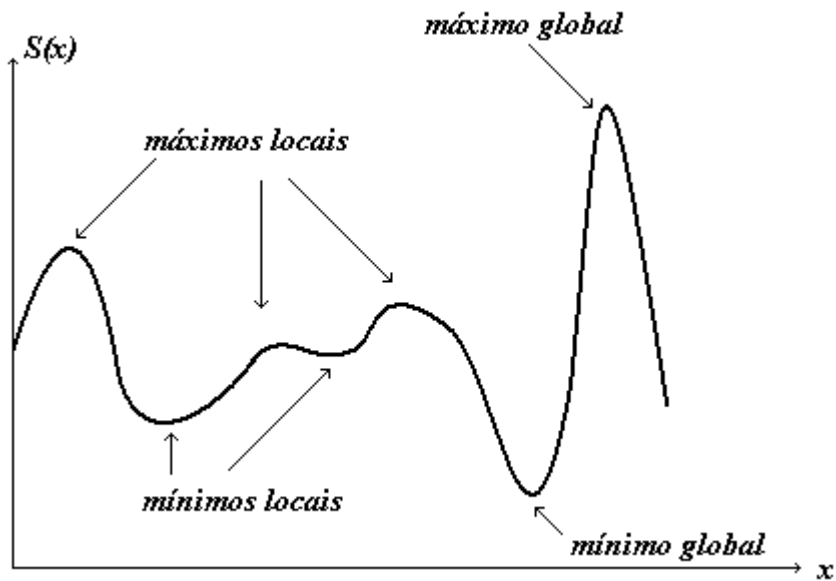


Figura 4: Mínimos e máximos de uma função objetivo.

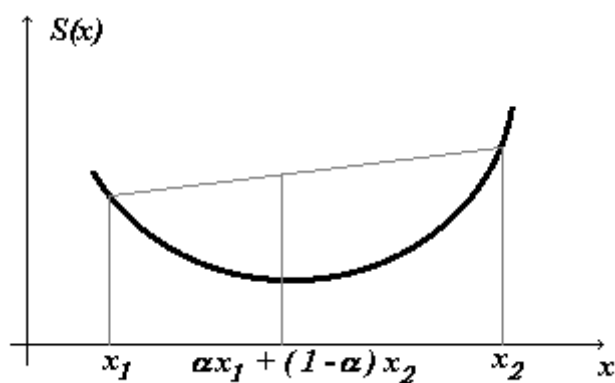


Figura 5: Função convexa.

As funções não-convexas: ocorrem quando há diferentes pontos de mínimo ou máximo (mínimos e/ou máximos locais). Cada ponto de extremo representa uma solução diferente para a

função. Esta característica ocorre com frequência nas penalizações presentes no processo de otimização topológica (assunto que será abordado no CAPÍTULO 5).

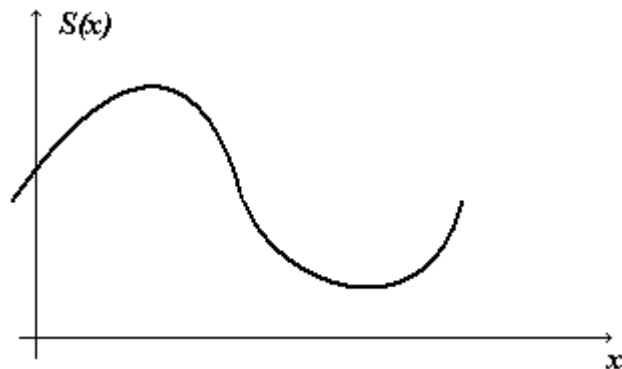


Figura 6: Função não convexa.

4.3. TIPOS DE PROBLEMA

Os problemas de otimização podem ser classificadas basicamente em três tipos:

- Otimização dimensional (*size optimization*): consiste na extremização de uma função objetivo qualquer com variáveis de projeto ligadas a características geométricas diretas de uma peça ou estrutura. É bastante aplicado nos casos onde há estruturas formadas por barras, vigas ou placas, onde utilizam-se variáveis de projeto como espessuras, áreas de seção, ou, no caso de vigas, propriedades diretas como momentos de inércia. No exemplo da Figura 7, ilustra-se a extremização de um funcional utilizando como variáveis de projeto, os valores das áreas das vigas.

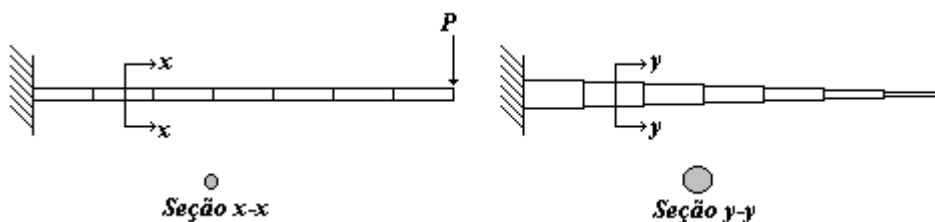


Figura 7: Representação de um processo de otimização dimensional.

- Otimização de forma (*shape optimization*): neste tipo de problema, as dimensões que formam os contornos das geometrias são usadas como parâmetros. Usam-se

geralmente raios, medidas lineares e outras entidades geométricas como *Splines*. Um dos grandes problemas desse tipo de análise são as distorções de malha causadas pelas alterações dos parâmetros utilizados (alteração das dimensões da geometria). Uma solução é a utilização de malhas adaptativas, conforme menciona o trabalho de Salagamane e Belegundu [Salagamane e Belegundu, 1995].

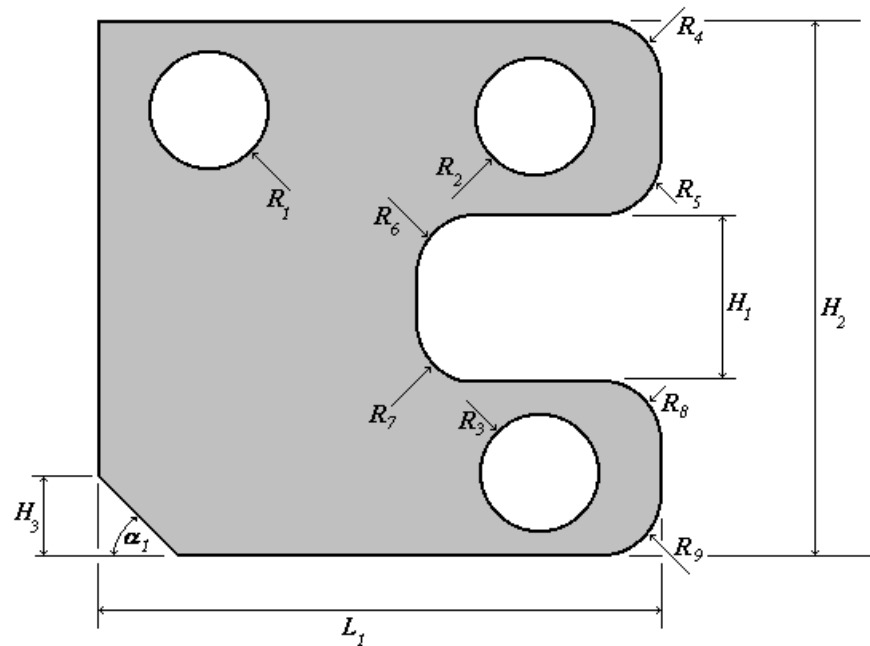


Figura 8: Parâmetros usados em uma geometria que sofrerá otimização de forma.

- Otimização topológica (*topology optimization*): busca a melhor distribuição de material dentro de um domínio de modo a minimizar ou maximizar um funcional dentro das restrições estabelecidas (este item será detalhado no CAPÍTULO 5).

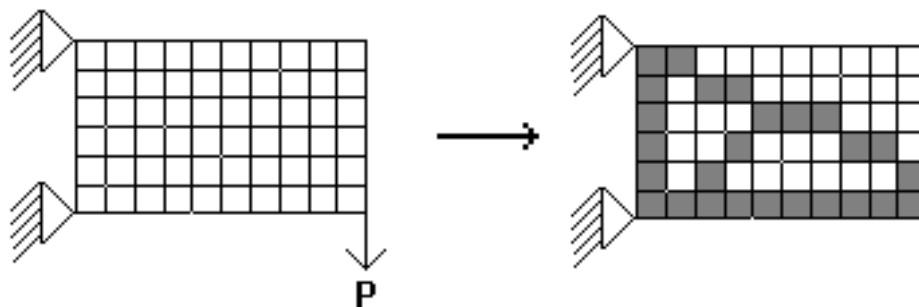


Figura 9: Ilustração do processo de otimização topológica, onde os elementos pintados e vazios representam respectivamente a presença e a ausência de material.

4.4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

4.4.1. FUNCIONAIS SEM RESTRIÇÕES

Para uma função $S(x)$ ter um máximo ou um mínimo local (ou global) é necessário que algumas condições sejam atendidas [Secchi, 2001].

- Condição necessária de 1ª ordem:

A função $S(x)$ deve ser diferenciável e igual a zero em x^* .

$$\nabla S(x^*) = 0 \quad (38)$$

- Condição necessária de 2ª ordem:

Para que x^* seja um ponto de máximo ou mínimo da função $S(x)$ é necessário que a função, duas vezes diferenciável em x^* , tenha:

$$H(x^*) = \nabla^2 S(x^*) \quad (39)$$

onde $H(x^*)$ é a matriz Hessiana e deve ser positiva (ou negativa) semi-definida.

- Condição suficiente:

Para que x^* seja um ponto de máximo (ou mínimo) local de $S(x)$, é necessário que a matriz hessiana $H(x^*)$ seja negativa (positiva) definida.

4.4.2. FUNCIONAIS COM RESTRIÇÕES

Um artifício para terem-se condições necessárias e suficientes no problema de otimização com restrições, é transformá-lo em um problema sem restrições, utilizando-se a função auxiliar de *Lagrange*, $L(x, \lambda, \mu)$, definida pela equação (40).

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= S(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x) \\ \mu &\geq 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Se a função de Lagrange é estacionária em x^* , significa dizer que:

$$\nabla_{x^*} L = \nabla_{\lambda} L = \nabla_{\mu} L = 0 \quad (41)$$

4.5. CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)

A condição de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) é necessária para que o ponto seja de máximo ou mínimo [Haftka e Gürdal, 1992]. Suas premissas são:

- Os gradientes das restrições de desigualdade ativas e das restrições de igualdade devem ser linearmente independentes, tal que:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla S(x^*) + (\lambda^*)^T \nabla h(x^*) + (\mu^*)^T \nabla g(x^*) = 0 \quad (42)$$

$$h(x^*) = 0 \quad (43)$$

$$g(x^*) \leq 0 \quad (44)$$

$$\mu_j^* g_j(x^*) = 0, j = 1, 2, \dots, p \quad (45)$$

$$\mu^* \geq 0 \quad (46)$$

- A função de Lagrange deve ser estacionária em x – equação (41);
- x^* deve ser um ponto viável (*viabilidade primal*);
- os multiplicadores de Lagrange que denotam desigualdade devem ser maiores ou iguais a zero – equação (46);
- os multiplicadores de Lagrange das restrições inativas devem ser iguais a zero, o que é chamado de *condição de complementaridade* – equação (45).

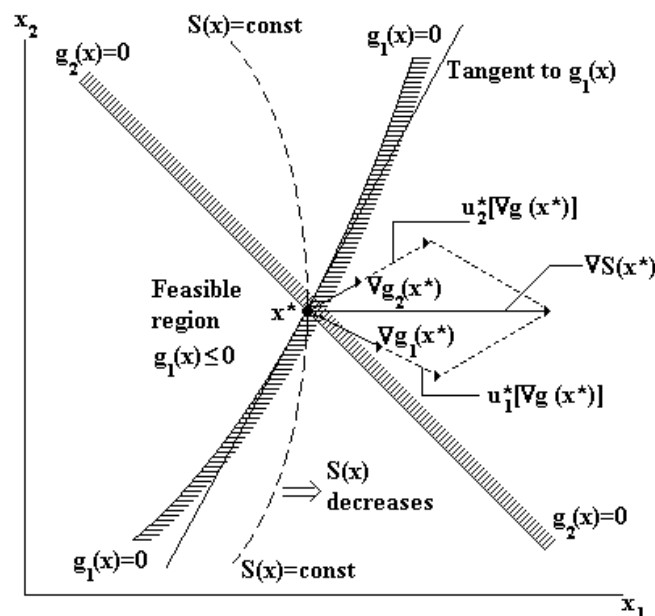


Figura 10: Representação geométrica das condições de KKT.

A Figura 10, obtida de Secchi [Secchi, 2001], representa as condições de KKT para duas restrições ativas.

4.6. TÉCNICAS DE SOLUÇÃO

A solução de um problema de otimização vai depender da sua complexidade. As técnicas existentes podem ser classificadas em duas categorias [Kirsch, 1989].

- Métodos analíticos;
- Métodos numéricos.

Neste trabalho foram utilizados ambos os casos. No primeiro, usou-se critério de ótimo e no segundo, programação linear.

4.6.1. CRITÉRIO DE ÓTIMO (CO)

Há dois tipos de critério de ótimo: um de cunho heurístico, como o critério da saturação de tensões (fully stressed design) e outro de cunho analítico, através de manipulações das equações do problema, adotado nesse trabalho. Desta forma, os métodos de otimização empregados que utilizam os critérios de ótimo necessitam uma nova formulação a cada alteração conceitual do problema. Por exemplo, o critério de ótimo que resolve um problema de minimização de volume sob trabalho externo é diferente quando substitui-se a restrição por frequência natural. Muitos autores apontam esse aspecto como uma desvantagem do método.

Entretanto, sem sombra de dúvidas, os critérios de ótimo dão uma grande percepção do problema, uma vez que esses necessitam ser formulados a cada caso. Outra vantagem está na eficiência e estabilidade dos algoritmos gerados.

4.6.2. PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

A programação matemática é sem dúvida um método de solução de problemas de otimização mais genérico que os citados anteriormente (critérios de ótimo), pois não necessitam ser deduzidos a cada problema novo.

Dependendo do tipo de função objetivo e restrições adotadas, a programação matemática pode ser classificada de diferentes formas:

- Programação Linear: a função objetivo e as restrições são lineares;

$$\text{Extremizar } S(x) = c^T x$$

$$\text{Sujeito a: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

onde A é uma matriz de m restrições x n variáveis, sendo A e b escalares.

- Programação Quadrática: função objetivo quadrática e as restrições lineares;

$$\text{Extremizar } S(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x$$

$$\text{Sujeito a: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

- Programação não-linear: função objetivo e/ou restrições não-lineares;

$$\text{Extremizar } S(x)$$

$$\text{Sujeito a: } h_j(x) = 0, j=1,2,\dots,m$$

$$g_j(x) \leq 0, j=1,2,\dots,p$$

- Programação inteira: variáveis de projeto possuem valores discretos;
- Programação mista: combinação da programação inteira com as demais.

4.6.3. PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP)

O método da programação linear exige que a função objetivo e as restrições sejam lineares. Mesmo que estas não sejam, é possível torná-las lineares, com o uso da expansão por séries de Taylor [Haftka e Gürdal, 1992] e resolver o problema por uma série de problemas lineares, método que é conhecido por *Programação Linear Sequencial*.

Deste modo, a função objetivo e as restrições são escritas conforme equações da expressão (47).

$$\begin{aligned}
\text{Extremizar:} \quad & S(x_0) + \sum_{i=1}^{Nelem} (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) \Big|_{x_0} \\
\text{Sujeito a:} \quad & g_j(x_0) + \sum_{i=1}^{Nelem} (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \Big|_{x_0} \leq 0 \\
& h_j(x_0) + \sum_{i=1}^{Nelem} (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \Big|_{x_0} = 0 \\
& a_{inf} \leq x_i - x_{0i} \leq a_{sup}
\end{aligned} \tag{47}$$

onde $Nelem$ corresponde ao número de variáveis de projeto, que no caso desse trabalho, é igual ao número de elementos, a_{inf} e a_{sup} são respectivamente o menor e o maior valor que as variáveis de projeto poderão assumir. A última restrição imposta (limites móveis) visa garantir que a variação das variáveis de projeto não seja demasiadamente grande do modo a violar a aproximação linear realizada.

O método de programação linear, além de ser prático sob o ponto de vista de novas formulações de otimização (não há a necessidade de novas definições, como no caso dos critérios de ótimo), também exige apenas derivadas de primeira ordem para a função objetivo e as restrições, o que não vale dizer para o caso de *Programação Quadrática*.

Outra característica importante da LP é que as derivadas da função objetivo em função das variáveis de projeto são constantes e não necessariamente nulas, o que permite dizer que o ponto de máximo (mínimo) não se encontra no interior do domínio, mas sim nas suas fronteiras, geralmente junto às interseções das restrições [Haftka e Gürdal, 1992].

As restrições para um problema de LP são apresentadas, conforme definição, pelo que é mostrado na equação (48).

$$Ax \leq b \tag{48}$$

Adicionando-se uma variável de folga t (transformar desigualdades em igualdades) e expandindo o Lagrangeano, tem-se:

$$Ax + t = b \tag{49}$$

Outra característica importante dos algoritmos de LP é a possibilidade de transformação de um problema *primal* de minimização com n variáveis e m restrições (conforme equação (50)) em um problema *dual*, de maximização composto por m variáveis e n restrições (equação (51)).

A grande utilidade dessa propriedade foi constatada por Sant'Anna [Sant'Anna, 2002], onde o autor trabalhou com o problema de minimização do volume sujeito à flexibilidade (uma ou mais restrições, sendo geralmente um número bastante pequeno) e sujeito à tensão (número de restrições grandes, iguais ao número de elementos, em geral). Neste caso, a possibilidade de tratar ora com o problema *primal*, ora com o *dual*, traz grandes benefícios.

A expansão dos coeficientes da equação de definição do problema de LP é dada na seguinte forma (*primal*):

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar:} & & f_p &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 \text{Sujeito a:} & & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= b_i & (50) \\
 & & x_j &\geq 0 \quad \therefore i = 1, \dots, m \quad \therefore j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

O problema *dual* é escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar} & & f_d &= b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \dots + b_m\lambda_m \\
 \text{Sujeito a:} & & \sum_{i=1}^m a_{ij}\lambda_i &= c_j & (51) \\
 & & j &= 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

onde λ_i são os multiplicadores de Lagrange.

Uma deficiência do uso de LP está em torno da correta escolha dos limites móveis, onde um erro (limites móveis demasiadamente pequenos ou grandes) pode ocasionar a não convergência dos cálculos. O algoritmo implementado nesse trabalho conta com o recurso de alteração dinâmica dos limites móveis. Caso a variação do valor da função objetivo não mude de sinal dentro de três iterações, o limite móvel é acrescido de 5%, caso contrário, é decrescido do mesmo valor (APÊNDICE II).

5. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

5.1. ASPECTOS GERAIS

O objetivo da otimização topológica é buscar a melhor distribuição de material dentro de um domínio de projeto fixo, de modo a minimizar ou maximizar um funcional que respeite as restrições estabelecidas, conforme pode-se observar na Figura 11, onde o contorno escuro delimita o domínio pré-estabelecido e a região em cinza onde restou material.

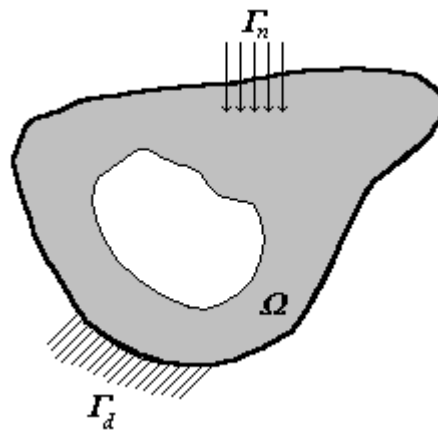


Figura 11: Ilustração do problema de otimização topológica.

Sua definição é dada por:

<i>Extremizar</i>	<i>Objetivo(s)</i>
<i>Sujeito a</i>	<i>Restrições</i>
<i>e</i>	<i>Equilíbrio</i>

A função objetivo e as restrições podem ser as mais variadas possíveis, sendo que é bastante empregada a minimização de volume para a função objetivo e medidas como flexibilidade, frequência natural, tensão e flambagem para restrições.

A otimização topológica em geral tem como base a parametrização do tensor constitutivo do material. Deste modo, o problema de otimização poderia ser parametrizado, segundo Bendsøe [Bendsøe, 1995], da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
E_{ijkl} &\in L^\infty(\Omega) \\
E_{ijkl} &= 1_\Omega E_{ijkl}^0 \\
\int_\Omega 1_{\Omega^m} &= Vol(\Omega^m) \leq V
\end{aligned} \tag{52}$$

$$1_\Omega = \begin{cases} 1, & x \in \Omega^m \\ 0, & x \in \Omega/\Omega^m \end{cases} \tag{53}$$

onde E_{ijkl}^0 é o tensor constitutivo de quarta ordem do material, Ω o domínio de projeto, Ω^m corresponde à porção do domínio preenchida de material e L^∞ indica que a distribuição de material pode apresentar valores descontínuos.

Como pode-se observar na equação (53), a distribuição de material está dada na forma binária, onde pode haver a presença do mesmo (1) ou não (0).

Segundo o teorema generalizado de Weierstrass [Arora, 1989], o espaço de solução para o problema contínuo não é fechado, o que não garantiria a solução. Entretanto, a proposta é de se transformar o problema contínuo em um problema discreto, através do método dos elementos finitos. Desta forma, o problema passa a ter solução, contudo, gerando uma dependência desta com a discretização do domínio (dependência de malha).

Para que haja uma solução é necessário que a densidade do material varie de elemento para elemento, transformando o espaço discreto em um espaço contínuo. Assim sendo, é utilizado o conceito de materiais compostos e ao método da obtenção das propriedades médias de materiais compostos dá-se o nome *de Método da Homogeneização*. A parametrização do material pelo método citado é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
E_{ijkl}(x) &= E_{ijkl}^0(\mu(x), \gamma(x), \dots, \theta(x)) \\
\rho(x) &= \rho(\mu(x), \gamma(x), \dots, \theta(x)) \\
\int_\Omega \rho(x) d\Omega &\leq V \\
0 &\leq x \leq 1 \\
x &\in \Omega
\end{aligned} \tag{54}$$

onde (μ, γ) e θ são respectivamente variáveis geométricas e de orientação da célula unitária, E_{ijkl}^0 é o tensor constitutivo do material homogeneizado e $\rho(x)$ é a densidade do material para cada célula.

Há entretanto outra maneira de se parametrizar o tensor constitutivo, como pode-se observar na equação (55). Esta forma de parametrização consiste em multiplicar o tensor constitutivo original por um valor entre 0 e 1, o que na prática corresponderia à interpolação da propriedade do material para aquele espaço discretizado (elemento). Essa técnica é chamada de *SIMP* (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*), proposta por Bendsøe [Bendsøe, 1995].

$$\begin{aligned}
 E_{ijkl}(x) &= \rho^n(x) E_{ijkl}^0 \\
 \rho(x) &\in L^\infty(\Omega) \\
 \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V \\
 0 &\leq \rho \leq 1 \\
 x &\in \Omega
 \end{aligned} \tag{55}$$

onde n é o expoente de penalização do tensor constitutivo original e ρ (densidade do elemento) não deve ser relacionado à massa específica, mas sim ao percentual de material que o novo tensor constitutivo possui (conceito que será bastante empregado desse ponto em diante).

Com o auxílio da Figura 12 pode-se observar a influência do expoente de penalização na relação entre o tensor constitutivo calculado e o original. Quando n vale 1, a relação é linear. Entretanto, a medida que esse expoente cresce, o problema se aproxima da configuração 0-1, mencionada anteriormente.

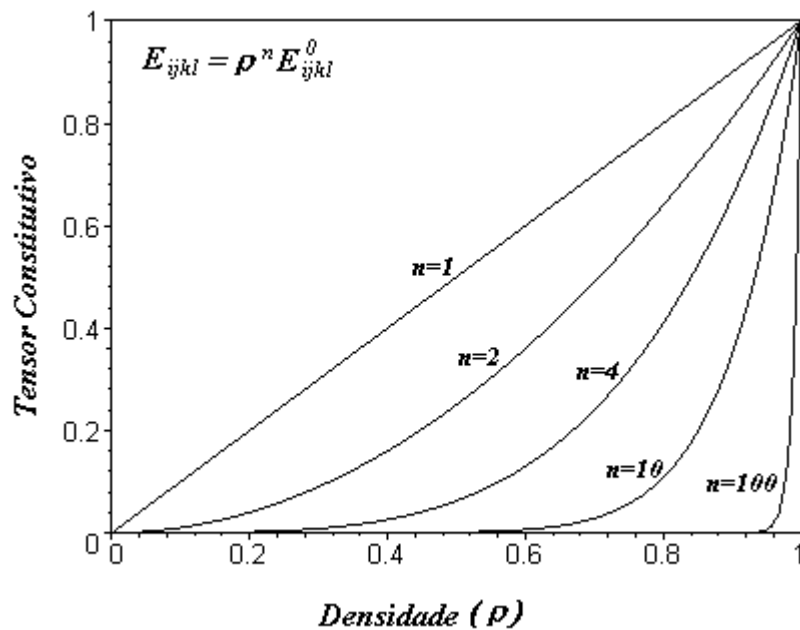


Figura 12: Representação da influência do expoente de penalização no tensor constitutivo.

Se por um lado a penalização conduz a uma solução mais próxima do problema 0-1, tem-se o inconveniente de transformar a função objetivo, caso ela seja convexa, em uma função não convexa. Desta forma, o mínimo alcançado, que seria global (dependendo da definição da função objetivo), passaria a ser um mínimo local, como pode-se observar na Figura 13.

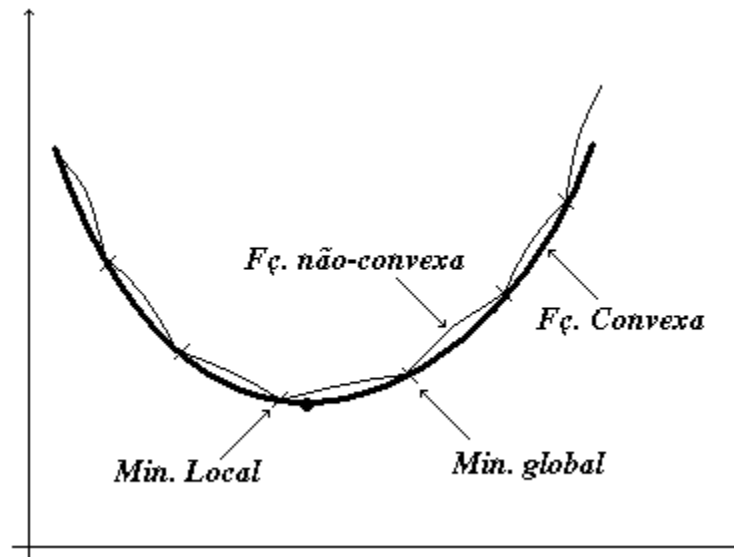


Figura 13: Comparação entre formulação convexa e não-convexa.

A solução para o problema a que o parágrafo anterior faz referência pode ser buscada na Figura 13, a qual ilustra o método da continuação [Cardoso, 2000]. Este método consiste basicamente em obter uma solução global, sem penalização, mesmo que haja densidades intermediárias (densidades diferentes da configuração 0-1) e após concluído o processo, iniciar uma nova etapa de otimização usando expoentes de penalização maiores que 1, de modo a minimizar as densidades intermediárias. Desta forma, é possível passar de um ótimo global, que na maioria das vezes possui um grande número de densidades intermediárias, para um ótimo local.

Uma outra forma de tratamento das densidades intermediárias peculiar à otimização topológica consiste na penalização da função objetivo ao invés do tensor constitutivo, deixando para esse último, uma relação linear entre tensor constitutivo e densidade. Este artifício é bastante aplicado em formulações de minimização de volume (assunto que será abordado no próximo capítulo) e a sua grande vantagem é o fato de mostrar com clareza a relação entre quantidade de material e densidade. Este tipo de relação pode ser observada na equação (56) e na Figura 14.

$$V = \int_{\Omega} v \rho^n \quad (56)$$

$$n \geq 1$$

onde V representa o volume total e v o volume discreto, no elemento.

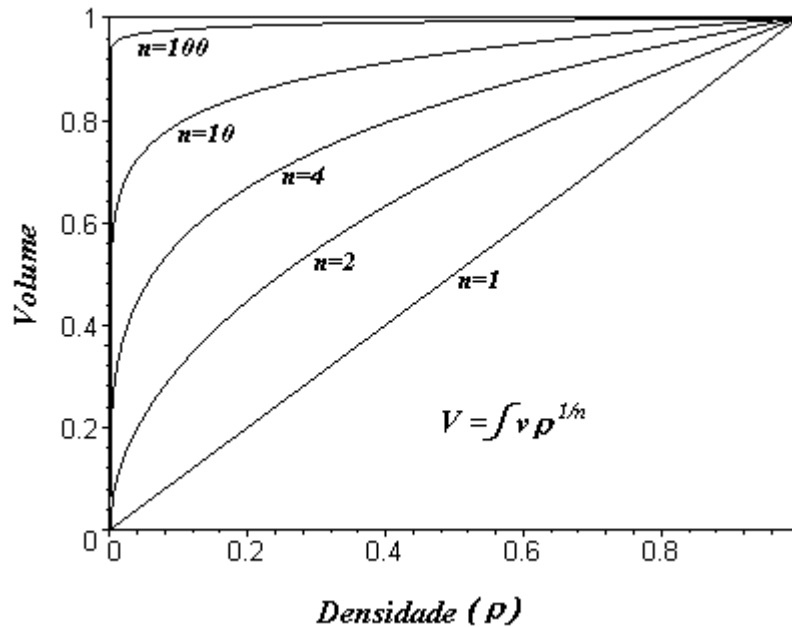


Figura 14: Penalização da função objetivo

5.2. CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

5.2.1. INSTABILIDADE DE TABULEIRO

A instabilidade de tabuleiro é um problema presente no processo de otimização topológica que faz com que as densidades dos elementos, distribuídas em seu domínio, apresentem-se na forma de um tabuleiro de xadrez, como pode-se observar na Figura 15.

Diversos estudos foram realizados a fim de solucionar tal problema. Acreditava-se, no princípio, que a topologia gerada pela instabilidade de tabuleiro se tratava de uma microestrutura ótima. Entretanto, descobriu-se que a topologia formada, dotada de um rigidez extra e artificial não correspondia a uma microestrutura ótima, mas sim, a uma instabilidade que impossibilitava a formação de uma topologia adequada para seu fim.

Mediante estudos realizados [Diaz e Sigmund, 1995; Jog e Haber, 1996], conjecturaram-se que as instabilidades ocorridas em problemas que utilizam o método da homogeneização e microestruturas artificiais (SIMP), eram causados pelo mau condicionamento das soluções das equações de equilíbrio obtidas com o uso do método dos elementos finitos. Na medida em que a diferença entre a ordem de interpolação dos deslocamentos e das densidades crescia, a ocorrência de instabilidades diminuía.

Jog e Haber propõem uma série de testes para estudar a instabilidade de tabuleiro. Constataram que malhas regulares são mais suscetíveis à aparição das instabilidades (por isso, o seu uso para teste torna-se desejável) e que tais instabilidades apareciam a medida em que a malha se submetia a uma distribuição uniforme de energia de deformação.

Outra linha de pesquisa realizada por Kikuchi, Oden e Sang [Kikuchi et al., 1984] demonstrou que a formação de super-elementos (com uma pequena quantidade de elementos), ao invés do uso de elementos de alta ordem, minimizava também a aparição das instabilidades.

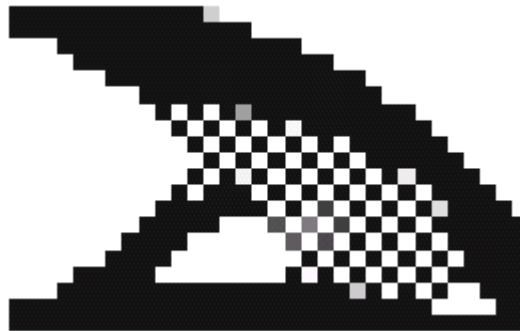


Figura 15: Instabilidade de tabuleiro.

Uma alternativa aos métodos mencionados, é o uso de filtragens. Sigmund [Sigmund, 1994], propôs uma filtragem espacial aplicada nos gradientes, baseada na utilização de uma média ponderada da sensibilidade de 8 elementos vizinhos em malhas regulares.

Mais tarde, Cardoso [Cardoso, 2000] introduz uma técnica que quebraria a dependência da regularidade de malha para a filtragem, chamada de *Filtragem Espacial dos Pesos Médios*, adotada nesse trabalho e que será vista com mais detalhe no item 5.3 desse capítulo.

5.2.2. DEPENDÊNCIA DA MALHA

Os diferentes resultados gerados entre diferentes discretizações são fatos já observados na solução de problemas utilizando-se o método dos elementos finitos. Em otimização também ocorrem incidências dessa natureza.

Quanto maior for o refino da malha, mais detalhada será a topologia final. Para a indústria, a obtenção de muitos reforços internos pode trazer encarecimentos no que tange a confecção de moldes e processos de fabricação. Portanto, controlar o detalhamento da topologia final pode ser desejável. A filtragem é uma forma de se atenuar essa formação de topologias muito detalhadas.

Filtragem, como será visto, é uma ferramenta de controle de gradiente, a qual traz benefícios não só no controle de instabilidades de tabuleiro, mas também no controle de complexidade, o qual permite a simplificação da topologia obtida.

5.3. FILTRAGEM

O modelo de filtragem empregado nesse trabalho, proposto por Cardoso [Cardoso, 2000], é chamado de Filtro Espacial de Pesos Médios e consiste em determinar a média ponderada dos elementos que estiverem dentro de uma região delimitada por um raio ε de ação, como pode-se observar na Figura 16.

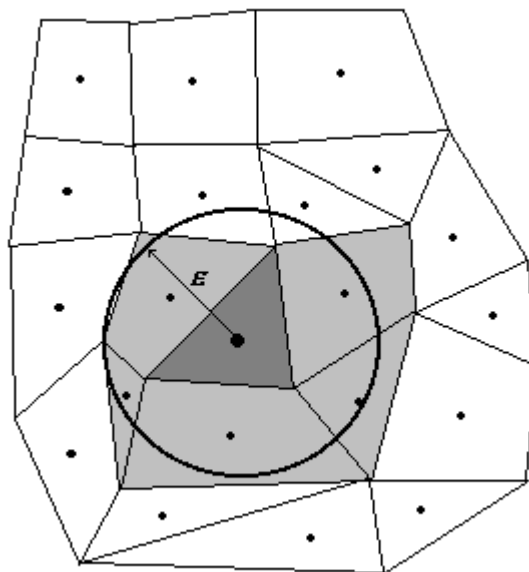


Figura 16: Representação do modelo de filtragem espacial de pesos médios, onde os elementos filtrados são aqueles que possuem seus centróides contidos no círculo de raio ε .

A expressão para o filtro é:

$$W_i = \frac{R_{\max} - R_{ij}}{R_{\max}} \quad (57)$$

$$\bar{W}_i = \frac{\sum_{i=1}^{nv} W_i}{nv} \quad (58)$$

$$\hat{a}_i = \frac{a_i V_i + \bar{W}_i \sum_{j=1}^{nv} a_j V_j}{V_i + \bar{W}_i \sum_{j=1}^{nv} V_j} \quad (59)$$

onde W_i representa o peso individual, R_{\max} e R_{ij} correspondem respectivamente ao raio máximo (raio definido pelo usuário) e ao raio do elemento (distância entre os centróides dos elementos i e j), nv é o número de vizinhos, a é a densidade do elemento e V representa o volume do elemento. Um esquema ilustrativo do funcionamento do filtro encontra-se no APÊNDICE II deste trabalho.

Uma grande vantagem desse modelo de filtragem é a independência da forma da malha e do tipo do elemento, o que torna o procedimento mais genérico.

Outra vantagem, encontra-se no fato do processo de filtragem ser aplicado diretamente sobre os limites móveis, e não sobre o gradiente da variável de projeto, o que não altera artificialmente as densidades no domínio. Desta forma, não há necessidade de alteração no cálculo de otimização para uma nova e artificial determinação de gradientes.

A desvantagem da filtragem com relação aos limites móveis é que valores elevados destes tendem a atenuar a ação do filtro.

Outra desvantagem do método está no fato de que as filtragens impõem um maior número de iterações até a convergência, podendo em determinados casos, chegar-se a um número de iterações duas vezes maior que em casos sem filtro [Fonseca, 1997].

Outra característica importante, que não deve ser encarada como uma desvantagem, mas sim como uma peculiaridade, está no fato de haver a necessidade de um refinamento mínimo para um bom desempenho do processo, uma vez que a metodologia de ação desse método de filtragem está ligada à restrição do gradiente imposta por uma média ponderada de “pesos” de um grupo de elementos.

6. IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO

A solução de um problema usando otimização topológica, consiste, de forma sucinta, nos seguintes passos:

- prever um domínio inicial, ou seja, volume e forma iniciais dentro do máximo admissível: essa tarefa é feita extraindo-se o volume dentro de uma montagem onde existirá a peça a ser projetada;
- Discretização do domínio definido anteriormente para posterior solução por elementos finitos: discretização do domínio e colocação das cargas e condições de contorno avaliadas;
- Solução da otimização e interpretação da geometria resultante;
- Redesenho da geometria interpretada na etapa anterior (“alisamento” de superfícies, colocação de raios, etc.).
- Cálculos finais de verificação da geometria em último nível.

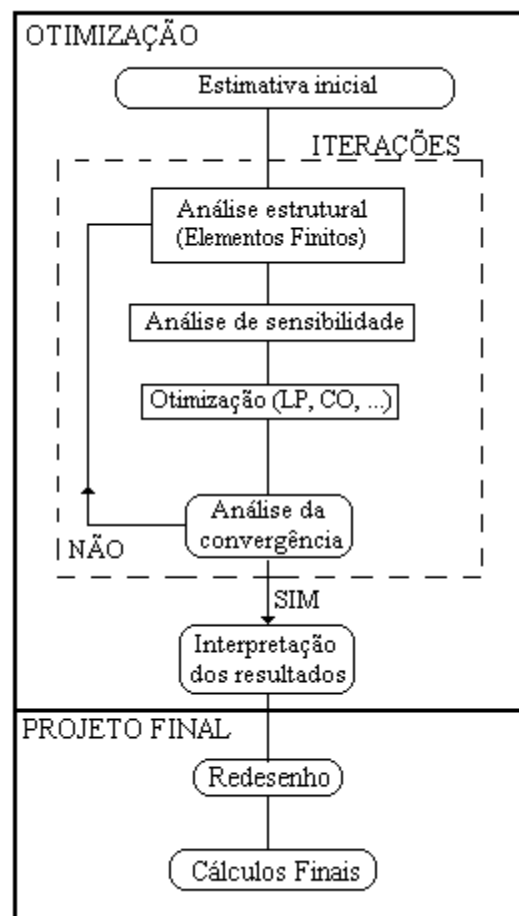


Figura 17: Metodologia empregada na otimização.

6.1. FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ESTUDADOS

Neste trabalho, buscaram-se a minimização do volume com restrição de flexibilidade e frequência natural e também a minimização da flexibilidade com restrição de volume, pois além de ser intuitivo a nível de engenharia (restrição de volume), possui muitos casos resolvidos na literatura, o que permite a comparação de técnicas de penalização, filtragem, entre outras.

Os problemas, já escritos na forma discreta, são:

- Minimização da flexibilidade (trabalho externo) com restrição de volume:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & F^t U(\rho) = \sum_{i=1}^{Nelem} f_i u_i(\rho) \\
 \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^{Nelem} \rho_i v_i \leq V_{lim} \\
 & \rho_{min} \leq 0 \leq 1
 \end{aligned} \tag{60}$$

onde F^t é o vetor força transposto, U é o vetor deslocamentos e ρ_{min} é o menor valor que as densidades podem assumir. Em um problema ideal, esse valor seria zero. Porém, para evitar instabilidades numéricas, deve-se usar um valor diferente de zero (geralmente entre 10^{-6} e 10^{-3}).

- Minimização do volume com restrição de flexibilidade:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{Nelem} \rho_i v_i \\
 \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^{Nelem} f_i u_i(\rho) \leq F^t U_{lim} \\
 & \rho_{min} \leq 0 \leq 1
 \end{aligned} \tag{61}$$

- Minimização do volume com restrição de Frequência Natural:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{Nelem} \rho_i v_i \\
 \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^{Nelem} \omega_n \geq \omega_{nlim} \\
 & \rho_{min} \leq 0 \leq 1
 \end{aligned} \tag{62}$$

onde ω_n é a primeira Frequência Natural do sistema e ω_{nlim} é o valor mínimo que essa frequência pode assumir.

6.2. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

O desenvolvimento da otimização topológica, como pode-se observar na Figura 17, depende da análise de sensibilidade. As mesmas serão desenvolvidas em função da variável de projeto (densidade).

6.2.1. DERIVADA DO VOLUME

O volume é uma função direta da variável de projeto (densidade). Sua derivada já foi discutida anteriormente por Cardoso [Cardoso, 2000]. A relação convexa

$$V = \sum_{i=1}^{Nelem} \rho_i V_i \quad (63)$$

tem derivada:

$$\frac{dV}{d\rho_i} = V_i \quad (64)$$

A expressão penalizada do volume, que não é convexa, é:

$$V = \sum_{i=1}^{Nelem} \rho_i^{\left(\frac{1}{n}\right)} V_i \quad (65)$$

e possui a seguinte derivada:

$$\frac{dV}{d\rho_i} = \frac{1}{n} \rho_i^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} V_i \quad (66)$$

6.2.2. DERIVADA DO TRABALHO EXTERNO

O trabalho externo possui a seguinte expressão:

$$F = f^t u \quad (67)$$

e sua derivada pode ser obtida facilmente utilizando-se a regra da cadeia.

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{df^t}{d\rho} u + f^t \frac{du}{d\rho} \quad (68)$$

A relação de equilíbrio dada pelo método dos elementos finitos diz que:

$$u = K^{-1} f \quad (69)$$

Logo, a derivada do deslocamento com respeito à variável de projeto é dada por:

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{dK^{-1}}{d\rho} f + K^{-1} \frac{df}{d\rho} \quad (70)$$

A derivada da matriz inversa pode ser obtida pela aplicação da regra da cadeia da relação

$$KK^{-1} = I \quad (71)$$

cuja derivada é:

$$\frac{dK}{d\rho} K^{-1} + K \frac{dK^{-1}}{d\rho} = 0 \quad (72)$$

$$K \frac{dK^{-1}}{d\rho} = -\frac{dK}{d\rho} K^{-1} \quad (73)$$

Multiplicando-se a equação (73) por (K^{-1}) , tem-se:

$$\frac{dK^{-1}}{d\rho} = -K^{-1} \frac{dK}{d\rho} K^{-1} \quad (74)$$

Inserindo a expressão (74) na derivada do deslocamento (70), obtém-se:

$$\frac{du}{d\rho} = -K^{-1} \frac{dK}{d\rho} u + K^{-1} \frac{df}{d\rho} \quad (75)$$

Substituindo a derivada do deslocamento (75) na expressão da derivada da flexibilidade (68), tem-se:

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{df^{-1}}{d\rho}u + f' \left(-K^{-1} \frac{dK}{d\rho}u + K^{-1} \frac{df}{d\rho} \right) \quad (76)$$

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{df^t}{d\rho}u - f' K^{-1} \frac{dK}{d\rho}u + f' K^{-1} \frac{df}{d\rho} \quad (77)$$

$$\frac{dF}{d\rho} = 2 \frac{df^t}{d\rho}u - u^t \frac{dK}{d\rho}u \quad (78)$$

A força de corpo é expressa de seguinte forma:

$$f = \rho V g \gamma \quad (79)$$

onde V é o volume, g é a aceleração da gravidade e γ é o peso específico.

Caso sejam consideradas as forças de corpo, a derivada da flexibilidade é dada pela expressão (78), onde a derivada da força é dada por:

$$\frac{df}{d\rho} = V g \gamma \quad (80)$$

Caso não sejam consideradas essas forças de corpo, a expressão (78) fica reduzida a:

$$\frac{dF}{d\rho} = -u^t \frac{dK}{d\rho}u \quad (81)$$

6.2.3. DERIVADA DE AUTOVALORES SIMPLES

Como se observou na equação (32), a solução modal trata de um problema de autovalores e autovetores, a qual é escrita por:

$$(K - \lambda M)\phi = 0 \quad (82)$$

Multiplicando-se a equação (82) por ϕ^t , tem-se:

$$\phi^t (K - \lambda M) \phi = 0 \quad (83)$$

derivando-se a equação (83) em relação à variável de projeto, tem-se:

$$\frac{d\phi^t}{d\rho_i} (K - \lambda M) \phi + \phi^t (K - \lambda M) \frac{d\phi}{d\rho_i} + \phi^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \frac{d\lambda}{d\rho_i} M - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi = 0 \quad (84)$$

De acordo com a equação (82), os dois primeiros termos da expressão (84) são nulos, a qual se reduz a:

$$\phi^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \frac{d\lambda}{d\rho_i} M - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi = 0 \quad (85)$$

$$\phi^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi = \phi^t \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi \quad (86)$$

$$\frac{d\lambda}{d\rho_i} = \frac{\phi^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi}{\phi^t M \phi} \quad (87)$$

Normalizando-se o denominador da expressão em relação à massa (87), obtém-se:

$$\phi^t M \phi = 1 \quad (88)$$

$$\frac{d\lambda}{d\rho_i} = \phi^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi \quad (89)$$

A solução de autovalores deve obedecer à mesma normalização adotada no processo de otimização, para que haja coerência entre as grandezas envolvidas. Neste caso, equação (88).

Assumindo valores pequenos na matriz de massa (quando comparados à matriz de rigidez), a expressão (89) pode ser reduzida a:

$$\frac{d\lambda}{d\rho_i} = \phi^t \frac{dK}{d\rho_i} \phi \quad (90)$$

6.2.4. DERIVADA DE AUTOVALORES REPETIDOS

Seja um autovalor λ , que possui dois autovetores ϕ_1 e ϕ_2 [Guilherme, 2001]

$$\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \quad (91)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (92)$$

e que satisfazem as seguintes condições de normalização:

$$\phi^t M \phi = 1 \quad (93)$$

$$\phi^t K \phi = \lambda \quad (94)$$

Substituindo-se a equação (91) em (83) e multiplicando-se por ϕ^t , tem-se:

$$(\alpha\phi_1^t + \beta\phi_2^t)(K - \lambda M)(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) \quad (95)$$

Derivando-se a equação (95) em função da variável de projeto, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha\phi_1^t + \beta\phi_2^t)}{d\rho_i}(K - \lambda M)(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) + (\alpha\phi_1^t + \beta\phi_2^t)(K - \lambda M)\frac{d(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}{d\rho_i} + \\ (\alpha\phi_1^t + \beta\phi_2^t)\left(\frac{dK}{d\rho_i} - \frac{d\lambda}{d\rho_i}M - \lambda\frac{dM}{d\rho_i}\right)(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = 0 \end{aligned} \quad (96)$$

Utilizando-se as relações definidas nas equações (82) e (91), a expressão (96) pode ser reduzida a:

$$(\alpha\phi_1^t + \beta\phi_2^t)\left(\frac{dK}{d\rho_i} - \frac{d\lambda}{d\rho_i}M - \lambda\frac{dM}{d\rho_i}\right)(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = 0 \quad (97)$$

Multiplicando-se os dois primeiros termos entre parênteses da equação (97), obtém-se:

$$\left(\alpha\phi_1' \frac{dK}{d\rho_i} - \alpha\phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M - \alpha\phi_1' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} + \beta\phi_2' \frac{dK}{d\rho_i} - \beta\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M - \beta\phi_2' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right). \quad (98)$$

$$(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = 0$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2\phi_1' \frac{dK}{d\rho_i} \phi_1 - \alpha^2\phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 - \alpha^2\phi_1' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \phi_1 + \\ & \alpha\beta\phi_2' \frac{dK}{d\rho_i} \phi_1 - \alpha\beta\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 - \alpha\beta\phi_2' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \phi_1 + \\ & \alpha\beta\phi_1' \frac{dK}{d\rho_i} \phi_2 - \alpha\beta\phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 - \alpha\beta\phi_1' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \phi_2 + \\ & \beta^2\phi_2' \frac{dK}{d\rho_i} \phi_2 - \beta^2\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 - \beta^2\phi_2' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \phi_2 = 0 \end{aligned} \quad (99)$$

Reagrupando-se os termos da equação (99):

$$\begin{aligned} & \alpha^2\phi_1' \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_1 - \alpha^2\phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 + \beta^2\phi_2' \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_2 - \beta^2\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 + \\ & \alpha\beta \left(\phi_2' \frac{dK}{d\rho_i} \phi_1 + \phi_1' \frac{dK}{d\rho_i} \phi_2 - \phi_2' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \phi_1 - \phi_1' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \phi_2 \right) - \\ & \alpha\beta \left(\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 - \phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2\phi_1' \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_1 + \beta^2\phi_2' \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_2 + \\ & \alpha\beta \left(\phi_2' \frac{dK}{d\rho_i} \phi_1 + \phi_1' \frac{dK}{d\rho_i} \phi_2 - \phi_2' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \phi_1 - \phi_1' \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \phi_2 \right) = \\ & \alpha\beta \left(\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 - \phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 \right) + \alpha^2\phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 + \beta^2\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2\phi_1' \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_1 + \beta^2\phi_2' \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_2 + \\ & \alpha\beta \left[\phi_1' \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_2 + \phi_2' \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_1 \right] = \\ & \alpha\beta\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 - \alpha\beta\phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 + \alpha^2\phi_1' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 + \beta^2\phi_2' \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 \end{aligned} \quad (102)$$

Como os produtos $\phi_1^t \phi_2$ e $\phi_2^t \phi_1$ são iguais, a equação (102) fica reduzida a:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \phi_1^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_1 + \beta^2 \phi_2^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_2 + 2\alpha\beta \phi_1^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_2 = \\ \alpha^2 \phi_1^t \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_1 + \beta^2 \phi_2^t \frac{d\lambda}{d\rho_i} M \phi_2 \end{aligned} \quad (103)$$

Considerando-se que:

$$g_{nm} = \phi_n^t \left(\frac{dK}{d\rho_i} - \lambda \frac{dM}{d\rho_i} \right) \phi_m \quad (104)$$

para n e m variando de 1 até o número de autovalores repetidos a serem considerados (no caso proposto, 2) e agrupando-se as equações (103) e (104), tem-se:

$$\alpha^2 g_{11} + \beta^2 g_{22} + 2\alpha\beta g_{12} = \left(\alpha^2 \phi_1^t M \phi_1 + \beta^2 \phi_2^t M \phi_2 \right) \frac{d\lambda}{d\rho_i} \quad (105)$$

Utilizando-se as relações das equações (92) e (93), obtém-se:

$$\frac{d\lambda}{d\rho_i} = \alpha^2 g_{11} + \beta^2 g_{22} + 2\alpha\beta g_{12} \quad (106)$$

Derivando-se a equação (106) em função de α e β

$$2\alpha g_{11} + 2\beta g_{12} = 0 \quad (107)$$

$$2\beta g_{22} + 2\alpha g_{12} = 0 \quad (108)$$

e reagrupando as equações (107) e (108), na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (109)$$

Para um número n de autovalores repetidos, a expressão (109) é escrita na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dots \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (110)$$

Os autovalores da matriz g passam a ser os autovalores do problema.

6.2.5. DERIVADA DE AUTOVALORES POR DIFERENÇAS FINITAS À FRENTE

Os cálculos de sensibilidade por métodos analíticos (até então apresentados) são de baixo custo computacional, além de serem mais eficientes por possuírem respostas diretas.

Outra alternativa de solução é a utilização de diferenças finitas [Haftka e Gürdal, 1992], o que se torna bastante útil nos casos onde são difíceis as obtenções das derivadas.

Entretanto, esse método, dependendo de como é montado o problema, pode gerar um custo computacional elevado. Além disso, dependendo da mudança de limites utilizada, poderá haver divergência no resultado.

A derivada do autovalor em função da densidade pode ser obtida por diferenças finitas à frente (111).

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \rho} = \frac{\lambda(\rho + \Delta \rho) - \lambda(\rho)}{\Delta \rho} \quad (111)$$

6.3. SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

Todos os problemas aqui apresentados (CAPÍTULO 7) são resolvidos utilizando-se programação linear. O problema de minimização da flexibilidade com restrição de volume (60) é também resolvido utilizando-se critério de ótimo, a fim de se comparar as duas técnicas de solução dos problemas de otimização.

6.3.1. CRITÉRIO DE ÓTIMO (FLEXIBILIDADE/VOLUME)

Utilizando-se a função objetivo (60) com a parametrização (55) e definindo-se o problema para a restrição sempre ativa [Cardoso, 2000], tem-se:

$$L(\rho, \lambda) = F^t U(\rho) + \lambda (V(\rho) - V_{\text{lim}}) \quad (112)$$

Derivando-se a expressão (112) em função da variável de projeto (densidade), obtém-se:

$$\frac{dL}{d\rho_e} = \frac{d(F^t U)}{d\rho_e} + \lambda \frac{dV}{d\rho_e} = 0 \quad \left|_{e=1 \dots N_{\text{elem}}} \quad (113)$$

$$\frac{\frac{d(F^t U)}{d\rho_e}}{\lambda \frac{dV}{d\rho_e}} = -1 \quad (114)$$

onde ρ_e é a densidade de cada elemento (sistema discreto) e

$$\frac{d(F^t U)}{d\rho_e} = -U_e^t \frac{dK_e}{d\rho_e} U_e \quad (115)$$

tem medida de energia de deformação e K_e e U_e são respectivamente a matriz de rigidez e o vetor deslocamento do elemento. Desta forma pode-se criar um critério onde a quantidade de material depositada no elemento é diretamente proporcional à energia que este possui, ou seja, quanto mais energia, mais material (de modo torná-lo mais rígido), menos energia, menos material.

$$\rho_e^{\text{nov}} = \begin{cases} \rho_{\min} \rightarrow \beta_e^n \rho_e \leq \rho_{\min} \\ \beta_e^n \rho_e \rightarrow \rho_{\min} \leq \beta_e^n \rho_e \leq \rho_{\max} \\ \rho_{\max} \rightarrow \beta_e^n \rho_e \geq \rho_{\max} \end{cases} \quad (116)$$

onde $n \in (0,1)$ é um fator estabilizador, ρ_{\min} (utiliza-se geralmente 10^{-3} ou 10^{-6} para evitar instabilidades numéricas) é o valor inferior das densidades e ρ_{\max} é o valor superior, igual a um.

Para a determinação dos multiplicadores de *Lagrange* escreve-se:

$$g(\lambda) = V(\rho^{novo}(\lambda)) - V_{lim} = 0 \quad (117)$$

e pode-se utilizar o método da bisseção, pois a função definida é monotônica em λ . O procedimento utilizado no método pode ser visualizado no diagrama da Figura 18.

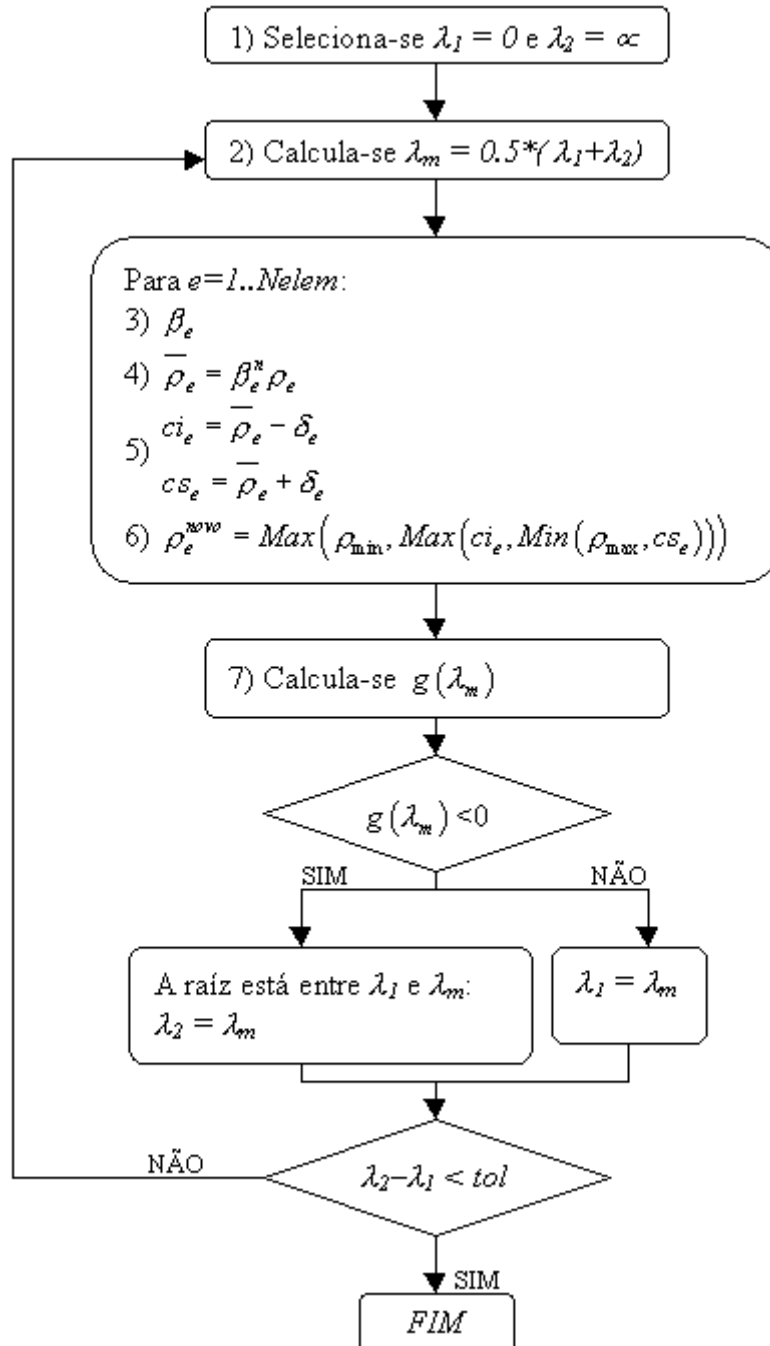


Figura 18: Esquema utilizado na bisseção.

onde ci_e e cs_e são respectivamente os valores inferior e superior das densidades após operação com a mudança de limites δ_e .

6.3.2. PROGRAMAÇÃO LINEAR

Dentre todas as funções estudadas na análise de sensibilidade, apenas o volume possui derivada constante com a variável de projeto (função explícita) e linearidade. As demais funções (flexibilidade e frequência natural) não possuem relação direta com a densidade (funções implícitas) e não são lineares.

Para que seja possível utilizar o método da programação linear para flexibilidade e frequência natural, é necessário que as mesmas sejam linearizadas. A ferramenta utilizada para tal é a expansão por séries de *Taylor*, como pode-se observar na equação (118).

$$f(x) = f_0(x) + \frac{df}{dx}(x - x_0) \quad (118)$$

Da mesma forma, as funções flexibilidade (*flex*) e frequência natural (ω_n) podem ser escritas, respectivamente por:

$$flex(\rho^{k+1}) = flex(\rho^k) + \sum_{i=1}^{N_{elem}} (\rho_i^{k+1} - \rho_i^k) \left(\frac{dflex}{d\rho_i} \right) \Bigg|_{\rho^k} \quad (119)$$

$$\omega_n(\rho^{k+1}) = \omega_n(\rho^k) + \sum_{i=1}^{N_{elem}} (\rho_i^{k+1} - \rho_i^k) \left(\frac{d\omega_n}{d\rho_i} \right) \Bigg|_{\rho^k} \quad (120)$$

6.4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Para a implementação do método visto no decorrente capítulo, fez-se necessária a programação das rotinas tais como entrada e saída de dados, solução das equações de equilíbrio e otimização estrutural. Foi escolhida a linguagem C++, onde as compilações foram geradas para os sistemas LINUX e WINDOWS (NT).

O programa se divide basicamente em três grandes blocos:

- Entrada e saída de dados;
- Cálculo por elementos finitos;
- Cálculo de otimização estrutural.

As soluções possíveis com o uso do programa são:

- Análise linear estática;
- Análise modal usando o algoritmo de JACOBI;
- Análise modal usando o pacote computacional EISPACK;
- Minimização da flexibilidade com restrição de volume usando critério de ótimo;
- Minimização da flexibilidade com restrição de volume usando programação linear, (pacote LAPACK);
- Minimização do volume com restrição da flexibilidade usando programação linear;
- Minimização do volume com restrição da frequência natural usando programação linear. As soluções modais empregadas utilizam o método de JACOBI (resolvido internamente no programa) e o método de LANCZOS (resolvido dentro do pacote computacional MSC.Nastran).

A solução das equações de equilíbrio desse programa é feita utilizando-se o método dos elementos finitos, cujos elementos desenvolvidos são:

- Elemento de barra;
- Elemento triangular de deformações constantes (CST);
- Elemento bi-linear isoparamétrico (quadrangular de 4 nós);
- Elemento tri-linear isoparamétrico (hexaédrico de 8 nós).

A entrada de dados no programa se dá na forma de um arquivo de dados, o qual pode ser escrito diretamente com editores de texto. Para malhas mais complexas, os dados (malha e condições de contorno) podem ser convertidos de outros programas (MSC.PATRAN e GID) para o formato do arquivo, uma vez que foram construídas ferramentas de conversão (também em C++).

7. RESULTADOS

7.1. PROBLEMAS DE TESTE

O primeiro problema de teste, conforme Figura 19, consiste em uma placa de dimensões $0,2 \times 0,1 \times 0,001$ m, apoiada em sua base, analisada por simetria, com carga de 2N, cujas propriedades são: módulo de elasticidade de $2,1 \times 10^{11}$ N/m² e coeficiente de Poisson 0,3.

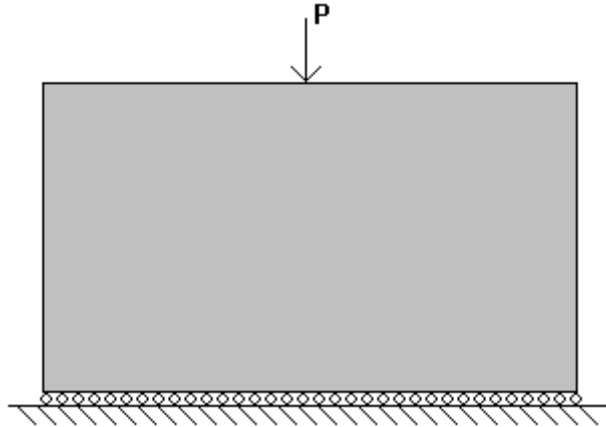


Figura 19: Problema 1 (placa de $0,2 \times 0,1 \times 0,001$ m apoiada na base).

A Figura 20 trata de um problema similar ao anterior, porém com engaste nas extremidades da base e movimento livre no centro da mesma (em outras palavras, não há restrições na região do vazio).

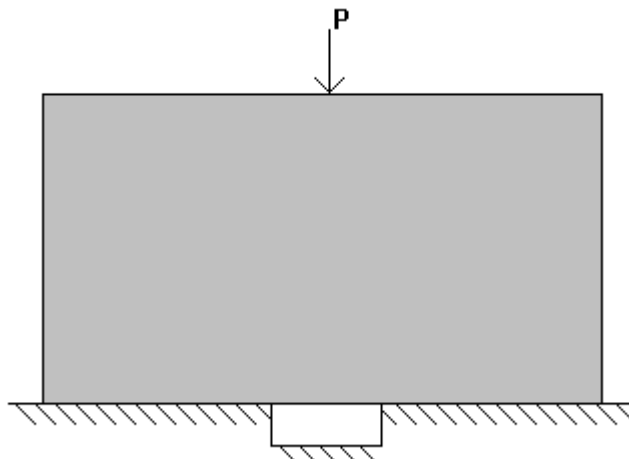


Figura 20: Problema 2 (placa de $0,2 \times 0,1 \times 0,001$ m, engastada na base, com deslocamento livre no centro).

A Figura 21 mostra uma variação do problema 2, com apoio simples na base.

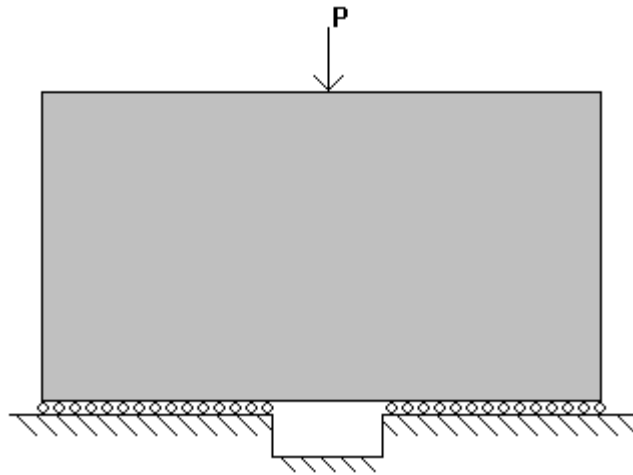


Figura 21: Problema 3 (placa de $0,2 \times 0,1 \times 0,001$ m, apoiada na base, com deslocamento livre no centro).

A Figura 22 mostra o problema da viga em balanço, com carga de 1N na extremidade direita e engaste no lado esquerdo da estrutura. As dimensões da placa são de $0,08 \times 0,05 \times 0,001$ m e as propriedades de material são as mesmas dos casos anteriores.



Figura 22: Problema 4 (placa de dimensões $0,08 \times 0,05 \times 0,001$ m, com carga na extremidade inferior direita).

Para ilustrar o problema com múltiplos casos de carregamento são sugeridos dois exemplos. O primeiro deles é uma variação do anterior, com cargas de 1N nas duas extremidades do lado direito da viga, porém com sentidos opostos (Figura 23). As dimensões e características de material são as mesmas do problema anterior.

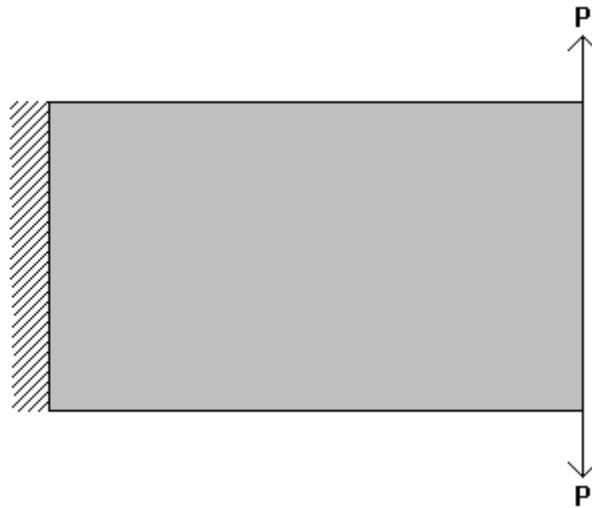


Figura 23: Problema 5 (duplo caso de carregamento).

Outro problema usado para avaliar múltiplos casos de carga é o da estrutura tipo ponte, com apoios nas extremidades e cargas de 1000N para baixo. As propriedades de material também são similares às dos problemas 4 e 5.

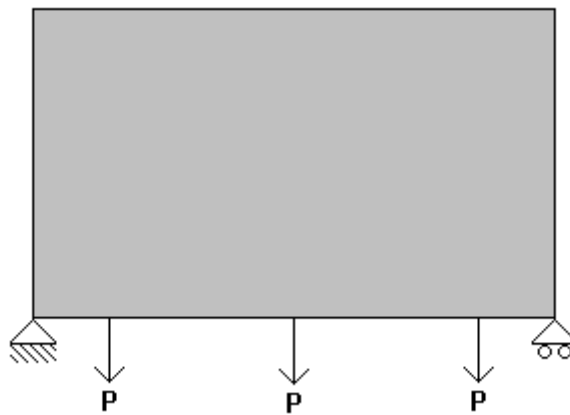


Figura 24: Problema 6 (placa de dimensões 8x5x0,1m, tipo ponte com apoios nas pontas).

Ilustrando-se o problema de otimização com restrição modal, tem-se uma viga de dimensões (8x5x1m) com massa concentrada de 100.000Kg no nó do canto inferior direito. O módulo de elasticidade do material, o coeficiente de poisson e a massa específica são respectivamente $2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, 0,3 e 7850Kg/m^3 .



Figura 25: Problema 7 (placa de dimensões $8 \times 5 \times 1$, com massa concentrada no nó do canto inferior direito).

Outro problema de otimização com restrição modal consiste na estrutura da Figura 26, semelhante ao já resolvido por Kikuchi [Bendsøe, 1995] onde a base é engastada e há massas de 100Kg concentradas nos nós apontados. Objetiva-se a criação de reforços para a estrutura básica apresentada (contornos em preto).

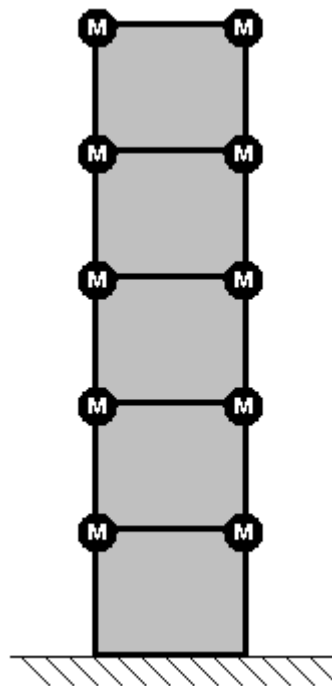


Figura 26: Problema 8 (estrutura resolvida por Kikuchi).

A diferença em relação ao caso estudado pelo autor citado é que procura-se a minimização do volume com restrição modal, ao invés de maximização do 1º modo de vibração. As propriedades mecânicas são as mesmas do problema anterior. As dimensões da estrutura são de $5 \times 1 \times 0,001$ m.

A fim de estudar-se uma variação do problema resolvido por Kikuchi, calculou-se uma estrutura similar com apenas 2m de altura, ao invés dos 5m adotados anteriormente, como pode-se observar na Figura 27. Os dados de material são idênticos aos apresentados no problema 7. Adotaram-se massas de 10Kg para essa estrutura.

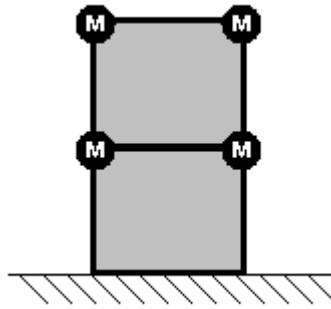


Figura 27: Problema 9 (estrutura similar à resolvida por Kikuchi).

Por fim, alguns problemas tridimensionais foram resolvidos. A Figura 28 mostra uma estrutura em forma de viga (similar ao problema 4), cujas dimensões são de 0,08x0,05x0,05m, carga de 20.000N, módulo de elasticidade de $2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ e coeficiente de Poisson de 0,3. Foi aplicada simetria na peça.

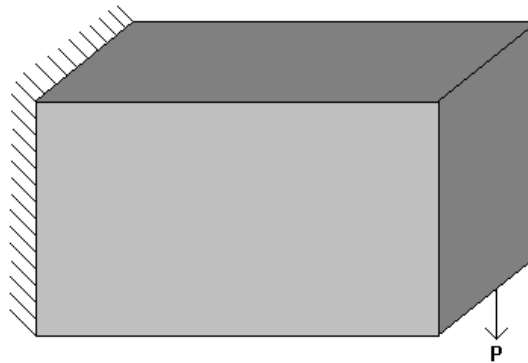


Figura 28: Problema 10 (viga tridimensional, simétrica, de dimensões 0,08x0,05x0,05mm).

A Figura 29 retrata uma estrutura similar à anterior, porém com carga descentralizada. Suas dimensões são de 0,08x0,05x0,025m, carga de 10.000N, módulo de elasticidade de $2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ e coeficiente de poisson de 0,3.

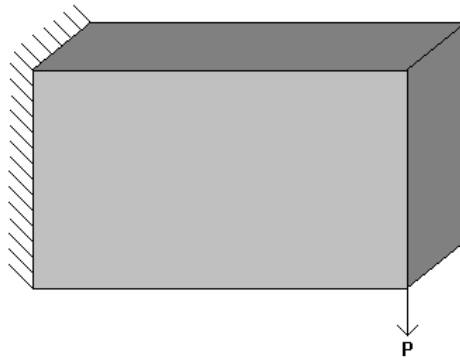


Figura 29: Problema 11 (viga tridimensional, com carga descentralizada, de dimensões 0,08x0,05x0,025m).

A Figura 30 corresponde ao caso tridimensional da barra do problema 1. Suas dimensões são de 0,2x0,2x0,1m, onde aplicou-se $\frac{1}{4}$ de simetria, carga centralizada de 40.000N, módulo de elasticidade de $2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ e coeficiente de Poisson de 0,3.

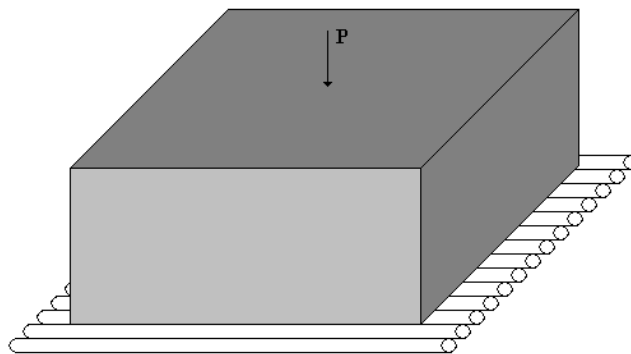


Figura 30: Problema 12 (barra tridimensional apoiada).

A Figura 31 trata de um problema com autovalores repetidos. Foram adotadas as propriedades mecânicas e dimensões do problema 10 e massa específica e massa concentrada de respectivamente 7850Kg/m^3 e 10^6Kg .

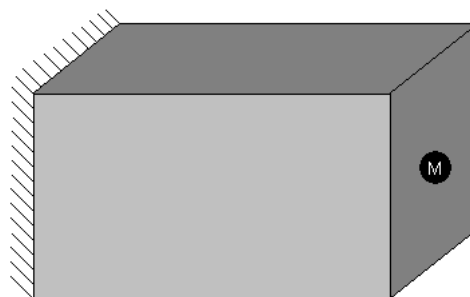


Figura 31: Problema 13 (viga tridimensional com massa no centro da face direita e engaste na face esquerda).

7.2. MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO DE VOLUME

7.2.1. MÉTODO DA CONTINUAÇÃO

Como explicado anteriormente, as soluções de otimização podem ser resolvidas penalizando-se ou não o tensor constitutivo ou a função objetivo. Caso tenha-se uma função convexa como objeto de estudo, a sua penalização acarretará em soluções dentro de extremos locais. Entretanto, a não penalização, apesar de conduzir ao mínimo global, pode produzir soluções com densidades intermediárias, as quais são indesejáveis do ponto de vista construtivo da peça. A solução que pode ser manufaturada e não está tão longe do extremo global pode ser obtida pelo “Método da Continuação”, já estudado por Cardoso [Cardoso, 2000].

O problema 1, apresentado na Figura 19, foi resolvido inicialmente utilizando-se critério de ótimo. Estabeleceu-se um volume final com fração de 25% do volume cheio (distribuição homogênea de densidade), tolerâncias para o processo de otimização e para o critério de ótimo em respectivamente 10^{-6} e 10^{-12} , densidades entre 10^{-6} e 1 e limites móveis variando entre 0,08 e 0,2.

A Figura 32 mostra o resultado da otimização sem penalização para uma malha com 625 elementos e 676 nós. Nota-se a presença de densidades intermediárias, o que embora seja interessante a nível matemático (ótimo global), impossibilita a construção de uma estrutura na prática.

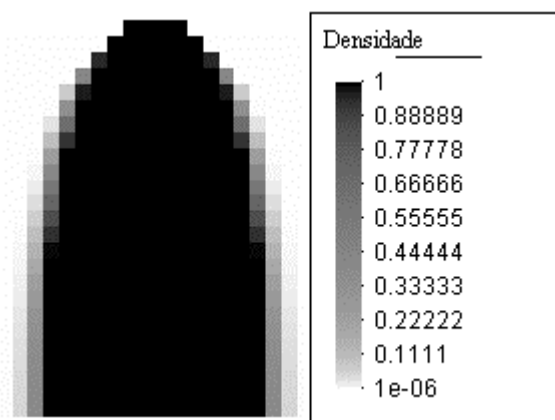


Figura 32: Resultado do problema 1, sem penalização do tensor constitutivo.

No caso do problema apresentado, a função objetivo é convexa. Portanto, independente da estimativa inicial, a solução final será sempre o ótimo global (não ocorrendo penalização das densidades intermediárias). Penalizando-se o tensor constitutivo a fim de minimizar o número de

densidades intermediárias (em cinza), obtêm-se soluções mais próximas de estruturas que podem ser construídas.

A Figura 33 mostra a solução do problema com penalização do tensor constitutivo utilizando expoente 2, após a convergência do problema para o primeiro passo de otimização (sem penalização).

A Figura 34 mostra a solução final, com expoente 3 de penalização, após a convergência obtida no segundo nível de otimização.

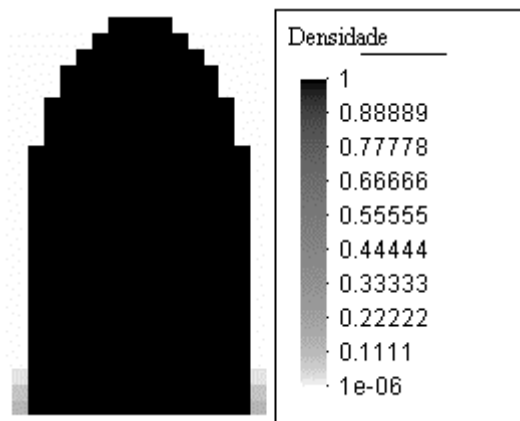


Figura 33: Resultado do problema 1, ao final do segundo nível de otimização, com penalização do tensor constitutivo usando-se expoente 2.

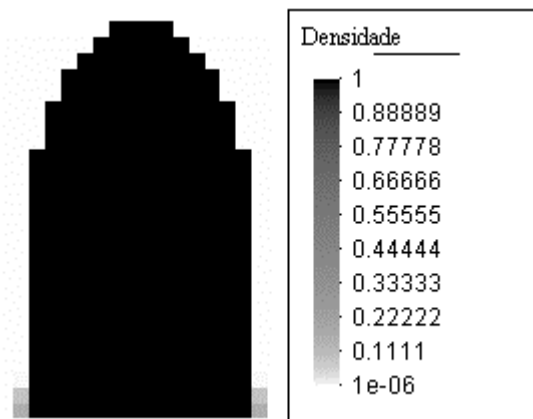


Figura 34: Resultado do problema 1, ao final do terceiro nível de otimização, com penalização do tensor constitutivo usando-se expoente 3.

Nota-se que do segundo passo de otimização (expoente 2) para o terceiro (expoente 3), não há grande diferença na topologia. Isso se deve ao fato de haver poucas densidades intermediárias presentes no segundo cálculo.

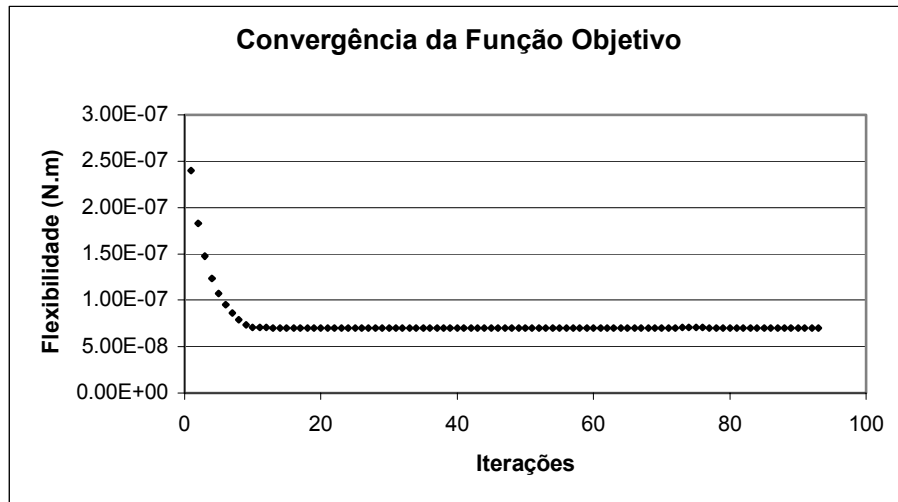


Figura 35: Curva de convergência da função objetivo do problema 1, resolvido com CO.

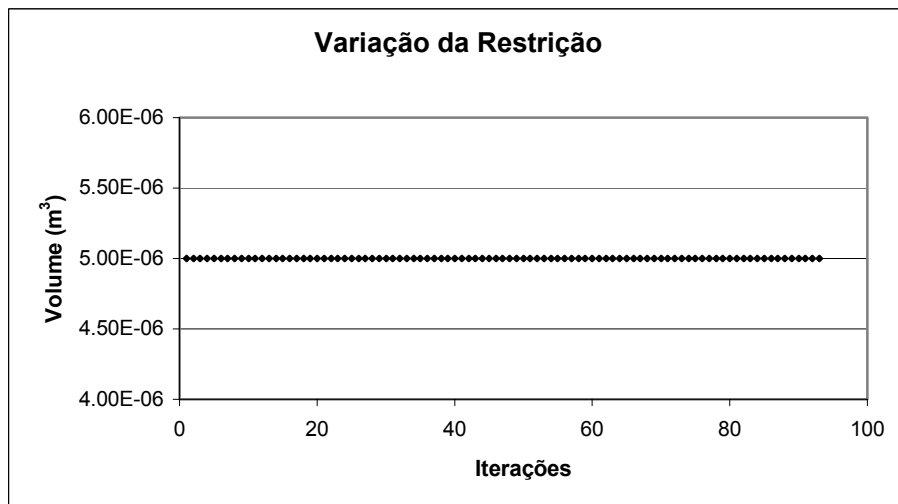


Figura 36: Variação do volume no problema 1, resolvido com CO.

Os valores de flexibilidade obtidos na análise do problema 1, utilizando-se CO e método da continuação podem ser vistos na Tabela 1. Nota-se claramente que o valor da função objetivo aumenta na medida em que aumenta também o expoente de penalização do tensor constitutivo (SIMP), pois quanto maior é o expoente usado, mais a função objetivo afasta-se do valor de mínimo global.

Selecionando-se os elementos que possuem densidade superiores a 0,99 e resolvendo-se o problema no software comercial MSC.Nastran, a título de conferência, obtém-se $7,24 \times 10^{-8}$ N.m de flexibilidade. A pequena diferença se dá devido ao corte de 0,99, ou seja, à seleção dos elementos que possuem apenas densidades próximas de 1, já que os outros elementos também contribuem no valor de flexibilidade.

Tabela 1: Resultados obtidos no problema 1, para uma malha de 625 elementos, usando-se o método da continuação e CO.

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$6,9715 \times 10^{-08}$	72
2	2	$7,00062 \times 10^{-08}$	19
3	3	$7,00092 \times 10^{-08}$	2

A solução do mesmo problema para uma malha com melhor refinamento (1089 elementos e 1156 nós) pode ser observada na Figura 37.

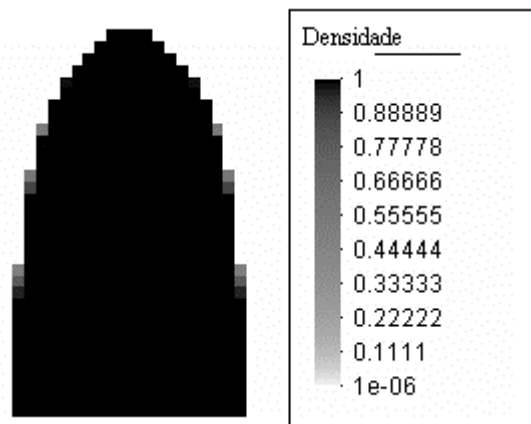


Figura 37: Resultado do problema 1, obtido para um nível maior de refinamento (1089 elementos).

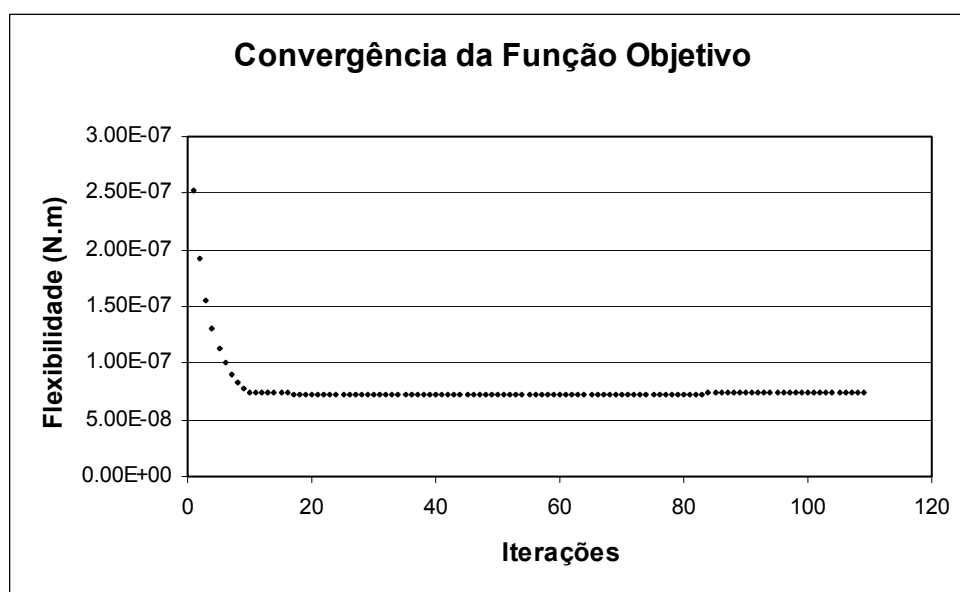


Figura 38: Gráfico de convergência da função objetivo para a malha com 1089 elementos.

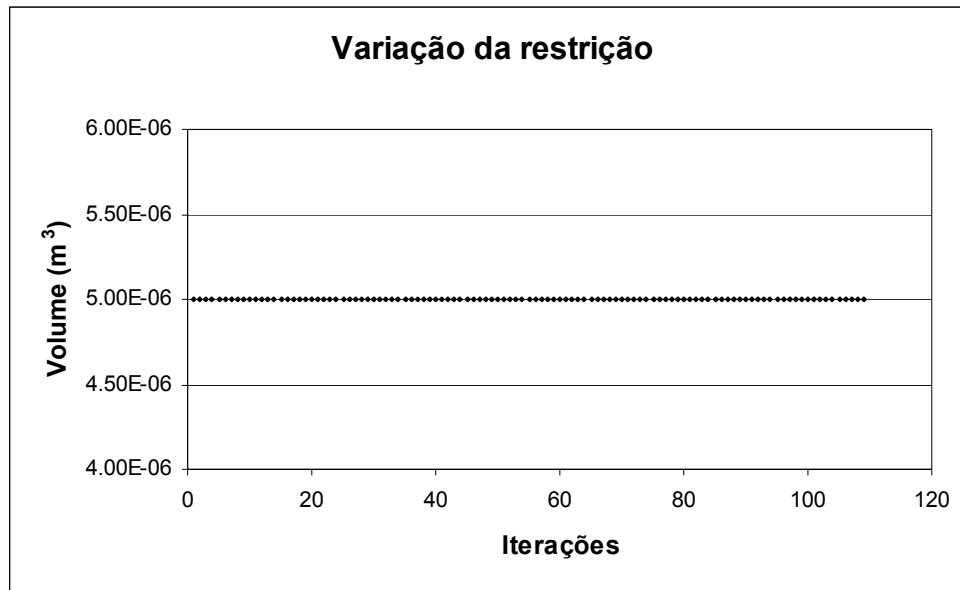


Figura 39: Variação da restrição para a malha com 1089 elementos.

A Tabela 2 mostra os valores obtidos para a função objetivo representada no gráfico da Figura 38.

Tabela 2: Resultados obtidos no problema 1, usando-se o método da continuação e CO em uma distribuição uniforme de densidades (malha de 1089 elementos).

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$7,3 \times 10^{-08}$	83
2	2	$7,32 \times 10^{-08}$	18
3	3	$7,34 \times 10^{-08}$	8

A Figura 40 retrata uma distribuição inicial aleatória usada para demonstrar a convexidade da função objetivo. Novamente foi empregado o método da continuação. A Figura 41 mostra o resultado obtido. Como pode-se observar, não há diferenças entre as topologias apresentadas. Entretanto, a distribuição inicial não homogênea acarretou em um número maior de iterações, como pode-se observar no gráfico da Figura 42 e na Tabela 3.

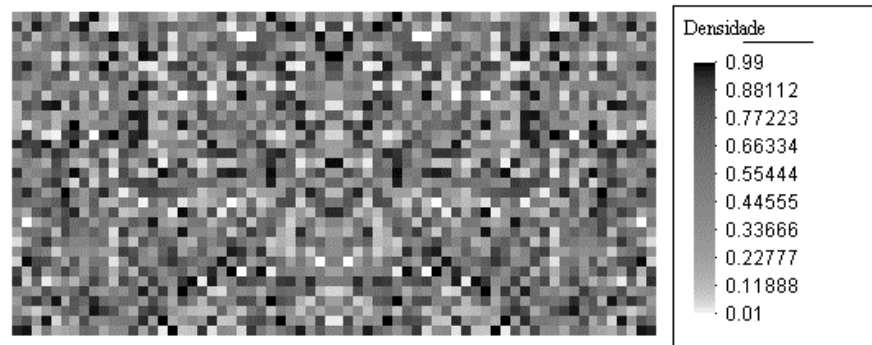


Figura 40: Distribuição aleatória de densidades para o problema 1 com 1089 elementos.

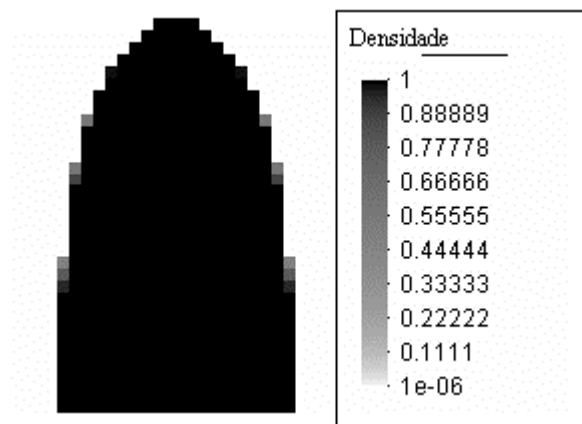


Figura 41: Resultado obtido para a distribuição aleatória de densidades.

A Tabela 3 mostra os valores da função objetivo obtidos para cada um dos níveis de otimização utilizados. A diferença significativa em termos do número de iterações em relação ao resultado anterior está no primeiro passo de otimização (sem penalização do tensor constitutivo).

Tabela 3: Resultados obtidos no problema 1 usando-se o método da continuação e CO em uma distribuição aleatória de densidades (malha de 1089 elementos).

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$7,30082 \times 10^{-08}$	101
2	2	$7,32726 \times 10^{-08}$	19
3	3	$7,3337 \times 10^{-08}$	8

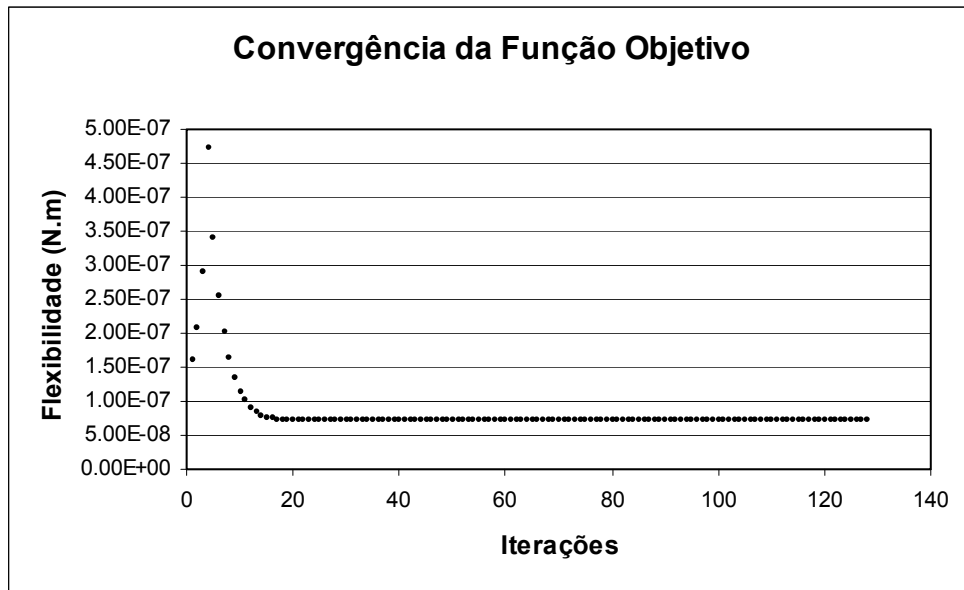


Figura 42: Convergência da função objetivo para a malha de 1089 elementos com distribuição inicial aleatória de densidades.

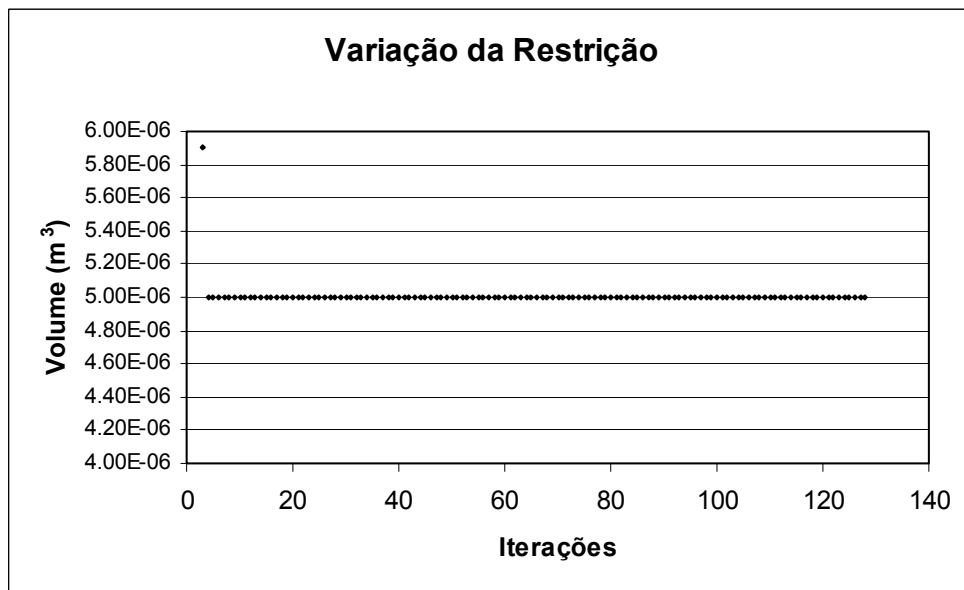


Figura 43: Variação da restrição para malha de 1089 elementos e distribuição inicial aleatória de densidades.

7.2.2. TOLERÂNCIA NO CRITÉRIO DE ÓTIMO (CO)

Valores pequenos de força e deslocamento resultam em valores ainda menores para a derivada da flexibilidade. Na equação (114) pode-se observar que valores pequenos para a derivada da flexibilidade produzem funções objetivo com pequenas variações. Logo, a sensibilidade da mesma diminui numericamente, podendo acarretar em divergências nas soluções de otimização. Este fato pode ser bem observado nos pacotes de otimização abertos, já que é possível o controle sobre a tolerância usada. Resolvendo-se o problema 1, da Figura 19, com carga idêntica à proposta inicialmente, distribuição inicial de densidades uniforme e igual a 0,25 (malha com 1089 elementos), observou-se divergência para solução de otimização com tolerância de 10^{-4} para o Critério de Ótimo (CO), como pode-se observar no gráfico de convergência da função objetivo apresentado na Figura 44.

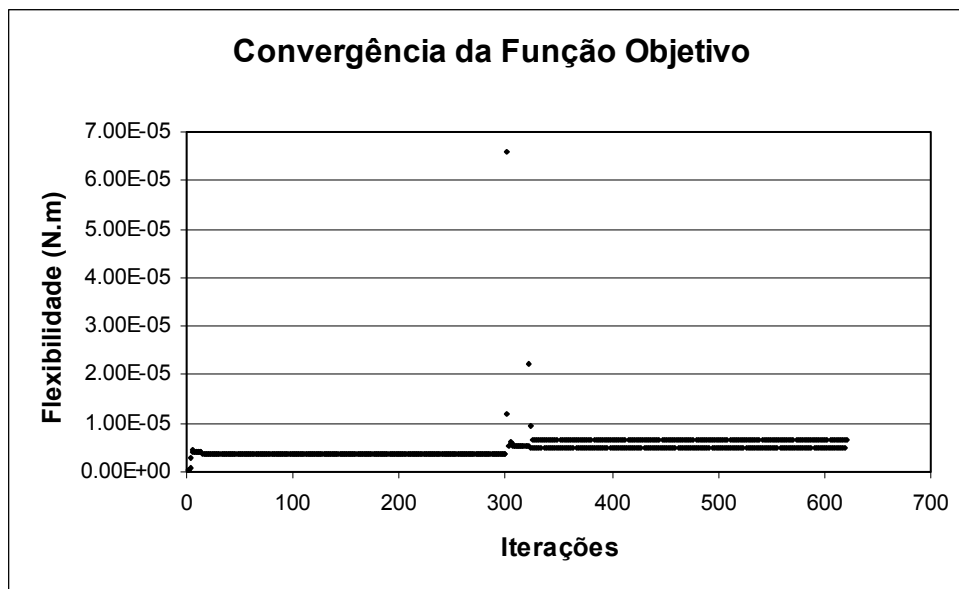


Figura 44: Variação da função objetivo para tolerância no CO de 10^{-4} .

O fato de haver uma tolerância de CO inferior às adotadas anteriormente não significa que haverá uma necessária divergência de resultados. No caso do exemplo citado, o baixo valor da carga e o alto valor do módulo de elasticidade ($E=210\text{GPa}$) correspondem na prática a baixos valores de deslocamento, o que em outras palavras, produzirá uma baixa flexibilidade e a uma pequena derivada desta.

O gráfico da Figura 45 mostra com clareza a divergência da solução, pois a restrição sempre ativa varia para valores abaixo do mínimo estabelecido. Neste caso, não houve formação de uma topologia que pudesse ser interpretada.

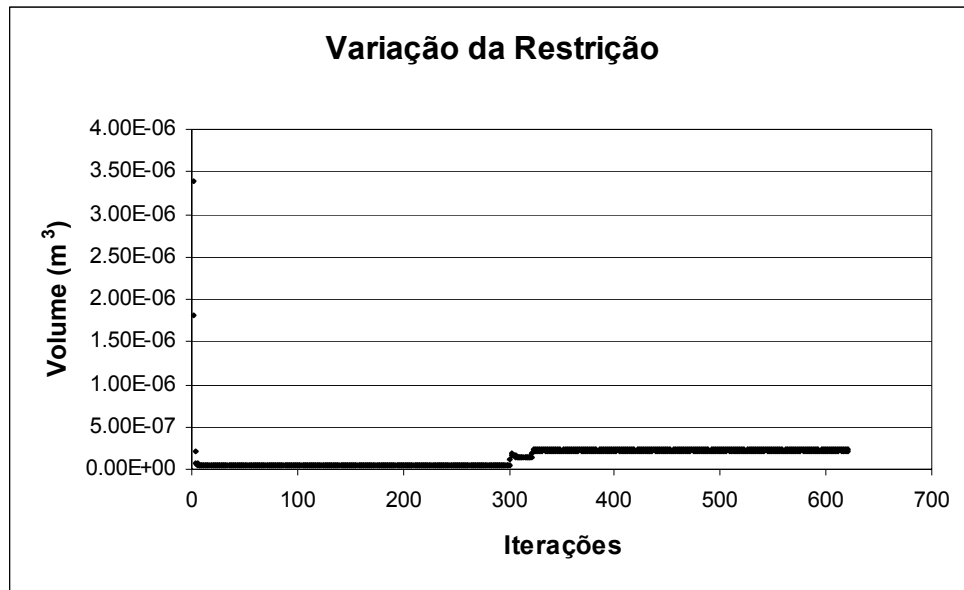


Figura 45: Variação da restrição para tolerância no CO de 10^{-4} .

A Figura 46 apresenta a convergência para tolerância do CO de 10^{-10} . Nota-se um aumento do número de iterações no primeiro nível de otimização em relação ao cálculo executado utilizando-se 10^{-12} . Isso se dá em função de uma maior variação da função objetivo (tolerância menor no método da bissecção, por conseguinte maior trabalho computacional para a convergência, como se observa na comparação entre a Tabela 2 e a Tabela 4).

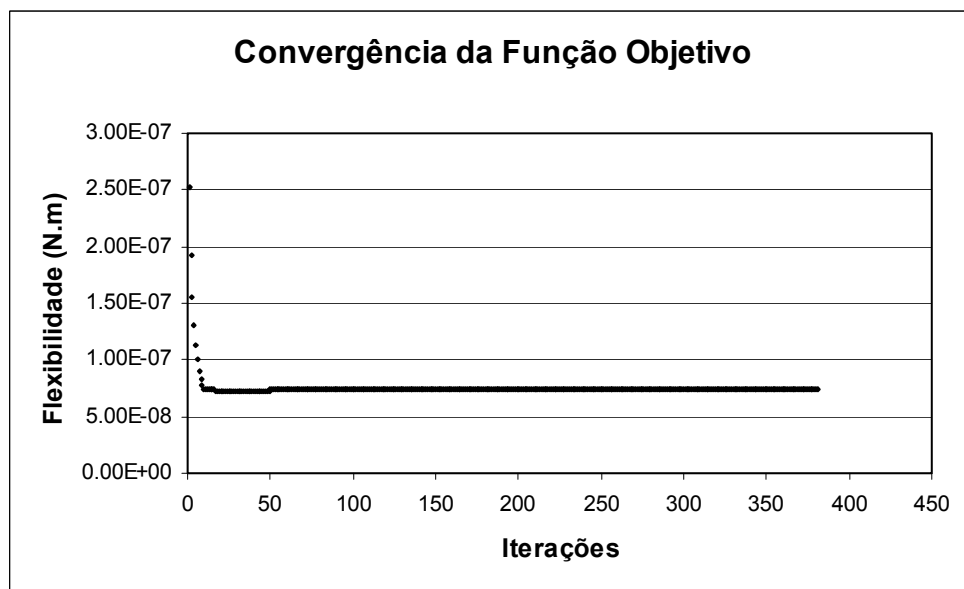


Figura 46: Variação da função objetivo para tolerância do CO de 10^{-10} .

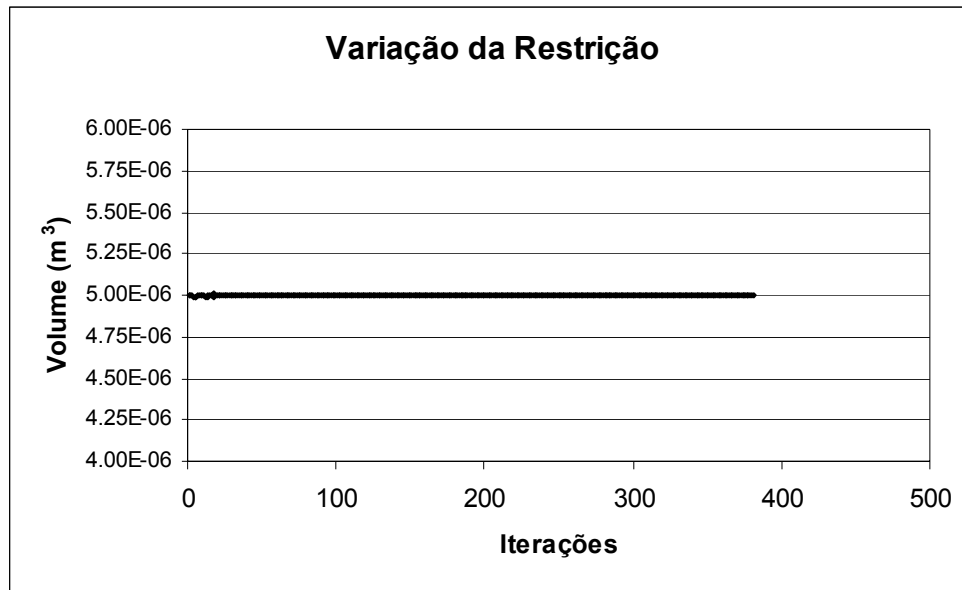


Figura 47: Variação da restrição para tolerância do CO de 10^{-10} .

Tabela 4: Resultados obtidos no problema 1 usando-se o método da continuação e CO em uma distribuição uniforme de densidades e tolerância para o CO de 10^{-10} (malha de 1089 elementos).

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$7,3 \times 10^{-08}$	49
2	2	$7,32 \times 10^{-08}$	32
3	3	$7,32 \times 10^{-08}$	300

A Figura 48 mostra as topologias formadas nos três diferentes níveis de otimização da Tabela 4.

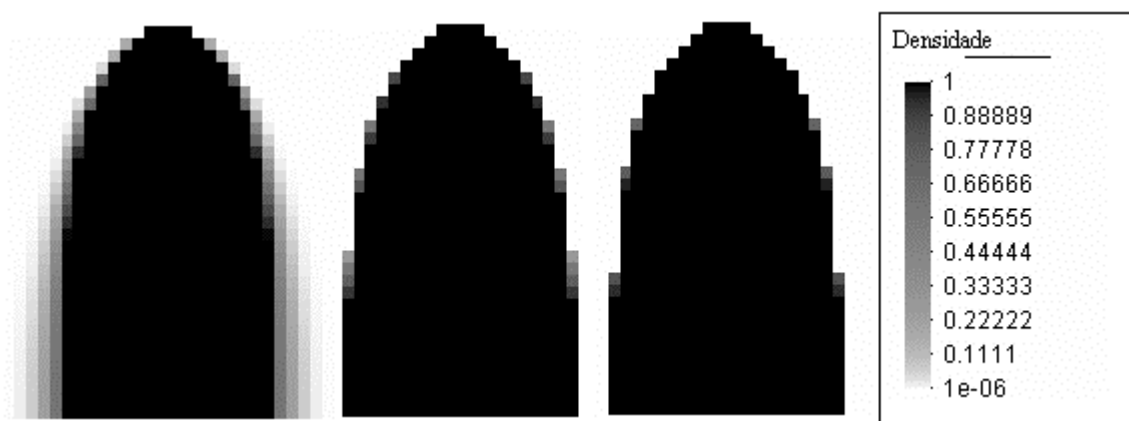


Figura 48: Topologias obtidas com tolerância do CO de 10^{-10} .

7.2.3. CRITÉRIO CE ÓTIMO (CO) x PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP)

Resolvendo-se o problema anterior (1089 elementos) com LP e limites móveis também entre 0,08 e 0,2, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Resultados obtidos resolvendo-se o problema 1 com uma malha de 1089 elementos e usando-se LP.

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$7,41206 \times 10^{-08}$	300
2	2	$7,3267 \times 10^{-08}$	18
3	3	$7,33002 \times 10^{-08}$	16

Foram admitidas 300 iterações como limite para cada nível de otimização. Como pode-se observar, no primeiro nível, sem penalização, não houve convergência, e sim, parada no número máximo de iterações. Embora os limites móveis estejam alterando-se dinamicamente durante os passos de otimização, os métodos de programação linear possuem grande sensibilidade às mudanças de limites móveis. Alterações demasiadamente altas podem causar divergência dos resultados, além da derivada da função objetivo não estar bem definida para pequenos valores de flexibilidade, como fora discutido no item anterior (7.2.2).

A Figura 49 mostra a topologia obtida para uma malha de 1089 elementos. A Figura 52 mostra o resultado para a malha de 625 elementos.

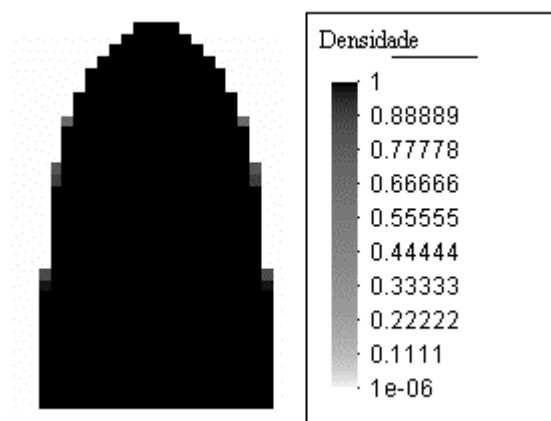


Figura 49: Resultado do problema 1 com penalização do tensor constitutivo, usando-se o método da continuação, LP e malha com 1089 elementos.

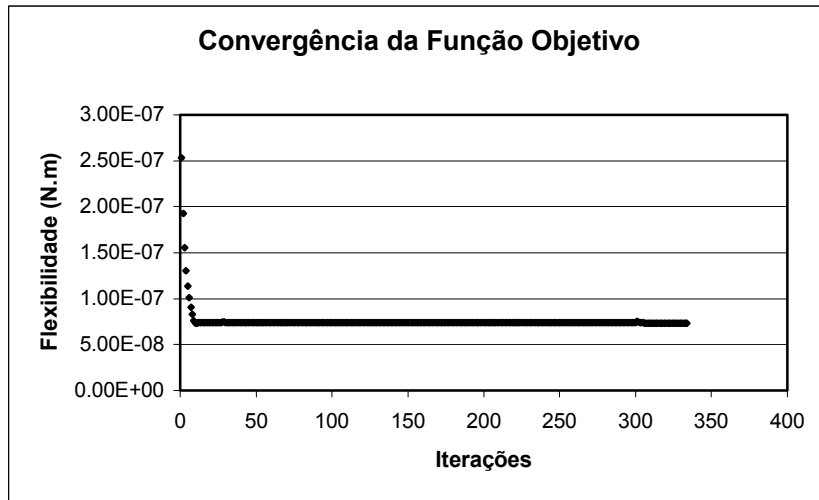


Figura 50: Convergência da função objetivo usando LP para malha com 1089 elementos.

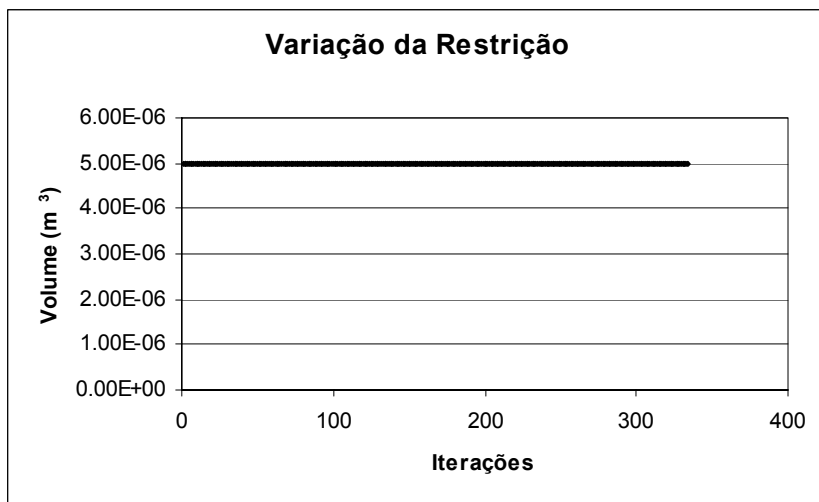


Figura 51: Variação da restrição usando LP para a malha com 1089 elementos.

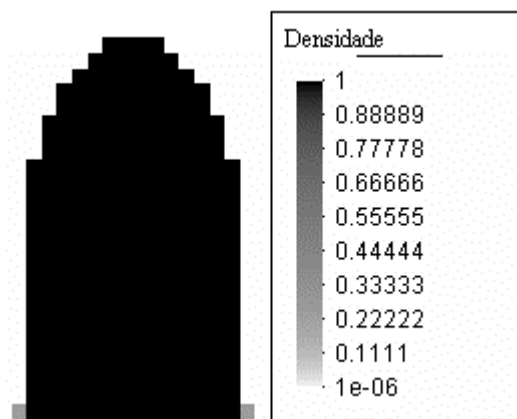


Figura 52: Resultado do problema 1 com penalização do tensor constitutivo usando-se o método da continuação, LP e malha com 625 elementos.

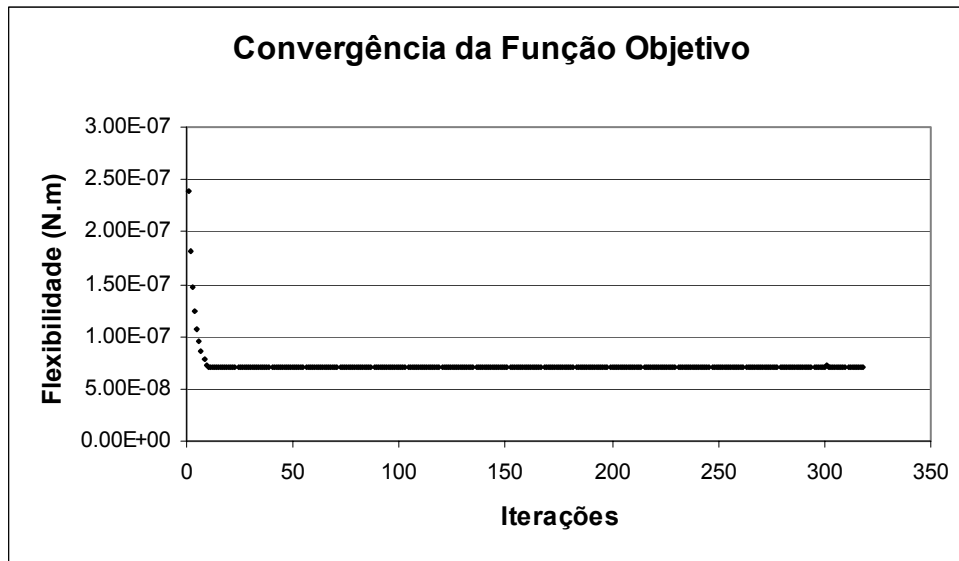


Figura 53: Convergência da função objetivo usando LP para a malha com 625 elementos.

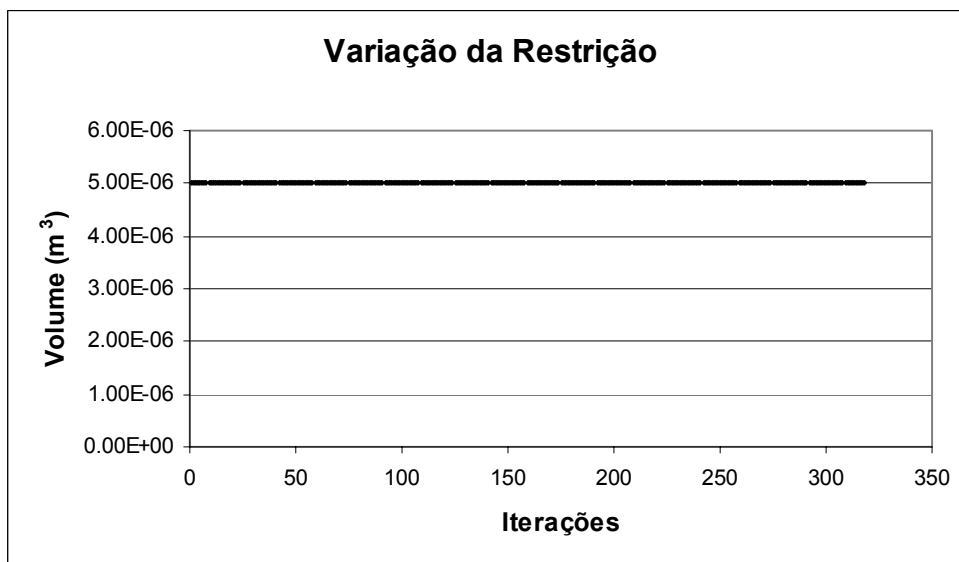


Figura 54: Variação da restrição usando LP para a malha com 625 elementos.

Discutiu-se anteriormente que os métodos de Programação Matemática possuem uma vantagem sobre os Critérios de Ótimo por não haver a necessidade de se deduzir o problema de otimização a cada mudança das características principais da função objetivo e das restrições. Entretanto, o controle sobre a tolerância dentro do “pacote” de solução dos problemas de otimização é perdido com o uso de LP. Portanto, a instabilidade que ocorre em detrimento dessa característica do método produz uma grande desvantagem sobre os cálculos que utilizam CO.

Em suma, apesar de haver a necessidade de uma nova definição do problema de otimização a cada variação do mesmo, o CO traz vantagens no que tange a sua robustez.

7.2.4. INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Como é de se esperar, a mudança das condições de contorno altera a topologia final. Analisando-se a retirada do apoio da região central da base (problema 2 - Figura 20), o resultado muda consideravelmente, conforme pode-se observar na Figura 55 (resultado para malha de 625 elementos). Como nos casos anteriores, adotou-se uma restrição de $\frac{1}{4}$ de volume.

Foram engastados os pontos de contato com a base e utilizado o método da continuação com três níveis, conforme Tabela 6.

Tabela 6: Resultados obtidos no problema 2 usando-se o método da continuação e CO para uma malha com 625 elementos.

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$9,69362 \times 10^{-08}$	68
2	2	$9,87522 \times 10^{-08}$	44
3	3	$9,8912 \times 10^{-08}$	16

A tolerância do CO adotada para essa otimização foi de 10^{-12} .

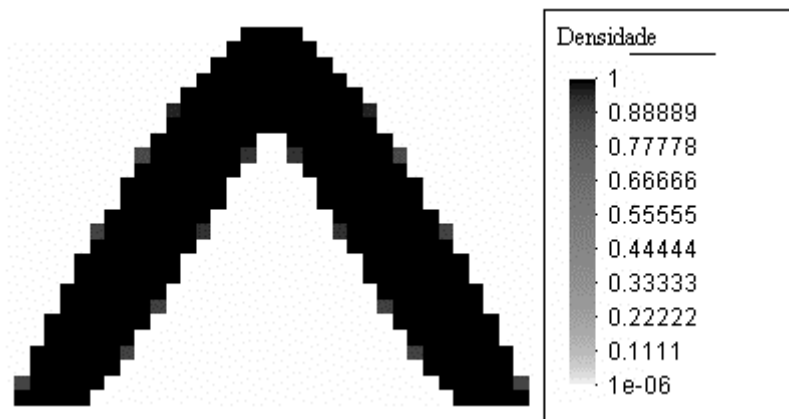


Figura 55: Resultado obtido com uma malha de 625 elementos, CO, método da continuação em três níveis e tolerância do CO de 10^{-12} .

A Tabela 7 mostra os resultados obtidos para uma malha de 1089 elementos, cujas condições de contorno e ferramentas de otimização são as mesmas empregadas anteriormente.

Tabela 7: Resultados obtidos no problema 2 usando-se o método da continuação e CO para uma malha com 1089 elementos.

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$1,024066 \times 10^{-07}$	65
2	2	$1,038928 \times 10^{-07}$	23
3	3	$1,040672 \times 10^{-07}$	11

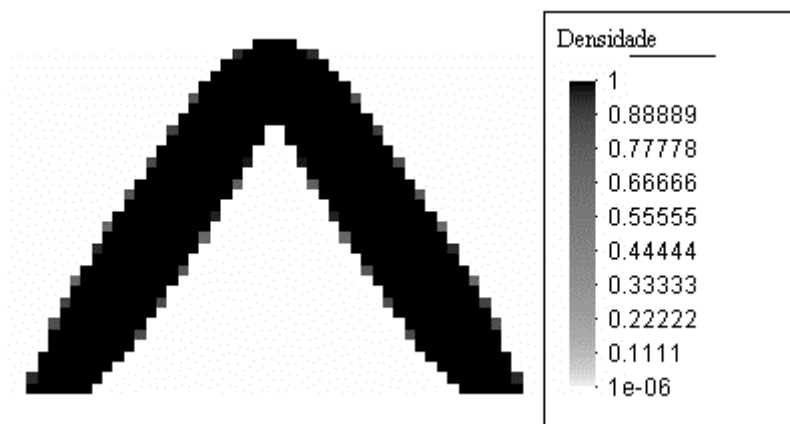


Figura 56: Resultado obtido com uma malha de 1089 elementos, CO, método da continuação em três níveis e tolerância do CO de 10^{-12} .

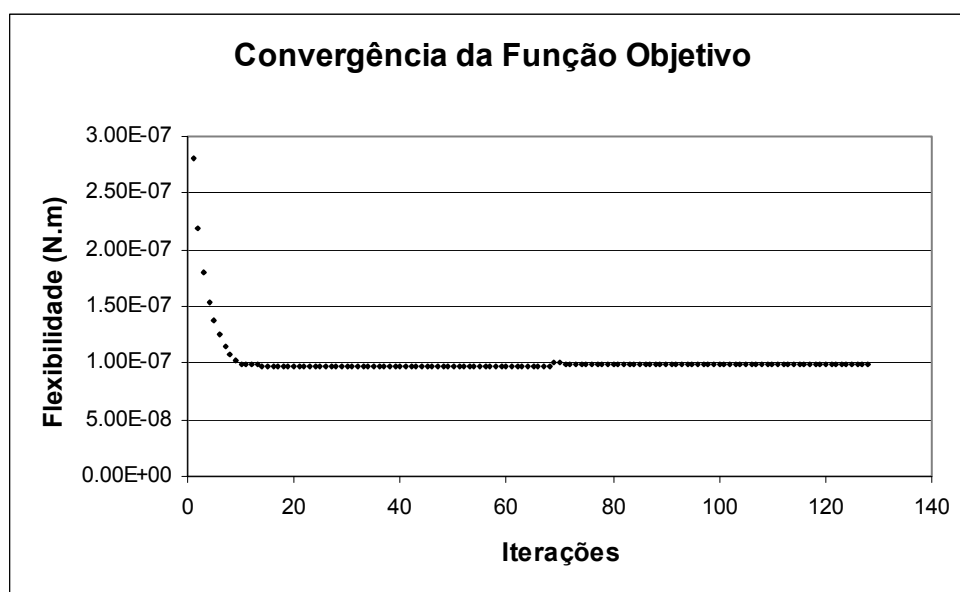


Figura 57: Gráfico de convergência para o problema 2 com engaste na base e malha com 625 elementos.

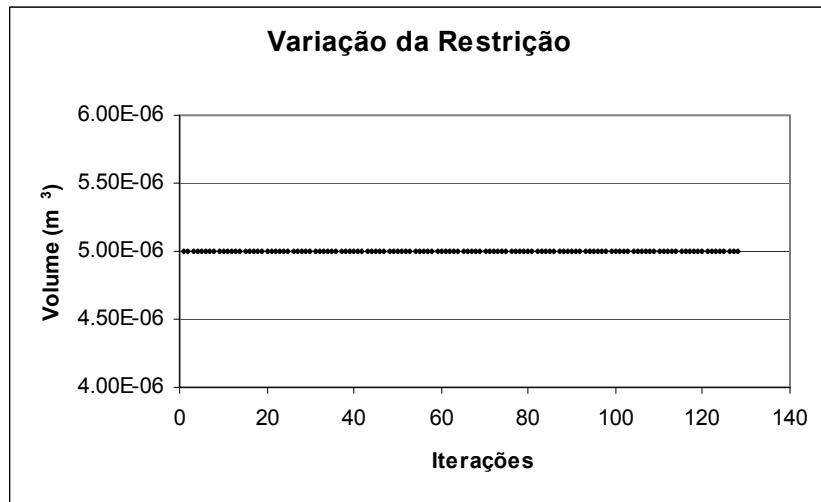


Figura 58: Variação da restrição para o problema 2 com engaste na base e malha com 625 elementos.

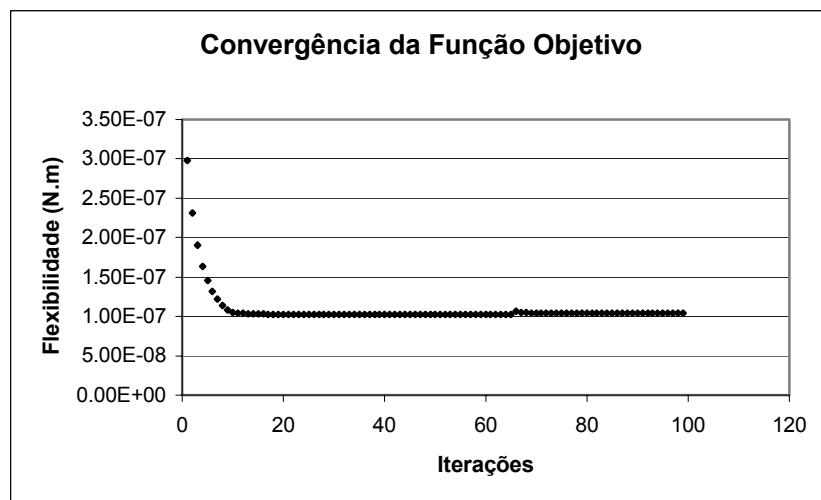


Figura 59: Gráfico de convergência para o problema 2 com engaste na base e malha com 1089 elementos.

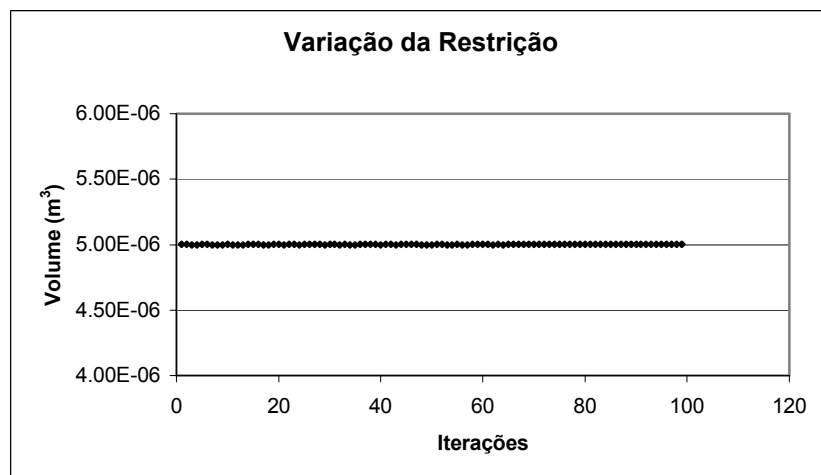


Figura 60: Variação da restrição para o problema 2 com engaste na base e malha com 1089 elementos.

A Figura 61 e a Tabela 8 mostram os resultados para o problema 3 (Figura 21), obtidos com uma malha de 625 elementos e os mesmos critérios de otimização empregados no problema anterior.

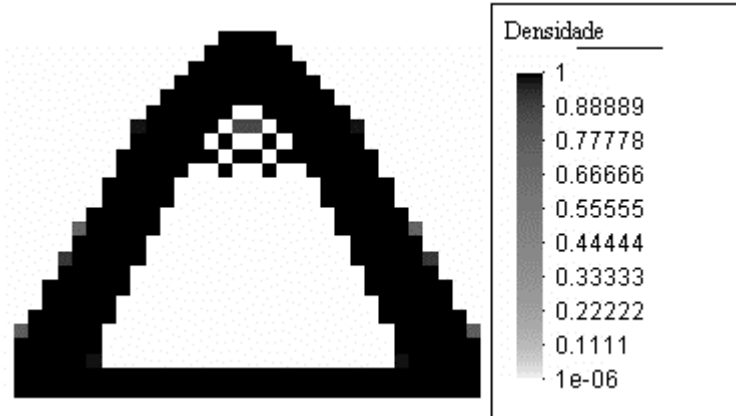


Figura 61: Minimização de flexibilidade com restrição de volume para o problema 3. Nota-se a presença da instabilidade de tabuleiro no topo da figura.

Tabela 8: Resultados obtidos no problema 3, usando-se o método da continuação e CO, para uma malha de 625 elementos.

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$1,223248 \times 10^{-07}$	66
2	2	$1,318 \times 10^{-07}$	41
3	3	$1,318406 \times 10^{-07}$	15

Refinando-se a malha (1089 elementos), obtêm-se os resultados mostrados na Tabela 9 e na Figura 62.

Tabela 9: Resultados obtidos no problema 3, usando-se o método da continuação e CO, para uma malha de 1089 elementos.

Nível de otimização	SIMP	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	1	$1,299302 \times 10^{-07}$	101
2	2	$1,412824 \times 10^{-07}$	68
3	3	$1,426958 \times 10^{-07}$	24

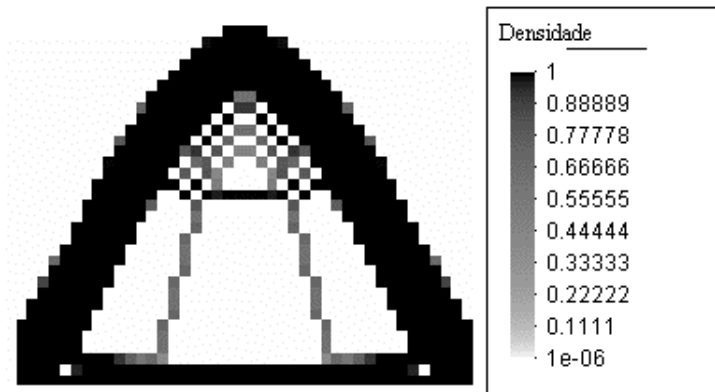


Figura 62: Resultado obtido para o problema 3 com uma malha de 1089 elementos.

Nota-se para ambos os casos de refinamento a presença da instabilidade de tabuleiro. É possível observar também a diferença nas topologias obtidas (dependência de malha).

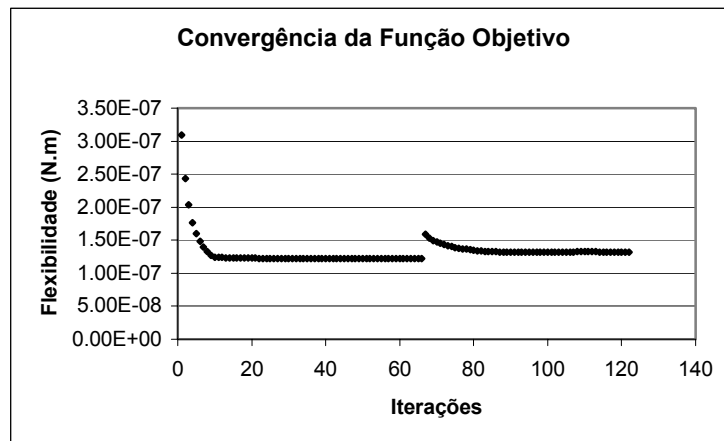


Figura 63: Gráfico de convergência para o problema 3, com apoio na base e malha com 625 elementos.

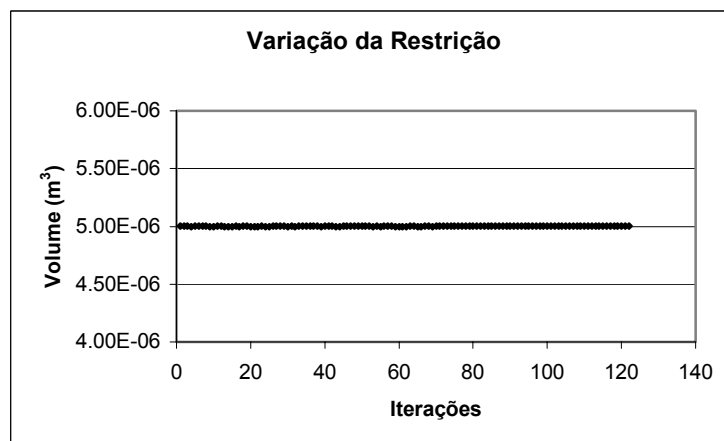


Figura 64: Variação da restrição para o problema 3, com apoio na base e malha com 625 elementos.

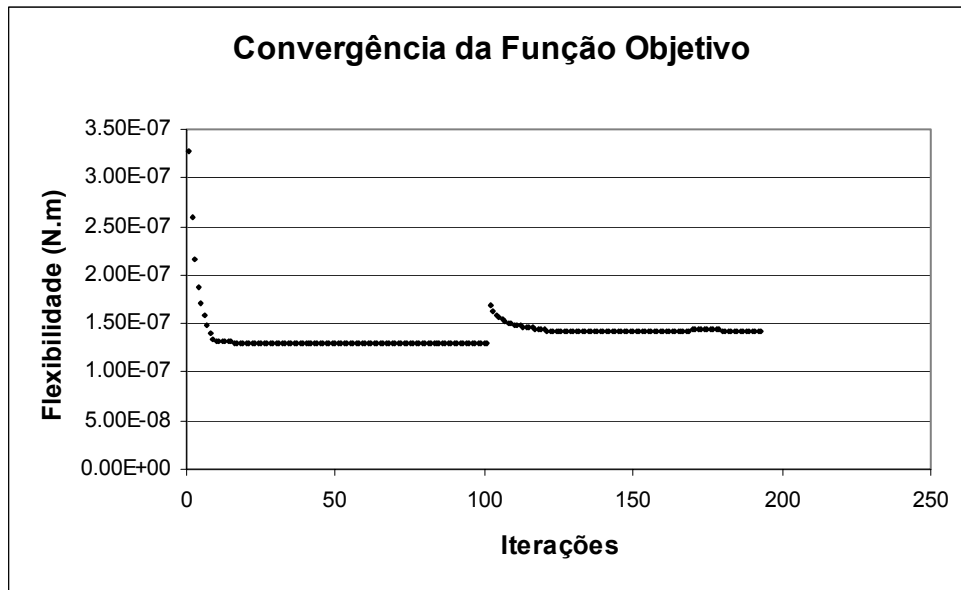


Figura 65: Gráfico de convergência para o problema 3, com apoio na base e malha com 1089 elementos.

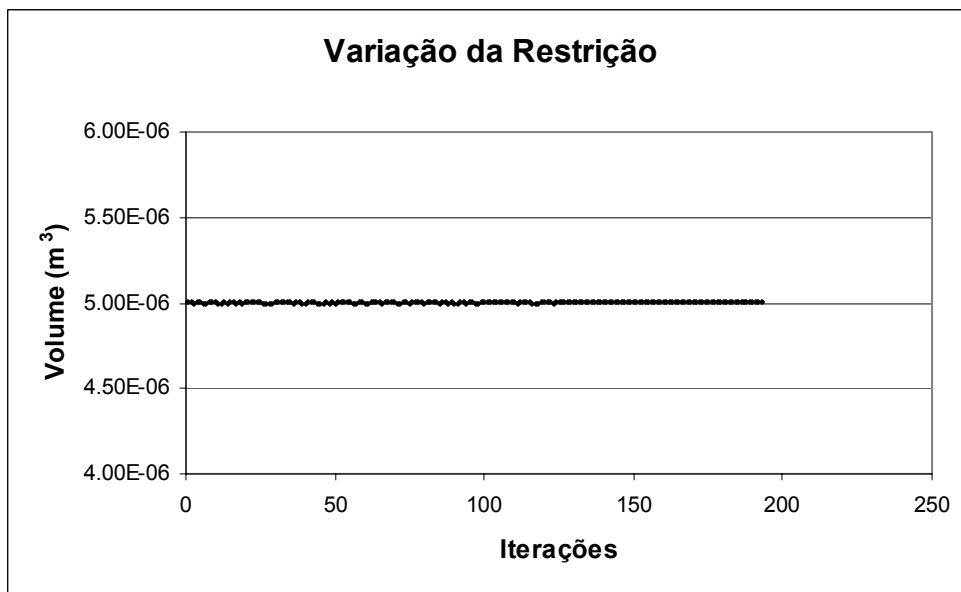


Figura 66: Variação da restrição para o problema 3, com apoio na base e malha com 1089 elementos.

7.2.5. FILTRAGEM

A Figura 67 mostra a topologia obtida na malha de 625 elementos do problema anterior, com a utilização de um filtro de raio 0,0045m (o qual abrange 4 elementos) e ajuste de peso igual a um.

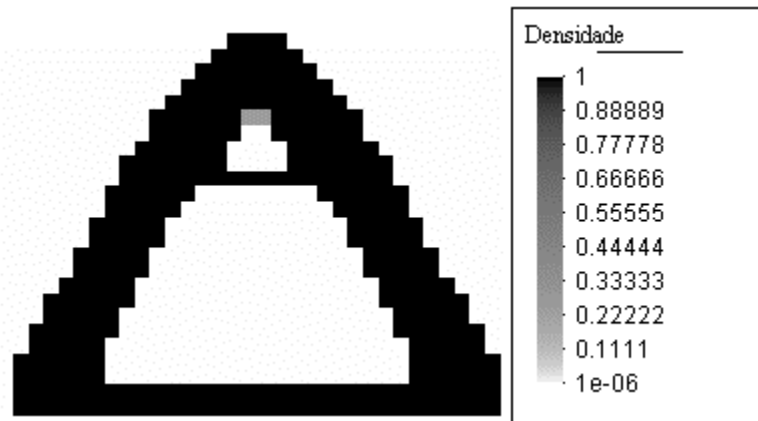


Figura 67: Análise do caso da Figura 20 com filtragem espacial de pesos médios abrangendo 4 elementos.

Nota-se, na figura, a substituição da instabilidade de tabuleiro (Figura 61) por um reforço horizontal na parte superior da estrutura.

No gráfico da Figura 68 (convergência da função objetivo), podem-se visualizar os valores de flexibilidade obtidos nos quatro diferentes níveis de otimização, como mostra a Tabela 10. É possível verificar também que o número de iterações também aumenta em relação ao caso anterior (em função do filtro).

Tabela 10: Resultados obtidos no problema 3, para a malha de 625 elementos e filtragem com raio de 0,0045m, abrangendo 4 elementos.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,223248 \times 10^{-07}$	66
2	SIMP = 2; RAI0 = 0,0045m	$1,318186 \times 10^{-07}$	50
3	SIMP = 3; RAI0 = 0,0045m	$1,313388 \times 10^{-07}$	83
4	SIMP = 3	$1,313388 \times 10^{-07}$	2

Na utilização do método de filtragem, ocorre o aparecimento de densidades intermediárias, as quais podem ser eliminadas com a inclusão de mais um nível de otimização, com a mesma penalização utilizada na iteração corrente e raio igual a zero (sem abrangência do filtro), como pode-se observar nos níveis 3 (com filtro) e 4 (sem filtro) da Tabela 10.

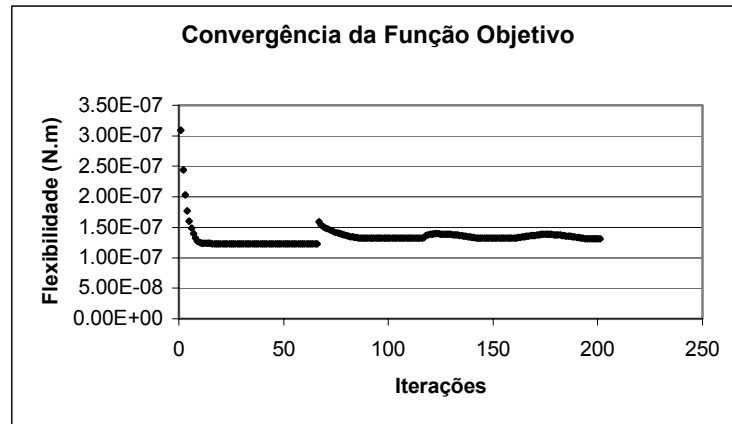


Figura 68: Convergência da função objetivo do problema 3, para um raio de 0,0045m, na malha com 625 elementos.

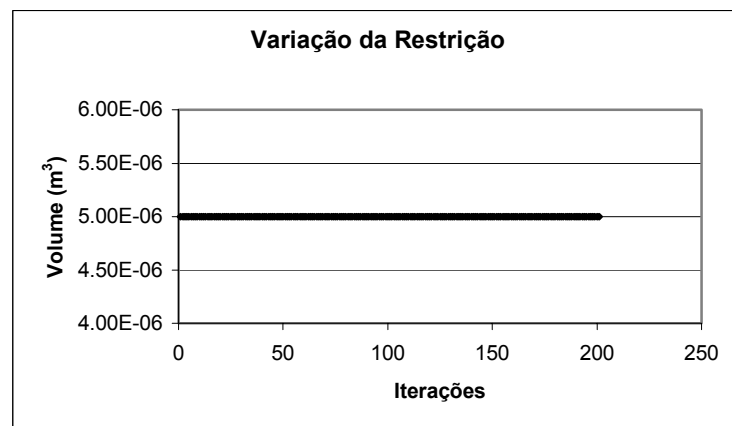


Figura 69: Variação da restrição do problema 3, para um raio de 0,0045m, na malha com 625 elementos.

A filtragem com raio de 0,0065m, o qual abrange 8 elementos, elimina totalmente o reforço horizontal apresentado. O valor da função objetivo também decresce em função da eliminação das densidades intermediárias.

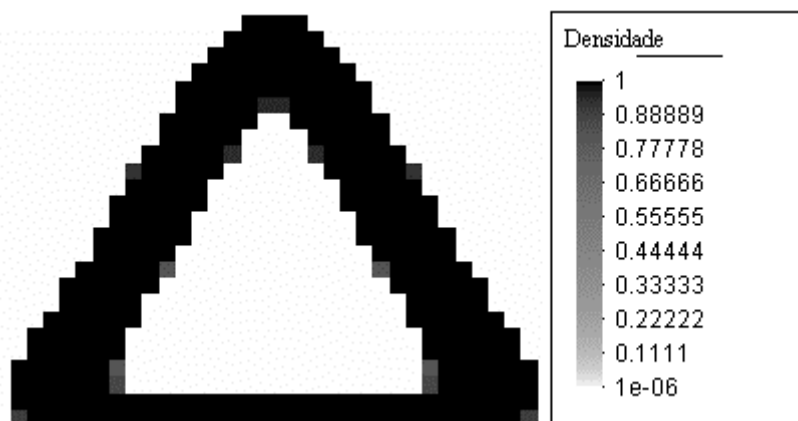


Figura 70: Resultado para filtragem de 8 elementos.

Tabela 11: Resultados obtidos no problema 2, para uma malha de 625 elementos, com filtragem de raio igual a 0,0065m, abrangendo 8 elementos.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,223248 \times 10^{-07}$	66
2	SIMP = 2; RAI0 = 0,0065m	$1,330622 \times 10^{-07}$	78
3	SIMP = 3; RAI0 = 0,0065m	$1,358664 \times 10^{-07}$	63
4	SIMP = 3	$1,310272 \times 10^{-07}$	15

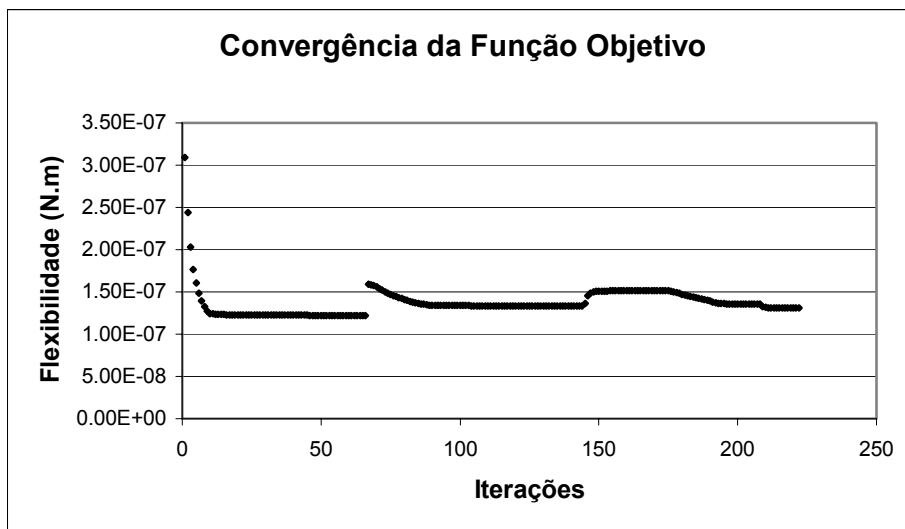


Figura 71: Convergência da função objetivo do problema 3 para raio de filtragem de 0,0065m, na malha com 625 elementos.

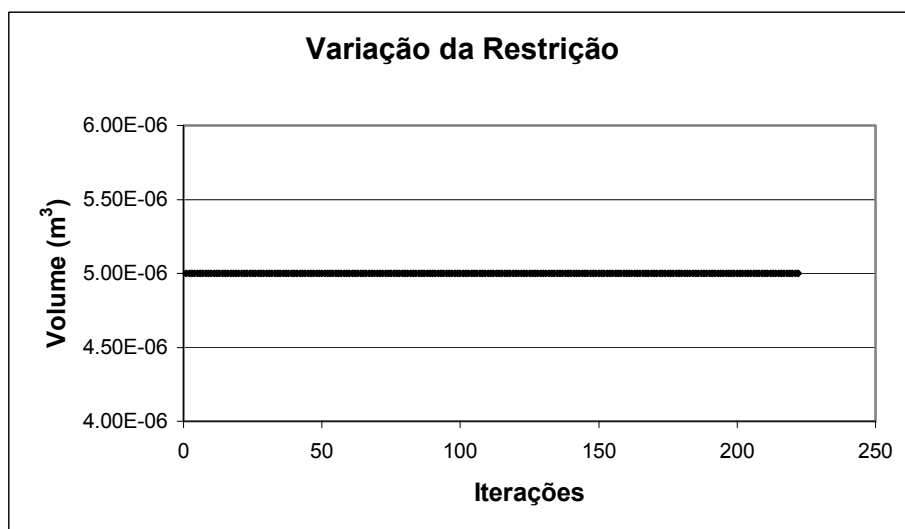


Figura 72: Variação da restrição do problema 3 para raio de filtragem de 0,0065m, na malha com 625 elementos.

A Figura 73 e a Figura 74 mostram as topologias obtidas para a otimização utilizando-se uma malha de 1089 elementos.

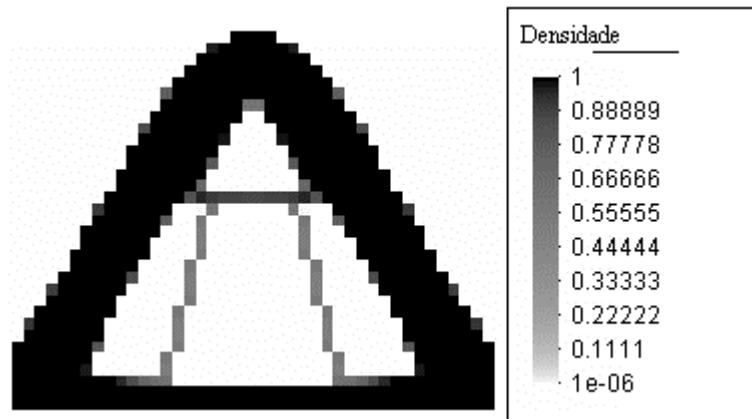


Figura 73: Malha de 1089 elementos e raio de 0,0035m, abrangendo 4 elementos.

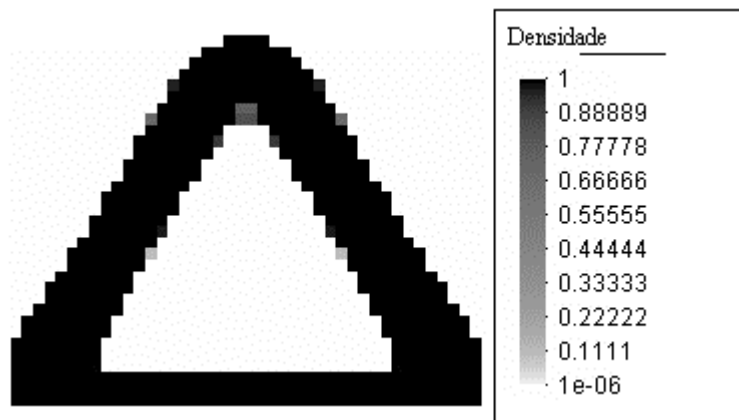


Figura 74: Malha de 1089 elementos e raio de 0,0045m, abrangendo 8 elementos

Tabela 12: Resultados obtidos no problema 3, (malha de 1089 elementos) com filtragem de raio 0,0035m, abrangendo 4 elementos.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,299302 \times 10^{-07}$	101
2	SIMP = 2; RAI0 = 0,0035m	$1,428428 \times 10^{-07}$	124
3	SIMP = 3; RAI0 = 0,0035m	$1,4638 \times 10^{-07}$	77
4	SIMP = 3	$1,424656 \times 10^{-07}$	10

É possível observar novamente, além da dependência de malha, a grande quantidade de iterações causadas pela presença do filtro, visivelmente maior se comparadas aos casos anteriores (sem filtro).

Tabela 13: Resultados obtidos no problema 3, (malha de 1089 elementos) com filtragem com raio de 0,0045m, abrangendo 8 elementos.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,299302 \times 10^{-07}$	101
2	SIMP = 2; RAI0 = 0,0045m	$1,436426 \times 10^{-07}$	132
3	SIMP = 3; RAI0 = 0,0045m	$1,5147 \times 10^{-07}$	46
4	SIMP = 3	$1,380304 \times 10^{-07}$	10

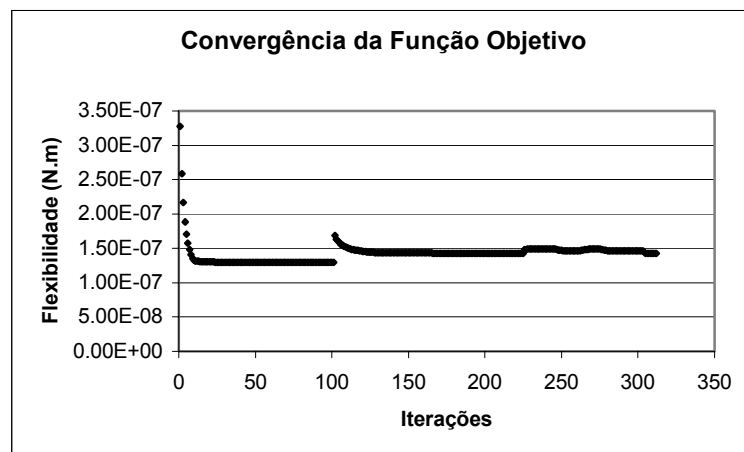


Figura 75: Variação da função objetivo para filtragem com raio de 0,0035m (malha de 1089 elementos).

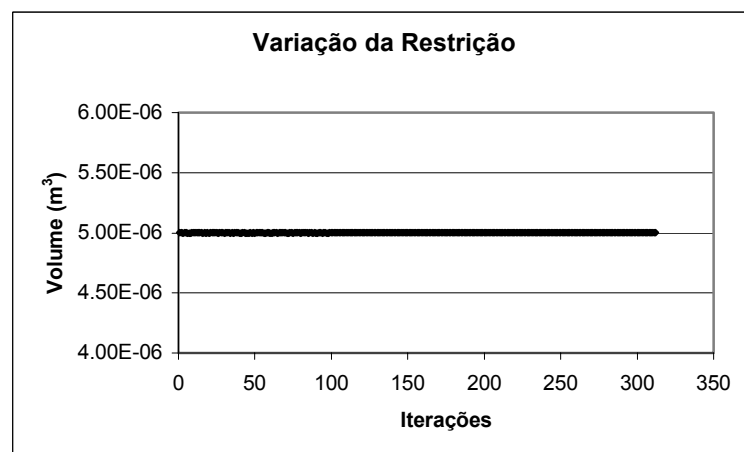


Figura 76: Variação da restrição para filtragem com raio de 0,0035m (malha de 1089 elementos).

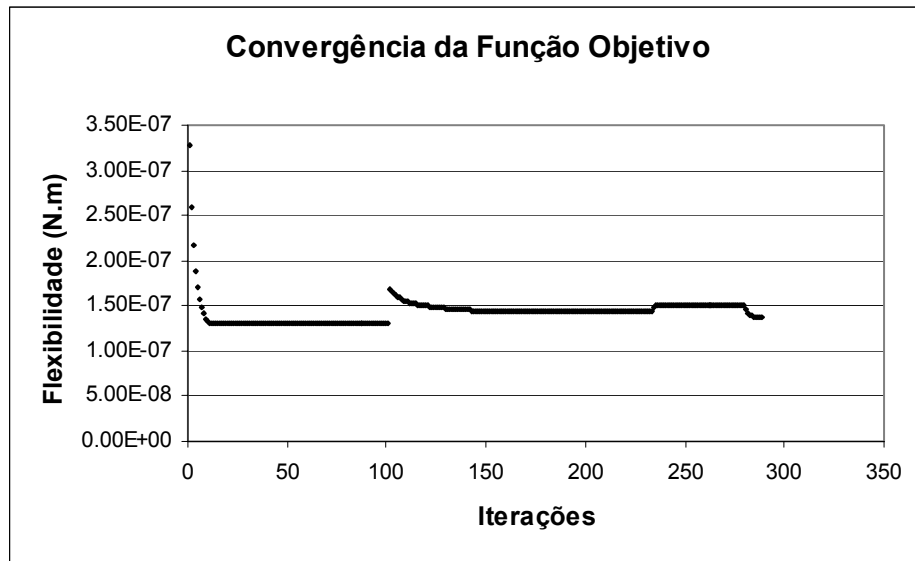


Figura 77: Variação da função objetivo para filtragem com raio de 0,0045m (malha de 1089 elementos).

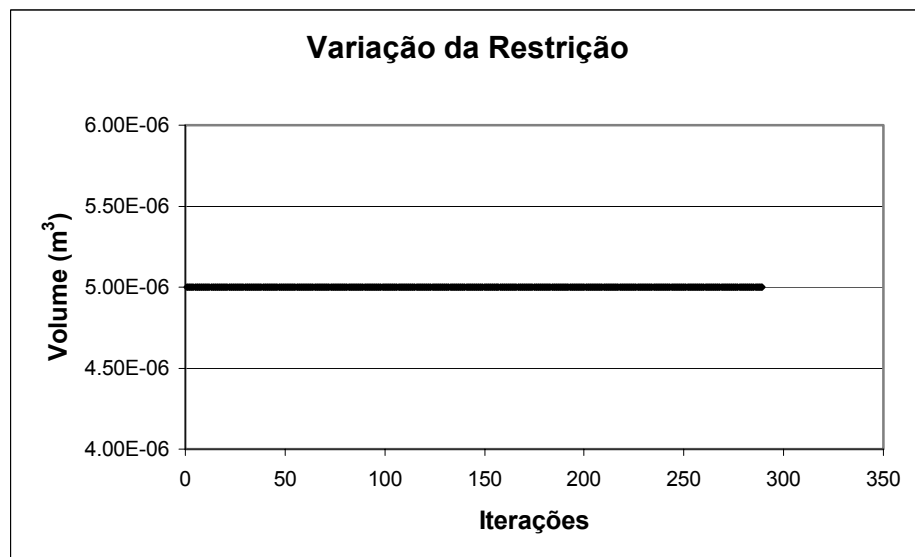


Figura 78: Variação da restrição para filtragem com raio de 0,0045m (malha de 1089 elementos).

O programa desenvolvido possui o recurso de alterar automaticamente os limites móveis (Figura 189, do capítulo APÊNDICE II) e de impor limites mínimo e máximo para os mesmos. Testou-se a hipótese do limite móvel fixado em 0,2 para o problema 4, da Figura 22 (viga com carga na extremidade), com restrição de 50% de volume, método da continuação (também em quatro níveis), raio de filtragem de 0,004m (abrangendo 8 elementos vizinhos) e ajuste de peso 1. Encontrou-se uma configuração com instabilidades de tabuleiro, como pode-se observar na Figura 80. A alteração dos limites móveis para valores inferiores e variáveis (de 0,08 a 0,2), proporcionou a solução do problema sem instabilidade (Figura 81).

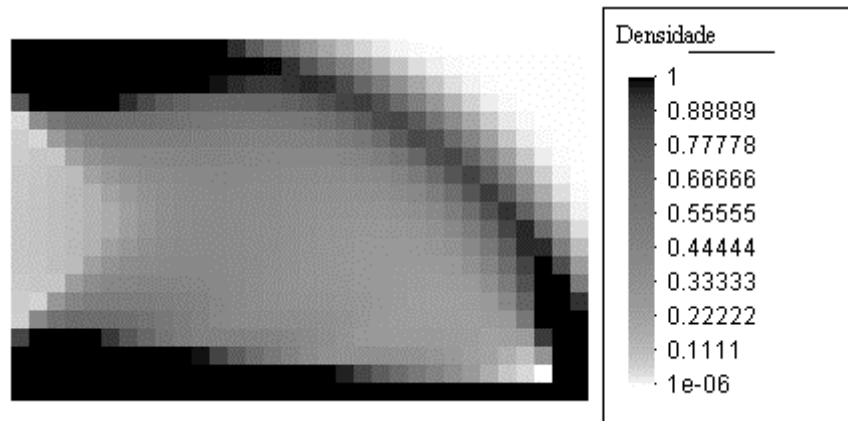


Figura 79: Ótimo global para o problema da viga com carga na ponta, malha de 640 elementos e limite móvel fixado em 0,2.

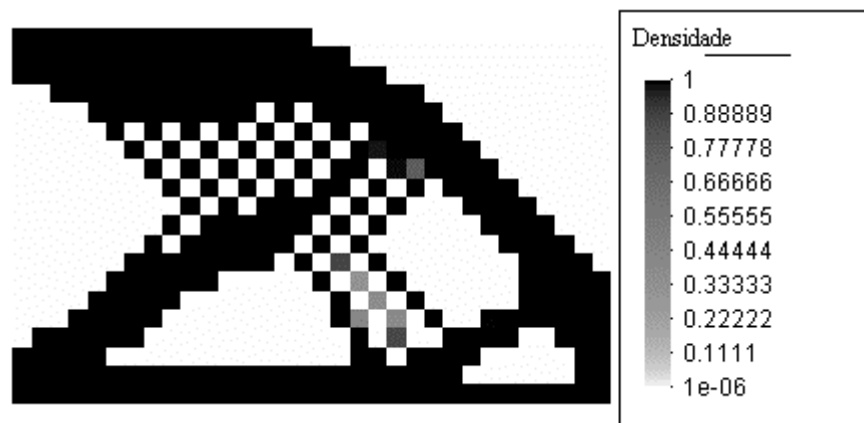


Figura 80: Instabilidade de tabuleiro no final do processo de filtragem para o problema da viga com carga na ponta, malha de 640 elementos, filtro de raio 0,004m (8 elementos) e limite móvel fixado em 0,2.

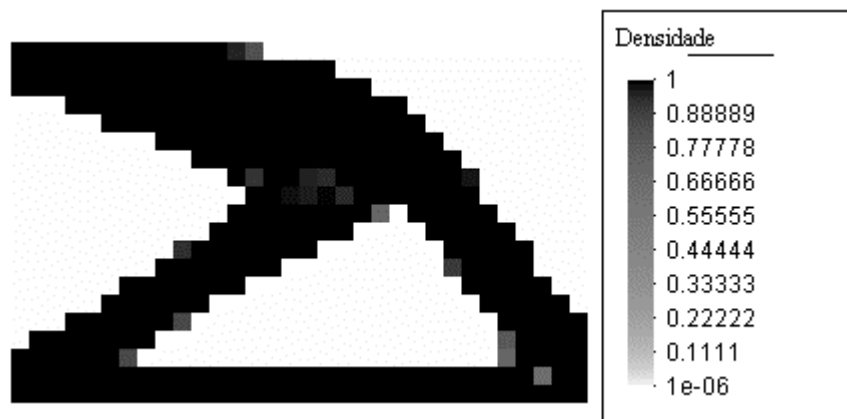


Figura 81: Resultado no final do processo de otimização para o problema da viga com carga na ponta, filtragem com raio de 0,004m (8 elementos) e limite móvel variando entre 0,08 e 0,2.

Embora tenha-se utilizado o filtro, houve a formação da instabilidade de tabuleiro na topologia da Figura 80, o que indica que limites móveis inadequados atenuam a eficácia do filtro.

Tabela 14: Resultados obtidos no problema 4, com raio de filtragem de 0,004m e limites fixados em 0,2.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,82928 \times 10^{-7}$	53
2	SIMP = 2; RAIO = 0,004m	$2,15838 \times 10^{-7}$	38
3	SIMP = 3; RAIO = 0,004m	$2,29464 \times 10^{-7}$	28
4	SIMP = 3	$2,06487 \times 10^{-7}$	15

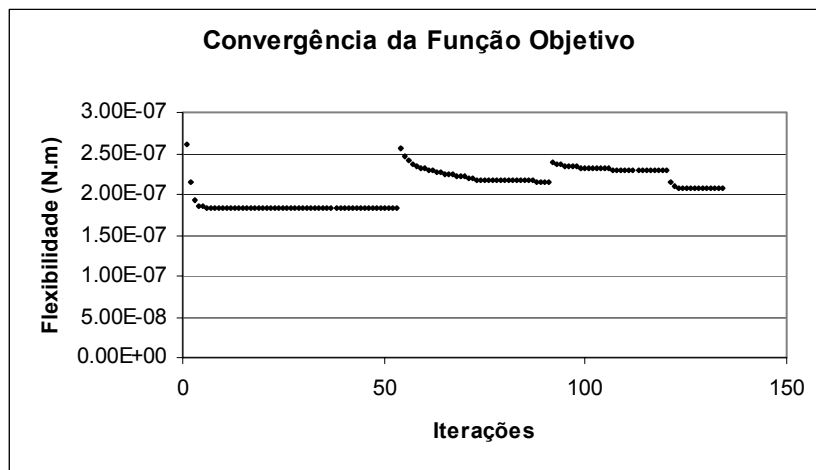


Figura 82: Convergência da função objetivo para malha com 640 elementos, CO e limites móveis fixados em 0,2. É possível visualizar a troca de nível de otimização nos saltos do gráfico.

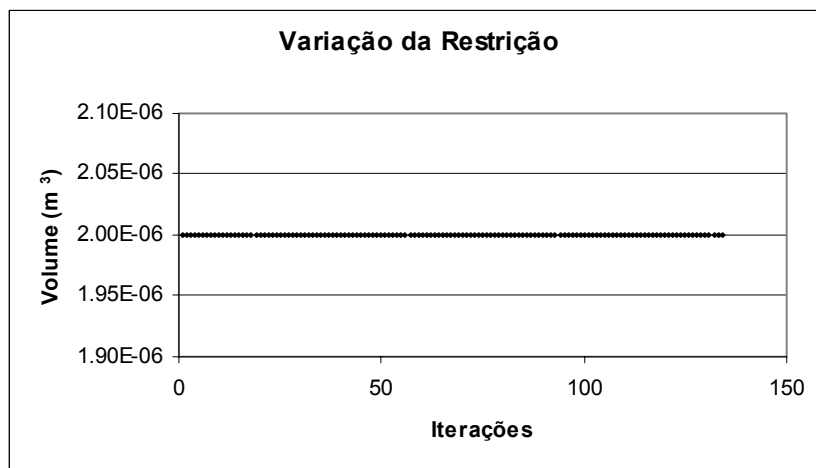


Figura 83: Variação da restrição para malha com 640 elementos, CO e limites móveis fixados em 0,2.

Tabela 15: Resultados obtidos no problema 4, com raio de filtragem de 0,004m e limites móveis variando.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,82928 \times 10^{-7}$	53
2	SIMP = 2; RAIO = 0,004m	$2,24673 \times 10^{-7}$	257
3	SIMP = 3; RAIO = 0,004m	$2,3563 \times 10^{-7}$	300
4	SIMP = 3	$2,0802 \times 10^{-7}$	15

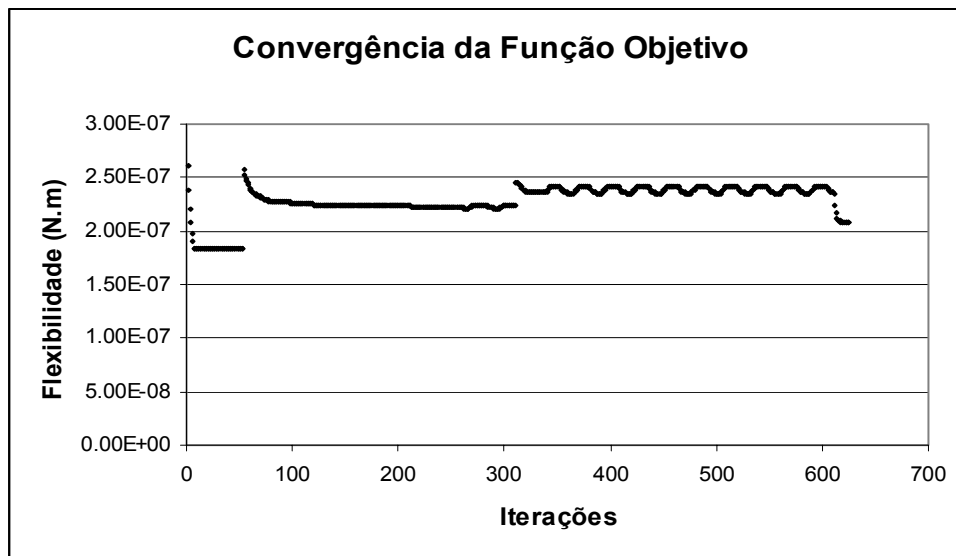


Figura 84: Convergência da função objetivo para malha com 640 elementos, CO e limites móveis variando dinamicamente.

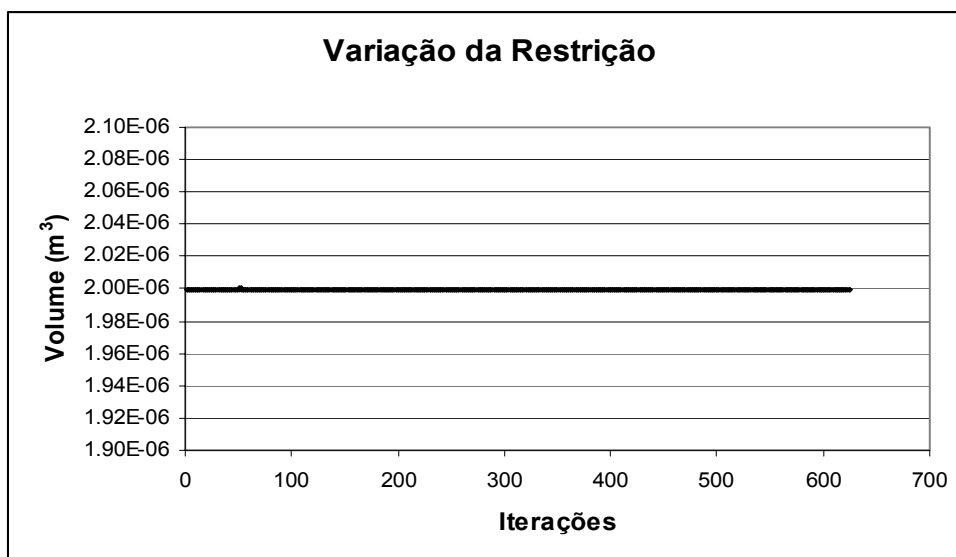


Figura 85: Variação da restrição para malha com 640 elementos, CO e limites móveis variando.

A Figura 86 mostra o resultado obtido para uma malha com 1749 elementos e 1836 nós. É possível observar também a presença da instabilidade de tabuleiro. Para este caso, foram utilizados limites móveis variando dinamicamente, tolerância do CO em 10^{-12} e 3 níveis de otimização, sem filtragem, conforme Tabela 16. Observa-se que o limite de 300 iterações estabelecido é atingido no último nível, devido à instabilidade do processo.

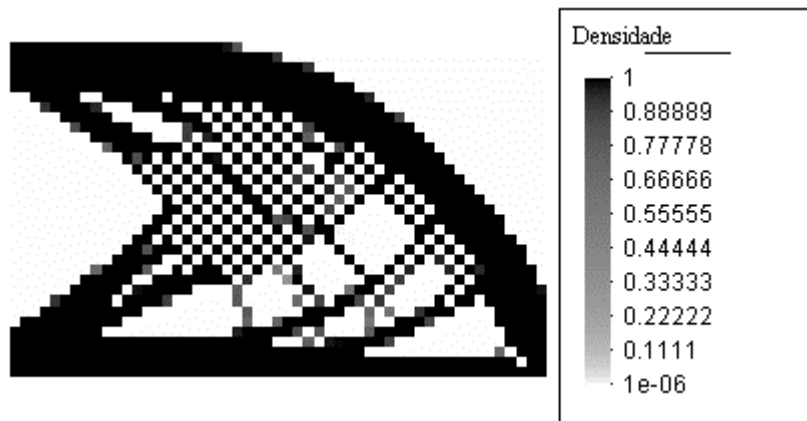


Figura 86: Resultado para viga com carga na ponta e malha com 1749 elementos.

Tabela 16: Resultados obtidos no problema 4, com uma malha de 1749 elementos, sem filtro.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,88045 \times 10^{-7}$	62
2	SIMP = 2	$2,03448 \times 10^{-7}$	124
3	SIMP = 3	$2,04144 \times 10^{-7}$	300

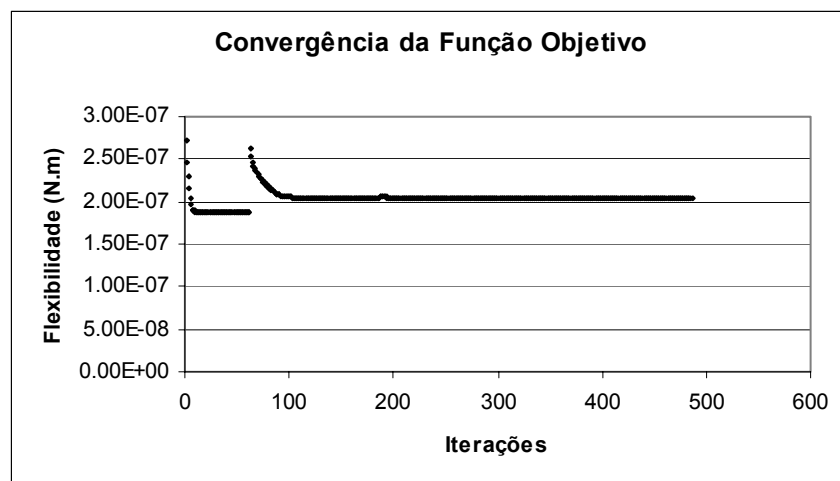


Figura 87: Convergência da função objetivo para malha com 1749 elementos, CO e sem filtro.

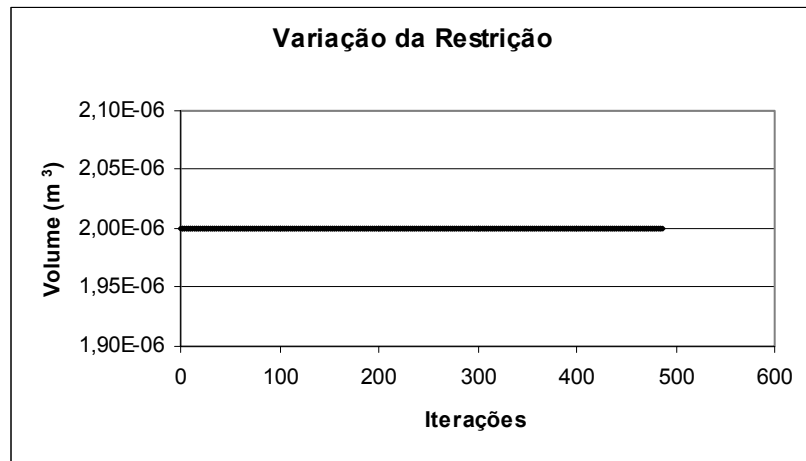


Figura 88: Variação da restrição para malha com 1749 elementos, CO e sem filtro.

A Figura 89 traz o resultado da otimização apresentada anteriormente, utilizando-se 4 níveis e filtro com raio de 0,002m, abrangendo 4 elementos em uma malha mais refinada (1749 elementos). Nota-se diferença em relação à topologia da Figura 81.



Figura 89: Resultado para viga com carga na ponta, malha com 1749 elementos e raio de 0,002m.

Tabela 17: Resultados obtidos no problema 4, com raio de filtragem de 0,002m.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,88045 \times 10^{-7}$	62
2	SIMP = 2, RAI0 = 0,002m	$2,1422 \times 10^{-7}$	241
3	SIMP = 3, RAI0 = 0,002m	$2,23361 \times 10^{-7}$	76
	SIMP = 3	$2,07662 \times 10^{-7}$	10

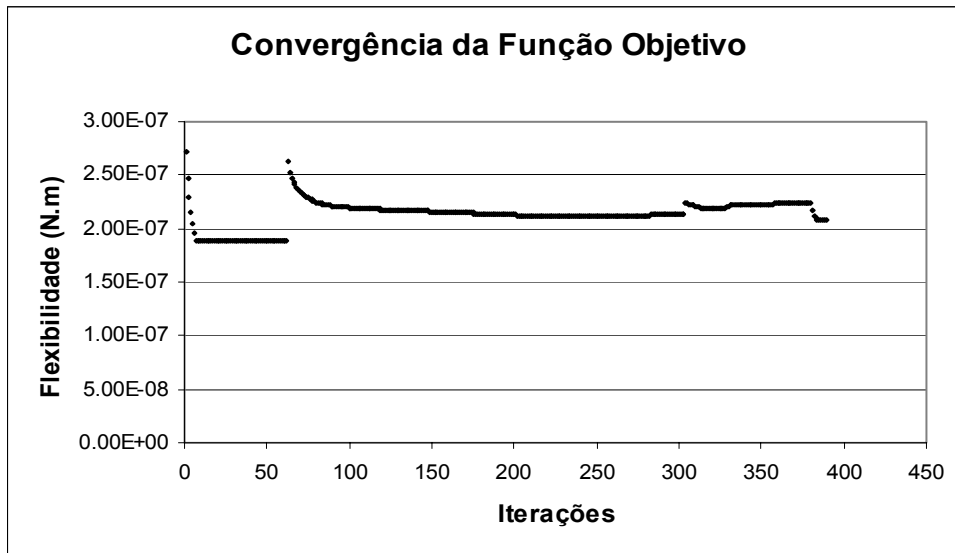


Figura 90: Convergência da função objetivo para malha com 1749 elementos, CO e com filtro.

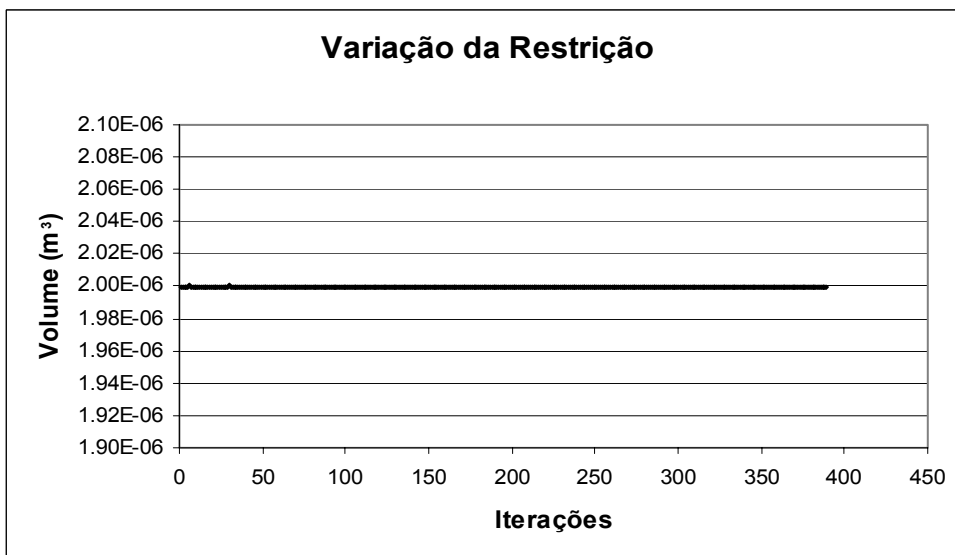


Figura 91: Variação da restrição para malha com 1741 elementos, CO e com filtro.

7.2.6. MÚLTIPLOS CASOS DE CARREGAMENTO

A Figura 92 mostra o resultado obtido para o problema 5, com uma malha de 1749 elementos. Foram utilizados limites móveis variando dinamicamente, tolerância do CO de 10^{-12} e 3 níveis de otimização, sem filtragem, conforme Tabela 18.

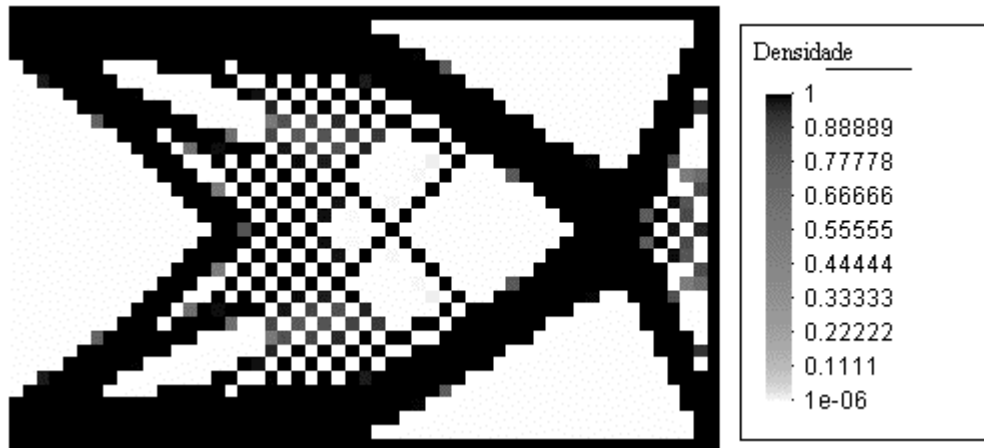


Figura 92: Estrutura formada para malha com 1749 elementos e otimização em três níveis, sem filtragem.

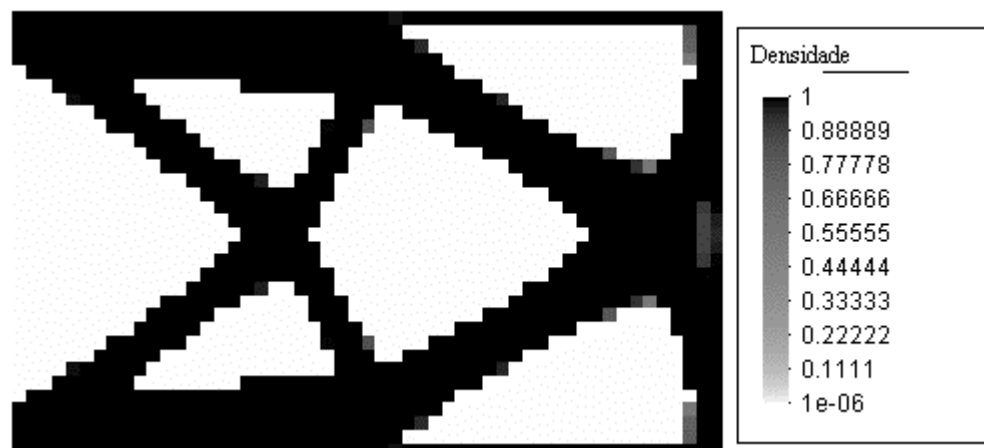


Figura 93: Caso similar ao anterior, com raio de filtragem de 0,002m (abrangendo 4 elementos).

Tabela 18: Resultados obtidos no problema 5, sem filtragem.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade total (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$3,96604 \times 10^{-7}$	32
2	SIMP = 2	$4,51504 \times 10^{-7}$	94
3	SIMP = 3	$4,53243 \times 10^{-7}$	291

Tabela 19: Resultados obtidos no problema 5, com filtragem.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade total (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$3,96604 \times 10^{-7}$	32
2	SIMP = 2, RAI0 = 0,002m	$4,76057 \times 10^{-7}$	135
3	SIMP = 3, RAI0 = 0,002m	$5,18527 \times 10^{-7}$	127
3	SIMP = 3	$4,64387 \times 10^{-7}$	10

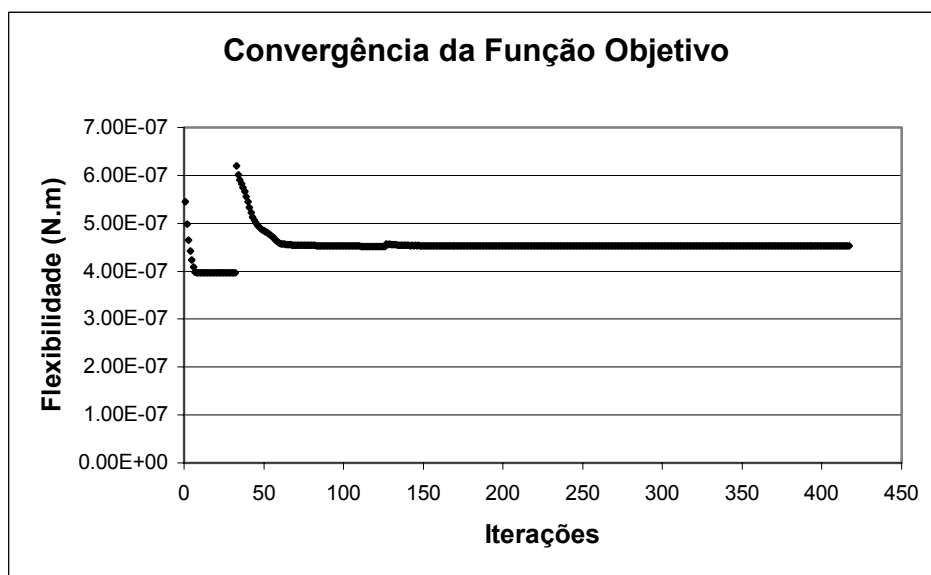


Figura 94: Convergência da função objetivo com dois casos de carregamento, sem filtragem.

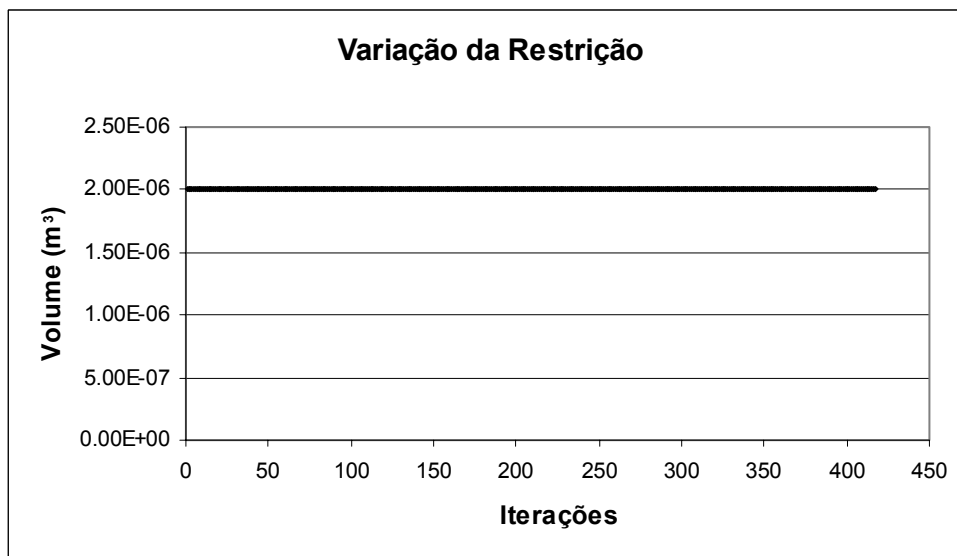


Figura 95: Variação da restrição com dois casos de carregamento, sem filtragem.

É possível observar a formação de uma estrutura capaz de suportar os dois casos de carregamento impostos com equilíbrio.

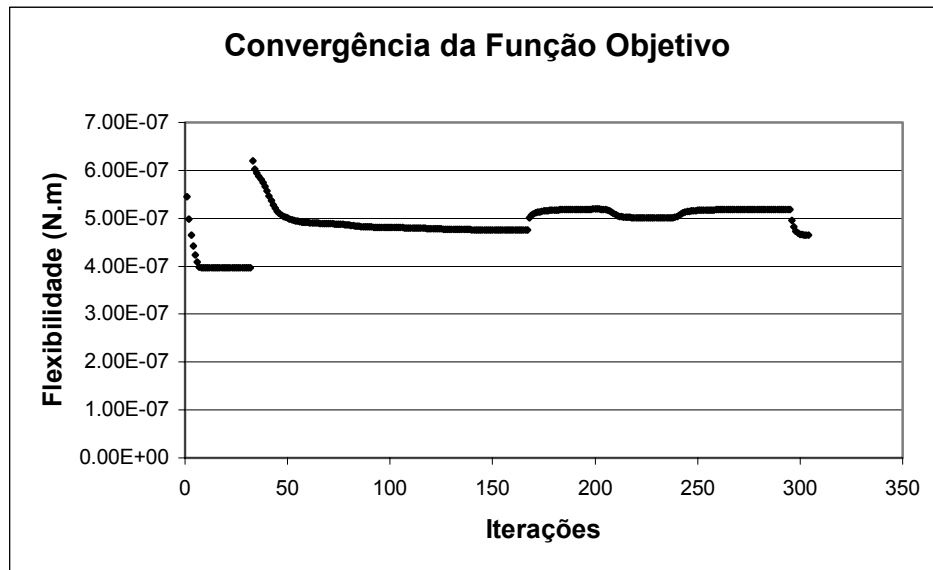


Figura 96: Convergência da função objetivo com dois casos de carregamento, usando filtragem com raio de 0,002m.

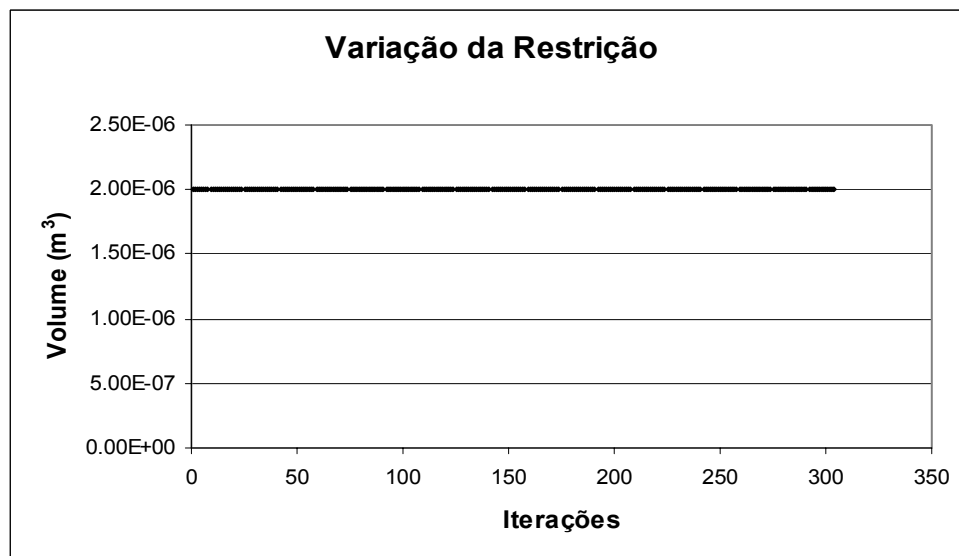


Figura 97: Variação da restrição com dois casos de carregamento, usando filtragem com raio de 0,002m.

O problema 6, da Figura 24 (tipo ponte), apresenta também instabilidade de tabuleiro quando não utiliza-se filtragem. É adotado critério de ótimo para a solução do problema, com a utilização do método da continuação (utilizando expoentes 1, 2 e 3). A restrição estabelecida é de 30% do volume da peça “cheia”.

Foram adotadas densidades entre 10^{-6} e 1. A tolerância do CO e para a convergência do processo de otimização foram 10^{-12} e 10^{-6} respectivamente.

A estrutura resolvida ilustra o reforço lateral de uma ponte. A Figura 98 demonstra o resultado para a minimização da flexibilidade sem penalização do tensor constitutivo. A Figura 99 mostra o resultado após convergência no terceiro nível de otimização, sem filtragem. É possível observar novamente a presença da instabilidade de tabuleiro.

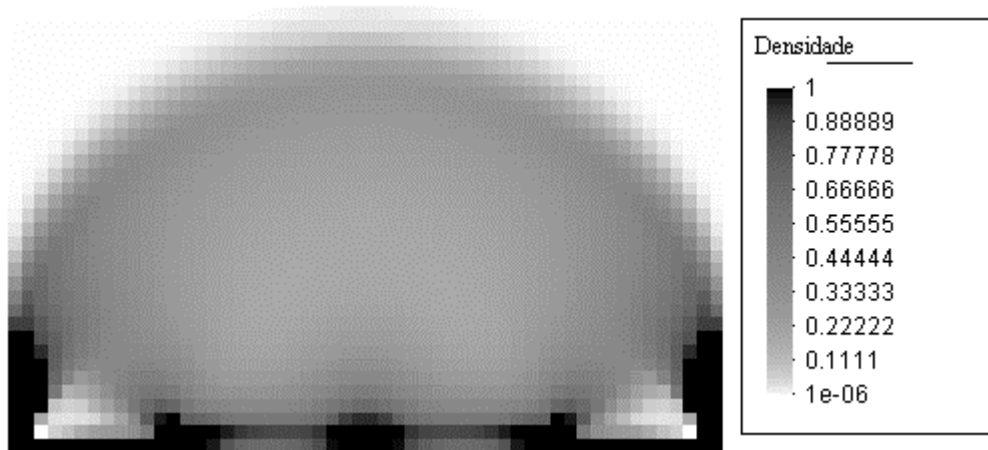


Figura 98: Resultado da análise de otimização da estrutura tipo ponte, sem penalização do tensor constitutivo (simp=1).

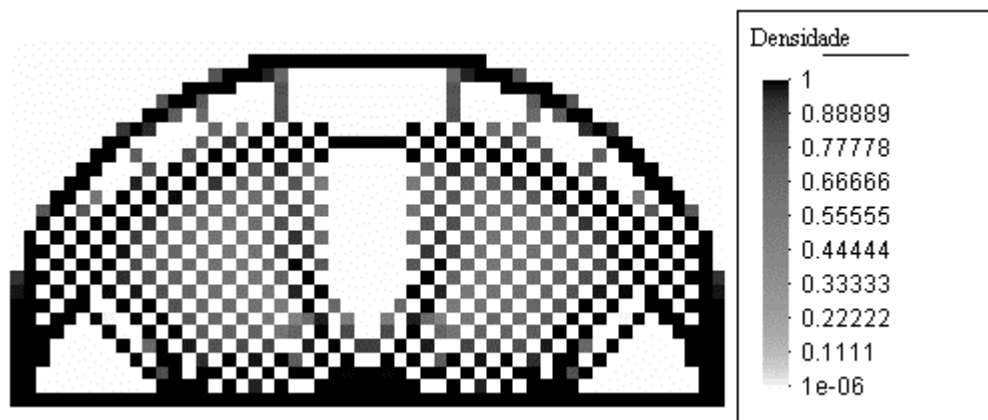


Figura 99: Resultado da análise de otimização da estrutura tipo ponte no final do processo de continuação (expoente 3).

Calculando-se novamente a estrutura com filtragem, obteve-se uma topologia sem instabilidades de tabuleiro, como pode-se observar na Figura 102. Foi utilizado um raio de filtragem de 0,2m, o qual tem abrangência de 4 elementos.

Tabela 20: Resultados obtidos no problema 6, sem filtragem.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade total (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,97558 \times 10^{-03}$	112
2	SIMP = 2	$2,36132 \times 10^{-03}$	80
3	SIMP = 3	$2,54086 \times 10^{-03}$	48

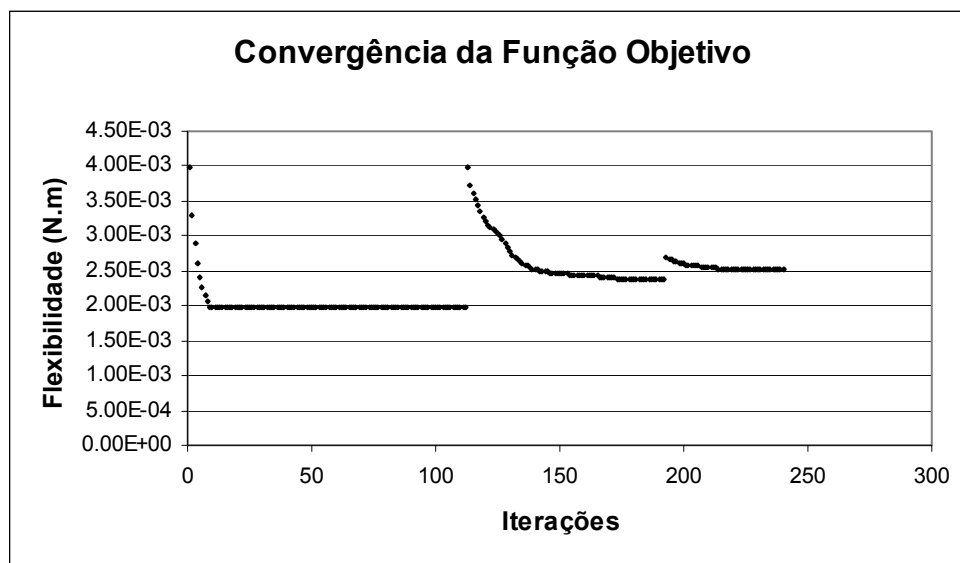


Figura 100: Convergência para a função objetivo da estrutura tipo ponte, sem filtragem espacial dos pesos médios.

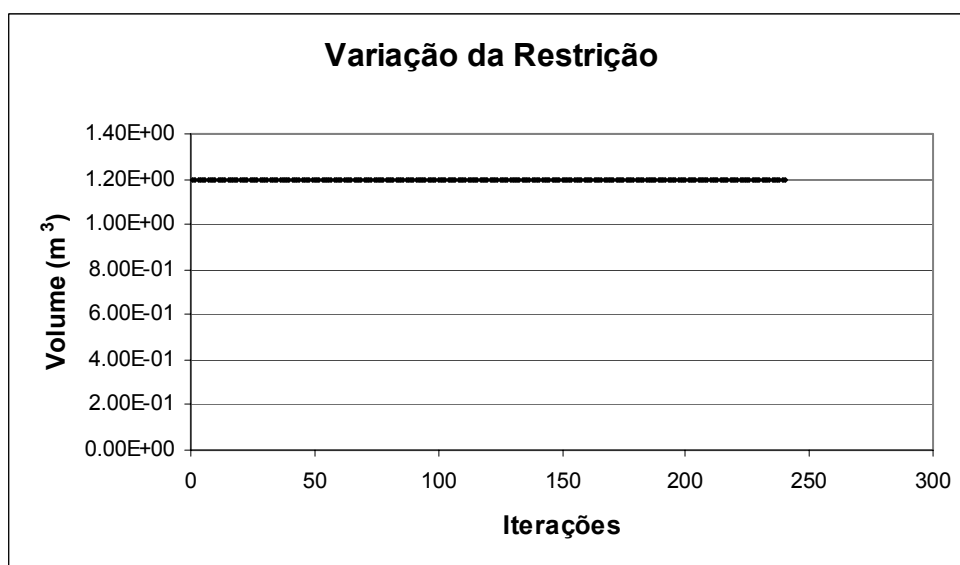


Figura 101: Variação da restrição da estrutura tipo ponte, sem filtragem espacial dos pesos médios.

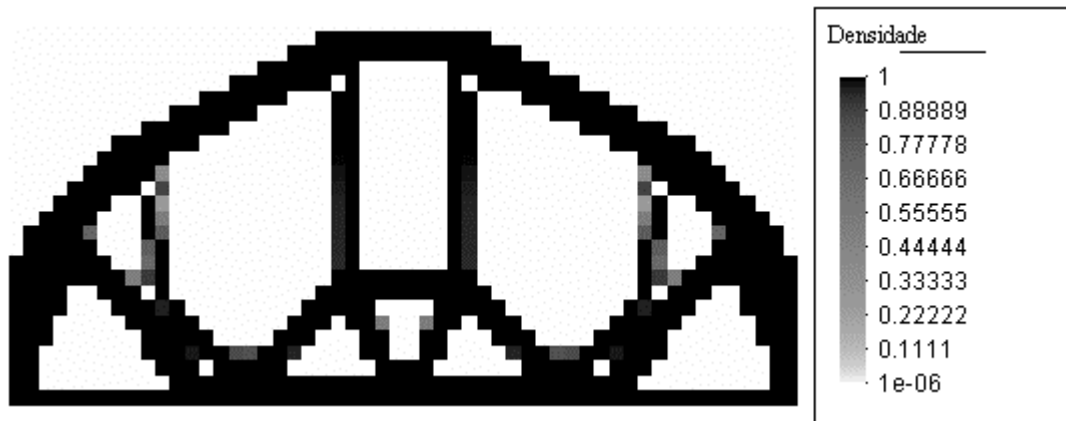


Figura 102: Filtragem com raio de 0,2m, abrangendo 4 elementos.

Tabela 21: Resultados obtidos no problema 6, com filtragem usando raio 0,2m.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade total (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	$1,97558 \times 10^{-03}$	112
2	SIMP = 2, RAIO = 0,2m	$2,9998 \times 10^{-03}$	101
3	SIMP = 3, RAIO = 0,2m	$3,2715 \times 10^{-03}$	300
4	SIMP = 3	$2,60157 \times 10^{-03}$	15

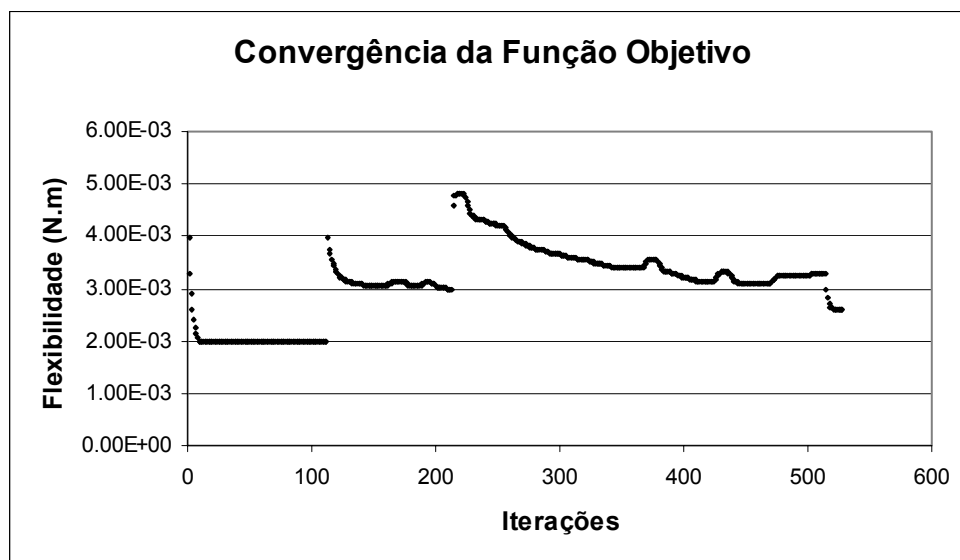


Figura 103: Convergência para a função objetivo da estrutura tipo ponte, com filtragem espacial dos pesos médios utilizando raio 0,2m (abrangência de 4 elementos).

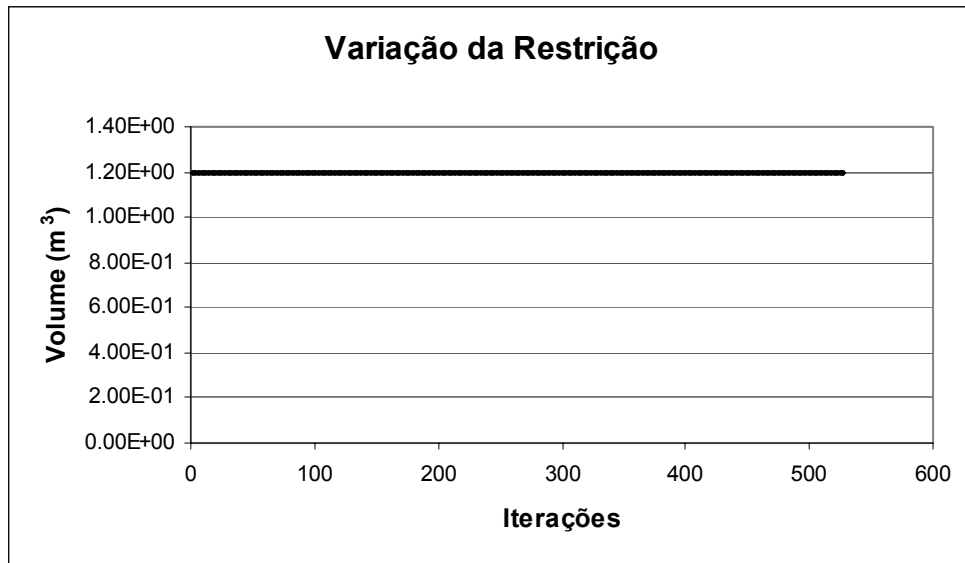


Figura 104: Variação do volume da estrutura tipo ponte, com filtragem espacial dos pesos médios utilizando raio 0,2m (abrangência de 4 elementos).

É possível observar a grande quantidade de iterações nos processos de otimização envolvendo múltiplos casos de carregamento. O cálculo da média das derivadas da flexibilidade (gradientes obtidos para cada caso de carga) acarreta em um custo computacional elevado. O problema gerado pela quantidade de iterações é ainda agravado com a adoção de filtros.

A Figura 103 mostra a flutuação da função objetivo devido à tendência de criação de instabilidades (atenuadas pelo filtro). O limite de 300 iterações é atingido em função da não convergência do método no terceiro nível de otimização. O gráfico da figura mostra que haveria uma necessidade de um número maior de iterações para a convergência ser atingida dentro da tolerância empregada (10^{-6}). Entretanto, o resultado obtido foi capaz de gerar uma topologia possível de ser interpretada, o que significa que uma tolerância muito pequena pode levar a análise a um número demasiado de iterações.

7.3. MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FLEXIBILIDADE

Desenvolveu-se novamente o problema da viga com carga na extremidade (problema 4) objetivando-se uma redução de volume com restrição de flexibilidade. Cabe salientar que todos os problemas de minimização de volume foram resolvidos com LP. Utilizou-se um módulo de elasticidade de $2,1 \times 10^{11}$ N/m² e um coeficiente de Poisson de 0,3, com uma malha de 640 elementos e 693 nós. Para uma carga unitária, minimizou-se o volume com uma flexibilidade limite de 3×10^{-7} N.m. A densidade mínima e a máxima admitidas foram de 10^{-6} e 1 respectivamente. Os limites móveis variaram dinamicamente entre 0,08 e 0,2.

A Figura 105 mostra o resultado obtido para uma penalização do tensor constitutivo usando-se expoente 3. A tolerância adotada para os processos de otimização foi de 10^{-6} .

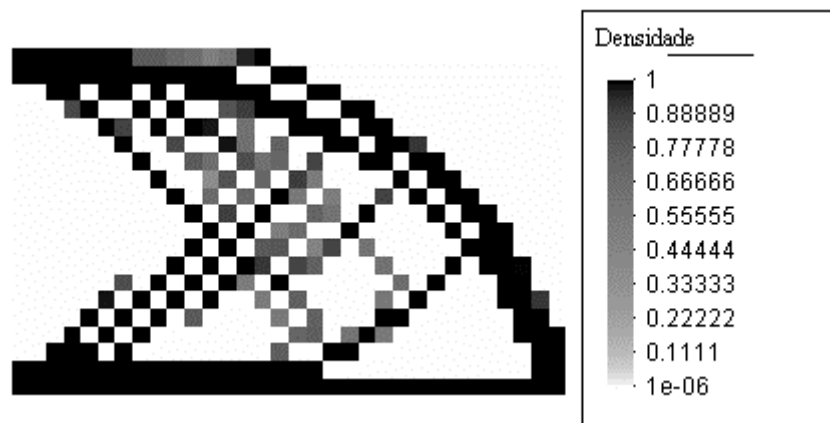


Figura 105: Minimização de volume com restrição de flexibilidade e penalização do tensor constitutivo com expoente 3 (SIMP=3).

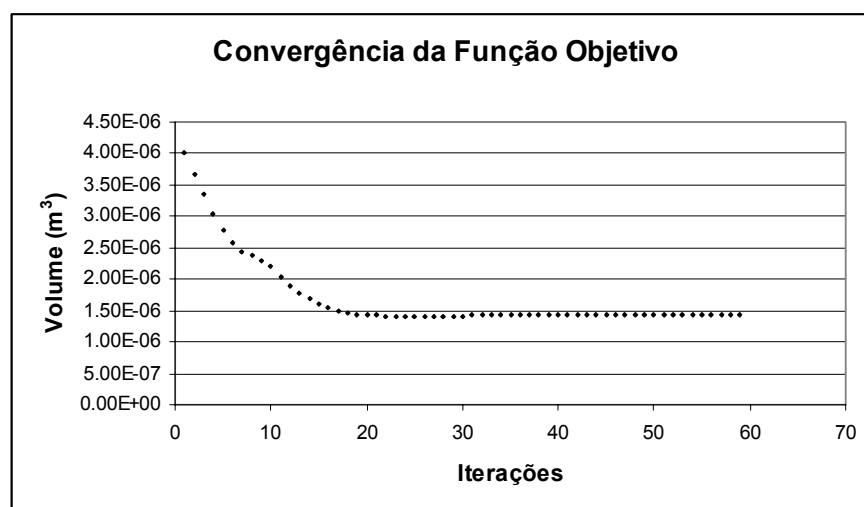


Figura 106: Convergência da função objetivo para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 3.

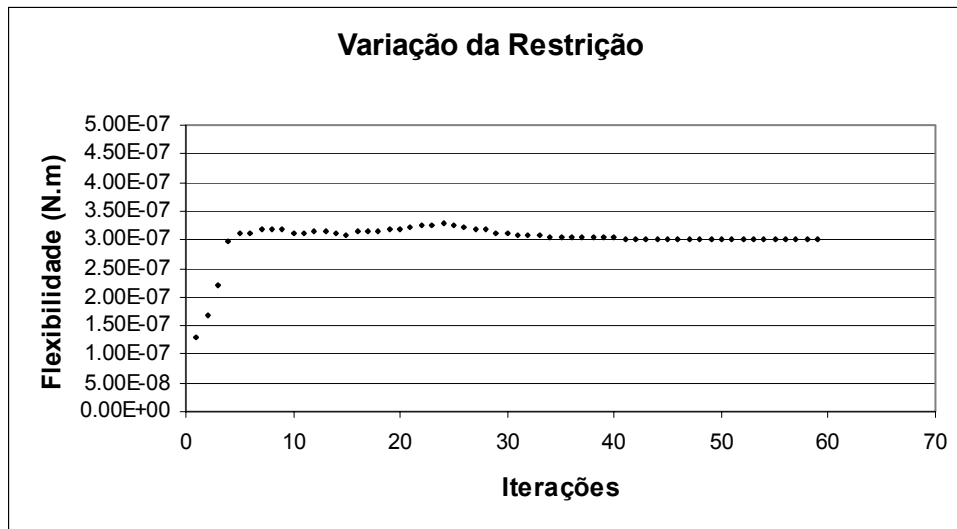


Figura 107: Variação da restrição para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 3.

A topologia apresentada na Figura 105 se formou em 59 iterações, parando-se o processo automaticamente por divergência (interrupção por flutuação da função objetivo em valores alternados e iguais entre si, o que é um recurso do programa desenvolvido).

A Figura 108 mostra o resultado encontrado com a colocação de filtro no problema anterior. Verifica-se a minimização da instabilidade de tabuleiro. Obteve-se $1,359 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ de volume no final do processo de otimização.

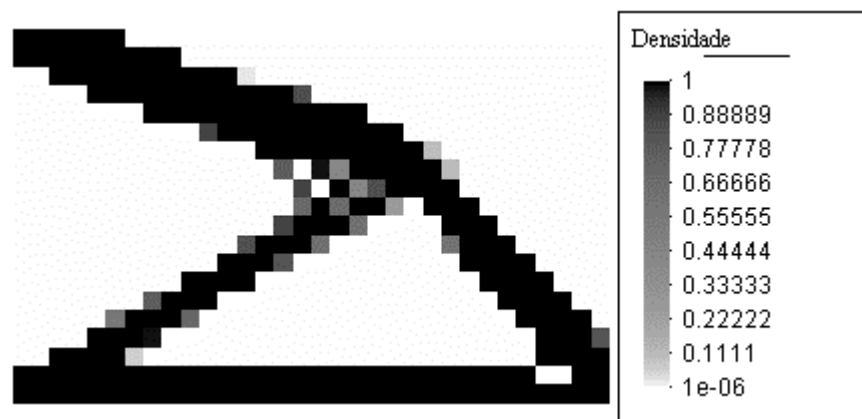


Figura 108: Minimização de volume com restrição de flexibilidade com SIMP=3 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

Foram aplicados dois níveis de otimização para todas as análises com filtragem: um para a solução do problema sem instabilidade de tabuleiro, com um limite de 300 iterações e outro para a eliminação de densidades intermediárias (“limpeza da topologia”, pois como se viu

anteriormente, a filtragem produz grandes quantidades de densidades intermediárias), com um limite de apenas 10 iterações.

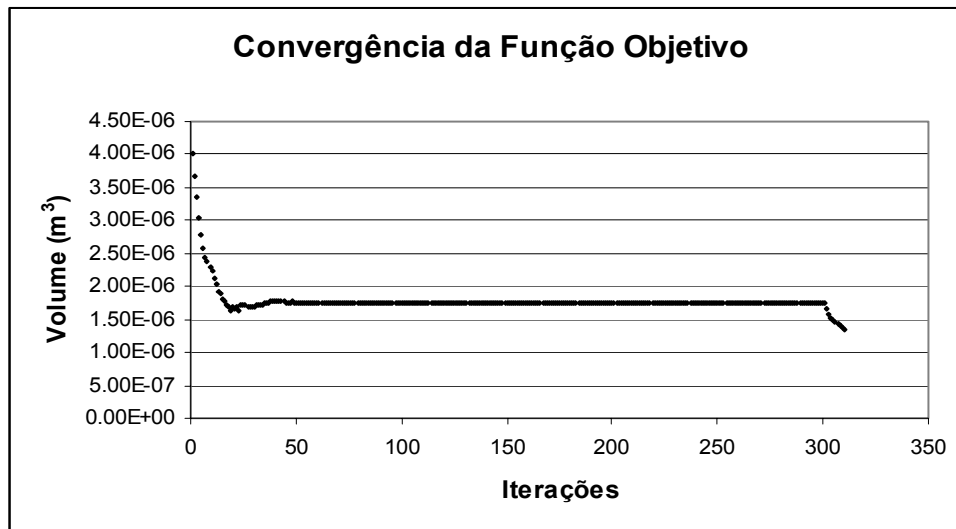


Figura 109: Convergência da função objetivo para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 3 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

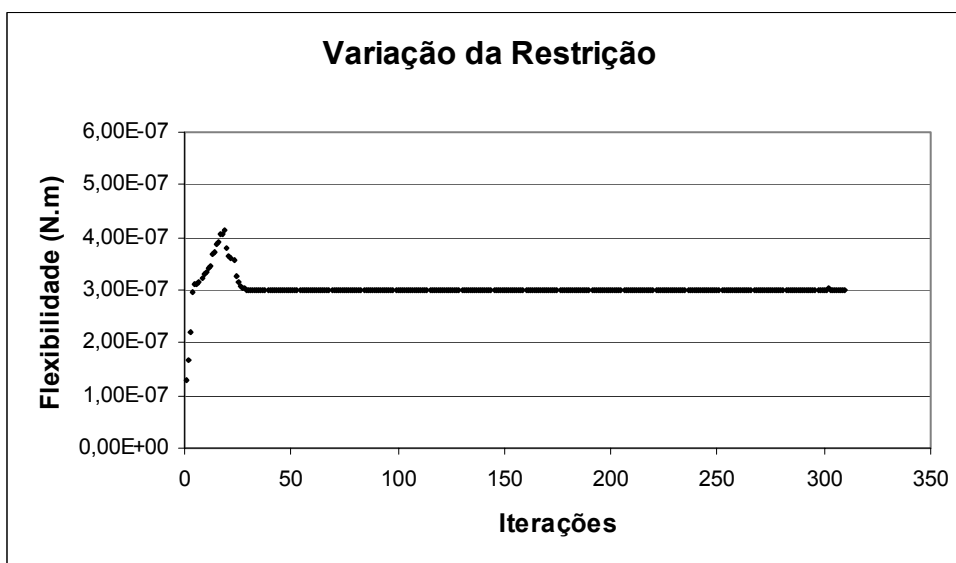


Figura 110: Variação da restrição para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 3 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

No intuito de uma maior aproximação com o ótimo global, penalizou-se o tensor constitutivo com expoente 2 (menor severidade para as densidades intermediárias). Obteve-se o resultado mostrado na Figura 111.

O valor de volume encontrado no final do cálculo foi de $1,330 \times 10^{-6}$ (valor levemente inferior ao anteriormente encontrado, em função da penalização com menor expoente levar a um resultado mais próximo do global). Embora nesse caso o valor obtido para a função objetivo seja o menor dos analisados até então, a sua topologia, cheia de densidades intermediárias, condena a construção de uma estrutura.

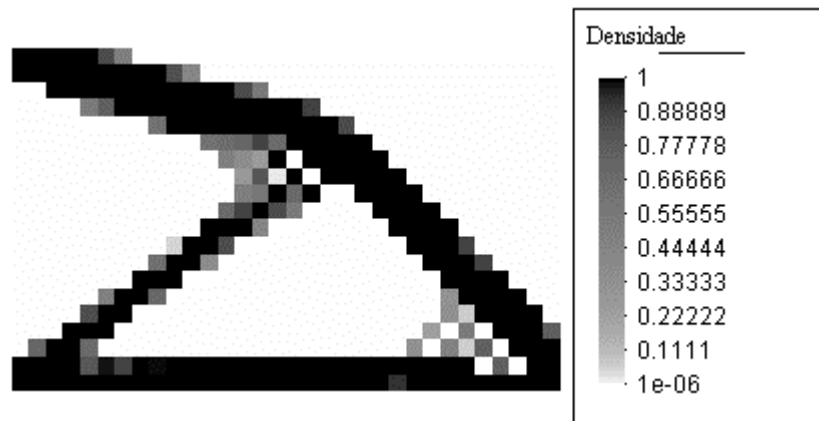


Figura 111: Minimização de volume com restrição de flexibilidade com SIMP=2 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

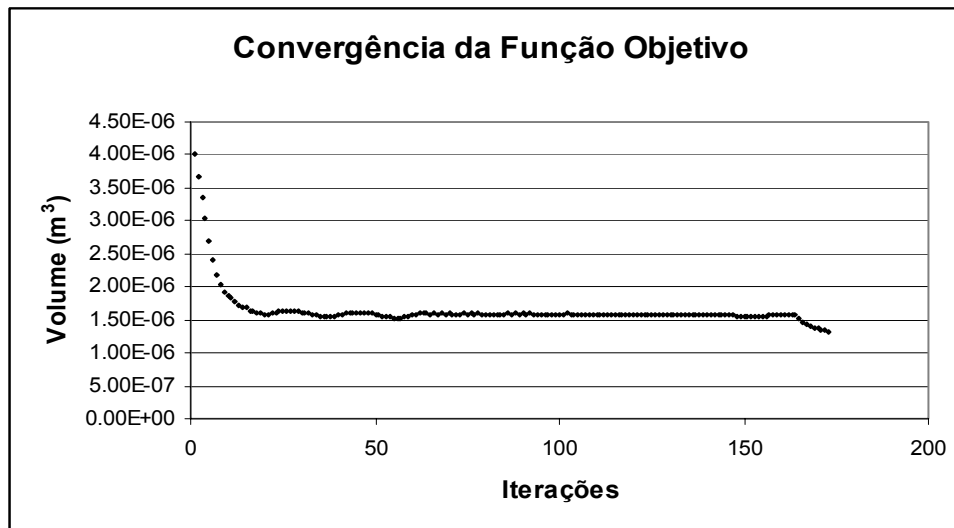


Figura 112: Convergência da função objetivo para a minimização do volume, com restrição de flexibilidade, utilizando-se SIMP = 2 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

A Figura 112 e a Figura 113 representam com clareza a dispersão presente no cálculo realizado. É possível observar uma menor estabilidade dos métodos de Programação Linear quando comparados aos Critérios de Ótimo.

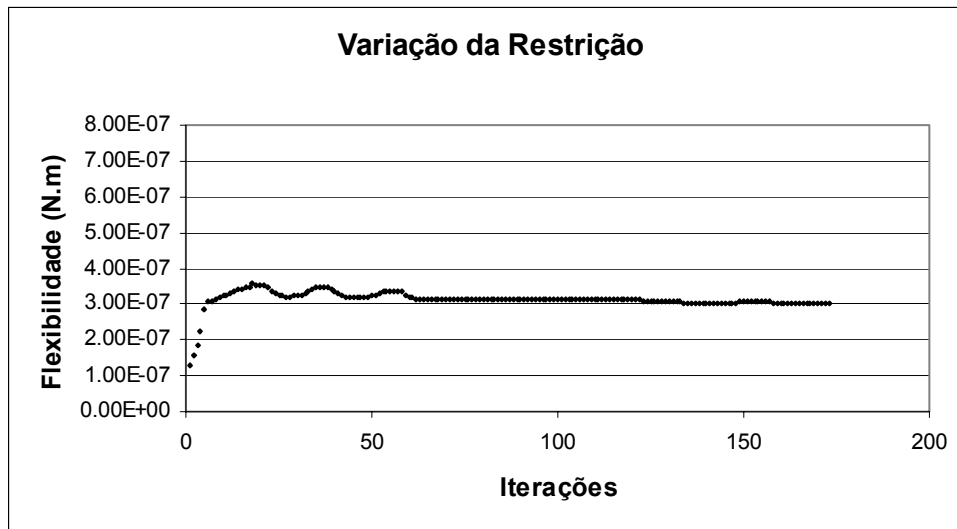


Figura 113: Variação da flexibilidade para a minimização do volume, com restrição de trabalho externo, utilizando-se SIMP = 3 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

Penalizando-se diretamente a função objetivo com expoente $1/7$, obtém-se o resultado apresentado na Figura 114. Encontrou-se um volume de $1,707 \times 10^{-6} \text{ m}^3$. O valor bastante superior aos calculados anteriormente está ligado ao expoente de penalização.

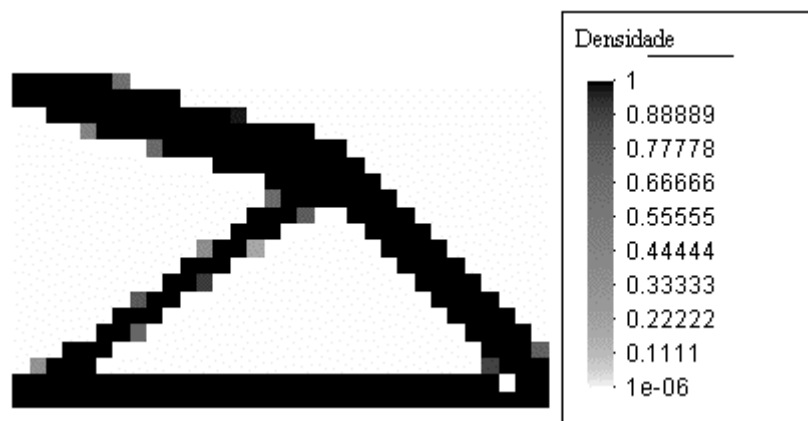


Figura 114: Resultado obtido com penalização da função objetivo com expoente $1/7$ e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

A Figura 117 mostra o resultado obtido para uma penalização da função objetivo com expoente $1/9$ e a Figura 120 mostra a topologia obtida para expoente $1/15$. Os volumes finais para expoentes $1/9$ e $1/15$ são de respectivamente $1,910 \times 10^{-6}$ e $2,398 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, o que demonstra novamente a relação da penalização com o resultado final. Assim sendo, aconselha-se a utilização do método da continuação, mencionado anteriormente.

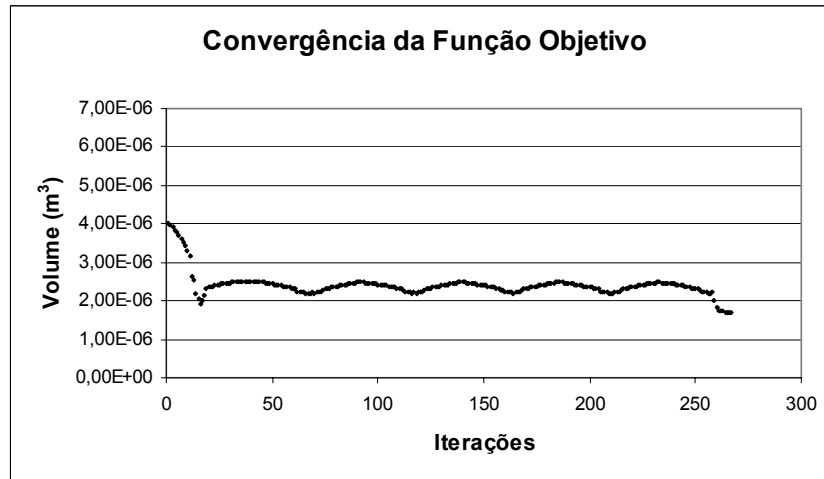


Figura 115: Convergência da função objetivo com penalização usando-se expoente 1/7 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

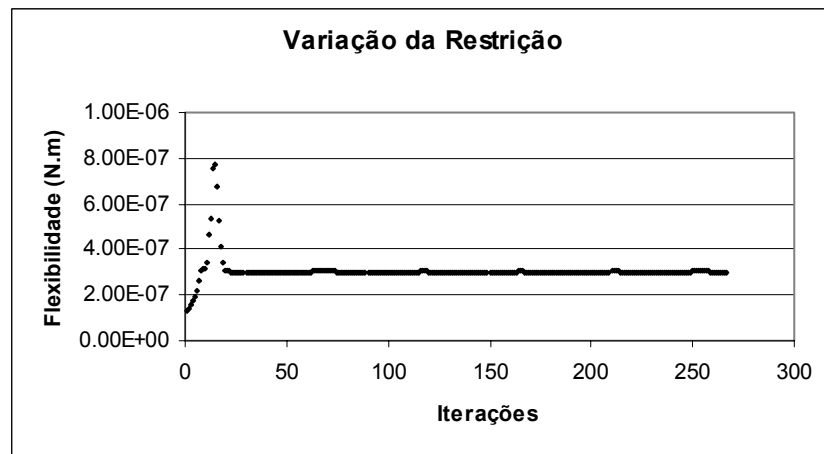


Figura 116: Variação da restrição com penalização da função objetivo usando-se expoente 1/7 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

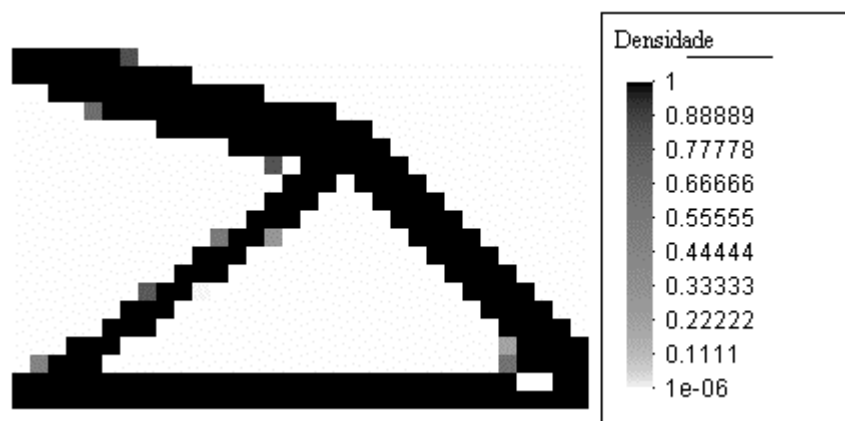


Figura 117: Resultado obtido com penalização da função objetivo com expoente 1/9 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

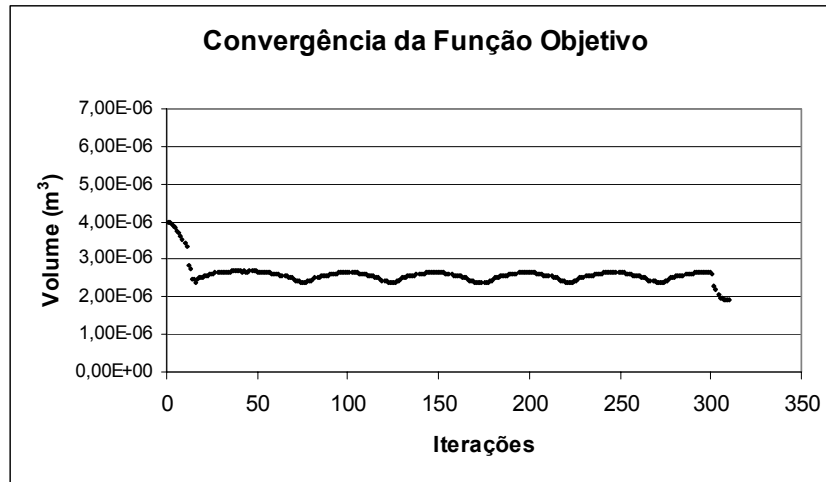


Figura 118: Convergência da função objetivo com penalização usando-se expoente 1/9 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

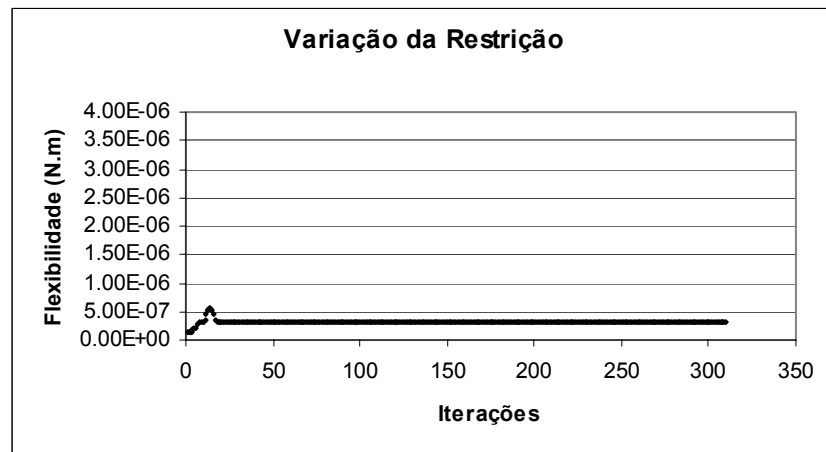


Figura 119: Variação da restrição com penalização da função objetivo usando-se expoente 1/9 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

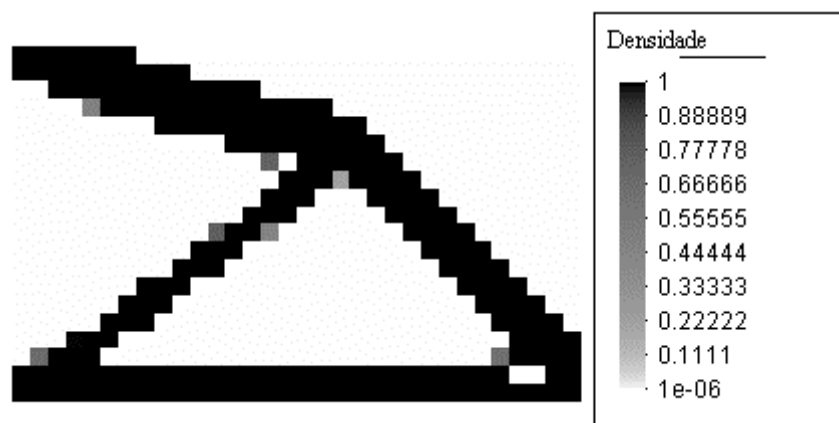


Figura 120: Resultado obtido com penalização da função objetivo com expoente 1/15 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

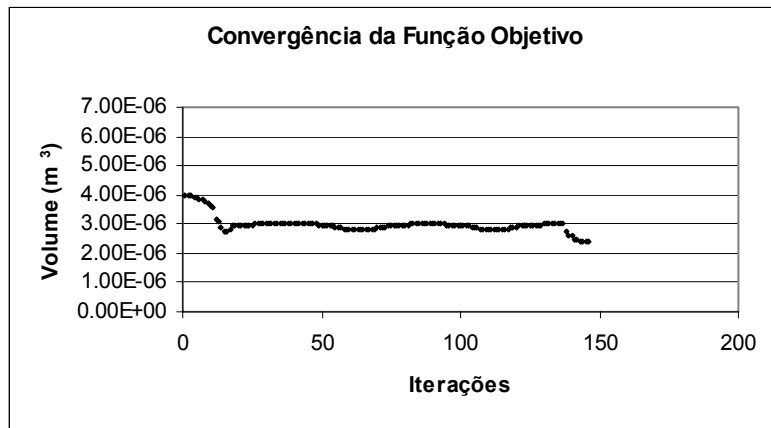


Figura 121: Convergência da função objetivo com penalização usando-se expoente 1/15 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

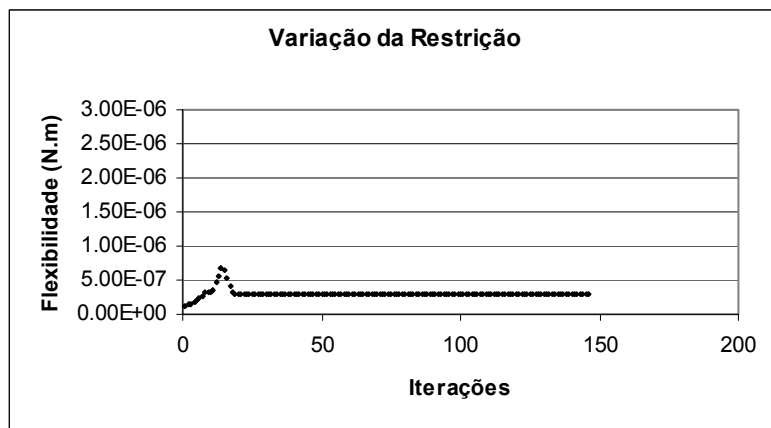


Figura 122: Variação da restrição com penalização da função objetivo usando-se expoente 1/15 e filtragem com raio de 0,004m (abrangendo 8 elementos).

A Tabela 22 mostra os resultados de volume obtidos em valores percentuais ao volume inicial (“peça cheia”). Percebe-se a influência da penalização no valor da função objetivo.

Tabela 22: Percentuais de volume para as otimizações com filtragem.

Tipo de Penalização	Expoente	Percentual de Volume
Tensor Constitutivo	2	33,26 %
Tensor Constitutivo	3	33,97%
Função Objetivo	1/7	42,67%
Função Objetivo	1/9	47,76%
Função Objetivo	1/15	59,95%

A Figura 124 mostra o resultado obtido para uma malha de 1749 elementos e 1836 nós, com também dois níveis de otimização: o primeiro com filtragem de raio 0,002m, abrangendo 4 elementos) e o segundo sem filtragem. Em ambos os casos foram estabelecidos limites de 300 iterações e os limites móveis variando entre 0,08 e 0,1, densidades entre 10^{-6} e 1 e tolerância para otimização de 10^{-6} . A flexibilidade limite admitida foi de 2×10^{-7} N.m e utilizou-se penalização da função objetivo com expoente 1/15.



Figura 123: Topologia obtida para o problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade para a viga do problema 4 com 1749 elementos, após convergência do primeiro nível de otimização (com filtragem).

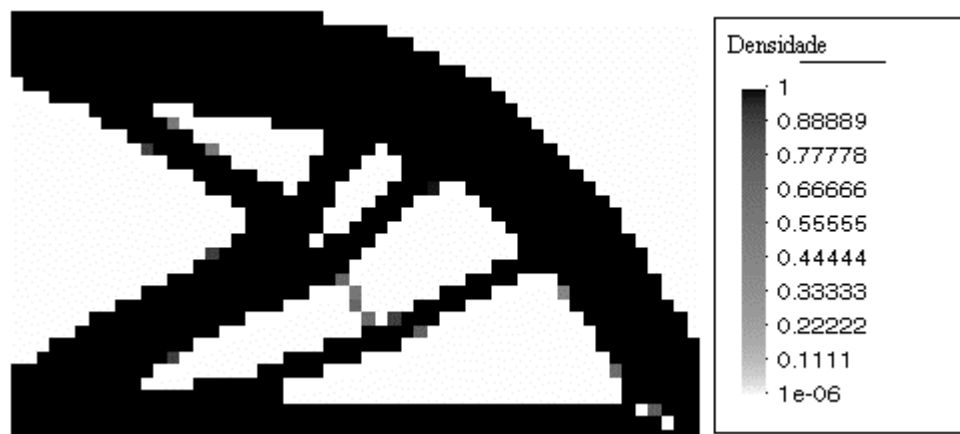


Figura 124: Topologia obtida para o problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade para a viga do problema 4 com 1749 elementos, após convergência do segundo nível de otimização (sem filtragem - limpeza das densidades intermediárias).

No segundo nível de otimização (sem filtragem), a convergência se deu com 12 iterações, sendo que obteve-se $2,85672 \times 10^{-6} \text{m}^3$ de volume para a função objetivo.

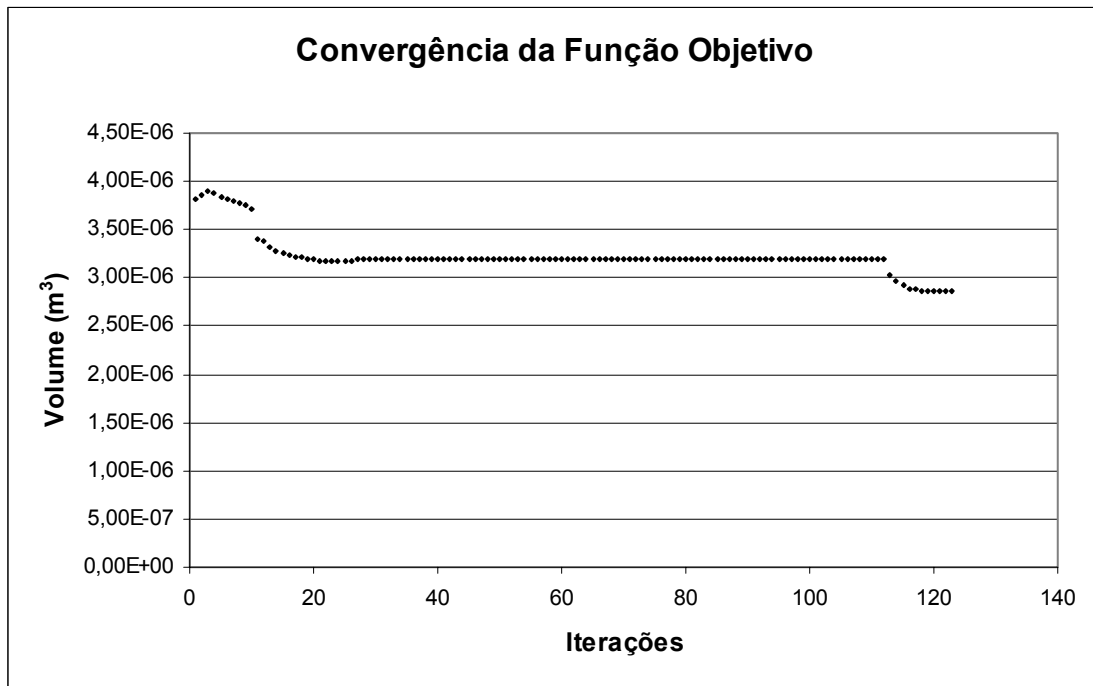


Figura 125: Convergência da função objetivo para o problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade da viga do problema 4, com 1749 elementos.

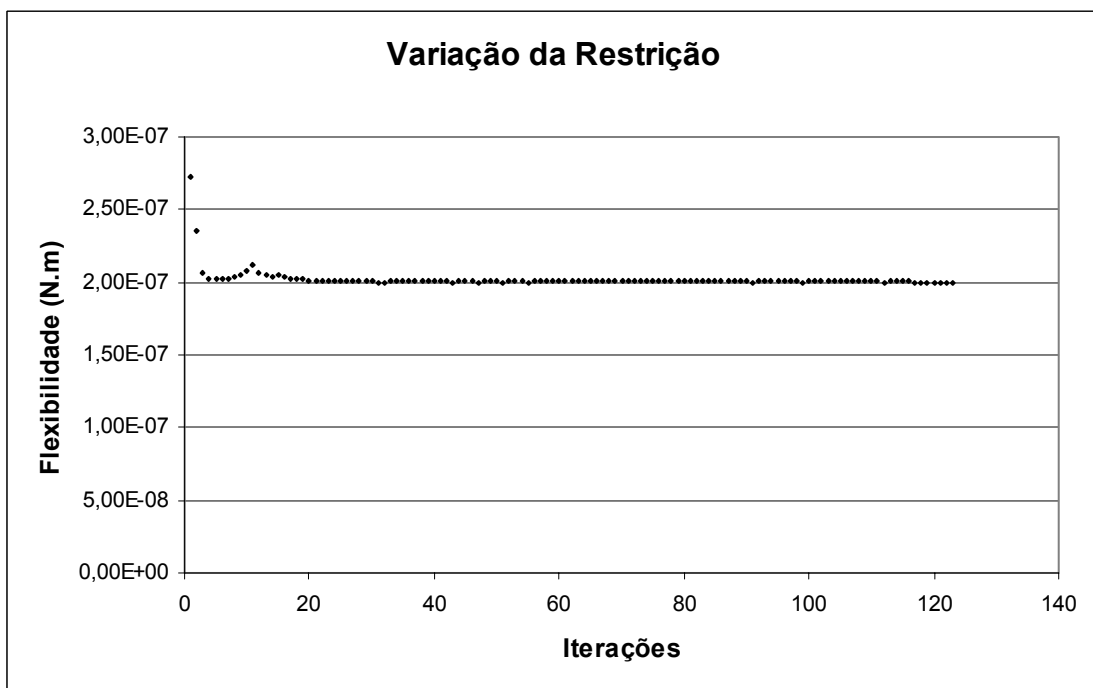


Figura 126: Variação da restrição para o problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade da viga do problema 4, com 1749 elementos.

7.4. MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FREQUÊNCIA NATURAL

Os problemas de minimização de volume com restrição de frequência natural, embora semelhantes aos problemas submetidos à flexibilidade, possuem peculiaridades que serão abordadas neste capítulo.

A Figura 127 mostra a topologia formada para a estrutura tipo viga com massa na ponta (problema 7), submetida à minimização de volume com restrição de 27Hz para o primeiro modo de vibração. Utilizou-se uma malha com 260 elementos e 294 nós, penalização da função objetivo com expoente $1/5$, densidades variando entre 10^{-3} e 1, tolerância para a convergência de 10^{-5} e limites móveis fixados em 0,08. A solução modal para este exemplo foi obtida por JACOBI. Para a determinação da topologia final, foram utilizados dois níveis de otimização, sendo o primeiro com filtragem de raio 0,5 (abrangendo 4 elementos) e ajuste de peso 0,3 e o segundo sem filtro, para uma limpeza das densidade intermediárias.

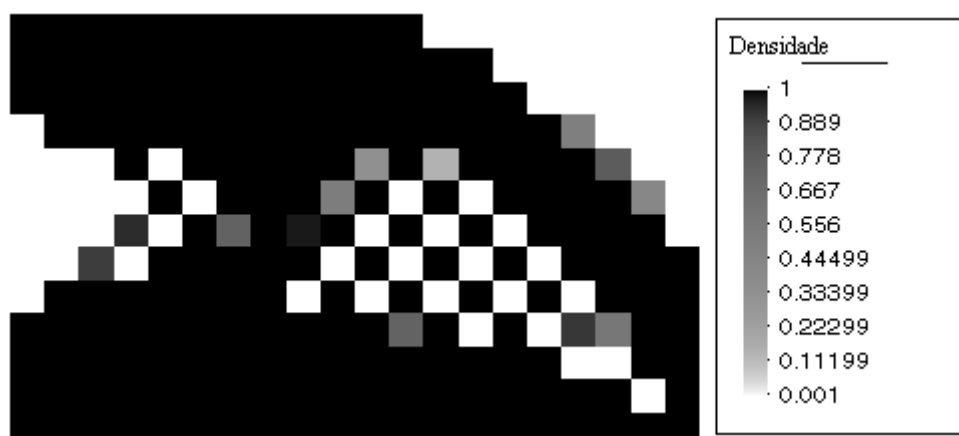


Figura 127: Topologia obtida após convergência do segundo nível de otimização, penalização da função objetivo com expoente $1/5$ e frequência natural limite de 27Hz.

Nota-se na figura a presença da instabilidade de tabuleiro mesmo tendo-se utilizado filtragem. Isso se deve à pobreza do refinamento da malha. É possível observar na Figura 128 que a topologia obtida no primeiro nível de otimização possui uma diferença significativa da solução final. Em outras palavras, a presença do filtro torna-se pouco eficaz para malhas pouco refinadas.

O método de JACOBI é pouco eficiente em termos de velocidade para malhas muito refinadas. Níveis maiores de refinamento requerem métodos de solução mais rápidos, como o de LANCZOS, o qual será abordado adiante.

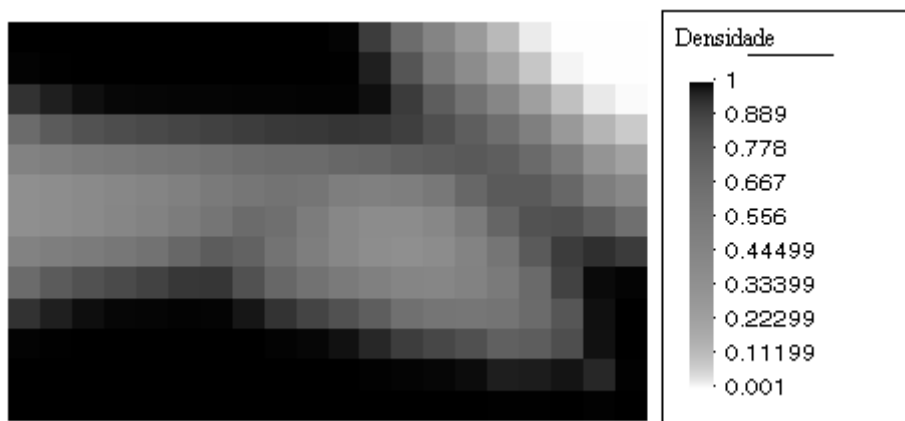


Figura 128: Topologia obtida após convergência do primeiro nível de otimização, com penalização usando-se expoente 1/5, com filtragem de raio 0,5 e ajuste de peso 0,3 e frequência natural limite de 27Hz.

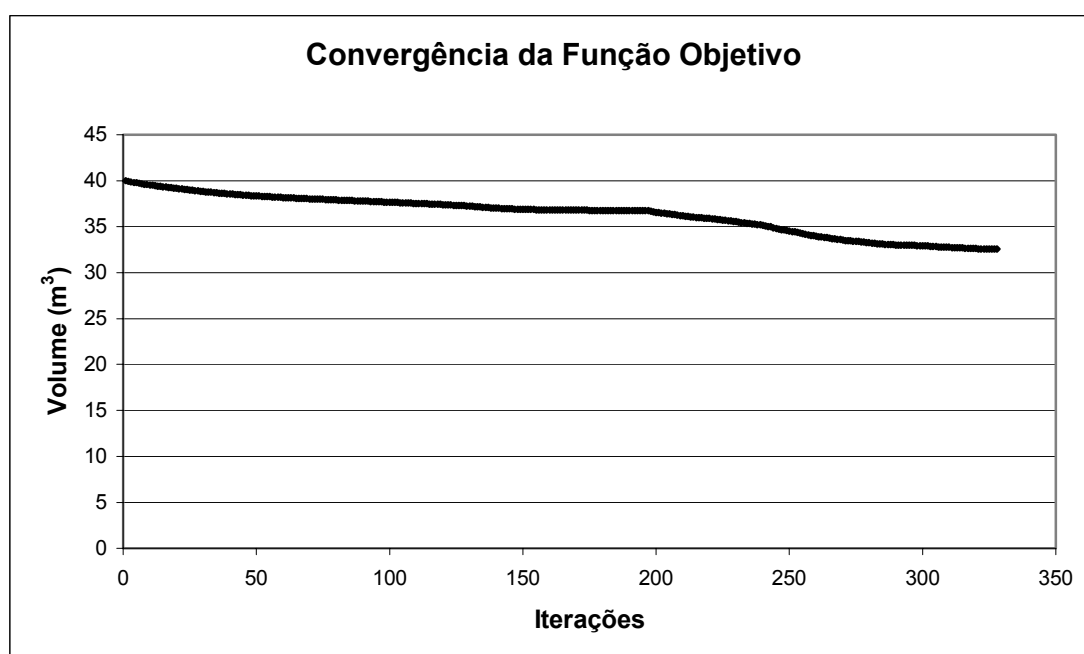


Figura 129: Convergência da função objetivo para o problema da viga com massa concentrada na ponta, filtro de raio 0,5, ajuste de peso 0,3 e frequência natural limite de 27Hz.

É possível verificar na Figura 130 que a primeira frequência natural permanece estável durante o processo de otimização e que as demais (observam-se no gráfico a segunda e a terceira) variam livremente, pois não são admitidas como restrição.

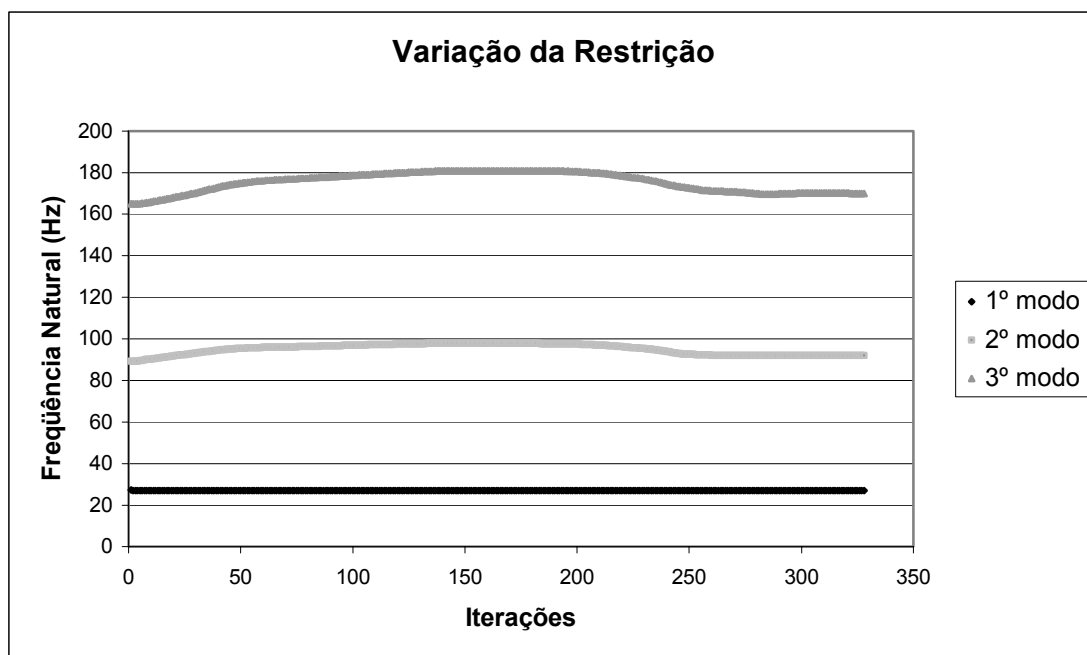


Figura 130: Variação da restrição para o problema da viga com massa concentrada na ponta, filtro de raio 0,5, ajuste de peso 0,3 e frequência natural limite de 27Hz.

A Figura 131 trata da solução do problema anterior com uma filtragem continuada, variando em seis níveis de otimização de mesma penalização (expoente 1/5 para a função objetivo) com filtros de ajuste de peso decrescente, variando de 0,5 a 0,1 em cinco níveis e com o último nível sem filtragem (apenas para a eliminação das densidades intermediárias).

A Tabela 23 mostra os resultados obtidos em cada nível de otimização.



Figura 131: Topologia obtida para uma filtragem continuada, variando o ajuste de peso de 0,5 a 0,1 em cinco níveis.

Verifica-se uma topologia bastante cheia, em função da frequência natural limite adotada ser bastante próxima da frequência com a peça totalmente preenchida de material. Observa-se uma menor presença da instabilidade de tabuleiro, o que é bastante positivo por se tratar de uma malha com refinamento grosseiro.

Tabela 23: Valores encontrados para a função objetivo nos diferentes níveis de otimização adotados.

Penalização	Raio	Ajuste de peso	Volume (m ³)
1/5	0,5	0,5	37,0567
1/5	0,5	0,4	36,9111
1/5	0,5	0,3	36,7168
1/5	0,5	0,2	36,4148
1/5	0,5	0,1	35,6569
1/5	-	-	33,0408

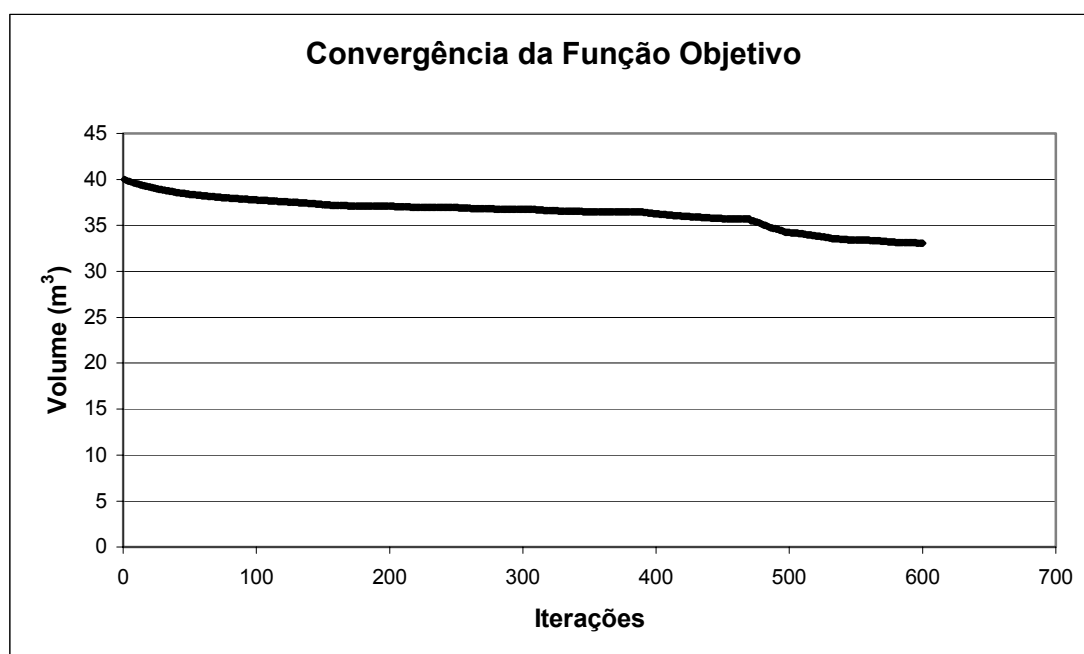


Figura 132: Convergência da função objetivo para o problema da viga com massa na ponta e filtragem continuada.

A vantagem da filtragem continuada não se limita apenas em atenuar a formação da instabilidade de tabuleiro, mas também evita a presença de saltos de densidades entre elementos adjacentes. Diferentemente dos problemas com restrição de flexibilidade, elementos com densidades elevadas em meio a elementos com densidades de baixo valor podem constituir em

um modo de vibração isolado e abaixo da restrição imposta. Essa característica tira a estabilidade do processo de otimização.

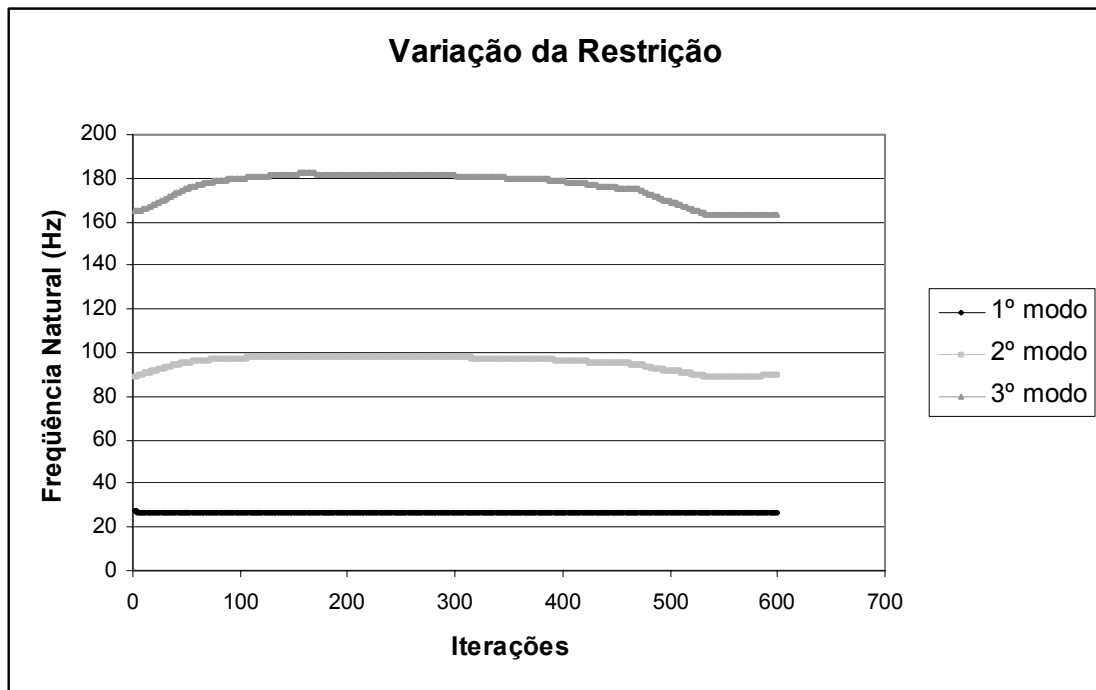


Figura 133: Variação da restrição para o problema da viga com massa na ponta e filtragem continuada.

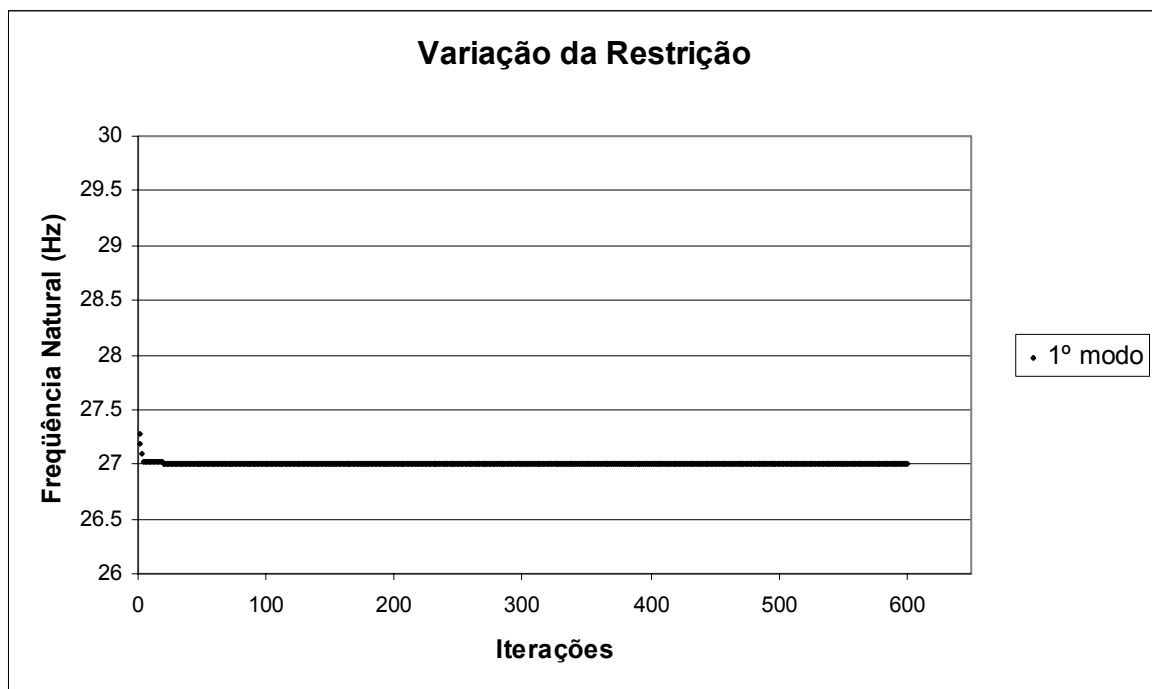


Figura 134: Detalhe da variação do primeiro modo de vibração para o problema da viga com massa na ponta e filtragem continuada.

A Figura 135 mostra o resultado obtido para o problema 9, utilizando-se penalização do tensor constitutivo com expoente 3, frequência natural limite de 50Hz, distribuição inicial de densidades homogênea igual a 0,8 e densidades variando entre 10^{-6} e 1. Foi utilizado um limite móvel de 0,08 e adotou-se novamente JACOBI para a solução modal.

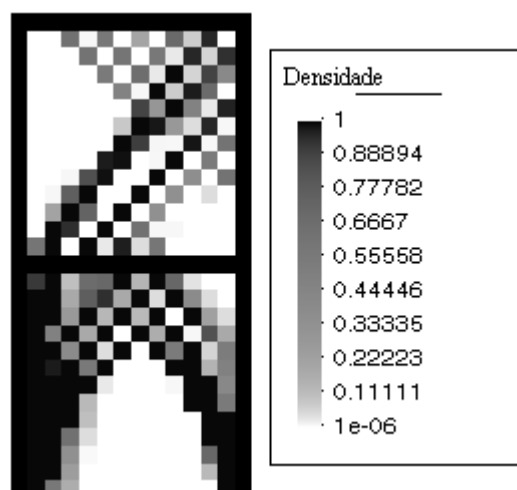


Figura 135: Topologia formada para o problema 9 com SIMP = 3 e solução modal por JACOBI.

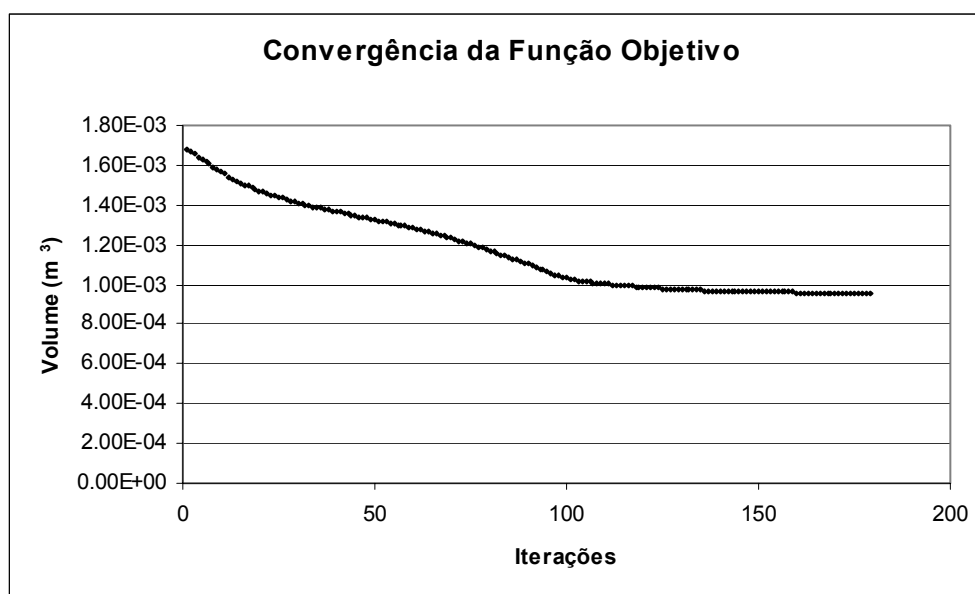


Figura 136: Convergência da função objetivo para o problema 9, resolvido por JACOBI.

Nota-se na figura, além da instabilidade de tabuleiro (a qual ocasionou pequenas flutuações da função objetivo, quase imperceptíveis devido ao pequeno limite móvel adotado), uma certa assimetria do resultado. A solução por JACOBI tem por característica a rotação do sistema de modo a anular os termos fora das diagonais principais das matrizes. Sabe-se portanto

que a solução deste problema, pelo fato de ser numérica, dependerá dos critérios de convergência adotados. Para a solução ser considerada “exata”, deve-se escolher um critério de convergência bastante rigoroso, de modo a contemplar inclusive valores de módulo de elasticidade e massa específica que tendem a zero. Desta forma, poderá haver um número de iterações demasiado no algoritmo de Jacobi para que não se tenha uma solução indesejada.

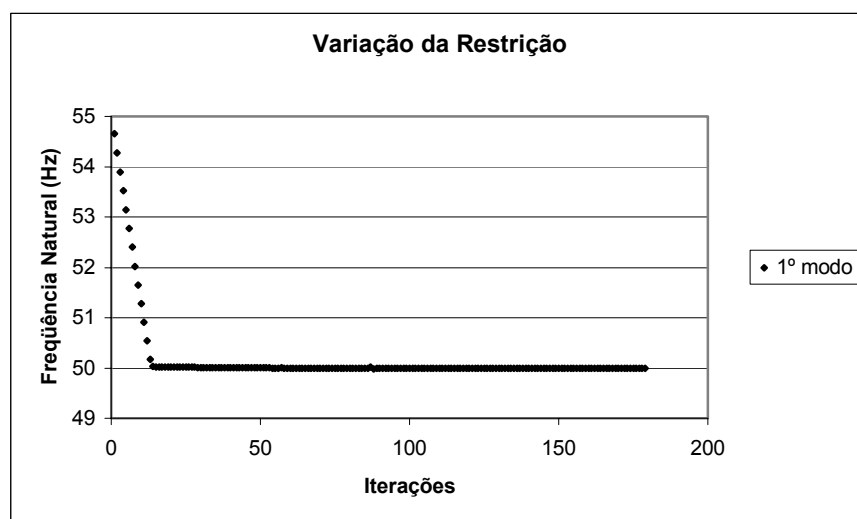


Figura 137: Variação da primeira freqüência natural para o problema 9, resolvido por JACOBI.

A Figura 138 mostra o resultado do problema 9, sob mesmas condições mencionadas anteriormente, resolvido por LANCZOS. Verifica-se uma maior simetria dos resultados, embora haja ainda a presença da instabilidade de tabuleiro. Diferenças de topologias entre soluções com SIMP diferente de um são possíveis, uma vez que não há unicidade de solução para funções penalizadas (não-convexas).

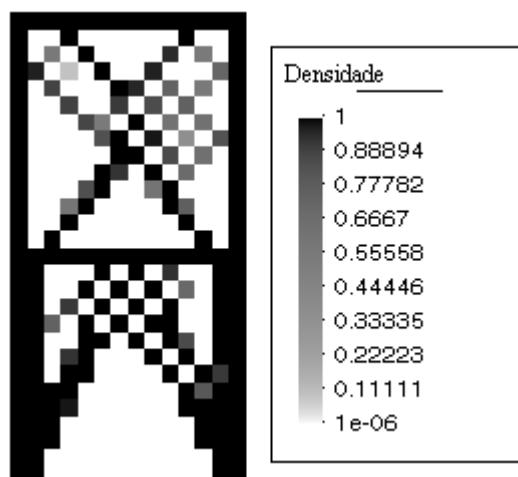


Figura 138: Topologia formada para o problema 9 com SIMP = 3 e solução modal por LANCZOS.

Embora ambos os algoritmos se apresentem estáveis para as soluções dos problemas, o método de LANCZOS possui uma velocidade de solução bastante superior à apresentada por JACOBI. Assim sendo, todos os problemas com restrição modal são resolvidos pelo método de LANCZOS deste ponto em diante.

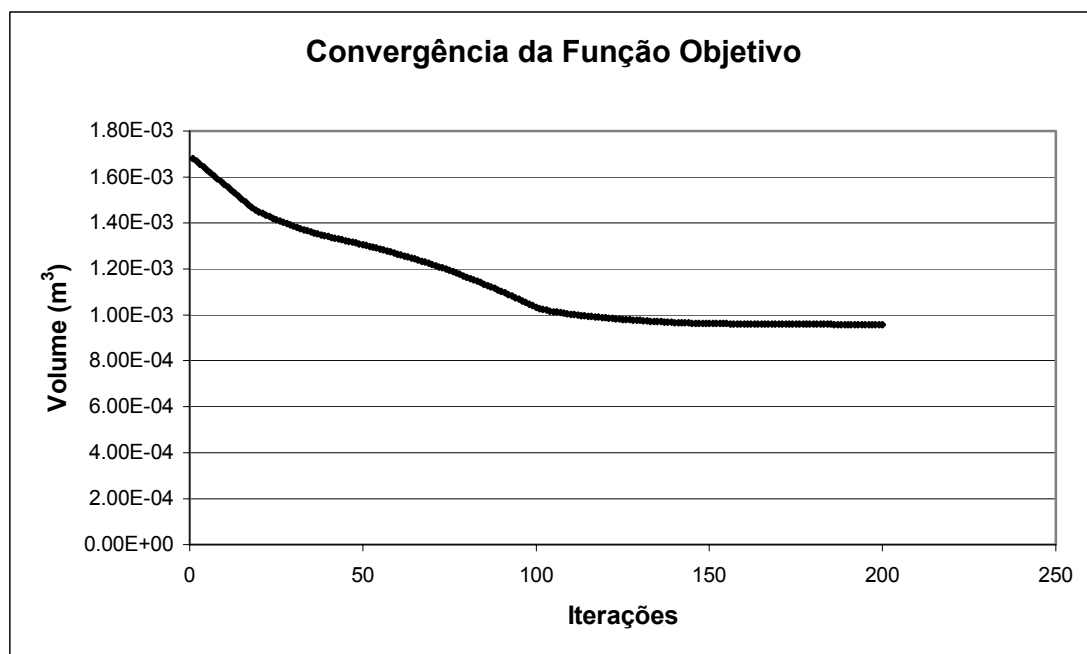


Figura 139: Convergência da função objetivo para o problema 9, resolvido por LANCZOS.



Figura 140: Variação da primeira frequência natural para o problema 9, resolvido por LANCZOS.

A Figura 141 mostra a segunda e a terceira frequências naturais (não restringidas). Variações bruscas de frequência (para modos não restringidos) ocasionam instabilidades numéricas, que podem ser atenuadas pelo algoritmo de autovalores repetidos (dependendo é claro dos valores e variações das frequências envolvidas). Cabe salientar que a restrição é estabelecida à frequência, e não ao autovetor.

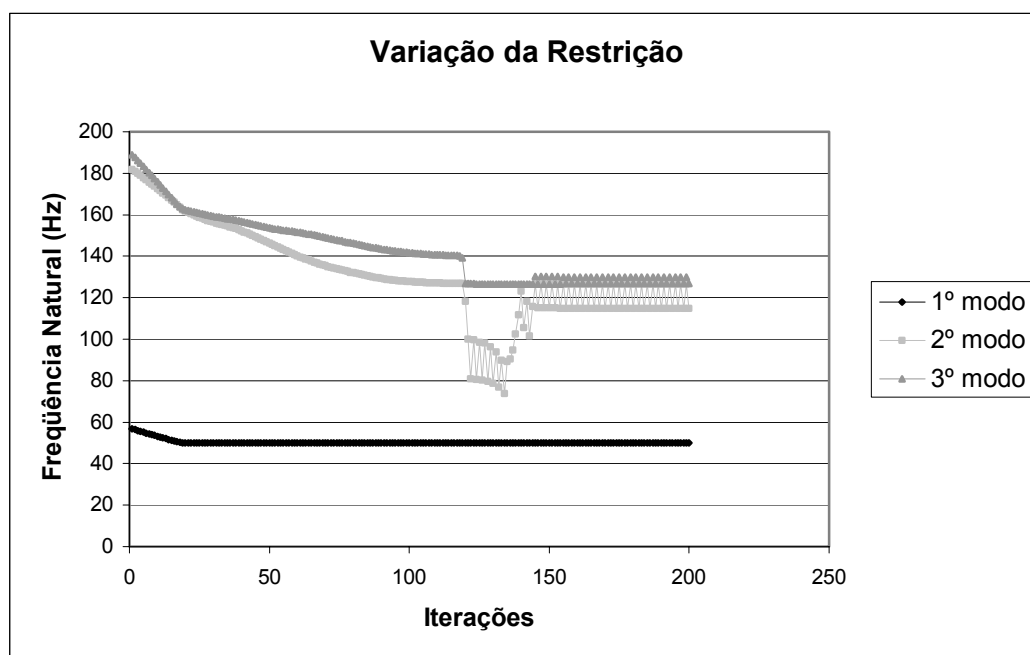


Figura 141: Variação das frequências naturais para o problema 9, resolvido por LANCZOS.

A Figura 142 mostra o resultado obtido com dois níveis de otimização, sendo o primeiro com filtragem de raio 0,08 e ajuste de peso de 0,3 e o segundo sem filtro (para limpeza das densidades intermediárias).

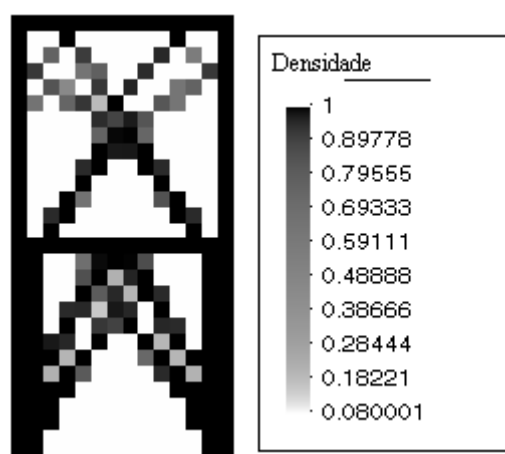


Figura 142: Topologia formada para o problema 9 com filtragem de raio 0,08.

Percebe-se claramente que a instabilidade de tabuleiro, embora minimizada, não desaparece completamente do problema. Esse fato está sensivelmente ligado à pobreza da malha adotada para o cálculo.

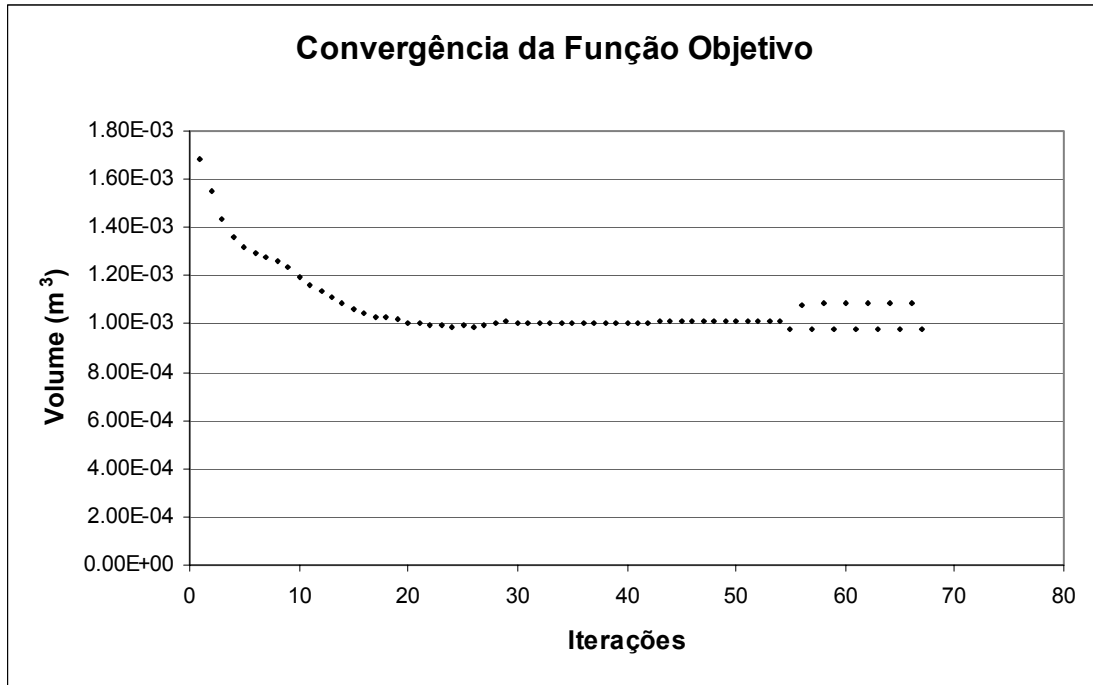


Figura 143: Variação da função objetivo para o problema 9, com filtragem de raio 0,08.

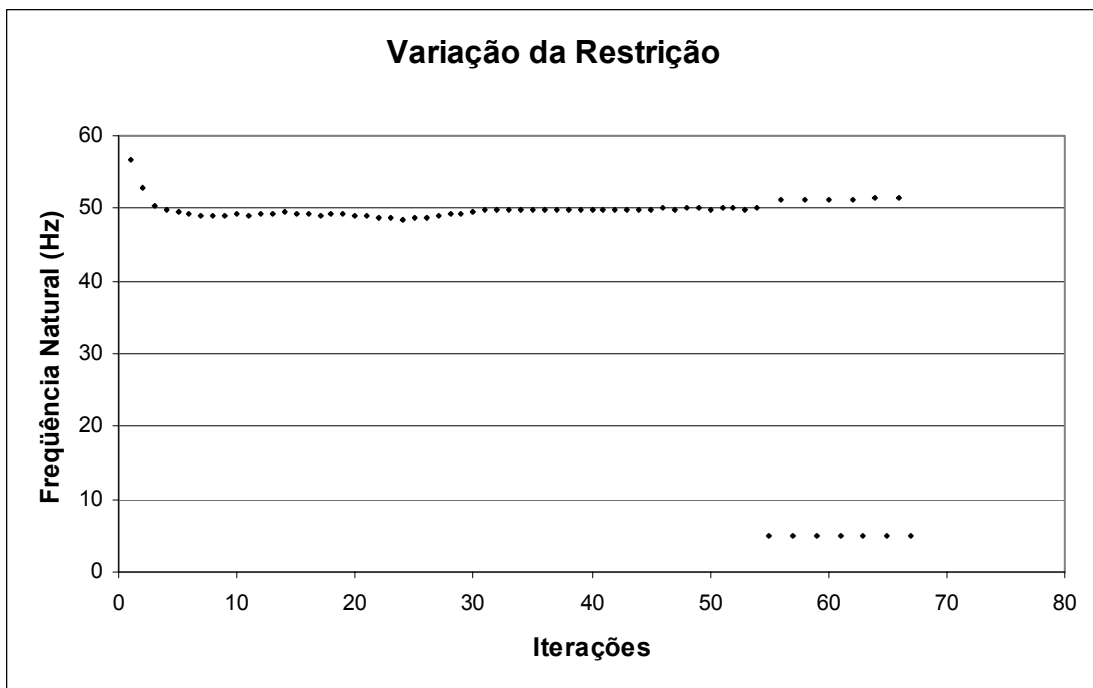


Figura 144: Variação da restrição para o problema 9, com filtragem de raio 0,08.

A Figura 145 mostra o resultado do problema anterior para uma malha com 1250 elementos e 1326 nós, sem filtragem. Apesar da instabilidade de tabuleiro estar presente no cálculo, a topologia bem formada (sem filtro) permite a filtragem com mais eficácia.

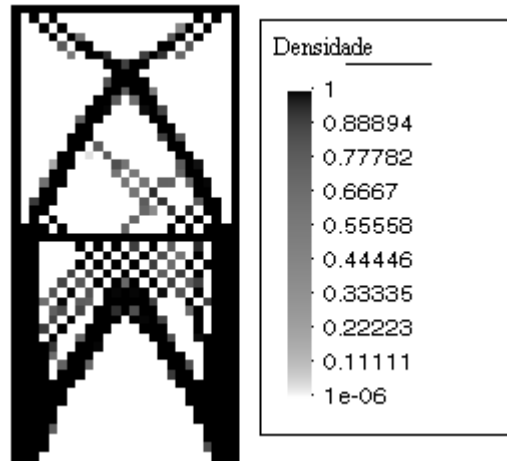


Figura 145: Topologia formada para o problema 9, sem filtragem, para uma malha com 1250 elementos.

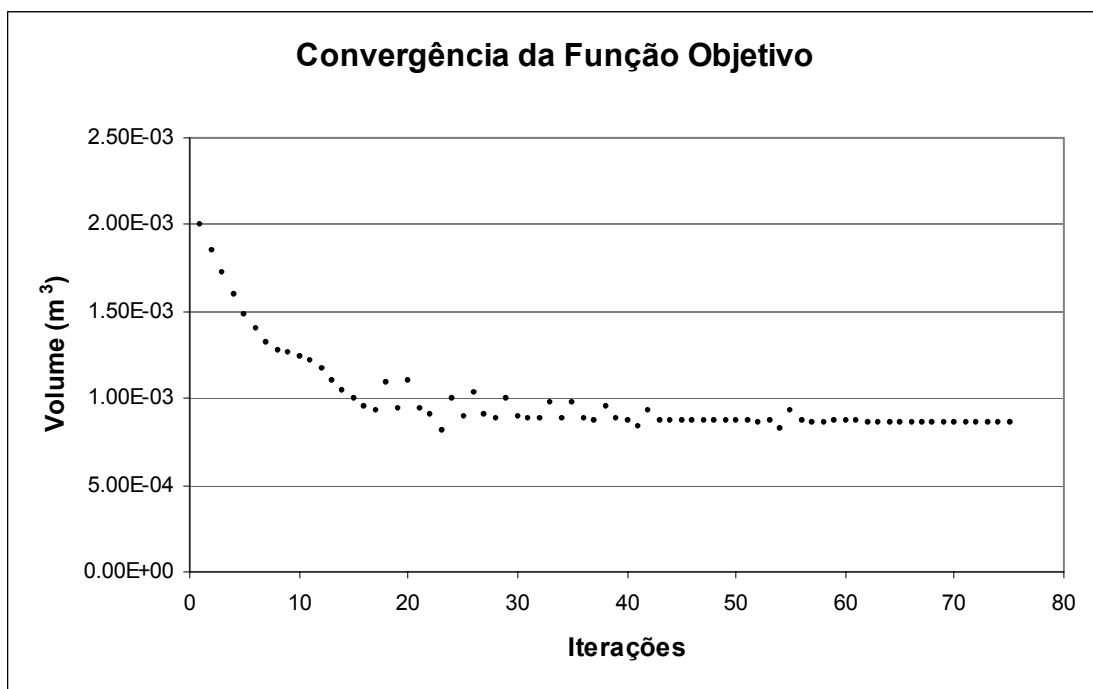


Figura 146: Convergência da função objetivo para o problema 9, sem filtragem, para uma malha com 1250 elementos.

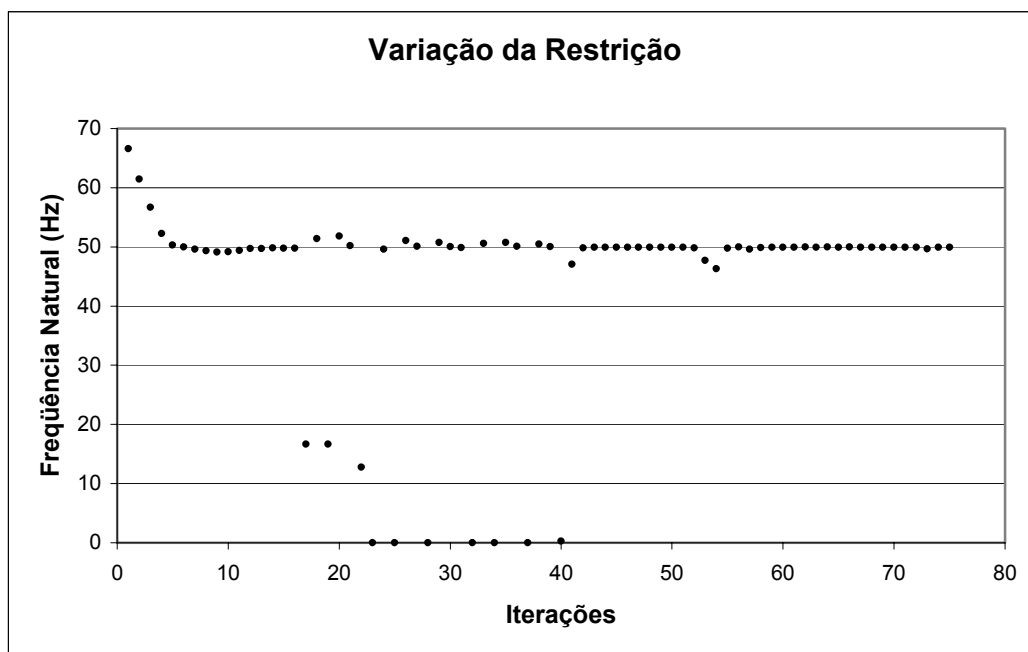


Figura 147: Variação da restrição para o problema 9, sem filtragem, para uma malha com 1250 elementos.

A Figura 148 mostra a topologia obtida com filtragem de raio 0,05 e ajuste de peso de 0,5. Nota-se ausência de dispersões quando observadas a função objetivo e a restrição.

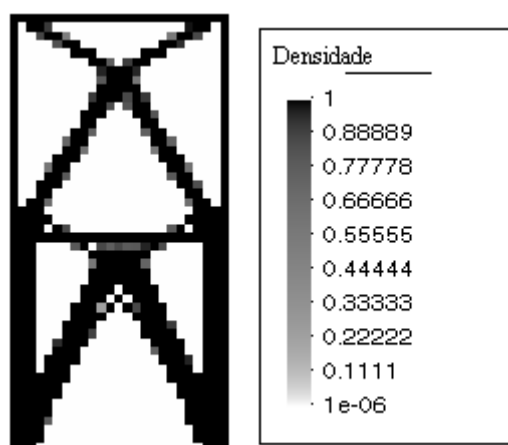


Figura 148: Topologia formada para o problema 9, com filtro de raio 0,05 (abrangência de 4 elementos) e ajuste de peso 0,5, para uma malha com 1250 elementos.

A Figura 151 mostra a topologia obtida para o problema 8 utilizando-se uma malha com 4205 elementos e 4380 nós. Admitiu-se uma frequência natural limite de 2,5Hz e dois níveis de otimização, sendo o primeiro com filtragem de raio 0,04m (abrangendo 4 elementos) e ajuste de peso 1. Utilizaram-se densidades variando entre 10^{-6} e 1 e limites móveis entre 0,008 a 0,01.

Adotou-se uma tolerância de 10^{-5} para os processos de otimização. Resolveu-se também o problema para uma frequência natural limite de 4Hz (Figura 154).

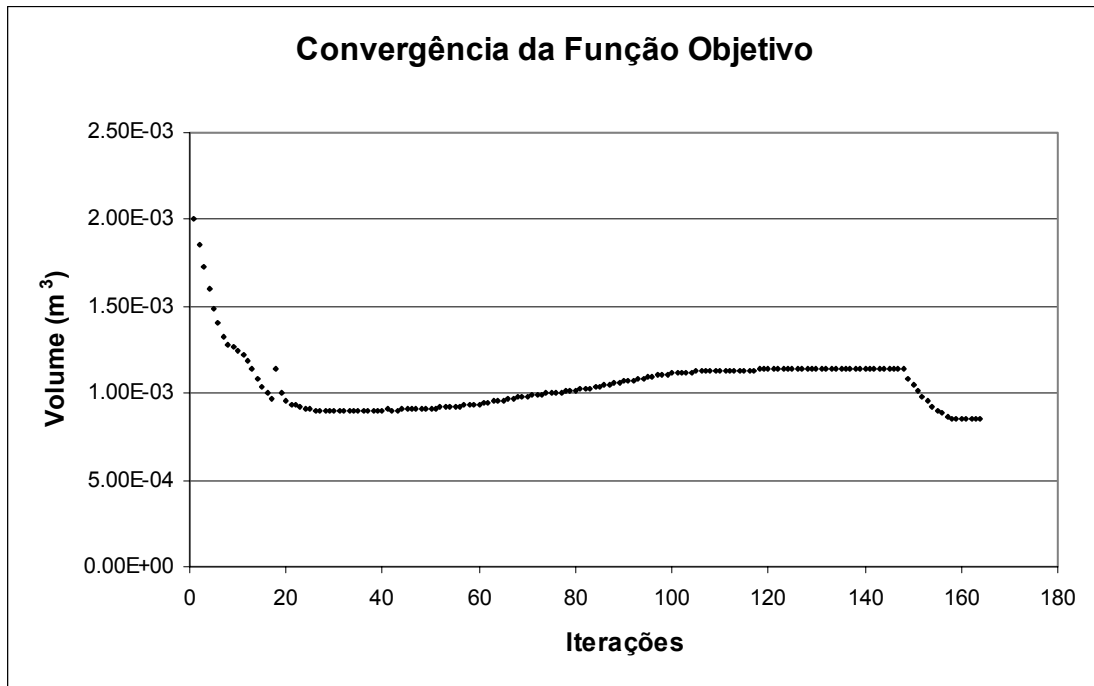


Figura 149: Convergência da função objetivo para o problema 9, com filtro de raio 0,05 (abrangência de 4 elementos) e ajuste de peso 0,5, para uma malha com 1250 elementos.

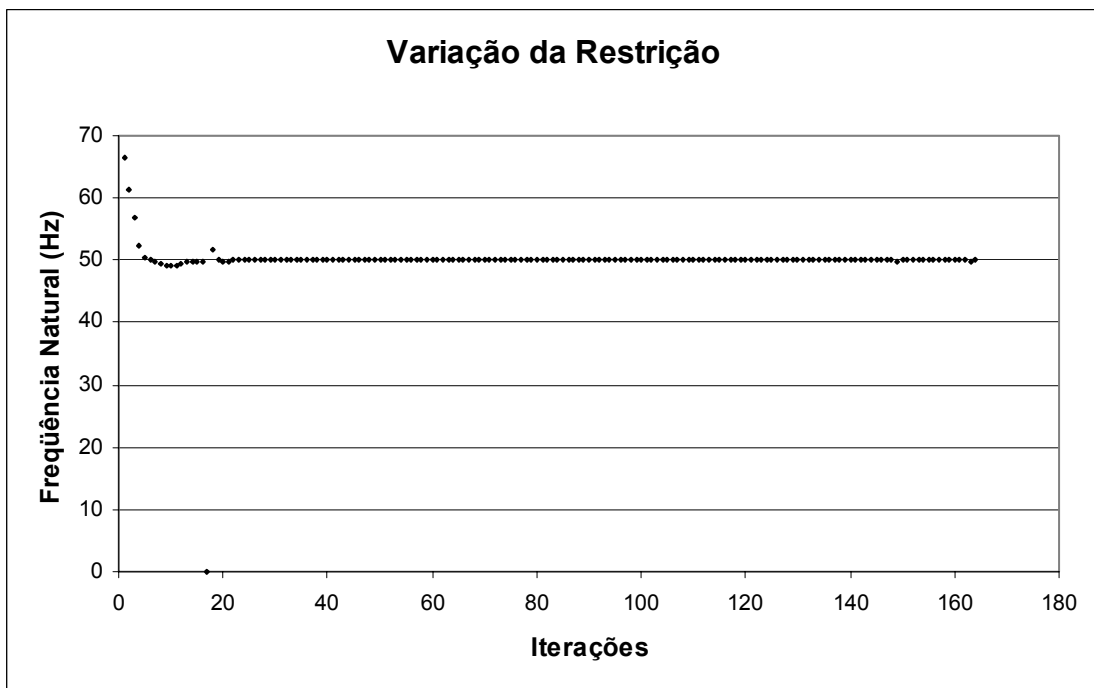


Figura 150: Variação da restrição para o problema 9, com filtro de raio 0,05 (abrangência de 4 elementos) e ajuste de peso 0,5, para uma malha com 1250 elementos.

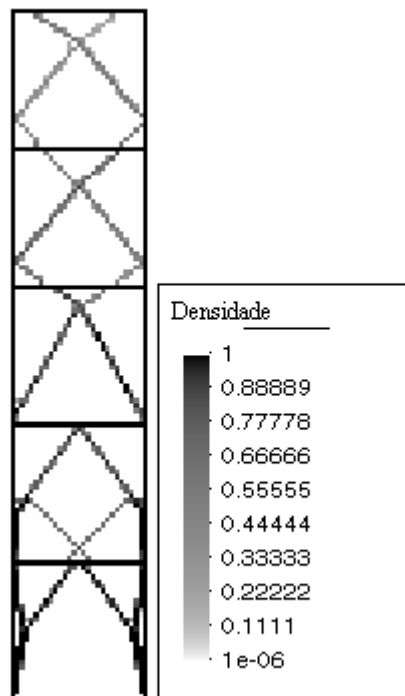


Figura 151: Topologia formada na solução do problema 8 para uma restrição de 2,5Hz. Nota-se a formação de reforços sobre a estrutura básica.

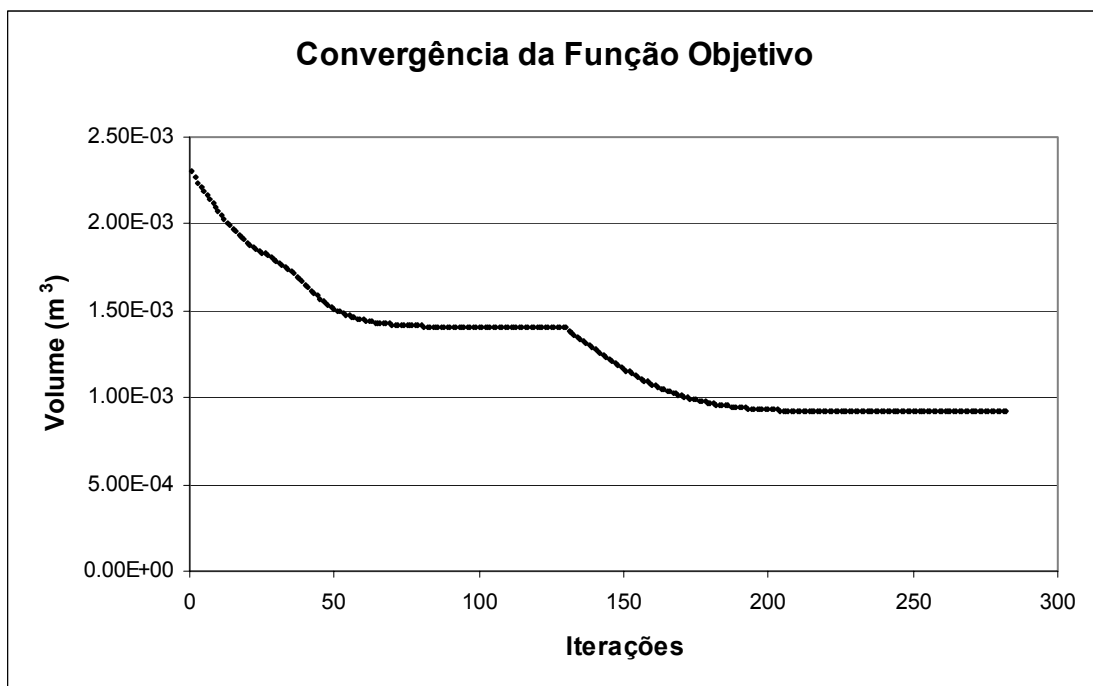


Figura 152: Convergência do volume para o problema 8 com restrição de 2,5Hz para o primeiro modo de vibração.

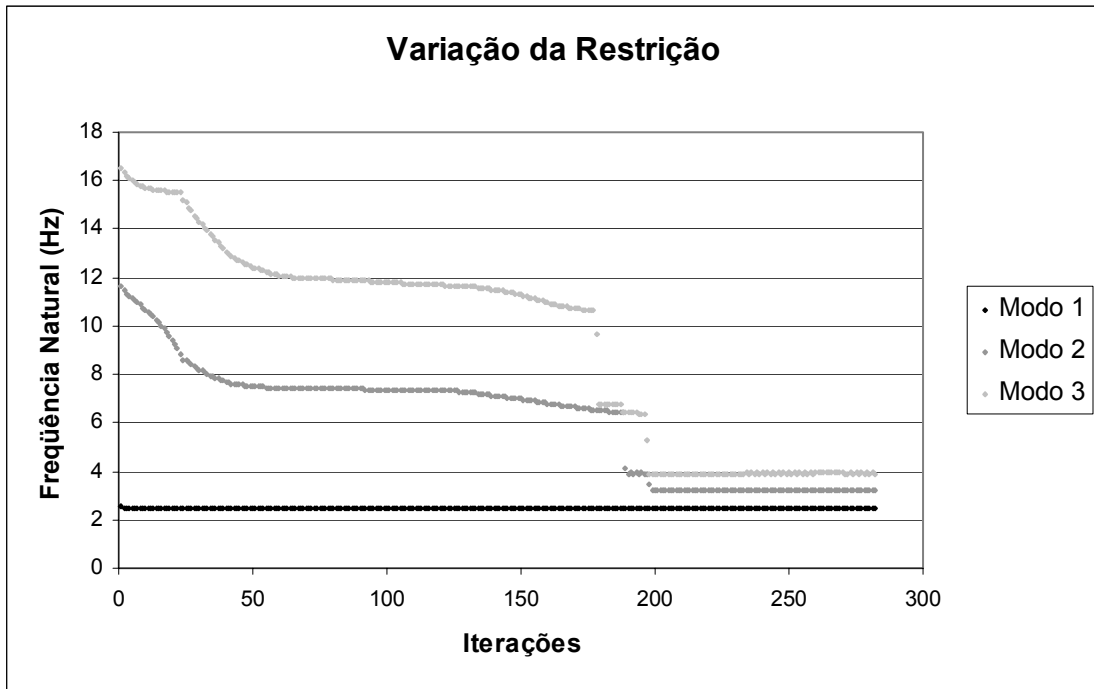


Figura 153: Variação das frequências naturais para o problema 8 com restrição de 2,5Hz.

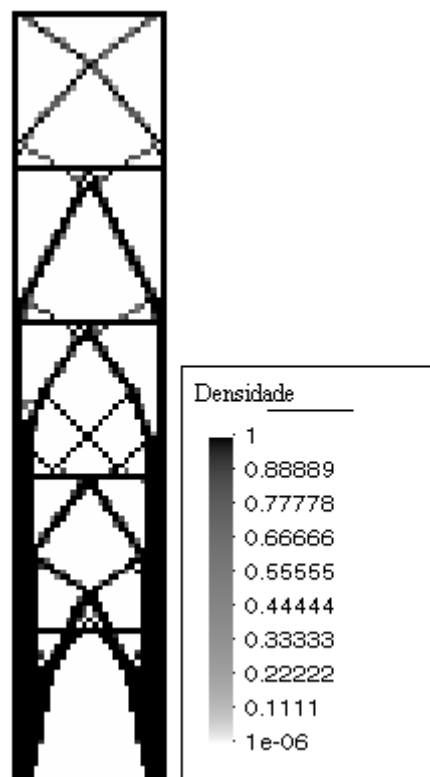


Figura 154: Topologia formada na solução do problema 8 para uma restrição de 4Hz para o primeiro modo de vibração.

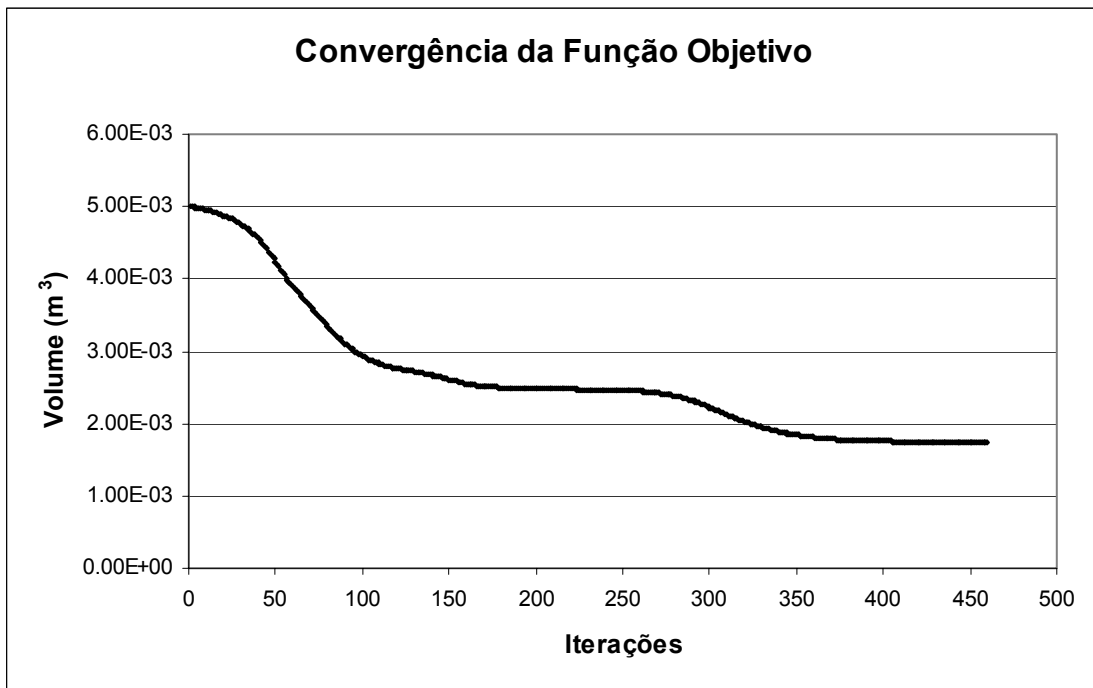


Figura 155: Convergência da função objetivo para o problema 8 com restrição de 4Hz para o primeiro modo.

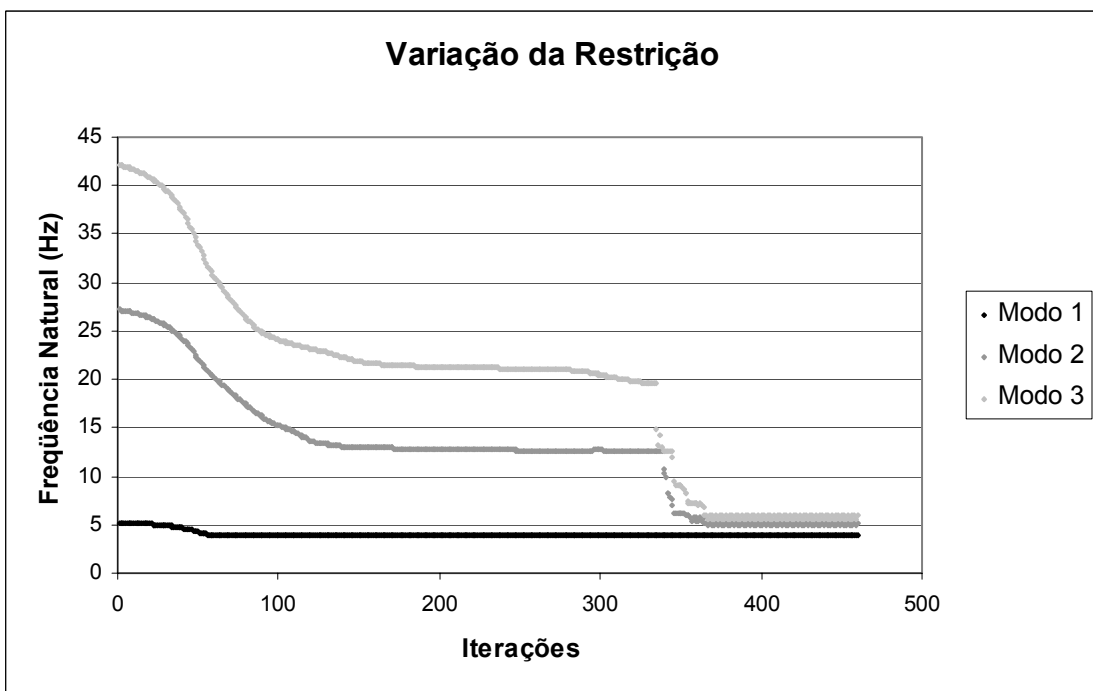


Figura 156: Variação das frequências naturais para o problema 8 com restrição de 4Hz para o primeiro modo de vibração.

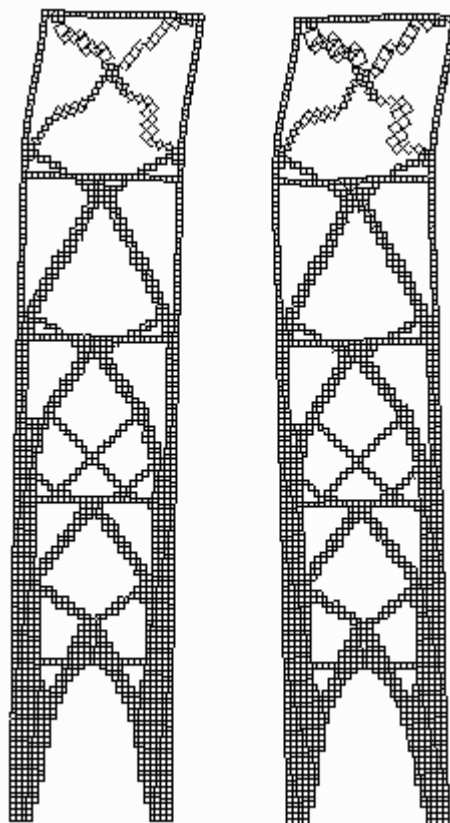


Figura 157: Deformações dos dois primeiros modos de vibração para o problema de minimização de volume com restrição de 4Hz para o primeiro modo de vibração.

Embora haja grande semelhança das topologias obtidas no problema 8 (Figura 151, principalmente) com o problema resolvido por Kikuchi [Bendsøe, 1995], os métodos de solução empregados são diferentes (homogeneização para o caso do autor citado e SIMP para os problemas resolvidos neste trabalho).

Observa-se novamente nas topologias obtidas a influência determinante das condições de contorno. O problema com restrição de frequência natural mais elevada tende a um enrijecimento maior da base, enquanto que o problema com restrição modal mais “amena”, apresenta uma configuração de reforços mais comprometida com as massas concentradas.

7.5. ALGUNS CASOS TRIDIMENSIONAIS

A título de ilustração foram resolvidos alguns casos tridimensionais. O exemplo 10, da Figura 28 trata do problema 3D da viga com carga na ponta (similar ao apresentado na Figura 22). Utilizaram-se como dados, o módulo de elasticidade igual a $2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ e coeficiente de poisson 0,3, carga de 20.000N na extremidade da viga e uma malha de 800 elementos e 1122 nós. Minimizou-se a flexibilidade de modo a obter uma estrutura com percentual de 50% do volume total. Foi adotado CO com tolerância de 10^{-8} , densidades entre 10^{-6} e 1, limites móveis entre 0,08 e 0,1 e tolerância para o processo de otimização de 10^{-6} . As próximas duas figuras ilustram a topologia obtida no terceiro nível de otimização (usando-se o método da continuação). Foram seleccionadas densidades entre 0,9 e 1.

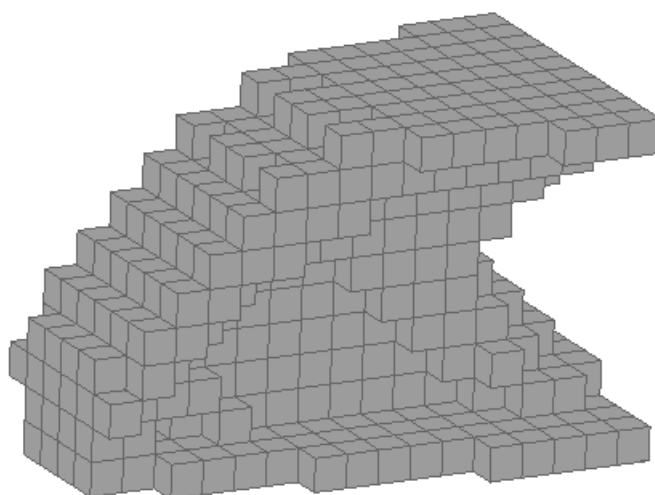


Figura 158: Vista anterior da topologia obtida para a viga tridimensional com carga na ponta.

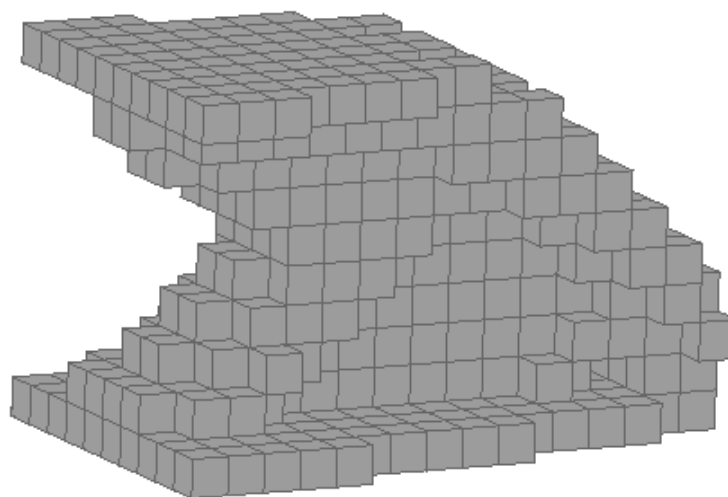


Figura 159: Vista posterior da topologia obtida para a viga tridimensional com carga na ponta.

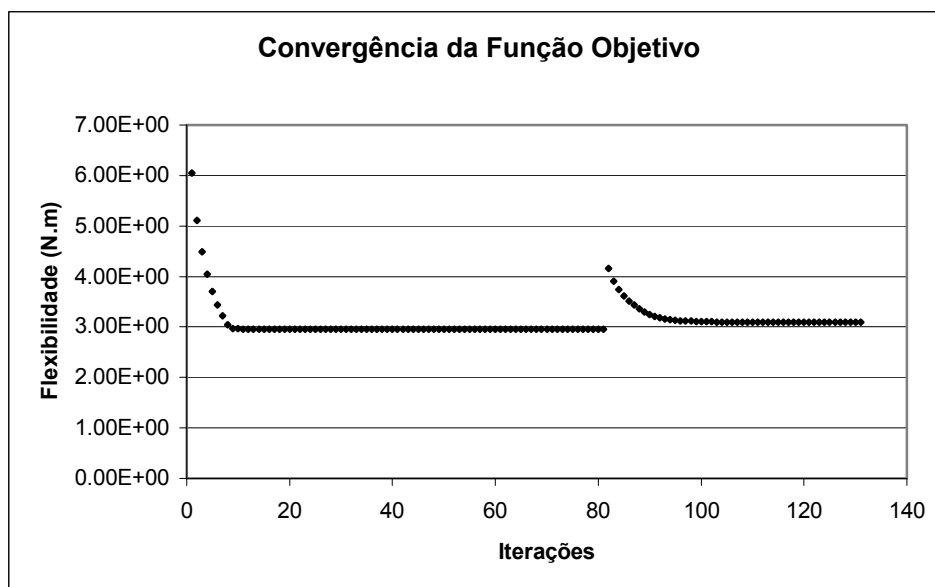


Figura 160: Convergência da função objetivo para o problema tridimensional da viga com carga na ponta.

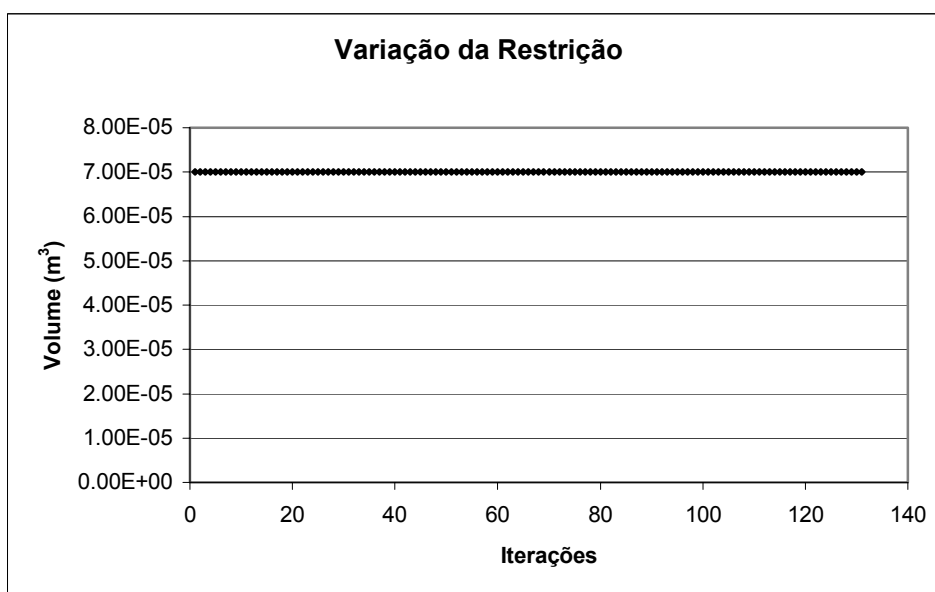


Figura 161: Variação da restrição para o problema tridimensional da viga com carga na ponta.

Tabela 24: Resultados obtidos no problema 10.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	2,95082	54
2	SIMP = 2	3,09344	44
3	SIMP = 3	3,09142	8

Resolvendo-se o problema de elementos finitos no NASTRAN para os elementos com densidade acima de 0,9, a título de conferência, obtém-se uma flexibilidade de 3,58N.m.

O problema 11, da Figura 29, foi resolvido para uma malha de 800 elementos e 1122 nós, utilizando-se as mesmas propriedades de material e critérios de otimização empregados anteriormente. Obteve-se uma topologia semelhante a de um perfil C, mediante a aplicação de uma carga assimétrica.

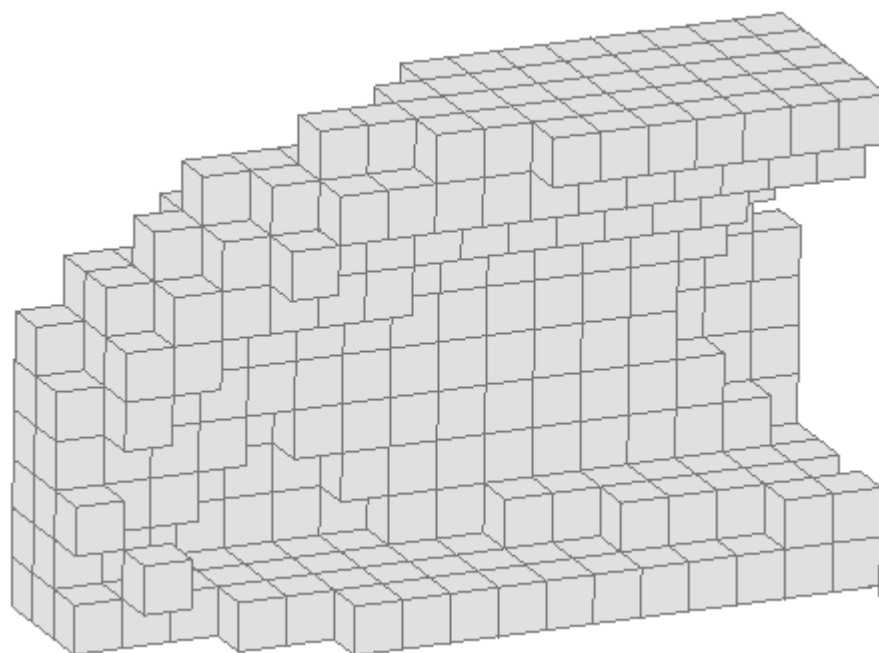


Figura 162: Topologia resultante da otimização da estrutura do problema 11.

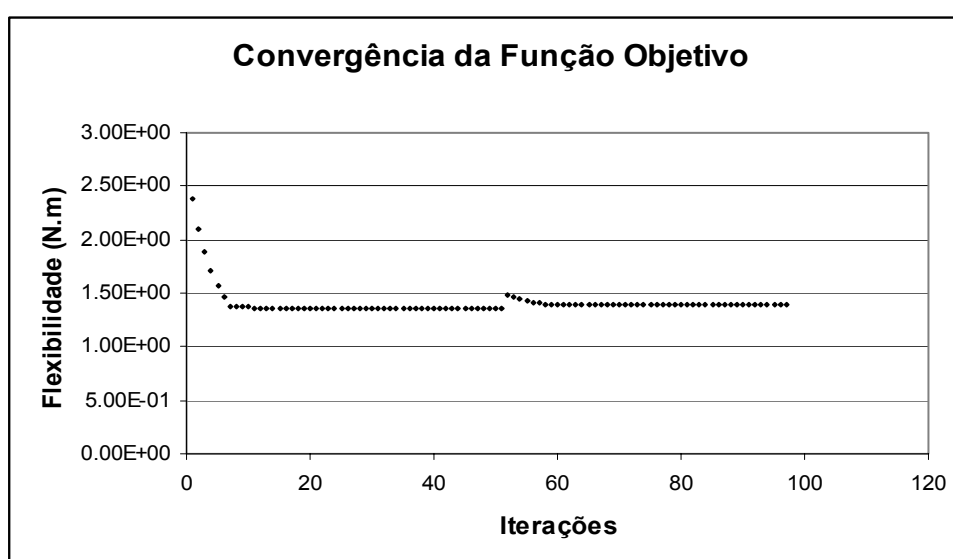


Figura 163: Convergência da função objetivo para o problema 11.

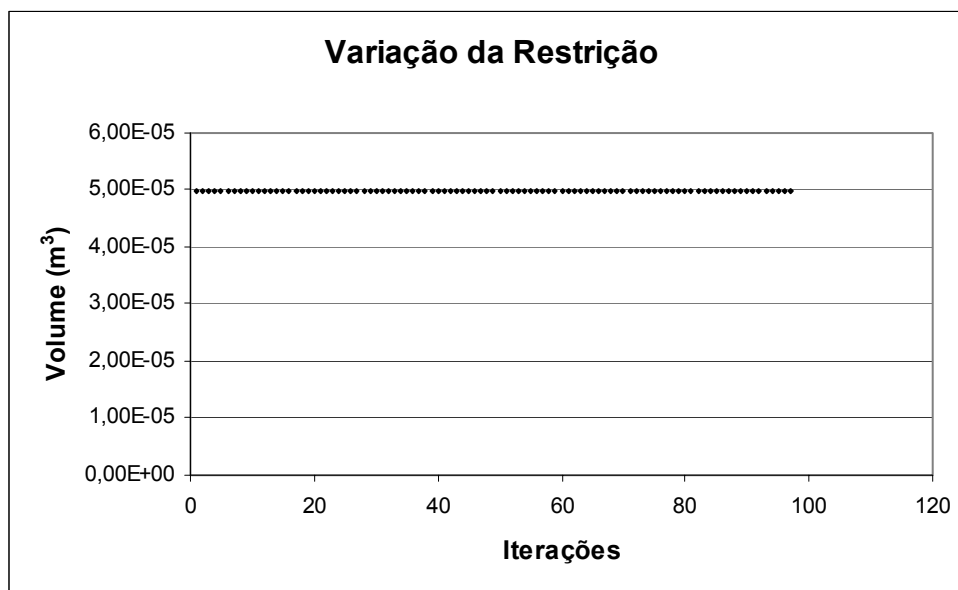


Figura 164: Variação da restrição para o problema 11.

Tabela 25: Resultados obtidos no problema 11.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	1,36486	51
2	SIMP = 2	1,38731	30
3	SIMP = 3	1,3878	16

O problema 12 (caso tridimensional do problema 1) foi resolvido utilizando-se os mesmos dados de material e critérios de otimização dos dois problemas anteriores. Foram assumidos 25% de restrição de volume e carregamento de 40.000N. A Figura 165 mostra a topologia obtida com densidade de corte de 0,99, para uma malha com 343 elementos e 512 nós.

Tabela 26: Resultados obtidos no problema 12, com malha de 343 elementos.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	0,823528	36
2	SIMP = 2	0,824084	13
3	SIMP = 3	0,8242	3

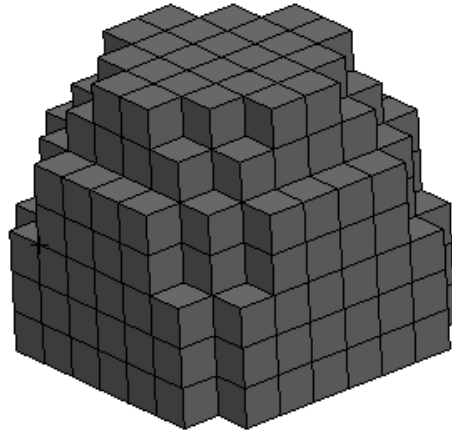


Figura 165: Topologia obtida para o problema 12 com uma malha de 343 elementos.

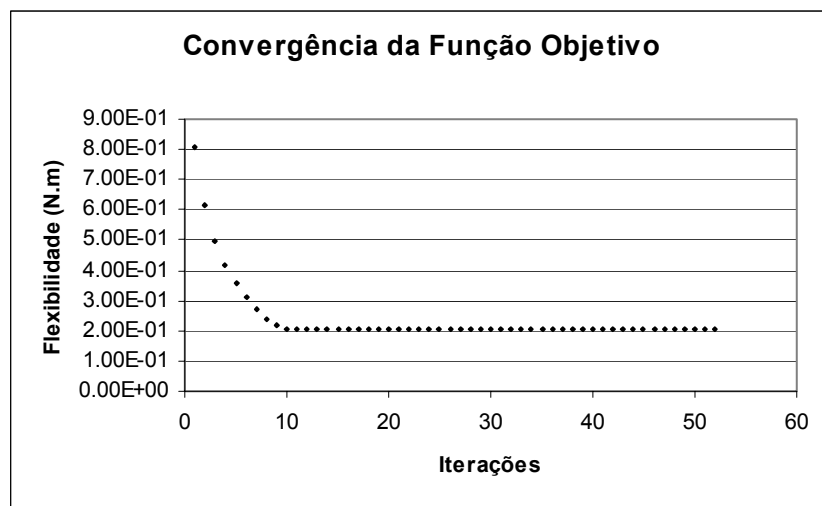


Figura 166: Convergência da função objetivo para o problema 12, com uma malha de 343 elementos.

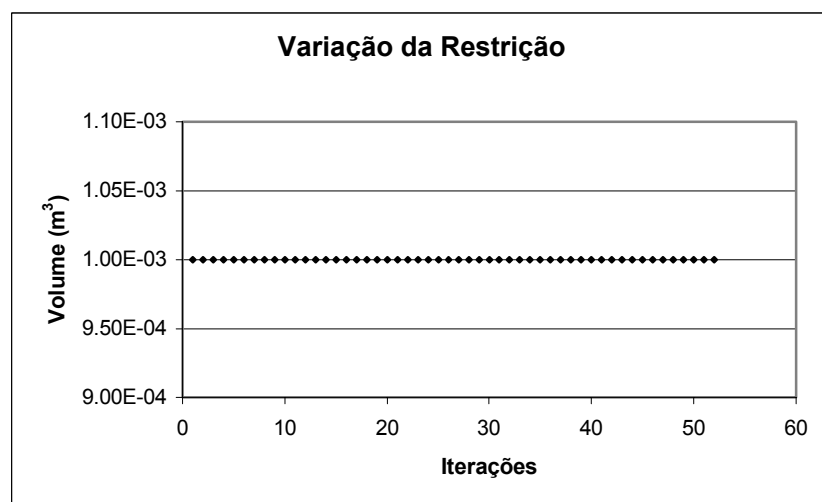


Figura 167: Variação da restrição para o problema 12, com uma malha de 343 elementos.

A Figura 168 mostra a topologia obtida no problema 12, com densidade de corte de 0,99 e malha com 1331 elementos e 1728 nós.

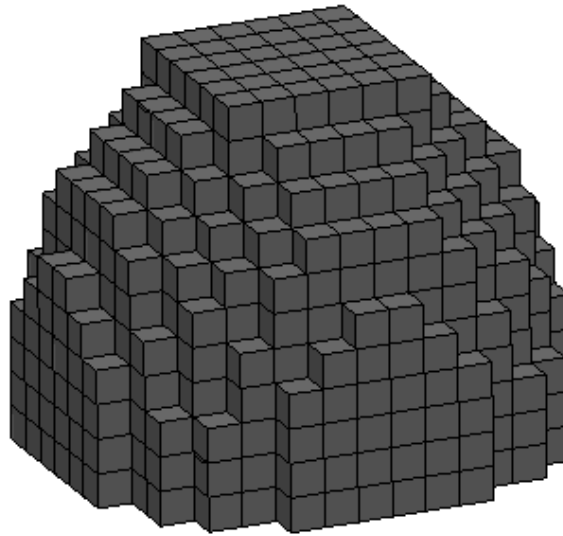


Figura 168: Resultado obtido para o problema 12 com malha de 1331 elementos.

Tabela 27: Resultados obtidos no problema 12, com malha de 1331 elementos.

Nível de otimização	Ferramenta	Flexibilidade (N.m)	N.º de iterações
1	SIMP = 1	1,298048	35
2	SIMP = 2	1,298396	19
3	SIMP = 3	1,298448	2

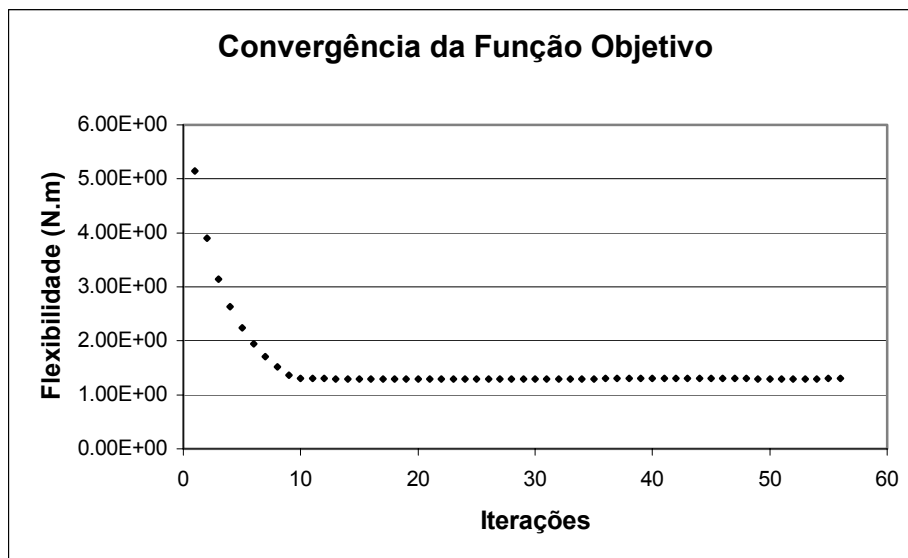


Figura 169: Convergência da função objetivo para o problema 12, com uma malha de 1331 elementos.

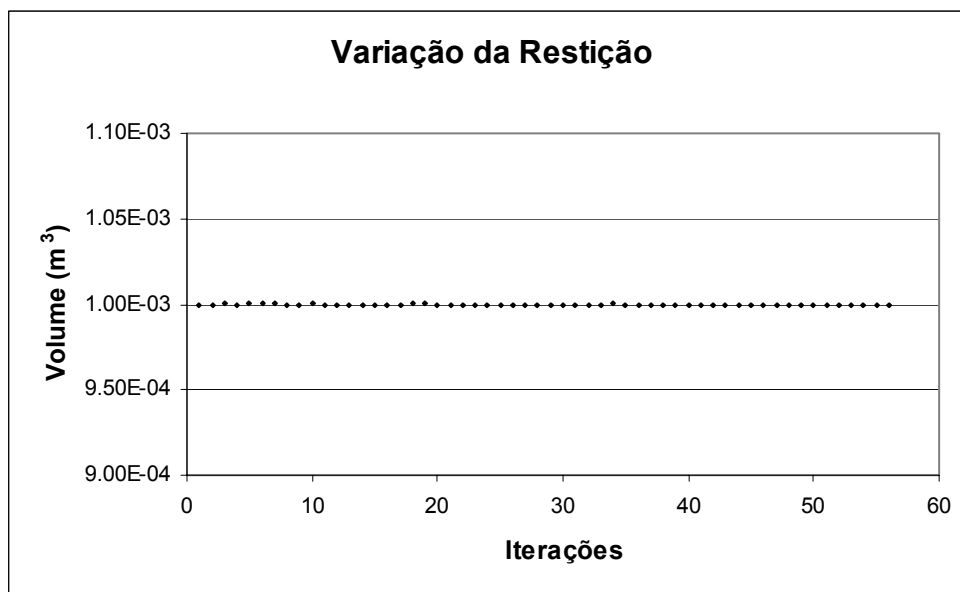


Figura 170: Variação da restrição para o problema 12, com uma malha de 1331 elementos.

A Figura 171 e a Figura 172 mostram a topologia obtida para o problema 13. Nota-se a simetria que implica em autovalores repetidos. Admitiu-se uma frequência natural limite de 2Hz e SIMP 3. Utilizaram-se densidades variando entre 10^{-6} e 1. Adotou-se 10^{-5} como tolerância para o processo de otimização e uma malha com 9396 elementos e 10830 nós.

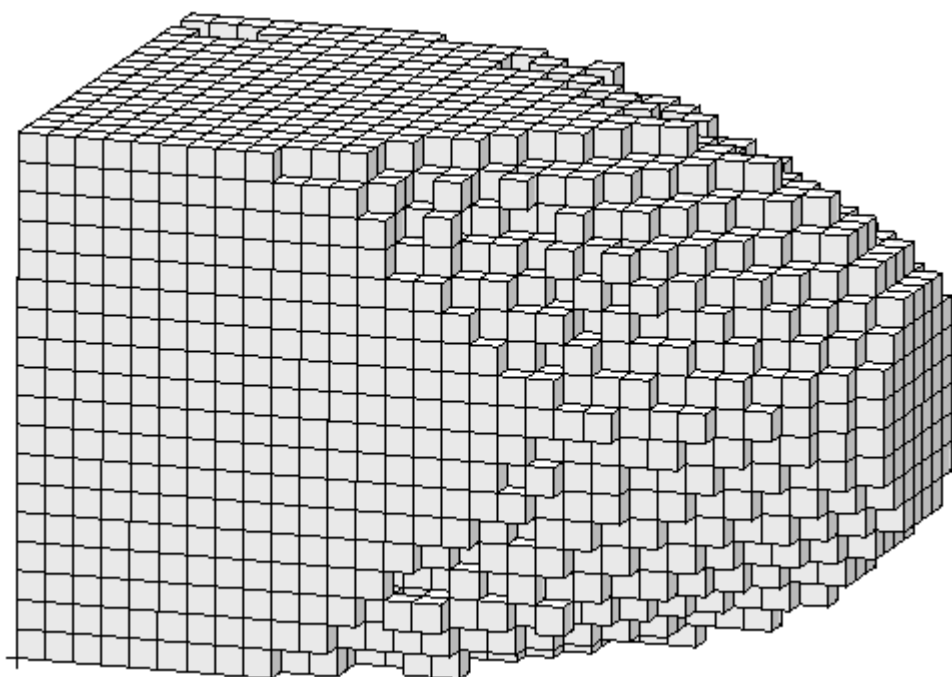


Figura 171: Topologia formada na solução do problema 13 (malha de 9396 elementos e frequência natural limite de 2Hz).

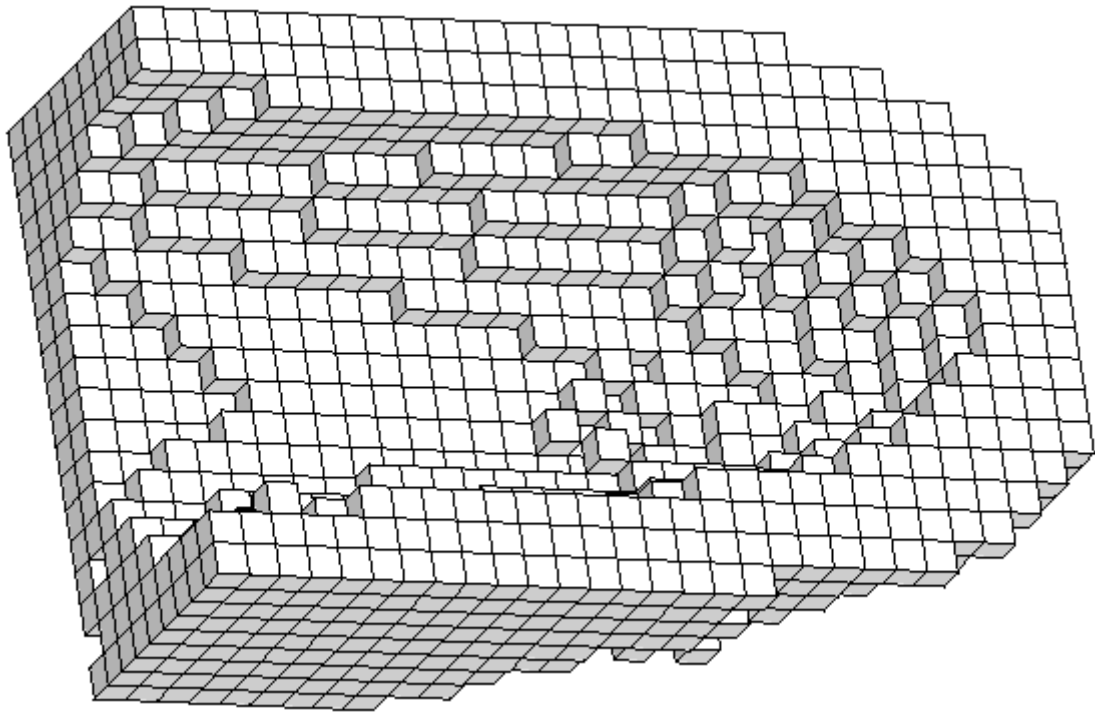


Figura 172: Vista em corte da topologia formada na solução do problema 13 (malha de 9396 elementos e frequência natural limite de 2Hz).

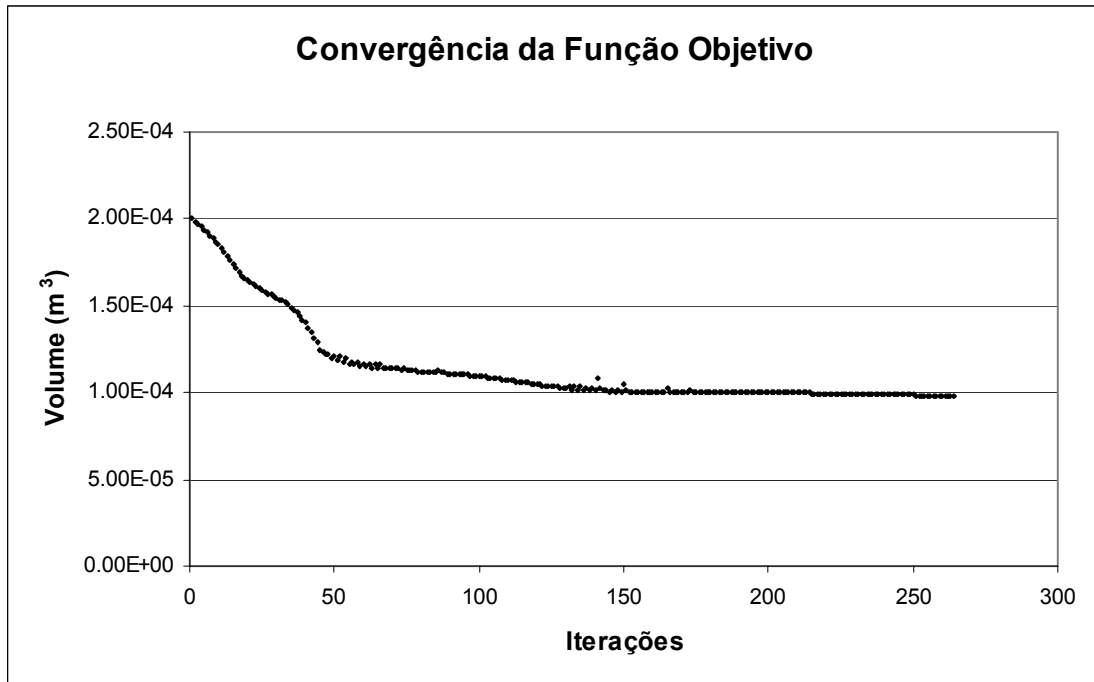


Figura 173: Variação do volume para o problema 13 (malha de 9396 elementos e frequência natural limite de 2Hz).

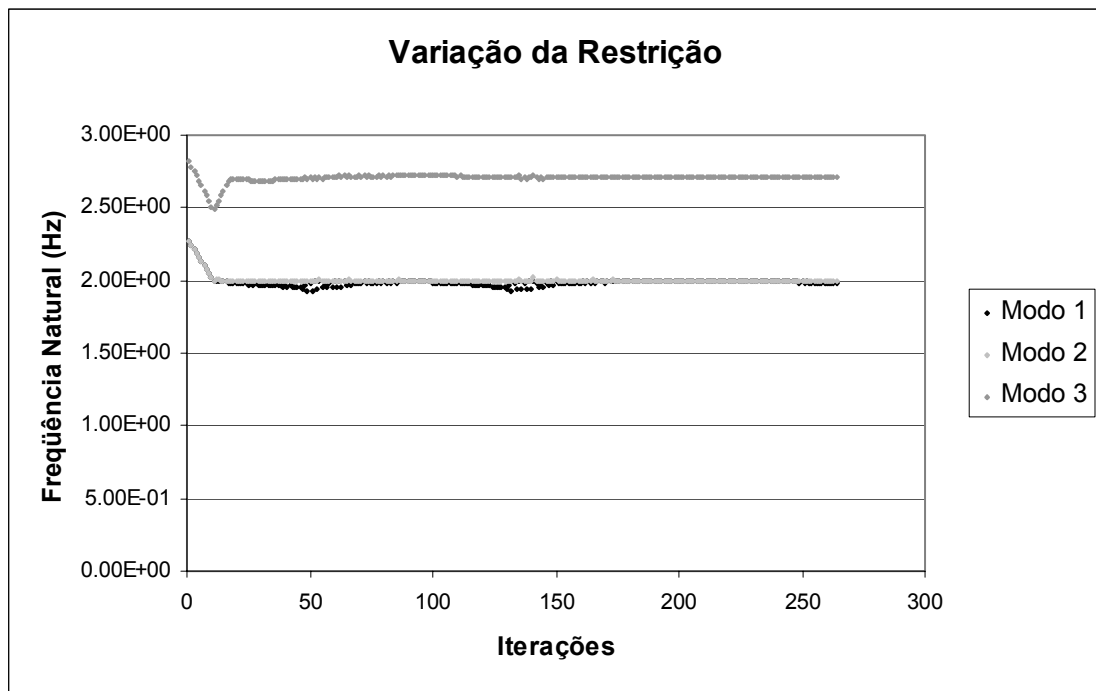


Figura 174: Variação das freqüência naturais do primeiro, segundo e terceiro modos de vibração para o problema 13 (malha de 9396 elementos e freqüência natural limite de 2Hz).

8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

O trabalho em questão não só aborda o problema de otimização, tais como a otimização topológica propriamente dita e suas características, mas também as ferramentas da mecânica dos sólidos utilizadas para a solução das equações de equilíbrio e do problema modal.

O método dos elementos finitos se mostrou bastante prático e estável no que diz respeito às soluções mencionadas, mesmo em situações onde a matriz de rigidez global é composta por elementos de magnitudes bem distintas na sua diagonal principal (característica dos problemas de otimização, devido aos elementos de diferentes densidades).

Quanto à otimização propriamente dita, pode-se perceber com clareza a grande diferença de dificuldade e estabilidade entre os problemas que envolvem restrições de flexibilidade e os que possuem restrição por frequência natural. No primeiro caso, tanto a solução por critério de ótimo, quanto por programação linear apresentaram resultados satisfatórios. No segundo caso, embora tenha sido desenvolvida apenas a ferramenta de programação linear para a solução do problema, verificou-se que a estabilidade no processo de solução é inferior e a dificuldade na elaboração do problema maior, quando comparado aos casos de flexibilidade.

Problemas de instabilidade de tabuleiro tiveram presença na grande maioria dos problemas estudados. As técnicas de filtragem foram bastante úteis para a minimização das instabilidades citadas, assim como se mostraram uma excelente ferramenta no controle da complexidade das geometrias formadas.

Apesar da formulação de otimização ter sido provada conceitualmente correta, o programa desenvolvido não é eficiente nas soluções dos problemas em termos de processamento. O tratamento matricial do programa trouxe um gasto desnecessário no tempo computacional, limitando de certa forma os problemas estudados. Embora haja na atualidade recursos computacionais baratos e rápidos em relação aos encontrados em tempos anteriores, sugere-se a elaboração de um programa com uma forma de alocação de memória e solução das equações de equilíbrio e de autovalores mais eficientes do que o construído.

Quanto ao domínio de solução, propõe-se a elaboração dos elementos de viga e tetraédrico de quatro nós, para que uma maior variedade de estruturas possa ser modelada e otimizada.

Possivelmente a sugestão de continuidade mais importante seja em torno da união dos estudos e metodologias criados por diversos pesquisadores de forma isolada. Na indústria automotiva principalmente, os critérios de falha são descritos pelas empresas na forma de normas internas, e quase sempre em termos de tensão e frequência natural. Portanto, acredita-se que com a elaboração de um programa de otimização com restrições envolvendo não só

freqüência natural, mas também tensão, além de outras como flambagem, haverá a possibilidade de solução para a maior parte dos problemas existentes, criando-se uma ferramenta robusta para a concepção do produto, antes mesmo dos primeiros projetos.

O estudo dos critérios de ótimo para todas as soluções adotadas também é uma boa forma de continuidade do trabalho, pois como se viu, esse tipo de solução além de dar um bom entendimento sobre os tópicos trabalhados (pelo fato de necessitar uma nova elaboração para cada novo estudo), proporciona também uma solução mais estável do problema.

A integração de forma mais amigável com os programas de CAD e elementos finitos (para a criação das malhas e visualização dos resultados) também é um ponto a ser aprimorado nos trabalhos futuros.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Arora, J. S., **“Introduction to Optimum Design”**, McGraw-Hill, 1989.
- [2] Bathe, K. J., **“Finite element procedures”** Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996 (DI).
- [3] Bendsøe, M. P., **“Optimization of a Topology, Shape, and Material”**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [4] Boresi, A. P., Sidebottom, O. M., Seely, F. B. e Smith, J. O., **“Advanced Mechanics of Materials”**, John Wiley & Sons, 3ª edição, 1978.
- [5] Cardani, C., Mantegazza, P., **“Calculation of Eigenvalue and Eigenvector Derivatives for Algebraic Flutter and Divergence Eigenproblems”**, AIAA Journal, vol. 17, no. 4, pp. 408-412, 1979.
- [6] Cardoso, E. L., **“Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas”**, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2000.
- [7] Cheng, G., **“Introduction to Structural Optimization: Theory, Methods and Solution”**, Lecture Notes, Dalian University of Technology, 1992.
- [8] Clough, R. W., **“The Finite Element Method in Plane Stress Analysis”**, Proc. 2º A. S. C. E. Conf. In Electronic Computation, 1960.
- [9] Courant, R., **“Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibration”**, Bull. Am. Math. Soc., vol. 49, pp.1-23, 1943.
- [10] Diaz, A., Sigmund, O., **“Checkerboard Patterns in Layout Optimization”**, Structural Optimization, vol. 10, pp. 40-45, 1995.
- [11] Fonseca, J. S. O., **“Design of Microstructures of Periodic Composite Materials”**, Tese de Doutorado, The University of Michigan, 1997.
- [12] Guilherme, C. E. M., **“Otimização Topológica de Treliças com Restrições de Flambagem e Flexibilidade”**, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2001.
- [13] Haftka, R. T., Adelman, H. M., **“Recent developments in structural sensitivity analysis”**, Structural Optimization, vol. 1, pp. 137-151, 1989.
- [14] Haftka, R., Gürdal, Z., **“Elements of Structural Optimization”**, Kluwel Academic Publishers, 3ª edição, 1992.
- [15] Jog, C., Haber, R., B., **“Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design”**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 130, pp. 203-226, 1996.

- [16] Kikuchi, N., Oden. J. T., Song, Y., J., “**Convergence of Modified Penalty Methods and Smoothing Schemes of Pressure for Stoke’s Flow Problems**”, In Gallagher, R. et al. (eds), “**Finite Element in Fluids**”, vol. 5, John Wiley & Sons, pp. 107-126, 1984.
- [17] Kirsch, U., “**On Singular Topologies in Optimum Structural Design**”, Structural Optimization, vol. 2, pp.133-142, 1990.
- [18] Kirsch, U., “**Optimal Topologies of Structures**”, Appl. Mech., Rev., vol. 42, n° 8, pp. 223-238, 1989.
- [19] Lin, R. M., Wang, Z., Lim, M. K., “**A Practical Algorithm for the Efficient Computation of Eigenvector Sensitivities**”, Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 130, pp. 355-367, 1996.
- [20] McGee, O. G., Phan, K. F., “**Adaptable Optimality Criterion Techniques for Large-Scale Space Frames with Multiple Frequency Constraints**”, Computers & Structures, vol. 42, no. 2, pp. 197-210, 1992.
- [21] Nakagiri, S., Suzuki, K., “**Interval Estimation of Eigenvalue Problem Based on Finite Element Sensitivity Analysis and Convex Model**”, JSME International Journal, Series A, vol. 40, no. 3, pp. 228-233, 1997.
- [22] Rockafellar, R. T., “**Convex Analysis**”, Princeton Landmarks in Mathematics, New Jersey, 1997.
- [23] Rodrigues H. C. and Guedes, J. M., Bendsøe, M. P., “**Necessary Conditions for Optimal Design of Structures with a Nonsmooth Eigenvalue Based Criterion**”, Structural Optimization, vol. 9, pp. 52-56, 1995.
- [24] Rozvany, G. I. N., Birker, T., “**On Singular Topologies in Exact Layout Optimization**”, Structural Optimization, vol. 8, pp. 228-235, 1991.
- [25] Sadek, E. A., “**An Optimality Criterion Method for Dynamic Optimization of Structures**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28, pp. 579-592, 1989.
- [26] Salagame, R. R., Belegundu, A. D., “**Shape Optimization with p-Adaptive**”, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, vol. 33 (12), pp. 2309-2405, 1995.
- [27] Sant’Anna, H. M., “**Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade de Tensão**”, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2002.
- [28] Secchi, A. R., “**Otimização de Processos**”, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Química, UFRGS, 2001.
- [29] Selke, C.A.C, Pereira, Z.T.U., Fonseca, J.S.O., Marczak, R.J., Grante, UFSC, 1990.

- [30] Sigmund, O., Petersson, J., **“Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-dependencies and Local Minima”**, Structural Optimization, vol. 16, pp. 68-75, 1998.
- [31] Sigmund, .O., **“Design of Material Structures using Topology Optimization”**, Ph.D. Thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.
- [32] Smith, H. A., Singh, R. K., Sorenseng, D. C., **“Formulation and Solution of the non-linear Damped Eigenvalue Problem for Skeletal Systems”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 38, pp. 3071-3085, 1995.
- [33] Svanberg, K., **“The Method of Moving Asymptotes – a New Method for Structural Optimization”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pp. 359-373, 1987.
- [34] Tada, Y., Wang, L., **“Reinvestigation on Optimization of Clamped-Clamped Columns and Symmetry of Corresponding Eigenfunctions”**, JSME International Journal, Series A, vol. 38, no. 1, pp. 38-43, 1998.
- [35] Tamagna, A., **“Introdução ao Estudo de Vibrações”**, Caderno Técnico da Engenharia Mecânica, UFRGS, 1993.
- [36] Tcherniak, D., **“Topology Optimization of Resonating Mems”**, Technical University of Denmark, 2002.
- [37] Wilsont, E. L., Itoh, T., **“An eigensolution strategy for large systems”**, Computers & Structures, vol. 16, no. 1-4, pp. 259-265, 1983.
- [38] Wu, C. C., Arora, J. S., **“Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure”**, AIAA Journal, vol. 25, no. 8, pp. 1118-1125, 1987.
- [39] Xu, T. Chen, S., Liu, Z., **“Perturbation Sensitivity of Generalized Modes of Defective Systems”**, Computers & Structures, vol. 52, no. 2, pp. 179-185, 1994.
- [40] Zheng, S., Ni, W. Wang, W., **“Combined Method for Calculating Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues”**, AIAA Journal, vol. 36, no. 3, pp. 428-431, 1998.

AI. APÊNDICE I: ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS (FORMULAÇÃO)

O objetivo deste capítulo é demonstrar de forma sucinta os elementos finitos utilizados neste trabalho. Os elementos são escritos baseados em Selke [Selke, 1990].

AI.1. ELEMENTO DE BARRAS

O elemento de barras pode ser deduzido de forma bastante simples (direta). Seja a barra sob tração da Figura 175.

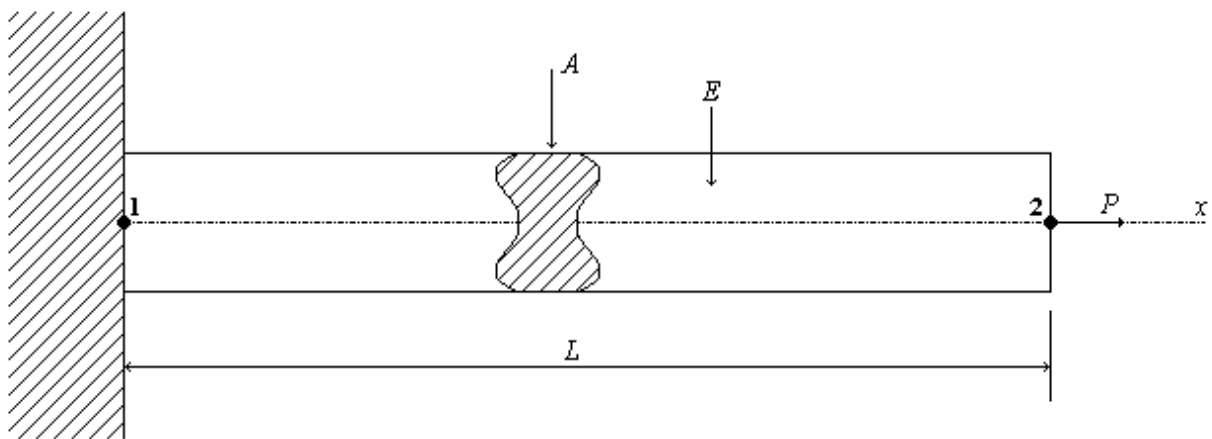


Figura 175: Elemento de barra.

Mediante equilíbrio, as forças nodais (P) apresentam a seguinte configuração:

$$P_2 = -P_1 \quad (121)$$

Admitindo-se um sistema linear estático e deformação unidirecional para o caso apresentado, tem-se a relação tensão/deformação apresentada da equação (122).

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (122)$$

onde, da mesma forma que já fora visto, σ_x é a tensão na direção x , E é o módulo de elasticidade transversal e ε_x é a deformação da direção x . Essa deformação, em termos do deslocamento vale:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (123)$$

onde L é comprimento da barra.

Aglutinando-se as expressões (121), (122) e (123), tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E(u_2 - u_1)}{L} \quad (124)$$

Admitindo-se a hipótese de área constante e tensão média na seção da barra, obtém-se:

$$\frac{P}{A} = \frac{E(u_2 - u_1)}{L} \quad (125)$$

$$P = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \quad (126)$$

As relações de carga estabelecidas na equação (121) reescrevem a expressão (126) para o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} P_2 = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \\ P_1 = -P_2 = -\frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \end{cases} \quad (127)$$

$$\begin{cases} \frac{EA}{L}u_2 - \frac{EA}{L}u_1 = P_2 \\ -\frac{EA}{L}u_2 + \frac{EA}{L}u_1 = P_1 \end{cases} \quad (128)$$

O sistema de equações definido pela equação (128) pode ser escrito na forma matricial, como mostra a equação (129).

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (129)$$

onde o primeiro termo da equação corresponde à matriz de rigidez do elemento e os demais termos (vetores) ao deslocamento e carga respectivamente.

No caso anterior, o sistema de coordenadas coincide com o eixo centroidal do elemento. Caso o eixo centroidal do elemento não esteja alinhado com o eixo do sistema (Figura 176), é necessário fazer uma transformação de coordenadas.

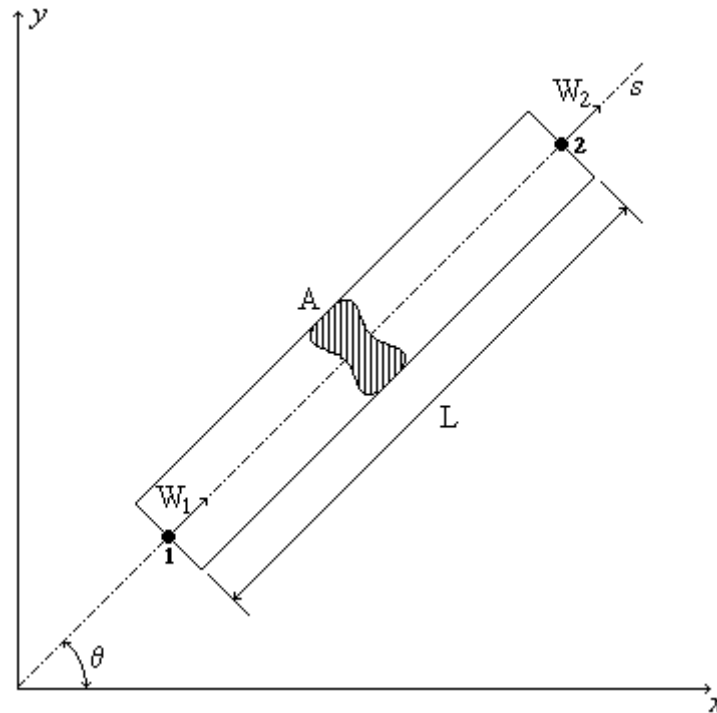


Figura 176: Representação da transformação de coordenadas do elemento de barras.

O eixo s da Figura 176 possui uma rotação de θ em relação ao eixo x . O deslocamento w pode ser decomposto em duas componentes no sistema de coordenadas x - y .

$$w = u \cdot \cos(\theta) + v \cdot \sin(\theta) \quad (130)$$

onde u corresponde à componente horizontal e v à vertical. A relação do deslocamento na coordenada local com o mesmo na global, é dada pela seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (131)$$

A força P é também decomposta nas direções u e v .

$$\begin{aligned} P_x &= P \cos(\theta) \\ P_y &= P \sin(\theta) \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{2x} \\ P_{1y} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (133)$$

Da relação dada pela equação (129), cuja escrita em termos das novas coordenadas locais é feita por:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (134)$$

obtem-se:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{2x} \\ P_{1y} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} \quad (135)$$

Que após operações de multiplicação resulta em:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{2x} \\ P_{1y} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} \quad (136)$$

AI.2. ELEMENTO TRIANGULAR DE DEFORMAÇÕES CONSTANTES (CST)

O elemento CST (*Constant Strain Triangle*) é dotado de um campo de tensões e deformações constantes no seu interior, o que em determinados casos, desaprova a sua utilização.

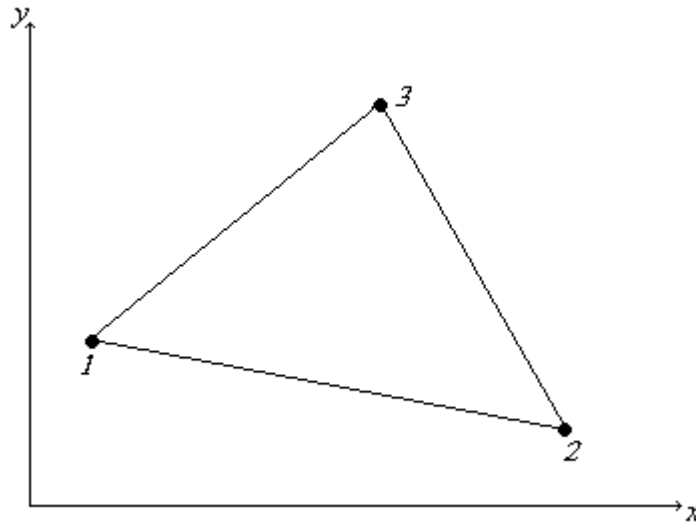


Figura 177: Elemento triangular de 3 nós.

Os deslocamentos nodais do elemento são definidos por uma função *Lagrangeana*, a qual interpola os nós com o sistema de coordenadas adotado (137).

$$N_i = a_i x + b_i y + c \quad (137)$$

onde a , b , c representam os coeficientes da função de interpolação e x_i e y_i correspondem às coordenadas dos nós do elemento.

Seja aplicado um deslocamento unitário nos nós do elemento, conforme demonstra a Figura 178. A matriz de coeficientes que interpola o elemento é definida pelo deslocamento unitário aplicado ciclicamente em todos os nós (138).

$$\begin{cases} N_i(x_1, y_1) = 1 \\ N_i(x_2, y_2) = 0 \\ N_i(x_3, y_3) = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} N_i(x_1, y_1) = 0 \\ N_i(x_2, y_2) = 1 \\ N_i(x_3, y_3) = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} N_i(x_1, y_1) = 0 \\ N_i(x_2, y_2) = 0 \\ N_i(x_3, y_3) = 1 \end{cases} \quad (138)$$

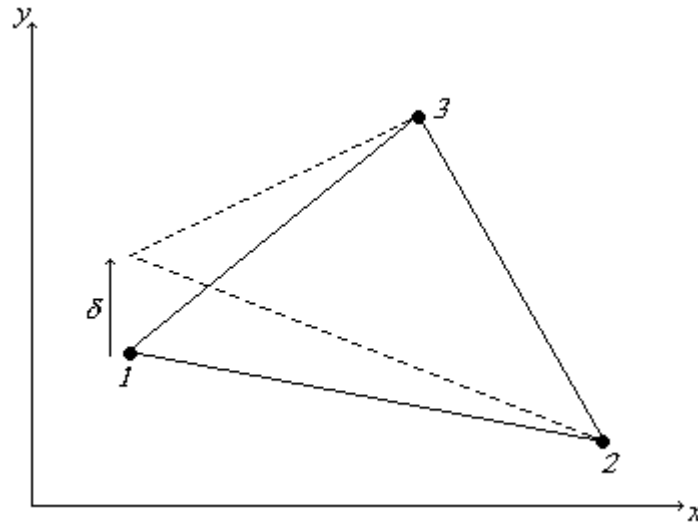


Figura 178: Deslocamento unitário aplicado no primeiro nó do elemento.

Os deslocamentos no sistema de coordenadas são então aproximados pelas funções de interpolação obtidas (139).

$$\begin{aligned} u_x &\approx N_1 u_{x1} + N_2 u_{x2} + N_3 u_{x3} \\ y_x &\approx N_1 u_{y1} + N_2 u_{y2} + N_3 u_{y3} \end{aligned} \quad (139)$$

Assim, as deformações podem ser obtidas pelas derivadas das funções de interpolação dos elementos, como observa-se na equação (140).

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \approx \frac{\partial N_1}{\partial x} u_{x1} + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_{x2} + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_{x3} \quad (140)$$

onde $\partial N_i / \partial x$ corresponde à derivada da função de interpolação do elemento no nó i .

A matriz das derivadas das funções de interpolação é denominada “matriz B ”, e relaciona os deslocamentos do elemento com suas respectivas deformações (141).

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{u} \quad (141)$$

Colocando a equação (141) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}_{xx} \\ \underline{\underline{\epsilon}}_{yy} \\ 2\underline{\underline{\epsilon}}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (142)$$

Utilizando o conceito empregado para definir o método dos elemento finitos (23) e ignorando as forças de corpo, tem-se:

$$\int_{A^e} \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\delta \epsilon}} dA - \int_{A^e} \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\delta \epsilon}} dA = 0 \quad (143)$$

$$\underline{\underline{\delta \epsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta u}} \quad (144)$$

Substituindo-se (144) em (143) e analisando-se o termo correspondente ao trabalho virtual de deformação, tem-se:

$$\int_{A^e} \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta u}} dA \quad (145)$$

$$\underline{\underline{u}}^T \int_{A^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta u}} dA \quad (146)$$

onde

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{A^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} dA \quad (147)$$

A área é determinada pelo determinante da matriz que envolve as coordenadas do elemento (148).

$$2A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (148)$$

AI.3. ELEMENTO QUADRILÁTERO BILINEAR ISOPARAMÉTRICO

Os elementos quadrangulares de quatro nós (Figura 179), com formulação bilinear isoparamétrica, possuem um desempenho superior aos elementos de deformação constantes apresentados anteriormente.

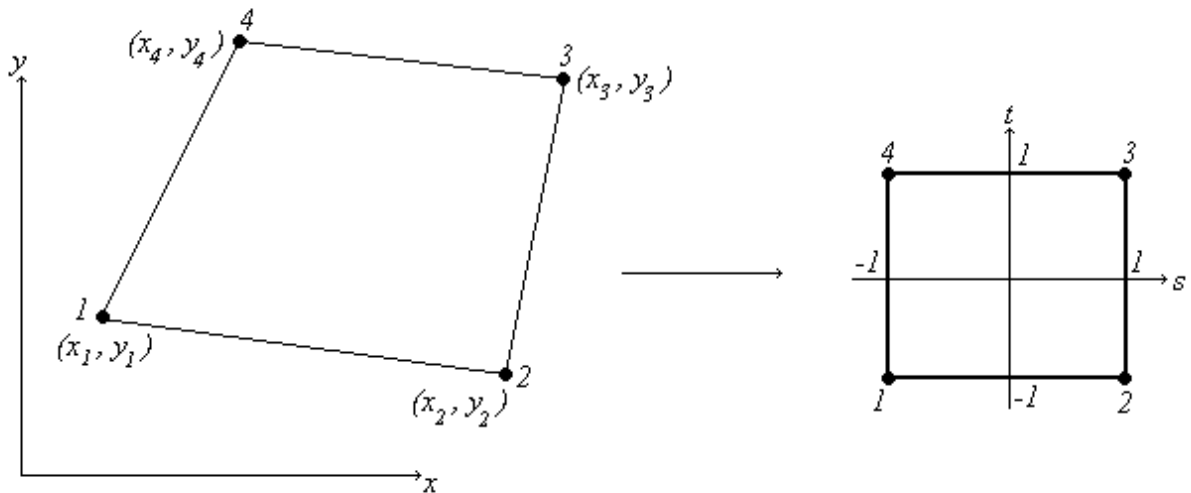


Figura 179: Elemento bilinear isoparamétrico.

Admitindo-se um deslocamento unitário nos nós do elemento, conforme Figura 180, definem-se as funções de interpolação.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t)
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

Os deslocamentos são dados em termos das funções de interpolação, assim como no caso anterior (CST).

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i u_{xi} \\
 u_y(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i u_{yi}
 \end{aligned}
 \tag{150}$$

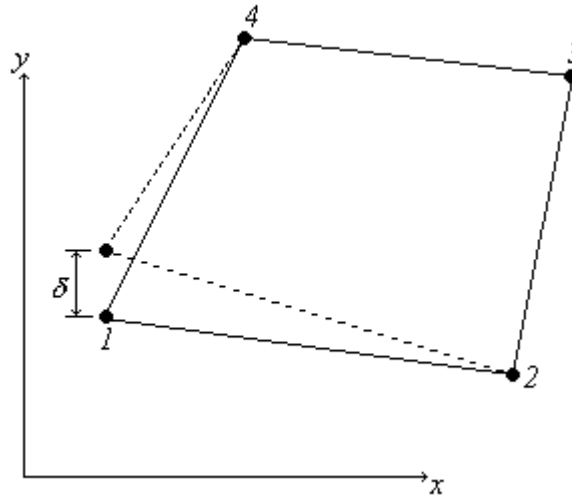


Figura 180: Deslocamento unitário aplicado no primeiro nó.

Da mesma forma, as deformações são escritas pelas derivadas das funções de interpolação.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}u \quad (151)$$

Colocando a equação (151) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{Bmatrix} \quad (152)$$

Entretanto, a matriz B , das derivadas das funções de interpolação deve ser obtida em relação ao sistema de coordenadas original. Utilizando-se as hipóteses de variação de x e y com s e t através das funções de interpolação

$$\begin{aligned}x(s, t) &= x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 + x_4 N_4 \\y(s, t) &= y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_3 N_3 + y_4 N_4\end{aligned}\tag{153}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial N_i}{\partial t}\end{aligned}\tag{154}$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}(s, t) = \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}\tag{155}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y}(s, t) = \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}\tag{156}$$

Colocando as equações (155) e (156) na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial s} \\ \frac{\partial N}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix}\tag{157}$$

obtém-se a matriz jacobiana de transformação, que é definida por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}\tag{158}$$

Com a inversa da matriz jacobiana é possível obter as derivadas das funções de interpolação e montar a matriz B . A matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$K^e = \int_{A^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} dA \quad (159)$$

A área do elemento é obtida pelo determinante da matriz jacobiana (160).

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (160)$$

AI.4. ELEMENTO HEXAÉDRICO TRILINEAR ISOPARAMÉTRICO

A formulação do elemento hexaédrico de 8 nós é semelhante ao apresentado para o elemento quadrangular isoparamétrico, porém com uma dimensão a mais, como mostra a Figura 181.

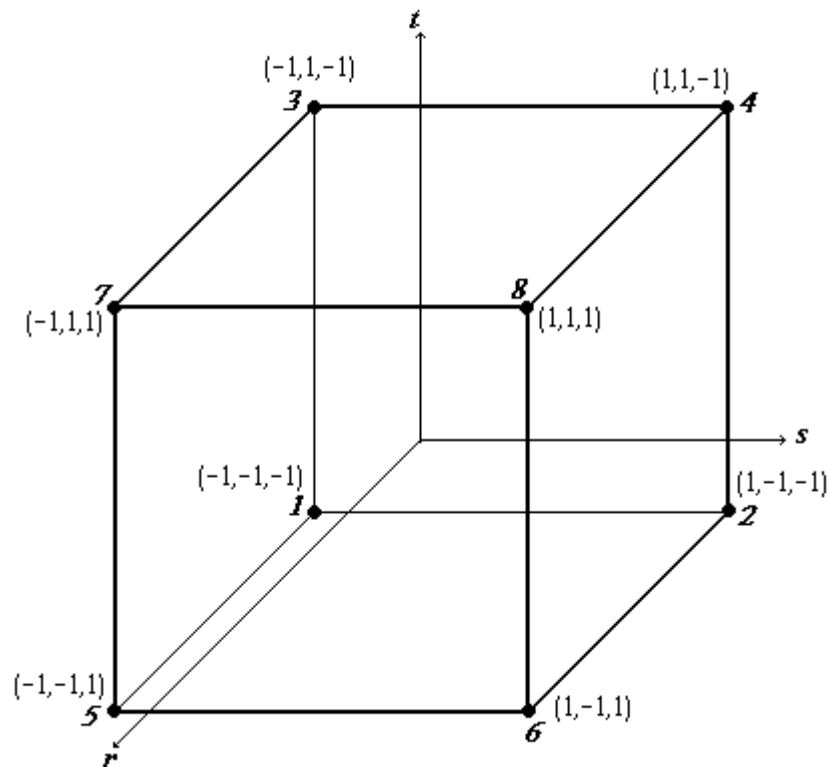


Figura 181: Elemento hexaédrico de 8 nós.

As funções de interpolação do elemento são:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1-s)(1-t)(1-r) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1+s)(1-t)(1-r) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1-s)(1+t)(1-r) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1+s)(1+t)(1-r) \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1-s)(1-t)(1+r) \\
 N_6 &= \frac{1}{8}(1+s)(1-t)(1+r) \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1-s)(1+t)(1+r) \\
 N_8 &= \frac{1}{8}(1+s)(1+t)(1+r)
 \end{aligned} \tag{161}$$

Adequando a formulação já apresentada do problema (151), tem-se:

$$\underline{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \tag{162}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{163}$$

e

$$u = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{x8} \\ u_{y8} \\ u_{z8} \end{Bmatrix} \quad (164)$$

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (165)$$

A matriz B e a matriz de rigidez do elemento são formadas respectivamente por:

$$\underline{\underline{B}}_{6 \times 24} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (166)$$

$$K^e = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} dV \quad (167)$$

AII. APÊNDICE II: DETALHES DO PROGRAMA IMPLEMENTADO

A linguagem usada para a escrita do programa foi o C++, compilado em plataforma intel, nos sistemas operacionais Windows NT 4.0 e LINUX.

O programa desenvolvido, conforme visto no CAPÍTULO 6.4 (IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL), se divide basicamente em três grandes blocos:

- Entrada e saída de dados;
- Cálculo por elementos finitos;
- Cálculo de otimização estrutural.

AII.1. ENTRADA E SAÍDA DE DADOS

A estrutura do arquivo de entrada é semelhante às utilizadas nos programas de elementos finitos convencionais. Sua escrita pode ser feita manualmente para qualquer tipo de malha ou análise, pois o arquivo é do formato de texto. Porém, para grandes malhas, é inviável o processo manual. Portanto, foram criados dois outros programas para a conversão de arquivos que contêm malhas dos softwares MSC.Patran e GID, conforme observa-se no esquema da Figura 182.

Os arquivos de entrada oriundos do Patran possuem informações de malha, carga e condições de contorno, enquanto que os convertidos do GID contemplam apenas dados de malha.

Da mesma forma que a leitura de dados, a escrita (interpretação dos resultados com códigos de cores) pode ser feita nos mesmos programas citados. Os dados de resposta que permitem visualização com códigos de cores podem também ser visualizados no esquema da Figura 182.

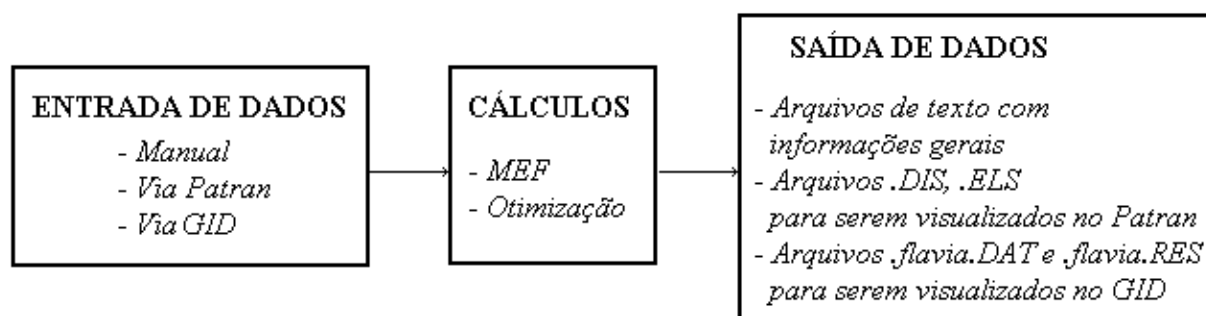


Figura 182: Esquema de gerenciamento de dados do programa e alguns arquivos gerados.

AII.2. ESQUEMA DOS CÁLCULOS EMPREGADOS

As possíveis soluções do programa são:

- análise linear estática;
- cálculo modal;
- otimização topológica.

As figuras a seguir demonstram, de forma esquemática, as rotinas de funcionamento do programa.

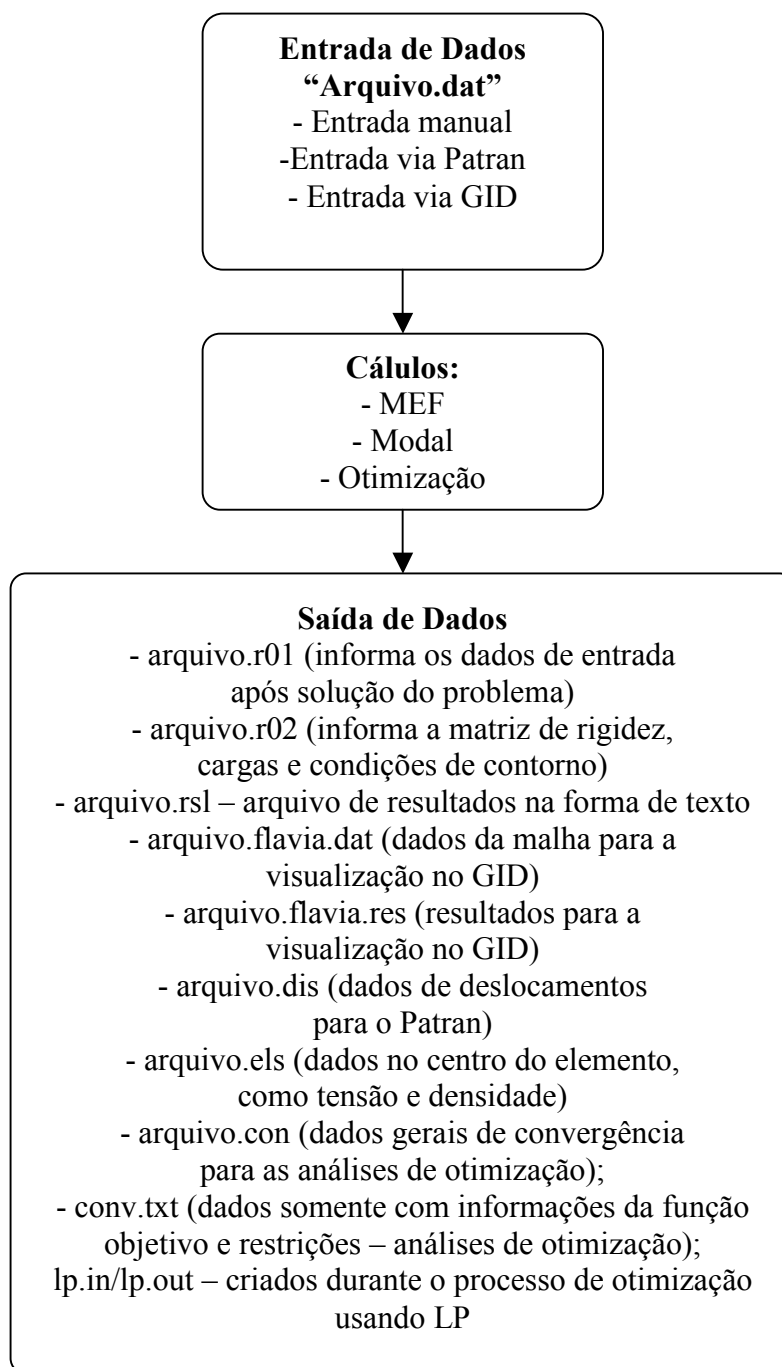


Figura 183: Esquema geral de funcionamento do programa e alguns arquivos gerados.

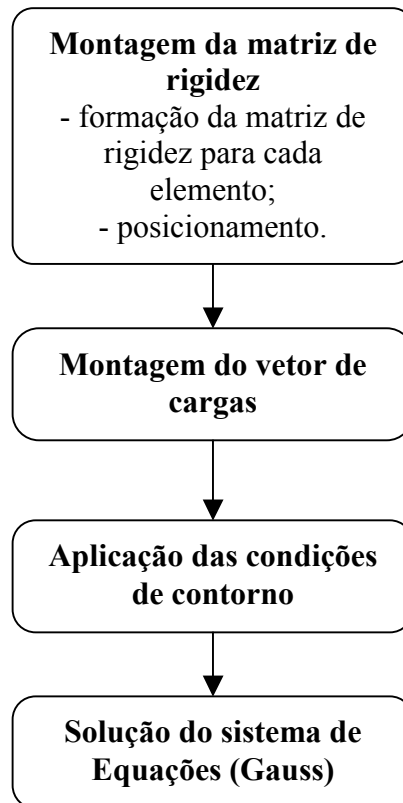


Figura 184: Solução linear estática pelo método dos elementos finitos.

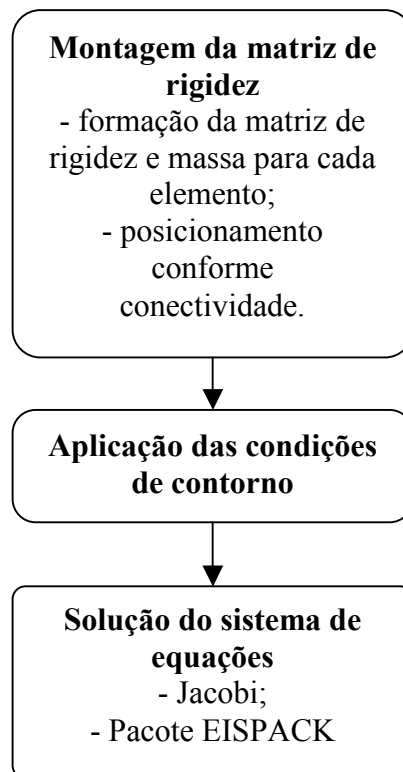


Figura 185: Solução modal.

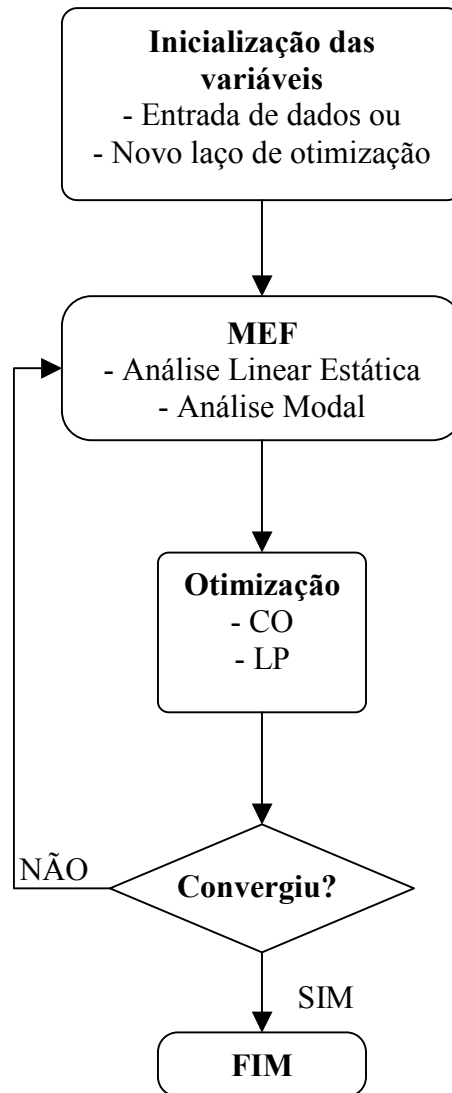


Figura 186: Esquema empregado na otimização.

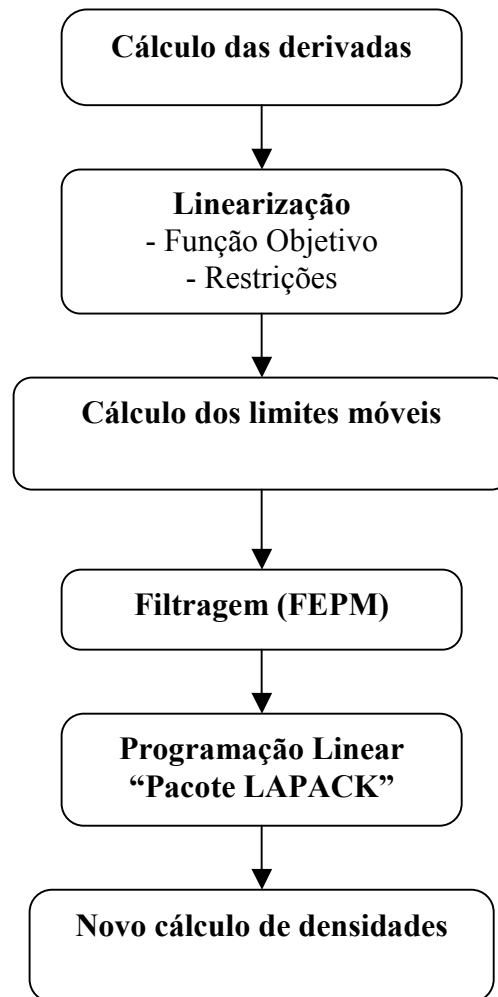


Figura 187: Detalhamento do processo de LP comentado na Figura 186.

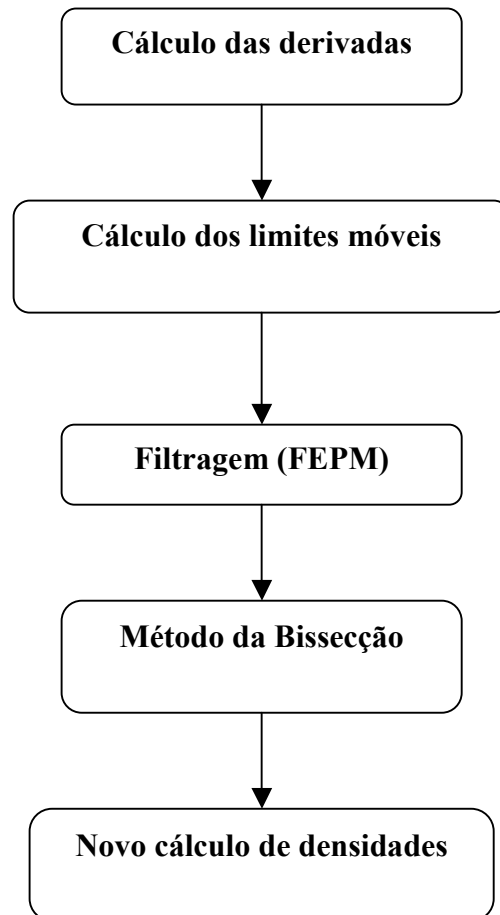


Figura 188: Detalhamento do processo de CO comentado na Figura 186.

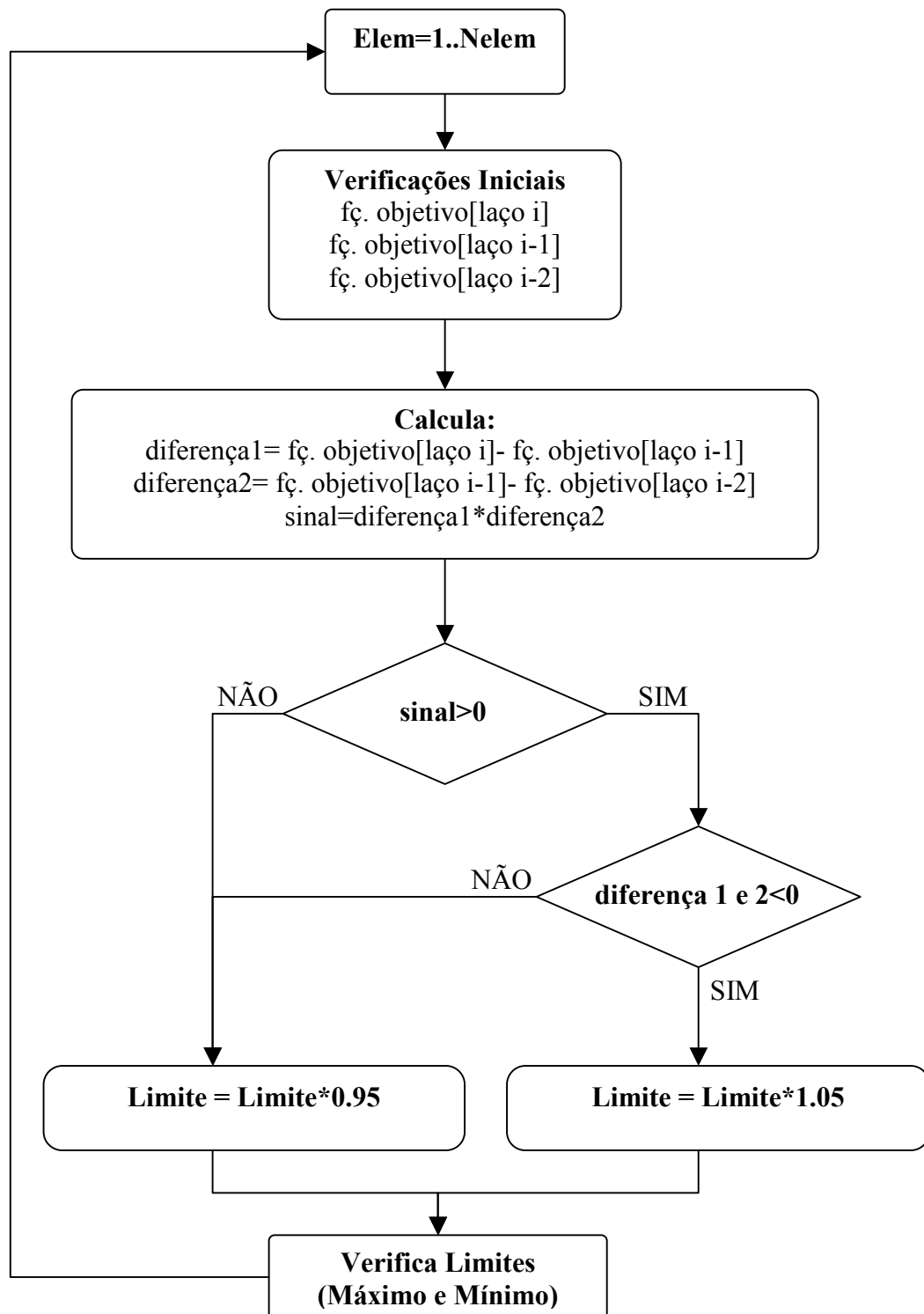


Figura 189: Esquema de alteração dos limites móveis para problemas de minimização.

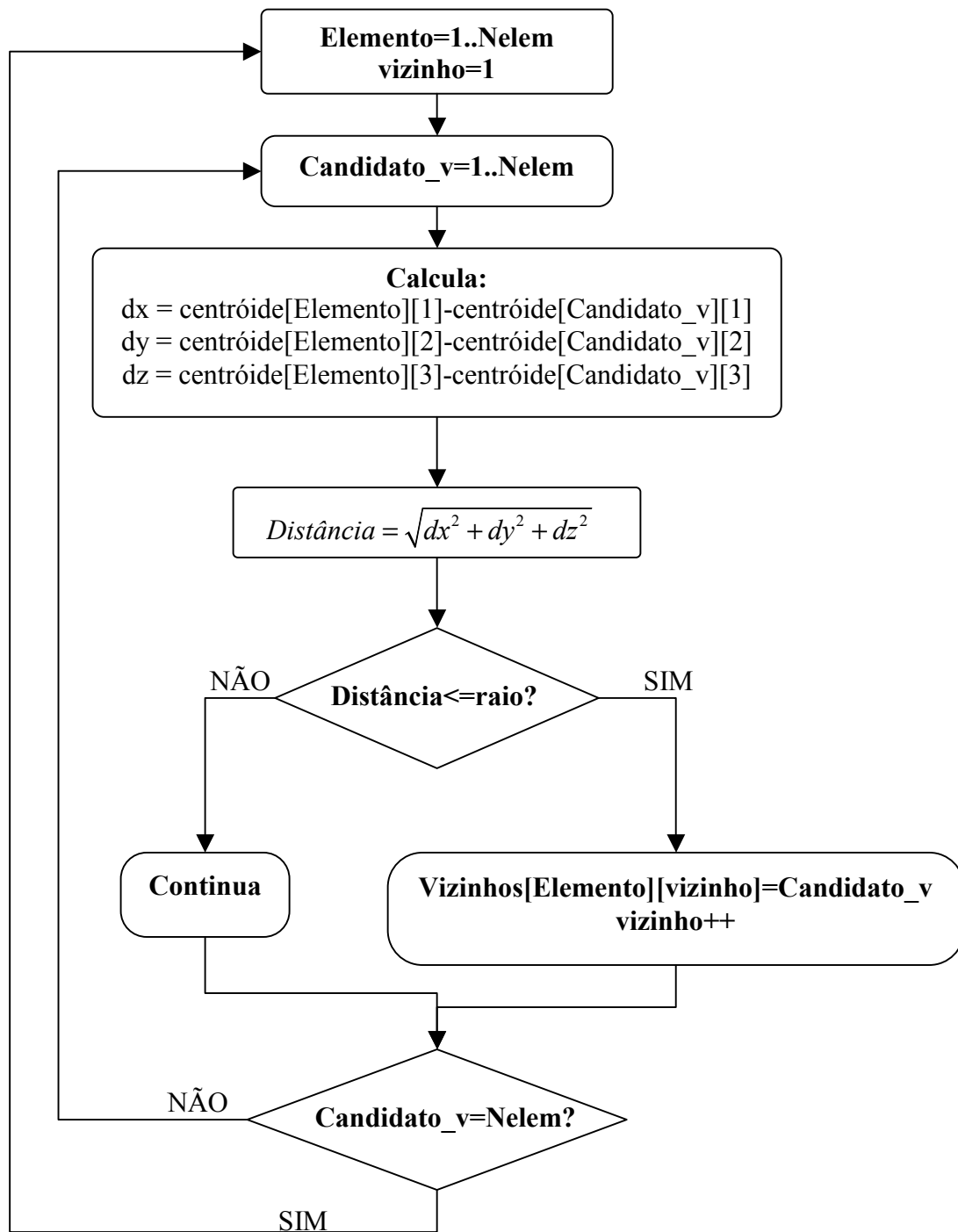


Figura 190: Determinação da vizinhança.

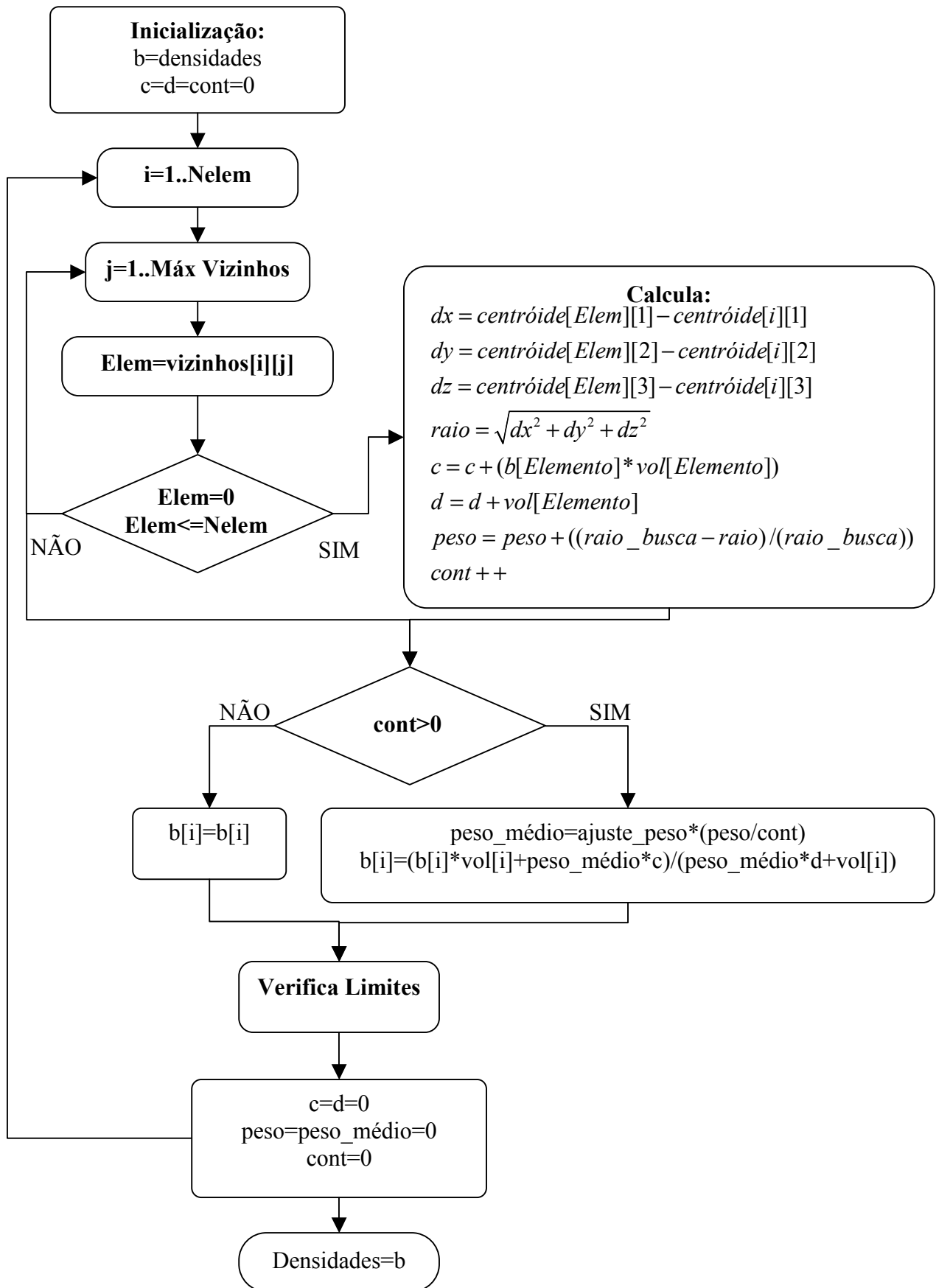


Figura 191: FEPM

$$\tan(2\theta) = \frac{2k_{ij}^{(k)}}{k_{ii}^{(k)} - k_{jj}^{(k)}}, \quad \text{para } k_{ii}^{(k)} \neq k_{jj}^{(k)} \quad (173)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \text{para } k_{ii}^{(k)} = k_{jj}^{(k)} \quad (174)$$

O procedimento do método consiste em rotacionar o sistema até diagonalizar completamente a matriz K , varrendo i e j de 1 até o número máximo de termos da matriz, sendo que a cada termo de i compete um laço completo de j .

A convergência é dita suficiente quando são obedecidos critérios como os descritos nas equações (175) e (176).

$$\frac{k_{ii}^{(l+1)} - K_{ii}^{(l)}}{k_{ii}^{(l+1)}} \leq 10^{-s} \quad (175)$$

$$\sqrt{\frac{k_{ij}^{(l+1)^2}}{k_{ii}^{(l+1)}k_{jj}^{(l+1)}}} \leq 10^{-s} \quad (176)$$

onde l corresponde ao passo de iteração anterior e s ao expoente usado no critério de convergência (geralmente utiliza-se $s = 12$).

As matrizes de autovalores e autovetores serão respectivamente λ e ϕ , onde cada termo da diagonal principal da matriz de autovalores (λ_{ii}) corresponde a uma coluna da matriz de autovetores ϕ_{ij} .

$$\lambda = P_N^T \cdot \dots \cdot P_1^T \cdot K \cdot P_1 \cdot \dots \cdot P_N \quad (177)$$

$$\phi = P_1 \cdot \dots \cdot P_N \quad (178)$$

AIII.2. SOLUÇÃO GENERALIZADA

Diferentemente do problema standard analisado anteriormente, tem-se no método de Jacobi generalizado a presença de uma matriz de massa diferente da matriz identidade [Bathe, 1996].

$$\frac{k_{ii}^{(k)}}{m_{ii}^{(k)}} = \frac{k_{jj}^{(k)}}{m_{jj}^{(k)}} = \frac{k_{ij}^{(k)}}{m_{ij}^{(k)}} \quad (186)$$

A equações (184), (185) e (186) demonstram que as submatrizes são múltiplos escalares, obtendo-se a solução trivial quando $\alpha = 0$ e $\gamma = -k_{ij}^{(k)}/k_{jj}^{(k)}$. Em geral, para resolver-se α e γ das equações (184) e (185) são definidos:

$$\begin{cases} \bar{k}_{ii}^{(k)} = k_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}_{jj}^{(k)} = k_{jj}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}^{(k)} = k_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ii}^{(k)} \end{cases} \quad (187)$$

$$\alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(k)}}{x} \quad (188)$$

$$\gamma = -\frac{\bar{k}_{ii}^{(k)}}{x} \quad (189)$$

Os valores de x são obtidos utilizando-se a expressão (190).

$$x = \max \left[\text{abs} \left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2} \right)^2 + k_{ii}^{(k)} k_{jj}^{(k)}} \right) \right] \quad (190)$$

Como as relações de α e γ são construídas de modo que M seja uma matriz positivo-definida, o valor da raiz da equação (190) deve ser maior que zero e x deve ter sempre valor não-nulo.

$$\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2} \right)^2 + k_{ii}^{(k)} k_{jj}^{(k)} > 0 \quad (191)$$

Os critérios de convergência para o método generalizado são em geral escritos não só em função dos termos da matriz em estudo (no caso anterior, apenas matriz de rigidez), mas sim, dos autovalores e das matrizes de rigidez e de massa. Assim, têm-se:

$$\frac{|\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}|}{\lambda_i^{(l+1)}} \leq 10^{-s} \quad (192)$$

$$\lambda_i^{(l)} = \frac{k_{ii}^{(l)}}{m_{ii}^{(l)}} \quad (193)$$

$$\lambda_i^{(l+1)} = \frac{k_{ii}^{(l+1)}}{m_{ii}^{(l+1)}} \quad (194)$$

e

$$\sqrt{\frac{k_{ij}^{(l+1)^2}}{k_{ii}^{(l+1)} k_{jj}^{(l+1)}}} \leq 10^{-s} \quad (195)$$

$$\sqrt{\frac{m_{ij}^{(l+1)^2}}{m_{ii}^{(l+1)} m_{jj}^{(l+1)}}} \leq 10^{-s} \quad (196)$$

válidos para todo i, j , tal que $i < j$.

Após obtida a diagonalização das matrizes de massa e rigidez, os autovalores e autovetores podem ser calculados respectivamente pelas expressões (197) e (198), obedecendo assim à normalização estabelecida na análise de sensibilidade dada pelas equações (93) e (94).

$$\lambda = \text{diag} \left(\frac{K^{l+1}}{M^{l+1}} \right) \quad (197)$$

$$\phi = P_1 \cdot \dots \cdot P_N \cdot \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M^{(l+1)}}} \right) \quad (198)$$

AIV. APÊNDICE IV: O MÉTODO DE LANCZOS

AIV.1. ELABORAÇÃO DO PROBLEMA

O método de Lanczos está fundamentado na transformação do problema generalizado de autovalores (179) em um problema Standard (168) de matriz tridiagonal [Bathe, 1996].

Arbitrando-se um vetor x_1 normalizado pela massa

$$x_1^T M x_1 = 1 \quad (199)$$

e gerando uma seqüência de vetores ortogonais, tem-se:

$$x_i^T M x_{i-1} = 0; x_i^T M x_i = 1; i = 2, 3, \dots \quad (200)$$

Assumindo-se uma seqüência de vetores acima do i^{th} , onde objetiva-se encontrar o vetor $i+1$, obtém-se uma expressão de x_{i+1} acompanhada dos dois vetores anteriores.

$$\gamma_{i+1} x_{i+1} = K^{-1} M x_i - \alpha_i x_i - \beta_{i-1} x_{i-1}; i = 2, 3, \dots \quad (201)$$

Os coeficientes α_i e β_{i-1} da expressão (201) são determinados de modo a obedecer-se a relação de ortogonalidade definida pelas equações (199) e (200):

$$x_i^T M x_{i+1} = 0; x_{i-1}^T M x_{i+1} = 0; x_{i+1}^T M x_{i+1} = 1 \quad (202)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (201) por $x_i^T M$ obtém-se a relação para α :

$$\alpha_i = x_i^T M K^{-1} M x_i \quad (203)$$

Da mesma forma, a expressão para β_{i-1} é obtida pela multiplicação de ambos os lados da expressão (201) por $x_{i-1}^T M$:

$$\beta_{i-1} = x_{i-1}^T M K^{-1} M x_i \quad (204)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 X &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 S &= (0, \dots, 0, \beta_n x_{n+1}) \\
 T &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \dots & & \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{211}$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (210) por $X^T M$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 X^T M K^{-1} M X &= X^T M X T \\
 X^T M K^{-1} M X &= T
 \end{aligned} \tag{212}$$

Reagrupando a expressão do problema modal

$$\begin{aligned}
 K \phi &= \lambda M \phi \\
 K^{-1} M \phi &= \frac{1}{\lambda} \phi \\
 M K^{-1} M \phi &= \frac{1}{\lambda} M \phi
 \end{aligned}$$

e definindo-se os autovetores do problema original como:

$$\phi = X \psi \tag{213}$$

obté-m-se:

$$M K^{-1} M X \psi = \frac{1}{\lambda} M X \psi \tag{214}$$

A multiplicação de ambos os termos da equação (214) por X^T

$$X^T MK^{-1}MX\psi = \frac{1}{\lambda}(X^T MX)\psi \quad (215)$$

$$T\psi = \frac{1}{\lambda}\psi \quad (216)$$

resulta no problema modal standard para uma matriz tridiagonal T (216), cujos coeficientes são obtidos pelas expressões (203), (205) e (208). Os autovetores do problema generalizado podem ser obtidos pela equação (213).

Organizando-se as equações (203), (205) e (208)

$$y_i = K^{-1}Mx_i \quad (217)$$

$$\alpha_i = X_i^T My_i = y_i^T Mx_i \quad (218)$$

$$z_i = \beta_i x_{i+1} = y_i - \alpha_i x_i - \beta_{i-1} x_{i-1} \quad (219)$$

obtêm-se as expressões necessárias para a determinação dos coeficientes da matriz “ T ”.

$$\beta_i = x_{i+1}^T MK^{-1}Mx_i = x_{i+1}^T My_i = y_i^T Mx_{i+1} = \frac{y_i^T Mz_i}{\beta_i}$$

$$\beta_i = \sqrt{y_i^T Mz_i} \quad (220)$$

AIV.2. ALGORITMO DE SOLUÇÃO

A solução do problema original de autovalores é dada a partir da solução do problema modal standard da matriz tridiagonal T .

Admitem-se os seguintes valores iniciais:

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{x^T Mx}}$$

$$\beta_0 = 0$$

A obtenção dos coeficientes da referida matriz tridiagonal T é feita pela seguinte seqüência de operações:

1. resolve-se y_i (217);
2. calcula-se α_i (218);
3. determina-se z_i (219);
4. calcula-se β_i (220);
5. calcula-se então o valor de x_{i+1} (221).

$$x_{i+1} = \frac{z_i}{\beta_i} \quad (221)$$