UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LARISSA WEYH MONZON

NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA NO ENSINO MÉDIO

- UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM USO DE OBJETO DE APRENDIZAGEM

PORTO ALEGRE

2012

LARISSA WEYH MONZON

NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA NO ENSINO MÉDIO

- UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM USO DE OBJETO DE APRENDIZAGEM

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Dra. Maria Alice Gravina

PORTO ALEGRE

2012

LARISSA WEYH MONZON

NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA NO ENSINO MÉDIO

- UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM USO DE OBJETO DE APRENDIZAGEM

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Dra. Maria Alice Gravina

BANCA EXAMINADORA

Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dr. Rogério Ricardo Steffenon
Universidade do Vale do Rio dos Sinos

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, minha eterna professora, exemplo de dedicação, devoção e honestidade.

Seu amor e amizade com certeza estão presentes nestas páginas.

Ao Fábio, meu companheiro, o qual me conforta, me apoia incondicionalmente e acredita nas minhas capacidades, muitas vezes mais que eu mesma.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Maria Alice Gravina pela dedicação, paciência, incentivo. Ela sempre acreditou neste trabalho, trazendo confiança para sua execução. As orientações sempre me engrandeciam, não somente para esse conhecimento, como também para minha autoestima. É meu exemplo de profissional do ensino.

Aos professores do Instituto de Matemática da UFRGS, que contribuíram para minha formação na Licenciatura e na Pós-graduação, trazendo vida a este trabalho.

Aos meus colegas de curso, principalmente as minha amigas Aline Fraga e Elisa Martins, companheiras, que tornaram muitos momentos do curso mais agradáveis e divertidos e, além do mais, repartiam suas experiências no ensino abrindo chances a vários debates e reflexões.

Aos meus alunos, que são o principal motivo para o meu aprimoramento e em especial aos alunos da turma 233 de 2011 da Escola Estadual La Salle de Campo Bom, que foram os sujeitos deste trabalho, mostrando sua dedicação e solidariedade. A essa escola, onde foi aplicada esta experiência, que considero minha porta de entrada para o ensino, onde me sinto a vontade e com confiança para expor e aplicar minhas ideias.

Às alunas da Licenciatura Mariângela Torre Dias e Sara Regina da Silva, pela confecção do objeto de aprendizagem “Números Complexos” utilizado nesta proposta, que escutaram com paciência e interesse os meus pedidos.

Ao Fábio, meu querido noivo, pelas importantes e indispensáveis traduções em inglês.

Aos meus familiares e amigos, pela compreensão das minhas inúmeras ausências nesses últimos anos.

RESUMO

A presente dissertação tem como propósito apresentar uma proposta didática para o ensino de números complexos e funções de variável complexa, fazendo uso de um objeto de aprendizagem.

Para o embasamento teórico, quanto ao processo de construção de conhecimento, referenciamos Vygotsky e Piaget. Também foi feita uma análise das tecnologias como ferramenta para o ensino e, em especial quanto às possibilidades que dizem respeito aos registros dinâmicos de representação semiótica.

A metodologia para conceber, realizar e analisar a proposta didática é a Engenharia Didática. Essa metodologia permitiu uma detalhada validação da sequência didática que integra o uso do objeto de aprendizagem "Números Complexos" com animações interativas, vídeos, explicações e exercícios. A sequência foi implementada em um terceiro ano do Ensino Médio.

Palavras chave: Educação matemática. Números Complexos. Funções de Variável Complexa. Tecnologias. Objeto de aprendizagem.

ABSTRACT

This work presents a suggestion of a didactical sequence for teaching complex numbers and functions in high school. The sequence supposes the use of the learning object "Complex Numbers" with interactive animations, videos and exercises.

As a theoretical frame to support our understanding of the knowledge construction process it was taken into account the Vygotsky´s theory and Piaget´s theory. A discussion about the potential of technologies as a teaching tool is also presented, specially about the possibilities related to dynamical semiotic representation in mathematics. The research methodology used was Didactical Engineering. With this methodology was possible to implemented and validate the didactical sequence.

Key words: Mathematical education. Complex numbers. Complex Variable Functions. Technologies. Learning objects.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática na escola básica não possui o objetivo de formar futuros matemáticos e nem de oferecer ferramentas para serem utilizadas mais tarde. Porém a matemática da escola deve contribuir para o desenvolvimento dos alunos: seus raciocínios lógicos, suas capacidades para visualizar, analisar e compreender o mundo. Enfim, ela deve capacitar o aluno para pensar e deduzir, para relacionar, questionar e tirar suas conclusões, em diferentes contextos e situações.

Acreditando nesse papel do ensino de matemática na escola básica e, como professora de matemática, busquei meu aprimoramento no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, o qual iniciei em março de 2010, para contribuir com um maior êxito no desenvolvimento dos meus alunos.

No início da minha carreira como professora de matemática, foi me proposto uma turma da terceira série do ensino médio, na qual leciono até hoje. Lecionar para essa série me trouxe uma enorme satisfação, pois na sua grade curricular está presente a Geometria Espacial e Analítica, assuntos que me despertam muito interesse. Além disso, trata-se de um conteúdo que os alunos podem visualizar, contextualizar e aplicar de uma forma bem natural, pois aborda muitos elementos que estão presentes no seu dia a dia.

Dentro dessa série, há também o ensino de números complexos, cujo conteúdo sempre foi penoso e difícil de se trabalhar. Os alunos não se interessavam, não o compreendiam e não conseguiam relacioná-lo com outra área, tornando-se assim um ensino isolado e sem sentido.

Desde a Licenciatura em Matemática, dedico-me em conhecer, trabalhar e me aprimorar nos softwares de matemática, o que não mudou durante a pós-graduação. Conforme Mariotti (2009), as ferramentas tecnológicas permitem promover o aprendizado da matemática.

Diante do desafio proposto pelo curso de mestrado, buscar um assunto dentro do ensino básico que possa ser aprimorado, e com as minhas inquietações perante o conteúdo de números complexos, coloquei-me o desafio de buscar fundamentação e conhecimentos para desenvolver uma proposta didática que contribuísse para o ensino de números complexos no ensino médio.

Com essa decisão tomada, envolvi-me em diversos questionamentos, dentre eles, cito os seguintes:

Podem-se modificar as condições do ensino escolar para tornar o estudo de números complexos mais interessante para os alunos?

O que poderia ser enfatizado no ensino dos números complexos dentro da sala de aula, no ensino médio?

Há a possibilidade de implementar um estudo introdutório de funções de variável complexa durante o ensino médio?

Quais são as possibilidades do uso de tecnologias para realizar este estudo?

Passei a buscar soluções a estes questionamentos, queria aprimorar o ensino dos números complexos, dar mais significado a ele e utilizar as tecnologias como recurso para a aprendizagem e como ferramenta motivacional para os alunos.

Nessa busca, encontrei algumas propostas em artigos e dissertações. Uma das propostas tratava do uso dos números complexos na resolução de problemas que são vistos em geometria analítica; outra proposta dizia respeito ao ensino através dos passos dados pelo desenvolvimento histórico do assunto e sua relação com a geometria no plano.

Analisando as sugestões encontradas constatei a importância que o contexto histórico do número imaginário e a sua relação com a geometria pode ter no ensino deste assunto. A interpretação geométrica das operações através de transformações no plano me motivou a fazer uso de software de geometria dinâmica para desenvolver um objeto de aprendizagem com textos explicativos e animações ilustrativas dos diferentes conceitos.

Vi que também poderia aprimorar mais essa ideia, ao interligar os conteúdos de números complexos e operações com funções de variável complexa, este um assunto que normalmente só é tratado no ensino superior. Ao analisar estes conteúdos percebi que poderia trabalhar com algumas das funções de variável complexa, pois aplicaria os conhecimentos adquiridos na interpretação geométrica das operações para então interpretá-las como transformações no plano.

Com essa ideia e buscando subsídios para esse fim, tomei conhecimento do vídeo Dimensões[1], Este vídeo ajudou muito na concretização da minha proposta, pois ele define número complexo usando uma abordagem histórica, trabalha com as operações sob um ponto de vista geométrico e ainda traz uma introdução do estudo das funções de variável complexa.

Para implementar minha proposta, vi a necessidade de construir um ambiente que organizasse o material didático a ser utilizado, a saber: o vídeo e as animações manipulativas construídas no software Geogebra, e junto as questões a serem propostas aos alunos. Assim, foi construído, com o auxilio de duas bolsistas[2] engajadas em projeto financiado pela Secretaria de Educação a Distância da UFRGS, o material didático digital "Números Complexos"[3]. A concepção do material foi feita pela autora dessa dissertação e a sua implementação foi feita pelas bolsistas.

O material didático foi projetado e implementado tendo-se em mente a questão norteadora de nossa investigação: **através de recursos tecnológicos na forma de objeto de aprendizagem, é possível implementar um ensino introdutório de Funções de Variável Complexa na educação escolar de nível médio?**

Esta dissertação trata de responder esta pergunta. No capítulo 2, foi desenvolvida a análise teórica que verifica as possibilidades de aprimorar o ensino, buscando conhecimentos em relação ao desenvolvimento cognitivo, influenciados por Piaget e Vygotsky. Neste capítulo também é analisado o conteúdo relativo a números complexos de livros didáticos e dificuldades de aprendizagem que estão documentadas em outras pesquisas. Finalizamos o capítulo discutindo o potencial do uso das tecnologias e sua influência nos registros semióticos.

O capítulo 3 aborda uma interpretação do desenvolvimento histórico dos números complexos até sua legitimidade como saber matemático. São apresentadas as dúvidas, divergências e inquietações, de cada época, até sua aceitação, quando não restavam mais impasses em relação a sua existência. Trouxe esse

---

1 Referências e maiores detalhes deste vídeo, encontram-se no capítulo 4.

2 Mariângela Torre Dias e Sara Regina da Silva (alunas do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS).

3 Disponível em: http://www6.ufrgs.br/espmat no link Biblioteca Virtual.

desenvolvimento histórico, pois é ele que mostra a importância da interpretação geométrica desses números, na qual se baseou a proposta didática que apresento neste trabalho.

A apresentação do conteúdo sobre números complexos e funções de variável complexa é feita no capítulo 4. Para esta apresentação usei o próprio objeto de aprendizagem "Números Complexos" e procurei ilustrar o dinamismo das animações que tratam de esclarecer os diferentes conceitos.

O capítulo 5 trata da concepção da proposta didática e da análise para sua validação. A metodologia de investigação escolhida foi a Engenharia Didática, a qual me permitiu organizar, analisar e validar esta proposta.

Finalmente, o capítulo 6 traz as considerações finais, que são os resultados e reflexões dessa experiência como professora atuante e, como os anos do mestrado influenciam na minha postura em sala de aula.

Nos apêndices, apresento as folhas de atividades, as quais foram distribuídas aos alunos durante a prática e foram fontes para a análise *a posteriori.*

2 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA ESCOLA BÁSICA

Esta dissertação pretende trazer uma proposta pedagógica inovadora que possa auxiliar os professores de matemática do ensino básico no conteúdo de números complexos.

Para justificar e ajudar na compreensão das decisões tomadas na construção desta proposta (capítulo 5) são apresentadas neste capítulo considerações sobre: o ensino e o aprendizado escolar; o ensino dos números complexos na escola; a linguagem matemática e o suporte da tecnologia.

2.1 O ensino e o aprendizado escolar

Um dos principais interesses de pesquisadores, educadores, governantes e especialistas em educação é o progresso da educação. Com este mesmo intuito, esta pesquisa tem o objetivo de aprimorar o ensino de números complexos dentro do ensino médio.

Existem diversas áreas do conhecimento que possuem a finalidade de contribuir para o ensino e a aprendizagem, dentre elas a psicologia da educação. Assim, busquei bases teóricas na psicologia com a intenção de qualificar minha prática.

A abordagem cognitiva neste trabalho consiste em procurar descrever o funcionamento que possibilita ao aluno compreender, efetuar e utilizar ele próprio os procedimentos matemáticos propostos no ensino de matemática. Este estudo se baseia principalmente nas teorias de Piaget e Vygotsky, nas ideias do construtivismo e sócio construtivismo.

A pergunta chave, de acordo com Lerner (1995), que é também a pergunta fundamental para esta pesquisa é: como fazer que os alunos passem de um estado de menor conhecimento a um estado de maior conhecimento em relação a cada um dos conteúdos escolares?

Basicamente pode-se dizer que construtivismo é a ideia de que o indivíduo se constrói diante das interações com o meio, dia após dia. Diante dessas interações o homem vai adquirindo seus conhecimentos e saberes, e, desenvolve-se. Menciona Carretero (1997, p. 10): “O conhecimento não é uma cópia da realidade, mas, sim, uma construção do ser humano”.

As teorias de Piaget e Vigotsky, para alguns autores, são diferentes, mas busco, em cada uma delas, problemáticas que se vinculam a este estudo. A principal ideia de Piaget e Vigotsky é a mesma: o desenvolvimento cognitivo, por isso se pode relacioná-los.

Segundo Lerner (1995), a teoria piagetiana prioriza o desenvolvimento operatório ou o funcionamento cognitivo geral, enfatiza a produção individual do conhecimento e diminui a intervenção do professor. Por outro lado, a teoria vygotskiana prioriza a transmissão dos conteúdos escolares, a construção social e ainda enfatiza o papel do professor como fundamental para a aprendizagem.

A interlocução destas duas teorias me parece fundamental no entendimento do processo da aprendizagem. Por um lado o aluno precisa se desenvolver individualmente e, por outro lado, também precisa dos saberes culturais que a escola trata de ensinar e aqui o papel do professor é fundamental. Com a interlocução das teorias pode-se pensar em um processo educativo em que o aluno é o centro – é ele que investiga , é ele que age - e o professor tem o papel de guiar, de orientar as suas ações. Segundo Castorina (1995): “*A explicação vygotskiana da internalização cultural completaria a teoria piagetiana ou preencheria suas lacunas referentes à intervenção dos fatores sociais na formação dos conhecimentos*” (p. 42).

Piaget faz a análise mais detalhada do desenvolvimento cognitivo. Segundo ele (*apud* Lerner, 1995), é na fase operacional formal, na qual os alunos sujeitos dessa pesquisa se encontram, em que eles têm a capacidade de formular e comprovar hipóteses e isolar variáveis. O adolescente adquire um maior poder de abstração, ante um problema, realiza as possíveis interações com os elementos desse. O seu raciocínio é hipotético dedutivo, ou seja, ele tira conclusões e analisa suas hipóteses, para validar ou criar novas.

Entretanto, segundo Carretero (1997), as pesquisas posteriores a Piaget, mostraram que as habilidades do pensamento formal não se aplicam a todos os adolescentes de uma forma única e, portanto, sua utilização não está garantida, “*podemos dizer que o raciocínio formal não é, em realidade, todo o formal que se* *poderia esperar*" (Carretero, 1997, p. 38). Assim, é papel do educador propor atividades escolares que possam estruturar essas habilidades cognitivas.

Um dos recursos que o professor pode utilizar para estruturar essas habilidades seria o uso de material figurativo-concreto, que pode fazer a relação de um saber matemático figurativo para sua representação concreta.

Moysés (1997) destaca a importância de o professor estar alerta ao uso desse tipo de material, que leva a abstrações e a amplas generalizações. Este recurso pode ajudar o aluno a passar da forma figurativo-concreta de pensamento para o pensamento lógico-conceitual, onde ele não precisa mais do concreto para aplicar os conceitos. Ressalta também, que esse material deve remeter aos conteúdos estudados e não ser empregado sem relações.

A mesma autora traz pesquisas que mostram melhores resultados quando há interação entre estímulos verbais (fala do professor) e visuais (material figurativo-concreto) na aprendizagem.

Segundo Vygotsky (1998), na aprendizagem é fundamental a interação social.

> Vigotsky conclui que as origens das formas superiores de comportamento consciente deveriam ser achadas nas relações sociais que o indivíduo mantém com o mundo exterior. Mas o homem não é apenas o produto de seu ambiente, é também um agente ativo no processo de criação deste meio. (VIGOTSKY, LURIA, LEONTIEV, 1998, p. 25)

Uma ideia importante na teoria de Vygotsky é a de zona de desenvolvimento proximal que é definida pela distância entre o nível de desenvolvimento real, onde são solucionados problemas independentemente, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado onde as soluções de problemas acontecem sob a orientação de um adulto, ou em colaboração/imitação de outros colegas mais capazes. Trata-se da possibilidade do aprendiz fazer algo, através da imitação ou colaboração, que não era capaz de fazer sozinho.

Para Moysés (1997), a discussão sobre formação de conceitos está inserida nos trabalhos de Vygotsky como uma extensão de suas pesquisas quanto ao processo de internalização[4]. Para Vygotsky há os conceitos espontâneos e científicos. Os primeiros seriam os conceitos naturais, em que as crianças aprendem no seu dia-a-dia. Já os conceitos científicos são aqueles ensinados e transmitidos intencionalmente, principalmente são os conceitos que a escola trata de ensinar.

A principal tarefa do professor no ensino dos conceitos científicos é fazer com que eles tenham ligação com os conceitos mais amplos já construídos pelo indivíduo. Vygotsky enfatiza a importância da interação entre professor/aluno para que aconteça a internalização desses conceitos. Esta interação depende de estratégias didáticas que coloquem o professor como mediador da construção de conhecimento – de um lado está o aluno com seus processos cognitivos e de outro lado está o saber objeto de aprendizagem. Segundo a teoria piagetiana, os indivíduos precisam ser os guias de suas próprias experiências e precisam ter liberdade para desenvolver seus conhecimentos e processos cognitivos, de forma individual (Lerner, 1995). Assim, não basta simplesmente a apresentação de um novo saber ao aluno para que ele aprenda, mas também é necessário e indispensável que ele construa esse saber mediante sua própria experiência interna. Seria o conceito de recontextualização trazido por Moysés (1997).

As considerações teóricas feitas nesta seção mostram que o professor está frente ao desafio de propor aos seus alunos material e situações que permitam um desenvolvimento de seus alunos que depende tanto das interações sociais quanto de processos interiores individuais. Nas palavras de Piaget (*apud* Lerner, 1995): "*É preciso saber dirigi-los deixando-os livres ao mesmo tempo*" (p. 88).

2.2 O ensino de números complexos

Nesta seção faço considerações sobre o ensino dos números complexos, baseadas em documentos do Ministério da Educação e na análise de livros didáticos. Também faço considerações sobre as pesquisas já desenvolvidas referentes às dificuldades encontradas no ensino deste assunto.

---

[4] Internalização acontece no desenvolvimento do ser, onde as crianças começam a utilizar os comportamentos externos que estão sendo observados.

2.2.1 As orientações nacionais

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) é publicação do Ministério da Educação com o intuito de articular as competências gerais que se pretende promover com o ensino médio. Apresenta ainda uma série de sugestões de práticas educativas e de organização de currículos, em termo nacional.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (PCN+, 2002, p. 111)

Pode-se também destacar dos PCN+ a importância da resolução de problemas, colocar o aluno como investigador, como atuante no seu conhecimento.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios**. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos**, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (grifo nosso, PCN+, 2002, p. 112, *grifo nosso*).

Ao tratar-se de competências, que seriam qualificações humanas amplas e múltiplas, os PCN+ trazem três competências gerais: comunicar e representar, investigar e compreender, contextualizar social ou historicamente.

Especificamente dentro da área da matemática são destacadas algumas competências. Listo aquelas que podem ser contempladas e expostas no ensino de números complexos quando se faz uso do objeto de aprendizagem “Números Complexos”[5]:

- Comunicar e representar: se dá quando o aluno é instigado a participar das aulas, dar suas ideias e opiniões, expressar suas resoluções de forma dissertativa.

- Investigar e compreender: se dá na investigação do aluno diante dos recursos computacionais que podem ser integrados no processo de ensino; objetos de aprendizagem são recursos que permitem a manipulação de animações que tratam de esclarecer os conceitos matemáticos.

- Contextualizar social ou historicamente: se dá quando o contexto histórico em que surge o novo saber é apresentado ao aluno.

Entre as competências explicitadas com mais detalhe nos PCN+, específicas para o ensino de matemática e que podem ser exploradas em nossa proposta didática para o ensino de números complexos destacamos:

- Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica;

- Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações;

- Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra, ou seja, fazer a conversão de registros.

- Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema;

- Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica;

- Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada;

---

[5] Objeto referido no capítulo de Introdução e a ser apresentado, de forma detalhada, no próximo capítulo.

- Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia;

- Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas.

O ensino de Matemática no Ensino Médio é dividido nos seguintes eixos pelos PCN+: Álgebra - números e funções, Geometria e Medidas e Análise de Dados. O documento engloba o ensino de números complexos no primeiro item Álgebra: *"*Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais" (PCN+, 2002, p. 120).

Quando trata diretamente como os conteúdos devem ser trabalhados, não dá a devida importância ao conjunto dos números complexos como deveria dar.

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (PCN +, 2002, p. 122)

Como salienta Oliveira (2010), mesmo isolado dos estudos de equações, o conjunto dos números complexos não perde seu significado, mesmo para alunos que não vão seguir estudos universitários. Isto porque é conteúdo que está estritamente relacionado com estudos que já foram vistos de outros campos numéricos. E também é conteúdo que pode estar presente no estudo de funções, se pretende ampliar este universo para além das funções de variável real – esta uma sugestão desta dissertação.

Diante da análise dos PCN+, constata-se que as competências nele elencadas podem ser contempladas em proposta que trate do ensino de números complexos. Além do mais, o ensino desse conteúdo pode articular duas áreas da matemática escolar – álgebra e geometria - este um aspecto que o PCN+ destaca como importante e que deve ser considerado como relevante na constituição de uma grade curricular.

2.2.2 Os livros didáticos

Nesta seção, analisar-se-á a forma como é tratado o conteúdo de números complexos nos livros didáticos. Três livros foram consultados, e serão chamados de A, B e C. Estes livros foram distribuídos no decorrer do ano de 2011 para as escolas públicas para serem analisados pelos professores e para uma possível escolha como recurso didático, a serem distribuídos a todos os alunos.

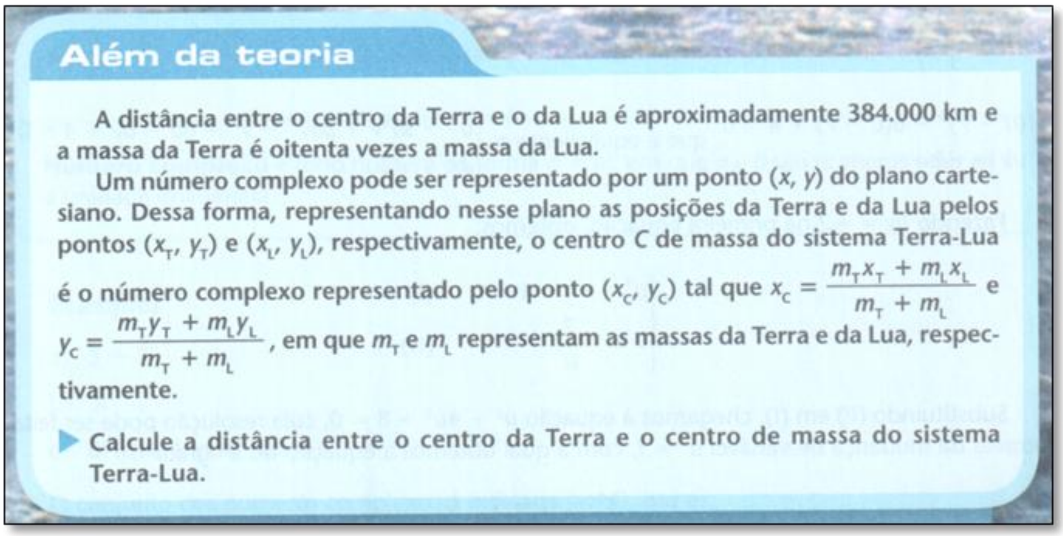
Esta análise está dividida em tópicos, e é realizada pela própria autora, examinando cada livro e também utilizando o Guia de Livros didáticos disponibilizado pelo MEC.

- Referente à introdução do assunto:

Dos três livros analisados, os livros A e B iniciam sua explicação pela história dos números complexos. Porém o livro A realiza tal abordagem de forma equivocada, menciona que a necessidade de resolver equações do 2º grau que levou os matemáticos a procurarem um conjunto onde o quadrado de um certo número pudesse ser negativo.

O livro B, contudo, contextualiza historicamente de maneira correta, e ainda, faz o comentário da forma errônea que alguns livros, como o A, apresentam.

Já o livro C, como incentivo para o assunto, traz um problema contextualizado (Figura 1), que apresenta o número complexo como um ponto. Mas o problema apresentado faz uma abordagem bem complexa desse assunto, trazendo bastante dificuldade de compreensão.



Além da teoria

A distância entre o centro da Terra e o da Lua é aproximadamente 384.000 km e a massa da Terra é oitenta vezes a massa da Lua.

Um número complexo pode ser representado por um ponto (x, y) do plano cartesiano. Dessa forma, representando nesse plano as posições da Terra e da Lua pelos pontos (x_T, y_T) e (x_L, y_L), respectivamente, o centro C de massa do sistema Terra-Lua é o número complexo representado pelo ponto (x_C, y_C) tal que $x_C = \dfrac{m_T x_T + m_L x_L}{m_T + m_L}$ e $y_C = \dfrac{m_T y_T + m_L y_L}{m_T + m_L}$, em que m_T e m_L representam as massas da Terra e da Lua, respectivamente.

▶ Calcule a distância entre o centro da Terra e o centro de massa do sistema Terra-Lua.

Figura 1 - Problema de introdução aos números complexos do livro C

Este mesmo livro, posteriormente, traz um problema que origina uma equação cúbica, explicando a origem do número complexo nesse tipo de equação.

- Referente à definição:

O livro A define o conjunto dos números complexos como sendo todos os pares ordenados de números reais que satisfazem as propriedades da igualdade, adição e multiplicação. É interessante o livro definir número complexo como par ordenado de números reais; mas ele não apresenta figura que mostre esse número no plano cartesiano. O livro inicia o assunto com uma explicação histórica baseada na resolução das equações cúbicas, onde surgem as raízes quadradas de números negativos. A definição como um par ordenado não é colocada em relação com as raízes negativas, e assim a forma de apresentação do assunto fica sem muito sentido.

É depois de trabalhar com alguns exemplos usando a definição através de par ordenado que leva esse par ordenado para o plano e define o par $(0,1)$ como a unidade imaginária i.

O livro B define primeiramente a unidade imaginária como $i = \sqrt{-1}$. Trabalha com resoluções de quadráticas utilizando agora esse número e define a forma algébrica de todo complexo como $a + bi$. E, posteriormente, define o conjunto dos números complexos como ampliação dos reais.

Já o livro C amplia o conjunto dos números reais, em virtude da sua insuficiência na radiciação, e define a unidade imaginária pela condição: $i^2 = i.i = -1$ e, partindo desse conceito, apresenta todo complexo da forma $a + bi$ e chama como forma algébrica do número.

- Quanto às representações apresentadas:

O livro A apresentou o complexo, inicialmente, como par ordenado; é mais adiante que ele apresenta a forma $a + bi$.

Além disso, trabalha com o conjugado na forma algébrica e geométrica, mas apresenta todas as propriedades do conjugado interpretando algebricamente, o que torna um processo complexo, longo e desnecessário, fazendo com que o aluno só repita procedimentos de difícil assimilação.

O módulo de um número complexo é apresentado como $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, e infelizmente não é feita a interpretação geométrica como distância. O autor poderia fazer facilmente esta interpretação usando o Teorema de Pitágoras, que é conteúdo já estudado pelos alunos e assim seria interessante ser retomado em outro contexto. O livro demonstra algebricamente várias propriedades do módulo; sob o ponto de vista geométrico seriam demonstrações mais simples.

O argumento de um número complexo é definido no plano complexo. E posteriormente a isso, é apresentada a forma trigonométrica do complexo.

O livro B apresenta a representação geométrica do número como ponto, apresentando o plano Argand-Gauss, e posteriormente identifica os números com vetores. Ele define geometricamente o módulo e o argumento. Definidos o módulo e o argumento, o autor obtém a forma trigonométrica, ou polar, através da forma algébrica, fazendo as devidas substituições por definições trigonométricas no triângulo retângulo.

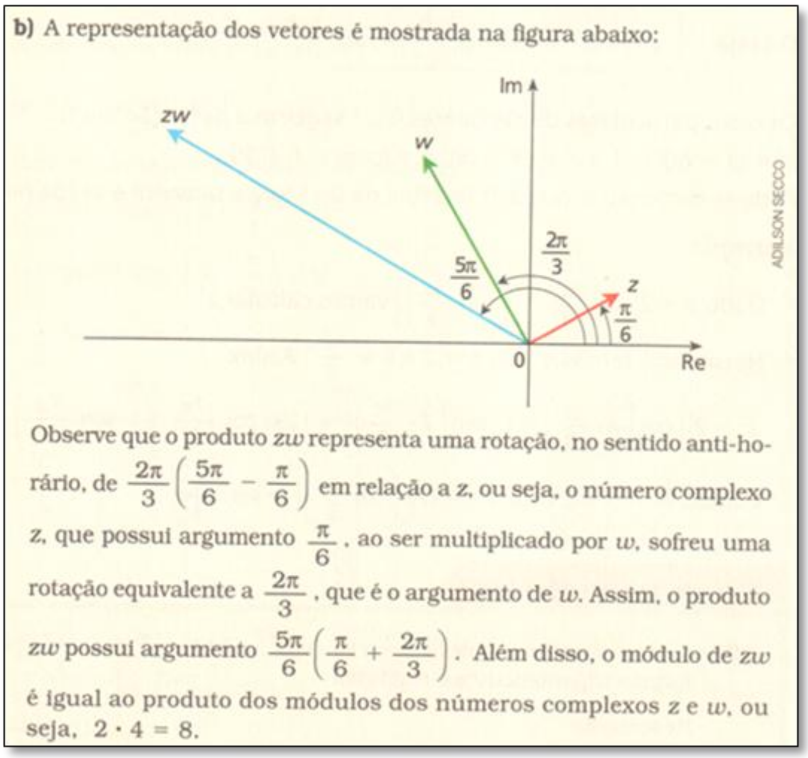
O livro C inicia pela forma algébrica do número complexo, definindo igualdade, conjugado (sem a interpretação geométrica). Parte para a representação geométrica, de uma forma interessante, iniciando com a reta numérica, posicionando os reais, e posteriormente falando dos demais pontos representantes dos complexos. A representação trigonométrica é apresentada como coordenadas polares no plano complexo.

- Em relação às operações com números complexos:

No livro A, o quociente entre dois complexos é analisado, primeiramente, na forma algébrica do número, posteriormente, a definição de conjugado. Logo após a apresentação da forma trigonométrica, o autor trabalha com a multiplicação nesse formato, comentando sobre a rotação do número nessa operação; novamente é trabalhado com o quociente, mas nessa nova forma, entretanto não é dada nenhuma interpretação geométrica para essa operação.

Demonstra-se a potenciação na forma trigonométrica, pela fórmula de De Moivre, e a radiciação.

O livro B apresenta as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, através dos processos algébricos. Após apresentar a forma trigonométrica, constitui algebricamente, as fórmulas para a multiplicação e divisão nessa forma. Somente no exemplo realiza uma análise geométrica da multiplicação, que pode ser vista na Figura 2.


b) A representação dos vetores é mostrada na figura abaixo:

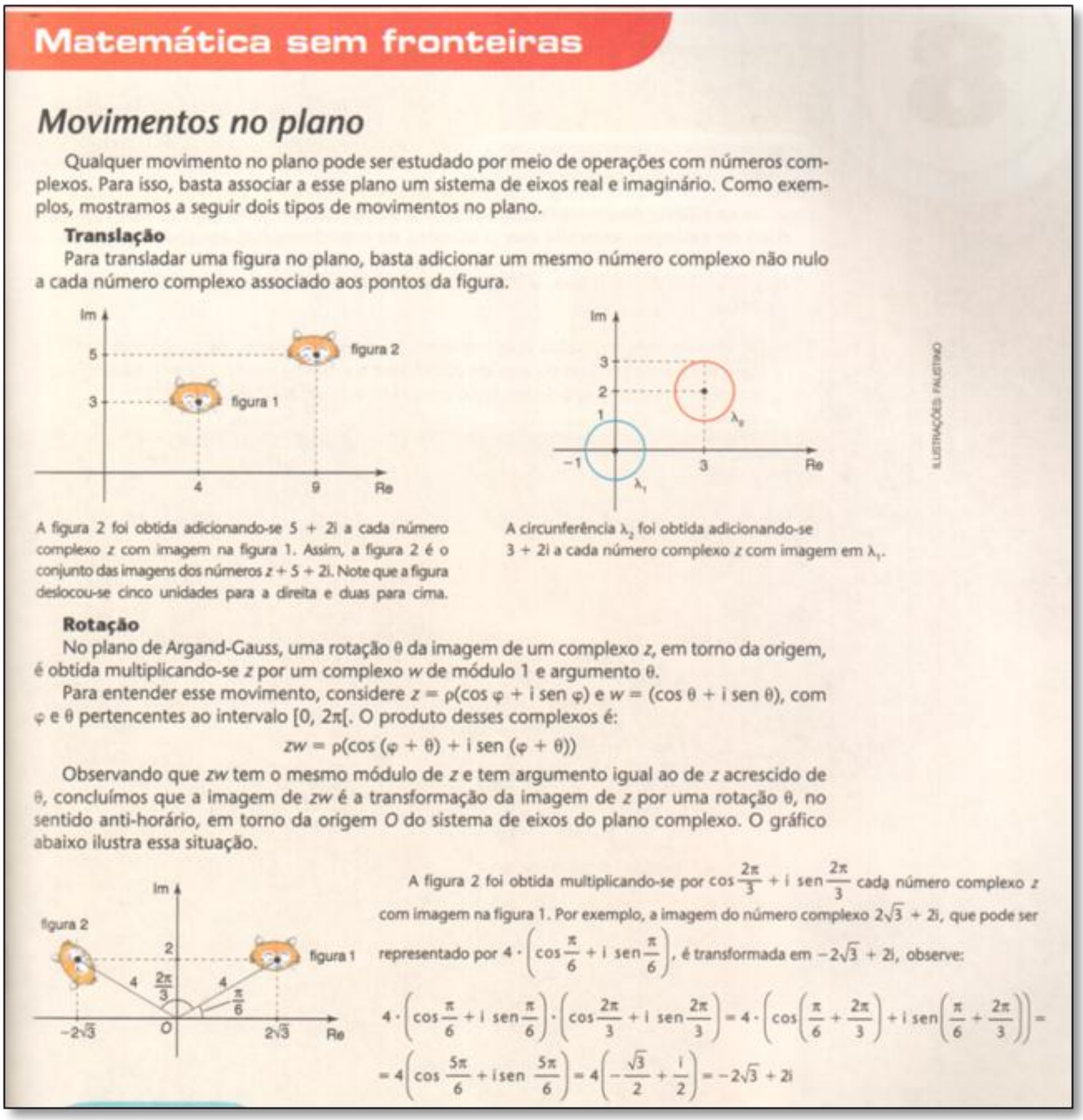
Observe que o produto zw representa uma rotação, no sentido anti-horário, de $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$ em relação a z, ou seja, o número complexo z, que possui argumento $\frac{\pi}{6}$, ao ser multiplicado por w, sofreu uma rotação equivalente a $\frac{2\pi}{3}$, que é o argumento de w. Assim, o produto zw possui argumento $\frac{5\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$. Além disso, o módulo de zw é igual ao produto dos módulos dos números complexos z e w, ou seja, $2 \cdot 4 = 8$.

Figura 2 - Análise geométrica da multiplicação do livro B

A potenciação e a radiciação são trabalhadas pela fórmula de De Moivre, trazendo aos alunos um processo repetitivo e sem significado. Como é dito no Guia: “passa-se a enfatizar o emprego de fórmulas e procedimentos”. Mas, no final do capítulo traz a interpretação geométrica das raízes n-ésimas de um número complexo.

O livro C realiza todas as operações no formato algébrico. Após interpretar geometricamente o imaginário, define o módulo geometricamente, menciona ligeiramente suas propriedades; de uma maneira tão rápida que não seria necessária, pois não é bem explicada e nem utilizada posteriormente. A multiplicação e divisão são dadas somente pela fórmula e sem nenhuma interpretação geométrica.

Numa seção especial deste livro, há o texto Movimentos no plano, que trabalha o conceito de translação e rotação através das operações com os complexos, fazendo relação com a ideia que vamos utilizar na proposta didática deste trabalho. Veja abaixo a Figura 3 que ilustra isto.



Matemática sem fronteiras

Movimentos no plano

Qualquer movimento no plano pode ser estudado por meio de operações com números complexos. Para isso, basta associar a esse plano um sistema de eixos real e imaginário. Como exemplos, mostramos a seguir dois tipos de movimentos no plano.

Translação

Para transladar uma figura no plano, basta adicionar um mesmo número complexo não nulo a cada número complexo associado aos pontos da figura.

A figura 2 foi obtida adicionando-se $5 + 2i$ a cada número complexo z com imagem na figura 1. Assim, a figura 2 é o conjunto das imagens dos números $z + 5 + 2i$. Note que a figura deslocou-se cinco unidades para a direita e duas para cima.

A circunferência λ_2 foi obtida adicionando-se $3 + 2i$ a cada número complexo z com imagem em λ_1.

Rotação

No plano de Argand-Gauss, uma rotação θ da imagem de um complexo z, em torno da origem, é obtida multiplicando-se z por um complexo w de módulo 1 e argumento θ.

Para entender esse movimento, considere $z = \rho(\cos\varphi + i\ \text{sen}\ \varphi)$ e $w = (\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$, com φ e θ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$. O produto desses complexos é:

$$zw = \rho(\cos(\varphi + \theta) + i\ \text{sen}\ (\varphi + \theta))$$

Observando que zw tem o mesmo módulo de z e tem argumento igual ao de z acrescido de θ, concluímos que a imagem de zw é a transformação da imagem de z por uma rotação θ, no sentido anti-horário, em torno da origem O do sistema de eixos do plano complexo. O gráfico abaixo ilustra essa situação.

A figura 2 foi obtida multiplicando-se por $\cos\frac{2\pi}{3} + i\ \text{sen}\frac{2\pi}{3}$ cada número complexo z com imagem na figura 1. Por exemplo, a imagem do número complexo $2\sqrt{3} + 2i$, que pode ser representado por $4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, é transformada em $-2\sqrt{3} + 2i$, observe:

$$4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\ \frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

Figura 3 - Seção especial do livro B

- Quanto ao tipo de exercícios:

Em um aspecto geral, os exercícios são repetitivos, de pouca interpretação e de simples repetição de processos; na sua maioria são procedimentos similares ou até iguais ao resolvidos aos exemplos de cada livro. Observam-se alguns exemplos que seguem na Figura 4.

50. Calcule o módulo de cada um dos números complexos:

a) $z = 2 + i$
b) $z = 5i$
c) $z = -4 + 3i$
d) $z = -4$
e) $z = -2\sqrt{3} - 2i$
f) $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

51. Entre os números complexos $2 + 3i$, $3 + i$, 1, -2, $4i$ e $-\frac{1}{2}i$, qual possui o maior módulo?

52. Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = (2 - 3i) \cdot (4 + 6i)$
b) $z = \frac{3i}{1 + i}$
c) $z = 2 \cdot i^{119}$
d) $z = 2i(-1 + 2i)$
e) $z = \overline{(4 - 4i)} \cdot (1 - i)$
f) $z = \frac{5i}{(\sqrt{3} - i) \cdot (3 + 4i)}$

58. Determine o argumento principal de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = \sqrt{3} + i$
b) $z = 4\sqrt{3} - 4i$
c) $z = -2 + 2i$
d) $z = -2 + 2i\sqrt{3}$
e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
f) $z = 2i$
g) $z = -3 - 3i\sqrt{3}$
h) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
i) $z = -6$
j) $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$
k) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$
l) $z = -\frac{i}{4}$

42. Determine a forma algébrica dos quocientes seguintes:

a) $\frac{3 - 7i}{3 + 4i}$
b) $\frac{1 - 2i}{2 + i}$
c) $\frac{1}{3 - i}$
d) $\frac{2i}{1 - i}$
e) $\frac{4 + i}{4 - i}$
f) $\frac{6}{5i}$

43. Expressar os complexos seguintes na forma algébrica:

a) $z = \frac{1}{i} + \frac{1}{1 + i}$
b) $z = \frac{3}{2 + 3i} - \frac{2i}{3 - 2i}$
c) $z = \frac{\overline{1 + i}}{i} - \frac{i}{1 + i}$
d) $z = \frac{2 - i}{3 - i} + \frac{1 - 2i}{3 + i}$
e) $z = \frac{(2 - i) \cdot (4 + 3i)}{1 - 2i}$
f) $z = \frac{(1 + i)^2}{1 - i}$

60. Escreva os seguintes complexos na forma trigonométrica:

a) $z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$
b) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
c) $z = 2i$
d) $z = 1 - i\sqrt{3}$
e) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
f) $z = -4$
g) $z = 3 - 3i$
h) $z = (-5, 5)$
i) $z = -i$
j) $z = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
k) $z = (1 - i)^2$
l) $z = 13$

Figura 4 - Exemplos de exercícios do livro A

Em relação ao livro A, ressalto o que é dito no Guia: “A maior parte dos exercícios exige apenas cálculos com base nas fórmulas apresentadas no texto” (p. 81).

Este livro apresenta poucos exercícios relacionados com geometria, um deles pede para determinar os argumentos dos complexos definidos pelos vértices de um hexágono.

O autor do livro B não apresenta um número tão grande de exercícios repetitivos, mas estes são de pouca interpretação; simplesmente é preciso refazer os procedimentos dos exemplos resolvidos e também envolvem muitos cálculos, o que pode tornar a aprendizagem cansativa e desestimular o aluno. O Guia de Livros Didáticos também observa que a quantidade de exercícios não é exagerada.

- Consideração final em relação aos livros didáticos:

Todos os livros trazem a contextualização histórica; o livro A erroneamente. Mas nenhum deles parte para sua definição levando em consideração o contexto histórico; ou seja, é feita uma simples menção à história do número complexo sem maior relação com o conteúdo desenvolvido.

Os três livros analisados apresentam as três representações do número complexo: par ordenado, forma algébrica $a + bi$ e forma trigonométrica, porém as operações estão mais orientadas para a algébrica. Os livros que trabalham com a multiplicação e divisão na forma trigonométrica quase não relacionam essas operações com movimentos no plano; o livro C nem menciona essa característica. A operação de adição, que trata de uma translação no plano, também não é considerada como conteúdo nos três livros, somente como um extra em um dos livros.

Somente o livro B menciona o complexo como vetor, o que poderia ser relacionado com a disciplina de Física, que utiliza essa nomenclatura. Nenhum dos livros apresenta a adição e subtração pela regra do paralelogramo.

O próprio Guia de Livros Didáticos aponta que o Livro A apresenta o conteúdo de números complexos de uma forma muito extensa. “No estudo dos números complexos, também se percebe excesso de teorização, com muitas demonstrações” (Guia de Livros didáticos, 2012, p. 79).

Enfim, nos três livros se pode notar um exagero de definições, de fórmulas e de propriedades, sem relacioná-las e contextualizá-las. Os exercícios são aplicações dessas fórmulas de uma maneira repetitiva; eles não trazem maiores significados para os alunos, pois exigem a reprodução de procedimentos.

2.2.3 Algumas dificuldades encontradas nesse ensino

Quando pensei em fazer uma proposta didática que contribuísse para o ensino de números complexos, procurei pesquisar sobre os materiais já desenvolvidos também com esse intuito.

Foram encontradas algumas pesquisas, bem como dissertações e artigos. Todos deixam visível a insatisfação com o ensino atual desse conteúdo: “O ensino usual dos números complexos baseia-se em uma abordagem puramente algébrica, onde estão ausentes o significado e as aplicações destes números.” (Carneiro, 2004, p. 1).

Como alternativa, as pesquisas trazem sugestões de abordagem para melhorar esse ensino. Nota-se que a maioria dessas pesquisas, se contextualiza no desenvolvimento histórico dos complexos, utilizando esse desenvolvimento para sua prática; ou ainda, ressaltam a interpretação geométrica desses números para dar um maior significado.

Araújo (2006), com sua experiência como professora, nota que os alunos possuem grandes dificuldades na aprendizagem de números complexos, e essa dificuldade se eleva quando são introduzidas a forma trigonométrica e as fórmulas de De Moivre.

Ainda observa que os principais questionamentos dos alunos perante esse ensino não recaia sobre conceitos ou operações e sim sobre a utilidade, aplicação em problemas ou contextualização do conteúdo.

A mesma autora realizou uma entrevista entre colegas da área (total de 20 professores) para investigar como os números complexos são trabalhados por diferentes profissionais. Essa pesquisa mostrou que mais de cinquenta por cento dos entrevistados inicia o estudo de números complexos através da revisão de conjuntos numéricos; somente um deles contextualizava no plano cartesiano; e apenas um dos professores mencionou que seus alunos não possuem dificuldades nesse ensino.

Neto (2009) comenta que o ensino tradicional baseado em técnicas operatórias, memorização de regras e propriedades, além de trazer dificuldades para os alunos, ainda faz com que os educandos neguem a existência do número imaginário, em virtude da falta de significado.

Este autor realizou uma pesquisa com cinco professores, levantando as principais dificuldades desse ensino com 50 alunos. Esse estudo mostrou que a falta de base para os alunos, a complexidade do conteúdo e a metodologia de ensino são as principais causas das dificuldades encontradas. Os professores apontaram que uma das maiores dificuldades ao lecionar o conteúdo de números complexos, é dar um maior significado a definição $i^2 = -1$. Quanto à metodologia, diz um dos professores:

> ...usávamos uma metodologia firmada num acúmulo de ações desprovidas de sentido, onde os alunos resolviam inúmeras questões (problemas de vestibulares) embora não soubessem o que estavam fazendo. Nós não percebíamos como os alunos estavam aprendendo, pois não observávamos a lógica usada na resolução desses problemas. (NETO, 2009, p. 47)

Rosa (1998) desenvolveu uma pesquisa diferente das descritas acima. Realizou um teste com 31 estudantes do primeiro ano de Engenharia Mecânica, no qual todos estudaram o conteúdo de números complexos no ensino médio. Quando foram questionados em como surgiram os números complexos, todos os alunos dessa pesquisa responderam que o número imaginário surgiu das resoluções de equações do 2º grau, evidenciando uma informação equivocada; o mesmo aconteceu em pesquisa realizada por Oliveira (2010).

Na pergunta realizada no teste de Rosa (1998): “um número real, nós podemos representar geometricamente na reta real. E um número complexo, é possível ser representado geometricamente?” Para os alunos que respondessem sim, era pedido que fizessem a representação do número $(2 + 3i)$. Somente três alunos, dos 31 entrevistados, acertaram a resposta.

Nas perguntas com operações simples, houve erro parcial na soma e subtração; acima da metade dos alunos errou a multiplicação e, nas potências de números complexo quase não houve acertos.

Oliveira (2010) ainda observou na sua pesquisa que somente dois alunos dos sete entrevistados localizaram o conjugado de um complexo no quadrante correto, e apenas um associou a Regra do Paralelogramo à soma de dois complexos. O que mostrou que poucos alunos estudaram os números complexos com geometria.

Essas pesquisas mostraram a falta de compreensão dos alunos quanto ao conteúdo de números complexos. Isto evidencia uma necessidade de aprimoramento desse ensino.

2.3 As representações semióticas e a tecnologia no processo de aprendizagem

O crescente desenvolvimento das tecnologias e o seu uso em diversos segmentos, como também, o interesse que despertam nos adolescentes, permite que se pense que as tecnologias digitais podem contribuir para o ensino de matemática. Sabendo da importância das representações para a compreensão cognitiva, verificar-se-á o possível emprego das tecnologias quanto a representações dinâmicas e manipuláveis de conceitos que se concretizam na tela do computador.

Gravina e Souza (2009) destacam a teoria de Vygotsky na sua justificativa sobre a importância que se deve dar à linguagem matemática no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, retomando a ideia vygotskiana de que os signos são instrumentos para a atividade psicológica, comparando-os aos instrumentos de trabalho. Sendo a semiótica o estudo dos signos em diferentes contextos, os autores apontam para a relevância desse estudo dentro do ensino de matemática:

> ...além do olhar sobre os processos cognitivos que levam a construção do conhecimento, tem-se também o olhar sobre o processo (complexo) de apropriação de um sistema semiótico (até então simplesmente referido como linguagem matemática) nas situações de aprendizagem da Matemática, o que indica um posicionamento epistemológico de natureza sócio-construtivista. (SOUZA; GRAVINA, 2009, p. 3)

Conforme Ernest (2006), sendo a semiótica o estudo dos signos que participam em diferentes contextos das atividades humanas, é natural considerar o processo de aprendizagem da Matemática também sob esta perspectiva. Ernest avança na definição do que seria um sistema semiótico no contexto específico da Matemática, explicitando três componentes: um conjunto de símbolos que são expressos através da fala ou do texto, e do desenho; um conjunto de regras de produção de signos, incluindo aqui aquelas que tratam da organização do discurso que faz uso da composição de signos; um conjunto de relações entre os signos e seus significados. Esta definição procura abarcar as características dos textos, símbolos e desenhos que se integram o discurso lógico que produz e cristaliza o conhecimento matemático.

Para Duval (2008) as representações semióticas são de importância primordial para o ensino de matemática. Diante da relevância que o autor dá às representações semióticas, ele analisa os aspectos cognitivos dos alunos referentes às suas dificuldades no ensino de matemática. “É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático”. (DUVAL, 2008, p. 13)

Essa citação de Duval cabe muito bem ao desenvolvimento dos números complexos na história, onde sua representação foi muito discutida entre os matemáticos da época. Além do mais, foi a representação geométrica do número complexo que realmente firmou sua existência. Essa abordagem será descrita no capítulo 3 desta dissertação, que trata da parte histórica desse conjunto numérico.

Para Duval (2008) as representações mentais são as representações semióticas interiorizadas por uma interação do sujeito com um tipo de registro da representação do objeto. Em Silva e Barreto (2011) tem-se:

> Duval (1995) anuncia que para a compreensão do funcionamento cognitivo do pensamento há que se considerarem dois elementos indispensáveis: a *semiósi* (representação do objeto matemático) e a *noési* (compreensão do objeto matemático). Para Duval (2009), não existe *nóesi* sem *semiósi*. (SILVA; BARRETO, 2011, p. 2).

Na sua teoria, Duval (2008), introduz a ideia de registro: é um sistema que, além de representar conceitos e ideias, tem regras de funcionamento que permitem a realização de processos matemáticos que levam a novos conceitos e ideias[6]. Os objetos matemáticos, no geral, são expressos através de diferentes registros, e dentre eles destacamos: o registro algébrico com suas regras de funcionamento que, por exemplo, levam as resoluções de equações; o registro geométrico com regras de tratamento que levam a identificação dos elementos pertinentes de uma figura, e dentro deste registro inclui-se o de natureza gráfica dado por sistema de coordenadas cartesiana e curvas que nele são desenhadas; o registro discursivo em linguagem natural, e também com símbolos, com suas regras convencionais de comunicação.

Outro conceito que tem relevância na teoria de Duval (2008) é o de transformação que explicita o quanto a atividade matemática consiste, essencialmente, de transformações sobre as representações. As transformações se desdobram em dois tipos: tratamentos, caso em acontecem dentro de um mesmo registro; conversões, caso em que as transformações transitam entre dois diferentes registros. E é nas conversões, muito mais do que nos tratamentos, que estão as maiores dificuldades cognitivas dos alunos; e mais, são as conversões que encerram, de modo contundente, os processos que caracterizam a atividade matemática.

E é a conversão de um registro a outro que enriquece a compreensão do objeto. Por exemplo, nos números complexos, o registro “algébrico” $a + bi$ do número complexo pode ser convertido no registro geométrico “ponto (a, b) no plano” e também ser convertido no registro trigonométrico que faz uso do módulo e argumento do complexo. São três registros diferentes e segundo Duval (2008), do ponto de vista cognitivo, a conversão de registros é uma atividade fundamental que conduz à compreensão do conceito.

Em antigo trabalho de Fischbein (1994) tem-se também a explicitação da dificuldade nas conversões quando introduz a ideia de *conceito figural* com dois componentes: o *conceitual* e o *figural.* O *componente conceitual,* com maior ou

6 Duval esclarece que nem todo sistema de representação é um registro e este seria o caso, por exemplo, do código binário ou do alfabeto.

menor grau de formalismo, se apresenta em linguagem natural e / ou simbólica; já o *componente figural* é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e se expressa através do desenho. É a fusão adequada destes componentes que garante a construção de ideias geométricas. Diríamos que a teoria de Duval está em linha de continuidade com a ideia de Fischbein e trás avanços no entendimento da complexidade do processo de aprender matemática, pois destaca que é o trabalho com muitas conversões entre diferentes registros que garante a construção do conhecimento.

A complexidade do tema exige clareza quanto ao duplo papel dos sistemas de representação. A evolução do saber matemático depende de sistemas de representação que cristalizam e geram novos conceitos e ideias, mas são estes mesmos sistemas de representação que devem ser aprendidos pelo aluno, para que ele possa ter acesso ao saber matemático. Ou seja, de um lado tem-se o matemático no processo de criação de representações que veiculam ideias e procedimentos matemáticos; e de outro lado tem-se o aluno na situação de aprendiz de conceitos e procedimentos que dependem de entendimento dos sistemas de representação. Segundo Duval (2008, p.126): "*o pensamento matemático depende da sinergia cognitiva dos registros (…) a coordenação dos registros fornece como que uma extensão das capacidades mentais",* e diríamos que tal constatação se aplica tanto ao matemático quanto ao aprendiz.

É evidente que os sistemas de representação tornam-se mais ou menos versáteis na veiculação de conceitos e processos, dependendo do suporte que se tem a disposição. Dentre os mais primitivos temos os tabletes de argila com desenhos e palavras; depois vem o texto estático dos livros. Hoje, com as mídias digitais, os sistemas se tornam dinâmicos e assim facilitam o processo de apropriação de seu funcionamento e das ideias e procedimentos matemáticos que veiculam; e mais, tem-se a possibilidade de manipulações que transitam de um registro a outro.

Segundo Souza e Gravina (2009), as mídias digitais potencializam novas possibilidades para os sistemas de representações semiótica. Usando as tecnologias, os sistemas se tornam dinâmicos, facilitando a internalização dos saberes:

> De imediato percebe-se uma das potencialidades destes ambientes: ao oferecer um sistema de representação semiótica que agrega a manipulação dinâmica aos objetos concreto-abstratos (a representação na tela do computador concretiza um objeto geométrico que é abstrato), ele desencadeia algumas das primeiras ações mentais características do raciocínio geométrico - o de estabelecer relações entre os objetos geométricos — e o faz de forma contundente, se comparado às possibilidades apresentadas no sistema de representação que faz uso do desenho estático em papel. (SOUZA; GRAVINA, 2009, p.4)

A introdução do computador nas escolas representa novas possibilidades para a educação. A tecnologia apresenta-se como uma ferramenta a dar suporte ao pensamento abstrato, trazendo a tona os objetos concretos-abstratos (Gravina, 2001). Mas mesmo tendo-se este suporte digital, Bartolini e Mariotti (2008) questionam o posicionamento bastante corrente de que os sistemas de representação, implementados com as mídias digitais, são suficientes para garantir a aprendizagem da matemática. É sob perspectiva vygotskiana que as autoras falam nas ferramentas de mediação semiótica. São recursos tecnológicos que incorporam sistemas de representação e que podem mediar processos de aprendizagem da matemática.

O que as autoras discutem é que não basta um tal recurso para que se dê o processo de aprendizagem e explicam porque: por um lado, ao manipular o recurso, o aluno constrói significados individuais, e por outro lado, de antemão, tem-se contido no recurso a intencionalidade de um saber matemático. E a questão que se coloca é: como garantir que a construção dos significados individuais estão na direção do saber matemático? Partindo do pressuposto que é o especialista, no caso o professor, que tem condições de avaliar o potencial de mediação do recurso, reservam a expressão *ferramenta de mediação semiótica* para indicar um recurso tecnológico a ser usado em situação didática concebida para a aprendizagem de determinado conteúdo matemático – ou seja, o professor já conhece, de antemão, o potencial semiótico do recurso no que diz respeito a construção do saber matemático em questão. As autoras avançam na caracterização de um possível modelo de situação didática que faz uso de uma tal ferramenta de mediação: inicialmente os alunos recebem as atividades a serem exploradas e se engajam em manipulações que concorrem para construção de significados individuais; a isto, segue-se momento de construção coletiva de significados, a ser conduzido pelo professor. Este modelo, tanto no momento da exploração quanto no momento de condução, considera a importância de esquemas de uso sintonizados com habilidades cognitivas que caracterizam a atividade matemática. Neste sentido, o modelo pressupõe que haja o planejamento das atividades a serem exploradas com o recurso digital, pois é no engajamento às tarefas propostas que progressivamente emergem e se desenvolvem os esquemas de uso. As considerações teóricas das autoras convergem para a tese de que a apropriação dos sistemas de representação digitais e dinâmicos depende de situações didáticas planejadas e é assim que os alunos desenvolvem habilidades para aprender matemática com as ferramentas de mediação semiótica.

Neste capítulo tratei de observar algumas necessidades para o ensino dos números complexos e algumas possibilidades que podem favorecer esse ensino, que dizem respeito aos sistemas de representação e ao uso de tecnologia. No próximo capítulo será apresentado o contexto histórico do surgimento desses números fazendo uma preparação para a apresentação do material didático digital que está sendo proposto para o ensino de números complexos.

3 OS NÚMEROS COMPLEXOS NA HISTÓRIA

Segundo Carretero (1997), a escola não tem só o objetivo de transmitir os conteúdos e sim ensinar a pensar. É imprescindível ensinar, por exemplo, o conceito da velocidade, mas também é interessante mostrar como os cientistas pensaram para entender e chegar nesse conceito.

O surgimento dos números positivos se deu para expressar quantidades e medidas. Até que acontecesse a concepção do conjunto dos números reais (a inclusão dos números negativos, dos racionais e irracionais), já foi uma longa caminhada.

Para o desenvolvimento desse capítulo, foram utilizadas diversas referências, como o livro de RIPOLL (2006), o artigo de MILIES (1993) e as dissertações de JUNIOR (2009), ARAÚJO (2006), PAULA (2007) e ROSA (1998).

Segundo Milies (1993), as equações de segundo grau apareceram na matemática aproximadamente 1700 anos antes de Cristo e, ocasionalmente, levaram a radicais de números negativos, porém não foram elas que fizeram com que os números complexos se tornassem uma realidade matemática.

Na época, uma equação era desenvolvida para solucionar um problema concreto, assim, se no processo de resolução aparecia uma raiz quadrada de um número negativo, simplesmente isso indicava que o problema inicial não tinha solução.

Explanam-se, a seguir, alguns exemplos desses casos.

O primeiro registro de um radical de um número negativo é encontrado na *Estereometria* do matemático grego Herón[7], publicado aproximadamente 75 d.C.. Num cálculo, sobre o desenho de uma pirâmide, aparece a expressão $\sqrt{81-144}$ (escrita na linguagem atual), mas logo em seguida, para dar continuidade aos cálculos, a expressão aparece da seguinte maneira: $\sqrt{144\text{-}81}$.

---

7 Héron de Alexandria (65-125) inventor matemático, físico e escritor grego. Alguns autores lhe creditam a fórmula que permite calcular a área de um triângulo conhecidos seus três lados.

Algum tempo depois, surge no livro *Arithmetica* de Diophanto, aproximadamente 275 d.C., a descrição do seguinte problema: *um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados.*

Usando a notação atual, e indicando com a e b os catetos desse triângulo, tem-se:

$$\frac{ab}{2} = 7$$

$$a^2 + b^2 = (12 - a - b)^2$$

Desenvolvendo esse sistema e substituindo b em função de a, obtém-se a seguinte equação:

$$24a^2 - 172a + 336 = 0$$

cujas raízes são:

$$a = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$$

Nesse momento, Diophanto observa que somente poderia haver solução se $\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geq 24 \times 336$, deixando de lado a expressão $\sqrt{-167}$. Neste exemplo, podemos ver claramente que quando o autor se deparou com a raiz quadrada de um número negativo passou para outro método de resolução.

Em relação a esses radicais, podem-se destacar manuscritos encontrados do tipo:

"...*como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada"* (matemático indiano Mahavira, 850 d.C).

"...Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado" (Bhaskara, século XII).

Como na maioria dos problemas que originavam em equações de grau 2 era relacionados com geometria, a soluções de raízes quadradas de números negativos eram inexistentes. Talvez esse fato seja relevante para que as equações de grau 3 forçassem o surgimento desses números.

Por centenas de anos, matemáticos procuravam por uma fórmula generalizada para resolver equações cúbicas, assim como há para equações quadráticas.

Um dos mais detalhados trabalhos referentes a essa fórmula foi de Luca Pacioli[8], em 1494, que, segundo Junior (2009) mencionou que a solução de uma equação cúbica é tão impossível quanto à quadratura do círculo. Isto originou no distanciamento de alguns matemáticos desse estudo.

Scipione Del Ferro[9] resolveu o caso especial das cúbicas do tipo $x^3 + px = q$, com p e q positivos, anunciando este resultado somente a um pequeno grupo de amigos, inclusive seu pupilo Antônio Maria Fior. Segundo Junior (2009), nesse momento, se dá a maior disputa matemática envolvendo equações cúbicas, registrada na história. Fior desafia publicamente o matemático italiano Nicolo Tartaglia[10] lançando 30 problemas de equações cúbicas que eram solucionadas pelo caso particular descoberto pelo seu tutor. Tartaglia, em 1535, conseguiu encontrar a fórmula que resolve qualquer cúbica, e assim é declarado vencedor, já que seu oponente Fior não conseguiu resolver cúbicas diferentes daquelas do caso particular resolvido por Scipione Del Ferro.

Sabendo da disputa entre Tartaglia e Fior, e da vitória de Tartaglia, Girolamo Cardano[11] insiste ao vitorioso na publicação da fórmula que resolve as equações cúbicas. Tartaglia acaba cedendo e Cardano publica em seu livro Ars Magna (1545) a descoberta de Tartaglia.

---

[8] Luca Pacioli (1445-1517) frade, matemático e professor de aritmética comercial. Italiano nascido em Sansepolcro escreveu e publicou Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita, a primeira e revolucionária obra sobre álgebra publicada na Europa, uma notável compilação sobre aritmética, álgebra, geometria euclidiana elementar e contabilidade, com cerca de 600 páginas e escrita em italiano.

[9] Scipione Del Ferro (1465-1526) professor de matemática italiano, nascido em Bologna.

[10] Nicolo Tartaglia (1499-1557) matemático italiano de origem humilde nascido em Bréscia, República de Veneza, hoje Itália. O apelido Tartaglia deveu-se ao fato de que ele ter um defeito na voz, falando com dificuldades, proveniente de ferimentos com uma espada na face e na garganta (1512) durante uma invasão da cidade por franceses e, por isso, sempre usou barba para camuflar suas cicatrizes desfigurantes.

[11] Girolamo Cardano (1501-1576) médico, astrólogo, matemático, filósofo e físico italiano nascido na cidade de Pavia, hoje pertencendo à Itália, a quem se deve a primeira descrição da febre tifóide e do método de tratamento da sífilis, além de, como matemático, ser um dos personagens mais interessantes no início da história das probabilidades. Filho ilegítimo de **Fazio Cardano** e **Chiara Micheria**, seu interesse precoce pela matemática veio por influência de seu pai que além de um advogado comercial, também foi um bom matemático, inclusive professor de geometria na Universidade de Pávia.

Nesta obra, Cardano estuda várias relações das equações, dentre elas as quantidades “sofisticadas”, como eram chamadas as raízes de números negativos. Ele considera esses valores nas suas discussões, não as desconsiderando, como se fazia antes. Ao contrário, Cardano procurava exemplos para fundamentar o uso dessas quantidades “sofisticadas”[12].

Um exemplo no qual Cardano trabalha com esses números, hoje conhecidos como complexos ou imaginários é o seguinte: ele considera o problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40.

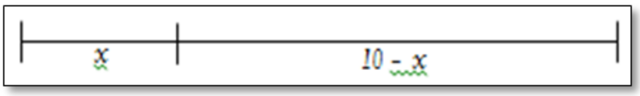


Figura 5 - Problema de Cardano

Se chamar de x o comprimento de uma das partes, a outra terá comprimento $10 - x$, e a condição do problema se traduz na equação:

$$x(10 - x) = 40$$

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

Cujas soluções são $x = 5 \pm \sqrt{-15}$. Cardano reconhece que o problema dado não tem solução, mas, observa que, considerando as raízes como números, ele obtém:

Se $x = 5 + \sqrt{-15}$, então $10 - x = 10 - (5 + \sqrt{-15}) = 5 - \sqrt{-15}$ e da multiplicação $(5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$.

Nesse exemplo, nota-se que as raízes quadradas de números negativos foram trabalhadas algebricamente, mas não havia uma explicação geométrica para elas.

Na sequência, Cardano chama essas soluções de “*raízes sofísticas”* da equação, que “*são tão sutis quanto inúteis”* (apud Milies, 1993, p. 2).

[12] Em alguns autores essas raízes também são chamadas de sofísticas.

Raphael Bombelli[13] era um admirador do livro de Cardano, porém achava que sua exposição não era muito clara. Decidiu então escrever um livro, expondo os mesmos assuntos, mas da forma que um principiante pudesse entender. Publicou *L'Algebra*, em 1572, cujo objetivo principal era generalizar as fórmulas de Cardano para resolução de equações de 3º grau para qualquer caso de uma forma mais simples. No capítulo II dessa obra, ele estuda as equações de grau não superior a 4. Um caso particular que ele considera, é a equação $x^3 = 15x + 4$. Ao aplicar a fórmula de Cardano para descobrir uma raiz, obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Também chamando essa solução de sofística, mas ele percebe que $x = 4$ é, de fato, uma raiz da equação.

Assim, pela primeira vez, mesmo se deparando com raiz de um número negativo, há solução para a equação trabalhada.

Bombelli considerava então a possibilidade de que exista uma expressão da forma $a + \sqrt{-b}$ que possa ser considerada como raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$. Realizando algumas operações, considerando essa possibilidade, ele encontrou que a raiz cúbica dessa expressão era $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$, e que:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

que já havia visto como solução da equação dada. Ou seja, ele provou que $x = 4$ era solução da equação utilizando as expressões que antes eram ignoradas. Ele diz:

> Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número....A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova...(BOMBELLI, 1572, apud MILIES, 1993, p. 8).

Bombelli se destacou nesse estudo, apresentando regras operatórias para esses números sofisticados.

---

[13] Raphael Bombelli (1526-1572) algebrista italiano nascido em Bologna, o mais importante da história da matemática da Itália sua principal contribuição matemática foi relacionado aos números complexos.

Impressionados pelo aspecto artificioso, tais números eram usados pelos algebristas da época de uma forma não muito clara; não olhavam para eles realmente como números.

No século XVII, René Descartes[14] na sua famosa obra *Geometria* foi o primeiro a chamá-los de imaginários, mas não no sentido de irreais, mas sim de números que poderiam ser imaginados.

Trabalhando com as raízes de equações, Descartes menciona pela primeira vez as raízes imaginárias da seguinte maneira:

> Nem todas as raízes verdadeiras e nem as falsas são sempre reais; às vezes elas são imaginárias; ou seja, enquanto nós podemos sempre conceber a quantidade de raízes de uma equação como eu tinha atribuído, ainda assim nem sempre existe uma quantidade definida que corresponda a cada raiz obtida. Logo, mesmo concebendo que a equação $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tenha três raízes, ainda que só exista uma raiz real, 2, as outras duas, embora nós possamos somá-las, diminuí-las ou multiplicá-las de acordo com as regras estabelecidas, permanecerão sempre imaginárias. (DESCARTES, 1954 apud JUNIOR, 2009, p. 41)

Leibniz[15], em 1675, chegou a atribuir-lhes caracterização filosófica própria, considerando como uma natureza secreta, como monstro do mundo ideal, como algo aleijado da natureza dos números.

Abraham De Moivre[16], no século XVIII empregou-os para estabelecer sua fórmula, uma das fundamentais da Trigonometria, concedendo aos imaginários a cidadania matemática ao afirmar que a raiz quadrada da unidade negativa era um

[14] René Descartes (1596-1650) advogado, filósofo, matemático (algebrista e geômetra por excelência) e físico francês nascido em Touraine, La Haye-Descartes, criador da doutrina do cartesianismo e considerado um dos fundadores da filosofia moderna e o pai da Geometria Analítica.

[15] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) filósofo e matemático alemão nascido em Leipzig, Saxônia, atualmente Alemanha.

[16] Abraham De Moivre (1667-1754) matemático francês nascido em Vitry, próximo a Paris, fez carreira profissional na Inglaterra, onde foi professor particular e tornou-se um destacado pesquisador com grandes contribuições no campo da teoria das probabilidades, porém sem se tornar professor universitário por causa de sua nacionalidade. A despeito de sua enorme produção e prestígio nos meios científicos da época morreu em condições de pobreza em Londres.

símbolo. Mais tarde, em 1777, Euler[17] designou-o por i, e passaram a adquirir a seguinte forma: $a + bi$, na qual a e b são números reais.

Esse símbolo apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss, em 1801.

Como se pode observar, a partir do trabalho de Bombelli, os números complexos começaram a ser utilizados pela sua clara necessidade na resolução de equações de 3º grau, mas ao mesmo tempo, desconfiava-se desses números.

Cabe salientar que essas soluções de equações denominadas falsas, impossíveis ou irredutíveis, assim chamadas quando originavam uma raiz quadrada de número negativo, não eram representadas em desenhos. Nessas condições surgem as primeiras tentativas de representar os números imaginários.

Uma simples representação geométrica foi o suficiente para fazer desaparecer todas as dúvidas e reservas que ainda existiam em cima desses números. Foi de tal modo suficiente que não só justificou o cálculo formal dos complexos com base nas definições formais de adição e multiplicação, como também fez com que essas operações resultassem mais naturais sob o ponto de vista intuitivo. A possibilidade dessa representação era clara para vários autores, como Cotes[18], De Moivre, Euler e Vandermonde[19]; todos eles tentaram resolver a equação $x^n - 1 = 0$ pensando em suas soluções como vértices de um polígono regular de n lados.

O primeiro matemático a pensar sobre uma construção geométrica para os complexos foi John Wallis[20], considerou as mesmas regras de deslocamento na reta como recuos e avanços, para a interpretação dos números inteiros, para os planos.

---

[17] Leonhard Euler (1707-1783) físico e matemático suíço nascido em Basiléia, o mais brilhante gênio da matemática pura e aplicada de todos os tempos. De uma família tradicionalmente dedicada à pesquisa científica. Além de matemática também estudou medicina, astronomia, física ótica, teologia e línguas estrangeiras com o pai e outros professores.

[18] Roger Cotes (1682-1716) matemático e astrônomo inglês nascido em Burbage, Leicestershire, estudioso da periodicidade das funções trigonométricas, os ciclos da tangente e da secante.

[19] Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796), francês, estudou a teoria das equações e trabalhou com determinantes.

[20] John Wallis (1616-1703) matemático e professor inglês nascido em Ashford, Kent, primeiro a utilizar o nosso usual símbolo de infinito "∞" e inventor dos símbolos exponenciais nas expressões algébricas. Nos primeiros anos escolares aprendeu latim, grego, hebreu, lógica e aritmética. Estudou na Universidade de Cambridge (1632-1640), ordenando-se sacerdote da Igreja Anglicana.

Embora, não tenha resolvido realmente o problema da representação desses números, a ideia de Wallis despertou interesse de outros matemáticos.

A atual representação geométrica foi realizada por um topógrafo norueguês, Caspar Wessel[21], que em 1797 entregou à Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras um memorial "*Sobre a representação analítica da direção: uma tentativa*", publicada em 1799.

Wessel trabalha com segmentos e direções, ainda relaciona a álgebra diretamente com a geometria. Um trecho da sua descrição quanto à $\sqrt{-1}$:

> Seja +1 a designação da unidade positiva retilínea e + ε uma outra unidade perpendicular à unidade positiva que possui a mesma origem; Então o ângulo da direção de +1 será igual a 0º, o de -1 a 180º, o de +ε a 90º e o de –ε a -90º ou 270º. Pela regra que o produto dos ângulos das direções deve ser igual à soma dos ângulos dos fatores, temos: (+1)(+1) = +1; (+1)(- 1) = - 1; (- 1)(- 1) = +1; (+1)(+ε) = +ε; (+1)(- ε) = - ε; (- 1)(+ε) = - ε; (- 1)(- ε) = +ε; (+ε)(+ε) = - 1; (+ε)(- ε)= +1; (- ε)(- ε) = - 1. De onde temos que ε = 1−; e a divergência do produto é determinada de tal maneira que nenhuma das regras comuns de operação seja violada. (WESSEL, 1797, apud JUNIOR, 2007, p. 67)

A Figura 6, que Junior (2009) traz em sua dissertação, retrata bem o que Wessel está representando:

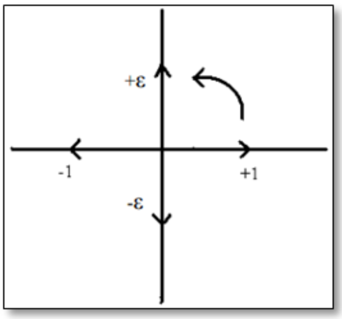


Figura 6 - Representação geométrica de Wessel

retirada da dissertação de Junior (2009, p. 76)

21 Caspar Wessel (1745-1818) autodidata norueguês.

O suíço Jean-Robert Argand[22] apresenta uma ideia muito parecida com Wessel, mas o trabalho de Argand é considerado mais esclarecedor sobre a representação das quantidades imaginárias. Em 1813 publicou a obra: "*Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas*"; como Wessel, ele trata das quantidades negativas como opostas.

Argand considera o zero como um referencial e a multiplicação por -1, geometricamente, como a reflexão em relação à origem (zero), define ainda o que seria valor absoluto e direção.

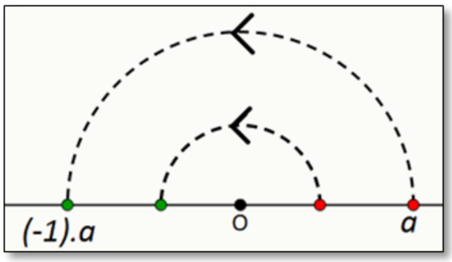


Figura 7 - Interpretação geométrica da multiplicação

Com essas definições, Argand pretende encontrar uma forma de representar os imaginários. Sabe que eles não podem estar na mesma reta dos números positivos e negativos, mas sim no mesmo plano.

Sabendo que $+1 : -1 = -1 : +1$, então ele questiona, quem seria x para: $-1 : x = x : +1$? Junior (2009), menciona que Argand utilizou o seguinte diagrama para resolver este empecilho, e ainda realizou as seguintes considerações:

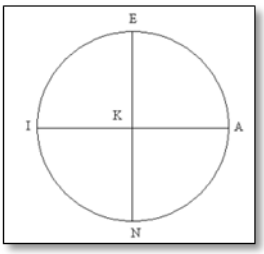


Figura 8 - Diagrama de Argand,

retirada da dissertação de Junior (2009, p. 75)

[22] Jean Robert Argand (1768-1822) matemático amador e contador suíço nascido em Genebra ficou famoso pela sua interpretação geométrica aos números complexos.

> As grandezas unitárias positiva e negativa são respectivamente compreendidas como os segmentos direcionados KA e KI. Encontrar a média proporcional entre as grandezas + 1 e – 1 seria então, combinando as idéias de grandeza absoluta e direção, encontrar a direção da grandeza unitária x, de modo que a direção da grandeza representada por KA esteja para a direção da grandeza x, assim como a direção da grandeza x esteja para a direção representada por KI.
>
> Podemos observar que tanto KE como KN são segmentos direcionados e KE pode ser obtido através de uma rotação de 90º a partir de KA, assim como KI pode ser obtido através de uma rotação de 90º a partir de KE. O mesmo acontece para o segmento KN, portanto KE e KN são as grandezas geométricas procuradas que representam geometricamente $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$. (JUNIOR, 2009, p. 75-76)

Argand não se limita somente às linhas perpendiculares, e sim, traça diversas linhas representando todos os imaginários do tipo $a + bi,$ compostos de uma parte real e uma parte imaginária. Este matemático realiza importantes interpretações geométricas para esses números, o que os torna mais “reais”. Mas, mesmo diante dessa legitimidade, as operações algébricas desses números ainda estavam indefinidas, o que levou a outros matemáticos questionarem a legitimidade de número.

A Carl Friederich Gauss[23] deve-se o mérito de ter sido o primeiro matemático a empregar os números imaginários em trabalhos de pesquisa (CARNEIRO, 2004). A posição de Gauss, a respeito da existência objetiva dos números complexos, ilustra a visão da matemática da época. É somente após a representação geométrica dos números imaginários que a teoria aritmética desses números, desenvolvida por este matemático, realmente avança.

A história mostra que a representação e a compreensão geométrica dos números imaginários foram fundamentais para sua aceitação e para o seu desenvolvimento. Considerar-se-á tal fato histórico como um ponto fundamental para a introdução ao estudo dos números complexos na escola; julga-se que desta forma os alunos possam aceitar a existência desses números, sem maiores dificuldades.

---

[23] Carl Friederich Gauss (1777-1855) físico, astrônomo e matemático germânico nascido em Braunschweig, Ducado de Brunswick, hoje na Alemanha, um dos matemáticos mais importantes e prolíficos de todos os tempos, também conhecido por suas contribuições na álgebra, geometria diferencial, teoria das probabilidades e teoria dos números. Menino prodígio filho de camponeses pobres, teve sua educação incentivada para estudar pela mãe e por um tio, apesar da objeção paterna. Consta que aos três anos de idade já tinha boas noções de aritmética: ao acompanhar os cálculos feitos pelo pai para o pagamento de alguns empregados, detectou um erro nas contas. Aos dez anos, iniciou seus estudos regulares de matemática, surpreendendo os professores pela facilidade e agilidade com que realizava complicadas operações e com que aprendia línguas.

É levando em consideração a história dos números complexos e o estudo realizado no Capítulo 2 que avanço, no próximo capítulo, com a apresentação da fundamentação matemática de conjunto de números complexos juntamente com o uso do objeto de aprendizagem “Números Complexos”.

4 TECNOLOGIAS E NÚMEROS COMPLEXOS: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO

A presente dissertação tem o objetivo, conforme dito na Introdução, de propor e analisar uma sequência didática para o ensino de números complexos no ensino médio. Pretende-se fazer uma introdução às funções de variável complexa sob um ponto de vista geométrico, nisso fazendo-se uso de tecnologias. As tecnologias serão utilizadas, considerando-se as reflexões feitas no capítulo 2; nesse capítulo foram apresentadas suas possibilidades quanto aos sistemas de representação dinâmicos de conceitos matemáticos como facilitadores do processo de aprendizagem.

Na proposta didática a ser apresentada no próximo capítulo, é levado em consideração o contexto histórico que explica a evolução do conceito de número complexo. A história descrita no capítulo 3 mostra que se pode, e que é importante, relacionar os números complexos com geometria.

Apresenta-se, no que segue, o conteúdo dos números complexos e funções que se pretende tratar na proposta didática. Também serão apresentadas as ferramentas que tratam deste conteúdo: um vídeo e um objeto de aprendizagem.

A primeira ferramenta, o vídeo *Dimensions: une promenade mathematique*[24] produzido por Jos Leys, Étienne Ghys e Aurélien Alvarez, consiste de nove capítulos e tem como objetivo explicar a quarta dimensão. O vídeo me inspirou na concepção da sequência didática que vou propor, pois apresenta no seu capítulo 5 a mesma ideia que pretendo usar para contextualizar historicamente os números complexos. É um vídeo que pode ser utilizado como ferramenta motivacional também para outros assuntos como, coordenadas geográficas, sólidos e fractais. Conforme Carretero (1997) para que a aprendizagem realmente seja efetiva é preciso que haja motivação, pois "a aprendizagem escolar é um aspecto a mais no comportamento humano e que, portanto, necessita de uma força motivacional para manter-se no tempo" (p. 46). Os capítulos do vídeo estão disponíveis gratuitamente na Internet em diferentes línguas e legendas, e assim estão acessíveis para apreciação.

---

[24] Encontra-se disponível em http://www.dimensions-math.org/Dim_PT.htm

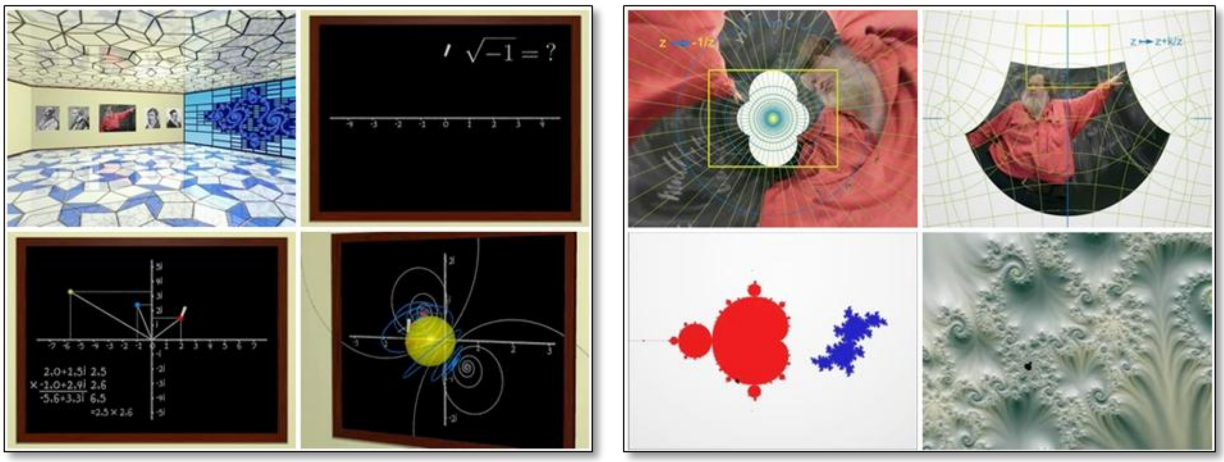


Figura 9 - Vídeo *Dimensões*, figura retirada do site de origem do vídeo

A outra ferramenta a ser utilizada é o objeto de aprendizagem “Números Complexos”[25]. Um objeto de aprendizagem é um recurso educacional multimídia e interativo voltado para um assunto específico; nele há a possibilidade de manipulação de animações e os efeitos que se obtêm no dinamismo podem ajudar no entendimento do conteúdo em questão. No caso, as animações que estão no objeto, criadas no software Geogebra[26], dão dinamismo e movimento aos diferentes registros dos números complexos. O objeto é um site que está disponível na Internet, e foi produzido em linguagem html. Além das animações acompanhadas de explicações relativas aos diferentes conceitos, o objeto apresenta recortes do vídeo *Dimensões* e também um espaço com questões a serem respondidas pelo usuário. No que segue, referir-se-á a esse objeto de aprendizagem pela sigla NC, considerando o seu nome “Números Complexos”. Na Figura 10 tem-se a interface do objeto.

[25] O objeto de aprendizagem NC foi implementado pelas bolsistas Mariângela Torre Dias e Sara Regina da Silva (alunas do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS) e pela autora dessa dissertação sob a orientação da Dr. Maria Alice Gravina. O objeto foi desenvolvido dentro do projeto “Aprendizagem da Matemática através de hipertexto com animações”, financiado pela SEAD/UFRGS em 2011. Disponível em http://www6.ufrgs.br/espmat no link Biblioteca Virtual.

[26] Software gratuito para o ensino e aprendizagem de matemática que disponibiliza recursos dinâmicos, disponibilizado no endereço http://www.geogebra.org/.

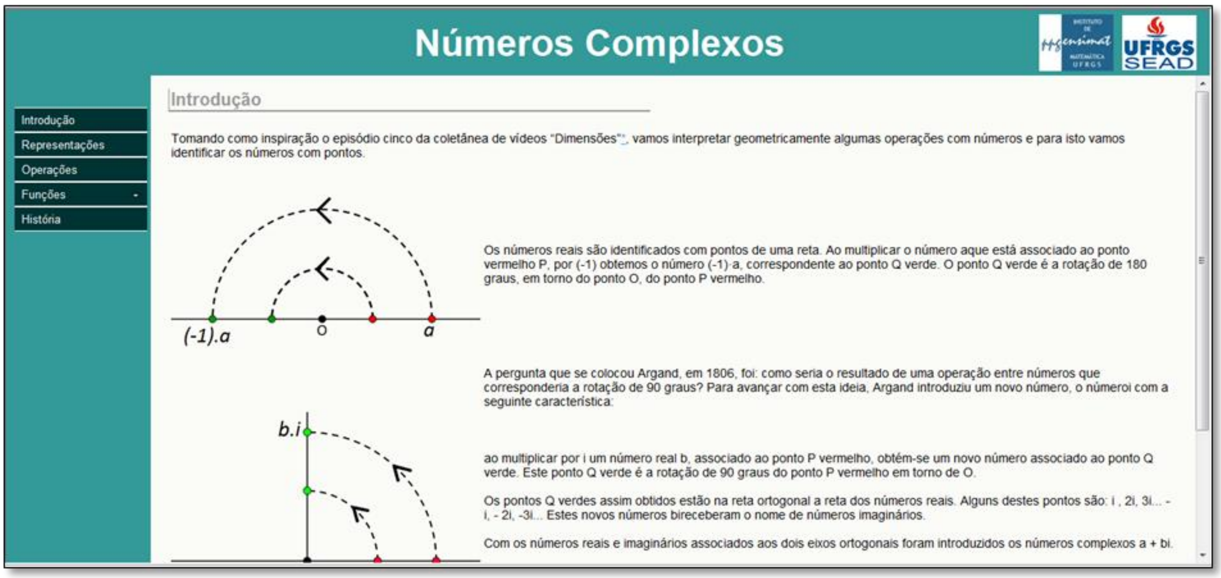


Figura 10 - Interface do objeto de aprendizagem “Números Complexos”

Foi levando em consideração a importância do sistema de representação semiótica no processo de aprendizagem que iniciamos a construção do objeto NC para o ensino de números complexos e funções, tendo clareza sobre a necessidade de ter-se nele: a) recursos para conversões entre registros (Duval, 2008); b) recursos para o desenvolvimento de esquemas de uso sintonizados com os procedimentos que caracterizam o pensamento matemático (Bartolini e Mariotti, 2008).

No que segue será apresentado o embasamento matemático da proposta didática, para isto percorrendo-se a barra de navegação do objeto NC. Na Figura 11 temos a barra de navegação que organiza os menus: Introdução, Representações, Operações, Funções e História. As seções do capítulo correspondem aos diferentes menus e elas vão tratar dos conteúdos que neles estão; na medida do possível também é esclarecido o tipo de dinamismo que se tem nas animações e aqui sugere-se a leitura do capítulo junto com a manipulação direta no objeto, que está disponível em http://www6.ufrgs.br/espmat no link Bilbioteca virtual.

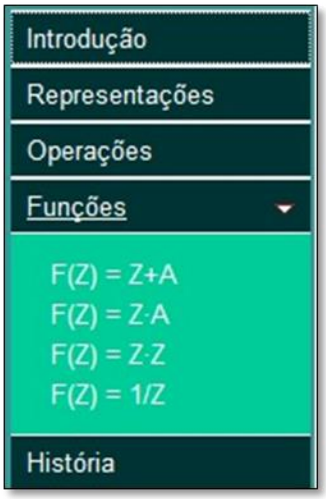


Figura 11 - Menu do objeto NC

4.1 O número imaginário i

No menu Introdução do objeto de aprendizagem NC é apresentada a ideia que dá origem ao número imaginário i . A explicação que está presente neste menu tomou como referência o vídeo *Dimensões.* Os capítulos cinco e seis do vídeo, que são utilizados neste trabalho, tratam de números complexos e transformações. As explicações são apresentadas pelo matemático Adrien Douady e maiores detalhes sobre os assuntos tratados podem ser encontrados no site que disponibiliza o vídeo.

No objeto de aprendizagem NC tem-se partes do vídeo; são diferentes trechos direcionados ao assunto específico de cada menu. Para o menu Introdução, selecionou-se a parte do vídeo que trata da apresentação do número imaginário em contexto histórico. Este trecho tem a duração de aproximadamente seis minutos e inicia com o matemático Adrien Douady se apresentando e falando do seu envolvimento com a pesquisa na área das funções de variável complexa. Ele também apresenta alguns matemáticos que contribuíram significativamente para a evolução do conceito de número complexo, como Tartaglia, Cardano, Cauchy e Gauss; e também comenta que graças a esses números é possível construir belíssimos fractais.

Para explicar o número $\sqrt{-1}$, Douady utiliza a ideia simplificada de Argand. Ele inicia fazendo uma reta graduada, interligando a geometria à álgebra ao relacionar números com pontos da reta; e usa os pontos desta reta, que denomina-se reta real, para interpretar a soma e a multiplicação de números reais.

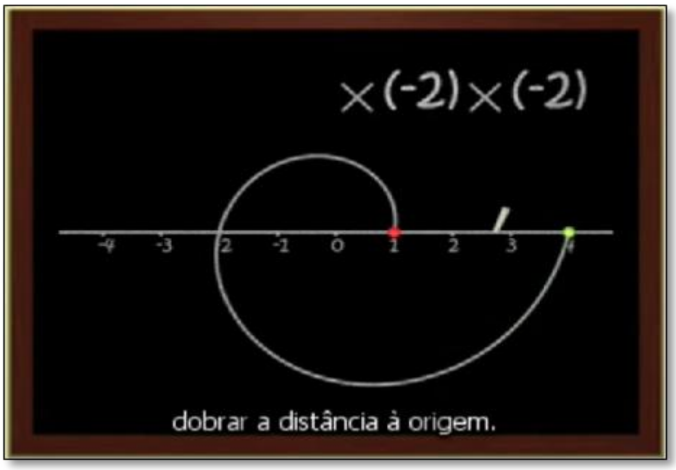


Figura 12 - Multiplicação de pontos, imagem do vídeo Dimensões

A multiplicação de um número real por (-1) é associada com um giro de meia volta, ou seja, uma rotação de 180º em torno do ponto associado ao zero.

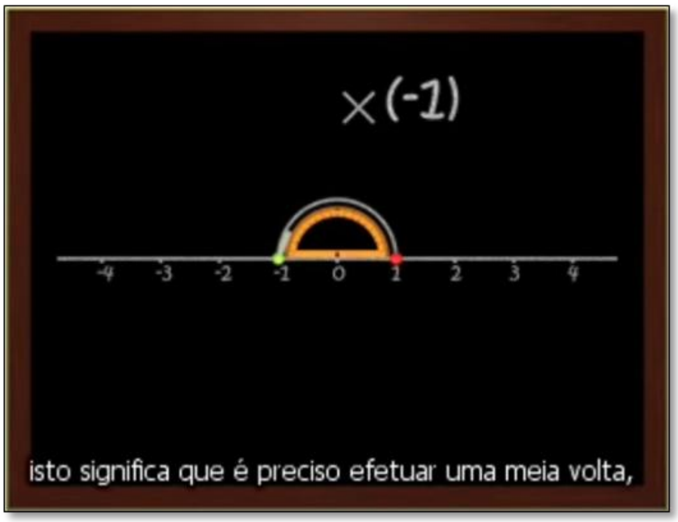


Figura 13 - Multiplicação por (-1)

imagem retirada do vídeo Dimensões

O vídeo também explica que ao se multiplicar um número por ele mesmo, tem-se sempre um número positivo. Ou seja, constata que (-1) não pode ser o quadrado de nenhum número real, ou seja, não existe solução real para $\sqrt{-1}$. Nesse momento é introduzida a grande ideia de Argand: se multiplicar um número real por (-1) corresponde ao giro de 180º em torno do zero, então por que não introduzir um número cujo efeito de multiplicação seja a metade deste giro em torno do zero[27]?

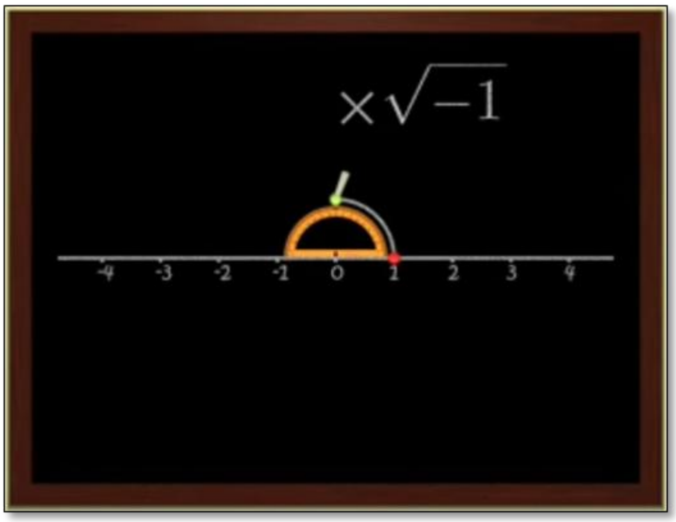


Figura 14 - Multiplicação por raiz quadrada de (-1), imagem retirada do vídeo Dimensões

Assim, através do conceito de giro de 90º no sentido anti-horário em torno do zero, é ampliado para o plano a associação entre pontos e números. O símbolo $\sqrt{-1}$ é denotado por i e os pontos da reta perpendicular a reta real passando pelo zero são associados aos novos números $i, 2i, 3i, \ldots -i, -2i\,, -3i, \ldots$ Isto porque, sob o ponto de vista geométrico, estas multiplicações de números reais pelo número i correspondem a rotações de 90º de pontos que estão na reta real. Assim tem-se no plano um sistema de eixos formados por duas retas perpendiculares entre si e denominadas, respectivamente, eixo real e eixo imaginário.

27 Neste trabalho vamos considerar sempre a rotação no sentido anti-horário.

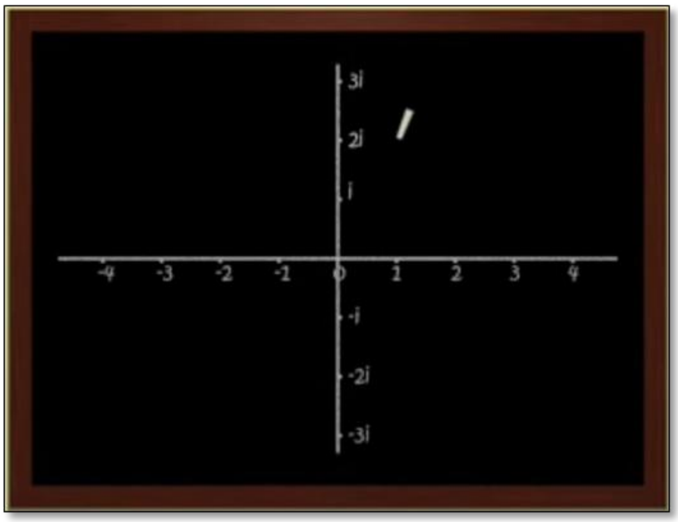


Figura 15 – Eixo real e eixo imaginário, imagem do vídeo Dimensões

E com esta noção de giro de 90º em torno da origem O tem-se, de forma natural, a fundamental característica do número i que é tomada para sua definição:

$$i.i = -1$$

O resultado, de fato, deve ser -1 porque a multiplicação por i, no caso, resulta na rotação de 90º em torno da origem O do ponto associado ao complexo i e o ponto resultante desta rotação corresponde aquele que é associado ao número -1 no eixo real.

4.2 Número complexo e suas representações

O menu Representações do objeto NC trata das representações algébrica e trigonométrica dos números complexos e das correspondentes interpretações como pontos do plano.

4.2.1 Forma algébrica

A partir da identificação do número imaginário i como o ponto $(0,1)$ do plano pode ser introduzido o conjunto de números complexos e a sua identificação com pontos do plano. No sistema de coordenadas do plano, o eixo vertical está associado aos números $i, 2i, 3i, \ldots -i, -2i, \ldots$. Mas geralmente nesse *eixo imaginário* estão os números da forma bi com b número real. No eixo horizontal estão os números reais e este é denominado *eixo real*.

O número complexo $z = a + bi$, com a e b números reais, corresponde ao ponto do plano cartesiano que tem como coordenadas o valor a no eixo real e o valor de b no eixo imaginário. Ou seja, cada número complexo $a + bi$ é identificado com o ponto do plano com coordenadas (a, b). Na Figura 16 tem-se o número complexo $W = -4 + 4i,$ com valor real -4 e imaginário 4 e o número complexo $Z = 5 + 2i$, com valor real 5 e imaginário 2. A Figura 16 é uma imagem da animação que está no objeto de aprendizagem NC; na animação, o número Z e W podem ser manipulados e a expressão algébrica se atualiza, de acordo com a nova posição do correspondente número.

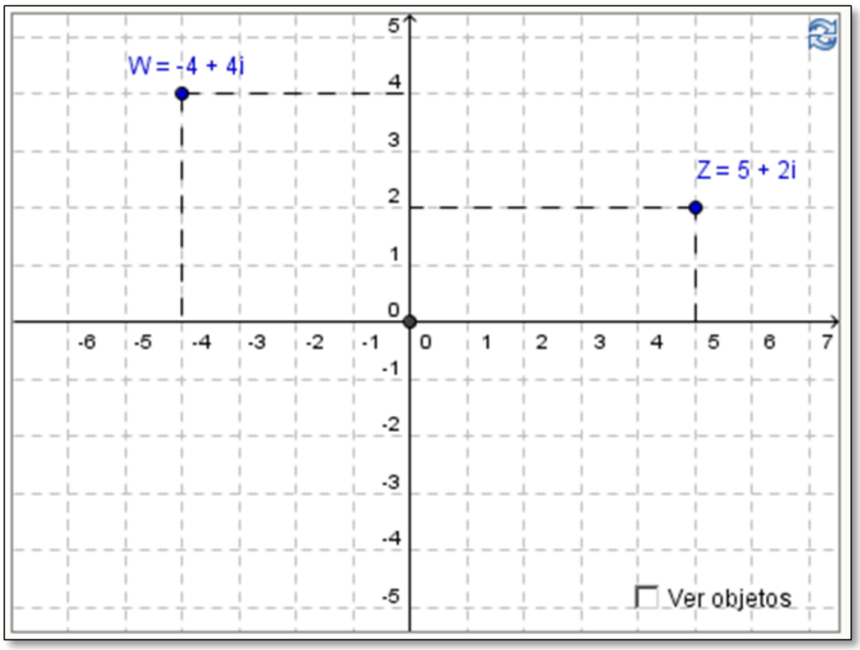


Figura 16 - Forma algébrica do número complexo na tela do objeto NC

No menu Representação é introduzido o conceito de módulo. O módulo do número complexo $z = a + bi$ é dado pela distância do ponto de coordenadas (a, b) à origem O do sistema de coordenadas. Representa-se o módulo por $|z|$ ou r e aplicando-se o teorema de Pitágoras em triângulo retângulo conveniente, indicado na Figura 17, obtém-se $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

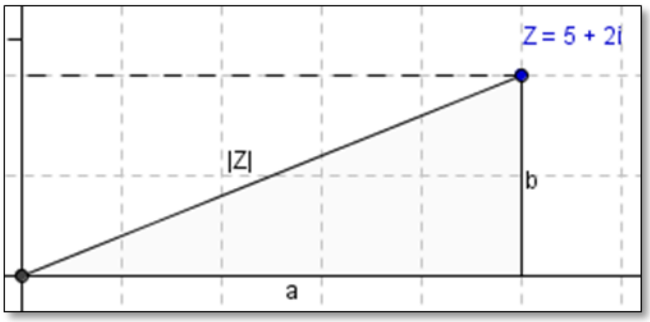


Figura 17 - Módulo do número complexo na tela do objeto NC

Em cada menu do objeto de aprendizagem tem-se questões “Para pensar”. As questões são colocadas de forma a provocar a manipulação dos números que estão na animação. A título de ilustração, na Figura 18 temos as questões relativas à representação algébrica de Z e seu módulo[28].

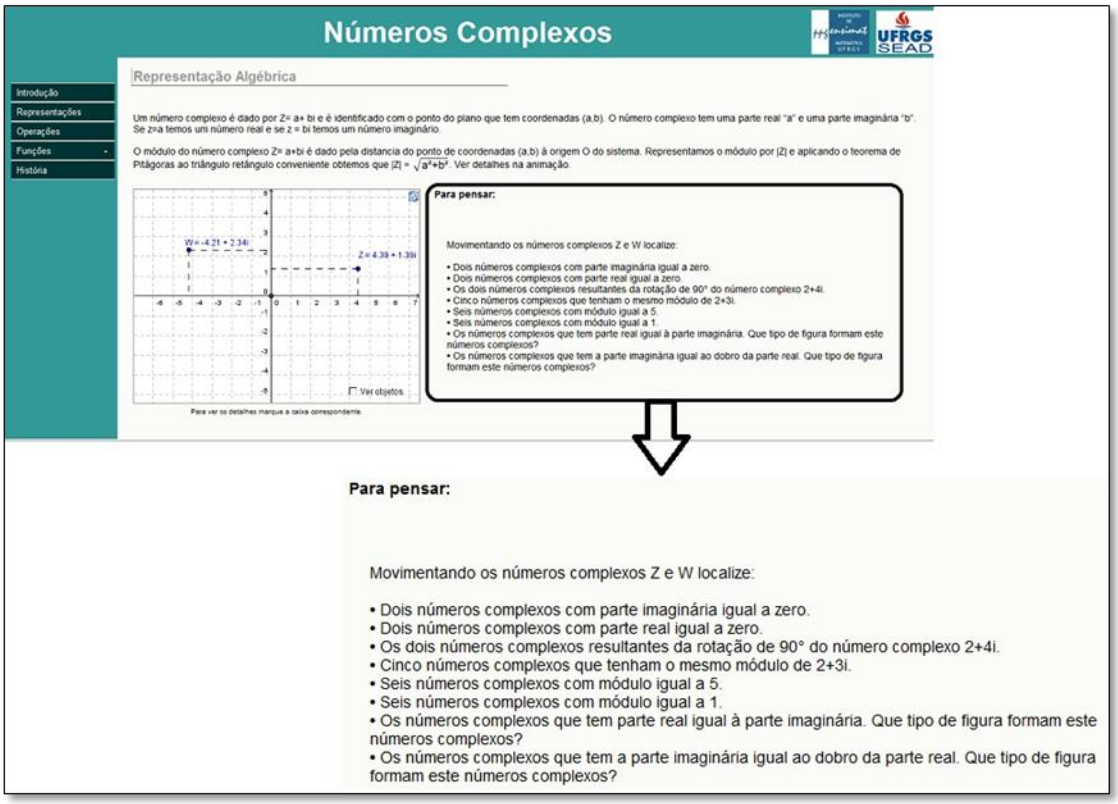


Figura 18 - Seção “Para pensar” no menu “Representações” do objeto NC

[28] As questões “Para pensar” que estão nos demais menus do objeto podem ser consultadas no Anexo que contém as Folhas de Atividades que foram usadas com os alunos, no momento da experiência. A maioria das questões que estão nas Folhas são transcrições da seção “Para pensar” do objeto de aprendizagem.

4.2.2 Forma trigonométrica

Um número complexo $z = a + bi$ também pode ser determinado pelo seu módulo r – é a distância à origem O do sistema, e seu argumento θ - é a medida do ângulo formado pelas semirretas OZ e eixo real positivo OX, conforme indica a Figura 19. A medida do argumento é positiva se o ângulo é medido no sentido anti-horário, a partir de OX; e é negativa, se o ângulo é medido no sentido horário.

A Figura 19 é a tela da animação do objeto. A animação permite a manipulação do módulo r e do argumento θ de Z. No canto superior esquerdo da tela pode-se aumentar ou diminuir o segmento que mede r e vê-se o número Z se afastar ou se aproximar da origem do sistema; também se pode aumentar ou diminuir a medida θ do ângulo e vê-se o número Z girar em torno da origem, nos sentidos anti-horário e horário.

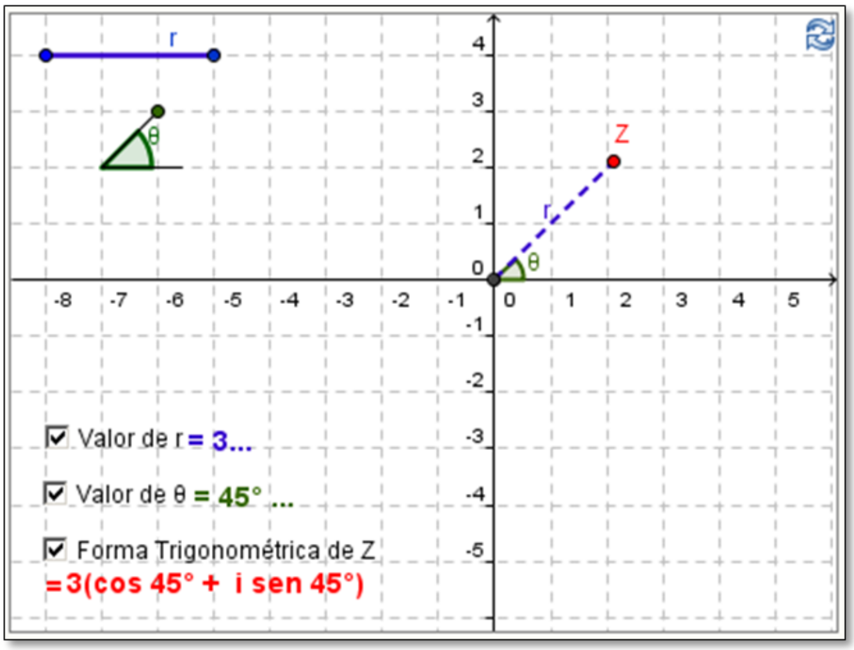


Figura 19 - Módulo e argumento do número complexo na tela do objeto NC

Na tela da animação, ilustrada na Figura 19, é possível selecionar, na sua parte inferior, a visualização dos valores do módulo e do argumento e da forma trigonométrica e ver a atualização destes valores conforme Z se movimenta na tela.

Para obter-se a forma trigonométrica de Z, observa-se o triângulo retângulo formado pelas projeções de Z sobre os eixos real e imaginário e pelo segmento associado ao seu módulo. A medida do ângulo do vértice do retângulo que coincide com a origem do sistema é o argumento de Z. Para esse verificação vamos considerar um triângulo em cada quadrante.

- Para o 1º quadrante, na Figura 20, tem-se o triângulo retângulo com catetos medindo, respectivamente, a e b e com hipotenusa medindo o módulo de Z.

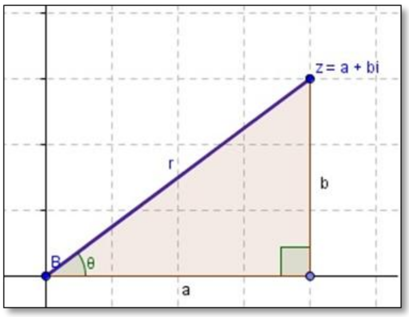


Figura 20 - Argumento e módulo, interpretação no quadrante 1

E pelas relações trigonométricas tem-se:

$$sen\,\theta = \frac{b}{r} \rightarrow b = r\,sen\,\theta$$

$$cos\,\theta = \frac{a}{r} \rightarrow a = r\,cos\,\theta$$

- Para o 2º quadrante a figura 21 mostra o triângulo retângulo com catetos medindo, respectivamente, $|a|$ e b e com hipotenusa medindo o módulo de Z.

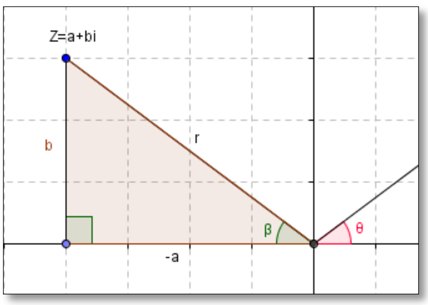


Figura 21 - Argumento e módulo, interpretação no quadrante 2

Considerando a redução do ângulo β ao primeiro quadrante, sabemos que, pelas relações trigonométricas:

$$sen\,\beta = sen(180° - \theta) = sen\,\theta = \frac{b}{r} \rightarrow b = r\,sen\,\theta$$

$$cos\,\beta = cos(180° - \theta) = -cos\,\theta = \frac{-a}{r} \rightarrow -a = r(-\cos\theta) \rightarrow a = r(cos\,\theta)$$

- Para o 3º quadrante a figura 22 mostra o triângulo retângulo com catetos medindo, respectivamente, $|a|$ e $|b|$ e com hipotenusa medindo o módulo de Z.

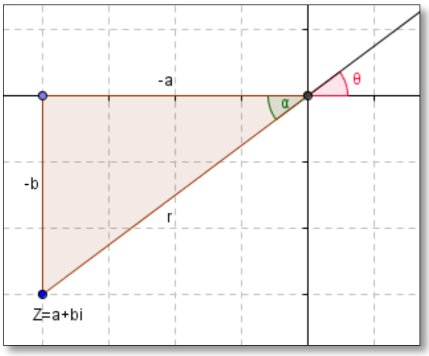


Figura 22 - Argumento e módulo, interpretação no quadrante 3

Considerando a redução do ângulo α ao primeiro quadrante, sabemos que, pelas relações trigonométricas:

$$sen\,\alpha = sen(\theta - 180°) = -sen\,\theta = \frac{-b}{r} \rightarrow -b = r\,(-sen\,\theta) \rightarrow b = r(sen\,\theta)$$

$$cos\,\alpha = cos(\theta - 180°) = -cos\,\theta = \frac{-a}{r} \rightarrow -a = r(-\cos\theta) \rightarrow a = r(cos\,\theta)$$

- E no 4º quadrante a figura 23 também mostra o triângulo retângulo com catetos medindo, respectivamente, a e $|b|$ e com hipotenusa medindo o módulo de Z.

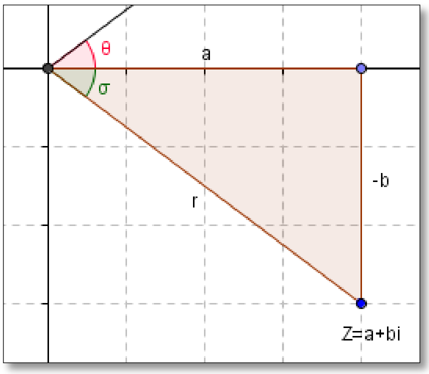


Figura 23 - Argumento e módulo, interpretação no quadrante 4

Considerando a redução do ângulo σ ao primeiro quadrante, sabemos que, pelas relações trigonométricas:

$$sen\,\sigma = sen(360 - \theta) = -sen\,\theta = \frac{-b}{r} \rightarrow -b = r\,(-sen\,\theta) \rightarrow b = r(sen\,\theta)$$

$$cos\,\sigma = cos(360 - \theta) = cos\,\theta = \frac{a}{r} \rightarrow a = r(cos\,\theta)$$

Assim, para todos os quadrantes temos:

pelo Teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e pelas relações trigonométricas:

$$Z = a + bi \rightarrow Z = r\,cos\,\theta + r\,sen\,\theta\,.\,i \rightarrow Z = r(cos\,\theta + i.\,sen\,\theta)$$

A expressão $Z = r(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)$ é denominada forma trigonométrica de Z.

4.3 Operações com os números complexos

O menu Operações do objeto NC trata da soma, da multiplicação e da divisão de números complexos com ênfase na interpretação geométrica. As representações algébrica e trigonométrica serão usadas nesta interpretação.

4.3.1 Soma

A soma de $Z = a + bi$ e $W = c + di$, é dada por

$$Z + W = (a + c) + (b + d)i$$

Ou seja, o novo número $Z + W$ resulta da soma das partes reais e imaginárias dos complexos Z e W.

A soma de números complexos pode ser interpretada geometricamente: $Z + W$ é o ponto extremo da diagonal do paralelogramo formado a partir dos complexos Z e W, conforme ilustra a Figura 24.

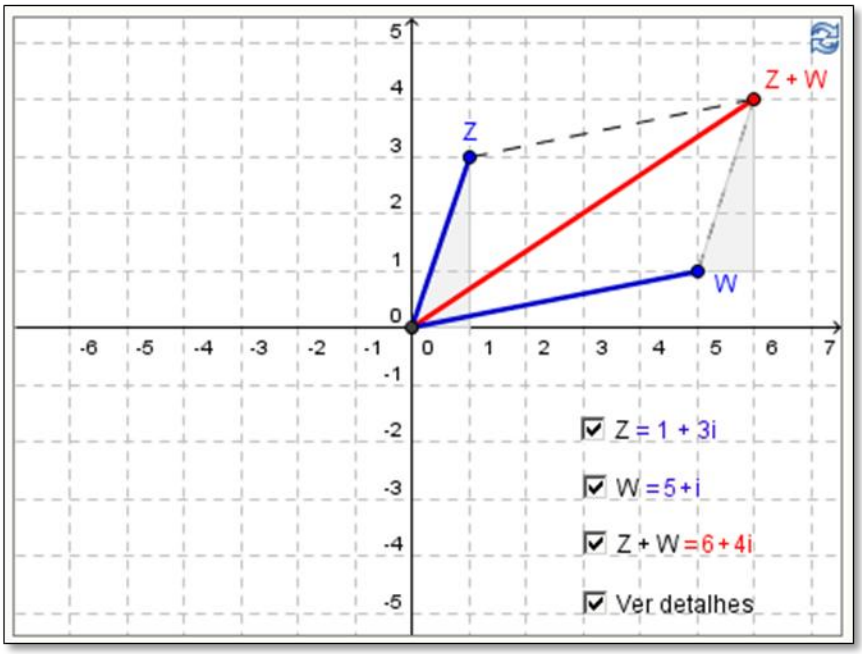


Figura 24 - A soma de dois complexos na tela do objeto NC

A Figura 24 é a tela da animação que está no objeto NC: os complexos Z e W podem ser manipulados e a soma $Z + W$ acompanha a alteração de valores. A animação possui a opção de seleção de visualização dos valores de Z, W e $Z + W$, que se atualizam conforme a mudança de posição dos números complexos Z e W. Ao selecionar a caixa “Ver detalhes”, o usuário tem à disposição os detalhes dos triângulos retângulos que justificam a interpretação geométrica da soma.

Como complemento ao assunto tem-se um recorte do vídeo *Dimensões,* com aproximadamente um minuto. Nele tem-se o exemplo animado da soma $(1 + 2i) + (3 + 1i)$, no qual é feito uso do paralelogramo formado pelos números que serão somados, conforme ilustra a Figura 25.

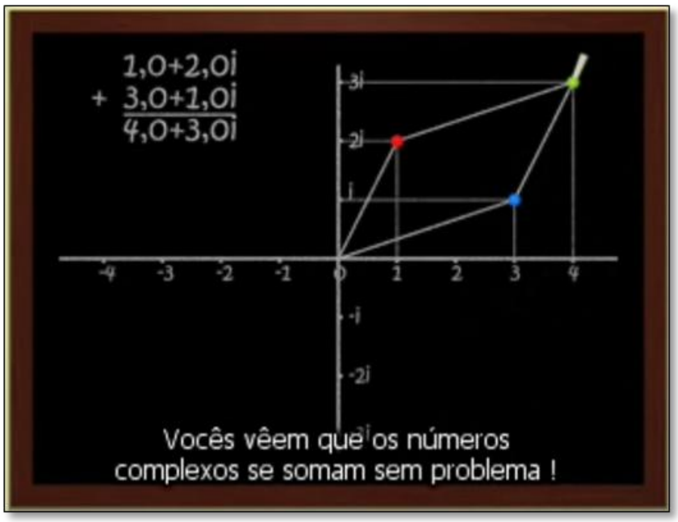


Figura 25 - A soma de complexos, imagem retirada do vídeo Dimensões

4.3.2 Multiplicação

Com $Z = a + bi$ e $W = c + di$ e tendo em mente que a propriedade distributiva da multiplicação de números reais deve ser extendida para a multiplicação de números complexos, tem-se uma natural definição para $Z \cdot W$:

$$Z \cdot W = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

De fato, usando formalmente a distributividade da multiplicação temos:

$$Z.W = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

E como $i^2 = -1$, obtém-se a expressão da multiplicação de $Z \cdot W$ definida acima.

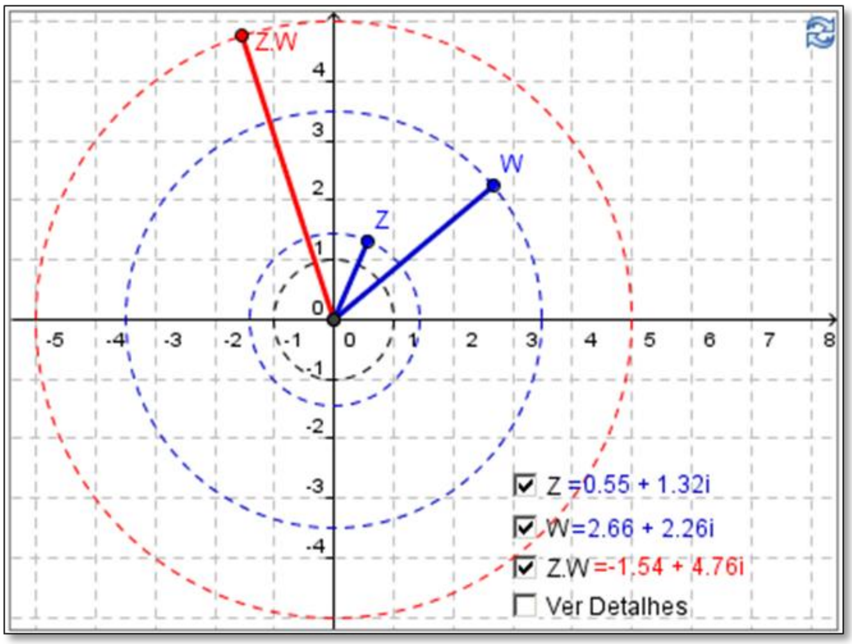


Figura 26 - Multiplicação de números complexos na tela do objeto NC

A Figura 26 é a tela da animação que está no objeto de aprendizagem. Os números Z e W podem ser manipulados e o produto $Z \cdot W$ se atualiza e com a seleção das caixas que estão no canto inferior direito pode-se visualizar os valores correspondentes. A seleção da caixa “Ver detalhes” mostra elementos que explicam a multiplicação através de movimentos geométricos de rotação e homotetia (dilatação ou contração). Na Figura 27 temos os detalhes:

$W = c + di$ e $Z \cdot W$ visto como $Z \cdot W = c \cdot Z + Z \cdot di$.

A multiplicação $c \cdot Z$ corresponde à homotetia aplicada em Z e a multiplicação $Z \cdot di$ corresponde à rotação de Z, de 90º em torno da origem O, seguida de uma homotetia. Desta forma tem-se, na figura, o retângulo com lados determinados pelos números complexos $c \cdot Z$ e $Z \cdot di$. E a soma $c \cdot Z + Z \cdot di$, que corresponde a $Z \cdot W$, é dada pela extremidade da diagonal que está em destaque no retângulo e aqui foi usada a interpretação geométrica da soma de números complexos.

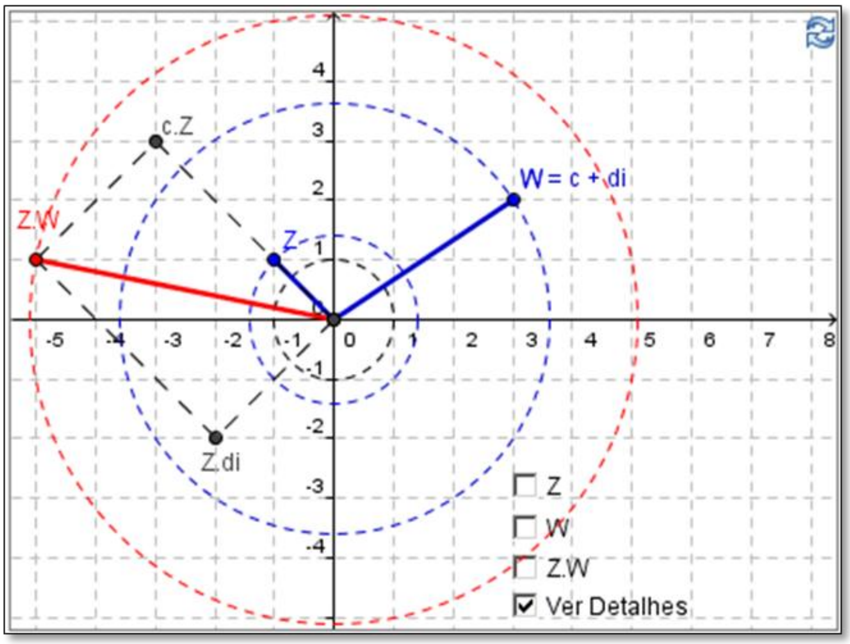


Figura 27 - Detalhes da multiplicação algébrica na tela do objeto NC

Outra forma de interpretar a multiplicação de números complexos é através da representação na forma trigonométrica. Esta representação é mais interessante sob o ponto de vista geométrico.

Colocando $Z = r_1(cos\,\theta_1 + i\,sen\,\theta_1)$ e $W = r_2(cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2)$.

Então, $Z \cdot W = [r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)] \cdot [r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)] =$

$$= r_1 \cdot r_2(cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 + cos\theta_1 \cdot isen\theta_2 + isen\theta_1 \cdot cos\theta_2 + i^2 sen\theta_1 \cdot sen\theta_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2[(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 - sen\theta_1 \cdot sen\theta_2) + i(cos\theta_1 \cdot sen\theta_2 + sen\theta_1 \cdot cos\theta_2)] =$$

$= r_1 \cdot r_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))$ usando-se aqui clássicas identidades trigonométricas[29].

Vemos nesta expressão da multiplicação de Z e W que o módulo de $Z \cdot W$ é o produto $r_1 \cdot r_2$ dos módulos de Z e W, e o seu argumento é a soma $(\theta_1 + \theta_2)$ dos argumentos de Z e W.

---

29 Pelas relações trigonométricas temos: $cosa.cosb + sena.senb = \cos(a - b)$,
$cosa.cosb - sena.senb = \cos(a + b)$,
$sena.cosb - cosa.senb = sen(a - b)$ e
$sena.cosb + cosa.senb = sen(a + b)$.

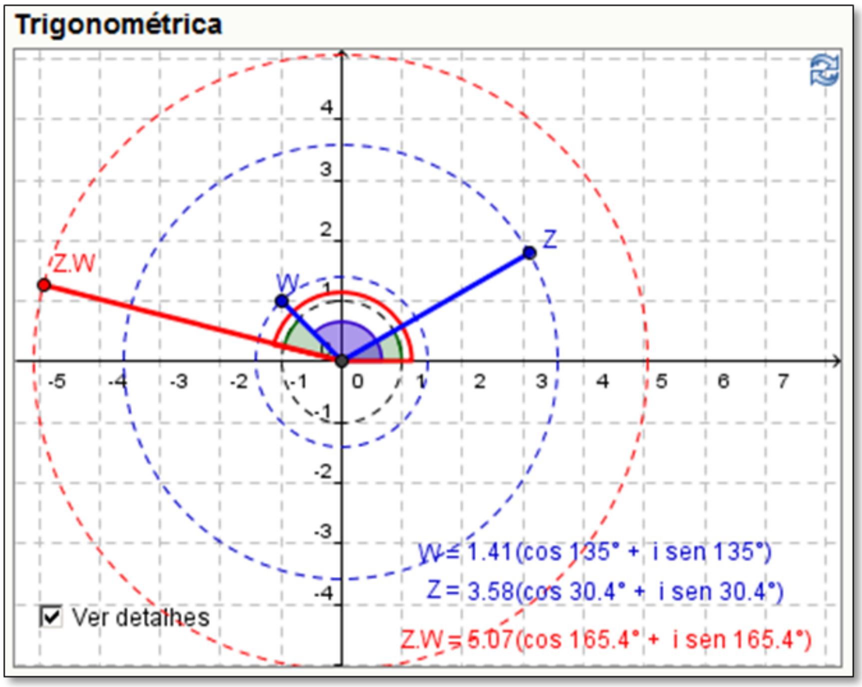


Figura 28 - Outra interpretação da multiplicação na tela do objeto NC

A Figura 28 traz a tela da animação que trata da interpretação da multiplicação quando se usa a forma trigonométrica dos números complexos. Os números Z e W podem ser manipulados e os círculos pontilhados servem para o usuário explorar diferentes situações de multiplicação e assim entender o efeito geométrico que se produz. Por exemplo: se Z se mantém no círculo de raio 1, o efeito em $Z \cdot W$ é de giro de W sem alteração do módulo; se Z se mantém no eixo real, o efeito em $Z \cdot W$ é de dilatação ou contração de W sem alteração do argumento.

Como complemento ao assunto, tem-se um recorte do vídeo *Dimensões* onde é tratado da multiplicação de números complexos. No vídeo, a explicação inicia com a multiplicação de um número complexo Z pelo número real 2 e o resultado é interpretado geometricamente como a dilatação de Z pelo fator 2.

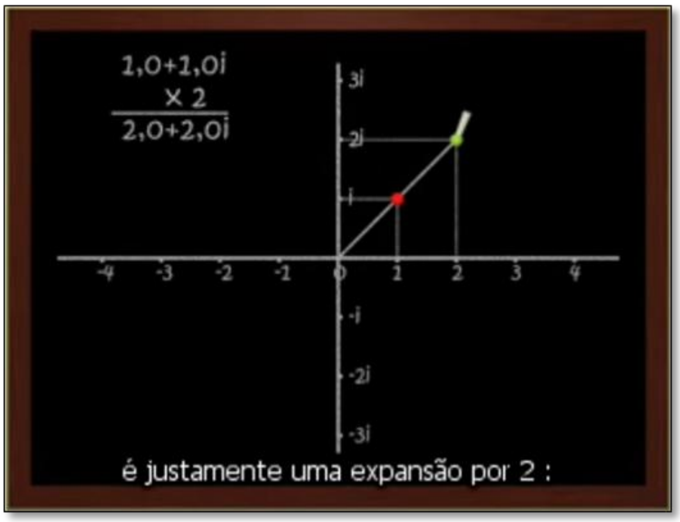


Figura 29 - Multiplicação de complexo por real,

imagem retirada do vídeo Dimensões

Posteriormente, é feita a multiplicação de um número complexo pelo imaginário i, e é lembrada a propriedade atribuída ao i quanto ao seu efeito geométrico - quando multiplica um número produz uma rotação deste número de um quarto de volta em torno da origem O do sistema no sentido anti-horário.

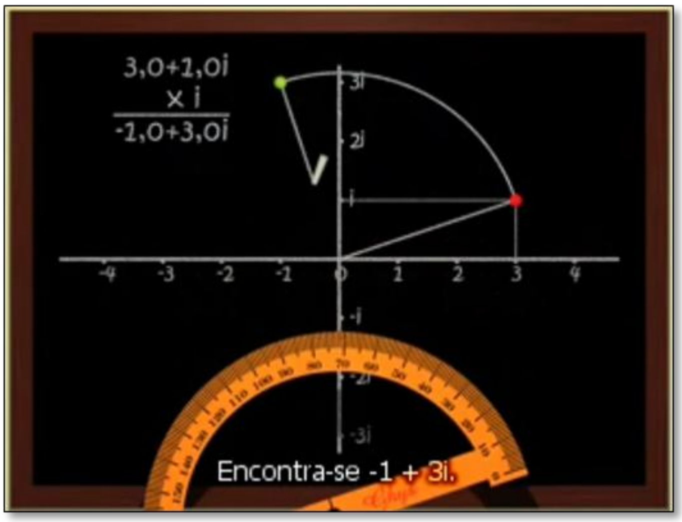


Figura 30 - Multiplicação de um complexo por i,

imagem retirada do vídeo Dimensões

Para explicar a multiplicação de dois complexos quaisquer, o vídeo apresenta inicialmente o resultado algébrico da multiplicação. Depois introduz os conceitos de módulo e argumento de um complexo e então informa sobre o produto dos módulos e a soma dos argumentos no número complexo resultado da multiplicação, mas sem maiores explicações.

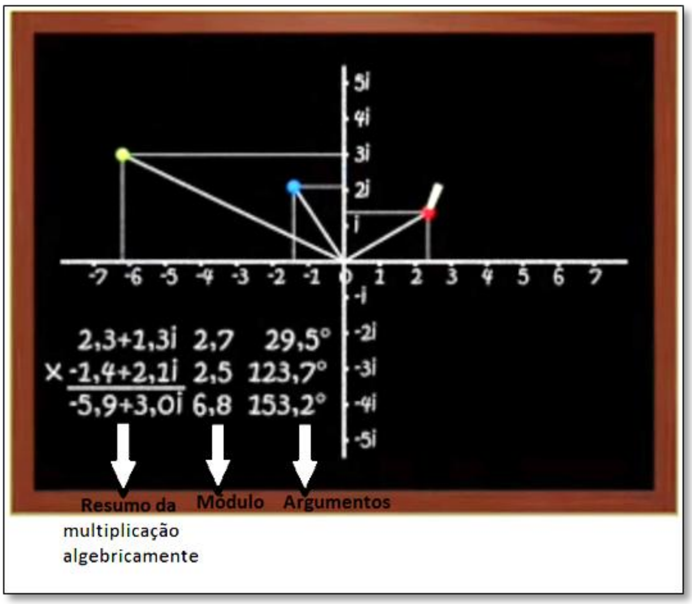


Figura 31 - Interpretação da multiplicação,

imagem retirada do vídeo Dimensões

4.3.3 Divisão

Para se chegar à divisão de dois números complexos, segue-se a lógica de operação inversa da multiplicação. Se, na multiplicação de dois complexos, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos, na divisão se fará o inverso, ou seja, define-se a divisão de dois complexos como:

Sejam $Z = r_1(cos\,\theta_1 + i\,sen\,\theta_1)$ e $W = r_2(cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2)$ e vamos obter o quociente $\frac{Z}{W}$ multiplicando-o por $\frac{\overline{W}}{\overline{W}}$, onde $\overline{W}$ é o conjugado de W, ou seja, se $W = r_2(cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2)$ então $\overline{W} = r_2(cos\,\theta_2 - i\,sen\,\theta_2)$.

Assim, temos que:

$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} \cdot \frac{\overline{W}}{\overline{W}} = \frac{r_1(cos\,\theta_1 + i\,sen\,\theta_1) \cdot r_2(cos\,\theta_2 - i\,sen\,\theta_2)}{r_2(cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2) \cdot r_2(cos\,\theta_2 - i\,sen\,\theta_2)} =$$

$$= \frac{r_1 \cdot r_2}{{r_2}^2} \cdot \frac{cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 - icos\theta_1 \cdot sen\theta_2 + isen\theta_1 \cdot cos\theta_2 - i^2 sen\theta_1 \cdot sen\theta_2}{cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 + sen\theta_1 \cdot sen\theta_2) + i(sen\theta_1 \cdot cos\theta_2 - cos\theta_1 \cdot sen\theta_2)}{1} =$$

$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2))$, ver referência[30]

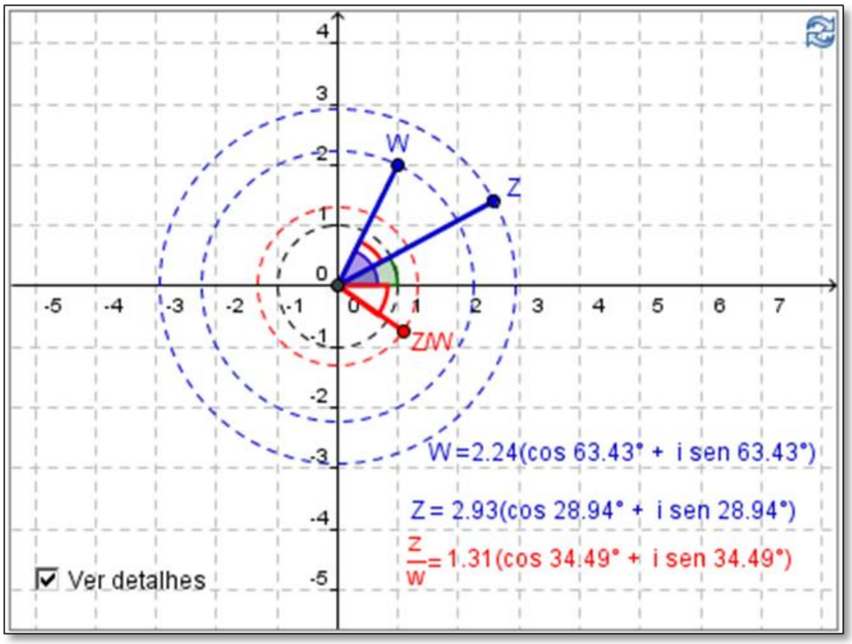


Figura 32 - Interpretação da divisão de números complexos na tela do objeto NC

A Figura 32 mostra a tela da animação que trata da interpretação da divisão. Como nas animações apresentadas anteriormente, é possível manipular os complexos Z e W e observar o efeito no número resultado da divisão; também se podem visualizar as expressões na forma trigonométrica de Z, W e $\frac{Z}{W}$. Na caixa "Ver detalhes" os argumentos dos números são colocados em destaque, podendo constatar a subtração de seus valores.

30 Além das relações trigonométricas já utilizadas na página 62, temos que $sen^2 a + cos^2 a = 1$.

4.4 Funções de Variável Complexa

Funções de variável complexa são relações entre números complexos que respeitam a unicidade de correspondência – para cada número complexo Z é associado um único número complexo W e indicamos esta relação por $F(Z) = W$. Neste trabalho vamos considerar funções em que o conjunto dos números complexos é o domínio, ou seja, são funções que estão definidas para qualquer número complexo Z. A única exceção é a função $F(Z) = \frac{1}{z}$ cujo domínio exclui o número complexo zero.

As funções $f(x) = y$ de uma variável real podem ser interpretadas através de gráficos no plano, dados pelos pontos de coordenadas $(x, f(x))$. Mas se $F(Z) = W$ e as variáveis Z e W são números complexos, não existe uma tal representação gráfica dessa função F, pois Z e W correspondem a pontos no plano e portanto o gráfico de F é um conjunto de pares (Z,W) que está em espaço de dimensão 4, portanto impossível de ser representado. Mas se pode entender $F(Z) = W$ olhando-se um número qualquer Z no domínio (um plano) e observando o efeito que se produz no correspondente número W no contradomínio (também um plano).

A Figura 33 mostra alguns números Z no domínio da função $F(Z) = 2Z$, e os correspondentes números W no contradomínio de F.

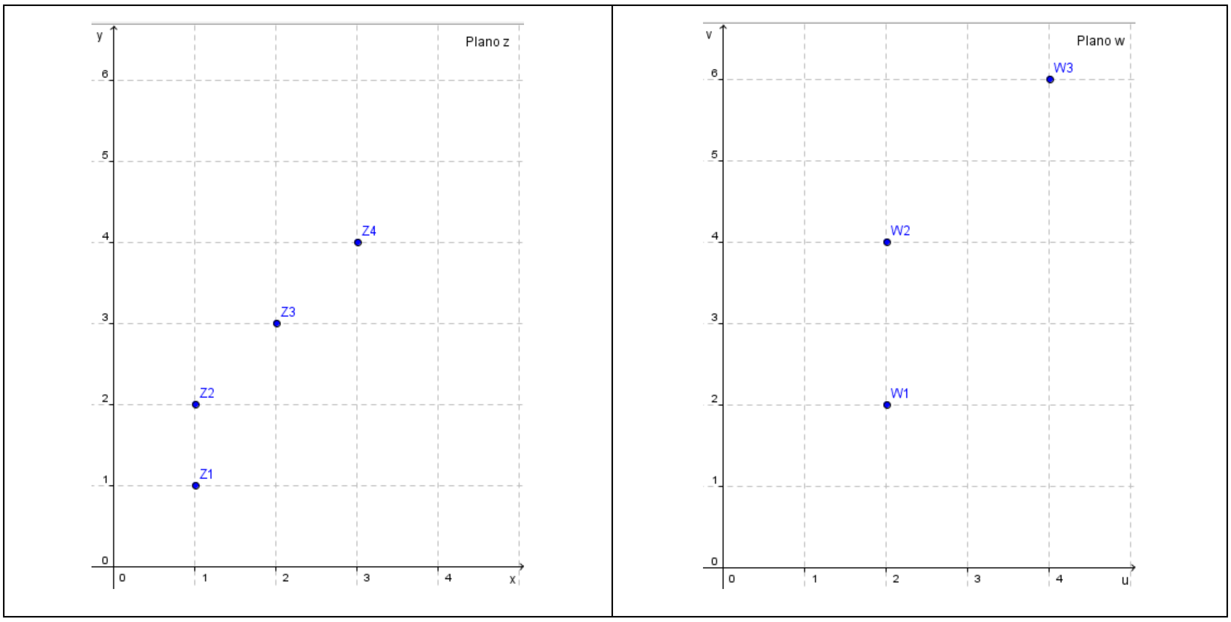
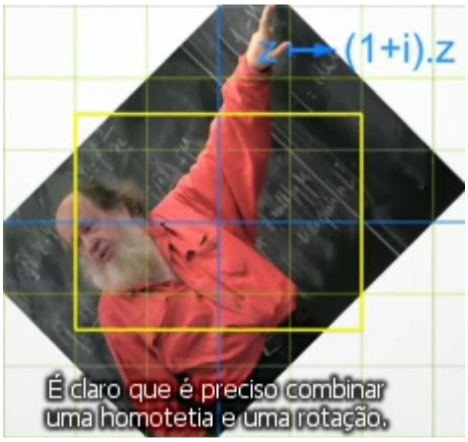
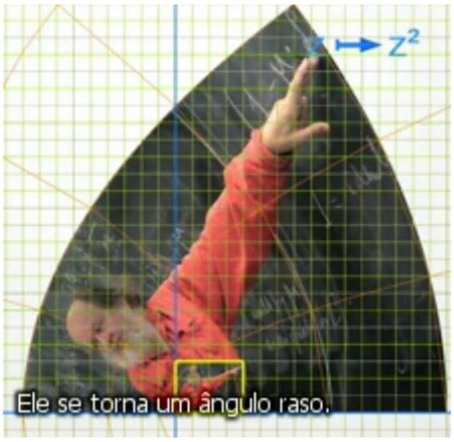
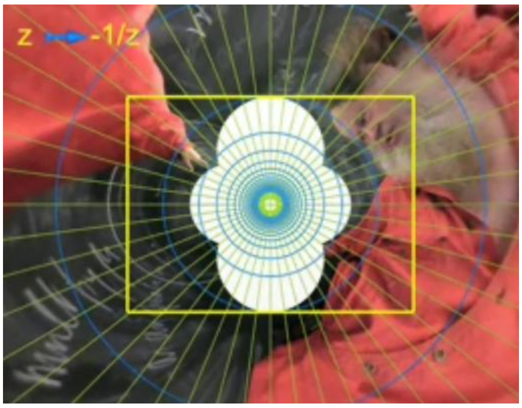


Figura 33 - Domínio e contradomínio da função $F(Z) = 2Z$

Ou seja, as funções $F(Z) = W$ são tratadas como transformações no plano. No vídeo *Dimensões,* o matemático Douady apresenta os efeitos de algumas transformações olhando para um subconjunto do domínio que corresponde a uma fotografia sua. Veja abaixo, na tabela 1, os interessantes efeitos que sofre a sua fotografia, quando ele aplica determinadas transformações.

Tabela 1: Transformações do vídeo Dimensões

	Transformação: $F(Z) = Z/2$ Cada ponto da imagem é dividido por 2, logo o retrato ficou pela metade. Essa transformação chama-se homotetia.
	Transformação: $F(Z) = i.Z$ Sabemos que multiplicar por i é girar 90º, o módulo não altera, mas o argumento aumenta 90º. A foto é girada.

	Transformação: $F(Z) = (1 + i).Z$ O número $1 + i$ tem argumento 45º e módulo $\sqrt{2}$. Multiplicar por $1 + i$ é multiplicar os módulos por $\sqrt{2}$ e somar aos argumentos 45º. É a combinação de uma homotetia com uma rotação, chamada de semelhança.
	Transformação: $F(Z) = Z^2$ O argumento de Z^2 é o dobro do argumento de Z e o módulo é elevado ao quadrado, e assim a foto fica deformada
	Transformação: $F(Z) = -1/Z$ Os números complexos com módulos grandes tornam-se números com módulos pequenos e assim reciprocamente, números com módulos pequenos tornam-se números com módulos grandes.

O menu Funções no objeto de aprendizagem NC apresenta as seguintes funções:

- $F(Z) = A + Z$

- $F(Z) = Z \cdot A$

- $F(Z) = Z \cdot Z$

- $F(Z) = \frac{1}{Z}$

Para cada função é feita uma exploração geométrica que procura relacionar conjuntos de pontos no domínio com correspondente conjunto de pontos no contradomínio. As animações que explicam as funções utilizam o mesmo plano para domínio e contradomínio e é feito o uso de cores para diferenciar as variáveis independente e dependente: ponto no domínio tem cor azul e ponto correspondente no contradomínio tem cor vermelha. A seguir, em cada subseção, apresentamos as funções que estão no menu Funções do objeto NC.

4.4.1 Função $F(Z) = A + Z$

A transformação $F(Z) = A + Z$ onde A é uma constante complexa faz a translação de cada ponto Z segundo o segmento orientado OA. Assim, a imagem de uma curva qualquer é translação da curva.

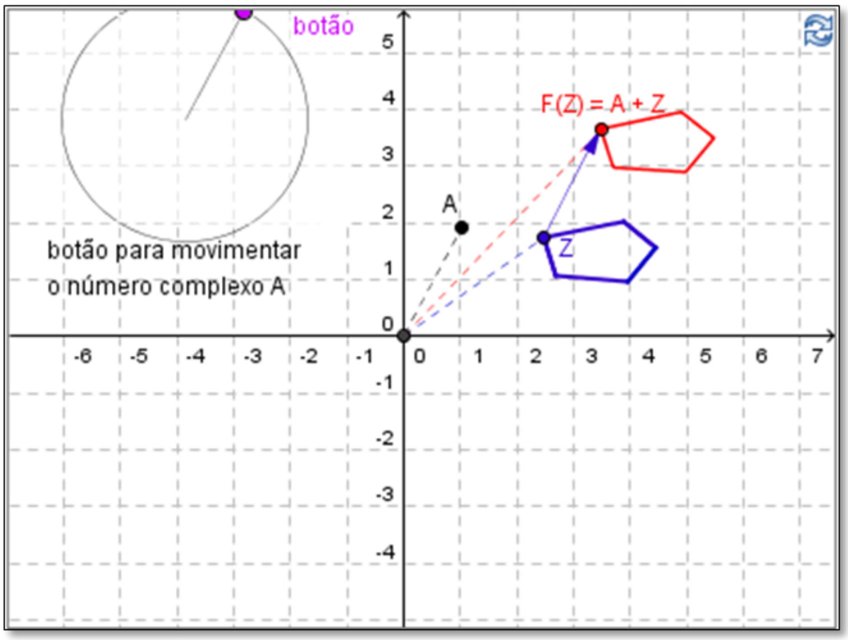


Figura 34 - Tela da animação de $F(Z) = A + Z$

A Figura 34 é a animação manipulativa disponível no objeto de aprendizagem. Quando o número Z (o ponto azul) é manipulado e percorre o polígono azul, o número W (o ponto vermelho) percorre um polígono vermelho, e os dois são congruentes entre si. O valor do parâmetro A, que determina a translação, pode ser alterado no botão que está no canto superior esquerdo, e assim o usuário pode explorar diferentes transformações de translação.

A Figura 35 é a tela de uma segunda animação. Esta animação permite explorar a função agindo livremente em números do domínio e produzindo seu efeito no contradomínio. Tem-se na animação a opção de habilitar o “Rastro” de Z e $F(Z)$ e com este recurso pode-se criar uma curva qualquer com Z e ver sua correspondente transformação feita por $F(Z)$. Ao selecionar “Ver detalhes”, o usuário tem acesso ao paralelogramo que explica o efeito de translação de $F(Z) = A + Z$.

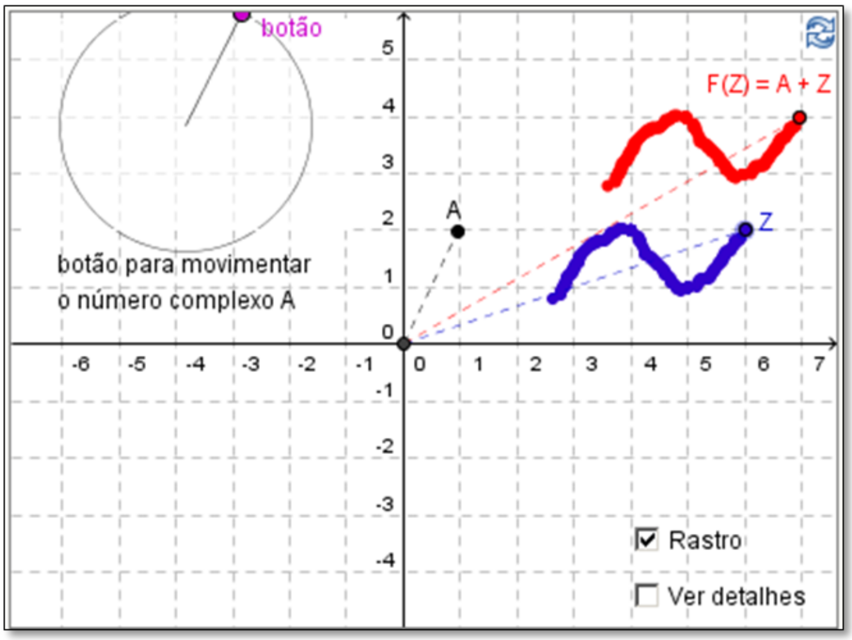


Figura 35 - Tela da animação ponto a ponto de $F(Z) = A + Z$

4.4.2 Função $F(Z) = Z \cdot A$

A função $F(Z) = Z \cdot A$, onde A é uma constante complexa, produz um efeito de rotação segundo o argumento de A seguido de homotetia que tem como fator o módulo de A. A transformação F aplicada a uma curva produz como imagem uma curva que é a rotação no sentido anti-horário e, a dilatação da curva inicial.

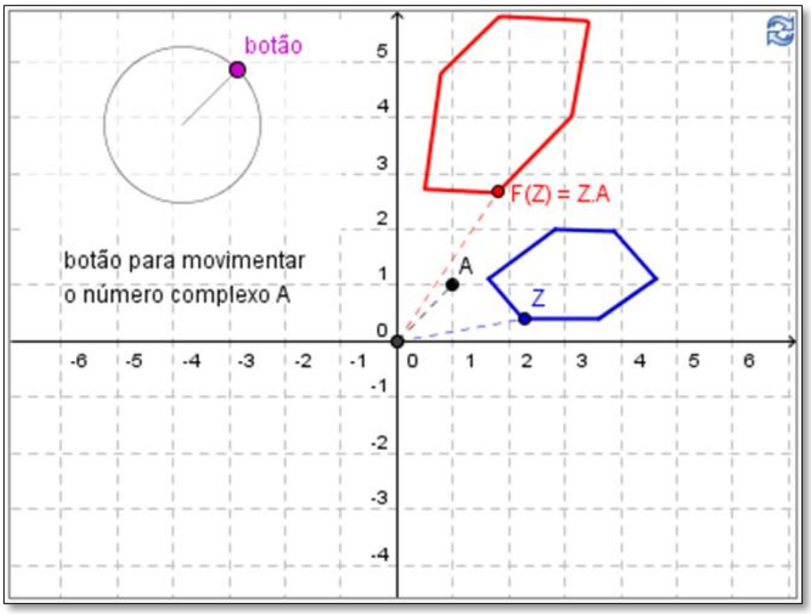


Figura 36 - Tela da animação da função $F(Z) = Z \cdot A$

A animação da Figura 36 traz a interpretação da função através do polígono azul gerado pelo complexo Z e o correspondente polígono vermelho gerado por $F(Z)$. Vê-se no dinamismo da animação que o polígono vermelho resulta da rotação e ampliação do polígono azul. Nesta animação também é possível mudar o parâmetro A através do botão que está no canto superior esquerdo e isto permite ao usuário explorar diferentes transformações $F(Z) = Z \cdot A$.

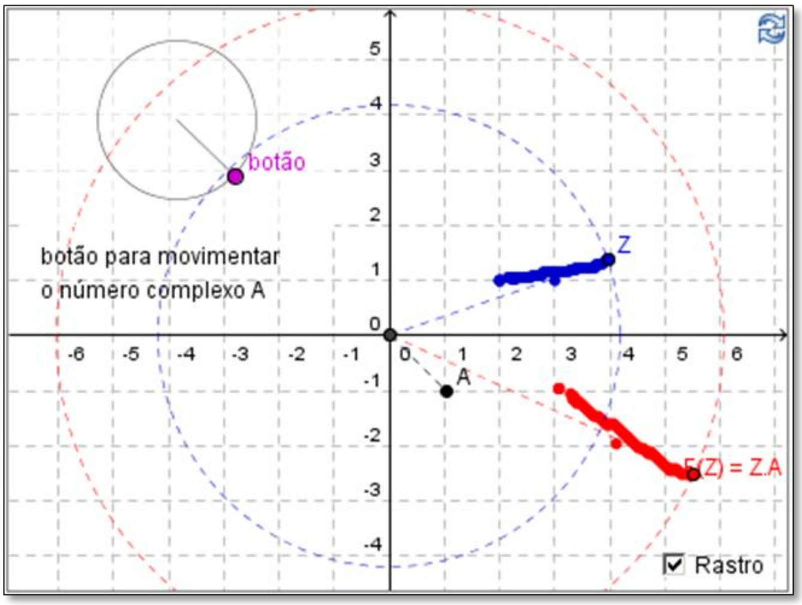


Figura 37 - Tela da animação ponto a ponto da função $F(Z) = Z \cdot A$

A Figura 37 é a segunda animação manipulativa do objeto de aprendizagem onde se pode visualizar a função $F(Z) = Z \cdot A$. Nela há a possibilidade de se manipular livremente o número complexo Z e observar o efeito resultante no número complexo $F(Z)$, habilitando-se para isto os correspondentes "Rastros". Para um maior entendimento da transformação o usuário tem a possiblidade de alterar o valor do parâmetro A, no botão que está no canto superior esquerdo da tela da animação.

4.4.3 Função $F(Z) = Z \cdot Z$

A função $F(Z) = Z \cdot Z$ transforma Z em um número complexo que tem módulo igual ao quadrado do módulo de Z e argumento igual a duas vezes o argumento de Z. Assim quanto maior o módulo Z maior ainda é o módulo de $F(Z)$; quanto menor o módulo de Z, menor ainda o módulo de $F(Z)$. E o giro de $F(Z)$, seu argumento, é dado pelo dobro do argumento de Z. Este comportamento de F deforma figuras, conforme ilustra a Figura 38: o quadrado azul é transformado no “quadrilátero curvo” vermelho.

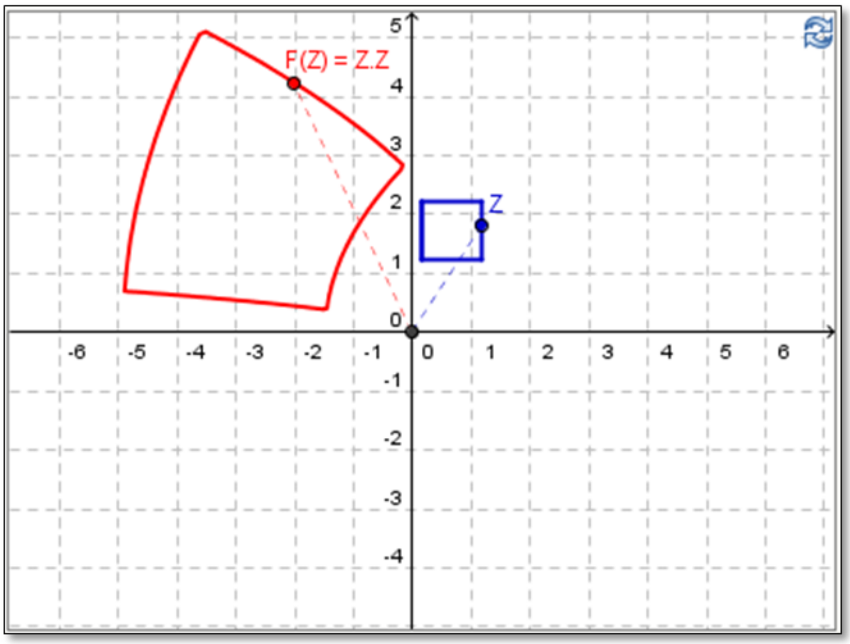


Figura 38 - Tela da animação da função $F(Z) = Z \cdot Z$

A Figura 38 é a tela da animação manipulativa que está no objeto NC. Nela se pode manipular o número Z (ponto azul) percorrendo o quadrado azul e o número $F(Z)$ (ponto vermelho) percorre o “quadrilátero curvo”.

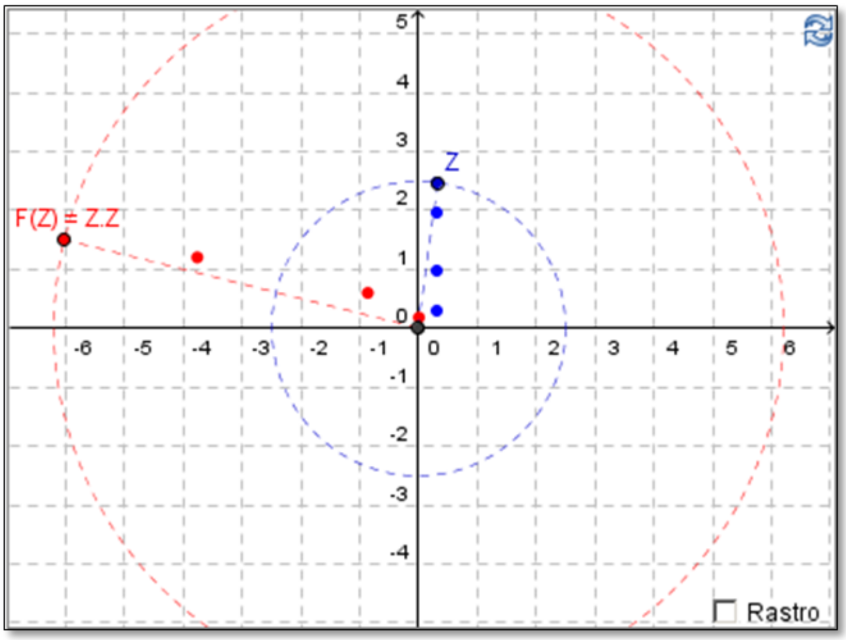


Figura 39 - Tela da animação ponto a ponto da função $F(Z) = Z \cdot Z$

A Figura 39 mostra a segunda animação relativa a função $F(Z) = Z \cdot Z$. Nela se pode manipular livremente o número complexo Z e observar o correspondente efeito no número complexo $F(Z)$, habilitando-se os correspondentes "Rastros".

4.4.4 Função $F(Z) = \frac{1}{Z}$

Para entender a transformação $F(Z) = \frac{1}{Z}$ escrevemos $Z = r(\cos\theta + i\, sen\theta)$ e obtemos:

$$F(Z) = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\, sen\theta)} \cdot \frac{r(\cos\theta - isen\theta)}{r(\cos\theta - isen\theta)} = \frac{1}{r}(\cos\theta - isen\theta)$$

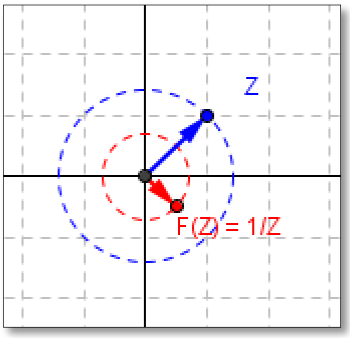


Figura 40 - Função Inversa

Comparando Z e $F(Z)$, conforme ilustra a figura 40, vemos que:

- quanto maior o módulo r de Z, menor se torna $\frac{1}{r}$ o módulo de $F(Z)$, e vice-versa;

- os números Z e $F(Z)$ se posicionam em semirretas que são a reflexão, uma da outra, em relação ao eixo real OX.

Esse efeito também pode ser explicado através da composição das transformações de inversão I em relação ao círculo unitário e de reflexão R em relação ao eixo real OX, conforme ilustra a Figura 41[31].

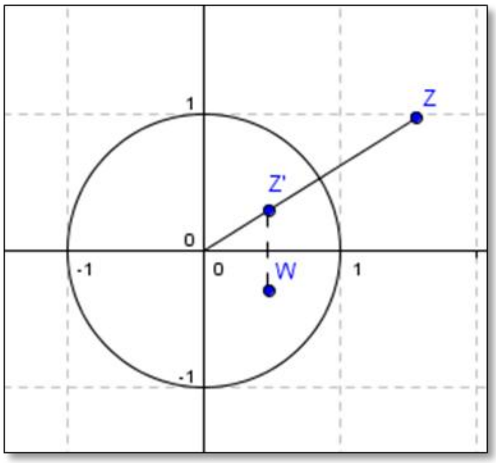


Figura 41 - Transformações $I(Z) = Z', R(Z') = W\ e\ \ R \circ I\ (Z)\ = \frac{1}{Z}$

[31] A inversão I de Z é o número complexo $I(Z) = Z'$ que está na semirreta OZ e satisfaz $|Z|*|W| = 1$. A reflexão R de $Z = a + bi$, em relação ao eixo OX, é o número complexo $R(Z) = a - bi$.

Assim, os números complexos que ficam fora do círculo unitário são levados ao interior do círculo, e, reciprocamente, os complexos dentro do círculo são levados para o exterior do círculo e após são refletidos em relação ao eixo OX. Os números complexos sobre o círculo unitário se mantém sobre este círculo e são refletidos em relação ao eixo OX.

Abaixo, a Figura 42 traz a tela da animação manipulativa presente no objeto de aprendizagem. Quando o número Z (ponto em azul), com a manipulação, percorre o quadrado azul, o número $F(Z)$ descreve a curva vermelha.

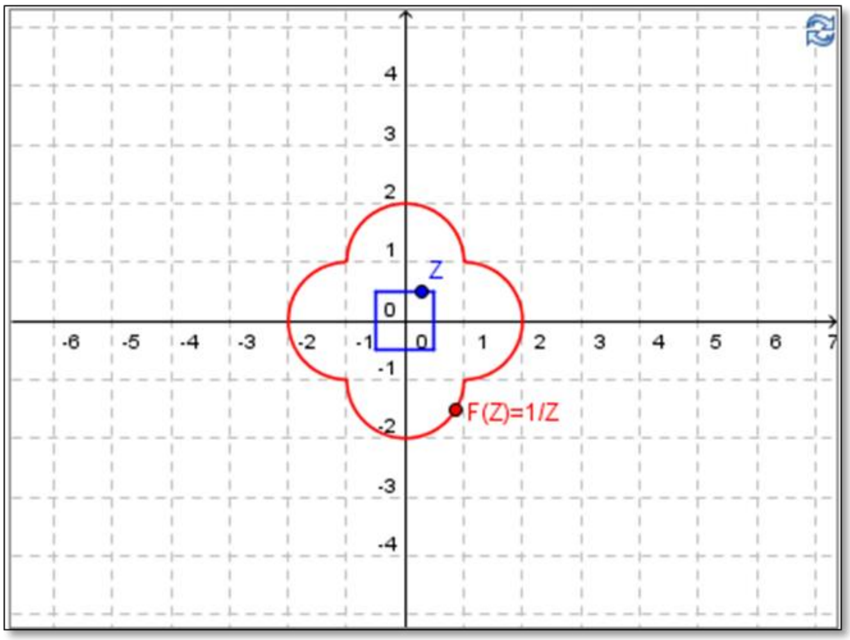
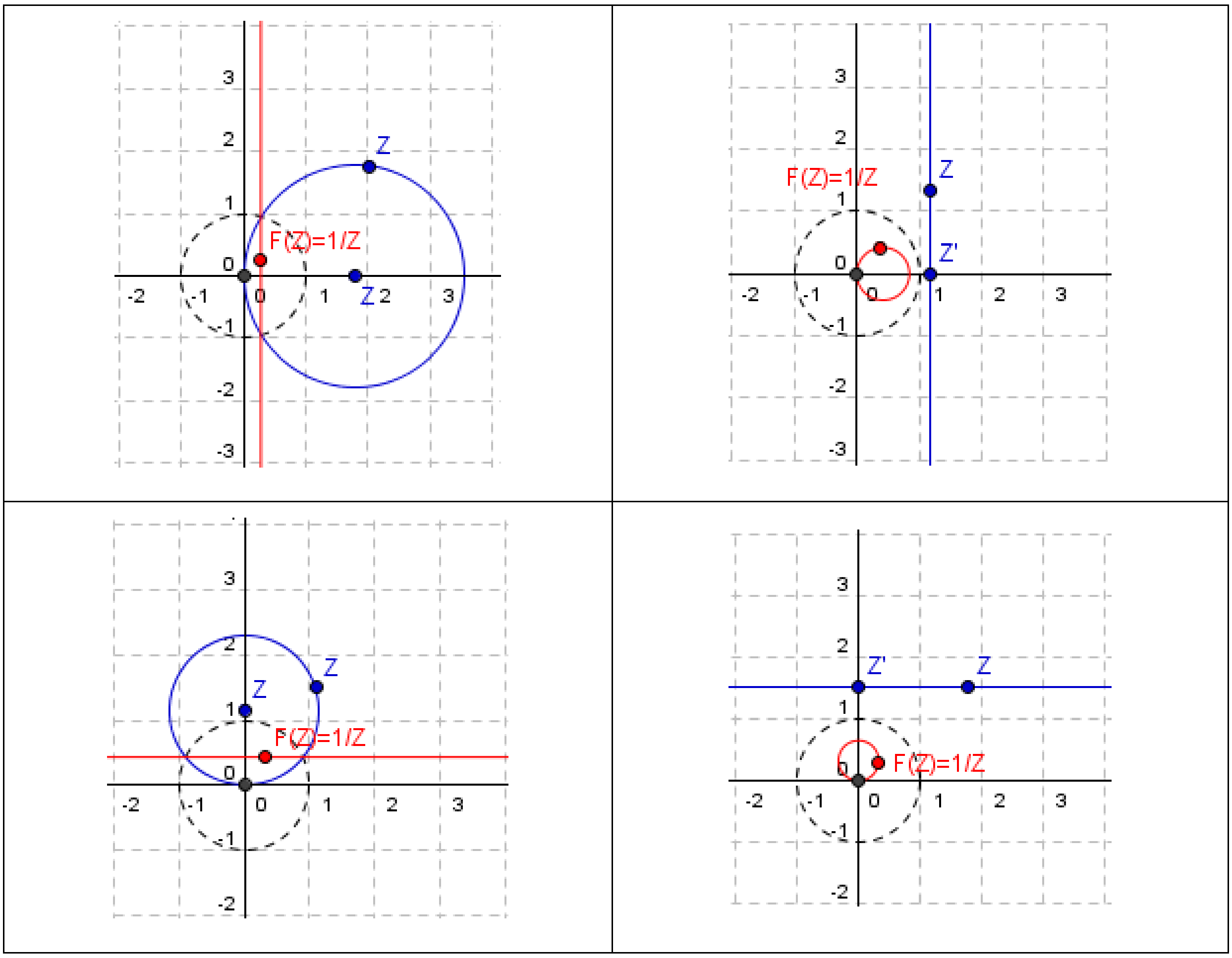


Figura 42 - Animação da função $F(Z) = 1/Z$

O efeito geométrico da transformação $F(Z) = \frac{1}{Z}$ diferentemente das transformações anteriores, não é simples de entender. No objeto de aprendizagem NC tem-se outras animações que exploram essa função e que possibilitam o entendimento cada vez maior desta estranha transformação. Veja na Tabela 2 as telas dessas outras animações.

Tabela 2: Animações do objeto NC referente à função $F(Z) = 1/Z$



Com esta apresentação de conteúdos dos números complexos e funções de variável complexa, fazendo uso de tecnologias, tem-se a fundamentação matemática que vai ser usada na elaboração da proposta didática que pretende fazer um ensino diferenciado deste assunto. É disto que trata o próximo capítulo.

5 A IMPLEMENTAÇÃO E A ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ENSINO

Neste capítulo, apresentar-se-á a construção, a experimentação e a validação de uma proposta didática para o ensino de números complexos no ensino básico. A proposta pretende ir além do tradicional ensino desse conteúdo nas escolas de ensino médio, ao vincular o ensino com tecnologias. É uma proposta que pretende proporcionar situações de aprendizagem em que os alunos têm a oportunidade de assistir vídeos e explorar animações que tratam de esclarecer os diferentes conceitos a serem aprendidos.

A metodologia de investigação utilizada para construção da proposta é a Engenharia Didática, uma metodologia de pesquisa que surgiu no início da década de 1980. Segundo Artigue (1996), essa metodologia serve para a realização de pesquisas no âmbito do sistema de ensino, pois ela articula a pesquisa com a ação na sala de aula, com a prática educativa, dando significado e colocando à prova as construções teóricas criadas na investigação.

A seguir, será traçada a descrição de cada fase que constitui a Engenharia Didática, relacionando com a investigação apresentada neste trabalho. As fases da engenharia são:

1) Análises prévias

2) Concepção da proposta e análise *a priori*

3) Experimentação

4) Análise *a posteriori* e validação da proposta.

5.1 Análises prévias

As análises prévias tratam de como o conteúdo é normalmente ensinado e seus efeitos; tratam das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos para efetivar essa aprendizagem; tratam do desenvolvimento histórico do assunto a ser ensinado e também tratam da sua fundamentação matemática.

Dentro deste trabalho, as análises prévias encontram-se desenvolvidas nos capítulos 2, 3 e 4. Relembra-se que o capítulo 2 tratou de questões de aprendizagem e ensino; o capítulo 3 tratou da história do desenvolvimento do campo dos números complexos; o capítulo 4 tratou da fundamentação matemática do assunto.

5.2 Concepção da proposta didática e análise *a priori*

O problema identificado, que trouxe a necessidade dessa engenharia didática, trata-se da dificuldade que os alunos demonstram de interiorizar os conceitos de números complexos e aplicar esses conhecimentos nas diversas questões que podem ser solucionadas com suas propriedades. Ainda, há o desinteresse dos estudantes perante as aulas tradicionais de matemática.

Identificado o problema a ser investigado e levando-se em consideração as análises prévias, vem a fase das escolhas didáticas a serem feitas para enfrentar e tentar solucionar o problema. Essas escolhas fazem surgir uma proposta didática que se apoia em análises *a priori,* que adiantam a eficácia da proposta e, em seguida, procede à aprendizagem desejada pelo professor.

No contexto deste trabalho, as principais escolhas didáticas são:

- fazer uso de tecnologias,
- propiciar a participação ativa dos alunos na construção dos seus conhecimentos.

As tecnologias serão utilizadas para poder explorar, de uma maneira dinâmica, diferentes registros semióticos, com o intuito de promover a compreensão e assimilação dos conceitos relativos a números complexos e Funções de Variável Complexa. É com este propósito que vão ser utilizados o vídeo *Dimensões* e o objeto de aprendizagem Números Complexos (NC), apresentados no capítulo 4 desta dissertação.

A sequência de atividades que constrói a proposta acompanha os menus do objeto NC e tem como conteúdos: números complexos e suas representações; operações com números complexos; e funções de variável complexa.

São seis atividades e elas estão elencadas na tabela 3 abaixo. Cada atividade exige a manipulação de uma animação e é através desta manipulação que devem ser respondidas as questões que estão na seção “Para pensar”.

Como material para registro do trabalho feito pelos alunos foi elaborada a Coleção de “Folha de Atividade“, disponível nos Apêndices. Em cada "Folha de Atividade" tem-se a transcrição das questões "Para Pensar" que estão no objeto NC junto as diferentes animações; na "Folha" também foram incluídas algumas questões complementares. As "Folhas", preenchidas com as respostas dos alunos, foram recolhidas ao final de cada atividade e elas serviram como material para análise da proposta didática.

Tabela 3: Assuntos tratados na proposta didática

Atividades	**Assunto**	**Menu do Objeto de aprendizagem**	**Questões “Para Pensar”**
Atividade 1	Definição e Representação algébrica do número complexo	Introdução e Representações	10 questões
Atividade 2	Representação trigonométrica do número complexo	Representações	7 questões
Atividade 3	Adição de complexos	Operações	7 questões
Atividade 4	Multiplicação na forma algébrica	Operações	9 questões
Atividade 5	Multiplicação na forma trigonométrica	Operações	6 questões

Atividade 6	Função $F(Z) = A + Z$	Funções	3 questões utilizando a 1ª animação 5 questões utilizando a 2ª animação

Como análise *a priori* geral, pode-se dizer que a manipulação que pode ser feita nas diferentes animações que estão no objeto NC foi pensada para que o usuário tivesse muita liberdade na exploração do conteúdo a ser aprendido.

Por exemplo, no menu que trabalha com as Operações, podemos observar a animação da multiplicação na forma trigonométrica. A Figura 43 ilustra como o aluno pode observar diferentes situações na multiplicação: ele pode observar o comportamento da soma de argumentos e da multiplicação de módulos de $Z \cdot W$, conforme altera os valores de Z e W. E mais, uma manipulação criteriosa de Z e W ajuda para um maior entendimento da multiplicação $Z \cdot W$ - por exemplo, manter Z no eixo real ou no eixo imaginário; ou manter Z em alguma outra reta.

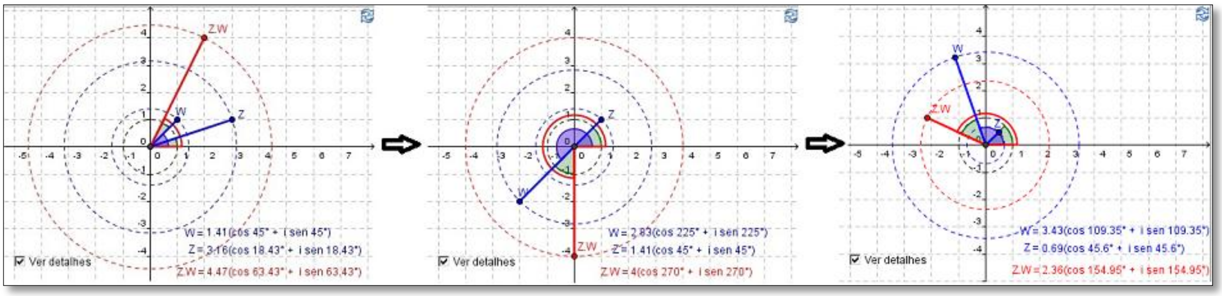


Figura 43 - Manipulação da animação referente à multiplicação

Quanto ao menu das Funções no objeto NC, a Figura 44 ilustra algumas manipulações que podem ser feitas pelo aluno. No caso da transformação de translação $F(Z) = A + Z$, inicialmente o aluno pode explorar o movimento de Z e observar o efeito em $F(Z)$. Posteriormente pode trabalhar com diferentes transformações, pois tem a disposição um botão que modifica o valor de A e assim ele pode, por exemplo, explorar translações vertical, horizontal ou em outra direção qualquer.

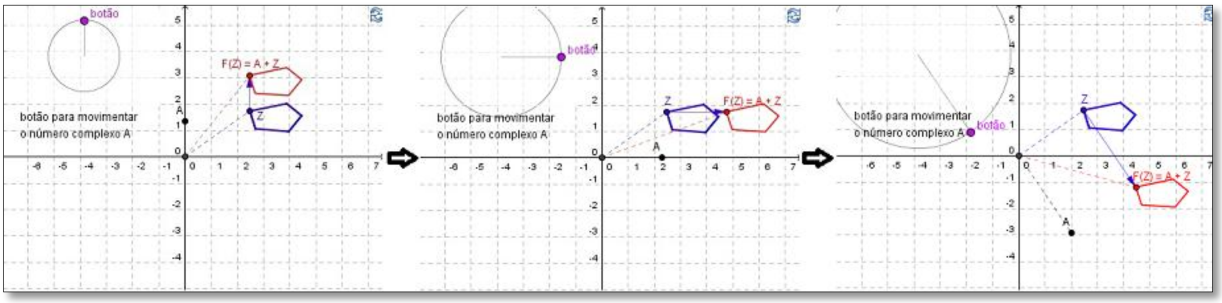


Figura 44 - Manipulação da animação referente à translação

As diferentes animações do objeto de aprendizagem fazem com que o aluno tire conclusões diante de suas próprias experiências. Ele explora o objeto e constata seus efeitos e assim avança no entendimento dos diferentes conceitos que estão sendo apresentados.

Também quanto às questões propostas na seção “Para pensar”, pode-se dizer que foram concebidas para que o aluno manipulasse as animações de modo a bem entender o conceito sob estudo. As questões provocam a manipulação da animação e tratam de aspectos conceituais; não são do tipo de exercícios repetitivos e de memorização e aplicação de inúmeras fórmulas. Ao que segue, são mostrados quatro exemplos de questões que ilustram isso:

a) Localize os dois números complexos resultantes da rotação de 90° do número complexo $2 + 4i$.

Nesta questão o aluno precisa posicionar o número $2 + 4i$ na animação manipulativa e verificar onde estaria o correspondente deste nas rotações de 90º. Aqui o aluno vai utilizar o conceito da rotação estudado para definir o número i, e criar uma estratégia para enxergar essa rotação, como por exemplo, pelo segmento do módulo desse número, ou pelo retângulo formado pelas projeções nos eixos. A Figura 45 mostra como o aluno pode manipular o objeto para chegar na solução de um dos valores.

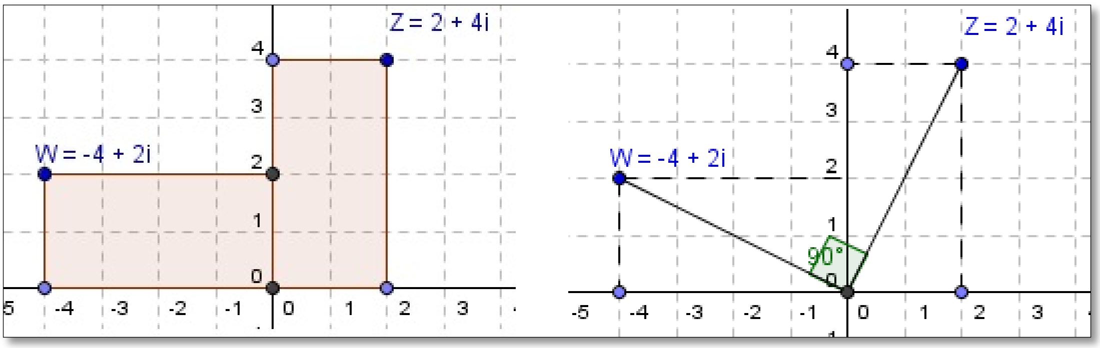


Figura 45 - Exemplo de manipulação para responder uma questão

b) Dê cinco números complexos que tenham o mesmo módulo de $2+3i$. Escreva estes números na forma algébrica.

Nesta questão, o aluno deverá ter bem estruturado o conceito de módulo, pois o objetivo não é que ele faça cálculos e sim que use o conceito de módulo como sendo a distância do número complexo. Assim o que ele precisa é ou localizar na grade quadriculada retângulos congruentes aquele determinado por $2+3i$ ou imaginar o círculo determinado por $2+3i$ e observar que até existem infinitas respostas.

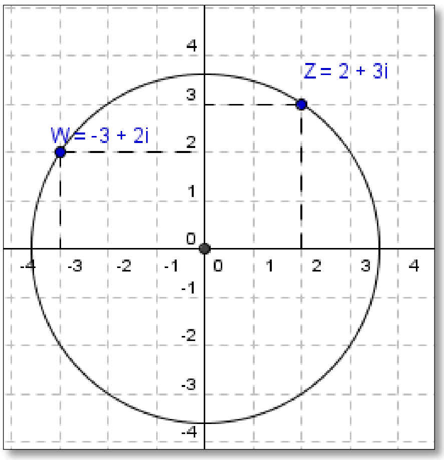


Figura 46 – Retângulo e círculo determinado pelo número complexo $2+3i$

c) Se $Z.W = r(cos\,90° + isen\,90°)$ mostre Z e W em pelo menos três situações diferentes.

Nesta questão o aluno precisa encontrar imagens inversas da operação de multiplicação e isto obriga em entendimento muito claro do efeito da multiplicação. No caso, o aluno deve localizar dois complexos cujos argumentos somem 90º e tem liberdade quanto a escolha dos módulos. Quando a questão pede três situações, ela obriga o aluno a pensar em situações que não as mais óbvias (tipo Z no eixo real e W no eixo imaginário).

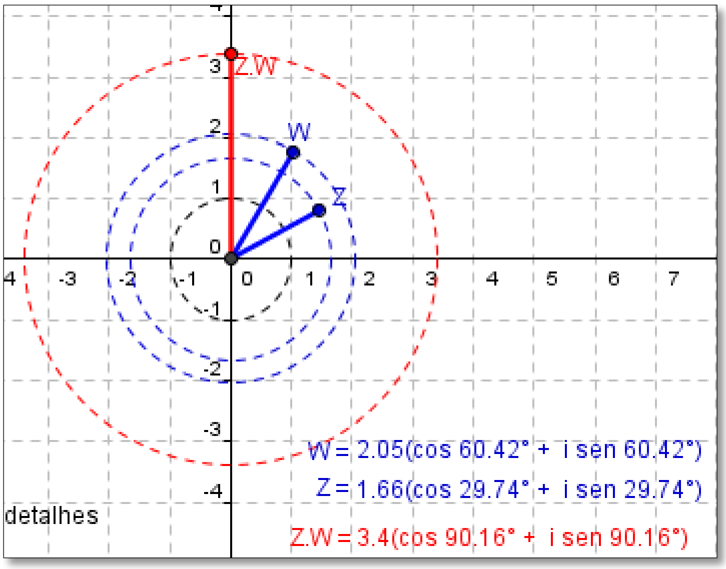
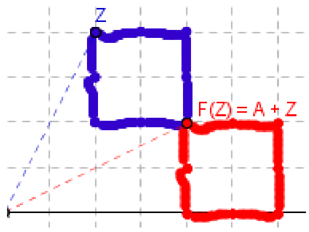


Figura 47 - Exemplo de uma situação para multiplicação de dois complexos

d) Determine A para se tenha a imagem ao lado:



Nesta questão, o aluno deve aplicar o conceito da translação e posição dos números complexos. Deverá verificar que para ocorrer uma translação na diagonal, o parâmetro A deverá ter parte real e imaginária diferente de zero, a translação na vertical é para baixo, ou seja, a parte imaginária é negativa e ainda essa translação corresponde a diagonal do quadrado formado por Z. O aluno usará a animação manipulativa para representar essa curva, habilitar o rastro e verificar se seus conhecimentos estão corretos.

O principal objetivo das atividades é fazer com que o aluno seja ativo na construção do seu conhecimento, que tenha liberdade para se desenvolver, que investigue soluções e crie suas respostas. Para se conseguir isto, a tecnologia muito pode ajudar. E aqui se concorda com Silva e Barreto (2011):

> ...além de motivadoras, as TIC podem ser consideradas um recurso didático que permite estabelecer relações cognitivas abertas em que o indivíduo se permite errar e aprender com o erro, errar e não se sentir pré-julgado no seu erro, tentar novamente até aprender. Muito mais que uma memorização, elas podem oportunizar o desenvolvimento de habilidades e o estímulo ao surgimento de novas aptidões, na medida em que criam as condições necessárias para o aprender fazendo. (SILVA; BARRETO, 2011, p. 2)

As atividades acompanhadas de análise *a priori* mais detalhada são apresentadas na próxima seção. Julga-se que esta forma de apresentação facilita a leitura do relato e da análise *a posteriori* da experiência, pois está agrupado no texto o que se pretendia em termos de aprendizagem nas diferentes atividades – é disto que trata a análise *a priori* mais detalhada.

Uma vez elaborada a proposta didática, anuncia-se a hipótese a ser validada ao final da experimentação. A hipótese desta nossa engenharia, que na Introdução foi formulada como pergunta, se coloca agora como uma afirmativa: através de recursos tecnológicos, na forma de objeto de aprendizagem, é possível implementar um ensino introdutório de Funções de Variável Complexa na educação escolar de nível médio. A próxima seção vai tratar da validação desta hipótese.

5.3 Experimentação e análise *a posteriori*

Esta fase trata-se da ação em sala de aula seguida da análise *a posteriori*, que, segundo Artigue (1996), possui como suporte os dados recolhidos durante a experimentação: as observações do professor e as produções dos alunos.

A presente experiência foi realizada em uma escola da rede estadual no município de Campo Bom, Rio Grande do Sul. A turma se encontrava na terceira série do ensino médio noturno e era composta de 26 alunos. O período de aplicação se sucedeu de 10 de novembro de 2011 a 14 de dezembro de 2011, em terças-feiras (um período de aula – 45 minutos), quartas-feiras (dois período de aula – 90 minutos) e quintas-feiras (um período de aula – 45 minutos), totalizando 11 encontros. A professora que acompanhou a experimentação é a própria autora desta dissertação.

A experimentação aconteceu no laboratório de informática da escola (com um momento ilustrado na Figura 48) onde há disponível um computador por aluno (no caso dessa turma que possui 26 alunos). Em razão de ter ocorrido em período de final de ano letivo e noturno, e considerando que a grande maioria dos alunos trabalha durante o dia e chega atrasada na aula, houve muita infrequência por parte dos alunos, prejudicando um pouco o andamento da experimentação.

Figura 48 - Alunos trabalhando no Laboratório de Informática da escola

Em cada aula, a rotina de trabalho assim se organizava: inicialmente acontecia a exploração, por cada aluno, da animação disponível no objeto NC; depois havia a intervenção do professor, para esclarecer dúvidas e retomar os conteúdos do objeto, sempre instigando a participação dos alunos. No caso de se ter um vídeo disponível sobre o conteúdo tratado, este era assistido pelo grande grupo através do projetor de imagens. Finalmente distribuía-se aos alunos a “Folha de Atividades” com as questões que também estavam disponíveis na seção “Para pensar” do objeto NC. A formulação das questões teve a intenção de provocar os alunos para que manipulassem as animações e assim entendessem melhor os conteúdos a serem aprendidos. Dentro deste espírito é que analisamos, na seção anterior, algumas das questões propostas no objeto. Elas ilustram a análise *a priori* que acompanhou a concepção dos diferentes menus do objeto NC.

No que segue, para relato da experimentação e apresentação das análises *a posteriori*, as seis atividades projetadas foram agrupadas em “Blocos”, conforme descrição dada na Tabela 4. Nesta tabela também tem-se o número de encontros e tempo alocados em cada “Bloco”. Das questões propostas na seção “Para pensar” selecionou-se as que foram identificadas como mais interessantes quanto às aprendizagens dos alunos e para estas são apresentadas as análises *a priori* e *posteriori.*

Tabela 4: As seis atividades divididas em blocos de assuntos

Blocos	Aulas dadas	Folha de Atividades
Conceito do número complexo e suas representações	10/11 – 1 período 16/11 – 2 períodos 23/11 – 2 períodos 24/11 – 1 período Total: 270min	Atividade 1 Atividade 2
As operações com números complexos	29/11 – 1 período 30/11 – 2 períodos 01/12 – 1 período 06/12 – 1 período 07/12 – 2 períodos Total: 315min	Atividade 3 Atividade 4 Atividade 5
Funções de variáveis complexas	13/12 – 1 período 14/12 – 2 períodos Total: 135min	Atividade 6

5.3.1 Bloco: O conceito do número complexo e suas representações

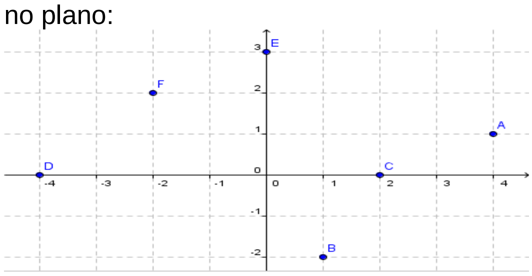
Este bloco de atividades apresenta o novo conjunto de números e procura contextualizar historicamente a criação do número imaginário i. Inicialmente os alunos assistiram o recorte do vídeo *Dimensões* [32], onde é introduzido esse conjunto fazendo referência à multiplicação de números no plano - a multiplicação $i \cdot Z$ corresponde a rotação de 90º do número Z, trazendo a ideia desenvolvida pelo matemático Argand. Esta ideia foi apresentada, com mais detalhes, no capítulo 3 que apresenta o desenvolvimento histórico dos números complexos.

A professora fez intervenções em diversos momentos da apresentação do vídeo, procurando explicar e contextualizar historicamente a ideia de número complexo. Sempre a interrogação aos alunos era realizada antes da explicação, a fim de que a professora pudesse instigar as ideias dos educandos, a participação e a concentração no assunto que estava sendo estudado. Com este método, pretendeu-se favorecer a troca interindividual para que novos comentários acontecessem, desta forma ativando o desenvolvimento dos alunos e favorecendo a aquisição de conhecimentos (Moysés, 1997).

O objeto NC inicia apresentando os números complexos $Z = a + bi$ e, de imediato, faz a identificação com pontos do plano. Para que os alunos manipulassem a animação e assim explorassem este conceito foram propostas "Para pensar" as seguintes questões[33]:

1) Construa um plano complexo e localize os pontos correspondentes aos seguintes números complexos:
$z_1 = -3 + 3i$ $z_2 = 1 + 4i$ $z_3 = 2i$ $z_4 = -4i$ $z_5 = 2 - 3i$
$z_6 = 3$ $z_7 = -4$

2) Escreva os números complexos correspondentes aos pontos A, B, C, D, E e F indicados no plano:



3) Dê dois números complexos com parte imaginária igual a zero.
Z = W =

4) Dê dois números complexos com parte real igual a zero.
Z = W =

32 É o recorte do vídeo Dimensões comentado no capítulo 4.

33 Estas questões estão na "Folha de Atividades" correspondentes as Atividades 1 e 2. As "Folhas de Atividades" estão disponíveis nos Apêndices A e B.

Análise *a priori*: A proposta dessas quatro questões era trabalhar com a representação algébrica dos números complexos, concretizar o valor real e o valor imaginário de cada complexo, entender ainda, a posição no plano dos números reais e imaginários puros.

Análise *a posteriori*: As questões um e dois foram desenvolvidas sem dificuldades pelos alunos, por estarem eles familiarizados com pontos no plano, e por terem estudado este conteúdo em geometria analítica recentemente.

Conversando com os alunos durante a resolução das questões se pode notar que as questões três e quatro geraram confusão em parte dos alunos, por não ter ficado clara a pergunta e também por acharem simples demais, causando desconfiança quanto ao seu entendimento.

> 5) Mostre os dois números complexos resultantes da rotação de 90° do número complexo $2+4i$. Escreva estes números na forma algébrica
> Z = W =

Análise *a priori*: Esta questão exige o entendimento do conceito da multiplicação por i como sendo uma rotação de um quarto de volta do número que está sendo multiplicado por i e também exige a localização do número no plano.

Análise *a posteriori*: esta questão foi respondida utilizando a animação. Todos os alunos posicionaram o valor proposto e manipularam os números de forma a obterem a rotação. A exceção de dois alunos, os demais após terem manipulado, investigado e tentado chegar à resposta, pediram ajuda à professora.

Sabe-se que a intervenção do professor é fundamental na busca de saberes; como ressalta Lerner (1995), algumas propriedades que devem ser estudadas só tornam-se presentes graças à mediação do professor.

A ajuda do professor se deu na “dica” de visualizar o retângulo formado pela projeção dos valores real e imaginário nos eixos e rotacionar o retângulo de um quarto de volta.

Talvez esta questão tivesse obtido um maior êxito se fosse feita em partes, por exemplo, primeiramente a rotação de 90º de um número real, posteriormente de um imaginário puro, a rotação de 180º de um complexo qualquer e, por fim, a rotação de 90º desse complexo qualquer.

6) Dê cinco números complexos que tenham o mesmo módulo de $2+3i$. Escreva estes números na forma algébrica
Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 =

7) Dê seis números complexos com módulo igual a 5. Escreva estes números na forma algébrica
Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6 =

8) Dê seis números complexos com módulo igual a 1. Escreva estes números na forma algébrica.
Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6 =

Análise *a priori*: Estas questões trabalham com o conceito de módulo e o objetivo é entender que o módulo informa a distância do número complexo à origem O do sistema. A intenção é que os alunos respondam as questões sem fazer maiores cálculos; para responder as questões basta entender o módulo como distância do complexo à origem.

Análise *a posteriori*: Depois de definido o módulo, os alunos responderam facilmente sobre os complexos que possuem módulo $\sqrt{13}$ (questão 6), pois perceberam que todas as combinações dos valores real e imaginário 2 e 3 resultavam em complexos com mesma distância até a origem. Muitos utilizaram a técnica que antes havia sido mencionada pelo professor, a saber, tratar de visualizar o retângulo formado pelas projeções do complexo nos eixos real e imaginário e então rotacionar esse retângulo para obter números complexos com o mesmo módulo. Apresentam-se as combinações feitas por um aluno na Figura 49.

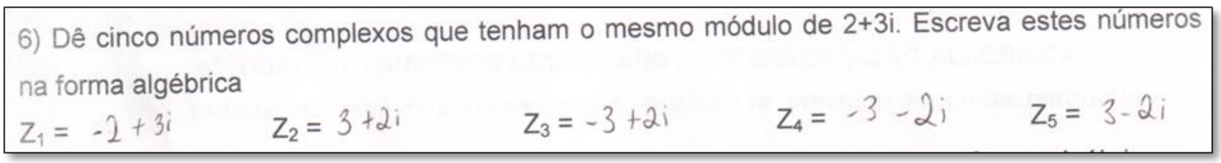

6) Dê cinco números complexos que tenham o mesmo módulo de 2+3i. Escreva estes números na forma algébrica
$Z_1 = -2+3i$ $Z_2 = 3+2i$ $Z_3 = -3+2i$ $Z_4 = -3-2i$ $Z_5 = 3-2i$

Figura 49 - Resposta de aluno para a questão 6 da Atividade 1

Na questão sete, quatro dos complexos foram facilmente encontrados; no geral os alunos escolheram números nos eixos que tivessem distância 5 até a origem.

Até esse momento, o objeto virtual manipulativo foi indispensável para que os alunos respondessem as questões colocadas, conforme mostra a Figura 50, onde uma aluna o utiliza para responder as questões da “Folha de Atividades”.

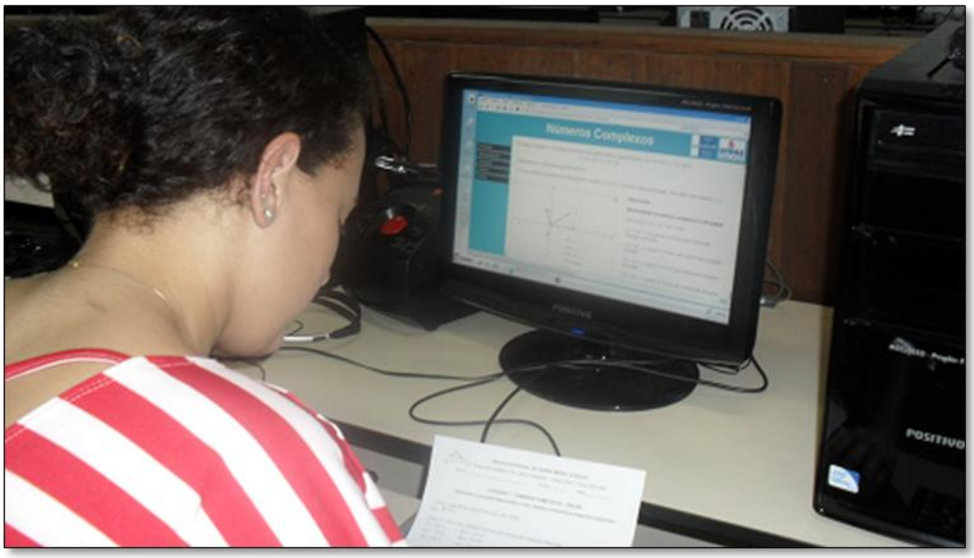
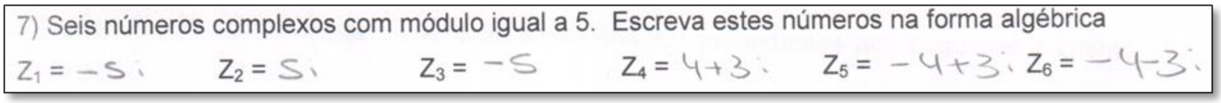


Figura 50 - Foto de aluna trabalhando no objeto de aprendizagem

Contudo, depois de obterem esses quatro números, nenhum aluno visualizou outros números na circunferência de raio cinco através de manipulação na animação. Eles fizeram cálculos algébricos e deixaram de lado a animação que ajudaria a resolver a questão sete; fizeram combinações de números que ao quadrado e somados resultavam em 25, e assim chegaram aos outros números complexos que respondem a questão. Apresenta-se a resposta do aluno para essa questão na Figura 51.

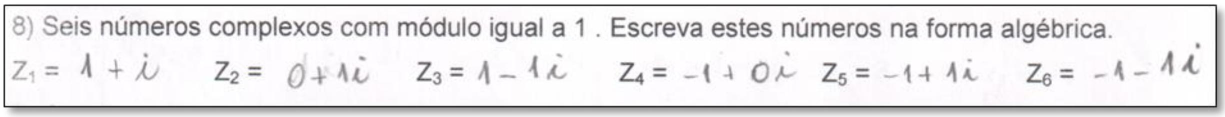


7) Seis números complexos com módulo igual a 5. Escreva estes números na forma algébrica

$Z_1 = -5i$ $Z_2 = 5i$ $Z_3 = -5$ $Z_4 = 4+3i$ $Z_5 = -4+3i$ $Z_6 = -4-3i$

Figura 51 - Resposta de aluno para a questão 7 da Atividade 1

Quanto à questão oito, quase nenhum aluno conseguiu concluir. Os poucos que trabalharam na questão, chegaram em parte da solução: encontraram os complexos que estão nos eixos e que distam uma unidade da origem. Outros se equivocaram nas respostas, fazendo combinações com o valor *1* na parte real e imaginária, chegando assim em complexo que tem módulo $\sqrt{2}$ e não *1*, conforme havia sido solicitado na questão. A Figura 52 registra as respostas equivocadas de uma aluna.



8) Seis números complexos com módulo igual a 1 . Escreva estes números na forma algébrica.

$Z_1 = 1 + i$ $Z_2 = 0 + 1i$ $Z_3 = 1 - 1i$ $Z_4 = -1 + 0i$ $Z_5 = -1 + 1i$ $Z_6 = -1 - 1i$

Figura 52 - Resposta de aluno para a questão 8 da Atividade 1

As resoluções apresentadas para esta questão mostraram que os alunos não entenderam com clareza o cálculo a ser feito para determinar o módulo de um número complexo. Digo nesse momento 'cálculo', pois nas questões seis e sete, mostraram clareza no entendimento do conceito distância, pois as responderam facilmente; já na questão oito, onde utilizaram o cálculo algébrico de módulo e não usaram a animação, não chegaram à resposta correta.

> 9) Os números complexos que tem parte real igual à parte imaginária. Que tipo de figura formam estes números complexos? Escreva estes números na forma algébrica.
>
> 10) Os números complexos que tem a parte imaginária igual ao dobro da parte real. Que tipo de figura formam estes números complexos? Escreva estes números na forma algébrica.

Análise *a priori*: As duas questões ainda trabalham a localização de números complexos no plano, mas é mais exigente. Agora os alunos devem identificar conjuntos de números complexos que respeitam relações funcionais entre partes real e imaginária. É de forma intencional que utilizamos a linguagem informal “tipo de figura” para referir ao que formalmente seria o conjunto dos números complexos que tem parte real igual à imaginária (item 9) ou que tem parte imaginária igual ao dobro da parte real (item 10). Isso porque é uma atividade que envolve a manipulação da animação que permite enxergar a figura que é formada pelos números complexos que atendem as condições dos enunciados.

Análise *a posteriori*: A forma como os alunos responderam esta questão mostra a falta de entendimento do conceito de gráfico de função. Todos eles marcaram no plano somente alguns números complexos que atendiam à condição solicitada no enunciado. A Figura 53 regista as soluções apresentadas por um aluno.

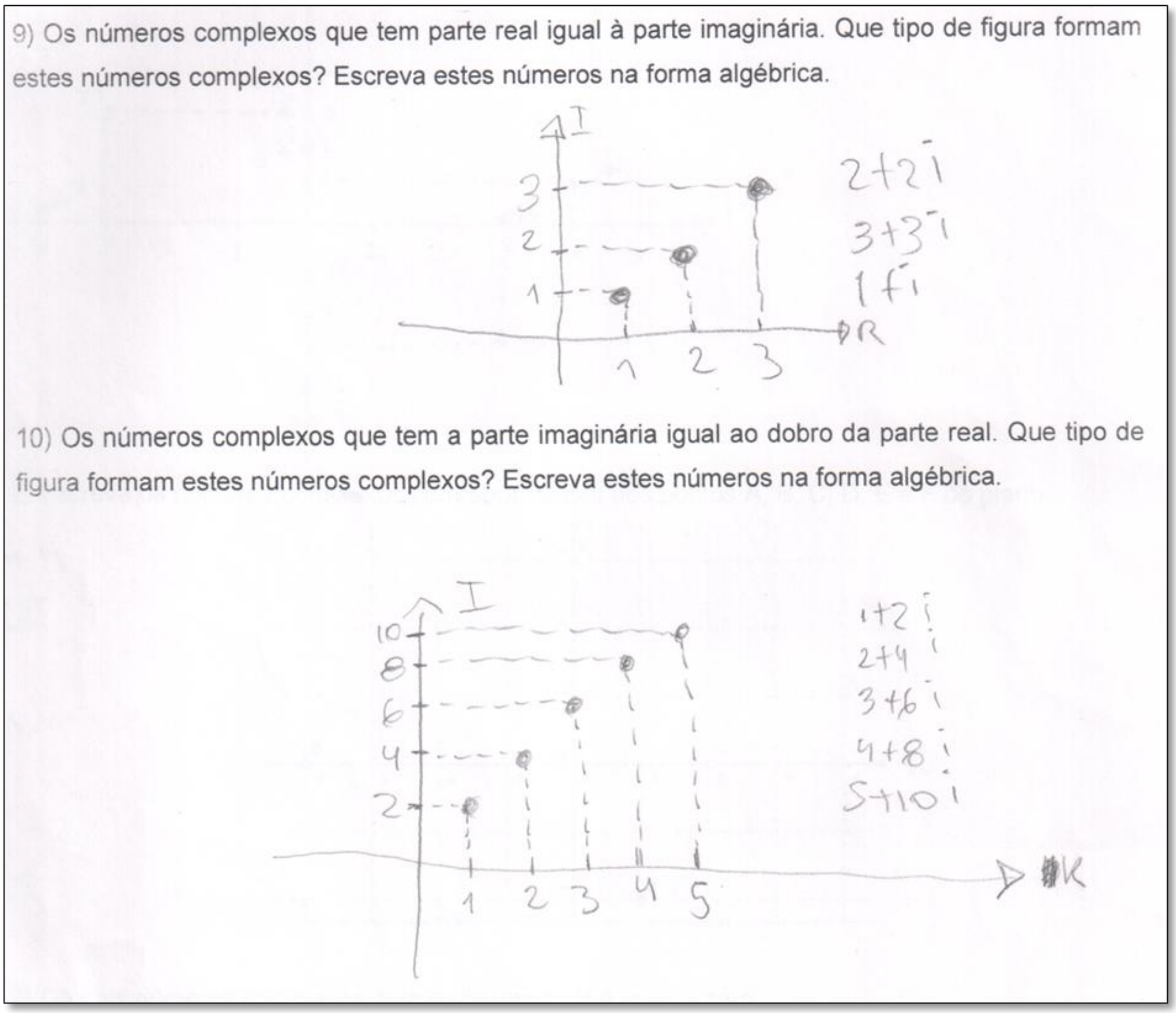


Figura 53 - Resposta de aluno para as questões 9 e 10 da Atividade 1

Alguns até chegaram à conclusão que os conjuntos a serem identificados eram do tipo retas, mas para isto foi preciso o auxílio do professor. Observamos que nas soluções apresentadas acima não foram considerados números complexos no terceiro quadrante e também só foram considerados números com partes real e imaginária sendo números inteiros. Este comportamento foi generalizado, o que mostra a pouca desenvoltura dos alunos para trabalho com números reais. As resoluções apresentadas para estas duas questões também podem indicar uma falta de entendimento, por parte dos alunos, sobre gráficos de funções, este um assunto que normalmente é trabalhado no primeiro ano do ensino médio.

Outra observação importante a fazer é quanto à dificuldade dos alunos em expressar suas ideias e resultados; eles não sabiam como escrever aquilo que estava sendo observado na animação. Os alunos mostraram que não estão acostumados a pensar em questões como estas que estavam sendo propostas. Kamii (1981) apud Lerner (1995) traz a importância da linguagem e incentivo aos alunos a dizerem exatamente o que pensam, pois se não disserem o que estão pensando não tem como o professor fazer um diagnóstico do seu desenvolvimento e saber o que ensinar e como interferir.

Retomamos aqui Moysés (1997) na sua ênfase sobre a importância de se pedir ao aluno que explique o que está pensando, pois esta habilidade é indispensável para o aprendizado. Com a resposta do aluno, o professor pode ver se há conscientização dos conceitos estudados. Mas para isto é necessário que o aluno exponha com suas próprias palavras o seu raciocínio, as suas generalizações.

As questões que seguem tratam da representação trigonométrica do complexo, e também utilizam como recurso a manipulação desses números no objeto de aprendizagem e a simultânea visualização dos valores correspondentes ao módulo e argumento.

1) O número complexo com r = 2 e $\theta = 90°$. Escreva este número na forma trigonométrica.

2) O número complexo com r = 2 e $\theta = 135°$. Escreva este número na forma trigonométrica e confira a sua resposta na caixa “Forma Trigonométrica de Z”.

3) O número complexo com r = 2 e $\theta = 0°$. Escreva este número na forma trigonométrica.

Análise *a priori*: As questões propostas conceituam a posição do número quanto a seu módulo e argumento. Verifica-se, que há um crescimento de dificuldade nessas questões: a primeira trata de um número imaginário puro; a segunda trata de apresentar um argumento qualquer, localizado no segundo quadrante; e a terceira questão trata de pedir a escrita de um número real, onde o argumento é nulo.

Análise *a posteriori*: não apresentaram dificuldade para realizar essa tarefa, todos utilizaram o objeto manipulativo para realizá-la. Usando a manipulação do objeto de aprendizagem, puderam selecionar as caixas onde mostra o valor do argumento e módulo e manipularam de acordo com a posição pretendida. Como já tinham experiências com os ângulos na circunferência (conteúdo do segundo ano), estavam familiarizados com suas posições.

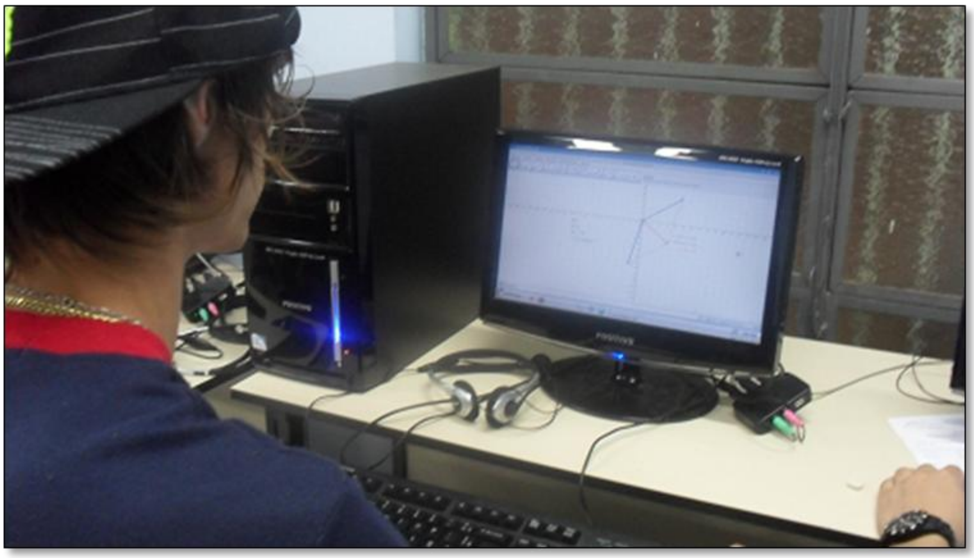


Figura 54 - Foto de aluno trabalhando no objeto de aprendizagem

5) Os números complexos com $r < 3$ e $\theta = 30°$, represente eles no plano. Escreva estes números na forma trigonométrica.

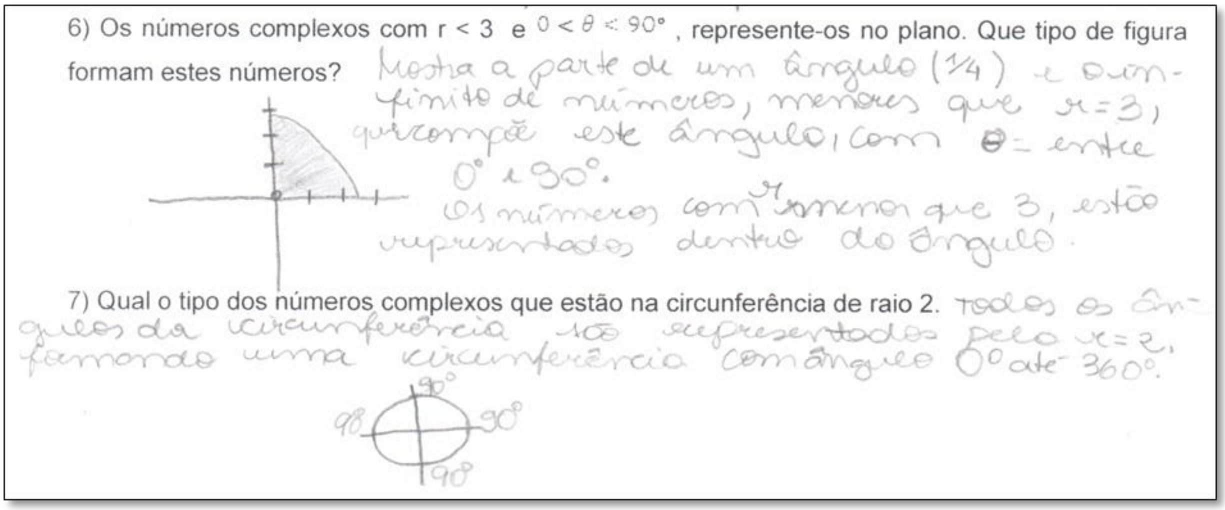
6) Os números complexos com $r < 3$ e, represente-os no plano. Que tipo de figura formam estes números?

7) Qual o tipo dos números complexos que estão na circunferência de raio 2.

Análise *a priori*: Estas questões trazem novamente a ideia da visualização das respostas em conjunto, para isso os alunos precisam ter uma visão global dos números. O nível de dificuldade também é crescente nestas questões. Na questão 5:

o aluno precisa enxergar que se trata de todos os números com módulo menor que 3, mas com um mesmo argumento, o seu conjunto significa um segmento. Na questão 6: continua com o mesmo módulo, mas não limita o argumento, considerando todos os números localizados na região interna do círculo de raio 3. E por último, na questão 7: trata da aplicação da mesma ideia desenvolvida na questão 6, mas da forma contrária, fala na circunferência e solicita o tipo de números que estão na sua região.

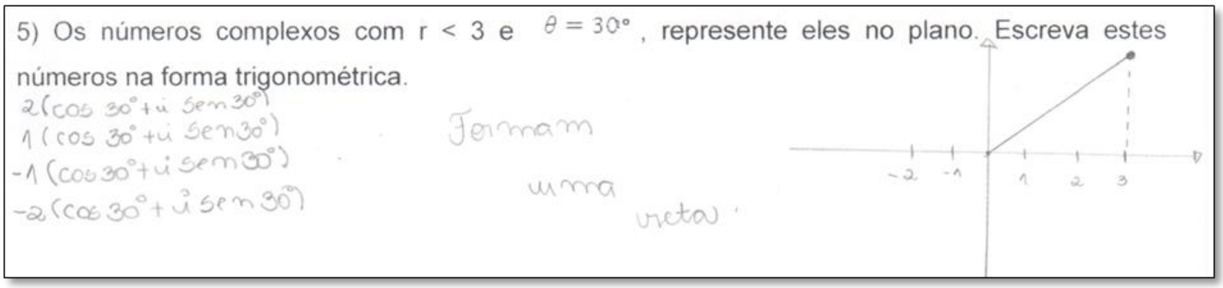
Análise *a posteriori*: Como nas questões anteriores, onde foi trabalhado este tipo de questão, alguns alunos mostraram uma boa compreensão dos conceitos de módulo e argumento mesmo que se expressando com linguagem imprecisa, conforme ilustra a Figura 55.


6) Os números complexos com $r < 3$ e $0 < \theta < 90°$, represente-os no plano. Que tipo de figura formam estes números? Mostra a parte de um ângulo (1/4) e o infinito de números, menores que $r=3$, que compõe este ângulo, com θ= entre 0° e 90°. Os números com r menor que 3, estão representados dentro do ângulo.

7) Qual o tipo dos números complexos que estão na circunferência de raio 2. Todos os ângulos da circunferência são representados pelo $r=2$, formando uma circunferência com ângulo 0° até 360°.

Figura 55 - Resposta de aluno para as questões 6 e 7 da Atividade 2

Mas, alguns alunos indicaram dificuldades na compreensão dos conceitos conforme ilustra a Figura 56. Por exemplo, nesta resolução o aluno considera que o módulo de um complexo pode ser um número negativo; o aluno também não se dá conta que tem números complexos que estão no segmento indicado que possuem módulo maior do que três.


5) Os números complexos com r < 3 e $\theta = 30°$, represente eles no plano. Escreva estes números na forma trigonométrica.

$2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$
$1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$
$-1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$
$-2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

Formam uma reta.

Figura 56 - Resposta de aluno para a questão 5 da Atividade 2

Resumo das análises *a posteriori* deste bloco*:* a definição do número imaginário, através da ideia de Argand, fez com que todos os alunos entendessem esse conceito e aceitassem a existência desses números. A representação algébrica do número complexo, bem como, a sua localização no plano, foram entendidas facilmente, pelo fato de os alunos estarem familiarizados com pontos no plano. O conceito de módulo foi adquirido com firmeza, principalmente em virtude do recurso manipulativo, os alunos entenderam bem e utilizaram esse conceito de distância para trabalhar com o módulo.

A principal dificuldade encontrada, pelos alunos, nas questões analisadas, foi quanto à identificação geométrica de conjuntos que correspondem a conjuntos de números complexos que atendem relações entre parte real e imaginária. Este é o caso das questões seis e sete acima. O desempenho dos alunos mostra que não estão habituados a resolver questões que relacionam álgebra e geometria e assim não conseguem expressar suas ideias com clareza e confiança.

O vídeo foi indispensável para a entrada nesse assunto, com suas animações associando a multiplicação de números reais pelo novo número i com o efeito de rotação de 90º da reta real. Os alunos mostraram satisfação em assistir a um vídeo na aula de matemática e ficaram atentos à sua forma dinâmica e à linguagem de fácil compreensão.

O objeto de aprendizagem NC serviu como um grande apoio na resolução das questões e nos conceitos estudados, pois como estávamos estudando os conceitos no plano, os alunos puderam verificar estes fatos de uma forma bem concreta e dinâmica. Mais ainda, as manipulações facilitaram a resolução das questões, pois com este recurso encontraram as respostas das questões e também começaram a evidenciar ideias que seriam trabalhadas nas questões seguintes.

5.3.2 Bloco: As operações com números complexos

Tendo assistido o vídeo que explica a operação de soma e tendo sido as ideias discutidas pela professora, foi fazendo uso do objeto NC que os alunos resolveram as seguintes questões:

1) Qual o valor de W sendo Z= $4 + i$ e (Z + W) = $6 + 4i$.
W =

Análise *a priori*: A questão traz a ideia básica da soma dos complexos, mas, para os alunos mostrarem realmente seu significado, a questão menciona o resultado da soma e uma das parcelas, devendo o aluno registrar o outro valor, mostrando seu real entendimento da soma.

Análise *a posteriori*: Todos os alunos concluíram esta questão com êxito, e a acharam fácil. Nesta questão não utilizaram o recurso computacional, pois compreenderam, quando manipularam o objeto, que a soma trata de somar as partes reais e imaginárias, assim, só aplicaram nesta questão este conceito compreendido. Viram que a parte real do resultado se origina da soma das partes reais, e uma das parcelas possui parte real 4 é preciso somar 2 nesse valor para chegar na soma pretendida, analogamente, para a parte imaginária do número.

2) Se (Z + W) = $3 + 3i$, indique Z e W em pelo menos três situações diferentes:
Z1 = W1 =
Z2 = W2 =
Z3 = W3 =

3) Se (Z + W) = 4, indique Z e W em pelo menos três situações diferentes.
Z1 = W1 =
Z2 = W2 =
Z3 = W3 =

4) Se (Z + W) = 0, indique Z e W em pelo menos três situações diferentes.
Z1 = W1 =
Z2 = W2 =
Z3 = W3 =

5) Se (Z + W) = $2i$, sendo Z e W em pelo menos três situações diferentes.
Z1 = W1 =
Z2 = W2 =
Z3 = W3 =

Análise *a priori*: Nestas questões os alunos exercitaram o conceito da soma dos complexos, da sua parte real e imaginária, a posição dos números reais e imaginários puros no plano. Cada questão faz uma exigência, onde a soma deve resultar em um número complexo com partes real e imaginária não nulas (questão dois), onde o resultado deve ser nulo na parte imaginária, para que resulte em um número real (questão três).

Da mesma forma, anulando a parte real para resultar em um imaginário puro (questão cinco), e a questão quatro, onde o aluno deve verificar que os valores real e imaginário dos complexos a serem somados devem ser opostos, para se ter o complexo 0 como resultado. Para isso, deve ficar evidente ao aluno que a soma de dois complexos é o resultado das somas da sua parte real e da sua parte imaginária.

Análise *a posteriori*: Esta questão foi feita manipulando a animação, a exceção de um aluno, que resolveu todas as questões sozinho, sem a ajuda do professor, mas algebricamente. Na manipulação puderam trabalhar com o conceito do movimento juntamente com a soma: se movo um dos números, e quero que a soma continue no mesmo lugar tenho que fazer esse movimento compensado no outro valor. Os alunos observaram que há infinitos resultados para essas perguntas.

6) Se (Z + W) tem módulo igual a 5, indique Z e W em pelo menos três situações diferentes.

Z1 =	W1 =
Z2 =	W2 =
Z3 =	W3 =

Análise *a priori*: Retoma o conceito de módulo, através da distância, envolvendo esse resultado na soma dos complexos. Com a ajuda do objeto, o aluno pode posicionar o número que representa a soma e variar os números Z e W para que a soma fique naquela posição, ou seja, para que fique na posição onde sua distância à origem é 5.

Análise *a posteriori*: Todos os alunos buscaram a resposta mais simples. Manipulando o objeto, encontravam $Z + W$ com módulo 5 (o real 5 ou $5i$), e através desse manipulavam os complexos Z e W que deixassem o resultado nesse lugar, ou seja, usaram a estratégia das questões acima e também o conceito da distância à origem, da forma mais fácil, com valores que ficavam localizados nos eixos.

7) Quando temos Z = i e W = 1, qual o valor do módulo de Z + W ? E do seu argumento? Escreva esse número resultante na forma trigonométrica.

Análise *a priori*: Esta questão retoma a escrita na forma trigonométrica, mas de um número complexo especial, a saber, é um número que está na diagonal do primeiro quadrante e corresponde ao vértice de quadrado de lado medindo *1*. Assim sendo, deve ser relativamente fácil para os alunos o cálculo do módulo.

Análise *a posteriori*: Infelizmente nenhum aluno observou o quadrado, e alguns que observaram não sabiam dizer o ângulo formado e muito menos a medida da diagonal. Percebe-se que a escola pouco desenvolve o pensamento geométrico dos alunos – eles não conseguiram visualizar o quadrado que resolve a questão de uma maneira muito fácil. Os alunos que responderam essa questão fizeram algebricamente.

1) Qual o valor de Z.W sendo Z = $2 + i$ e W = 2?

2) Sendo Z = $2 + i$ e W um número real. Que tipo de figura formam os números complexos Z.W?

3) Qual o valor de Z.W sendo Z = $2 + i$ e W = i?

4) Sendo Z = $2 + i$ e W um número imaginário puro. Que tipo de figura formam os números complexos Z.W?

Análise *a priori*: Esta questão trabalha com o conceito da multiplicação dos números complexos. Primeiramente observa-se a multiplicação de um complexo qualquer por um número real, e a questão dois generaliza o efeito de multiplicação de complexo por número real. Espera-se que o aluno perceba o deslocamento do complexo, sem a rotação. Já, nas questões três e quatro o aluno deve lembrar-se do que já foi visto e definido como número imaginário: a multiplicação por i originando uma rotação de 90º no sentido anti-horário.

Análise *a posteriori*: A maioria dos alunos, por ser fácil, realizou as questões um e três algebricamente no papel. Já as questões dois e quatro que generalizavam a ideia da multiplicação por um real e por um imaginário puro, manipularam esses valores na animação para identificar a figura formada.

5) Sendo Z = $(2 + 2i)$ ou $(2 + 3i)$ ou $(2 + 4i)$ e w = i. Que tipo de figura formam os números complexos Z.W?

Análise *a priori*: Na questão cinco, novamente o aluno precisa olhar o conjunto de soluções e concluir geometricamente quanto ao tipo de conjunto que formam. Quando multiplicamos um complexo por i, trocamos seu valor real e imaginário. Nesta questão estamos variando o valor imaginário do complexo Z, mantendo todas as outras variáveis constantes, com isso, se deve observar que no resultado somente será alterada a parte real proporcionalmente a variação da parte imaginária de Z.

Análise *a posteriori*: Neste momento, os alunos já se habituaram a esse tipo de questão, mas continuam pobres nas suas explicações. Somente responderam que o resultado obtido formava uma reta, não classificando como uma reta horizontal, ou paralela ao eixo das abscissas.

6) Calcule: Z = i^2 = Z = i^3= Z = i^4 = Z = i^5 =
Z = i^{10} = Z = i^{15}=
Você pode concluir alguma coisa dessa potenciação?

Análise *a priori*: A intenção dessa questão, sabendo da rotação de 90º pela multiplicação de i, era de o aluno observar a periodicidade dessa potenciação, e generalizar os critérios para essa potência.

Análise *a posteriori*: Os alunos resolveram normalmente até a potência cinco, mas somente dois conseguiram chegar à generalização dessa potência sem a intervenção do professor. Esta questão, para ter mais sucesso, poderia estar melhor detalhada, em passos mais definidos, para que os alunos alcançassem a generalização mais facilmente.

7) Sendo Z = $2 + 2i$ e W = i, calcule o ângulo entre o segmento dado por O e Z e o segmento dado por O e Z.W

8) Sendo Z = $2 + 2i$ e W = $1 + i$ calcule o ângulo entre o segmento dado por O e Z e o segmento dado por O e Z.W

9) Sendo Z = $2 + 2i$ e W = $-1 + i$ calcule o ângulo entre o segmento dado por O e Z e o segmento dado por O e Z.W

Análise *a priori*: Esta questão encaminha à soma dos ângulos na multiplicação, ou seja, a ideia da rotação especificando o valor dessa rotação, que será vista de melhor forma nas questões sobre a forma trigonométrica.

Para enxergar essa relação, a questão inicia com a multiplicação por i; já muitas vezes mencionada como rotação de 90º; posteriormente a multiplicação por $(1+i)$, resultando na rotação de 45º e finalmente na multiplicação por $(-1+i)$, o que resulta na rotação de 225º. O aluno deve enxergar que os ângulos resultantes variaram conforme o ângulo de W, pois o ângulo de Z permaneceu constante.

Análise *a posteriori*: Infelizmente, devido ao tempo escasso das aulas e o atraso dos alunos, esta questão não foi desenvolvida por ninguém. E, por preocupação quanto ao andamento da experiência, não foi retomada na aula seguinte.

1) Calcule Z .W sendo Z = $\sqrt{2}(cos45° + isen45°)$ e W = 2.

Análise *a priori*: Na multiplicação de dois números complexos, os módulos desses números são multiplicados e os argumentos são somados. Assim, pode haver uma translação do ponto juntamente com uma rotação. A rotação desse número já foi trabalhada desde a definição, portanto, essa questão mostra a multiplicação desses módulos sem haver a rotação, já que está se multiplicando por um valor real.

Análise *a posteriori*: Como já foi visto anteriormente, os alunos não têm clareza que $\sqrt{2}$ é a diagonal do quadrado de lado um, assim, para resolver essa questão os alunos trabalharam com o valor decimal aproximado. Em razão de ser um número decimal, os alunos verificaram somente a homotetia do número e não constataram que esse número possuía módulo igual à multiplicação dos outros dois módulos.

2) Sendo Z = $2(cos45° + isen45°)$ e |W|= 1. Que figura formam os números Z.W?

3) Sendo Z = $2(cos45° + isen45°)$ e |W|= 2 . Que figura formam os números Z.W?

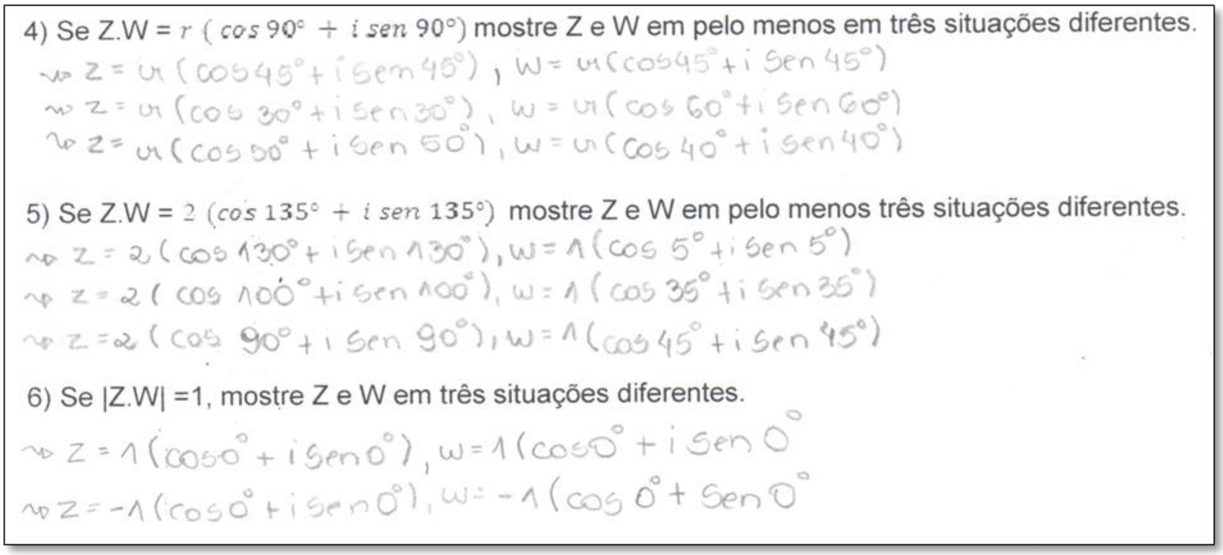
Análise *a priori*: Esta questão possui a mesma intenção do anterior, mas como está fornecendo somente o módulo de W, está evidenciando sua importância. Ainda, a questão está solicitando o conjunto de todos esses números que possuem esse módulo, e está trabalhando com a ideia da rotação.

Análise *a posteriori*: Nesta questão os alunos enxergaram a multiplicação dos valores mais facilmente e ainda concluíram que a figura gerada era uma circunferência com o valor do raio originado pela multiplicação dos dois módulos.

> 4) Se Z.W = $r(cos90° + isen90°)$ mostre Z e W em pelo menos em três situações diferentes.
>
> 5) Se Z.W = $2(cos135° + isen135°)$ mostre Z e W em pelo menos três situações diferentes.
>
> 6) Se |Z.W| =1, mostre Z e W em três situações diferentes.

Análise *a priori*: Estas questões exigem o entendimento da soma dos argumentos e multiplicação dos módulos. Os alunos precisam montar três conjuntos diferentes de complexos que resultem nos valores fornecidos. A questão quatro não salienta o módulo, solicita primeiramente a soma dos argumentos e, posteriormente, na questão cinco, é solicitado as duas definições, e, novamente, na questão seis, o que fica evidenciado é o módulo e não os argumentos.

Análise *a posteriori*: As questões 5 e 6 mostraram o entendimento dos alunos nesta questão, pois a resolveram sem dificuldades; como podem ser observadas abaixo, na Figura 57, as respostas de uma aluna. Nesta mesma Figura, chama a atenção o erro cometido pela aluna na questão 4, uma vez que resolveu corretamente as questões 5 e 6, Nesta questão 4 o valor do módulo do produto deveria resultar em r, mas a aluna escreveu casos de Z e W que o produto tem módulo r^2. Considero esse erro mais de falta de atenção por parte da aluna do que de dificuldade no conteúdo.



4) Se Z.W = r ($cos\ 90°$ + $i\ sen\ 90°$) mostre Z e W em pelo menos em três situações diferentes.

→ $Z = r(\cos 45° + i \,\text{sen}\, 45°)$, $W = r(\cos 45° + i \,\text{sen}\, 45°)$

→ $Z = r(\cos 30° + i \,\text{sen}\, 30°)$, $W = r(\cos 60° + i \,\text{sen}\, 60°)$

→ $Z = r(\cos 50° + i \,\text{sen}\, 50°)$, $W = r(\cos 40° + i \,\text{sen}\, 40°)$

5) Se Z.W = 2 ($cos\ 135°$ + $i\ sen\ 135°$) mostre Z e W em pelo menos três situações diferentes.

→ $Z = 2(\cos 130° + i \,\text{sen}\, 130°)$, $W = 1(\cos 5° + i \,\text{sen}\, 5°)$

→ $Z = 2(\cos 100° + i \,\text{sen}\, 100°)$, $W = 1(\cos 35° + i \,\text{sen}\, 35°)$

→ $Z = 2(\cos 90° + i \,\text{sen}\, 90°)$, $W = 1(\cos 45° + i \,\text{sen}\, 45°)$

6) Se |Z.W| =1, mostre Z e W em três situações diferentes.

→ $Z = 1(\cos 0° + i \,\text{sen}\, 0°)$, $W = 1(\cos 0° + i \,\text{sen}\, 0°)$

→ $Z = -1(\cos 0° + i \,\text{sen}\, 0°)$, $W = -1(\cos 0° + \text{sen}\, 0°)$

Figura 57- Resposta de aluna para as questões 4, 5 e 6 da Atividade 5

Resumo das análises *a posteriori* deste bloco: Utilizando as animações manipulativas, os alunos puderam constatar o movimento dos números complexos no plano em decorrência das operações, este fato ficou claro pela resolução das questões, e possivelmente mais difícil sem os recursos computacionais. Tanto na adição, quanto na multiplicação, os alunos utilizaram esse conceito para chegar aos resultados, o que tornou o processo da interiorização mais fácil e intuitivo. A questão que trabalha com as potências de i poderia ter sido melhor explorada.

5.3.3 Bloco: As funções de Variáveis Complexas

Essas transformações foram, primeiramente, apresentadas aos alunos através do vídeo "Dimensões", já citado anteriormente. Cabe ressaltar que vídeo esteve presente em quase todas os conceitos aqui trabalhados.

Este vídeo trata das diversas transformações no plano, dadas através de operações com números complexos. Ele faz um jogo de imagens muito interessante, ilustradas na tabela 1 que está nas páginas 68 e 69.

Após a apresentação do vídeo, a professora relembrou as funções de variável real que já haviam sido estudadas em outras séries.

Depois de motivar os alunos e relembrar o que são funções, chegou-se à definição das Funções de Variável Complexa.

A primeira ideia desta proposta didática, que está organizada no objeto de aprendizagem NC, seria explorar as seguintes funções complexas: $F(Z) = Z + A$, $F(Z) = Z \cdot A$, $F(Z) = Z \cdot Z$ e $F(Z) = 1/Z$. Porém, devido à falta de tempo, e por essas atividades terem sido propostas no final do ano letivo, a única função explorada com os alunos foi a primeira.

As questões que os alunos trabalharam foram as seguintes, relativas à animação representada na Figura 58:

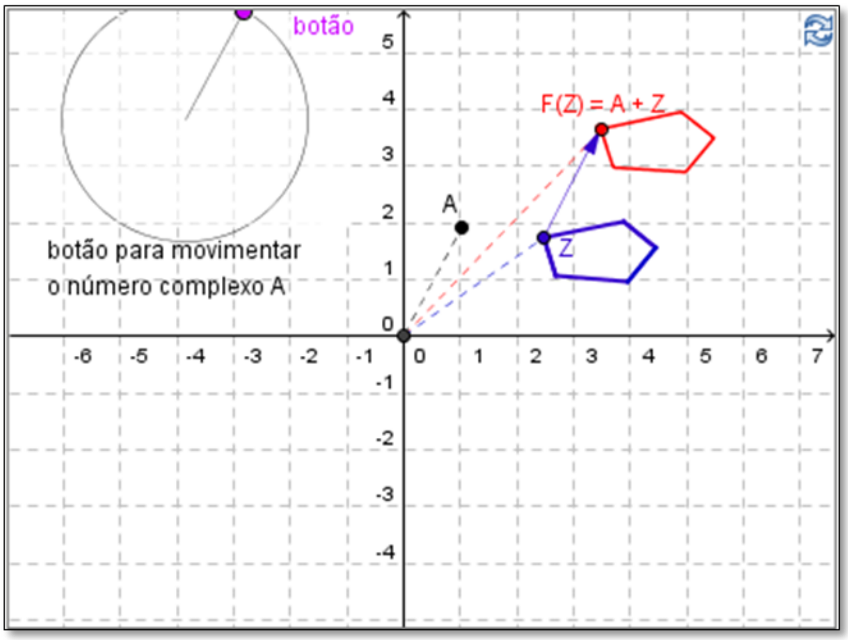


Figura 58 - Animação utilizada para responder a Atividade 6

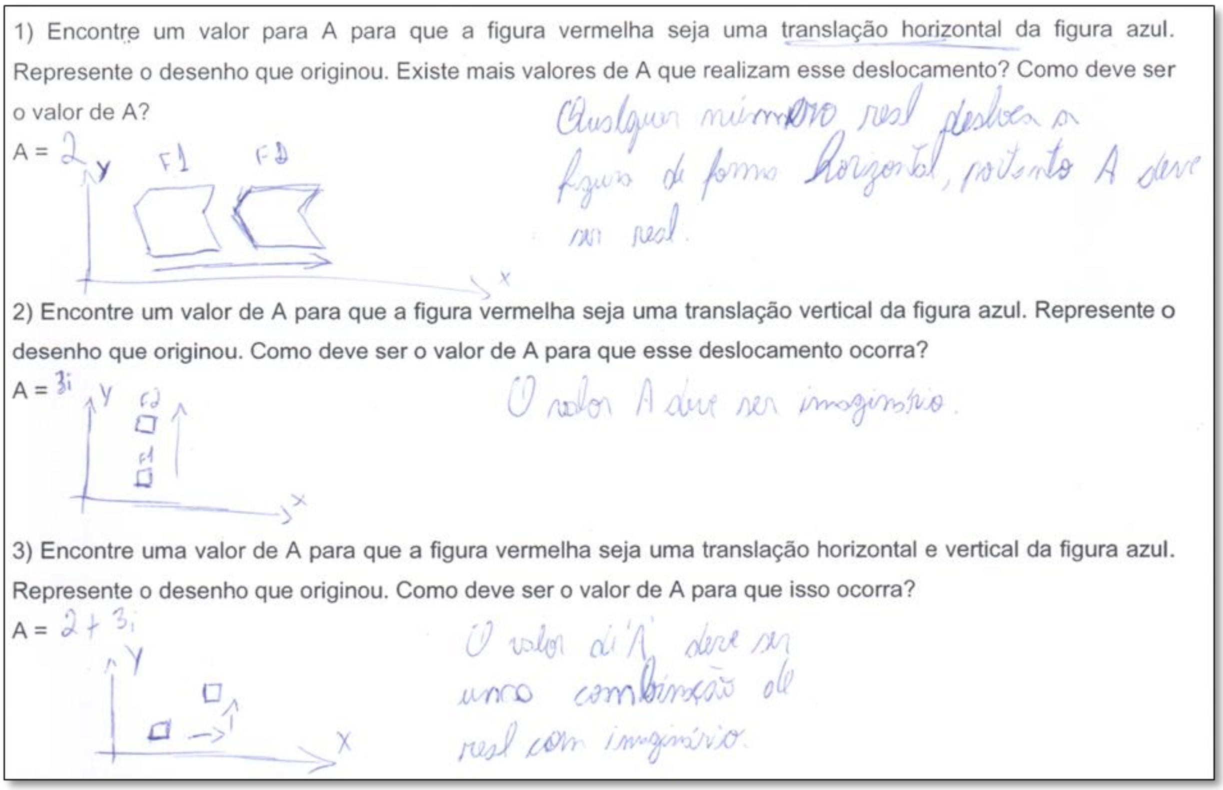
1) Encontre um valor para A para que a figura vermelha seja uma translação horizontal da figura azul. Represente o desenho que originou. Existe mais valores de A que realizam esse deslocamento? Como deve ser o valor de A?
A =

2) Encontre um valor de A para que a figura vermelha seja uma translação vertical da figura azul. Represente o desenho que originou. Como deve ser o valor de A para que esse deslocamento ocorra?
A =

3) Encontre uma valor de A para que a figura vermelha seja uma translação horizontal e vertical da figura azul. Represente o desenho que originou. Como deve ser o valor de A para que isso ocorra?
A =

Análise *a priori*: Esta questão trabalha com a translação em diferentes direções, primeiramente separados. O aluno deve enxergar que; como os valores reais estão localizados no eixo horizontal, e como é pedida uma translação nessa direção, deve-se obter um valor real para A, assim como a translação vertical, precisa ter um incremento A imaginário puro. Quando A é um complexo com valor real e imaginário, diferentes de zero, tem-se a translação nas duas direções.

Análise *a posteriori*: Esta questão foi respondida com êxito pelos alunos, pois tinham constituído a ideia da localização de real e imaginário no plano complexo. No que segue, podem-se ver as respostas de um aluno para essas perguntas, na Figura 59.


1) Encontre um valor para A para que a figura vermelha seja uma translação horizontal da figura azul. Represente o desenho que originou. Existe mais valores de A que realizam esse deslocamento? Como deve ser o valor de A?

A = 2

Qualquer número real desloca a figura de forma horizontal, portanto A deve ser real.

2) Encontre um valor de A para que a figura vermelha seja uma translação vertical da figura azul. Represente o desenho que originou. Como deve ser o valor de A para que esse deslocamento ocorra?

A = 3i

O valor A deve ser imaginário.

3) Encontre uma valor de A para que a figura vermelha seja uma translação horizontal e vertical da figura azul. Represente o desenho que originou. Como deve ser o valor de A para que isso ocorra?

A = 2 + 3i

O valor de A deve ser uma combinação de real com imaginário.

Figura 59 - Resposta de aluno para as questões 1, 2 e 3 da Atividade 6

1) Faça A = $2 - 3i$ e localize z para que F(Z) seja real. Z = _____________ Somente existe esse valor? Como deve ser o valor de Z, por quê?

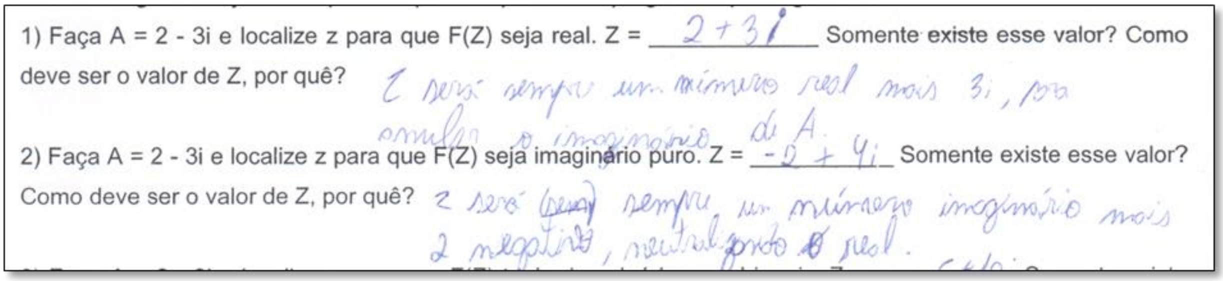
2) Faça A = $2 - 3i$ e localize z para que F(Z) seja imaginário puro. Z = ___________ Somente existe esse valor? Como deve ser o valor de Z, por quê?

3) Faça A = $2 - 3i$ e localize z para que F(Z) tenha imaginário e real iguais. Z = ____________ Somente existe esse valor? Como deve ser o valor de Z, por quê?

Análise *a priori*: Esta questão trabalha com a anulação da parte real ou imaginária. Ou seja, na questão um o aluno deve saber que se $F(Z)$ é real, a parte imaginária é nula, ou seja, Z, ao somar com A, deve anular a parte imaginária de A. Da mesma forma na questão dois. A questão três solicita um pouco mais de manipulação do aluno para se ter $F(Z)$ da forma solicitada, mas basta o aluno enxergar que $F(Z)$ precisa "caminhar" em cima da reta identidade.

Análise *a posteriori*: As respostas um e dois foram concluídas sem dificuldades pelos alunos; através da manipulação da animação, os educandos logo enxergaram essa anulação dos valores. Já, a questão três foi respondida por um único aluno, este não conseguiu expressar a sua ideia e nem colocar a resposta correta; acredito que neste momento faltou a intervenção do professor para esclarecer alguma dúvida.

A seguir, mostra-se a resposta de uma aluna que expressou corretamente a ideia na questão 1 e 2 na Figura 60.

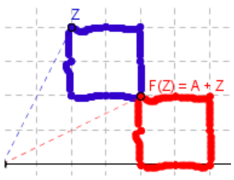


1) Faça A = 2 - 3i e localize z para que F(Z) seja real. Z = 2 + 3i Somente existe esse valor? Como deve ser o valor de Z, por quê? Z será sempre um número real mais 3i, para anular o imaginário de A.

2) Faça A = 2 - 3i e localize z para que F(Z) seja imaginário puro. Z = -2 + 4i Somente existe esse valor? Como deve ser o valor de Z, por quê? z será sempre um número imaginário mais 2 negativo, neutralizando o real.

Figura 60 - Resposta de aluno para as questões 1 e 2 da Atividade 6

4) Determine A para se tenha a imagem que segue:
A =



5) Se Z e F(Z) desenham quadrados onde seus centros distam 5 unidades, determine A.
A =

Análise *a priori*: Neste momento o aluno deve enxergar, na questão quatro, a translação na vertical e horizontal ao mesmo tempo, já trabalhada nas questões anteriores, e ainda observar o tamanho dessa translação nos dois sentidos. A questão cinco traz mais de uma resposta, pois não solicita o sentido da translação, assim, seria interessante que o aluno observasse que basta somar A, onde seu real ou imaginário seja cinco.

Análise *a posteriori*: Novamente, devido à falta de tempo, os alunos não chegaram a concluir esta tarefa.

Resumo das análises *a posteriori* deste bloco: como os alunos já estavam habituados a trabalhar com as operações no plano, ou seja, seus movimentos devido a cada operação, quando os educandos chegaram às funções, conseguiram adquirir esse conhecimento facilmente, pois já tinham entendido as transformações que cada operação originava.

O objeto de aprendizagem, assim como as operações, foram indispensáveis para a verificação desses movimentos, e o vídeo Dimensões trouxe o entendimento de funções de variável complexa, onde os alunos ficaram bem curiosos para estudá-las. Outro fato interessante, neste bloco, foi a retomada da definição de função, que deixou claro que os alunos não a tinham interiorizado. Infelizmente houve algumas pendências, devido à falta de tempo.

5.4 Validação da proposta

Como menciona Artigue (1996), a validação é o confronto das duas análises feitas na seção anterior: análise *a priori* e *a posteriori*.

Inicialmente se ressalta que a validação dessa pesquisa é constituída por uma análise qualitativa, ou seja, trata-se de uma pesquisa onde, segundo Lüdke e André (1986):

- ocorre num ambiente natural (escola da turma 233);
- tem-se o pesquisador como principal auxiliador (professor da turma);

- os dados coletados são descritivos (fotos, filmagens, folha de atividades respondidas pelos alunos);
- a preocupação com o processo é superior ao resultado;
- o significado que os participantes adquirem são focos de atenção do pesquisador (a participação ativa dos alunos nas explicações).

Com essa análise, verificou-se que, de um modo geral, os alunos se apropriaram adequadamente do conceito do conjunto dos números complexos e das operações nesse conjunto, interpretando geometricamente cada operação. Além disso, os educandos conseguiram entender a ideia de função de variável complexa como uma transformação desses números no plano complexo.

Observou-se que se o conceito de número complexo e suas operações estiverem bem consolidados para os alunos e tiverem sido trabalhados no plano complexo, a interpretação das transformações nasce de uma forma mais natural. Em outras palavras, as funções de variável complexa podem ser trabalhadas e entendidas pelos alunos desde que bem entendidos, inicialmente, os conceitos de número complexo e suas operações.

Acredito que se houvesse mais tempo para a realização das tarefas, poderíamos ter ido mais além nas atividades, possibilitando também que houvesse uma melhora na escrita dos alunos. Em relação à dificuldade dos alunos expressarem suas ideias, poderíamos ter modificado as questões, e acrescentado mais explicações e orientações, além de auxiliar os alunos ainda teria facilitado a análise *a posteriori*.

Mostraram-se de extrema importância para essa aprendizagem, as tecnologias, tanto os vídeos mostrados, como o objeto de aprendizagem NC contendo as animações dinâmicas, que foram disponibilizados para a resolução das atividades. O objeto é adequado para desencadear processo de aprendizagem que contempla trabalho com os registros algébrico e geométrico. E mais, foi possível observar que, via a manipulação das animações, os alunos foram constantemente provocados nas conversões de registro e assim desenvolveram esquemas de uso na direção do ensino almejado – entender as ideias matemáticas em diferentes sistemas de representação.

Iniciar o ensino de números complexos pelo ponto de vista geométrico, deu mais sentido a esses e, consequentemente também, aos números reais; muitos alunos não haviam ainda entendido a identificação dos números reais com pontos de uma reta. Além disso, foi retomado o conceito de função real, que ainda não era muito claro para os alunos.

Com a explanação do conjunto dos números complexos no plano complexo e, utilizando os recursos manipulativos, a ideia da função de variável complexa se consolidou de uma forma muito rápida para os estudantes, pois já estavam orientados nesse ambiente geométrico.

Para trabalhar com funções de variável complexa, foi realizada uma recontextualização que, segundo Moysés (1997), é uma ampliação dos significados já adquiridos nas operações com esses números. Por isso, mesmo que a concepção dessa proposta não tenha atingido todas as transformações que pretendia (somente foi trabalhada a translação), fica evidente o sucesso desse emprego, pois seriam utilizados os conceitos já definidos em um novo contexto.

Além disso, os alunos mostraram total interesse nas aulas, alguns chegavam a ficar chateados por não terem conseguido chegar no horário correto à aula de matemática, devido a compromissos no trabalho. Pode-se notar a relevância dos recursos tecnológicos, no caso o objeto NC, para esse interesse. Observou-se, por parte dos alunos, um uso intenso das manipulações disponíveis nas animações. Também foi surpreendente saber que estavam acessando o objeto NC fora do horário de aula para rever os conceitos estudados e finalizar as tarefas.

Com a experiência realizada verificou-se que é possível trazer um ensino mais significativo para os alunos do ensino médio com o auxilio de tecnologias, e ainda introduzir o conceito de funções de variável complexa. É claro que após a implementação da proposta pode-se identificar alguns pontos a serem melhorados. Um deles seria a diminuição no número de questões da seção "Para Pensar" no menu que trata das representações algébrica e geométrica dos números complexos. A resolução das questões tomou tempo dos alunos; os conteúdos ali trabalhados também se fazem presente no estudo das funções e são, portanto, novamente retomados.

Na tabela a seguir tem-se uma possível reestruturação da proposta, com maior ênfase no conteúdo de funções.

Tabela 5: Reestruturação da proposta didática

Assunto	Recursos	Atividades
Definição e representações	Vídeo e animações manipulativas	Atividade 1: questões 1, 2, 6 e 9 (exclusão de 5 questões) Atividade 2: questões 2, 4(a), 6 e 7 (exclusão de 3 questões)
Operações	Vídeos e animações manipulativas	Atividade 3 Atividade 4: questões 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9 (exclusão de 1 questão) Atividade 5: questões 1, 2, 4, 5 e 6 (exclusão de 1 questão)
Funções	Vídeo e animações manipulativas	Atividade 6 Atividade 7

Acredito que com a exclusão de algumas questões esta proposta poderá acontecer no mesmo período que sucedeu essa prática. Na reestruturação da proposta contempla-se o trabalho com a função $F(Z) = A \cdot Z$, que nada mais é do que uma retomada da operação de multiplicação.

Vale comentar que mesmo que o trabalho com funções de variável complexa tenha ficado restrito a função $F(Z) = A + Z$, o material produzido na forma de objeto de aprendizagem pode ajudar na implementação de experiências que avancem nos conteúdos que foram pretendidos no momento de concepção da sequência didática. As demais funções que estão no objeto NC, a saber $F(Z) = Z \cdot Z$ e $F(Z)= 1/Z$, foram apresentadas com detalhes nas seções 4.4.3 e 4.4.4.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer desta pesquisa, procurou-se desenvolver e analisar um material que contribuísse para o ensino e a aprendizagem dos números complexos; pensou-se em produzir um material que pudesse ser utilizado pelos professores em suas aulas e que trouxesse benefícios para a aprendizagem dos alunos.

Reflexões teóricas deram suporte para essa realização, dentre elas aquelas que tratam do processo da construção do conhecimento sob a perspectiva vigostkiana; quanto a construção do conhecimento em matemática tomamos como referência fundamental o trabalho de Duval (2008) sobre registros de representação semiótica. A construção do objeto de aprendizagem "Números Complexos" integrou estes diferentes aspectos teóricos e resultou em um produto onde os alunos se tornaram cada vez mais autônomos para avançarem na sua aprendizagem.

Para organizar e analisar a proposta didática foi utilizada a metodologia Engenharia Didática, que trouxe o suporte para comparar as análises *a priori* e *a posteriori* e chegar à validação do produto. A proposta didática se desenrolou através de atividades com as quais os alunos entenderam os números complexos e suas representações, compreenderam as operações dos prontos de vista algébrico e geométrico, e tiveram um primeiro contato com as funções de variável complexa. A história dos números complexos fez com que os alunos enxergassem que a matemática não nasceu pronta e definida, mas sim foi desenvolvida em cima de diversos questionamentos, dúvidas, incertezas e discussões. Em particular, a interpretação geométrica do número imaginário como sendo a rotação de 90º através da sua multiplicação, trouxe aos estudantes a recontextualização da reta numérica e também dos pontos no plano como números complexos.

A investigação feita também pretende contribuir para a produção de resultados que envolvam o uso de tecnologias no ensino de matemática. O uso das tecnologias se apresentou como um grande aliado do ensino, resgatou o interesse dos alunos na aquisição de novos saberes e auxiliou nas interpretações geométricas.

A introdução ao estudo das funções de variável complexa fez com que os alunos aplicassem diversos conhecimentos já adquiridos, como a construção dos gráficos das funções, as transformações geométricas e as operações com números complexos. Com o objeto de aprendizagem “Números Complexos” os alunos puderam visualizar, manipular, interpretar, mudar valores e parâmetros nas animações disponíveis para compreender este assunto.

Um ponto a ser lamentado, na realização da experiência, é o tempo que se tem a disposição. Infelizmente o tempo é curto para que se possa trabalhar de forma a ter-se o amadurecimento dos alunos quanto à compreensão dos conceitos. No nosso caso ainda é preciso ressaltar a realidade do ensino noturno, pois o estudo não é a única prioridade desse aluno. O ensino noturno trata com adolescentes-adultos que possuem responsabilidade extraclasse, que precisam trabalhar. Mas são alunos com uma força de vontade incrível para terminar seus estudos, pois suas experiências de vida mostram que isso é realmente importante.

Mesmo diante de algumas adversidades, no final desta pesquisa, sinto a satisfação de ter realizado uma experiência inovadora. Vejo que os conhecimentos adquiridos ao longo do Mestrado em Ensino de Matemática e que as discussões e reflexões feitas com meus colegas, foram fundamentais para levar adiante o trabalho desta dissertação.

Com os resultados obtidos posso concluir que um professor deve sempre buscar o aprimoramento das suas aulas, das suas ideias e conhecimentos, não deve nunca ficar satisfeito com o quadro negro e as folhas fotocopiadas. O professor deve buscar sempre o melhor para seus alunos, e fazer com que busquem isso também.

Aprendi neste trabalho, e no mestrado, a importância do aprimoramento, da pesquisa, de repensar e buscar o melhor. Ainda ressalto como mais uma aprendizagem a minha preocupação em ser sempre uma pesquisadora, pensando sempre em aplicar na sala de aula os conhecimentos que adquiro, e não me acomodar na posição de ser uma professora que ensina sempre da mesma forma.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. **Números complexos: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio**. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didáctica**. In: JEAN BRUN (Ed.) *Didática das Matemáticas.* Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217. (Horizontes Pedagógicos).

BARROSO, Juliane Matsubara (ed.) **Conexões com a matemática**. 3v. São Paulo: Moderna, 2010. (Manual do professor).

BARTOLINI BUSSI, M. G.; MARIOTTI, M. A. **Semiotic mediation in the mathematics classroom**: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, and D. Tirosh, eds. Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ. 2008. p. 746-783.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números complexos**. Coleção do professor de matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 121 p.

CARNEIRO, José Paulo. **A geometria e o ensino dos números complexos**. In: Encontro em Educação Matemática, 8, 2004. Recife, *Anais...*SBEM. 2004.

CARNEIRO, José Paulo; WANDERLEY, Augusto. **Os números complexos e a geometria dinâmica**. Disponível em < http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/complexos_cabri.pdf>. Acesso em: 29 maio 2010.

CARNEIRO, Pedro Sica. **Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações**. 2007. 213 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática: Um referencial para ação investigativa e para formação de professores em matemática**. Zetetike, Campinas-UNICAMP, v. 13, p. 85-118, 2005.

CARRETERO, Mario. **Construtivismo e Educação**. Tradução de Jussara Haubert Rodrigues. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CASTORINA, José Antônio. **O debate Piaget-Vygotsky: A busca de um critério para sua avaliação**. In: GOLDFEDER, Miriam. (Ed.). *Piaget-Vygostsky:* Novas contribuições para o debate. Tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 1995. p. 7-50.

CHURCHILL, Ruel Vance. **Variáveis complexas e suas aplicações**. Tradução de Tadao Yoshioka. São Paulo: Mc Graw Hill do Brasil Ltda, 1975.

CROWE, M. **A history of Vector Analysis**. University of Notre Dame Press, London, 1967.

DOLCE, Osvaldo; et al. **Matemática Ciência e aplicações**:. Ensino Médio. 3 v. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (Manual do professor).

DUVAL, Raymond. **A cognitive analysis of problems. of comprehension in a learning of mathematics.** Educational Studies in Mathematics, vol. 61, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2006. P. 103-131.

DUVAL, Raymond. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: SILVIA DIAS ALCÂNTARA MACHADO (org.). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. 4 ed. São Paulo: Papirus, 2008. p. 11-34.

ERNEST, P. **A semiotic perspective on Mathematical Activity**. Educational Studies in Mathematics, vol. 61, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2006.

FERNANDES, Carlos. **Só Biografias**. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/>. Acesso em: 20 jan. 2012.

FERREIRA, Maria Sueli Fonseca. **Uma análise dos questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos**. 2006. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

FISCHBEIN, E. **The theory of figural concepts**. Educational Studies in Mathematics, vol. 24/2, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

Guia de Livros didáticos: PNLD 2012: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretária da Educação Básica, 2011. 104p.

JUNIOR, Ulício Pinto. **A história dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand**. 2009. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/12%20Ulicio%20Pinto.pdf>. Acesso em: 08 ago. 2011.

LERNER, Delia. **O ensino e o aprendizado escolar: argumentos contra uma falsa oposição**. In: GOLDFEDER, Miriam. (Ed.). *Piaget-Vygostsky:* Novas contribuições para o debate. Tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 1995. p. 85-146.

LEYS, Jos; GHYS, Étienne; ALVAREZ, Aurélien. **Dimensions: une promenade mathámatique.** Disponível em: <http://www.dimensions-math.org/Dim_PT.htm>. Acesso em 20 jul. 2012.

MARIOTTI, Maria Alessandra. **Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher**. In: *ZDM The International Journal Mathematics Education*, v. 41, n. 4, p. 427-440, ago. 2009.

MENGA, Lüdke; ANDRÉ, Marli E.D.A.. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986. (Temas básicos de educação e ensino).

MILIES, César Polcino. **A emergência dos números complexos**. *Revista do professor de Matemática,* São Paulo, n. 24, p. 5-15, 1993.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. São Paulo: Papirus, 1997. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

NETO, Raimundo Martins Reis. **Alternativa Metodológica para o ensino e aprendizagem de Números Complexos: Uma experiência com professores e alunos.** 2009. 142 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. **Números Complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, Ministério da educação/ Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 2002, 141 p.

PAIVA, Manuel. **Matemática Paiva 3** – Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2009. (Manual do professor).

PAULA, Luciene de. **A interpretação geométrica dos números imaginários no século XIX: A contribuição de Jean Robert Argand (1768-1822)**. 2007. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2007.

PRATA, Carmem Lúcia; AZEVEDO, Anna Christinha Aun de. (Org.). **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico**. Brasília: MEC; SEED, 2007. 154 p.

RADFORD, Luis. **Introducción: Semiótica y Educación Matemática**. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*, México, v. 9, n.4, p. 7-21, 2006. Disponível em: <http://www.clame.org.mx/relime.htm>. Acesso em: 8 jan. 2012.

RIBEIRO, Tiago Neri. **A utilização de softwares de geometria dinâmica como ferramenta pedagógica nas aulas experimentais de matemática**. In: Colóquio Internacional: Educação e contemporaneidade, 5., 2011, Anais, Sergipe, 2011. Disponível em: < http://www.educonufs.com.br/vcoloquio>. Acesso em: 19 jan. 2012.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto. **Números Racionais, Reais e Complexos**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006. 340 p.

ROSA, Mário Servelli. **Números complexos: uma abordagem histórica para aquisição de conceitos**. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

SILVA, Silvana Holanda da; BARRETO, Marcília das Chagas. **Conhecimento de professores polivalentes em geometria: contribuições da teoria dos registros de representação semiótica**. In: Encontro Brasileiro de estudantes de pós-graduação em educação matemática, 15., 2011, Anais e Caderno de Resumo, Paraíba, 2011. Disponível em: < http://www.portalrealize.com.br/revista/revistas/ebrapem/trabalhos/9591a6c8681a0a9a263cf85cc596ae3a.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2012.

SOUZA, Carlos Eduardo; GRAVINA, Maria Alice. **Geometria com animações interativas**. *Novas Tecnologias na Educação*. Porto Alegre, v. 7, n. 1, jul. 2009. Disponível em: < http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/13999/7888>. Acesso em: 19 jan. 2012.

VIGOTSKII, Lev Semenovich. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem: Lev Semenovich Vigotskii, Alexander Romanovich Luria, Alex N. Leontiev**. 6. ed. Tradução de Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone, 1998. (Coleção Educação crítica).

APÊNDICES

APÊNDICE A - Atividade 1

ATIVIDADE 1 – NÚMEROS COMPLEXOS – REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Utilizando os recursos disponíveis no site, analise e responda as seguintes perguntas

1) Construa um plano complexo e localize os pontos correspondentes aos seguintes números complexos:

$z_1 = -3 + 3i$

$z_2 = 1 + 4i$

$z_3 = 2i$

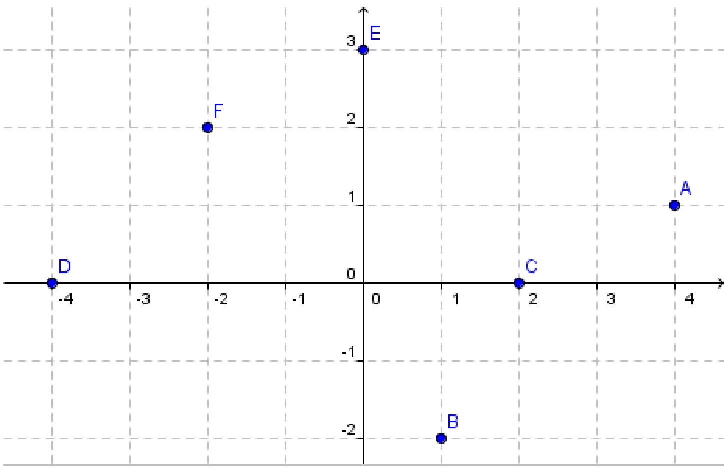
$z_4 = -4i$

$z_5 = 2 - 3i$

$z_6 = 3$

$z_7 = -4$

2) Escreva os números complexos correspondentes aos pontos A, B, C, D, E e F do plano:



3) Dê dois números complexos com parte imaginária igual a zero.

Z = W =

4) Dê dois números complexos com parte real igual a zero.

Z = W =

5) Mostre os dois números complexos resultantes da rotação de 90° do número complexo 2+4i **.** Escreva estes números na forma algébrica

Z = W =

6) Dê cinco números complexos que tenham o mesmo módulo de 2+3i. Escreva estes números na forma algébrica

Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5=

7) Seis números complexos com módulo igual a 5. Escreva estes números na forma algébrica

Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6=

8) Seis números complexos com módulo igual a 1. Escreva estes números na forma algébrica.

Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6=

9) Os números complexos que tem parte real igual à parte imaginária. Que tipo de figura formam estes números complexos? Escreva estes números na forma algébrica.

10) Os números complexos que tem a parte imaginária igual ao dobro da parte real. Que tipo de figura formam estes números complexos? Escreva estes números na forma algébrica.

APÊNDICE B - Atividade 2

ATIVIDADE 2 – NÚMEROS COMPLEXOS – REPRESENTAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Utilizando os recursos disponíveis no site, analise e responda as seguintes perguntas

1) O número complexo com r = 2 e $\theta = 90°$. Escreva este número na forma trigonométrica.

2) O número complexo com r = 2 e $\theta = 135°$. Escreva este número na forma trigonométrica e confira a sua resposta na caixa "Forma Trigonométrica de Z".

3) O número complexo com r = 2 e $\theta = 0°$. Escreva este número na forma trigonométrica.

4) Escreva os seguintes números na forma trigonométrica:

a) z = 4 + 4i

b) z = $1 + \sqrt{3}\,i$

c) z = $\sqrt{3} + i$

5) Os números complexos com r < 3 e $\theta = 30°$, represente eles no plano. Escreva estes números na forma trigonométrica.

6) Os números complexos com r < 3 e $0° < \theta < 90°$, represente-os no plano. Que tipo de figura formam estes números?

7) Qual o tipo dos números complexos que estão na circunferência de raio 2.

APÊNDICE C - Atividade 3

ATIVIDADE 3 – NÚMEROS COMPLEXOS – ADIÇÃO

Utilizando os recursos disponíveis no site, analise e responda as seguintes perguntas

1) Qual o valor de W sendo Z= 4+i e (Z + W) = 6+4i.

W =

2) Se (Z + W) = 3+3i , indique Z e W em pelo menos três situações diferentes:

Z1 =	W1 =
Z2 =	W2 =
Z3 =	W3 =

3) Se (Z + W) = 4 , indique Z e W em pelo menos três situações diferentes.

Z1 =	W1 =
Z2 =	W2 =
Z3 =	W3 =

4) Se (Z + W) = 0, indique Z e W em pelo menos três situações diferentes.

Z1 =	W1 =
Z2 =	W2 =
Z3 =	W3 =

5) Se (Z + W) = 2i, sendo Z e W em pelo menos três situações diferentes.

Z1 =	W1 =

Z2 = W2 =

Z3 = W3 =

6) Se (Z + W) tem módulo igual a 5, indique Z e W em pelo menos três situações diferentes.

Z1 = W1 =

Z2 = W2 =

Z3 = W3 =

7) Quando temos Z = i e W = 1, qual o valor do módulo de Z + W ? E do seu argumento? Escreva esse vetor resultante na forma trigonométrica.

APÊNDICE D - Atividade 4

ATIVIDADE 4 – NÚMEROS COMPLEXOS – MULTIPLICAÇÃO NA FORMA ALGÉBRICA

Utilizando os recursos disponíveis no site, analise e responda as seguintes perguntas

1) Qual o valor de Z.W sendo Z = 2 + i e W = 2?

2) Sendo Z = 2 + i e W um número real. Que tipo de figura formam os números complexos Z.W.

3) Qual o valor de Z.W sendo Z = 2 + i e W = i.

4) Sendo Z = 2 + i e W um número imaginário puro. Que tipo de figura formam os números complexos Z.W.

5) Sendo Z = (2 + 2i) ou (2 + 3i) ou (2 + 4i) e W = i . Que tipo de figura formam os números complexos Z.W

6) Calcule: Z = i^2 = Z = i^3= Z = i^4 = Z = i^5 = Z = i^{10} =

Z = i^{15}= Você pode concluir alguma coisa dessa potenciação?

7) Sendo Z = 2 + 3i e W = i, calcule o ângulo entre o segmento dado por O e Z e o segmento dado por O e Z.W

8) Sendo Z = 2 + 2i e W = 1+i calcule o ângulo entre o segmento dado por O e Z e o segmento dado por O e Z.W

9) Sendo Z = 2 + 2i e W = -1 + i calcule o ângulo entre o segmento dado por O e Z e o segmento dado por O e Z.W

APÊNDICE E - Atividade 5

ATIVIDADE 5 – NÚMEROS COMPLEXOS – MULTIPLICAÇÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Utilizando os recursos disponíveis no site, analise e responda as seguintes perguntas

1) Calcule Z .W sendo Z = $\sqrt{2}(\cos 45° + isen\, 45°)$ e W = 2.

2) Sendo Z = $2\ (cos\ 45°\ +\ i\ sen\ 45°)$ e |W|= 1. Que figura formam os números Z.W?

3) Sendo Z = $2\ (cos\ 45°\ +\ i\ sen\ 45°)$ e |W|= 2 . Que figura formam os números Z.W?

4) Se Z.W = $r\ (\ cos\ 90°\ +\ i\ sen\ 90°)$ mostre Z e W em pelo menos em três situações diferentes.

5) Se Z.W = $2\ (cos\ 135°\ +\ i\ sen\ 135°)$ mostre Z e W em pelo menos três situações diferentes.

6) Se |Z.W| =1, mostre Z e W em três situações diferentes.

APÊNDICE F - Atividade 6

ATIVIDADE 6 – NÚMEROS COMPLEXOS – FUNÇÃO F(Z) = A + Z

Utilizando o primeiro objeto manipulativo, responda as seguintes perguntas:

1) Encontre um valor para A para que a figura vermelha seja uma translação horizontal da figura azul. Represente o desenho que originou. Existe mais valores de A que realizam esse deslocamento? Como deve ser o valor de A?

A =

2) Encontre um valor de A para que a figura vermelha seja uma translação vertical da figura azul. Represente o desenho que originou. Como deve ser o valor de A para que esse deslocamento ocorra?

A =

3) Encontre uma valor de A para que a figura vermelha seja uma translação horizontal e vertical da figura azul. Represente o desenho que originou. Como deve ser o valor de A para que isso ocorra?

A =

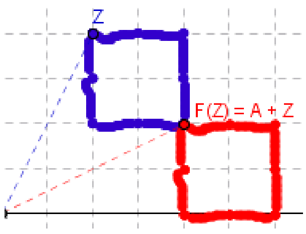
Utilize o segundo objeto manipulativo para responder as perguntas que seguem:

1) Faça A = 2 - 3i e localize z para que F(Z) seja real. Z = _____________ Somente existe esse valor? Como deve ser o valor de Z, por quê?

2) Faça A = 2 - 3i e localize z para que F(Z) seja imaginário puro. Z = ___________ Somente existe esse valor? Como deve ser o valor de Z, por quê?

3) Faça A = 2 - 3i e localize z para que F(Z) tenha imaginário e real iguais. Z = ___________ Somente existe esse valor? Como deve ser o valor de Z, por quê?

4) Determine A para se tenha a imagem que segue:



A =

5) Se Z e F(Z) desenham quadrados onde seus centros distam 5 unidades, determine A.

A =

APÊNDICE G - Atividade 7

ATIVIDADE 7 – NÚMEROS COMPLEXOS – FUNÇÃO F(Z) = A.Z

Utilizando o primeiro objeto manipulativo, responda as seguintes perguntas:

1) 5 valores de A onde F(Z) dobre de tamanho.

A1 = A2 = A3 = A4 = A5 =

2) 3 valores de A para que F(Z) rotacione 90º.

A1 = A2 = A3 =

3) 3 valores de A para que F(Z) rotacione 180º.

A1 = A2 = A3 =

4) 3 valores de A para que F(Z) rotacione 270º.

A1 = A2 = A3 =

5) A para que F(Z) rotacione 135º e triplique seu tamanho.

6) 3 valores de A para que F(Z) tenha metade do tamanho.

A1 = A2 = A3 =

Utilize o segundo objeto manipulativo para responder as perguntas:

1) Descubra A, para que Z = 2 + 2i e F(Z) = 4 + 4i.

A =

2) Três valores para A e z para que F(Z) = -3 -4i.

A1 = Z1 =

A2 = Z2 =

A3 = Z3 =

3) Três argumentos diferentes para A e Z para que F(Z) fique na reta onde seu imaginário é igual ao real.

A1 = Z1 =

A2 = Z2 =

A3 = Z3 =

4) Um valor para A, para que Z desenhe uma reta azul horizontal de tamanho 2 e F(Z) desenhe uma reta vermelha vertical de tamanho 2. A = ____________

5) Um valor de A, para que Z desenhe uma reta azul horizontal de tamanho 1 e F(Z) desenhe uma reta vermelha vertical de tamanho 2. A = ____________