

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

UM MODELO CONSTITUTIVO PARA O
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO VIA
TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO

Vanessa Fátima Pasa Dutra

Porto Alegre
2012

VANESSA FÁTIMA PASA DUTRA

**UM MODELO CONSTITUTIVO
PARA O CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO
VIA TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de
Doutor em Engenharia.

Orientadores: Prof. Dr. Américo Campos Filho
Prof. Dr. Samir Maghous

Porto Alegre
2012

D978u Dutra, Vanessa Fátima Pasa

Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via teoria da homogeneização / Vanessa Fátima Pasa Dutra. – 2012.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2012.

Orientadores – Prof. Dr. Américo Campos Filho e Prof. Dr. Samir Maghous.

1. Concreto. 2. Fibras de aço. 3. Homogeneização. 4. Método dos elementos finitos. I. Campos Filho, Américo, orient. II. Maghous, Samir, orient. III. Título.

CDU-624(043)

VANESSA FÁTIMA PASA DUTRA

**UM MODELO CONSTITUTIVO PARA O
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO
VIA TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de
DOUTOR EM ENGENHARIA, e aprovada em sua forma final pelos
professores orientadores e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 24 de Maio de 2012.

Prof. Américo Campos Filho
Dr. pela
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
orientador

Prof. Samir Maghous
Docteur pela
Ecole Nationale Des Ponts Et Chaussées
orientador

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Romildo Dias Toledo Filho (COPPE/UFRJ)
Dr. pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Eduardo de Moraes Rego Fairbairn (COPPE/UFRJ)
Docteur pela Université Pierre et Marie Curie

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho (UFRGS)
Ph.D. pela Leeds Metropolitan University

Mais uma vez ... à minha família.

*“L'homme se découvre quand il se mesure avec l'obstacle.”
Antoine de Saint-Exupéry*

Agradecimentos

E então... mais uma das etapas foi alcançada! Ao finalizar este trabalho, recorro os momentos e as pessoas que estiveram presentes durante estes últimos anos, ouvindo, auxiliando, apoiando-me. Agradeço-lhes pela companhia ao longo do caminho, o conselho sempre válido, o apoio a cada decisão, a palavra amiga, a boa dica, a crítica franca, a energia positiva, a pequena prece...

Ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela possibilidade de realizar este estudo e aos seus professores, pelos valiosos ensinamentos transmitidos, que constituíram base para este trabalho e para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Aos professores Américo Campos Filho e Samir Maghous, pela orientação e dedicação que dispensaram durante todo o período deste trabalho. Pelos conselhos e apoio, pela compreensão e confiança depositada. Pela amizade!

Aos colegas e queridos amigos, pela troca de experiências, companheirismo e amizade.

Aos colegas do CEMACOM (Centro de Mecânica Aplicada e Computacional), pelo auxílio, acolhimento e maravilhosa convivência, lembrados eternamente.

Aos professores e colegas que durante o período de graduação e mestrado contribuíram para o meu encontro com a pesquisa e o ensino.

À minha família. Aos amados pais e a tudo o que eles representam; pelo seu exemplo de vida, modelo que desejo sempre seguir. Obrigada por sempre me apoiarem. E à minha querida irmã, minha eterna companheira.

Aos meus sogros, queridos pais que a vida simplesmente me deu de presente.

Ao meu Amor, pela paciência, pelo carinho, pela troca, pela compreensão, pelo amor.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo suporte financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

À Deus, que esteve e sempre estará ao meu lado, tanto nos momentos bons quanto naqueles em que a vida se apresenta de forma adversa.

Resumo

PASA DUTRA, V. F. Um Modelo Constitutivo para o Concreto Reforçado com Fibras de Aço via Teoria da Homogeneização. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) é um material compósito formado por uma matriz cimentícia e por uma certa quantidade de fibras aleatoriamente dispersas. Buscou-se neste estudo “construir” um modelo constitutivo capaz de representar o comportamento do CRFA e cuja formulação está fundamentada na Teoria da Homogeneização, no Método dos Elementos Finitos (MEF), como também em observações experimentais disponíveis na literatura.

Na primeira etapa do trabalho foram desenvolvidos estudos visando a análise do comportamento elástico e viscoelástico do CRFA. Inicialmente, o comportamento elástico linear foi investigado através da aplicação do esquema de homogeneização de Mori-Tanaka, o qual é baseado nos resultados estabelecidos por Eshelby (1957). A precisão dos resultados obtidos pela abordagem analítica foi verificada pela comparação com a solução via MEF, bem como com os resultados experimentais disponíveis. As estimativas micromecânicas das propriedades elásticas efetivas se mostraram coerentes àquelas obtidas através de análise numérica de um volume elementar representativo (VER) do material, modelado como um meio heterogêneo, como também, aos dados experimentais. Posteriormente, a formulação do comportamento viscoelástico sem envelhecimento foi obtida fazendo-se uso da resposta em elasticidade e do Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica. Os resultados obtidos foram comparados aos dados experimentais e a modelos analíticos disponíveis.

Na segunda etapa do trabalho, as propriedades de resistência do CRFA foram investigadas empregando-se a abordagem estática da análise limite combinada à teoria da homogeneização. O critério de resistência macroscópico para o CRFA foi teoricamente obtido a partir do conhecimento da resistência dos seus constituintes, ou seja, da matriz de concreto e das fibras. Adotando-se o critério de ruptura de Drucker-Prager para a matriz de concreto e considerando-se distribuição espacial isotrópica das fibras através de um modelo aproximado, um critério aproximado para a estimativa das propriedades de resistência homogeneizadas foi formulado. A formulação do critério foi complementada através da consideração de um critério de *cut-off* em tração e das propriedades limitadas de resistência da interface. Os resultados analíticos foram comparados a resultados experimentais e àqueles obtidos na resolução numérica do problema de análise limite formulado sobre o VER do CRFA, através de uma ferramenta numérica baseada no MEF no contexto da plasticidade. A comparação permitiu avaliar a influência da anisotropia do modelo aproximado empregado, como também da geometria real das fibras sobre a resistência do compósito.

Palavras-chave: Concreto; Fibras de Aço; Homogeneização; Método dos Elementos Finitos.

Abstract

PASA DUTRA, V. F. A Constitutive Model for Steel Fiber Reinforced Concrete based on the Homogenization Theory. 2012. Thesis (Doctorate in Civil Engineering) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Steel fiber reinforced concrete (SFRC) is a composite material formed by a cement matrix and a certain amount of randomly dispersed fibers. The main objective of the present work is the formulation of a comprehensive constitutive model for SFRC behavior that relies upon homogenization theory, finite element method (FEM) and taking advantage of experimental data available in the literature as well.

The first part of the work is devoted to the assessment of elastic and viscoelastic behavior of SFRC. The study starts with the analysis of linear elastic behavior by implementation of a Mori-Tanaka homogenization scheme, which is based on the Eshelby equivalent inclusion approach. It was found that the micromechanical predictions for the overall stiffness proved to be considerably close to the experimental data, as well as to the finite element solutions obtained from numerical analysis of a representative elementary volume (REV) of SFRC (modeled as a randomly heterogeneous medium). Subsequently, the formulation of the non-aging viscoelastic behavior is carried out by making use of results from Elasticity and the Elastic-Viscoelastic Correspondence Principle. The results are compared to available experimental data and analytical models.

The second part of the work focuses on the assessment of macroscopic strength properties of fiber reinforced concrete (FRC). Combining the static approach of limit analysis and the homogenization theory, the macroscopic strength criterion for SFRC was theoretically obtained from the knowledge of the strength properties of the individual constituents (concrete matrix and fibers). Adopting a Drucker-Prager failure condition for the concrete matrix and adopting a simplified geometrical model for fiber orientations and length, an approximate criterion was formulated for the overall strength properties. This formulation was complemented by considering a tensile cut-off condition for the concrete and limited strength properties for the interface. The analytical results were compared to experimental data and also to results obtained from a numeric resolution of the problem of limit analysis stated on the REV the material by means of a specifically devised Finite Element numerical tool in the plasticity context. The comparison allowed investigating the influence of the anisotropy of the employed approximate model, as well as the real fiber morphology on the composite strength properties.

Keywords: Concrete; Steel Fiber; Homogenization; Finite Element Method.

Sumário

1. Introdução.....	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2 EMPREGO DO CRFA.....	4
1.3 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA DA PESQUISA	8
1.4 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA.....	9
1.5 OBJETIVOS.....	10
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	11
2. Concreto Reforçado com Fibras de Aço.....	13
2.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CRFA.....	19
2.2 CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS	24
2.3 MODELOS PARA A RESISTÊNCIA DO CRFA	26
2.4 MODELAGEM DO CRFA	32
3. Teoria da Homogeneização.....	38
3.1 PRINCÍPIO GERAL DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO.....	38
3.1.1 Volume Elementar Representativo e Separação entre Escalas.....	40
3.1.2 Problema de Concentração	42
3.2 PROCESSO DE HOMOGENEIZAÇÃO EM ELASTICIDADE.....	44
3.2.1 Estimativas.....	48
3.2.1.1 Estimativas de Voigt e Reuss	48
3.2.1.2 Estimativas tipo Eshelby	50
3.2.1.2.1 Resultado de Eshelby.....	51
3.2.1.2.2 Estimativa Diluída.....	52
3.2.1.2.3 Estimativa de Mori-Tanaka.....	53
3.2.1.2.4 Estimativa Auto-Consistente	55
3.2.1.2.5 Estimativa Auto-Consistente Generalizada ou Dupla Inclusão.....	57
3.2.1.2.6 Esquema Diferencial	57
3.2.2 Limites	59
3.2.2.1 Limites de Voigt e Reuss.....	60
3.2.2.2 Limites de Hashin-Strikman.....	61
3.3 ORIENTAÇÃO E FORMA DAS INCLUSÕES	63
3.4 PROPRIEDADES ELÁSTICAS EFETIVAS PARA O CRFA.....	66

3.4.1 Estimativa de Mori-Tanaka	66
3.4.2 Comparação com Resultados Experimentais.....	71
3.4.3 Abordagem Numérica via Método dos Elementos Finitos.....	74
3.5 COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO SEM ENVELHECIMENTO DO CRFA ..	77
3.5.1 Fluência e Relaxação	78
3.5.2 Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV).....	80
3.5.3 Comportamento Viscoelástico da Matriz de Concreto e das Fibras de Aço	82
3.5.4 Propriedades viscoelásticas homogeneizadas para o CRFA	87
3.5.5 Comparação com Resultados Experimentais e Modelos Analíticos	92
4. Critério de Resistência Macroscópico.....	104
4.1 HOMOGENEIZAÇÃO EM ANÁLISE LIMITE	105
4.1.1 Princípio Geral do Método	106
4.1.2 Critério de Resistência Macroscópico	108
4.1.2.1 Meios Periódicos	109
4.1.2.1.1 Definição estática de G^{hom}	110
4.1.2.1.2 Definição cinemática (dual) de G^{hom}	111
4.1.2.2 Meios Não Periódicos.....	112
4.1.2.2.1 Tensão Homogênea sobre o Contorno do VER.....	114
4.1.2.2.2 Deformação Homogênea sobre o Contorno do VER.....	116
4.2 DOMÍNIO DE RESISTÊNCIA PARA O CRFA	119
4.2.1 Critério de Resistência para o CRFA – Modelo Aproximado.....	119
4.2.2 Determinação do Critério de Resistência Macroscópico para o CRFA	121
4.2.2.1 Matriz caracterizada pelo Critério de Drucker-Prager	127
4.2.2.1.1 Direções das Tensões Principais Colineares às Direções das Fibras....	130
4.2.3 Qualificação do Modelo Analítico.....	134
4.2.3.1 Comparação dos Resultados Analíticos com Dados Experimentais	134
4.2.3.2 Comparação dos Resultados Analíticos com Simulações Numéricas.....	139
4.2.4 Discussão sobre as Hipóteses Adotadas no Modelo Analítico.....	144
4.2.4.1 Influência da Dimensão da Fibra.....	144
4.2.4.2 Direções das Tensões Principais e das Fibras Não Colineares.....	147
4.2.4.2.1 Resistência à compressão uniaxial.....	153
4.2.4.2.2 Resistência à compressão biaxial.....	156
4.2.4.3 Consideração de um número maior de direções de fibras	160

5. Condição de cut-off em Tração e Interface	163
5.1 CONDIÇÃO DE CUT-OFF EM TRAÇÃO	163
5.1.1 Critério de Resistência Macroscópico – Consideração da Condição de Cut-Off em Tração	164
5.1.1.1 Formulação Alternativa Simplificada.....	169
5.2 INTERFACE	175
5.2.1 Interação Fibra-Matriz	176
5.2.2 Critério de Resistência Macroscópico – Consideração da Interface	179
5.2.2.1 Domínio de Resistência da Interface G^{int}	182
5.2.2.2 Domínio de Resistência do CRFA – Consideração da Interface.....	182
6. Considerações Finais.....	189
6.1 CONCLUSÕES	190
6.1.1 Propriedades Elásticas	190
6.1.2 Propriedades Viscoelásticas.....	191
6.1.3 Resistência	192
6.2 RECOMENDAÇÕES.....	194
Referências Bibliográficas	197
Anexo A: Expressões analíticas para os componentes do tensor de Eshelby	211
Anexo B: Transformação de coordenadas	215
Anexo C: Transformação de coordenadas - tensões escritas em termos das tensões e direções principais	217

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Linha do tempo de métodos de ensaio e de projeto para o CRFA (adaptado de Ross, 2009).....	6
Figura 2.1 – Fibras de distintos materiais, comprimentos e formas, que podem ser utilizadas no concreto (adaptado de Kosmatka et al., 2003).....	14
Figura 2.2 – Configurações típicas das fibras de aço (adaptado de Naaman, 2000).....	15
Figura 2.3 – Classificação de materiais cimentícios (adaptado de Matsumoto e Mihashi, 2002).....	18
Figura 2.4 – Curvas de tensão-deformação na compressão uniaxial para concretos reforçados com fibras de aço (adaptado de Balaguru e Shah, 1992).....	20
Figura 2.5 – Curva tensão x deslocamento na tração direta para concreto normal e para o concreto reforçado com diferentes teores de fibra (adaptado de Gopalaratnam e Shah, 1987).	21
Figura 2.6 – Resultados de ensaio de compressão diametral para concreto com e sem adição de fibras (adaptado de Cucchiara et al., 2004).	22
Figura 2.7 – Comportamento ao corte de vigas de concreto reforçado com fibras (adaptado de ACI 544.4R-88, 1999).....	25
Figura 2.8 – “Modelo tensão confinante” para o CRFA proposto por Murugappan et al. (1993).....	26
Figura 2.9 – Modelo proposto por Murugappan et al. (1993) e resultados experimentais de Yin et al. (1989) (a) e Traina e Mansour (1991) (b).....	27
Figura 2.10 – Deformação de uma elipse (a) e envoltórias de ruptura propostas (b), adaptado de Hu et al. (2003).	28
Figura 2.11 – Representação da superfície de Willam-Warnke.	29
Figura 2.12 – Modelo proposto por Seow e Swaddiwudhipong (2005) e resultados experimentais de Swaddiwudhipong e Seow (2006).....	31
Figura 3.1 – Escala macroscópica e microscópica.	39
Figura 3.2 – Processo de Homogeneização.	41
Figura 3.3 – VER e condições de contorno em tensão homogênea.	43
Figura 3.4 – VER e condições de contorno em deformação homogênea.....	44
Figura 3.5 – Processo de homogeneização para esquemas de estimativa baseados no resultado de Eshelby.....	50

Figura 3.6 – Domínio infinito com inclusão elipsoidal.....	51
Figura 3.7 – Esquema de Estimativa Diluída.....	53
Figura 3.8 – Esquema de Estimativa de Mori-Tanaka.....	54
Figura 3.9 – Esquema de Estimativa de Auto-Consistente.....	56
Figura 3.10 – Esquema de Estimativa de Auto-Consistente Generalizado.....	57
Figura 3.11 – Esquema de Estimativa Diferencial.....	58
Figura 3.12 – Orientação da inclusão elipsoidal no espaço. Eixos locais x'_i e globais x_i	64
Figura 3.13 – Variação de K^{hom}/k^m em função da fração volumétrica de fibras e para diferentes valores de α	67
Figura 3.14 – Variação de G^{hom}/g^m em função da fração volumétrica de fibras e para diferentes valores de α	68
Figura 3.15 – Variação de K^{hom}/k^m em função da fração volumétrica de diferentes tipos de fibras.....	70
Figura 3.16 – Variação de G^{hom}/g^m em função da fração volumétrica de diferentes tipos de fibras.....	70
Figura 3.17 – Módulos de Young estimados através do esquema de Mori-Tanaka e experimentalmente medidos por Thomas e Ramaswamy (2007).....	72
Figura 3.18 – Coeficientes de Poisson estimados através do esquema de Mori-Tanaka e experimentalmente medidos por Thomas e Ramaswamy (2007).....	72
Figura 3.19 – Módulos de Young: valores estimados através do esquema de Mori-Tanaka e obtidos experimentalmente por Ashour et al. (2000).....	73
Figura 3.20 – Módulos de Young: valores estimados através do esquema de Mori-Tanaka e obtidos experimentalmente por Williamson (1974).....	73
Figura 3.21 – VER sob compressão uniaxial considerado na simulação via método dos elementos finitos.....	75
Figura 3.22 – Representação do fenômeno da fluência (adaptado de Creus, 1986).....	79
Figura 3.23 – Representação do fenômeno da relaxação (adaptado de Creus, 1986).....	80
Figura 3.24 – Elementos mecânicos básicos: mola (a) e amortecedor (b).....	83
Figura 3.25 – Modelo de Zener.....	84
Figura 3.26 – Fluência e relaxação para o modelo de Zener.....	86

Figura 3.27 – Variação do módulo de compressão viscoelástico homogeneizado do CRFA para $f = 1\%$ e $f = 5\%$	90
Figura 3.28 – Variação do módulo de cisalhamento viscoelástico homogeneizado do CRFA para $f = 1\%$ e $f = 5\%$	91
Figura 3.29 – Variação da função de relaxação homogeneizada do CRFA para $f = 1\%$ e $f = 5\%$	91
Figura 3.30 – Variação do coeficiente de Poisson viscoelástico homogeneizado do CRFA para $f = 1\%$ e $f = 5\%$	92
Figura 3.31 – Deformação por fluência estimada e obtida experimentalmente por Mangat e Azari (1985) para CRFA com $f=3\%$	94
Figura 3.32 – Deformação por fluência estimada e obtida experimentalmente por Mangat e Azari (1985) para CRFA com $f=1\%$ e $1,5\%$	95
Figura 3.33 – Função de fluência estimada e obtida experimentalmente por Chern e Young (1989) para CRFA com $f=1\%$ e 2%	96
Figura 3.34 – Representação da distribuição idealizada das fibras e do modelo de fluência utilizados por Mangat e Azari (1985).	98
Figura 3.35 – Deformação por fluência estimada neste estudo, obtida pelo modelo de Mangat e Azari (1985) e experimental para CRFA com $\alpha = 56$	99
Figura 3.36 – Deformação por fluência estimada neste estudo, obtida pelo modelo de Mangat e Azari (1985) e experimental para CRFA com $\alpha = 59$	100
Figura 3.37 – Deformação por fluência estimada neste estudo, obtida pelo modelo de Zhang (2003) e experimental de Mangat e Azari (1985) para CRFA com $\alpha = 56$	102
Figura 3.38 – Deformação por fluência estimada neste estudo, obtida pelo modelo de Zhang (2003) e experimental de Mangat e Azari (1985) para CRFA com $\alpha = 59$	102
Figura 4.1 – Princípio geral da homogeneização em análise limite.	107
Figura 4.2– Antiperiodicidade do vetor de tensão.	109
Figura 4.3– Abordagem cinemática de G^{hom}	112
Figura 4.4 – Meio formado por fibras curtas aleatoriamente distribuídas e meio fictício associado.	120
Figura 4.5 – Domínio de resistência macroscópico G^{hom} no espaço das componentes da tensão macroscópicas Σ_{xx} , Σ_{yy} e Σ_{zz} de um material reforçado por fibras longas nas direções x , y e z	124

Figura 4.6 – Intersecção com o plano octaédrico do domínio de resistência macroscópico G^{hom} de um material reforçado por fibras nas direções x , y e z .	125
Figura 4.7 – Representação gráfica do critério de Drucker-Prager.	128
Figura 4.8 – Domínio de resistência macroscópico G^{hom} no plano Σ_I, Σ_{II} de um compósito reforçado nas direções x , y e z e cuja resistência da matriz é representada pelo critério Drucker-Prager.	132
Figura 4.9 – Intersecções de G^{hom} e do domínio de resistência da matriz com os planos $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 0$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 0,7$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 1,41$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 2$ e $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 3,41$.	133
Figura 4.10 – Dados experimentais de Yin et al. (1989) e resultados analíticos do presente estudo.	135
Figura 4.11 – Dados experimentais de Lim e Nawy (2005) e resultados obtidos no presente estudo.	136
Figura 4.12 – Dados experimentais Swaddiwudhipong e Seow (2006) e resultados obtidos no presente estudo.	137
Figura 4.13 – Dados experimentais de Peres (2008) e resultados obtidos no presente estudo.	138
Figura 4.14 – VER e deformação macroscópica considerados nas simulações numéricas.	140
Figura 4.15 – Resultados numéricos e correspondentes resultados analíticos.	143
Figura 4.16 – Possível campo de tensões em uma fibra curta.	145
Figura 4.17 – Direções das fibras e das tensões principais e ângulos de Euler.	148
Figura 4.18 – Domínios de resistência biaxial para diferentes ângulos de Euler para um compósito cuja resistência da matriz é representada pelo critério Drucker-Prager.	149
Figura 4.19 – Resistências à compressão uniaxial numéricas e correspondentes resultados analíticos considerando-se distintas direções principais de carregamento.	150
Figura 4.20 – Resistências à compressão biaxial numéricas e correspondentes resultados analíticos considerando-se distintas direções de carregamento.	150
Figura 4.21 - Resultados numéricos e correspondentes resultados analíticos.	151
Figura 4.22 – Tensão uniaxial Σ e definição da sua orientação.	153
Figura 4.23 – Dados experimentais de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008) e correspondentes resultados numéricos de f_c .	155
Figura 4.24 – Resistências à compressão uniaxial médias e numéricas via MEF.	156

Figura 4.25 – Tensão biaxial e definição da sua orientação.....	157
Figura 4.26 – Dados experimentais de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008) e correspondentes resultados numéricos de f_{cb}	159
Figura 4.27 – Resistências à compressão biaxial médias e numéricas via MEF.....	160
Figura 5.1 – Domínio de resistência macroscópico G^{hom} , no plano Σ_I, Σ_{II} , de um compósito reforçado nas direções x , y e z e cuja resistência da matriz é representada pelo critério Drucker-Prager e condição de cut-off em tração do tipo Rankine.	167
Figura 5.2 – Intersecções de G^{hom} e do domínio de resistência da matriz com diferentes planos $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = cte$	168
Figura 5.3 – Aumento da resistência à tração obtida pela adição de fibras de aço.	169
Figura 5.4 – Dados experimentais de Demeke e Tegos (1994) e resultados analíticos do presente estudo.	171
Figura 5.5 – Dados experimentais de Kölle (2006) ($l_f / d_f = 45$) e resultados analíticos do presente estudo (a). Detalhe da região de tensões de compressão-tração.	173
Figura 5.6 – Dados experimentais de Kölle (2006) ($l_f / d_f = 65$) e resultados analíticos do presente estudo (a). Detalhe da região de tensões de compressão-tração.	174
Figura 5.7 – Representação das tensões tangenciais (de cisalhamento) na interface fibra-matriz (adaptado de Bentur e Mindess, 2006).	178
Figura 5.8 – Interface matriz/fibra e sua capacidade de resistência.	179
Figura 5.9 – Domínio $G_{s,int}^{hom}$ (interseção de G_s^{hom} e G^{int}).	181
Figura 5.10 – Vetor normal à interface para fibra disposta segundo e_z	183
Figura 5.11 – Critérios de resistência g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int} da interface no plano de tensões principais Σ_I, Σ_{II}	184
Figura 5.12 – Domínio $G_{s,int}^{hom}$, obtido a partir de G_s^{hom} , g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int}	185
Figura 5.13 – Dados experimentais de Kölle (2006) ($l_f / d_f = 45$) e resultados analíticos do presente estudo.	186
Figura 5.14 – Dados experimentais de Kölle (2006) ($l_f / d_f = 65$) e resultados analíticos do presente estudo.	187
Figura 5.15 – Dados experimentais de Demeke e Tegos (1994) e resultados analíticos do presente estudo.	188

Figura A.1 – Eixos locais da inclusão para o cálculo do tensor de Eshelby.	211
Figura B.1 – Coordenadas locais e globais e ângulos de Euler.	215

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Características do concreto e diferentes tipos de fibras (Kosmatka et al., 2003).	69
Tabela 3.2 – Propriedades das fibras de aço e concretos.....	71
Tabela 3.3 – Resultados numéricos e do esquema de Mori-Tanaka para o módulo de Young do CRFA.....	76
Tabela 3.4 – Resultados numéricos e do esquema de Mori-Tanaka para o coeficiente de Poisson do CRFA.	76
Tabela 3.5 – Propriedades adotadas para o concreto e do aço.	90
Tabela 3.6 – Propriedades do concreto e do aço (Mangat e Azari, 1985).....	93
Tabela 3.7 – Propriedades do aço e do concreto (Chern e Young, 1989).	96
Tabela 5.1 – Coesão e ângulo de atrito empregados para caracterizar a resistência da interface fibra/matriz.	186

Lista de Siglas

ACG: Auto-Consistente Generalizada

ACI: American Concrete Institute

ASCE: American Society of Civil Engineers

ASTM: American Society of Testing and Materials

CRF: Concreto Reforçado com Fibras

CRFA: Concreto Reforçado com Fibras de Aço

CV: Coeficiente de Variação

DP: Desvio Padrão

HS: Hashin-Strikman

JSCCE: Japan Society of Civil Engineers

IBRACON: Instituto Brasileiro do Concreto

MEF: Método dos Elementos Finitos

PCEV: Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica

PPGEC: Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

RILEM: International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials, Systems and Structures

SFRC: Steel Fiber Reinforced Concrete

UFRGS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

VER: Volume Elementar Representativo

ZTI: Zona de Transição Interfacial

Lista de Símbolos

a : escalar

\underline{a} : vetor

$\underline{\underline{a}}$: tensor de segunda ordem

$\underline{\underline{\underline{a}}}$: tensor de quarta ordem

Letras Romanas Maiúsculas

\underline{A} : tensor de concentração de deformações

\underline{A}_E : tensor de concentração de deformações de Eshelby

B : geometria do corpo de prova (modelo de Mangat e Azari, 1985)

$\underline{B}(\underline{x})$: tensor de concentração de tensões

$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$: tensor de elasticidade homogeneizado (macroscópico)

$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}*}$: transformada de Carson-Laplace do tensor de elasticidade macroscópico

$\underline{\underline{C}}^{(\text{HS}^+)}$: limite superior de Hashin-Strikman

$\underline{\underline{C}}^{(\text{HS}^-)}$: limite inferior de Hashin-Strikman

$\underline{\underline{C}}_{ac}^{\text{hom}}$: tensor de elasticidade efetivo obtido através da estimativa auto-consistente

$\underline{\underline{C}}_d^{\text{hom}}$: tensor de elasticidade efetivo obtido através da estimativa diluída

$\underline{\underline{C}}_{mt}^{\text{hom}}$: tensor de elasticidade efetivo obtido através da estimativa de Mori-Tanaka

$\underline{\underline{C}}_{\text{Voigt}}^{\text{hom}}$: tensor de elasticidade efetivo de Voigt

$D(t, \tau_0)$: função de fluência (caso uniaxial)

D_G : denominador de $G^{\text{hom}*}$

D_K : denominador de $K^{\text{hom}*}$

$D^{\text{hom}*}$: transformada de Carson-Laplace da função de fluência homogeneizada

$D^{\text{Zener}}(t)$: função de fluência de Zener

E : Módulo de Young

\underline{E} : deformação macroscópica

$E(0)$: módulo de relaxação instantâneo

$E(+\infty)$: módulo de relaxação assintótico

$\underline{\underline{E}}(X)$: campo de deformação macroscópica
 $E(t, \tau_0)$: função de relaxação (caso uniaxial)
 E_1 : parâmetro modelo de Zener
 E_2 : parâmetro modelo de Zener
 E_c : tangente à curva de deformação por fluência irreversível da matriz sujeita a uma tensão constante (modelo de Mangat e Azari, 1985)
 E_E : módulos de Young do concreto (modelo de Mangat e Azari, 1985)
 E_f : módulo de Young das fibras (modelo de Zhang, 2003)
 E_m : módulo de Young da matriz (modelo de Zhang, 2003)
 E_s : módulos de Young do aço (modelo de Mangat e Azari, 1985)
 $\underline{\underline{E}}^0$: deformação constante aplicada no contorno do domínio infinito.
 E^f : módulo de Young elástico das fibras
 $E^f(t)$: função de relaxação das fibras
 E^{hom} : Módulo de Young homogeneizado
 $E^{\text{hom}*}$: transformada de Carson-Laplace da função de relaxação homogeneizada
 $E^m(t)$: função de relaxação da matriz
 $E^{\text{Zener}}(t)$: função de relaxação de Zener
 $F^*(p)$: transformada de Carson-Laplace de $F(t)$
 G : módulo de cisalhamento
 G^{hom} : módulo de cisalhamento homogeneizado
 $G^{\text{hom}*}$: transformada de Carson-Laplace do módulo de cisalhamento homogeneizado
 $G^{\text{hom}}(t)$: módulo de cisalhamento viscoelástico homogeneizado
 $G^{(HS^-)}$: limite inferior de Hashin-Strikman do módulo de cisalhamento
 $G^{(HS^+)}$: limite superior de Hashin-Strikman do módulo de cisalhamento
 $G_{\text{Reuss}}^{\text{hom}}$: módulo de cisalhamento efetivo de Reuss
 $G_{\text{Voigt}}^{\text{hom}}$: módulo de cisalhamento efetivo de Voigt
 H : geometria do corpo de prova (modelo de Mangat e Azari, 1985)
 $H(t)$: função passo unitário ou de Heaviside com $\tau_0 = 0$
 $H(t - \tau_0)$: função passo unitário
 I : inclusão elipsoidal de Eshelby

K : módulo de compressão
 K^{hom} : módulo de compressão homogeneizado
 $K^{\text{hom}*}$: transformada de Carson-Laplace do módulo de compressão homogeneizado
 $K^{\text{hom}}(t)$: módulo de compressão viscoelástico homogeneizado
 $K^{(HS^+)}$: limite superior de Hashin-Strikman do módulo de compressão
 $K^{(HS^-)}$: limite inferior de Hashin-Strikman do módulo de compressão
 $K_{\text{Reuss}}^{\text{hom}}$: módulo de compressão efetivo de Reuss
 $K_{\text{Voigt}}^{\text{hom}}$: módulo de compressão efetivo de Voigt
 L : dimensão característica da estrutura
 L_{fe} : comprimento efetivo das fibras (modelo de Zhang, 2003)
 N_G : numerador de $G^{\text{hom}*}$
 N_K : numerador de $K^{\text{hom}*}$
 $O\left((d/l)^2\right)$: representação do erro, neste caso é da ordem de $(d/l)^2$. Se $d \ll l$, o erro é muito pequeno e $\underline{C}^{\text{hom}} : \underline{S}^{\text{hom}} \simeq \underline{1}$
 P : pressão radial sobre a área de superfície da fibra (modelo de Mangat e Azari, 1985)
 $\underline{P}^{0,I}$: tensor de Hill
 $2R$: espaçamento entre as fibras (modelo de Zhang, 2003)
 S : conjunto de campos de tensão estaticamente admissíveis conduzindo a $\underline{\underline{\Sigma}}$ no contorno
 $\underline{S}^{0,I}$: tensor de Eshelby
 $\underline{S}^{\text{hom}}$: tensor de flexibilidade homogeneizado
 \underline{S}^i : tensor de Eshelby, calculado através das propriedades mecânicas da inclusão
 \underline{S}^m : tensor de Eshelby, calculado através das propriedades mecânicas da matriz
 $\underline{S}_{\text{Reuss}}^{\text{hom}}$: tensor de flexibilidade efetivo de Reuss
 \underline{T} : Tensão prescrita no contorno do VER
 \mathcal{V} : volume do VER
 V^r : volume da fase r
 \mathcal{V}_f : quantidade de fibras adicionada ao concreto (modelo de Zhang, 2003)
 V_{fc} : volume crítico de fibras
 X_i : coordenadas macroscópicas
 W : o potencial homogeneizado

Letras Romanas Minúsculas

a_i : eixos principais da inclusão elipsoidal I

a : vão de corte (distância entre o ponto de aplicação da carga e o apoio mais próximo em uma viga)

\underline{c} : tensor de elasticidade

$\underline{c}(\underline{x}, t - \tau)$: função de relaxação

\underline{c}^0 : tensor de elasticidade do domínio infinito 0

\underline{c}^i : tensor de elasticidade da inclusão

\underline{c}^I : tensor de elasticidade da inclusão I

\underline{c}^m : tensor de elasticidade da matriz

\underline{c}^r : tensor de elasticidade da fase r

$const$ constante

d : dimensão característica das heterogeneidades

d : altura útil da seção da viga.

d_0 : menor dimensão abaixo da qual a mecânica do contínuo não é mais válida

d_f : diâmetro da fibra

dV^i : volume infinitesimal da fase de reforço

div : divergência

\underline{e}_i : base ortonormal

f : fração volumétrica das fibras

f^i : fração volumétrica das inclusões

f^m : fração volumétrica da matriz

f^r : fração volumétrica de cada fase r

f_{cu} : resistência última do concreto

g : módulo de cisalhamento

g^r : módulo de cisalhamento da fase r

g^{f*} : transformada do módulo de cisalhamento das fibras (aço)

g^{m*} : transformada do módulo de cisalhamento da matriz (concreto)

i : inclusão

k : módulo de compressão

k : constante que define distribuição das fibras de forma uni, bi ou tridimensional (modelo de Zhang, 2003)

k^r : módulo de compressão da fase r

k^{m*} : transformada do módulo de compressão da matriz (concreto)

k^{f*} : transformada do módulo de compressão das fibras (aço)

l : dimensão característica do volume elementar representativo

$l(\underline{\tau})$: energia potencial associada a tensões

l_e : comprimento efetivo das fibras (modelo de Mangat e Azari, 1985)

l_f : comprimento da fibra

l_{fc} : comprimento crítico da fibra

m : matriz

\underline{n} : vetor normal ao contorno do VER

n : número de fases do VER

\underline{p} : variável transformada

\underline{p} : vetor unitário direcionado ao longo do eixo de revolução da inclusão

p_i : componentes de \underline{p}

r : fase do VER

r_f : raio das fibras

\underline{s} : tensor de flexibilidade

s : distância entre as fibras (modelo de Mangat e Azari, 1985)

$\underline{s}(x, t - \tau)$: função de fluência

\underline{s}^i : tensor de flexibilidade da inclusão

\underline{s}^m : tensor de flexibilidade da matriz

\underline{s}^r : tensor de rigidez da fase r

t : tempo

\underline{u} : deslocamento prescrito no contorno do VER

$u_f(\underline{v}_s, E_s)$: deslocamento lateral da fibra (modelo de Mangat e Azari, 1985)

$u_l(\underline{\varepsilon}_{ol})$: deslocamentos laterais da matriz gerados pela carga aplicada (modelo de Mangat e Azari, 1985)

$u_m(\epsilon_{os})$: deslocamentos laterais da matriz gerados pela retração livre (modelo de Mangat e Azari, 1985)

x_i : coordenadas microscópicas

x'_i : eixos locais da inclusão I

x_i : eixos globais da inclusão I

w : potencial que descreve o comportamento de uma dada fase

Letras Gregas Maiúsculas

$\underline{\underline{\Sigma}}$: tensão macroscópica

$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\underline{X}})$: campo de tensão macroscópica

Letras Gregas Minúsculas

α : fator de aspecto das fibras

α_1 e α_2 : fatores de aspecto das fibras

∂V : contorno do VER

$\underline{\underline{\epsilon}}$: deformação microscópica

$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{x}})$: campo de deformação local (microscópica)

$\mathcal{E}(t)$: deformação no tempo

ϵ_c : deformação por fluência do CRF (modelo de Zhang, 2003)

ϵ_{cm} : deformação por fluência do concreto de referência (modelo de Zhang, 2003)

$\epsilon_{cm,t}$: deformação por fluência no tempo (modelo de Zhang, 2003)

$\epsilon_{cm,u}$: deformação por fluência última (modelo de Zhang, 2003)

ϵ_{fc} : deformação por fluência do CRFA (modelo de Mangat e Azari, 1985)

ϵ_{oc} : é a deformação por fluência do concreto de referência (modelo de Mangat e Azari, 1985)

ϵ_{ol} : deformações laterais do concreto de referência

(modelo de Mangat e Azari, 1985)

ϵ_{os} : deformações por retração livre do concreto de referência (modelo de Mangat e Azari, 1985)

η : coeficiente de viscosidade do fluido

η : parâmetro do modelo de Zener

θ : ângulo de orientação da inclusão

$\kappa(\underline{E})$: conjunto de campos de deslocamentos cineticamente admissíveis conduzindo a \underline{E} no contorno

μ : coeficiente de atrito entre a fibra e a matriz (modelo de Mangat e Azari, 1985)

ν : coeficiente de Poisson

ν : coeficientes de Poisson do concreto (modelo de Mangat e Azari, 1985)

ν^f : o coeficiente de Poisson elástico das fibras

$\nu^f(t)$: coeficiente de Poisson viscoelástico das fibras

ν^{hom} : coeficiente de Poisson homogeneizado

$\nu^{\text{hom}*}$: transformada de Carson-Laplace do coeficiente de Poisson viscoelástico homogeneizado

ν^m : coeficiente de Poisson elástico da matriz

$\nu^m(t)$: coeficiente de Poisson viscoelástico da matriz

ν_s : coeficiente de Poisson do aço (modelo de Mangat e Azari, 1985)

π : Pi

$\underline{\underline{\sigma}}$: tensão microscópica

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$: campo de tensão local (microscópica)

τ : resistência de aderência na interface fibra-matriz (modelo de Mangat e Azari, 1985)

τ_0 : instante inicial de aplicação da carga

τ_0 : tensão de cisalhamento na interface entre fibra e matriz (modelo de Zhang, 2003)

τ_f : tempo de retardo do modelo de Zener

τ_r : tempo de relaxação do modelo de Zener

ϕ : ângulo de orientação da inclusão

$\psi(p)$: função distribuição de orientação

Símbolos Especiais

0: domínio infinito

$\underline{\underline{1}}$: tensor identidade de quarta ordem

' \circ ': produto de convolução de Riemann

$\langle \rangle$: média volumétrica no VER

$\langle \rangle_i$: média volumétrica na inclusão

$\langle \rangle_I$: média volumétrica na inclusão I

$\langle \rangle_m$: média volumétrica na matriz

$\langle \rangle_r$: média volumétrica sobre o domínio ocupado pela fase r

$^{-1}$: inversão

$*$: transformada de Carson-Laplace

:: contração sobre dois índices. Para o caso de tensores de segunda ordem (como $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}$) tem-se em notação indicial $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$

1. Introdução

Neste primeiro capítulo apresenta-se o tema do estudo desenvolvido. Inicialmente, efetua-se a contextualização do mesmo e a descrição do emprego do material analisado, as quais servem como base para a motivação e justificativa da pesquisa. Na sequência são descritos os objetivos do presente trabalho e a estrutura adotada para a tese.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O concreto, aglomerado resultante da mistura de cimento, água, agregados miúdos e graúdos, e, eventualmente aditivos e/ou adições, é o material de construção mais largamente empregado (Mehta e Monteiro, 1994). Sua importância se deve principalmente pela disponibilidade e baixo custo de seus componentes. Além disso, a sua produção pode ser relativamente simples e a sua aplicação abrange uma variedade grande de construções e obras de infraestrutura.

Nos últimos anos, o seu desenvolvimento tem tomado novas direções através da busca por concretos de alto desempenho. Este material é definido como um tipo de concreto em que certas características são desenvolvidas ou melhoradas para a aplicação em ambientes ou situações específicas. As características melhoradas não são apenas a resistência, mas também a durabilidade, resistência a agentes agressivos, alta taxa de endurecimento, trabalhabilidade, aparência, entre outras (Brandt, 2008). Entretanto, o concreto apresenta como desvantagem a sua fragilidade, ou seja, baixa resistência à tração e baixa resistência à abertura e propagação de fissuras. Neste sentido, o uso de fibras dispersas na massa de concreto desempenha um papel importante.

Materiais de construção frágeis, como tijolos de barro cozidos ao sol, foram no passado (há mais de 3000 anos), reforçados com pêlos de cavalo, palhas e outras fibras vegetais (Naaman, 1985; Mehta e Monteiro, 1994). O conceito de reforço de materiais cimentícios com fibras,

por sua vez, foi desenvolvido nas últimas décadas. Primeiramente, a pasta de cimento foi reforçada com fibras de amianto para produção de chapas de telhados, tubos, entre outros. Posteriormente, as fibras de vidro foram empregadas no reforço de pastas e de argamassas de cimento. Este tipo de fibra apresentou o inconveniente de não ser resistente e durável na alta alcalinidade do cimento Portland, sendo necessário o desenvolvimento de fibras de vidro resistentes a álcali (Brandt, 2008).

O primeiro registro do uso de algum tipo de reforço de concreto com “fibras” de aço foi feito em 1910, por Harry Franklin Porter. Segundo Porter (1910), certa quantidade de pregos cortados foi aplicada ao concreto usado na construção de uma ponte em Nova York. Ensaios deste concreto indicaram aumento da resistência à tração e à compressão em relação ao concreto não reforçado. Apesar disso, apenas na década de 60 as primeiras publicações envolvendo concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) foram efetuadas por Romualdi e co-autores (1963, 1964).

Segundo Naaman (1985), o desenvolvimento do concreto reforçado com fibras (CRF) caracteriza-se por dois períodos distintos. O primeiro período, anterior à década de 60, corresponde a uma fase pioneira e lenta, com algumas patentes sobre o uso de fibras em matrizes cimentícias registradas e quase nenhuma aplicação. O segundo período, iniciado a partir dos anos 60, corresponde à fase de rápido e moderno desenvolvimento deste material, paralelamente ao aumento da sua empregabilidade.

Nos últimos 50 anos, matrizes à base de cimento foram desenvolvidas consideravelmente. O cimento Portland e agregados graúdos e miúdos com diferentes origens continuam sendo os componentes básicos utilizados. Entretanto, com o passar dos anos, os traços de concreto sofreram diversas alterações.

Atualmente, diferentes tipos de cimentos Portland podem ser selecionados para fins específicos. É o caso de cimentos caracterizados por alta resistência; alta resistência inicial ou de baixo calor de hidratação; alta resistência a sulfatos; o cimento branco; e também cimentos com diversas misturas, por exemplo, com adição de material pozolânico, cinza volante, escória de alto forno e material carbonático (fíler). Quanto aos agregados, não apenas brita e cascalho natural com areia são utilizados, mas também, diversos materiais artificiais, cuidadosamente selecionados e adicionados em proporções bem determinadas. Além disso, muitos tipos de resíduos são empregados no concreto, a fim de diminuir custos e satisfazer a

crecente demanda por sustentabilidade e ecologia, como é o caso dos agregados reciclados. Deve-se destacar, ainda, o surgimento de outros componentes (superplastificantes, adições e microfillers), bem como a alteração das proporções dos componentes empregados.

As fibras que passaram a ser adicionadas ao concreto, buscando o controle da abertura e propagação das fissuras e melhoria de propriedades mecânicas, também foram desenvolvidas visando um maior desempenho. Nas fibras de aço, por sua vez, ganchos nas extremidades e modificações na sua forma procuraram melhorar a aderência fibra-matriz e aumentar a eficiência das mesmas.

Desta forma, o comportamento do concreto, particularmente de concretos com finalidade especial como o CRF, tornou-se bastante complexo, necessitando estudos aprofundados para o uso de forma adequada, bem como, sua consideração em projeto.

Em se tratando do CRFA, observa-se que a capacidade de absorção de energia, a ductilidade, o comportamento sob fissuração e a resistência às ações estáticas e dinâmicas são propriedades que podem ser alteradas e melhoradas com a correta adição de fibras (Barros, 1996; Bentur e Mindess, 2006). Verifica-se, através dos diversos estudos encontrados na literatura, que a resposta deste material é bastante variável e influenciada pelas propriedades da matriz de concreto e seus constituintes, pela forma, quantidade e propriedades das fibras, como também pelo método de produção.

Ao longo das últimas décadas, uma vez reconhecidas as vantagens do uso de fibras no concreto, grandes esforços foram dedicados para a modelagem do seu comportamento. Tradicionalmente, o comportamento do CRFA é formulado pela abordagem fenomenológica, a qual consiste na identificação das leis constitutivas através de ensaios de laboratório. A vantagem desta abordagem reside no acesso direto de informações sobre o material em escala relevante para a análise de elementos estruturais. Sua principal limitação, entretanto, relaciona-se à necessidade de extensos e dispendiosos programas experimentais que uma completa caracterização do comportamento constitutivo exige.

Uma alternativa atraente para o tratamento deste tipo de problema é fornecida pela abordagem da micromecânica. A micromecânica considera que um material heterogêneo, formado pela combinação de dois ou mais materiais distintos, pode ser avaliado como um meio homogêneo, a partir de uma perspectiva macroscópica. Neste contexto, a escala adotada para

a descrição dos componentes do material heterogêneo (ou seja, as propriedades das fases e sua morfologia) é referida como a escala microscópica. A escala macroscópica, por sua vez, constitui-se da escala habitualmente adotada pelo engenheiro para analisar a resposta da estrutura sob solicitações prescritas. Em suma, através de técnicas de homogeneização, os meios heterogêneos são aproximados por um meio homogêneo equivalente e suas propriedades são avaliadas através das características dos seus componentes e da morfologia da microestrutura. Esta aproximação é válida desde que a condição de separação de escalas seja respeitada (Zaoui, 2002).

O CRFA é considerado pela micromecânica como um meio heterogêneo desordenado e seu comportamento global pode ser obtido através da resolução de um problema de contorno formulado sobre o tradicional Volume Elementar Representativo (VER) do material.

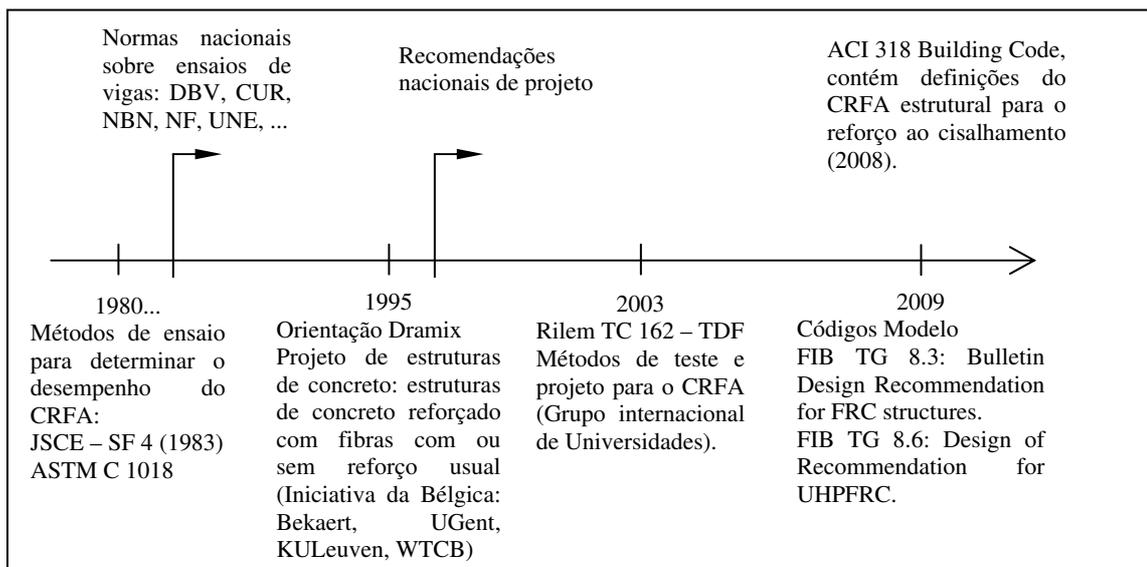
1.2 EMPREGO DO CRFA

Desde a introdução do concreto reforçado com fibras no mercado, no final dos anos 1960, o seu uso tem aumentado continuamente. Bentur e Mindess (2006) afirmam que, partir de 2001, cerca de 80 milhões de m³ de CRF foram produzidos anualmente, com as principais aplicações sendo em pisos e pavimentos (60%), em concretos projetados (25%), em elementos pré-moldados (5%); sendo o restante da produção distribuídos entre outros produtos especiais e formas estruturais.

No início da comercialização do CRFA, existia uma carência de referências normativas ou recomendações que apresentassem procedimentos para o entendimento e uso deste material, o que constituía um grande obstáculo para a aceitação desta nova tecnologia. Inicialmente fibras de aço eram usadas simplesmente como um substituto do reforço secundário ou para controle de fissuras em elementos menos críticos das construções. Atualmente, as fibras de aço são amplamente utilizadas como o reforço principal e único para lajes de piso industrial, concreto projetado e elementos pré-fabricados de concreto, tais como anéis segmentados de túneis, tubos de concreto, blocos de fundação, painéis e placas. As fibras são consideradas para fins estruturais no reforço de lajes sobre pilares, substituição total do reforço convencional de segmentos pré-moldados de túneis, lajes de fundação e no reforço ao cisalhamento em elementos protendidos.

Esta evolução, na direção do uso de CRFA em aplicações estruturais, é resultado dos progressos realizados buscando o conhecimento e compreensão do comportamento e das propriedades deste material, através de pesquisas realizadas em diferentes universidades e centros de pesquisa.

Na Figura 1.1, adaptada de Ross (2009), é apresentada uma linha do tempo de métodos de ensaio e de projeto para o CRFA. Inicialmente, os métodos de ensaio para a determinação da tenacidade do CRFA, JSCE - SF4 (norma japonesa, *Japan Society of Civil Engineers*) e ASTM - C1018 (*American Society of Testing and Materials*), foram publicados. Com os avanços dos estudos, normas e recomendações para realização de ensaios e até mesmo para considerações do CRFA em projetos foram publicados em diversos países. A RILEM (*International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials, Systems and Structures*), por sua vez, designou o grupo de trabalho, TC 162-TDF, que tem publicado documentos no âmbito da caracterização experimental, da análise e do dimensionamento de estruturas de CRFA. Além disso, o *ACI 318 Building Code* (2008) passa a permitir aos engenheiros a utilização do concreto reforçado com fibras de aço como substituto do reforço de cisalhamento convencional (por exemplo, os estribos de aço). Estes esforços, na construção de uma normalização de metodologias de ensaio e de considerações em projeto, demonstram a busca significativa da transferência dos conhecimentos adquiridos pela pesquisa para a prática.



DBV: norma alemã (*Deutscher Beton- Und Bautechnik-Verein E.V. - German Society for Concrete and Construction Technology*).

CUR: norma holandesa

NBN: norma belga (*Bureau De Normalisation - Belgian Standards Bureau*)

NF: norma francesa (*Association Française de Normalisation*)

UNE: norma espanhola (*Asociación Española de Normalización y Certificación*)

FIB: International Federation for Structural Concrete

Figura 1.1 – Linha do tempo de métodos de ensaio e de projeto para o CRFA (adaptado de Ross, 2009).

No Brasil, a utilização de concretos reforçados com fibras de aço se dá principalmente em pavimentos e em revestimentos de túneis (Figueiredo, 2011). O emprego em pavimentos ocorre por uma série de benefícios ou vantagens tecnológicas, como a eliminação da etapa de colocação da armadura, o que reduz o tempo total de execução e o número de operários necessários para tal, e uma maior facilidade de acesso à obra, com a possibilidade de o próprio caminhão betoneira atingir o local de lançamento do concreto, o que não ocorre com o emprego de telas metálicas. Além disso, o uso das fibras permite o reforço de toda a espessura de concreto do pavimento, minimizando o quadro geral de fissuração do mesmo, como também, a redução do efeito de lascamento nas extremidades dos elementos de CRFA.

No revestimento de túneis, as fibras possuem um largo emprego em concretos projetados e em pré-moldados (Figueiredo, 2011). Concreto projetado reforçado com fibras é utilizado em revestimentos de túneis urbanos, metroviários, de desvio, de adução e interceptores de esgoto. Isso ocorre em função de uma série de vantagens tecnológicas. Primeiramente a possibilidade de aplicação do CRFA imediatamente após a escavação, com menor risco de acidentes por desprendimento de partes do maciço. A segunda está relacionada à velocidade de execução do

túnel, pela rápida aplicação que o CRFA oferece. Além disso, no maciço recém escavado, normalmente ocorrem deformações iniciais, que serão acomodadas pelo revestimento e que poderão causar fissuração do mesmo, quando este for executado em concreto. Esta fissuração é reduzida com a utilização das fibras, as quais impedem a sua propagação. As fibras também fornecem uma maior coesão do concreto fresco, reduzindo as perdas devidas à reflexão do concreto projetado (repique).

Outro tipo de concreto muito utilizado para o revestimento de túneis, onde é frequente o emprego das fibras, são os pré-moldados. Eles são utilizados quando o sistema de escavação e revestimento de túneis é mecanizado e realizado por meio de tuneladora. Quando se aplicam fibras de aço, os principais ganhos estão relacionados à maior velocidade de execução das peças, em relação às reforçadas com armaduras convencionais. Além disso, o reforço com fibras traz como vantagem a diminuição dos riscos de perda de segmentos durante o seu manuseio, pela maior resistência ao impacto que a fibra proporciona ao concreto.

Tubos de água pluvial e esgoto reforçados com fibras de aço são outra importante aplicação do material em estudo. O emprego do mesmo é regulamentado pela norma NBR 8890 (2007). Esta é a primeira norma brasileira a tratar da aplicação do CRFA e contempla algumas mudanças no principal modo de qualificação dos tubos com fibras, onde o procedimento de ensaio consiste numa rotina de carregamento, descarregamento e recarregamento do tubo, de maneira a possibilitar a verificação da sua capacidade resistente pós-fissuração. Outra norma, publicada em 2007, NBR 15530 (2007), se refere à especificação de fibras de aço para concreto. Ela estabelece parâmetros de classificação para as fibras de aço de baixo teor de carbono e define os requisitos mínimos de forma geométrica, tolerâncias dimensionais, defeitos de fabricação, resistência à tração e dobramento. Com isso, procura-se garantir que o produto fornecido, em conformidade com estes requisitos, tenha potencial para proporcionar um desempenho adequado ao CRFA, desde que sejam observados os cuidados com a dosagem e controle do material. A norma se atém ao produto fibra, sem especificar como fazer a verificação de desempenho da mesma no concreto, possibilitando uma garantia de comportamento mínimo, mas não de bom desempenho, pois isso depende de outros fatores, tais como o consumo de fibras e a resistência da matriz (Figueiredo *et al.*, 2008).

1.3 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

Diversos estudos experimentais conduzidos para o conhecimento do comportamento do CRFA têm mostrado que a adição de fibras pode trazer benefícios importantes para o desempenho do concreto, inclusive do ponto de vista estrutural. Este é o caso da combinação de fibras e estribos em elementos de vigas, onde a presença das fibras parece permitir a redução da quantidade de armadura transversal (estribos) (Narayanan e Darwish, 1987; Adebar *et al.*, 1997; Casanova e Rossi, 1999; Kwak *et al.*, 2002; Cucchiara *et al.*, 2004) e, portanto, um aumento da capacidade de corte do compósito; ou ainda a redução da deformação por fluência de estruturas de concreto ao se adicionar fibras (Tan *et al.*, 1994a; Tan e Saha, 2005).

A melhoria das características do concreto pela presença das fibras tem sido verificada em inúmeras pesquisas. No programa de pós-graduação, no qual este trabalho está inserido, uma série de estudos já foi realizada buscando avaliar o comportamento do CRFA. Baroni (2003) analisou o comportamento de fluência de vigas de concretos especiais, entre eles o CRFA. Garcez (2005), por sua vez, estudou o comportamento do CRFA sob cargas de impacto e Figueiredo (2006) buscou analisar estática e dinamicamente elementos de CRFA através do método dos elementos discretos. Pasa (2007) modelou o comportamento de estruturas de CRFA através do método dos elementos finitos e de um modelo constitutivo disponível na literatura, enquanto Peres (2008), em seu trabalho, avaliou experimentalmente a resistência do CRFA quando submetido a esforços biaxiais. Além do reforço com fibras de aço, o comportamento do concreto reforçado com fibras de aramida (Bernardi, 2003) e do concreto reforçado com fibras de polipropileno sob temperaturas elevadas (Lima, 2005), também foram pesquisados.

Em geral, observa-se que um número significativo de trabalhos experimentais, envolvendo os mais diversos elementos estruturais de CRFA e as mais diversas solicitações, a que este material pode estar submetido, pode ser encontrado na literatura disponível, havendo, no entanto, uma forte carência sob o ponto de vista de modelagem numérica. Além disso, apesar de suas evidentes qualidades, o uso do CRFA se apresenta, ainda, de forma bastante “tímida”, principalmente em aplicações estruturais.

Desta forma, a proposição de um modelo constitutivo adequado para simular a resposta mecânica do compósito formado por concreto e fibras de aço, sob estados multiaxiais de tensão e deformação, e a sua verificação em um programa computacional, poderiam contribuir com as informações necessárias para o estabelecimento de diretrizes e orientações aplicadas ao desenvolvimento de projetos que prevêm o uso deste material em elementos estruturais.

A teoria da homogeneização, por sua vez, já foi empregada para formular o comportamento de distintos materiais heterogêneos, como por exemplo, materiais compósitos multicamadas (de Buhan, 1983), solos reforçados (de Buhan e Salençon, 1990; Bernaud *et al.*, 1995; Couto, 2011), materiais compósitos formados por matriz reforçada com fibras em uma ou duas direções (de Buhan e Taliercio, 1991; Koval, 2003). Esta teoria constitui, portanto, uma importante ferramenta para a formulação de um modelo de comportamento do CRFA, material compósito formado por uma matriz reforçada aleatoriamente por fibras curtas e que pode ser interpretado, numa escala macroscópica, como um material homogêneo.

1.4 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA

O conhecimento das equações constitutivas de um material permite a descrição de como o mesmo se comporta ao ser solicitado. A partir de uma abordagem micromecânica empregando-se técnicas de homogeneização é possível formular um modelo constitutivo para o material CRFA.

Assim como ocorre com os constituintes do CRFA, este material compósito, ao ser submetido a solicitações de curta duração, apresenta uma resposta elastoplástica. Em outras palavras, para pequenas solicitações, o CRFA se comporta elasticamente. Uma vez atingido o limite elástico do material e com o aumento das solicitações, tem início o aparecimento de deformações plásticas que se prolongam até que ocorra a ruptura do mesmo. O conhecimento e a consideração destes processos são de suma importância na modelagem numérica de elementos formados por CRFA.

A modelagem clássica de um material elastoplástico se dá através do conhecimento das propriedades elásticas, dos critérios de plastificação e de ruptura e de uma regra de endurecimento. Para que se defina o limite elástico em problemas multiaxiais, empregam-se

critérios de plastificação multiaxiais; no caso do concreto convencional, por exemplo, geralmente utilizam-se as superfícies de Drucker-Prager, Ottosen ou Willam-Warnke. Considerando que f seja a função que define uma superfície a qual caracteriza o critério de plastificação, para $f < 0$, ou pontos no interior da superfície, o material comporta-se como elástico. Para $f = 0$, é atingido o limite elástico e neste caso, surgem as deformações plásticas. A regra de endurecimento, por sua vez, define o movimento das superfícies de plastificação subseqüentes (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica, até que seja atingido o critério de ruptura do material.

Neste trabalho, as propriedades elásticas e de resistência do CRFA foram avaliadas. Para a caracterização completa do comportamento elastoplástico do CRFA, é necessário formular o seu comportamento após atingir o limite de elasticidade, ou seja, é preciso determinar o critério de plastificação e uma regra de endurecimento para o material.

É importante salientar que uma abordagem empregando um modelo simplificado, surge como alternativa a ser utilizada. Este modelo constitui da consideração do critério de plasticidade semelhante ao critério de resistência, desprezando-se, então, o endurecimento na escala macroscópica. Assim, a partir das propriedades elásticas e de resistência, obtidos neste trabalho, e da sua implementação em um programa de elementos finitos, também é possível estudar o comportamento de elementos de CRFA. Este constitui um modelo mais simples, mas que potencialmente pode fornecer resultados interessantes.

1.5 OBJETIVOS

Esta tese de doutorado pretende dar continuidade à pesquisa desenvolvida por Pasa (2007) no Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. O objetivo principal do presente estudo é a formulação de um modelo constitutivo para o material compósito concreto reforçado com fibras de aço, através de uma abordagem micromecânica, empregando-se técnicas de homogeneização.

Sob uma ótica distinta do estudo anterior, no que se refere ao modelo constitutivo empregado, são elencados abaixo alguns objetivos específicos do trabalho:

- Apresentar a teoria da homogeneização como uma ferramenta teórica robusta e eficaz para o estudo do concreto reforçado com fibras de aço;
- Estimar as propriedades elásticas efetivas do CRFA, a partir da teoria da homogeneização e da estimativa de Mori-Tanaka;
- Investigar o comportamento viscoelástico do concreto reforçado com fibras e estimar as propriedades viscoelásticas a partir da resposta elástica, obtida através da teoria da homogeneização, e do princípio da correspondência elástica-viscoelástica;
- Definir e construir um critério de resistência macroscópico para o concreto reforçado por fibras de aço, aplicando as teorias da análise limite e da homogeneização, o qual permita avaliar a resistência deste material sob estados de tensão multiaxial;
- Qualificar os resultados obtidos de forma analítica através de comparação com resultados experimentais e numéricos obtidos via método dos elementos finitos;
- Propor um modelo constitutivo que possa ser implementado em um programa computacional baseado no método dos elementos finitos para a análise tridimensional de estruturas de concreto e que permita avaliar o comportamento de elementos de CRFA.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em seis capítulos.

O Capítulo 2 se constitui de uma revisão bibliográfica que contempla aspectos relativos ao concreto reforçado com fibras. São apresentadas as características das fibras de aço; o mecanismo de atuação destas; o comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras sob diversos tipos de solicitações; bem como estudos numéricos sobre a modelagem do CRFA encontrados na literatura.

O Capítulo 3 contém uma revisão bibliográfica sobre a teoria da homogeneização. Inicialmente, o processo de homogeneização em elasticidade é descrito efetuando-se o cálculo das propriedades efetivas elásticas do CRFA. Para tanto, empregam-se estimativas de Mori-Tanaka (1973), as quais são baseadas nos resultados estabelecidos por Eshelby (1957). A precisão dos resultados obtidos pela abordagem analítica é verificada pela comparação com as

soluções via método dos elementos finitos, bem como, os resultados experimentais disponíveis. Posteriormente, a formulação do comportamento viscoelástico sem envelhecimento do CRFA é obtida, fazendo uso da resposta em elasticidade e do Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica. Os resultados obtidos são comparados a dados experimentais e a modelos analíticos encontrados na literatura.

No **Capítulo 4** o critério de resistência macroscópico, para o concreto reforçado por fibras de aço, é formulado. Inicialmente, descreve-se como a análise limite em conjunto com a teoria da homogeneização permitem avaliar a resistência de materiais heterogêneos. Na sequência, a construção propriamente dita do domínio de resistência macroscópico é realizada através do emprego de um modelo aproximado. Os resultados obtidos são comparados com dados experimentais e também com resultados de simulações numéricas das propriedades de resistência do CRFA, via elementos finitos. Uma discussão sobre as hipóteses adotadas no modelo analítico é, por fim, efetuada.

No **Capítulo 5** são abordadas duas hipóteses não consideradas no capítulo anterior, as quais podem ser adotadas para o cálculo de um domínio de resistência mais realista para o CRFA. A primeira se refere à consideração de um critério de *cut-off* em tração para melhor caracterizar a resistência da matriz de concreto, bem como a do CRFA, sob solicitações de tração. A segunda, por sua vez, está relacionada à consideração das propriedades limitadas de resistência da interface na formulação do domínio de resistência macroscópico.

No **Capítulo 6** são elencadas as conclusões resultantes do presente estudo, bem como as sugestões para trabalhos subsequentes.

2. Concreto Reforçado com Fibras de Aço

O concreto reforçado com fibras é um material produzido a partir de cimento hidráulico, agregados de diferentes tamanhos (miúdos e graúdos) e fibras discretas e descontínuas (ACI 544.1R-96, 2002). Trata-se de um material compósito onde o concreto constitui a matriz, a qual confere estrutura ao mesmo, preenchendo os espaços vazios que ficam entre as fibras e mantendo-as em suas posições relativas. As fibras, por sua vez, são o componente de reforço, o qual realça as propriedades do material compósito como um todo.

A utilização de fibras no concreto, assim como no caso das barras de aço, surgiu da necessidade de se reforçar este material frágil, de baixa resistência à tração e baixa capacidade de deformação quando tracionado. Enquanto as barras de armadura convencional são empregadas em elementos estruturais em locais apropriados para resistir a esforços de tração e cisalhamento impostos; as fibras desempenham papel importante no controle da fissuração, permitindo o aumento das resistências à tração e ao cisalhamento e da capacidade de deformação da matriz de concreto. Fibras e barras de aço apresentam diferentes papéis no concreto moderno e existem muitas aplicações onde são empregados em conjunto (Bentur e Mindess, 2006). Há também aplicações onde as fibras constituem o reforço principal e único, como por exemplo, nas lajes de piso industrial, no concreto projetado e em elementos pré-fabricados de concreto.

Uma grande variedade de fibras pode ser adicionada ao concreto e a matrizes cimentícias, como as fibras convencionais de aço e de vidro; fibras mais modernas como as de carbono e aramida; e ainda fibras sintéticas (polipropileno, nylon) e naturais (sisal, juta, coco) (Majumdar, 1980; Zonsveld, 1975; Hannant, 1980; Toledo Filho, 1997). As propriedades, o custo e efetividade destas fibras variam consideravelmente.



Figura 2.1 – Fibras de distintos materiais, comprimentos e formas, que podem ser utilizadas no concreto (adaptado de Kosmatka *et al.*, 2003).

A massa específica, a resistência à tração, o módulo de elasticidade e a deformação específica na ruptura são características importantes e que se alteram muito em função do tipo de fibra utilizada. Podem ser empregadas fibras com alta massa específica, como as fibras de aço, com $7,8 \text{ g/cm}^3$, ou com baixa, como as de polipropileno, $0,9 \text{ g/cm}^3$, e de polietileno, $0,95 \text{ g/cm}^3$. A resistência à tração, por sua vez, pode variar inclusive para o mesmo material. As fibras de aço, por exemplo, podem apresentar resistência à tração entre 0,5 a 2 GPa. As fibras de vidro e aramida destacam-se pelas altas resistências à tração, de 4 GPa e 3,6 GPa, respectivamente, enquanto as fibras de polietileno apresentam um baixo valor para esta propriedade, $0,7 \times 10^{-3}$ GPa.

Quanto ao módulo de elasticidade, as fibras podem ser classificadas como de baixo e alto módulo. Fibras de vidro, carbono, aramida, são exemplos de fibras com alto módulo de elasticidade, enquanto as fibras de nylon, polipropileno, e a maioria das fibras naturais, possuem módulos de elasticidade menores do que o da matriz de concreto. As fibras de aço possuem alto módulo de elasticidade e alta resistência. Elas podem ser consideradas como fibras destinadas ao reforço primário do concreto, ou seja, não se destinam somente à redução da fissuração e o aumento da ductilidade do material, mas também são capazes de proporcionar um ganho de desempenho mecânico, podendo, em algumas situações, ser o único elemento de reforço existente.

A geometria das fibras é outra característica bastante variável. As fibras de aço, por exemplo, podem ser lisas, dentadas, deformadas, onduladas ou corrugadas, enroladas, torcidas e deformadas nas extremidades na forma de ganchos, pás, botões ou qualquer outro tipo de ancoragem (Naaman, 2000). As configurações típicas das fibras empregadas no CRFA são

apresentadas na Figura 2.2. A modificação da geometria da fibra ao longo do seu comprimento possibilita o desenvolvimento de uma melhor aderência entre a fibra de aço e a matriz de concreto.

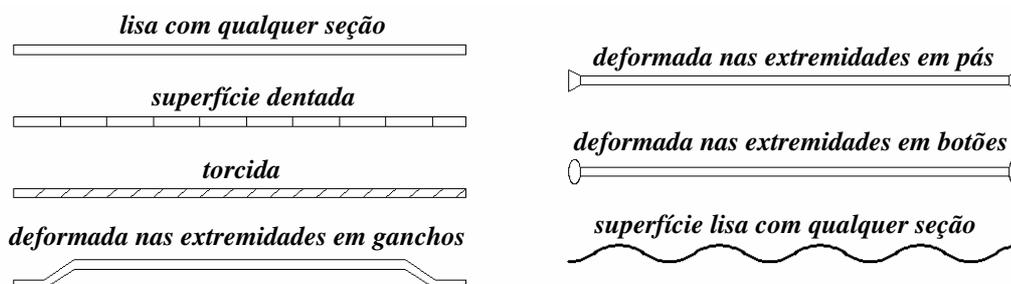


Figura 2.2 – Configurações típicas das fibras de aço (adaptado de Naaman, 2000).

Em geral o comprimento da fibra de aço varia de 6 mm a 64 mm e os diâmetros mais comuns estão em torno de 0,1 mm a 1 mm. Um parâmetro numérico para descrever a geometria da fibra é o fator de forma ou de aspecto, que corresponde à relação entre o comprimento da fibra l_f e o seu diâmetro d_f . Este parâmetro varia entre 20 e 100 para as fibras de aço normalmente empregadas em concreto (ACI 544.1R-96, 2002). No caso de fibras com seção transversal não circular, o diâmetro de uma seção circular de mesma área é empregado.

Com relação à quantidade de fibras adicionadas no concreto, esta é comumente quantificada através do teor de fibras, relação entre o volume de fibras e o volume de concreto reforçado. No caso de fibras de aço, a adição de 1% em volume corresponde a aproximadamente 80 kg de fibra para 1 m³ de concreto. Segundo o ACI 544.3R-08 (2008), o teor usual de emprego de fibras de aço em concreto varia entre 0,2% em relação ao volume, equivalente a 15,6 kg/m³ em massa, e 2% em volume, equivalente a 156 kg/m³.

As fibras são geralmente incorporadas à matriz de concreto através de mistura, permitindo que estas sejam aleatoriamente posicionadas e propiciando ao compósito comportamento isotrópico. Caso a dimensão da fibra for grande em relação a uma ou duas dimensões do elemento fabricado com CRFA, observa-se, entretanto, uma distribuição de preferência bi ou unidimensional, respectivamente. Desta forma obtém-se um material com comportamento anisotrópico.

O desempenho final do concreto reforçado com fibras é resultado de uma série de fatores. Como se observa nos parágrafos anteriores, o tipo e as propriedades mecânicas das fibras, bem como a sua distribuição, são importantes. Além destes fatores, é fundamental destacar a morfologia e a quantidade das fibras, como também as propriedades da matriz de concreto e a sua interação com as fibras.

O concreto é um material capaz de apresentar uma grande variação de suas propriedades em função dos tipos de componentes principais e de suas proporções, e também pela utilização ou não de uma grande variedade de aditivos e adições. Observa-se, desde o seu lançamento, a presença de microfissuras principalmente na interface entre a pasta de cimento e os agregados. Com a aplicação de carga, ocorre o processo de coalescência destas microfissuras, originando as microfissuras. Estas fissuras prejudicam muito mais o material quando solicitado à tração do que à compressão, sendo que a relação entre as resistências à tração e compressão fica geralmente em torno de 0,1. O que ocorre é que, quando o concreto é tracionado, a propagação das fissuras é transversal à direção principal de tensão. Com a coalescência das microfissuras, a área disponível de suporte de carga é reduzida causando um aumento das tensões presentes nas extremidades das fissuras.

As fibras de aço, quando adicionadas ao concreto, funcionam como um obstáculo ao desenvolvimento das fissuras. Primeiramente, durante o endurecimento da pasta, elas dificultam a iniciação da propagação das microfissuras, evitando o seu aparecimento prematuro. Na mistura endurecida, a abertura e o comprimento das fissuras também são controlados pela presença das fibras. Quando ocorrem as microfissuras, as fibras atuam como ponte de transferência, minimizando a concentração de tensões nas extremidades das mesmas e impedindo a sua propagação instável. Assim, o concreto deixa de ter o caráter marcadamente frágil e com ruptura brusca. Há uma redução da velocidade de propagação das fissuras no concreto que passa a ter um comportamento “pseudo-dúctil”, ou seja, apresenta certa capacidade portante pós-fissuração (Figueiredo, 2000).

Para atuar com sucesso no mecanismo de ponte de transferência de tensões as fibras devem ter comprimento adequado e também estar presente em volume adequado. Neste sentido, encontram-se na literatura dois parâmetros importantes: o volume crítico V_{fc} e o comprimento crítico l_{fc} .

Segundo Figueiredo (2000), o volume crítico corresponde ao teor de fibras que permite a manutenção da capacidade portante do compósito após a ruptura da matriz. Ou seja, acima do volume crítico, o compósito continua aceitando níveis de carregamento crescente mesmo após a ruptura da matriz; enquanto que abaixo do volume crítico, este fenômeno não ocorre.

Figueiredo (2000) e Bentur e Mindess (2006) apresentam equações distintas para a estimativa do V_{fc} . De acordo com Bentur e Mindess (2006), o volume crítico para fibras distribuídas aleatoriamente em três direções é dependente da resistência da matriz e do fator de forma das fibras. Para razões de aspecto variando entre 50 e 100, o V_{fc} é da ordem de 1 a 3 %. A formulação apresentada por Figueiredo (2000) é baseada nos estudos de Aveston *et al.* (1971) e Hannant (1978) e fornece, para um concreto com fibras orientadas tridimensionalmente, um V_{fc} da ordem de 1%.

O segundo parâmetro importante na transferência de tensões, o comprimento crítico l_{fc} , é definido como o comprimento de fibra mínimo necessário para o desenvolvimento de tensão na fibra igual à sua resistência última (Bentur e Mindess, 2006). Se o $l_f < l_{fc}$, não existe comprimento suficiente para gerar na fibra uma tensão igual à sua resistência e a fibra não é assim utilizada eficientemente. Somente se o comprimento da fibra exceder o comprimento crítico é que a maioria das fibras alcançará a tensão de escoamento ou a resistência à tração, mobilizando desta forma a maior parte do potencial de reforço das fibras.

Ainda quanto ao comprimento da fibra, é importante que haja uma compatibilidade dimensional entre agregados e fibras, possibilitando a atuação destas como reforço do concreto como um todo, e não como mero reforço de segmentos da pasta de cimento (Figueiredo, 2000).

Na literatura encontram-se estudos com diversos compósitos de matrizes cimentícias reforçados com fibras. Matsumoto e Mihashi (2002) tentam resumir as terminologias relacionadas a estes compósitos, baseando-se nas discussões da JCI-DFRCC (do inglês *Japan Concrete Institute - Ductile Fiber Reinforced Cement Composites*). A Figura 2.3 ilustra a classificação dos materiais apresentada por Matsumoto e Mihashi (2002).

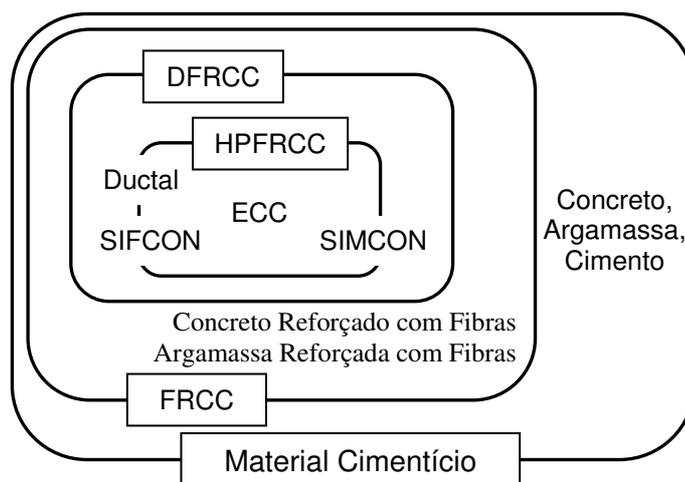


Figura 2.3 – Classificação de materiais cimentícios (adaptado de Matsumoto e Mihashi, 2002).

FRCC se refere a *Fiber Reinforced Cementitious Composites* (Compósitos Cimentícios Reforçados com Fibras). DFRCC (*Ductile Fiber Reinforced Cementitious Composite*) é uma classe de FRCC que apresenta múltipla fissuração. A múltipla fissuração conduz à melhoria nas propriedades, tais como a ductilidade, a tenacidade, a energia de fratura, endurecimento (*strain hardening*), a capacidade de deformação sob tração e compressão, e na flexão. DFRCC exibe apenas múltipla fissuração na flexão (*deflection hardening*), e não na tração direta. HPFRCC (*High Performance Fiber Reinforced Composite*), por sua vez, é um FRCC que apresenta múltipla fissuração e endurecimento na tração, bem como na flexão. O DFRCC é, portanto, uma classe de materiais mais ampla que o HPFRCC.

ECC (*Engineered Cementitious Composite*) (Li, 1993), SIFCON (*Slurry Infiltrated Fiber Concrete*), SIMCON (*Slurry Infiltrated MatCONcrete*) (Reinhardt e Fritz, 1989) e Ductal (Ductal, 2011) constituem tipos de DFRCC.

O ECC é um tipo especial de HPFRCC que foi microestruturalmente adaptado. É um compósito de matriz cimentícia, cujo diâmetro máximo da areia é de 250 μm , e fibras poliméricas (PVA), e que normalmente apresenta uma capacidade de deformação na tração superior a 3% e espaçamento entre fissuras múltiplas inferior a 3 mm (Matsumoto e Mihashi, 2002).

O SIFCON é produzido pela infiltração de pasta fluida em fibras de aço pré-posicionadas em fôrmas. Devido a este modo de produção, a fração volumétrica de fibras adicionada pode chegar a 20% e os aumentos de resistência à compressão são consideráveis, sendo possível

atingir níveis da ordem de 210 MPa. SIMCON emprega tecidos pré-posicionados de fibra, em vez de fibras de aço.

Ductal é um material compósito inorgânico com base no conceito de pós reativos (*Reactive Power Concrete*). É um compósito cimentício reforçado com fibras de aço sob o conceito de alta resistência e alta tenacidade. As propriedades do Ductal são caracterizados pela alta resistência (210 MPa em compressão e 45 MPa em flexão), alta durabilidade e alta fluidez.

2.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CRFA

As fibras influenciam as propriedades mecânicas do concreto em todos os modos de ruptura, especialmente naqueles induzidos por fadiga e tensão de tração, como por exemplo, tração direta, flexão, impacto e cisalhamento (ACI 544.1R-96, 2002).

Além da matriz em si, as variáveis mais importantes que regem as propriedades do CRFA são a eficiência da fibra e o seu teor (fração volumétrica). A eficiência das fibras é controlada pela sua resistência ao arrancamento, o que, por sua vez, depende da resistência adesiva na interface fibra-matriz. Para fibras com seção uniforme, a resistência ao arrancamento geralmente aumenta com um aumento do comprimento da fibra. Entretanto o uso de fibras muito longas ou com alto fator de aspecto pode causar a diminuição da trabalhabilidade da mistura de concreto e provocar a distribuição não uniforme das fibras. O aumento da resistência ao arrancamento pode ser obtido também através do emprego de fibras com superfícies deformadas ou com ganchos nas extremidades.

Em geral, apesar da ruptura do CRFA envolver a ruptura de algumas das fibras, é normalmente regida pelo efeito de arrancamento. Uma vantagem deste tipo de ruptura é de ser gradual e dúctil provocando no concreto um aumento de ductilidade (ACI 544.1R-96, 2002).

No CRFA em compressão uniaxial, observa-se na literatura uma grande variação de resultados. A maioria dos trabalhos indica a ocorrência de um baixo aumento da resistência, para as quantidades de fibras comumente empregadas. Há trabalhos, entretanto, que indicam um aumento da ordem de 25% ou maior (Balaguru e Shah, 1992; Lopes, 2005).

A contribuição mais significativa das fibras está no aumento da ductilidade do concreto, tanto para concretos normais como para concretos de alta resistência. O modo de ruptura também é

afetado pela presença e pelo aumento da quantidade de fibras. Em ensaios de compressão observou-se que, com o aumento do teor de fibras, o concreto deixa de romper de forma tradicional, com poucas fissuras paralelas à direção da carga, e passa a romper com um maior número de fissuras e atinge um forte abaulamento na direção lateral dos corpos-de-prova antes de romper (Chen e Carson, 1971; Iyengar e Viswanatha, 1972; Hsu e Hsu, 1994).

Na Figura 2.4 estão apresentados os resultados obtidos por Balaguru e Shah (1992) para um concreto normal e um de alta resistência, em ensaio de compressão. Na Figura é possível verificar a forma das curvas *tensão x deformação*, geralmente encontradas em ensaios de compressão uniaxial para o CRFA.

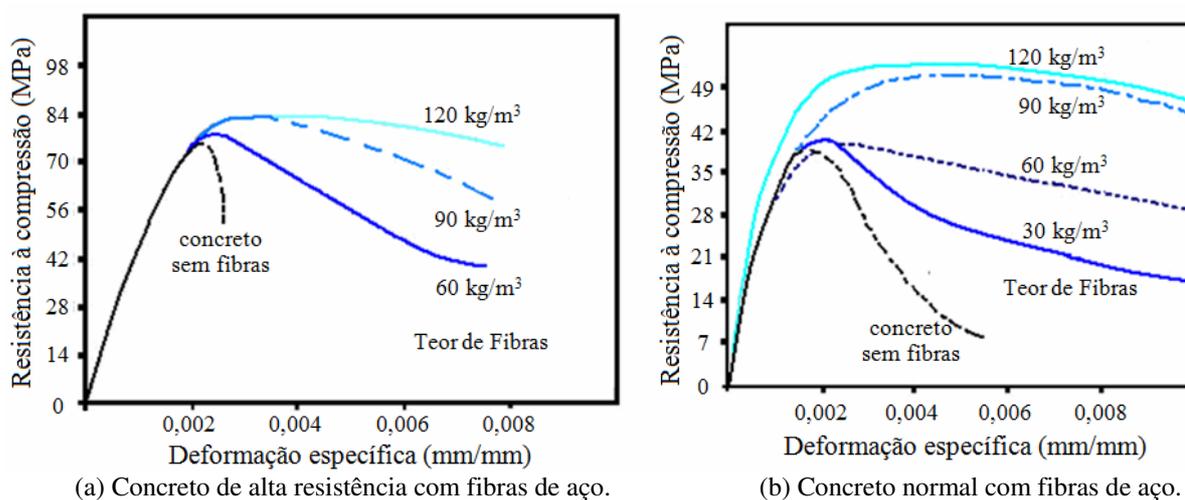


Figura 2.4 – Curvas de tensão-deformação na compressão uniaxial para concretos reforçados com fibras de aço (adaptado de Balaguru e Shah, 1992).

Os resultados de ensaios são influenciados por uma série de fatores, entre eles as propriedades da matriz e das fibras, bem como a sua interação. Há casos em que a adição de maiores quantidades de fibras pode proporcionar um aumento não significativo da resistência à compressão como também pode ocorrer redução da mesma, principalmente em função da incorporação de ar no processo de produção deste material ou quando as fibras são adicionadas em grande quantidade.

Diversos autores (Ezeldin e Balaguru, 1992; Hsu e Hsu, 1994; Mansur *et al.*, 1999; Barros e Figueiras, 1999, Nataraja *et al.*, 1999) estudaram o comportamento do CRFA quando

comprimido e buscaram desenvolver expressões para representar a curva tensão deformação à compressão do mesmo, incluindo o ramo descendente (*strain softening*).

As expressões obtidas por estes autores são baseadas em resultados experimentais e são influenciadas principalmente pelo tipo de fibra empregado, pela resistência à compressão da matriz de concreto, pelo fator de forma e a quantidade de fibras adicionadas. Em alguns casos, os modelos consideram também o módulo de elasticidade do CRFA.

Fibras alinhadas na direção da tensão de tração podem levar a significativos aumentos na resistência à tração direta. Para fibras distribuídas aleatoriamente, o aumento da resistência à tração é bastante variável, há casos em que este aumento é pequeno ou inexistente, entretanto há situações em que se observa um aumento de 60%. A maioria dos trabalhos apresenta valores intermediários (Bentur e Mindess, 2006). Nas Figuras 2.5 e 2.6 são apresentados os resultados obtidos, respectivamente, por Gopalaratnam e Shah (1987) e por Cucchiara *et al.* (2004), para a resistência à tração direta e para a resistência à tração por compressão diametral. Nestas Figuras é possível observar o aumento de resistência que a adição de fibras pode ocasionar na matriz de concreto e a forma das curvas obtidas nos respectivos ensaios. Assim como ocorrem em ensaios de compressão, em tração também se observa um aumento da ductilidade e uma alteração no modo de ruptura ao se adicionar fibras.

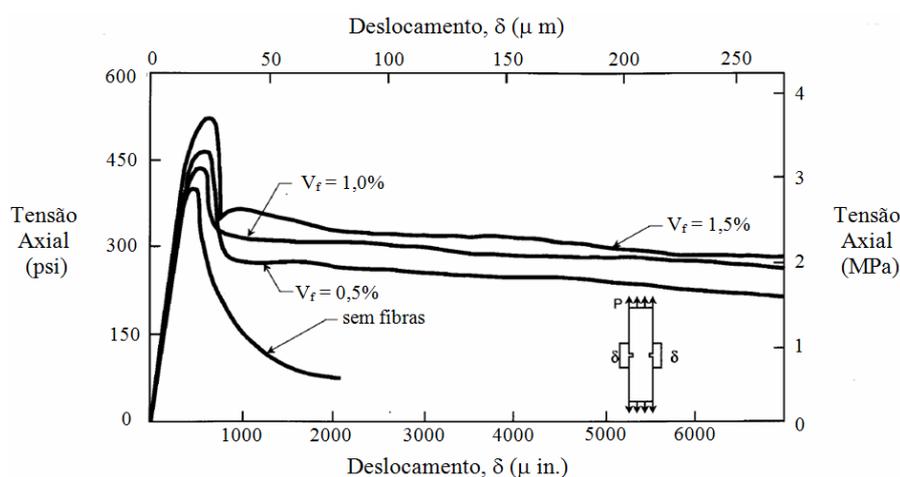


Figura 2.5 – Curva *tensão x deslocamento* na tração direta para concreto normal e para o concreto reforçado com diferentes teores de fibra (adaptado de Gopalaratnam e Shah, 1987).

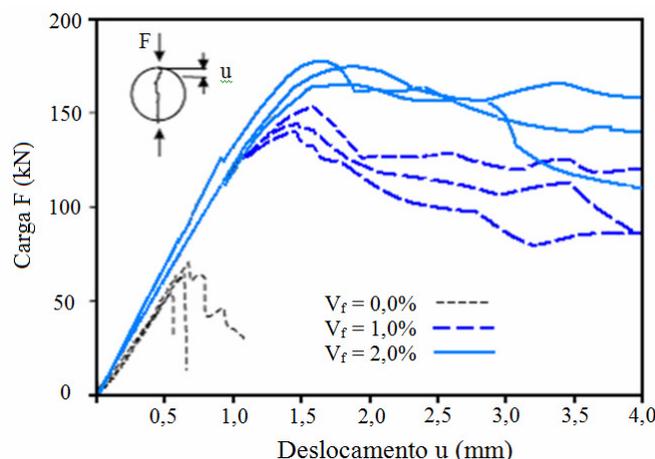


Figura 2.6 – Resultados de ensaio de compressão diametral para concreto com e sem adição de fibras (adaptado de Cucchiara *et al.*, 2004).

As fibras contribuem de forma mais efetiva na resistência à tração quando o volume de fibras é maior do que o volume crítico. Neste caso, o modo de ruptura do compósito é caracterizado pela fissuração múltipla da matriz. Após o surgimento da primeira fissura, a força aplicada na matriz é transferida para as fibras, que estão em quantidade suficiente para resistir à força sem atingir a ruptura. Acréscimos na força provocarão o surgimento de novas fissuras na matriz, as quais serão resistidas pelas fibras até ser atingida a força de arrancamento das mesmas. Por outro lado quando o volume de fibras for menor do que o volume crítico o modo de ruptura é caracterizado pela propagação de uma única fissura principal que surge na matriz. Neste caso, em virtude do volume de fibras ser insuficiente para provocar a fissuração múltipla da matriz, a ruptura é frágil e a resistência do compósito é menor.

Ao contrário de que acontece na resistência à compressão ou à tração, o reforço com fibras de aço tem mostrado efeito considerável sobre a resistência a flexão de CRFA, tendo sido relatados acréscimos de mais de 100% (Bentur e Mindess, 2006). A resistência à flexão é particularmente sensível, não só para o volume de fibras, mas também em relação ao fator de aspecto das mesmas, sendo que o aumento de ambos leva a um aumento significativo da resistência à flexão.

A partir da área sob a curva de *carga x deslocamento* de um ensaio de flexão é possível o cálculo de outra propriedade de um material: a tenacidade. A tenacidade representa a capacidade de absorção de energia de deformação pelo material até seu completo esgotamento e no caso de concreto é consideravelmente aumentada ao se adicionar fibras, principalmente pela restrição à abertura e propagação das fissuras promovida pelas mesmas. Muitos ensaios

vêm sendo desenvolvidos para caracterizar diretamente esta propriedade, seja sob carregamento de compressão, flexão, tração ou impacto (Gava, 2006). A maioria dos pesquisadores faz uso de ensaios de flexão para a determinação da tenacidade de concretos reforçados por fibras, seja pela maior facilidade de execução e uso de equipamentos mais simples (Johnston, 1985) ou por simularem melhor as condições de aplicação do material (Gopalaratnam e Gettu, 1995), sendo empregados diferentes sistemas de medida para a sua quantificação.

Poucas investigações sobre o desempenho do concreto com fibras sob estados biaxiais de carregamento têm sido relatadas na literatura. Contudo, estes resultados indicam que as fibras aumentam a resistência do concreto sob esse tipo de solicitação. O aumento da resistência à compressão biaxial pode ser considerável (Yin *et al.*, 1989; Traina e Mansour, 1991; Swaddiwudhipong e Seow, 2006; Peres, 2008), dependendo do tipo de fibra e teor utilizado. Os resultados de Abdull-Ahad e Abbas (1989) indicaram que as fibras, além de produzirem aumento da resistência do concreto sob estado biaxial de compressão, podem provocar aumento também no caso de tração biaxial. Barros (1996) afirma que, analogamente ao que ocorre no caso uniaxial, nos ensaios multiaxiais também se registra um aumento significativo da ductilidade do concreto ao se adicionar fibras.

As fibras proporcionam substancial aumento na resistência à fadiga e ao impacto. Esta é uma das principais razões para a utilização do concreto reforçado com fibras em pavimentos e tabuleiros de pontes. Basicamente o bom desempenho deve-se ao aumento da capacidade de absorção de energia pelo material antes da ruptura (Araújo, 2002). Além de aumentar a vida da estrutura submetida à fadiga, a adição de fibras pode contribuir para o aumento da sua durabilidade, graças à diminuição da abertura das fissuras (ACI 544.1R-96, 2002).

Quanto à influência de fibras de aço na deformação lenta, podem ser encontrados na literatura estudos experimentais envolvendo diferentes tipos de fibras empregadas em elementos submetidos a solicitações distintas: tração, flexão e compressão. Miller (2008) fez uma ampla revisão sobre os estudos já realizados envolvendo CRFA e deformação lenta, identificando desempenho distinto dos materiais compósitos submetidos a diferentes solicitações. Mangat e Azari (1985) e Chern e Young (1989) realizaram ensaios à compressão axial e obtiveram melhor desempenho dos CRFA tanto para fluência como para retração. Para os estudos envolvendo solicitações de tração, entretanto, observou-se acréscimo nas deformações por fluência e uma melhoria não muito significativa das deformações por retração (Bissonette e

Pigeon, 1995; Altoubat e Lange, 2001; Bissonnette *et al.*, 2007). Com relação à fluência na flexão, os resultados encontrados para concreto simples (Swamy *et al.*, 1977 e Swamy e Theodorakopoulos, 1979) e concreto armado (Tan *et al.*, 1994b; Tan e Saha, 2005) indicaram menores flechas diferidas decorrentes da incorporação de fibras metálicas.

Os resultados destes experimentos fornecem conclusões contraditórias a respeito do comportamento do CRFA. Segundo Miller (2008) isto ocorre uma vez que o comportamento final é reflexo da ação conjunta de inúmeros fatores tais como: dosagem e materiais utilizados na matriz, formato, dimensões e teor de fibra, bem como o tipo de sollicitação empregada.

2.2 CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Verifica-se em muitos experimentos que a presença de fibras pode trazer benefícios para o comportamento de elementos estruturais. Diversos estudos demonstram que a adição de fibras permite o aumento significativo do momento último de vigas reforçadas de forma convencional (Ashour *et al.*, 2000; Oh, 1992; Chunxiang e Patnaikuni, 1999; Bentur e Mindess, 2006). Além disso, observa-se maior ductilidade e melhora do comportamento pós-fissuração, com perda de resistência de forma menos brusca.

Existe ainda uma grande quantidade de estudos indicando que as fibras aumentam substancialmente a capacidade ao corte (tensão diagonal) de vigas de concreto. Em muitos casos, a presença das fibras alterou inclusive a forma de ruptura das vigas de corte para flexão.

Segundo ACI 544.4R-88 (1999), as fibras de aço apresentam vantagens quando utilizadas para complementar ou substituir estribos. Primeiramente, as fibras estão distribuídas aleatoriamente através do volume do concreto com espaçamento muito menor do que pode ser obtido com reforço convencional. Além disso, a resistência à tração para a primeira fissura (*first-crack tensile strength*), a resistência à tração última e a resistência ao corte do concreto (*shear-friction strength*) são aumentadas pela presença das fibras.

A Figura 2.7 reúne os resultados de diversos estudos sendo possível verificar o aumento da resistência ao corte provocada pela adição de fibras. Observa-se que, quanto menor a razão a/d e maior a porcentagem de fibras, maior é a resistência ao corte desenvolvida na ruptura,

sendo a o vão de corte, isto é, a distância entre o ponto de aplicação da carga e o apoio mais próximo e d é a altura útil da seção da viga.

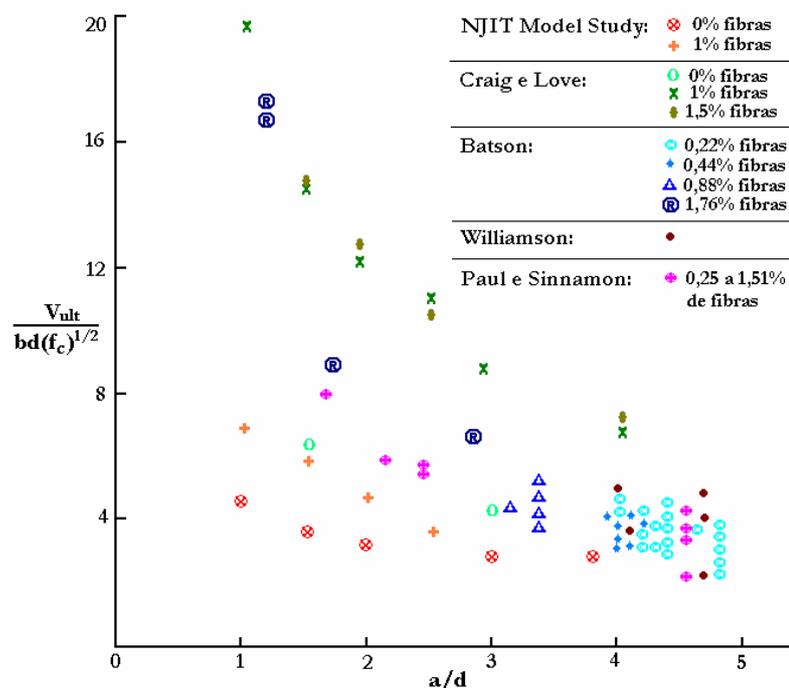


Figura 2.7 – Comportamento ao corte de vigas de concreto reforçado com fibras (adaptado de ACI 544.4R-88, 1999).

Embora o reforço com fibras tenha se mostrado eficaz em combinação com estribos e apesar do aumento da capacidade de corte ter sido constatado em vários estudos, estas vantagens não são amplamente utilizadas em aplicações práticas. Bentur e Mindess (2006) afirmam que o aumento da capacidade ao corte com a adição de fibras não foi suficientemente quantificado para seu uso em aplicações práticas.

Em aplicações onde a presença da armadura convencional não é essencial para a segurança e integridade da estrutura, como por exemplo, em pavimentos, recobrimentos, revestimentos de túneis, o acréscimo da resistência à flexão, ao impacto e à fadiga associado com a presença fibras pode ser usado para a redução de espessura de seção ou para melhoria do desempenho, ou ambos (ACI 544.4R-88, 1999).

Alguns métodos de cálculo, que levam em consideração a contribuição estrutural que as fibras de aço podem fornecer em elementos de concreto, podem ser encontrados na literatura (ACI 544.4R-88, RILEM TC 162, recomendações nacionais). Eles são baseados em métodos

convencionais de projeto complementados por procedimentos para a consideração da contribuição das fibras. Estes métodos geralmente modificam as forças internas em elementos de concreto para considerar as tensões adicionais das fibras. As principais diferenças entre os métodos propostos estão na determinação da magnitude do aumento da tensão de tração em função das fibras e na forma em que a força total é calculada. Quando apoiado por dados experimentais confiáveis, estes métodos podem proporcionar resultados satisfatórios.

2.3 MODELOS PARA A RESISTÊNCIA DO CRFA

Além das análises experimentais, é possível encontrar na literatura alguns estudos que buscam caracterizar a resistência do CRFA de forma empírica. Abaixo são descritos os trabalhos disponíveis.

Murugappan *et al.* (1993) apresentaram um modelo biaxial para o CRFA. Eles propuseram que as fibras de aço provocam uma “tensão confinante equivalente” na direção perpendicular ao plano das tensões. Assim, a envoltória de resistência (*strength envelope*) para o CRFA sob compressão biaxial (por exemplo, σ_2 , σ_3), pode ser considerada como equivalente a uma envoltória de ruptura de um concreto simples análogo sob compressão triaxial (σ_1 , σ_2 , σ_3), onde σ_1 corresponde à “pressão confinante equivalente” (Figura 2.8).

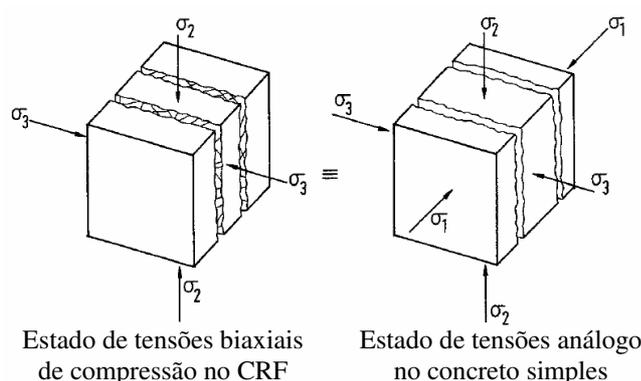


Figura 2.8 – “Modelo tensão confinante” para o CRFA proposto por Murugappan *et al.* (1993).

O critério de resistência de quatro parâmetros de Ottosen (1977) para o concreto simples sob tensões triaxiais foi empregado, com σ_1 igual à tensão confinante. Os autores consideraram

que esta tensão é igual à resistência à tração pós-fissuração do CRFA, σ_{tu} , ou seja, $\sigma_1 = \sigma_{tu}$. As envoltórias de resistência à compressão biaxial obtidas analiticamente para os concretos produzidos por Yin *et al.* (1989) e Traina e Mansour (1991) são ilustradas na Figura 2.9. Na Figura também estão representados os dados experimentais obtidos nos respectivos trabalhos.

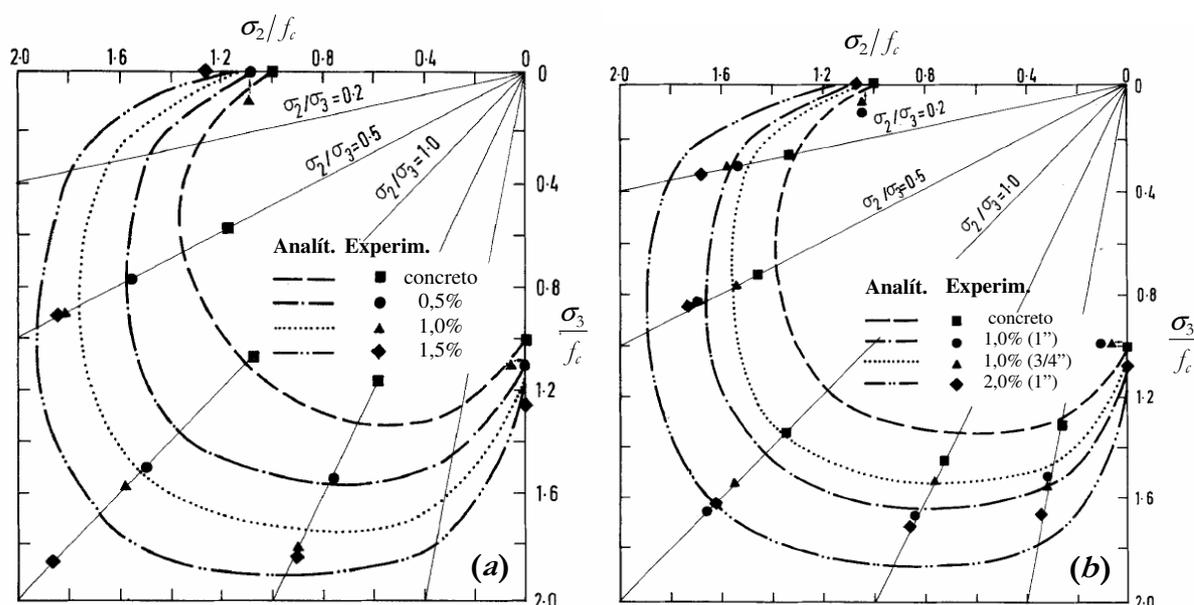


Figura 2.9 – Modelo proposto por Murugappan *et al.* (1993) e resultados experimentais de Yin *et al.* (1989) (a) e Traina e Mansour (1991) (b).

Discrepâncias entre o modelo proposto e os resultados experimentais podem ser observadas, contudo, ele permite capturar a tendência de aumento de resistência à compressão biaxial provocada pela adição de fibras de aço ao concreto.

Este modelo possui a limitação de apenas abranger estados biaxiais de compressão, não permitindo a análise de estados de tensão multiaxiais mais complexos. Além disso, possui uma base mecânica questionável, uma vez que não é físico o raciocínio adotado pelos autores (Figura 2.8), para a consideração das fibras na matriz.

Um segundo modelo encontrado na literatura foi proposto por Hu *et al.* (2003). Neste modelo o critério de resistência do CRFA é descrito através de uma elipse inclinada, esticada e distorcida. Esta elipse é obtida através da multiplicação da equação da elipse por uma segunda equação do tipo $(A+Bx)^\alpha$ (Figura 2.10(a)). O resultado se traduz em uma curva única, suave

e fechada, capaz de caracterizar as condições de ruptura biaxial do concreto simples e do CRFA em todas as regiões de tensão. Para $\alpha > 1$, uma envoltória altamente distorcida é obtida, a qual se aproxima da superfície de ruptura biaxial real do CRFA com aceitável precisão (Figura 2.10(b)).

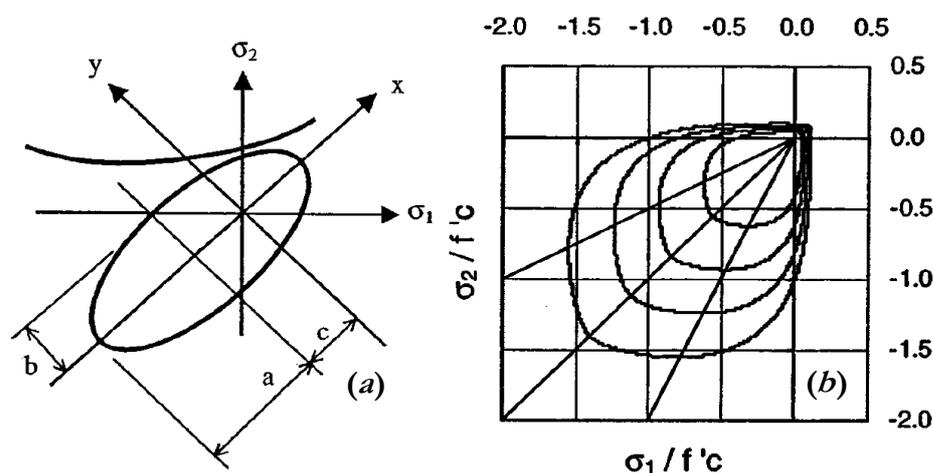


Figura 2.10 – Deformação de uma elipse (a) e envoltórias de ruptura propostas (b), adaptado de Hu *et al.* (2003).

Empregando expansão em Séries de Taylor e $\alpha = 3$, a equação da elipse transformada pode ser escrita na forma de um polinômio de quinta ordem com seis parâmetros a serem determinados.

Para determinar os seis parâmetros do modelo proposto, seis dados de resistência biaxial são necessários. Entre os pontos de dados experimentais estão os valores de resistência à compressão e à tração uniaxial e biaxial. Por conseguinte, as curvas obtidas são capazes de ajustar os dados experimentais de forma bastante adequada.

A principal vantagem desta formulação se encontra na continuidade e suavidade das curvas de resistência em todas as regiões de tensão biaxial. Hu *et al.* (2003) demonstraram que as dificuldades numéricas associadas às singularidades decorrentes de “efeitos de cantos” desaparecem. Eles concluíram que a característica mais atraente deste modelo é a sua concisão e eficácia na formulação elastoplástica e implementação numérica em comparação com outros modelos de ruptura. Não apenas as elipses se ajustam adequadamente aos dados experimentais, como também a formulação e os algoritmos para a análise são simplificados.

Este método é, entretanto, limitado pela necessidade de dados experimentais de resistências biaxiais de difícil acesso para a criação da envoltória de ruptura. Testes biaxiais são

necessários para cada tipo de fibra e proporção volumétrica na determinação de significativas curvas de resistência.

O modelo proposto por Seow e Swaddiwudhipong (2005) utiliza uma variante da superfície de ruptura de Willam-Warnke (Figura 2.11), a qual considera a presença das fibras através da alteração do seu meridiano de tração. Neste modelo, as coordenadas dos meridianos de compressão, ρ_c , e de tração, ρ_t , são expressas por funções quadráticas côncavas na direção negativa do eixo de tensões octogonais, respectivamente, Equação 2.2 e Equação 2.3. A curva elíptica dada pela Equação 2.1 é usada para interpolar ρ_c e ρ_t e determinar a tensão na ruptura de qualquer estado de tensão, com ângulos de similaridade, θ , de 0° a 60° . O uso da interpolação elíptica $\rho(\xi, \theta)$, permite uma grande flexibilidade em modificar uma parte específica da superfície de ruptura para considerar a presença das fibras no concreto reforçado com fibras de aço, conforme proposto por Seow e Swaddiwudhipong (2005).

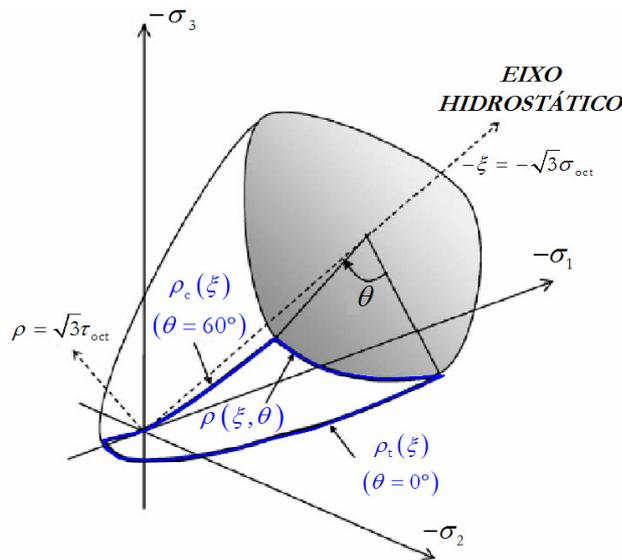


Figura 2.11 – Representação da superfície de Willam-Warnke.

$$\rho(\xi, \theta) = \frac{2\rho_c(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos \theta + \rho_c(2\rho_t - \rho_c)[4(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + 5\rho_t^2 - 4\rho_t\rho_c]^{1/2}}{4(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\xi}{f_c} = b_2 \left(\frac{\rho_c}{f_c} \right)^2 + b_1 \left(\frac{\rho_c}{f_c} \right) + b_0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\xi}{f_c} = a_2 \left(\frac{k\rho_t}{f_c} \right)^2 + a_1 \left(\frac{k\rho_t}{f_c} \right) + a_0, \text{ com } k \leq 1 \quad (2.3)$$

Nesta formulação, as tensões de compressão são negativas e as equações são expressas em termos de $\xi = I_1 / \sqrt{3}$, $\rho = \sqrt{2J_2}$ e θ , sendo I_1 , o primeiro invariante do tensor de tensões, J_2 , o segundo invariante do tensor de tensões desviadoras.

Os coeficientes a_1 , a_2 , b_1 , b_2 e $a_0 = b_0$ são os parâmetros da superfície de Willam-Warnke, os quais foram determinados a partir de uma análise de regressão de aproximadamente 300 dados experimentais de corpos de prova de concretos não reforçados submetidos a carregamentos triaxiais.

O parâmetro k é utilizado para considerar a presença das fibras. Para o concreto sem fibras, o valor de k é 1 e, neste caso, a superfície de ruptura se reduz ao Modelo de Willam-Warnke original. Para o caso de CRFA, k deve ser calculado com a Equação 2.4 (Seow e Swaddiwudhipong, 2005).

$$k = -a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 \left[a_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{f_{cb}}{f_c} \right) \right]} / a_2 \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{f_{cb}}{f_c} \right) \quad (2.4)$$

sendo f_{cb} a resistência à compressão biaxial e f_c a resistência à compressão uniaxial do concreto com fibras. O valor de f_{cb} do CRFA nem sempre é conhecido. Seow e Swaddiwudhipong (2005), então, apresentam uma forma de estimativa do valor de f_{cb} baseada na constatação realizada por feita por Murugappan *et al.* (1993) de que a presença de fibras fornece uma tensão de confinamento, σ_m , na direção de σ_3 , quando este é submetido a tensões nas direções de σ_1 e σ_2 . Para a obtenção do valor de σ_m Seow e Swaddiwudhipong (2005) empregaram a formulação proposta por Lim (1987).

Na Figura 2.12 estão representadas as curvas obtidas através da formulação apresentada por Seow e Swaddiwudhipong (2005) juntamente com dados experimentais obtidos pelos próprios autores (Swaddiwudhipong e Seow, 2006).

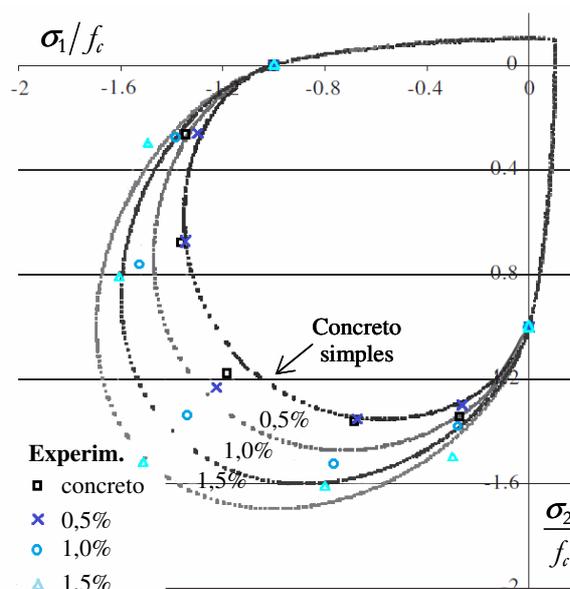


Figura 2.12 – Modelo proposto por Seow e Swaddiwudhipong (2005) e resultados experimentais de Swaddiwudhipong e Seow (2006).

Apesar de bastante robusto, este modelo incorpora através de apenas um parâmetro, k , a influência das fibras na resistência do CRFA. Além disso, ele não considera o possível aumento da resistência à compressão uniaxial que as fibras podem proporcionar, uma vez que apenas o meridiano de tração é alterado para considerar a presença das mesmas.

Chern *et al.* (1992), por sua vez, realizaram ensaios triaxiais em concretos simples e reforçados com fibras de aço nas proporções volumétricas de 1% e 2%. A partir dos dados experimentais por eles obtidos, os autores ajustaram os seis coeficientes da superfície de Willan-Warnke, a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , a_0 e b_0 , os quais são função da fração volumétrica das fibras.

A consideração dos valores encontrados pelos autores para os coeficientes da superfície de Willan-Warnke permite considerar a influência da adição das fibras de aço na resistência do concreto sob estados multiaxiais de tensão. Entretanto, estes coeficientes não refletem o comportamento geral de concretos reforçados com fibras de aço e sim aqueles produzidos pelos autores.

Para esta abordagem se tornar mais representativa, uma grande quantidade de resultados experimentais são necessários na definição dos seis coeficientes. Poucos resultados experimentais são, no entanto, encontrados na literatura.

2.4 MODELAGEM DO CRFA

Verifica-se na literatura que, embora numerosos trabalhos experimentais sobre o comportamento do CRFA tenham sido realizados, a produção relacionada à modelagem numérica deste material é bem inferior. Nesta seção são apresentados os trabalhos encontrados, referentes à modelagem do comportamento do CRFA.

Uma análise tridimensional não linear via método dos elementos finitos foi conduzida por Padmarajaiah e Ramaswamy (2002). Este trabalho teve o propósito de estudar o comportamento à flexão de vigas de concreto armado e protendido, executadas em concreto de alta resistência reforçado com fibras e produzidas pelos próprios autores.

Para a modelagem utilizou-se o software ANSYS 5.5. O concreto foi modelado através do elemento tridimensional SOLID65, enquanto os cabos de protensão e a armadura passiva foram simulados empregando elementos de treliça LINK8. Além disso, o comportamento da interface entre o concreto e a armadura (cabos de protensão e da armadura passiva), foi modelado utilizando o elemento COMBIN14.

A fim de simular o efeito das fibras de aço na matriz concreto foram efetuadas duas considerações. Primeiramente, o estado de tensão multiaxial do concreto devido à presença das fibras foi caracterizado através da alteração da superfície de ruptura e da resposta tensão deformação. Para ambos os concretos, convencional e reforçado com fibras de aço, empregou-se como critério de ruptura o modelo de cinco parâmetros de Willam-Warnke, sendo dois dos parâmetros definidos experimentalmente. Para os três parâmetros restantes, no caso do concreto convencional, foram utilizados valores padrão do ANSYS 5.5 e, para o CRFA, foram adotados os resultados experimentais de Yin *et al.* (1989) e teóricos de Chern *et al.* (1992). Este último propôs uma modificação nos coeficientes das equações que representam os meridianos de tração e compressão da superfície de Willam-Warnke para a consideração da presença de fibras. A segunda consideração foi a modelagem do efeito de ligação e transferência de tensão, proporcionado pelas fibras no concreto fissurado, através do emprego do elemento tridimensional LINK8 explicitamente. Apenas fibras posicionadas ao longo da direção longitudinal das vigas foram consideradas. O efeito de aderência, deslizamento e arrancamento na interface entre as fibras e os elementos de concreto também foram simuladas utilizando o elemento COMBIN14. Além disso, admitiram-se valores mais altos para o coeficiente de transferência de tensões de cisalhamento através das fissuras para o

CRFA, uma vez que as fibras contribuem significativamente na transferência de tensões do concreto fissurado.

Por meio da análise, Padmarajaiah e Ramaswamy (2002) obtiveram resultados via método dos elementos finitos bastante próximos daqueles obtidos experimentalmente. A curva carga deslocamento anterior à primeira fissura e a carga de pico da modelagem via MEF estão em concordância com aqueles obtidos nos experimentos. Entretanto, os deslocamentos ao nível de carga de trabalho e de pico foram inferiores aos alcançados nos testes. Segundo os autores, uma possível justificativa é o uso de molas com resposta linear para representar o escorregamento das fibras, onde o comportamento pode ser altamente não-linear a níveis de carga mais altos. Além disso, a simulação obteve bons resultados quanto ao padrão de fissuração em ambas as fases, inicial e de ruptura, indicando que o efeito das fibras na resistência e na ductilidade do concreto e no efeito de ponte, no controle da propagação das fissuras, foi devidamente capturado.

Bolander e Saito (1997) apresentam um método computacional para analisar o desempenho de fibras curtas em compósitos de matriz cimentícia. Neste método, cada fibra é simulada como uma entidade discreta e a matriz é representada por uma malha de polígonos convexos de geometria aleatória. Cada polígono é considerado como uma partícula rígida tendo como graus de liberdade duas translações e uma rotação, definidos no centroide da partícula. As partículas são interligadas ao longo de seu contorno através de interfaces flexíveis, ou seja, um conjunto de molas, cuja rigidez busca representar as propriedades elásticas do compósito.

Os efeitos das fibras nas fases de pré e pós-fissuração são tratados de formas distintas. Em ambos os casos, existe uma ligação direta entre as ações locais das fibras e a resposta do compósito. Antes da fissuração, as contribuições da rigidez da fibra são baseadas no mecanismo de transferência de tensão elástica entre fibra/matriz. Na etapa pós-fissuração, a contribuição das fibras depende do mecanismo de aderência fibra-matriz, sendo representado pela relação tensão de aderência-deslizamento. A fissuração é caracterizada pela degradação das propriedades elásticas do conjunto de molas que simula a interface entre as partículas rígidas.

No trabalho, compósitos com fibras alinhadas e aleatoriamente orientadas foram analisados quando submetidos a cargas de tração direta. Resultados numéricos foram comparados com resultados teóricos baseados nas regras de mistura. As abordagens numérica e teórica

forneceram valores bastante similares para o módulo de elasticidade, resistência à fissuração e frações volumétricas críticas, mostrando ser um método eficiente para o estudo de matrizes cimentícias reforçadas com fibras e, segundo os autores, um método que pode permitir inclusive o desenvolvimento de modelos macroscópicos para este material.

Simões (1998), por sua vez, apresenta um modelo constitutivo para concreto reforçado com fibras de aço baseado na formulação hipoeelástica ortotrópica, originalmente proposta para concreto simples. As peculiaridades do comportamento do concreto com fibras frente às mais diversas solicitações, tais como tração, compressão e cisalhamento, são incorporadas ao modelo através de relações tensão-deformação adequadas a esse material. Tais relações provêm de estudos analíticos e experimentais sobre o assunto, publicados na literatura. O modelo assim obtido foi implementado em programa capaz de realizar análises numéricas não-lineares através do método dos elementos finitos. Esse programa foi empregado na simulação de uma estrutura de concreto com fibras, cujos resultados em termos da curva carga-deslocamento, desenvolvimento e distribuição de fissuras, progressão do escoamento da armadura longitudinal (convencional) e modo de ruptura, foram comparados aos numéricos correspondentes. O autor obteve um comportamento bastante similar entre a resposta referente à análise numérica e aquela referente à análise experimental.

O estudo de Grossi (2006) teve por objetivo a contribuição para a modelagem numérica do CRFA através de uma análise não-linear via método dos elementos finitos. Para tanto, propôs um modelo cuja principal característica é o emprego de um diagrama tensão-deformação trilinear para o comportamento em tração, o qual permite melhorar a representação do aumento da tenacidade do material oriundo do acréscimo das fibras. Duas vertentes da modelagem foram avaliadas sob as bases da lei constitutiva trilinear, sendo os parâmetros desta lei obtidos a partir das propriedades mecânicas do material. O modelo foi incorporado a um código computacional disponível no meio acadêmico e que faz uso do paradigma da Programação Orientada a Objetos. Tal código foi expandido durante a pesquisa para poder contemplar a implementação do modelo proposto. A validação da proposta de modelagem foi feita mediante simulação numérica de problemas em estado plano em vigas de CRFA, sendo avaliados casos de flexão em três e quatro pontos. Resultados comparativos satisfatórios em termos da relação carga-deslocamento foram alcançados, evidenciando a adequação da modelagem e da metodologia propostas.

Pasa (2007) buscou simular o comportamento do CRFA através da análise numérica tridimensional empregando também o método dos elementos finitos. O desenvolvimento computacional do modelo utilizado para o concreto foi baseado no estudo apresentado por Hinton (1988) para a análise de estruturas tridimensionais de concreto armado com não-linearidade física. Modificações foram introduzidas no modelo, para que sua aplicabilidade fosse estendida ao estudo do comportamento de estruturas de concreto reforçadas com fibras metálicas. Tais modificações constituem-se da implementação de um modelo constitutivo capaz de simular o comportamento do concreto com a presença das fibras.

A representação do comportamento dos materiais foi feita através de um modelo elastoplástico, sendo analisadas estruturas sob condições de carregamento estático de curta duração. Especificamente para a determinação do comportamento do concreto com fibras, baseando-se no trabalho de Seow e Swaddiwudhipong (2005), empregou-se uma variante da superfície de ruptura de Willam-Warnke, a qual considera a presença das fibras através da alteração do seu meridiano de tração. Além disso, a fissuração do concreto foi representada pelo modelo de fissuras distribuídas, que leva em consideração a contribuição da matriz entre fissuras.

Dados experimentais disponíveis na literatura foram apresentados para efeito de comparação com os resultados obtidos através do programa computacional desenvolvido. Observou-se que o modelo matemático e a metodologia numérica empregados forneceram resultados bastante próximos aos experimentais, validando, desta forma, a modelagem do CRFA realizada neste estudo.

Para a proposição de um modelo do comportamento do concreto reforçado com fibras de aço, Ouair (2006) utilizou uma abordagem micromecânica baseada em métodos de homogeneização. Segundo o autor os métodos de homogeneização fornecem leis constitutivas mais ricas do que aquelas identificadas em escala macroscópica, uma vez que consideram informações relativas à microestrutura do material compósito, tais como propriedades geométricas, mecânicas e térmicas de cada constituinte.

A fim de simular o comportamento não-linear de CRFA, Ouair (2006) desenvolveu um modelo com formulação incremental do esquema de estimativa de Mori-Tanaka/Voigt. Neste estudo, o CRFA é considerado como um compósito formado por três fases: a primeira fase consiste na matriz de concreto, incluindo as microfissuras e vazios iniciais, a segunda fase

representa as fibras e a terceira representa um aumento de porosidade ou incorporação de ar originado ao se acrescentar fibras ao concreto. Tal efeito foi evidenciado em estudos experimentais realizados pelo próprio autor.

O comportamento dos materiais constituintes foi descrito através de dois modelos distintos. O comportamento frágil do concreto foi caracterizado pelo modelo de dano de Ju (1989), o qual também considera a coalescência de vazios e de microfissuras. O comportamento elastoplástico do aço, por sua vez, foi descrito pelo modelo de plasticidade J_2 .

O modelo formulado foi comparado aos resultados experimentais obtidos pelos autores e com análises via método dos elementos finitos realizadas utilizando software ABAQUS. Para as simulações através do MEF considerou-se uma microestrutura periódica representada por células unitárias axissimétricas. O código com a formulação incremental do esquema de estimativa de Mori-Tanaka/Voigt foi também integrado ao software ABAQUS através de sua interface UMAT, onde as propriedades do material são definidas pelo usuário. Desta forma foi possível realizar simulações multi-escala em estruturas tridimensionais reais. Em geral, as estimativas mostram uma boa concordância com as simulações e os resultados experimentais.

Os modelos numéricos que descrevem o comportamento de compósitos de matriz cimentícia reforçada com fibras, em geral, podem ser divididos em dois grupos (Alwan *et al.*, 1995). No primeiro grupo, a modelagem é realizada em nível de seus constituintes, ou seja, está baseada nas propriedades micromecânicas do concreto e das fibras. Diferentes técnicas numéricas são introduzidas para considerar o início da fissuração do material, o processo de abertura de fissuras, a resistência de arrancamento das fibras (*pull-out*), entre outros mecanismos envolvidos (Sant'ana, 2005). Estas propriedades micromecânicas são então integradas para realizar uma simulação na qual se procura estabelecer as propriedades mecânicas do material ou as respostas estruturais de elementos feitos com este compósito. Neste grupo podem ser destacados o modelo de partícula rígida de Bolander e Saito (1997), descrito anteriormente, bem como os modelos de tração via método dos elementos finitos de Alwan (1994), o modelo de fratura de Schlangen e Van Mier (1992) e o modelo de flexão de Rossi *et al.* (1992) (Alwan *et al.*, 1995).

O segundo grupo, por sua vez, considera leis constitutivas na modelagem de compósitos reforçados com fibras como um material isotrópico ou anisotrópico. Nesta linha de abordagem, podem ser citados os trabalhos de Simões (1998), Grossi (2006), Pasa (2007),

entre outros. Segundo Sant'ana (2005), a vantagem deste segundo grupo é possibilitar uma fácil incorporação das leis constitutivas a uma modelagem computacional que visa prever o comportamento do elemento estrutural feito com este compósito.

Nos trabalhos de Padmarajaiah e Ramaswamy (2002) e Ouair (2006) identificam-se as duas formas de abordagem: a modelagem em nível dos constituintes do material e o uso de leis constitutivas macroscópicas.

3. Teoria da Homogeneização

3.1 PRINCÍPIO GERAL DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO

A mecânica do contínuo trata de sólidos idealizados, onde, considerando um ponto infinitesimal e sua vizinhança, admite-se que a distribuição de material, as tensões e deformações são essencialmente uniformes (Nemat-Nasser e Hori, 1999). Entretanto, em uma inspeção mais refinada, como por exemplo, através de um microscópio, verifica-se que todos os materiais reais revelam uma multiplicidade de heterogeneidades, mesmo se macroscopicamente pareçam ser homogêneos. Estes desvios de homogeneidade podem existir na forma de fissuras, vazios, partículas, inclusões com diferentes propriedades e formas, ou ainda regiões de um material distinto, camadas ou fibras em um laminado, irregularidades em um arranjo de cristais. Conseqüentemente, o campo de tensões e deformações não se apresenta de forma uniforme a este nível. O comportamento destas heterogeneidades, bem como os seus efeitos sobre as propriedades e o desempenho global de um material é o objetivo principal das investigações micromecânicas.

Heterogeneidades ocorrerem em diferentes escalas (Figura 3.1) e são características do material a ser analisado. A noção da heterogeneidade do meio depende da fineza da escala considerada como sendo a escala microscópica. A Figura 3.1 apresenta um esquema onde duas escalas microscópicas podem ser consideradas. Na escala microscópica 1, o material aparentemente homogêneo entre as inclusões pode ele próprio ser considerado como um nível macroscópico com relação a uma escala mais refinada, a escala microscópica 2. Portanto o que se entende por escala macroscópica e escala microscópica em um determinado problema depende do estudo a ser realizado. Normalmente, a escala macroscópica é aquela habitualmente adotada pelo engenheiro para analisar a resposta da estrutura sob solicitações prescritas, enquanto a escala microscópica é aquela escolhida para a descrição do material constitutivo.

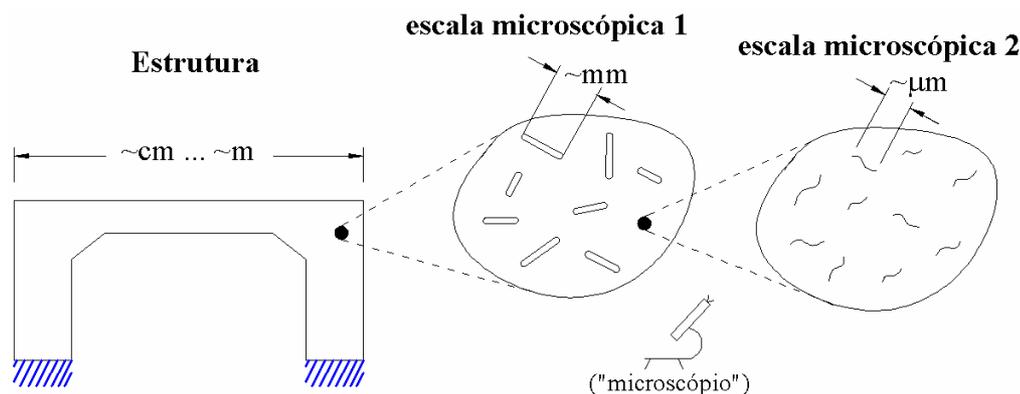


Figura 3.1 – Escala macroscópica e microscópica.

Este tipo de abordagem admite a vantagem de que um comportamento complexo seja avaliado com base na morfologia da microestrutura e nas características dos seus materiais constituintes, permitindo a verificação da influência de detalhes microestruturais nas características globais ou macroscópicas do material heterogêneo. Esta transição micro-macro escala formalmente ocorre através de um adequado processo de médias e é chamado homogeneização. Como se observa em materiais reais, variações microestruturais então conduzem a variações das propriedades globais ou efetivas do material.

Os primeiros estudos teóricos sobre o desempenho dos materiais com microestrutura remontam a James Clerk Maxwell (1831-1879), Lord Rayleigh, (1842-1919) e Albert Einstein (1879-1955). Enquanto os dois primeiros estavam preocupados com a determinação da condutividade elétrica global de um material heterogêneo, o último investigou a viscosidade efetiva de um fluido que contém uma suspensão de partículas esféricas sólidas (Gross e Seelig, 2006). Em sólidos mecânicos, foi originalmente colocada ênfase à determinação das constantes elásticas de um policristal a partir das características de um cristal simples com as primeiras considerações teóricas de Woldemar Voigt (1850-1919) e Endre Reuss (1900-1968). Importantes contribuições foram fornecidas, entre outros, por John Douglas Eshelby (1916-1988), Ekkehart Kröner (1919-2000) e Rodney Hill (1921-), na segunda metade do século passado. Os seus conceitos teóricos e aproximações analíticas, que também se aplicam aos modernos materiais compósitos, foram, posteriormente, estendidos e generalizados a materiais com comportamento inelástico.

O presente capítulo introduz conceitos fundamentais da micromecânica, métodos utilizados e aplicações ao concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). Apresenta-se, inicialmente, a

questão da transição da escala microscópica à macroscópica e a determinação de propriedades efetivas dos materiais a partir da resolução de um problema de contorno colocado sobre uma dada microestrutura, o volume elementar representativo (VER). Os vários esquemas de estimativas e limites para as propriedades elásticas efetivas são descritos. Os resultados do esquema de Mori-Tanaka (1973) para o CRFA são obtidos e comparados com dados experimentais e com resultados numéricos de análise via método dos elementos finitos. Este esquema de estimativa é baseado no resultado estabelecido por Eshelby (1957), relativo ao problema da inclusão elipsoidal imersa num meio infinito e é aquele que melhor se adequa ao material em estudo, o CRFA.

Maior ênfase é dada, nestes primeiros estudos, ao comportamento elástico do CRFA, bem como ao comportamento viscoelástico. Após serem calculadas as propriedades elásticas efetivas através da estimativa de Mori-Tanaka, o comportamento viscoelástico é obtido através do uso de Princípio de Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV). Tal princípio, para uma grande parte de problemas, permite o cálculo direto da solução viscoelástica a partir do problema elástico associado através da aplicação de transformadas de Carson-Laplace (Christensen, 2003).

3.1.1 Volume Elementar Representativo e Separação entre Escalas

Técnicas de homogeneização clássicas visam substituir uma estrutura heterogênea complexa por uma homogênea fictícia, ambas apresentando globalmente o mesmo comportamento. O processo de homogeneização está baseado na possibilidade de estabelecer um volume elementar representativo (VER) e um meio homogêneo equivalente (Figura 3.2), os quais são análogos do ponto de vista mecânico, ou seja, as suas respostas globais para qualquer carregamento mecânico devem ser a mesma. Em outras palavras, o meio homogêneo equivalente deve ser tal que os campos de tensão e deformação $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X})$ e $\underline{\underline{E}}(\underline{X})$, derivados da escala macroscópica através da resolução de um problema de contorno em uma estrutura homogênea constituída por este material homogêneo fictício, sejam os valores médios, calculados sobre o VER localizado em \underline{X} , dos campos de tensão e deformação locais $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ e $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$. Estes, por sua vez, são derivados da escala microscópica quando as heterogeneidades da microestrutura são consideradas no processo de cálculo (Zaoui, 2002). \underline{X} se refere à

posição do ponto na escala macroscópica (da estrutura), enquanto \underline{x} designa o vetor posição do ponto na escala microscópica (ou seja, do VER).

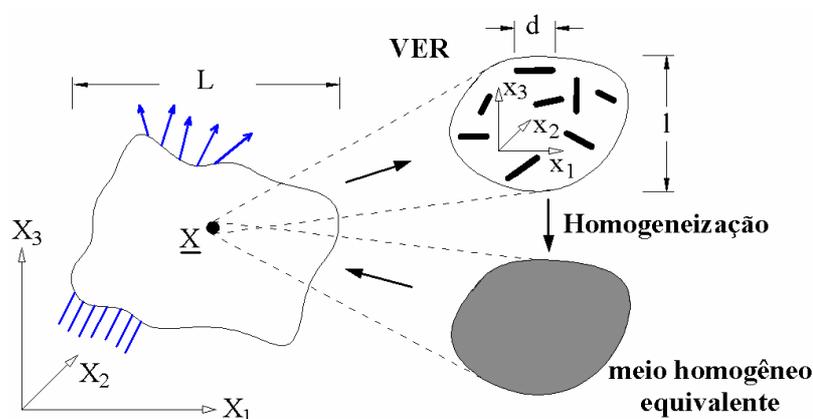


Figura 3.2 – Processo de Homogeneização.

Para a validação do processo é necessário que a dimensão característica d das heterogeneidades seja muito menor do que a dimensão característica l do volume elementar (Figura 3.2). Desta forma este volume pode ser considerado representativo, independente da sua localização na estrutura macroscopicamente homogênea. Além disso, l deve ser suficientemente menor que a dimensão característica L da estrutura sendo possível desta forma o uso de ferramentas de integração e derivação clássicas da análise estrutural. É importante ressaltar que a menor dimensão característica d deve ser compatível com o uso dos conceitos básicos da mecânica do contínuo (tensores de tensão e deformação, etc.). A Equação 3.1 representa a separação de escalas necessária durante o processo de homogeneização (Zaoui, 2002).

$$d_0 \ll d \ll l \ll L \quad (3.1)$$

onde d_0 é a menor dimensão abaixo da qual a mecânica do contínuo não é mais válida.

O volume elementar representativo é, portanto, o volume ou parte da estrutura capaz de representar de forma suficientemente precisa o comportamento global do material, possuindo todas as informações para a descrição geométrica e mecânica do meio heterogêneo. A escolha e descrição do VER é um aspecto importante ao se realizarem estudos através da abordagem da micromecânica, uma vez que este deve representar efetiva e satisfatoriamente o

comportamento constitutivo global do material heterogêneo. Para os materiais com microestrutura aleatória, como por exemplo, o concreto reforçado com fibras, a definição do VER é efetuada através da especificação das fases que constituem o material heterogêneo, da descrição das suas características geométricas e mecânicas e também a descrição da distribuição espacial (ou morfologia) das fases: a fração volumétrica e a forma e orientação das inclusões ou fibras. Além disso, no caso do CRFA tendo fibras com dimensão característica da ordem de alguns centímetros $d \sim cm$, o tamanho do VER deve ser da ordem de alguns decímetros $l \sim dm$ e a dimensão do elemento estrutural da ordem de pelo menos alguns metros $L \sim m$ para que a condição de separação de escalas necessária no processo de homogeneização seja satisfeita. No caso de materiais periódicos, a célula base, estrutura que se repete ao longo de todo o material, constitui o VER a ser analisado.

3.1.2 Problema de Concentração

A formulação da lei do comportamento macroscópico por meio da homogeneização decorre da resolução de um problema auxiliar de contorno colocado sobre o VER, também conhecido por problema de concentração ou localização. O problema de concentração trata da modelagem mecânica das interações entre as fases do material heterogêneo a ser analisado e da derivação dos campos de tensão e deformação locais no interior do VER, $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ e $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$, respectivamente, através do conhecimento das tensões e deformações macroscópicas, $\underline{\underline{\Sigma}}$ e $\underline{\underline{E}}$.

Para a resolução deste problema, duas condições de contorno clássicas são normalmente adotadas na definição da solitação sobre o VER: deformação homogênea ou tensão homogênea. No caso de condições de contorno em tensão homogênea (*homogeneous stress boundary conditions*), tensões superficiais são admitidas prescritas no contorno \underline{T} (Figura 3.3) e definidas por

$$\underline{T} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \quad (3.2)$$

Onde o tensor constante $\underline{\underline{\Sigma}}$ é o tensor de tensão macroscópica conhecida e \underline{n} é o vetor normal ao contorno do VER. Através da Equação 3.2, prova-se que $\underline{\underline{\Sigma}}$ é igual média volumétrica da

tensão $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ no VER, simbolizado por V . De fato, para um campo de tensão estaticamente admissível $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$, ou seja, que atenda a equações de equilíbrio, e que satisfaça a Equação 3.2, tem-se

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) dV = \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.3)$$

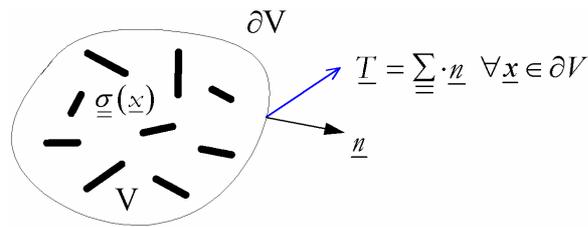


Figura 3.3 – VER e condições de contorno em tensão homogênea.

Por definição, utilizando a regra das médias, tem-se ainda:

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad (3.4)$$

Da mesma forma, condições de contorno em deformação homogênea (*homogeneous strain boundary conditions*) são associadas a deslocamentos prescritos no contorno \underline{u} (Figura 3.4) dado por

$$\underline{u} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} \quad (3.5)$$

onde $\underline{\underline{E}}$ é tensor de deformação (constante) macroscópico e \underline{x} pertence ao contorno. Tem-se $\underline{\underline{E}}$ igual à média volumétrica da deformação $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$, ou seja, para um campo de deformação cinematicamente admissível $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$ e que satisfaz a Equação 3.5 tem-se

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) dV = \underline{\underline{E}} \quad (3.6)$$

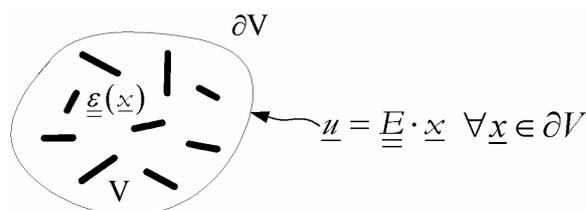


Figura 3.4 – VER e condições de contorno em deformação homogênea.

Por definição, utilizando a regra das médias, tem-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \quad (3.7)$$

Embora, em princípio, as abordagens em tensão homogênea (Equação 3.2) e deformação homogênea (Equação 3.5) não sejam equivalentes, elas tendem a ser quando $d \ll l$ (Hill, 1967; Mandel, 1972) como será visto na sequência.

3.2 PROCESSO DE HOMOGENEIZAÇÃO EM ELASTICIDADE

A determinação da lei macroscópica elástica de um material heterogêneo decorre da resolução do problema de concentração, descrito anteriormente, considerando-se a lei constitutiva elástica dos materiais constituintes. Assim, duas abordagens podem ser avaliadas, uma por deformações e a outra por tensões.

Na abordagem por deformações, o problema de concentração consiste na determinação da tensão $\underline{\underline{\sigma}}$, deformação $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e deslocamento microscópico \underline{u} , os quais caracterizam a resposta local do VER ao carregamento definido pela deformação macroscópica prescrita $\underline{\underline{E}}$, de modo que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{em } V \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\zeta}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{em } V \\ \underline{u} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} & \text{em } \partial V \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $\underline{\underline{\zeta}}(\underline{x})$ é o tensor de rigidez no ponto $\underline{x} \in V$.

Observa-se, a partir da linearidade do problema com relação ao parâmetro de carregamento $\underline{\underline{E}}$, que o campo de deformação local $\underline{\underline{\varepsilon}}$ é proporcional à deformação macroscópica. Esta

propriedade é classicamente expressa através do conceito do tensor de concentração de deformações. Denotado aqui por $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$, este tensor de quarta ordem estabelece a ligação entre as deformações macroscópicas e as deformações locais no ponto \underline{x} do VER:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (3.9)$$

Verifica-se que as condições de contorno em deslocamento (Equação 3.5) conduzem à média $\langle \underline{\underline{A}} \rangle = \underline{\underline{1}}$, onde $\underline{\underline{1}}$ é o tensor identidade de quarta ordem.

A inserção da Equação 3.9 na relação constitutiva elástica da Equação 3.8 e o cálculo da média sobre o VER levam a:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad (3.10)$$

onde $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ é o tensor de elasticidade homogeneizado (macroscópico):

$$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle = \sum_{r=1}^n f^r \underline{\underline{c}}^r : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_r \quad (3.11)$$

sendo n o número de fases do VER, f^r a fração volumétrica de cada fase r , $\underline{\underline{c}}^r$ o tensor de rigidez da fase r e $\langle \underline{\underline{A}} \rangle_r$ é a média volumétrica sobre o domínio ocupado pela fase r :

$$\langle \underline{\underline{A}} \rangle_r = \frac{1}{V^r} \int_{V^r} \underline{\underline{A}}(\underline{x}) dV \quad (3.12)$$

Na abordagem por tensões, ao invés de deformação prescrita, tem-se um carregamento definido pela tensão macroscópica $\underline{\underline{\Sigma}}$ prescrita, de modo que:

$$\begin{cases} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{em } V \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{g}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}} & \text{em } V \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} & \text{em } \partial V \end{cases} \quad (3.13)$$

sendo $\underline{\underline{g}}(\underline{x})$ o tensor de flexibilidade no ponto $\underline{x} \in V$ e $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}$, os campos microscópicos de tensão e deformação, soluções do problema de concentração (3.14) e considerando a sua linearidade, observa-se a proporcionalidade entre $\underline{\underline{\sigma}}$ e o carregamento $\underline{\underline{\Sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \underline{\underline{B}}(x) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.14)$$

onde $\underline{\underline{B}}(x)$ representa o tensor de concentração de tensões. Verifica-se que as condições de contorno em tensão (Equação 3.2) conduzem à média $\langle \underline{\underline{B}} \rangle = \underline{\underline{1}}$, assim como ocorre para $\underline{\underline{A}}$.

Substituindo a Equação 3.14 na relação constitutiva elástica da Equação 3.13 e calculando-se a média sobre o VER, obtém-se:

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{B}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{S}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.15)$$

onde $\underline{\underline{S}}^{\text{hom}}$ é o tensor de flexibilidade homogeneizado, efetivo ou global e é calculado para um VER com n fases através da equação:

$$\underline{\underline{S}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{B}} \rangle = \sum_{r=1}^n f^r \underline{\underline{s}}^r : \langle \underline{\underline{B}} \rangle_r \quad (3.16)$$

sendo $\underline{\underline{s}}^r$ o tensor de flexibilidade da fase r e $\langle \underline{\underline{B}} \rangle_r$ a média volumétrica sobre o domínio ocupado pela fase r .

Os tensores $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ e $\underline{\underline{S}}^{\text{hom}}$ são inversos um do outro se eles correspondem à mesma escolha das condições de contorno no problema de concentração. Entretanto, se diferentes condições de contorno são utilizadas, tem-se de acordo com Hill (1967) e Mandel (1972), o seguinte resultado:

$$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{S}}^{\text{hom}} = \underline{\underline{1}} + O\left((d/l)^2\right) \quad (3.17)$$

onde $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ é determinado empregando-se condições de deformação homogênea no contorno, enquanto $\underline{\underline{S}}^{\text{hom}}$ é determinado empregando-se condições de tensão homogênea. d é a dimensão característica da heterogeneidade e l do VER.

Segundo Hill e Mandel as duas abordagens (tensão e deformação homogêneas) se equivalem quando é verificada a separação entre as escalas $d \ll l$, descrita anteriormente.

Levando em conta que $\langle \underline{A} \rangle = \underline{1}$ e $\langle \underline{B} \rangle = \underline{1}$ e as Equações 3.11 e 3.16, verifica-se que somente os tensores \underline{A} e \underline{B} de $n-1$ fases são necessários para a determinação das propriedades elásticas globais $\underline{C}^{\text{hom}}$ e $\underline{S}^{\text{hom}}$:

$$\sum_{r=1}^n f^r \langle \underline{A} \rangle_r = 1 \text{ e } \sum_{r=1}^n f^r \langle \underline{B} \rangle_r = 1 \quad (3.18)$$

Portanto, das Equações 3.11 e 3.16, com $r=1=m$, obtém-se respectivamente

$$\underline{C}^{\text{hom}} = \underline{c}^m + \sum_{i=1}^{n-1} f^i (\underline{c}^i - \underline{c}^m) : \langle \underline{A} \rangle_i \quad (3.19)$$

$$\underline{S}^{\text{hom}} = \underline{s}^m + \sum_{i=1}^{n-1} f^i (\underline{s}^i - \underline{s}^m) : \langle \underline{B} \rangle_i \quad (3.20)$$

com \underline{c}^m e \underline{s}^m os tensores de elasticidade e de flexibilidade da matriz.

Os parágrafos anteriores descrevem a resolução teórica do problema de concentração. Do ponto de vista prático, entretanto, em várias situações há dificuldades em resolver este problema. Há dificuldades, por exemplo, em descrever completamente a microestrutura, dispondo-se apenas de informações parciais sobre a sua morfologia. Há casos ainda que mesmo dispondo (inclusive por hipótese) a descrição completa da microestrutura, é difícil resolver exatamente ou seja de maneira analítica o problema da concentração. Em outras palavras, para uma dada descrição do VER, o problema de localização pode não ser resolvido de forma usual (Zaoui, 2002). É possível então seguir por dois caminhos. Um deles constitui em efetuar suposições adicionais a fim de obter algumas estimativas para o comportamento global. Estas estimativas são ou não apropriadas em função das suas hipóteses fundamentais e da adequação destas ao material a ser estudado.

O outro caminho busca limites para as propriedades mecânicas globais. Estes limites são obtidos considerando-se todos os meios homogêneos equivalentes consistentes com as limitadas informações disponíveis sobre a distribuição das fases e através do cálculo das propriedades extremas que podem ser obtidas desta maneira. Isto pode ser realizado utilizando abordagens variacionais, as quais levam em conta campos de tensão e deformações

admissíveis, ou seja, campos de tensão que satisfazem condições de equilíbrio e campos de deformação que satisfazem condições de compatibilidade.

3.2.1 Estimativas

Conforme as Equações 3.11 e 3.16, as propriedades elásticas efetivas $\underline{C}^{\text{hom}}$ e $\underline{D}^{\text{hom}}$ são função das propriedades elásticas e frações volumétricas dos constituintes e dos tensores de localização das deformações e das tensões \underline{A} e \underline{B} , respectivamente. No caso de microestruturas reais, no entanto, a determinação de uma forma fechada dos tensores de concentração pode não ser possível (Gross e Seelig, 2006). Assim, aproximações adequadas são feitas em relação à consideração da microestrutura, bem como na representação dos tensores de concentração. Na sequência são discutidos alguns métodos, modelos e aproximações adotados no estudo de propriedades elásticas efetivas de materiais heterogêneos.

3.2.1.1 Estimativas de Voigt e Reuss

Em materiais homogêneos, condições de contorno em deformação ou tensão constantes induzem a campos de tensão e deformação homogêneos, ou seja, espacialmente constantes. No caso de um material heterogêneo, a mais simples aproximação a ser adotada é admitir um dos campos constantes, de acordo com as condições de contorno.

Se, de acordo com Voigt (1889), as deformações no interior de V são consideradas constantes ($\underline{\underline{\epsilon}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \text{const}$), a partir da Equação 3.9, verifica-se que $\underline{A} = \underline{1}$. Assim o tensor de elasticidade efetivo é aproximado pela média dos tensores de elasticidade dos constituintes do material heterogêneo

$$\underline{C}_{\text{Voigt}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{C}} \rangle = \sum_{r=1}^n f^r \underline{C}^r \quad (3.21)$$

Analogamente, na aproximação devida a Reuss (1929), um campo de tensão constante é admitido ($\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \text{const}$), o qual corresponde a $\underline{B} = \underline{1}$ na Equação 3.14. Desta forma, o

tensor de flexibilidade efetivo é aproximado pela média dos tensores de flexibilidade dos constituintes do material heterogêneo:

$$S_{Reuss}^{\text{hom}} = \langle s \rangle = \sum_{r=1}^n f^r s^r \quad (3.22)$$

Estes modelos não consideram a disposição geométrica das fases, aproximando o comportamento macroscópico de forma isotrópica. Não são, portanto, apropriados para materiais que apresentam anisotropia. No caso especial de um material heterogêneo isótropo formado por materiais isótropos as aproximações acima conduzem aos módulos de compressão K e de cisalhamento G :

$$K_{Voigt}^{\text{hom}} = \langle k \rangle = \sum_{r=1}^n f^r k^r \quad \text{e} \quad G_{Voigt}^{\text{hom}} = \langle g \rangle = \sum_{r=1}^n f^r g^r, \quad (3.23)$$

$$K_{Reuss}^{\text{hom}^{-1}} = \langle 1/k \rangle = \sum_{r=1}^n f^r / k^r \quad \text{e} \quad G_{Reuss}^{\text{hom}^{-1}} = \langle 1/g \rangle = \sum_{r=1}^n f^r / g^r \quad (3.24)$$

sendo k^r e g^r , respectivamente, os módulos de compressão e de cisalhamento da fase r . É importante lembrar que estas constantes elásticas (módulo de compressão e módulo de cisalhamento) estão relacionadas ao módulo de Young E e ao coeficiente de Poisson ν através das equações:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.25)$$

As aproximações das propriedades efetivas elásticas através das médias das rigidezes e flexibilidades são muitas vezes referidas como regra das misturas. Elas são exatas apenas em casos especiais de diferentes materiais dispostos “em paralelo” (Voigt) ou “em série” (Reuss). Em geral, a suposição de deformações constantes leva à violação do equilíbrio local (por exemplo, na fronteira entre as fases) e a suposição de tensão constante opõe a compatibilidade de deformação. Apesar destas deficiências, a simples aproximação por Voigt e Reuss leva a vantagem de se produzir limites para as constantes elásticas efetivas de um material heterogêneo. Mais adiante será mostrado que $K_{Reuss}^{\text{hom}} \leq K^{\text{hom}} \leq K_{Voigt}^{\text{hom}}$ e $G_{Reuss}^{\text{hom}} \leq G^{\text{hom}} \leq G_{Voigt}^{\text{hom}}$.

Uma vez que as estimativas de Voigt e Reuss apresentam valores bastante distintos, uma abordagem pragmática para melhorar a estimativa das constantes efetivas é adotar os seus valores médios (Gross e Seelig, 2006).

$$K^{\text{hom}} \approx \frac{1}{2} \left(K_{\text{Reuss}}^{\text{hom}} + K_{\text{Voigt}}^{\text{hom}} \right) \quad \text{e} \quad G^{\text{hom}} \approx \frac{1}{2} \left(G_{\text{Reuss}}^{\text{hom}} + G_{\text{Voigt}}^{\text{hom}} \right) \quad (3.26)$$

3.2.1.2 Estimativas tipo Eshelby

Esta seção é dedicada à apresentação dos esquemas de estimativa baseados no resultado obtido por Eshelby relativo a um meio infinito com uma inclusão elipsoidal. Para cada esquema descrito, a expressão do tensor de concentração de deformações e do $\underline{C}^{\text{hom}}$ é detalhada. Nos modelos descritos a seguir, considera-se um material heterogêneo de duas fases constituído por uma matriz e inclusões (Figura 3.5(a)). O primeiro passo consiste em escolher um VER para o material (Figura 3.5(b)). Então, associa-se a este VER um VER auxiliar (Figura 3.5(c)) bem como um problema de localização auxiliar a ser resolvido e correspondente às hipóteses formuladas pelo esquema de homogeneização empregado. Finalmente, a correspondência mecânica entre VER auxiliar e o meio homogêneo equivalente (Figura 3.5(d)) é estabelecido fazendo uso do resultado de Eshelby.

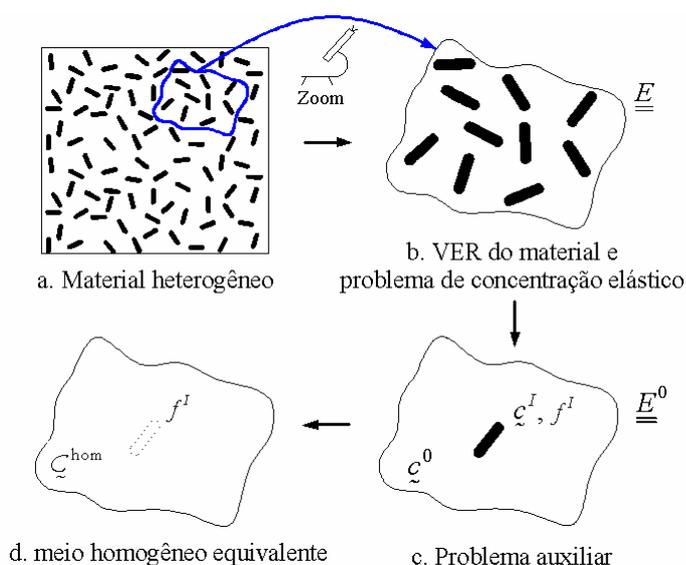


Figura 3.5 – Processo de homogeneização para esquemas de estimativa baseados no resultado de Eshelby.

3.2.1.2.1 Resultado de Eshelby

Provavelmente a solução analítica mais importante da micromecânica foi encontrada por Eshelby (1957). Ela é válida para um domínio infinito Ω , o qual contém uma inclusão elipsoidal I com eixos principais a_i (Figura 3.6):

$$\left(x'_1/a_1\right)^2 + \left(x'_2/a_2\right)^2 + \left(x'_3/a_3\right)^2 \leq 1 \quad (3.27)$$

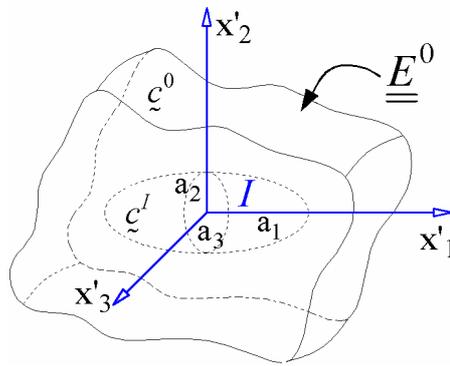


Figura 3.6 – Domínio infinito com inclusão elipsoidal.

Eshelby mostrou que quando este meio é sujeito à deformação constante $\underline{\underline{E}}^0$ no seu contorno, a deformação da inclusão também é constante e definida através da equação

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_I = \underline{\underline{A}}_E(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}^0 = const \quad \forall \underline{x} \in I \quad (3.28)$$

O tensor de quarta ordem $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$, que descreve a relação entre a deformação no interior da inclusão e o carregamento externo $\underline{\underline{E}}^0$, é o conhecido tensor de localização de deformações, neste caso, tensor de localização de deformações de Eshelby $\underline{\underline{A}}_E(\underline{x})$, definido pela equação:

$$\underline{\underline{A}}_E(\underline{x}) = \langle \underline{\underline{A}}_E \rangle_I = \left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{P}}^{0,I} : (\underline{\underline{c}}^I - \underline{\underline{c}}^0) \right]^{-1} \quad \forall \underline{x} \in I \quad (3.29)$$

$\underline{\underline{1}}$ é o tensor identidade de quarta ordem, $\underline{\underline{c}}^I$ e $\underline{\underline{c}}^0$, são as propriedades elásticas da inclusão e do domínio infinito adjacente, respectivamente. $\underline{\underline{P}}^{0,I}$ é o tensor de Hill, relacionado ao tensor de Eshelby por $\underline{\underline{S}}^{0,I} = \underline{\underline{P}}^{0,I} : \underline{\underline{c}}^0$. Expressões do tensor Eshelby derivadas para configurações

específicas podem ser encontradas, por exemplo, em Faivre (1971), Laws (1977), Mura (1987) ou Suvorov e Dvorak (2002). Esse tensor é função apenas da forma e orientação das inclusões (fibra) e as propriedades elásticas do meio em que ela está inserida.

No Anexo A podem ser observados os componentes do tensor de Eshelby necessários para o cálculo do tensor de concentração de deformações e das propriedades efetivas elásticas.

3.2.1.2.2 *Estimativa Diluída*

Utilizando as soluções encontradas por Eshelby, apresentadas no item anterior e no Anexo A, é possível desenvolver modelos micromecânicos que satisfaçam o equilíbrio local e garantam compatibilidade de deformações. Ao fazê-lo, considera-se um material de duas fases o qual consiste de uma matriz homogênea com elasticidade $\underline{\underline{c}}^m = const$ e inclusões as quais são aproximadas por heterogeneidades elipsoidais com elasticidade constante $\underline{\underline{c}}^i$.

A situação mais simples ocorre quando as heterogeneidades estão distribuídas na matriz homogênea de forma que a sua própria interação e com a fronteira do VER pode ser desprezada ("distribuição diluída"). Conforme ilustrado na Figura 3.7, cada heterogeneidade então pode ser considerada localizada em um domínio infinito e sujeito a um campo uniforme de deformação $\underline{\underline{E}}^0 = \underline{\underline{E}}$. A dimensão característica das heterogeneidades tem de ser pequena em relação a sua distância ou à distância da fronteira do VER, onde o carregamento é aplicado, sendo possível, desta forma, considerar a inexistência de interação. Embora as soluções obtidas sob estas idealizações sejam válidas para pequenas frações volumétricas

($\sum_{i=1}^{n-1} f^i \ll 1$, ou seja, $f^m \approx 1$), elas formam base para importantes generalizações.

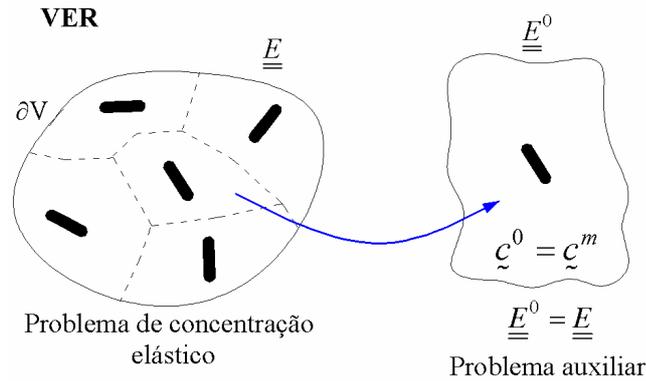


Figura 3.7 – Esquema de Estimativa Diluída.

Para heterogeneidades elipsoidais, a deformação no seu interior é constante e dada pelo tensor de concentração de Eshelby, introduzido na seção anterior. De acordo com as Equações 3.19 e 3.29, portanto, o tensor de elasticidade efetivo de um material, que contém uma distribuição diluída de heterogeneidades elipsoidais, é obtido através da equação:

$$\underline{C}_d^{\text{hom}} = \underline{c}^m + \sum_{i=1}^{n-1} f^i (\underline{c}^i - \underline{c}^m) : \left[\underline{1} + \underline{P}^{m,i} : (\underline{c}^i - \underline{c}^m) \right]^{-1} \quad (3.30)$$

onde $f \ll 1$ é a fração volumétrica de heterogeneidades e d refere-se à Estimativa Diluída. É importante ressaltar que este resultado é válido somente para o caso onde são prescritas no contorno do VER deformações macroscópicas, uma vez que está se utilizando os resultados de Eshelby.

Ao contrário das estimativas de Voigt e Reuss, o comportamento global obtido através da estimativa diluída pode, mesmo no caso de um material formado por fases isotrópicas, apresentar comportamento anisotrópico devido a, por exemplo, uma orientação preferencial das inclusões. Esta situação é considerada através do tensor de Eshelby. Apenas no caso de heterogeneidades esféricas isotrópicas inseridas em uma matriz isotrópica é que o comportamento global se apresenta de forma isotrópica.

3.2.1.2.3 Estimativa de Mori-Tanaka

A estimativa diluída é equivalente à hipótese de que, a uma distância suficiente de cada inclusão, o carregamento externo constante em deformação \underline{E} prevalece. Este pressuposto é o

ponto de partida para um refinamento do modelo que visa levar em conta a interação e, conseqüentemente, uma fração volumétrica importante de heterogeneidades. No modelo de Mori-Tanaka (1973), o campo de deformação na matriz é, a uma distância suficiente da heterogeneidade, aproximado pelo campo constante $\underline{\underline{E}}^0 = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_m$ (Figura 3.8). O carregamento de cada heterogeneidade, então, depende da existência das demais heterogeneidades através da média da deformação da matriz $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_m$.

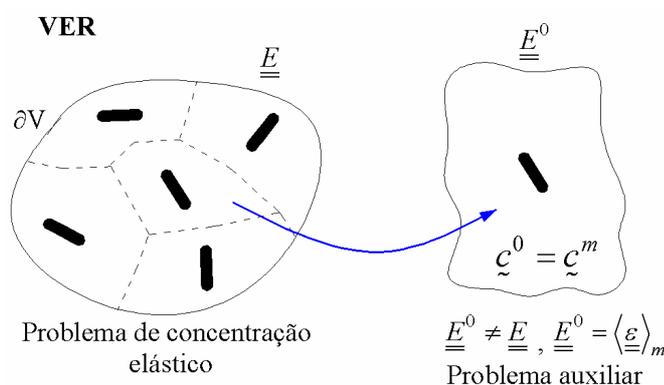


Figura 3.8 – Esquema de Estimativa de Mori-Tanaka.

Em vista da consideração idealizada de uma única heterogeneidade em um meio infinito de elasticidade $\underline{\underline{c}}^m$ e sujeita a alguma carga efetiva $\underline{\underline{E}}^0$, o esquema de Mori-Tanaka formalmente equivale à estimativa diluída (comparar Figura 3.7 e 3.8) e permite a aplicação do já conhecido tensor de concentração para representar a média da deformação na heterogeneidade.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^i = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_i = \left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{L}}^{m,i} : (\underline{\underline{c}}^i - \underline{\underline{c}}^m) \right]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 \quad (3.31)$$

A fim de determinar as propriedades efetivas do material, considera-se a média das deformações no VER igual à deformação macroscópica $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}$. Através destas considerações a deformação aplicada no VER e aquela aplicada no problema auxiliar apresentam-se relacionadas através da equação:

$$\underline{\underline{E}}^0 = \left\langle \left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{P}}^m : (\underline{\underline{c}} - \underline{\underline{c}}^m) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (3.32)$$

e as constantes elásticas efetivas são calculadas através da equação

$$\underline{\underline{C}}_{mt}^{\text{hom}} = \underline{\underline{c}}^m + \sum_{i=1}^{n-1} f^i (\underline{\underline{c}}^i - \underline{\underline{c}}^m) : \left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{P}}^{m,i} : (\underline{\underline{c}}^i - \underline{\underline{c}}^m) \right]^{-1} : \left\langle \left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{P}}^m : (\underline{\underline{c}} - \underline{\underline{c}}^m) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (3.33)$$

Por meio da Equação 3.19, conclui-se, então, que $\left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{P}}^{m,i} : (\underline{\underline{c}}^i - \underline{\underline{c}}^m) \right]^{-1} : \left\langle \left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{P}}^m : (\underline{\underline{c}} - \underline{\underline{c}}^m) \right]^{-1} \right\rangle^{-1}$ é o tensor de concentração de deformações de Mori-Tanaka.

Uma anisotropia macroscópica que pode ser gerada pela disposição geométrica das heterogeneidades pode, assim como no caso da estimativa diluída, ser descrita por este modelo.

A estimativa de Mori-Tanaka é, sem dúvida, o esquema de homogeneização mais utilizado para materiais heterogêneos compostos por uma matriz com inclusões inseridas no seu interior. É utilizado principalmente para casos com fração volumétrica de inclusões moderada. Ao contrário de estimativa diluída, o esquema de Mori-Tanaka leva em conta a interação entre as inclusões.

3.2.1.2.4 Estimativa Auto-Consistente

Os métodos analíticos para a estimativa das propriedades efetivas dos materiais são normalmente baseados na análise de uma única inclusão em um domínio infinito, devido à disponibilidade limitada de soluções com forma fechada. A interação entre as inclusões foi considerada, na seção anterior, por uma adequada aproximação do carregamento das inclusões individuais; uma distância suficiente entre estas inclusões de uma matriz homogênea, por isso, foi exigida. Esta hipótese, porém, pode nem sempre ocorrer. Por exemplo, em um policristal, as heterogeneidades predominam na forma de cristais que estão em contato direto uns com os outros sem qualquer matriz distinta. Com foco nesta situação em particular, o método auto-consistente foi desenvolvido. Ele é baseado na aproximação do material que envolve cada

inclusão por uma matriz infinita com propriedades elásticas dadas por propriedades efetivas desconhecidas e a serem determinadas (Figura 3.9).

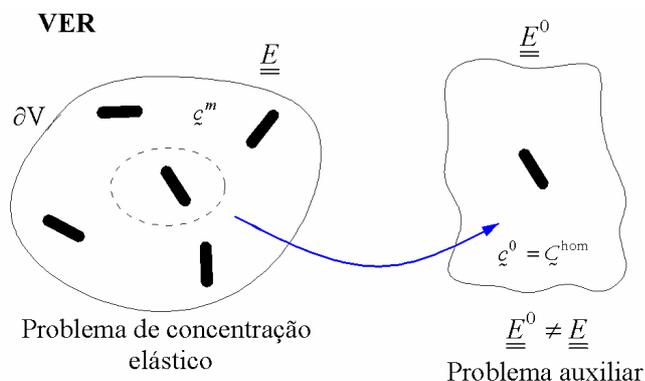


Figura 3.9 – Esquema de Estimativa de Auto-Consistente.

A solução do respectivo problema de contorno (única inclusão submetida a algum carregamento \underline{E}^0) é formalmente obtida a partir da substituição na equação do tensor de concentração das propriedades elásticas do domínio infinito $\underline{\zeta}^0$, pelas propriedades efetivas a serem calculadas $\underline{\zeta}^{\text{hom}}$. Assim o método auto-consistente retorna uma representação implícita do tensor de elasticidade efetiva na forma da equação algébrica não-linear:

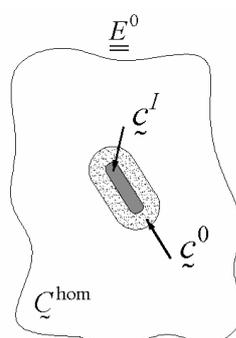
$$\underline{\zeta}_{ac}^{\text{hom}} = \sum_{i=1}^n f^i \underline{\zeta}^i : \left[\underline{1} + \underline{P}^{ac,i} : \left(\underline{\zeta}^i - \underline{\zeta}_{ac}^{\text{hom}} \right) \right]^{-1} : \left\langle \left[\underline{1} + \underline{P}^{ac,i} : \left(\underline{\zeta} - \underline{\zeta}_{ac}^{\text{hom}} \right) \right]^{-1} \right\rangle \quad (3.34)$$

A partir desta representação é evidente que no método auto-consistente nenhuma das fases envolvidas desempenha o papel de matriz, o que coincide com a situação de materiais policristalinos e com gradação funcional. Desta forma, a interação entre as inclusões é considerada de forma implícita.

Uma desvantagem do método auto-consistente reside na mistura dos níveis macroscópico e microscópico, os quais deveriam ser rigorosamente separados. Uma única inclusão, “visível” apenas na escala micro, é inserida em um meio efetivo definido apenas no nível macroscópico. A fim de reduzir essa incoerência o chamado método auto-consistente generalizado considera a inclusão e um meio efetivo infinitamente grande separados por uma camada de matriz.

3.2.1.2.5 Estimativa Auto-Consistente Generalizada ou Dupla Inclusão

O esquema auto-consistente generalizado (ACG), originalmente proposto por Nemat-Nasser e Hori (1999), fornece um método de homogeneização mais elaborado em relação aos demais esquemas, os quais utilizam uma simples inclusão. Para o caso de um compósito com duas fases, considera-se a configuração geométrica de uma inclusão envolvida por uma camada de matriz, que é inserida em um meio de referência infinito (Figura 3.10).



Problema auxiliar

Figura 3.10 – Esquema de Estimativa de Auto-Consistente Generalizado.

A configuração deste esquema representa de forma adequada as várias interações no material. Na verdade, leva em conta a interação entre a inclusão e a matriz, bem como a interação das inclusões entre si. Além disso, o esquema ACG proporciona uma grande flexibilidade, reduzindo-se a outras estimativas (esquema de Mori-Tanaka, Auto-Consistente) dependendo da escolha das propriedades mecânicas do meio de referência. Destacam-se como aplicações do esquema ACG: modelagem de compósitos com inclusões revestidas ou ainda a modelagem da zona de transição entre fibra e matriz.

3.2.1.2.6 Esquema Diferencial

Ao contrário do esquema auto-consistente, em que toda a fração volumétrica de cada fase é inserida na matriz efetiva em uma única etapa, o esquema diferencial é baseado em uma sucessão desta inserção através de etapas infinitesimais. Esta consideração pode ser associada à produção real de materiais heterogêneos através da incorporação gradual de uma fase

(heterogeneidade) em um material originalmente homogêneo (matriz). Em cada etapa apenas um volume infinitesimal dV da fase de reforço, com tensor de elasticidade \underline{c}^i , é inserida na matriz homogênea infinitamente grande. Em uma etapa arbitrária, a matriz é caracterizada pelas propriedades efetivas $\underline{C}^{\text{hom}}(f^i)$, que correspondem à fração volumétrica inserida $f^i = \frac{V^i}{V}$. Este procedimento é ilustrado na Figura 3.11 para uma heterogeneidade elipsoidal.

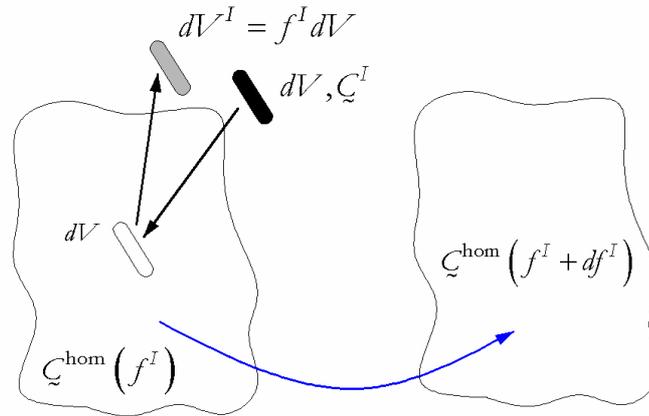


Figura 3.11 – Esquema de Estimativa Diferencial.

Pela conservação do volume total V , um volume infinitesimal dV da fase de reforço é incorporado enquanto que o mesmo volume de material de matriz efetiva tem de ser removido. Assim a fração volumétrica de heterogeneidade muda para $f^i + df^i$ e o seu equilíbrio de volume, durante esta etapa, pode ser escrito como

$$(f^i + df^i)V = f^iV - f^i dV + dV \rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{df^i}{1 - f^i} \quad (3.35)$$

Uma vez que apenas um volume infinitesimal dV (fração volumétrica dV/V) é inserido, a relação do modelo diluído é considerada e, aplicado à situação corrente, lê-se

$$\underline{C}^{\text{hom}}(f^i + df^i) = \underline{C}^{\text{hom}}(f^i) + \frac{dV}{V}(\underline{c}^i - \underline{C}^{\text{hom}}(f^i)) : \underline{A}(\underline{C}^{\text{hom}}(f^i)) \quad (3.36)$$

Neste caso, o tensor de concentração depende do material da matriz efetiva.

Utilizando a relação $\underline{C}^{\text{hom}}(f^i + df^i) = \underline{C}^{\text{hom}}(f^i) + d\underline{C}^{\text{hom}}(f^i)$ e a Equação 3.35, obtém-se para o esquema diferencial a expressão:

$$d\underline{C}^{\text{hom}}(f^i) = \frac{df^i}{1-f^i} (\underline{\zeta}^i - \underline{C}^{\text{hom}}(f^i)) : \underline{A}(\underline{C}^{\text{hom}}(f^i)) \quad (3.37)$$

O esquema diferencial, conseqüentemente, leva a uma equação diferencial ordinária não linear para o tensor de elasticidade efetivo como função da fração volumétrica f^i da fase inserida. O material original aparece somente na condição inicial $\underline{C}^{\text{hom}}(f^i = 0) = \underline{\zeta}^m$.

3.2.2 Limites

Nas seções anteriores as propriedades elásticas efetivas de um material heterogêneo foram determinadas através da resolução de um problema de contorno para um VER. Várias hipóteses simplificadoras, para tanto, necessitaram ser efetuadas. Por exemplo, o tamanho tomado para o VER foi infinitamente grande e o efeito das heterogeneidades foi descrito utilizando a solução fundamental para uma única inclusão. Distintas suposições nos modelos micromecânicos levam a diferentes soluções aproximadas para as propriedades efetivas que podem divergir fortemente umas das outras e, em alguns casos, até mesmo exibir um comportamento qualitativamente diferente (Gross e Seelig, 2006). Além disso, nenhuma informação é fornecida pelos modelos micromecânicos no que diz respeito à precisão dos seus resultados. Esta falta de precisão resulta também do fato de apenas uma quantidade bastante limitada de informação sobre a microestrutura (por exemplo, apenas a fração volumétrica de inclusões) ser considerada nos modelos micromecânicos simples. É desejável, portanto, determinar exatamente um intervalo dentro do qual as propriedades efetivas de um material heterogêneo estão definitivamente situadas. Esta determinação é realizada por meio de princípios de máximo em tensão e de mínimo em deslocamento da teoria da elasticidade, os quais permitem derivar rigorosos limites superiores e inferiores para as propriedades efetivas a partir de expressões de energia.

3.3.2.1 Limites de Voigt e Reuss

Princípios variacionais podem ser usados para limitar as propriedades mecânicas de um material heterogêneo. A ideia é definir um problema da mecânica do contínuo e, através de teoremas da energia potencial mínima, resolvê-lo. Considera-se, então, um material heterogêneo onde um campo de deformação uniforme $\underline{\underline{E}}$ é aplicado no seu contorno. O teorema da energia potencial mínima afirma que (Bornert *et al.*, 2001, apud Lévesque, 2004):

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) \rangle = \inf_{\underline{\underline{v}} \in \kappa(\underline{\underline{E}})} \langle w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}})) \rangle \leq \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}}) : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}}) \rangle \quad (3.38)$$

onde $\kappa(\underline{\underline{E}})$ representa o conjunto de campos de deslocamentos cineticamente admissíveis conduzindo a $\underline{\underline{E}}$ no contorno do material, $\underline{\underline{u}}$ é a solução de problema e $w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ é o potencial que descreve o comportamento de uma dada fase. Verifica-se que:

$$W(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} = \inf_{\underline{\underline{v}} \in \kappa(\underline{\underline{E}})} \langle w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}})) \rangle \quad (3.39)$$

onde W é o potencial homogeneizado e $\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}}$ é a lei de comportamento homogeneizado.

A Equação 3.38 indica que qualquer $\underline{\underline{v}} \in \kappa(\underline{\underline{E}}) \neq \underline{\underline{u}}$ leva a um limite superior para W . Visto que na prática a determinação analítica de $\underline{\underline{u}}$ é muito complexa, campos de deslocamento $\underline{\underline{v}}$ podem ser procurados por tentativa objetivando a determinação do valor mínimo de W . Um campo possível a ser escolhido é $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}}$, que indica um campo de deformação homogêneo no material. Tal limite é conhecido como limite de Voigt e constitui um limite superior:

$$W(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \leq \langle w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}})) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{E}} \right\rangle = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \langle \underline{\underline{c}} \rangle : \underline{\underline{E}} \quad (3.40)$$

Verifica-se também que (Bornert *et al.*, 2001, apud Lévesque, 2004):

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \left[\underline{\underline{C}}^{\text{hom}} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Sigma}} = \inf_{\underline{\underline{\tau}} \in S(\underline{\underline{\Sigma}})} \langle l(\underline{\underline{\tau}}) \rangle \quad (3.41)$$

onde $l(\underline{\underline{\tau}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\tau}}$ é a energia potencial associada a tensões e S é o conjunto de campos de tensão estaticamente admissíveis onde $\langle \underline{\underline{\tau}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}$. A solução de tal problema é $\underline{\underline{\sigma}}$ e algum campo $\underline{\underline{\tau}} \neq \underline{\underline{\sigma}}$ levará a energia potencial máxima. Um campo de tensão $\underline{\underline{\tau}}$ possível pode ser um campo constante e igual a $\underline{\underline{\Sigma}}$, o qual conduz a um limite inferior para $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$. Este limite é conhecido como limite de Reuss.

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \left[\underline{\underline{C}}^{\text{hom}} \right]^{-1} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \langle l(\underline{\underline{\tau}}) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\tau}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\Sigma}} \right\rangle = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \underline{\underline{s}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.42)$$

Assim, através das considerações anteriores é possível obter os limites para o tensor de propriedades efetivas $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$:

$$\underline{\underline{C}}_{\text{Reuss}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{s}} \rangle^{-1} \leq \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} \leq \langle \underline{\underline{c}} \rangle = \underline{\underline{C}}_{\text{Voigt}}^{\text{hom}} \quad (3.43)$$

As estimativas de Voigt e Reuss, introduzidas na Seção 3.3.1.1, são obtidas nesta seção através de princípios variacionais. Verifica-se, então, que estas se constituem limites superior e inferior para as propriedades elásticas efetivas de um material heterogêneo.

É necessário ressaltar que na Equação 3.43 apenas são empregadas as frações volumétricas e as propriedades mecânicas de cada fase. A forma, a distribuição, a morfologia das diferentes fases que compõe o material heterogêneo não são consideradas. Além disso, estes limites não são precisos, apresentando uma faixa larga entre os valores superior e inferior.

3.3.2.2 Limites de Hashin-Strikman

Os limites estabelecidos por Hashin e Strikman apresentam melhores resultados para os coeficientes que compõem a matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ do que os limites de Voigt e Reuss, fornecendo uma diferença menor entre o limite máximo e o limite mínimo.

Para a obtenção destes limites, ao invés dos campos de tensão e deformação empregados por Voigt e Reuss, são considerados adequados campos auxiliares os quais representam apenas uma variação de uma solução de referência. Dessa forma o erro cometido na aproximação possui um menor efeito sobre o resultado final (Gross e Seelig, 2006).

A formulação variacional empregada fornece a expressão da energia complementar que, quando é maximizada, dispõe o limite superior de Hashin-Strikman simbolizado por $\underline{C}^{(HS^+)}$ e, quando é minimizado, dispõe o limite inferior simbolizado por $\underline{C}^{(HS^-)}$. O desenvolvimento das equações para a obtenção dos limites e maiores detalhes podem ser encontrados na literatura (Hashin e Strikman, 1963; Gross e Seelig, 2006). Para um material heterogêneo de duas fases formado por uma matriz com elasticidade \underline{c}^m e inclusões \underline{c}^i , o limite inferior de Hashin-Strikman é representado através da expressão:

$$\underline{C}^{(HS^-)} = \underline{c}^m + f^i \left[\left(\underline{c}^i - \underline{c}^m \right)^{-1} + (1 - f^i) \underline{S}^m : \left[\underline{c}^m \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (3.44)$$

onde \underline{S}^m é o tensor de Eshelby, calculado através das propriedades mecânicas da matriz.

O limite superior $\underline{C}^{(HS^+)}$, por sua vez, é obtido através da troca de funções entre a matriz e as inclusões

$$\underline{C}^{(HS^+)} = \underline{c}^i + (1 - f^i) \left[\left(\underline{c}^m - \underline{c}^i \right)^{-1} + f^i \underline{S}^i : \left[\underline{c}^i \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (3.45)$$

onde \underline{S}^i é o tensor de Eshelby, calculado através das propriedades mecânicas da inclusão.

As propriedades elásticas efetivas são então submetidas às seguintes restrições

$$\underline{C}^{(HS^-)} \leq \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} \leq \underline{C}^{(HS^+)} \quad (3.46)$$

Adotando-se isotropia dos constituintes e do material homogeneizado, o que é obtido através de uma distribuição isótropa das heterogeneidades, têm-se as seguintes expressões para os limites das constantes elásticas módulo de compressão e de cisalhamento, respectivamente:

$$K^{(HS^-)} = k^m + f^i \left[\frac{1}{k^i - k^m} + \frac{3(1-f^i)}{3k^m + 4g^m} \right]^{-1} \quad (3.47)$$

$$K^{(HS^+)} = k^i + (1-f^i) \left[\frac{1}{k^m - k^i} + \frac{3f^i}{3k^i + 4g^i} \right]^{-1} \quad (3.48)$$

$$G^{(HS^-)} = g^m + f^i \left[\frac{1}{g^i - g^m} + \frac{6(1-f^i)(k^m + 2g^m)}{5g^m(3k^m + 4g^m)} \right] \quad (3.49)$$

$$G^{(HS^+)} = g^i + (1-f^i) \left[\frac{1}{g^m - g^i} + \frac{6f^i(k^i + 2g^i)}{5g^i(3k^i + 4g^i)} \right] \quad (3.50)$$

3.3 ORIENTAÇÃO E FORMA DAS INCLUSÕES

A orientação é uma das características estruturais dominantes nos compósitos. Eles geralmente têm suas propriedades melhoradas na direção em que a maior parte das inclusões está dirigida. No caso do concreto reforçado com fibras, as inclusões podem estar orientadas aleatoriamente na matriz, bem como assumir direções preferenciais, muitas vezes influenciadas pela geometria do elemento constituído pelo material. Neste estudo, as fibras são consideradas aleatoriamente dispostas e orientadas na matriz de concreto.

Neste item apresenta-se de que forma é considerada a orientação que as fibras podem assumir. É importante ressaltar que o CRFA, constituído de uma matriz isotrópica, possuirá propriedades elásticas isotrópicas em função da distribuição aleatória das fibras.

Considerando-se apenas uma inclusão elipsoidal, sua orientação pode ser representada através do vetor unitário \underline{p} direcionado ao longo do eixo de revolução da inclusão (x'_1), conforme Figura 3.12 (Advani e Tucker, 1987).

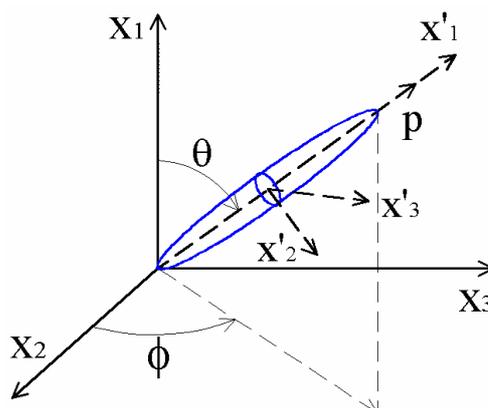


Figura 3.12 – Orientação da inclusão elipsoidal no espaço. Eixos locais x'_i e globais x_i .

Os componentes de \underline{p} são relacionados aos ângulos θ e ϕ

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos \theta \\ p_2 &= \text{sen} \theta \cos \phi \\ p_3 &= \text{sen} \theta \text{sen} \phi \end{aligned} \quad (3.51)$$

O conjunto de todas as orientações possíveis de \underline{p} corresponde à esfera unitária e é denotado por

$$\oint d\mathbf{p} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \text{sen} \theta d\theta d\phi \quad (3.52)$$

Uma maneira equivalente de descrever a orientação no espaço é a utilização da função distribuição de orientação $\psi(p)$. Essa função é definida como a fração volumétrica de fibras orientadas em uma dada direção e é representada pela equação.

$$\frac{dV}{V} = \psi(p) dp \quad (3.53)$$

ou também pode expressar a probabilidade de encontrar uma fibra entre os ângulos θ_1 e $\theta_1 + d\theta$, e ϕ_1 e $\phi_1 + d\phi$

$$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + d\theta, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 + d\phi) = \psi(\theta_1, \phi_1) \text{sen} \theta_1 d\theta d\phi \quad (3.54)$$

A função ψ deve satisfazer certas condições físicas (Advani e Tucker, 1987). A primeira delas é que uma inclusão com uma orientação (θ, ϕ) não se distingue de uma inclusão com uma orientação $(\pi - \theta, \phi + \pi)$, sendo ψ , portanto, periódica:

$$\psi(\theta, \phi) = \psi(\pi - \theta, \phi + \pi) \quad (3.55)$$

ou

$$\psi(p) = \psi(-p) \quad (3.56)$$

Além disso, ψ deve ser normalizada, uma vez que cada fibra tem uma orientação (Advani e Tucker, 1987).

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \psi(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \oint \psi(p) dp = 1 \quad (3.57)$$

Através destas definições e considerando todas as fibras com mesmo tamanho, a função distribuição de orientação ψ para uma matriz com fibras aleatoriamente distribuídas apresenta valor constante $\psi(\theta, \phi) = 1/4\pi$.

Para o cálculo das propriedades elásticas efetivas, além da definição da função distribuição de orientação, é necessário descrever a morfologia da inclusão. Conforme exposto anteriormente, a inclusão é representada através de um elipsóide, que em coordenadas locais é definido pela Equação 3.27, e é caracterizada através dos seus fatores de aspecto α_1 e α_2

$$\alpha_1 = a_1 / a_3 \text{ e } \alpha_2 = a_2 / a_3 \quad (3.58)$$

Sendo a_1 , a_2 e a_3 os comprimentos do elipsóide ao longo das direções locais x'_1 , x'_2 e x'_3 . Se $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, a inclusão é esférica. Se $\alpha_1 = \infty$ e $\alpha_2 = 1$, a inclusão é um elipsóide alongado na direção dos pólos (*prolate*) e representa a geometria da fibra.

As razões de aspecto são empregadas no cálculo dos componentes do tensor de Eshelby. No presente trabalho, α_2 é considerado constante e com valor igual a 1 e α_1 é representado por $\alpha = l_f / d_f$. As equações dos componentes do tensor de Eshelby, apresentadas no Anexo A, estão definidas em relação às coordenadas locais da inclusão. Para o cálculo das propriedades

efetivas elásticas é necessário, primeiramente, que estes componentes sejam escritos em coordenadas globais. Tal procedimento é realizado através de uma transformação de coordenadas apresentada no Anexo B.

3.4 PROPRIEDADES ELÁSTICAS EFETIVAS PARA O CRFA

3.4.1 Estimativa de Mori-Tanaka

As propriedades elásticas efetivas para o CRFA foram, neste estudo, obtidas através da Estimativa de Mori-Tanaka (1973). Este é o esquema que melhor se adequa ao material analisado uma vez que se identificam claramente duas fases: a matriz de concreto e as fibras, as quais se apresentam em moderada e baixa quantidade.

Nesta linha também estão os estudos de Ouair (2006) e Teng *et al.* (2004), onde também é utilizado o esquema de Mori-Tanaka para a determinação das propriedades efetivas do CRFA. Ouair em sua análise faz uma comparação entre os resultados das Estimativas Diluída, de Mori-Tanaka e Auto-Consistente aplicadas ao CRFA. Os esquemas apresentam resultados semelhantes para baixas adições de fibras ($f < 5\%$). À medida que maiores quantidades de fibras são empregadas, estes esquemas exibem resultados distintos.

Através das considerações das Seções 3.3.1.2.3 e 4 e a partir de Equação 3.33 calculam-se então as propriedades elásticas efetivas do CRFA. Conforme afirmado anteriormente, o CRFA, formado por uma matriz isotrópica com fibras aleatoriamente orientadas e distribuídas, apresenta propriedades globais isotrópicas, sendo o tensor $\mathcal{C}_{mt}^{\text{hom}}$ definido a partir de duas constantes elásticas. Desta forma, com a determinação dos coeficientes de $\mathcal{C}_{mt}^{\text{hom}}$ (Equação 3.33) é possível obter as constantes elásticas K^{hom} e G^{hom} , respectivamente, o módulo de compressão e de cisalhamento. É importante ressaltar que a homogeneidade assumida para a matriz de concreto resulta de um processo de homogeneização preliminar, a qual considera as microfissuras existentes.

Os módulos K^{hom} e G^{hom} são função das propriedades elásticas da matriz de concreto k^m e g^m , respectivamente, módulos de compressão e de cisalhamento, e das fibras k^f e g^f , da

fração volumétrica das fibras f e da razão de aspecto α . Para verificar a influência da razão de aspecto α e da fração volumétrica das fibras f nas propriedades elásticas homogeneizadas do CRF adota-se o aço como material para as fibras e $\alpha = 10, 40, 80, 100$, valores típicos para fibras de aço e $\alpha = \infty$, que representa fibras com diâmetro muito menor do que seu comprimento. As propriedades elásticas adotadas para os constituintes do CRFA são $k^m = 17222$ MPa e $g^m = 12917$ MPa, as quais correspondem às propriedades elásticas para uma matriz de concreto cujo módulo de Young é igual a 31000 MPa e cujo coeficiente de Poisson é igual a 0,2, e $k^f = 175000$ MPa e $g^f = 80769$ MPa, as quais correspondem às propriedades elásticas para fibras de aço cujo módulo de Young é igual a 210000 MPa e cujo coeficiente de Poisson é igual a 0,3 (Equação 3.25). As Figuras 3.13 e 3.14 mostram os resultados para K^{hom} e G^{hom} , respectivamente.

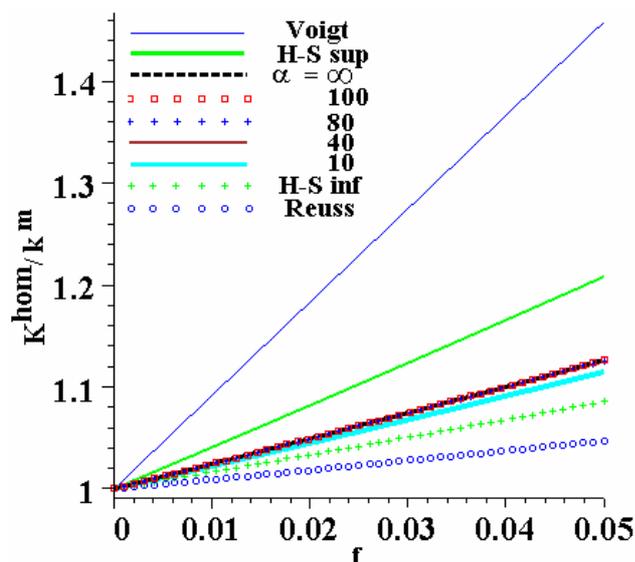


Figura 3.13 – Variação de K^{hom}/k^m em função da fração volumétrica de fibras e para diferentes valores de α .

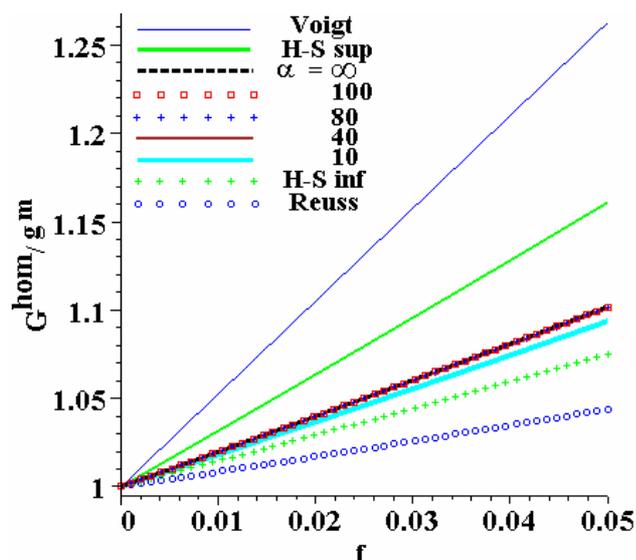


Figura 3.14 – Variação de G^{hom}/g^m em função da fração volumétrica de fibras e para diferentes valores de α .

Como se observa, valores típicos de razão de aspecto e de frações volumétricas têm pouca influência nas propriedades elásticas do concreto reforçado com fibras de aço. Estes resultados estão de acordo com os resultados de estudos disponíveis na literatura (Thomas e Ramaswamy, 2007; Ashour *et al.*; 2000; Atiş e Karahan, 2009).

Nas Figuras 3.13 e 3.14, além dos resultados do esquema de Mori-Tanaka são representados também os Limites de Voigt e Reuss e Hashin-Shtrikman para o concreto reforçado com fibras de aço. Conforme esperado, os limites de Hashin-Shtrikman são mais precisos de que os limites de Voigt e Reuss e ambos são respeitados pela Estimativa de Mori-Tanaka.

As expressões obtidas para K^{hom} e G^{hom} utilizando-se $\alpha = \infty$ foram

$$K^{\text{hom}} = -\frac{3k^m g^m f + k^m g^f f - 3k^f g^m f - k^f g^f f - 3k^m g^m - k^m g^f - 3k^m k^f}{3k^m f - 3k^f f + 3g^m + 3k^f + g^f} \quad (3.59)$$

$$G^{\text{hom}} = -\frac{\left((g^f)^3 n_0 + (g^f)^2 g^m n_1 + g^f (g^m)^2 n_2 + (g^m)^3 n_3 + (g^m)^4 n_4 + (g^m)^5 n_5 \right)}{(g^f)^2 d_0 + g^m g^f d_1 + (g^m)^2 d_2 + (g^m)^3 d_3 + (g^m)^4 d_4} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
n_0 &= -9fk^m k^f, \quad n_1 = -3(5g^f k^m + 7fg^f k^m + 7fg^f k^f + 15fk^f k^m + 15k^f k^m), \\
n_2 &= -\left(35(g^f)^2 + 37f(g^f)^2 + 45fg^f k^m + 105g^f k^f + 75g^f k^m + 51fg^f k^f - 9fk^f k^m + 90k^f k^m\right), \\
n_3 &= \left(-145(g^f)^2 - 39f(g^f)^2 - 120g^f k^f - 45k^f k^m - 105g^f k^m + 45fk^m k^f + 57fg^f k^f + 21fg^f k^m\right), \\
n_4 &= (-45k^m - 15k^f - 125g^f + 61fg^f + 15fk^f + 45fk^m) \text{ e } n_5 = 15(f - 1)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
d_0 &= -3k^m(-5g^f + 5fg^f + 12fk^f - 15k^f), \\
d_1 &= -\left(-35(g^f)^2 + 35f(g^f)^2 - 105g^f k^f + 84fg^f k^f + 39fg^f k^m - 75g^f k^m - 90k^f k^m\right), \\
d_2 &= \left(145(g^f)^2 + 36fk^f k^f + 36fk^m k^f + 15fg^f k^m - 73f(g^f)^2 + 45k^f k^m + 105g^f k^m + 120g^f k^f\right), \\
d_3 &= (45k^m + 125g^f + 15k^f + 48fk^f + 59fg^f + 39fk^m) \text{ e } d_4 = (15 + 49f)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Para os demais valores de α foi necessário empregar os valores numéricos de k^m , g^m , k^f e g^f , facilitando os cálculos de integrais e inversão de matrizes na determinação de K^{hom} e G^{hom} . Desta forma, foram obtidas expressões apenas em função de f , as quais estão representadas graficamente nas Figuras 3.13 e 3.14.

A verificação da influência da fração volumétrica e das propriedades mecânicas dos constituintes nas constantes elásticas do CRF foi realizada adotando-se diferentes materiais para as fibras: aço, aramida, carbono, polipropileno e vidro. As propriedades elásticas dos materiais considerados são detalhadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Características do concreto e diferentes tipos de fibras
(Kosmatka *et al.*, 2003).

Fibra	Coefficiente de Poisson ν	Módulo de Young E (MPa)	Módulo de Compressão k (MPa)	Módulo de Cisalhamento g (MPa)
Aço	0,30	210000	175000	80769
Aramida	0,35	62000	68889	22963
Carbono	0,20	380000	211111	158333
Polipropileno	0,30	4000	3333	1539
Vidro AR	0,22	80000	47619	32787
Concreto	0,20	31000	17222	12917

Nas Figuras 3.15 e 3.16 são apresentados de que forma o módulo de compressão e de cisalhamento variam com a fração volumétrica para distintas fibras adicionadas. Quando não são adicionadas fibras, ou seja, $f=0$, os valores destes módulos correspondem às propriedades da matriz de concreto ($K^{\text{hom}}/k^m = 1$ Figura 3.15 e $G^{\text{hom}}/g^m = 1$ Figura 3.16). Com o aumento da quantidade de fibras, K^{hom} e G^{hom} aumentam ou diminuem dependendo dos valores dos módulos de compressão e de cisalhamento do material das inclusões.

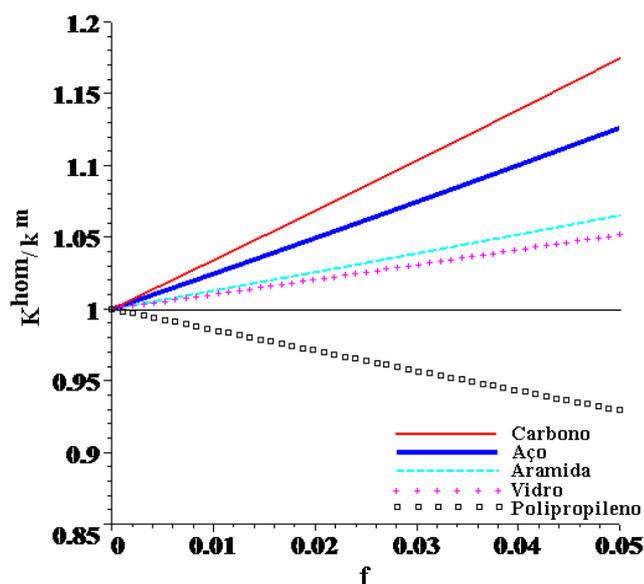


Figura 3.15 – Variação de K^{hom}/k^m em função da fração volumétrica de diferentes tipos de fibras.

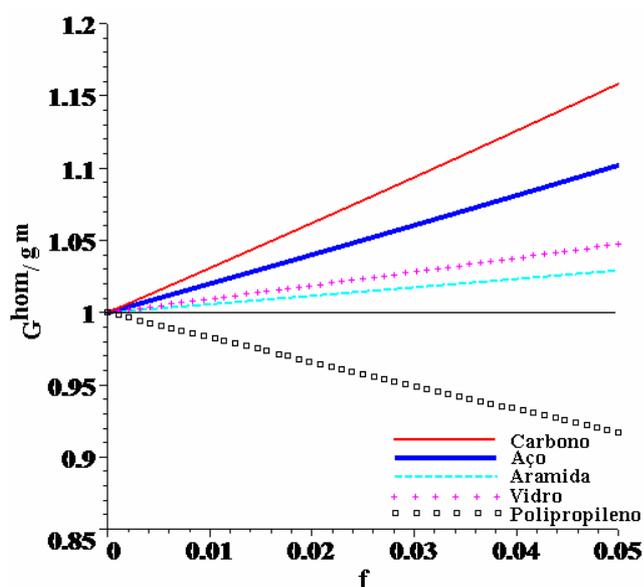


Figura 3.16 – Variação de G^{hom}/g^m em função da fração volumétrica de diferentes tipos de fibras.

3.4.2 Comparação com Resultados Experimentais

As estimativas micromecânicas das propriedades elásticas do CRF, utilizando os resultados do esquema de Mori-Tanaka, são comparadas, nesta seção, aos resultados experimentais disponíveis executados em concreto reforçado com fibras de aço. Os valores do módulo de Young e o coeficiente de Poisson dos componentes do compósito obtidos nos experimentos são listados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Propriedades das fibras de aço e concretos.

Constituintes	Módulo de Young E (MPa)	Coefficiente de Poisson ν
Thomas e Ramaswamy, 2007		
Fibra de Aço	210000	0,300
Concreto 35 MPa, C35	28700	0,182
Concreto 65 MPa, C65	37500	0,201
Concreto 85 MPa, C85	41700	0,210
Ashour <i>et al.</i> , 2000		
Fibra de Aço	210000	0,300
Concreto de Resistência Normal, CRN (49 MPa)	24612	0,200
Concreto de Resistência Média, CRM (79 MPa)	35443	0,200
Concreto de Alta Resistência, CAR (102 MPa)	38423	0,200
Williamson, 1974		
Fibra de Aço	200000	0,300
Concreto	20802	0,2081

Thomas e Ramaswamy (2007), em seus experimentos, empregaram fibras com razão de aspecto $\alpha = 55$ e fração volumétrica de $f = 0\%$, $0,5\%$, 1% e $1,5\%$. Nas Figuras 3.17 e 3.18 são comparados respectivamente os resultados de módulo de Young e coeficiente de Poisson obtidos utilizando o esquema de Mori-Tanaka e os dados experimentais de Thomas e Ramaswamy.

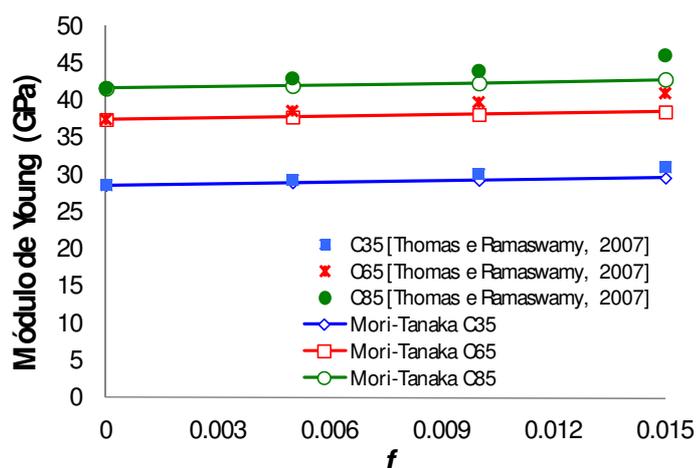


Figura 3.17 – Módulos de Young estimados através do esquema de Mori-Tanaka e experimentalmente medidos por Thomas e Ramaswamy (2007).

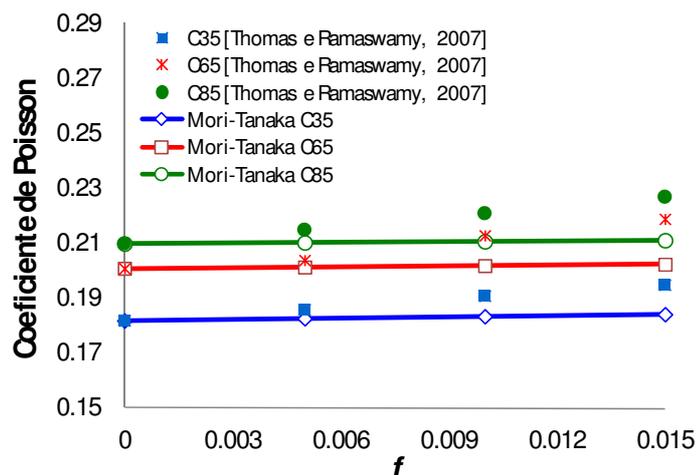


Figura 3.18 – Coeficientes de Poisson estimados através do esquema de Mori-Tanaka e experimentalmente medidos por Thomas e Ramaswamy (2007).

Ashour *et al.* (2000), em seus experimentos, empregaram fibras com razão de aspecto $\alpha = 75$ e fração volumétrica $f = 0\%$, $0,5\%$ e 1% , enquanto Williamson (1974) utilizou fibras com razão de aspecto $\alpha = 100$ e fração volumétrica $f = 0\%$, 1% , $1,5\%$ e $2,5\%$. Nas Figuras 3.19 e 3.20 comparam-se os resultados obtidos através do esquema de Mori-Tanaka e os resultados experimentais para o módulo de Young de Ashour *et al.* (2000) e Williamson (1974), respectivamente.

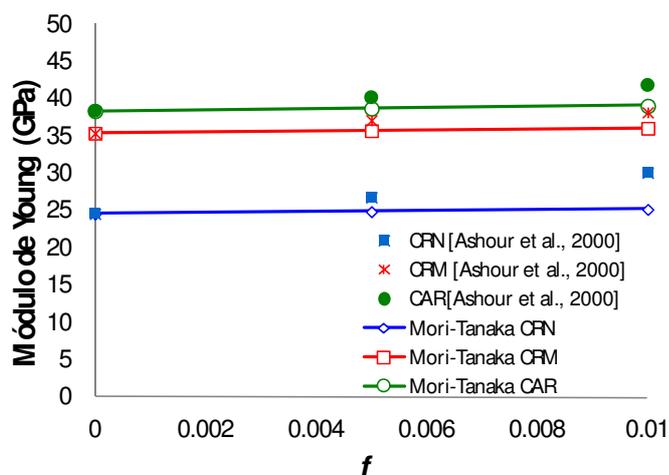


Figura 3.19 – Módulos de Young: valores estimados através do esquema de Mori-Tanaka e obtidos experimentalmente por Ashour *et al.* (2000).

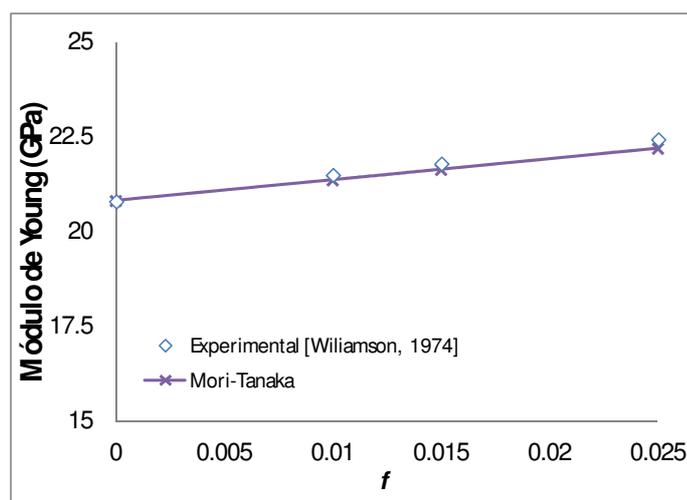


Figura 3.20 – Módulos de Young: valores estimados através do esquema de Mori-Tanaka e obtidos experimentalmente por Williamson (1974).

Como se observa nas figuras anteriores, as estimativas de Mori-Tanaka apresentam resultados ligeiramente inferiores aos valores medidos nos trabalhos experimentais citados (Thomas e Ramaswamy, 2007; Ashour *et al.*, 2000; Williamson, 1974). Uma boa concordância é obtida e a coerência com os dados experimentais pode ser considerada razoável. A discrepância observada entre as estimativas micromecânicas de E^{hom} e os resultados experimentais permanece inferior a 10%.

3.4.3 Abordagem Numérica via Método dos Elementos Finitos

Com o objetivo de avaliar a precisão da estimativa de Mori-Tanaka, o problema de concentração é, nesta seção, resolvido numericamente através de implementação via método dos elementos finitos.

Como mencionado anteriormente, para a resolução do problema de concentração é necessário definir o VER a ser empregado, as condições de contorno e a lei de comportamento dos materiais constituintes do compósito. Por simplicidade, um VER cúbico, de lado l , é considerado. Além disso, em função da isotropia macroscópica do CRFA, a condição da análise a um modo de carregamento definido por compressão uniaxial é suficiente para obter as propriedades elásticas efetivas. Assim, uma tensão macroscópica $\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma_l \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ com $\Sigma_l \geq 0$ é aplicada ao VER (Figura 3.21). É importante ressaltar que a condição de separação de escala garante a equivalência entre as condições de contorno no VER em tensão e em deformação homogêneas (Hill, 1967).

Devido às condições de simetria, apenas a oitava parte do VER, com condições de contorno apropriadas (Figura 3.21), é considerada na análise numérica. 8 elementos finitos hexaédricos quadráticos com 20 nós foram empregados para a discretização da geometria da matriz de concreto.

Com relação às fibras, estas foram geradas aleatoriamente inseridas nos elementos finitos de concreto, sendo admitida aderência perfeita entre a matriz de concreto e fibras. A formulação adotada, Modelo Incorporado (Elwi e Hrudey, 1989), permite que a localização e a geometria das fibras sejam independentes da malha de elementos finitos, ou seja, os nós não precisam estar coincidentes com os nós da malha onde a fibra se insere. As fibras, assim consideradas, funcionam como enrijecedores, aumentando a rigidez total do meio reforçado. O que, na aproximação numérica por elementos finitos, significa que a fibra estará contribuindo com a rigidez do elemento (ou dos elementos) no qual ela está inserida. A distribuição espacial e a orientação das fibras são geradas aleatoriamente por meio de um procedimento específico utilizando a função intrínseca RAN da linguagem de programação Fortran.

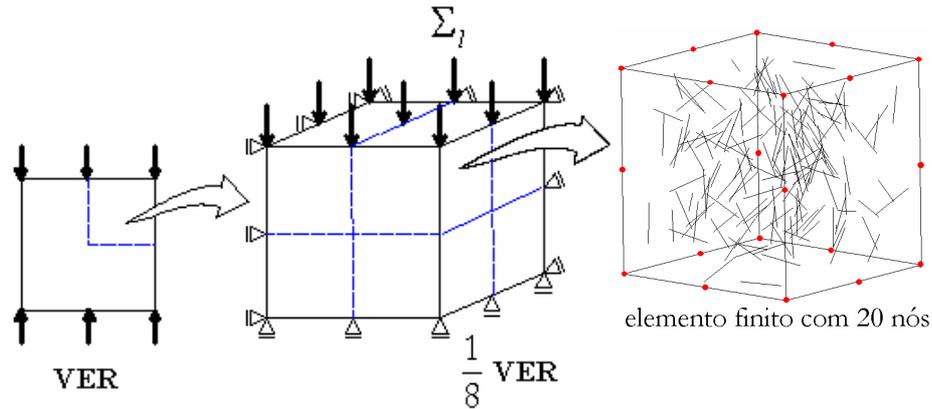


Figura 3.21 – VER sob compressão uniaxial considerado na simulação via método dos elementos finitos.

Uma vez obtida a solução dos deslocamentos, a deformação macroscópica é calculada por meio de integrais de superfície:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (\underline{u} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{u}) dS = \underline{\underline{E}} \quad (3.63)$$

sendo \underline{u} os deslocamentos, solução do problema de concentração via método dos elementos finitos, e \underline{n} o vetor normal à fronteira do VER. Espera-se que

$$\underline{\underline{E}} = -E_l \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + E_t (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad \text{com} \quad E_l, E_t \geq 0 \quad (3.64)$$

Os parâmetros elásticos homogeneizados são então obtidos por $E^{\text{hom}} = \Sigma_l / E_l$ e $\nu^{\text{hom}} = E_t / E_l$.

Com o objetivo de abordar qualitativamente o efeito de escala, dois valores para o tamanho do VER $l = 20 \text{ cm}$ e 40 cm , bem como, dois valores para o comprimento da fibra $d = 1 \text{ cm}$ e 3 cm , foram considerados no estudo numérico. Os valores adotados para a razão de aspecto e a fração volumétrica das fibras variaram entre 10–100 e 0.5%–5%, respectivamente.

Para cada uma das configurações definidas pelo conjunto $\{l, d, \alpha, f\}$, várias distribuições aleatórias de fibras foram avaliadas, e os valores médios de E^{hom} e ν^{hom} foram considerados como estimativas numéricas para os parâmetros elásticos homogeneizados. Os resultados

numéricos são apresentados nas Tabelas 3.3 e 3.4, onde as estimativas de Mori-Tanaka também são expostas. $E_{\text{médio}}^{\text{hom}}$ e $\nu_{\text{médio}}^{\text{hom}}$ representam, respectivamente, os valores médios do módulo de Young e do coeficiente de Poisson efetivos obtidos a partir das simulações via MEF; DP e CV são os correspondentes desvio padrão e coeficiente de variação.

Tabela 3.3 – Resultados numéricos e do esquema de Mori-Tanaka para o módulo de Young do CRFA.

fibra		d = 3 cm						d = 1 cm						Mori-Tanaka
VER		l = 20 cm				l = 40 cm		l = 20 cm				l = 40 cm		
α	f (%)	$E_{\text{médio}}^{\text{hom}}$ (MPa)	DP	CV (10^{-3})	dif* (%)	E (MPa)	dif* (%)	$E_{\text{médio}}^{\text{hom}}$ (MPa)	DP	CV (10^{-3})	dif* (%)	E (MPa)	dif* (%)	E (MPa)
10	0,5							31058	0,81	0,26	0,75	31066	0,73	31294
	1							31345	1,83	0,58	0,78	31326	0,84	31590
	3	32522	13,75	4,2	0,83	32523	0,83	32483	3,16	0,97	0,95			32795
	5	33631	14,80	4,4	1,18	33636	1,17	33664	2,68	0,80	1,08			34033
40	3	32454	4,84	1,5	1,47	32455	1,46							32937
	5	33539	5,46	1,6	2,14	33539	2,14							34271
80	3	32454	1,94	0,6	1,51									32952
	5	33543	1,98	0,6	2,20									34297
100	3	32474	1,85	0,6	1,46									32955
	5	33539	1,94	0,6	2,22									34300

dif* : diferença entre o módulo de Young numérico e o analítico empregando Mori-Tanaka.

Tabela 3.4 – Resultados numéricos e do esquema de Mori-Tanaka para o coeficiente de Poisson do CRFA.

fibra		d = 3 cm						d = 1 cm						Mori-Tanaka
VER		l = 20 cm				l = 40 cm		l = 20 cm				l = 40 cm		
α	f (%)	$\nu_{\text{médio}}^{\text{hom}}$	DP (10^{-3})	CV (10^{-3})	dif* (%)	ν	dif* (%)	$\nu_{\text{médio}}^{\text{hom}}$	DP (10^{-3})	CV (10^{-3})	dif* (%)	ν	dif* (%)	ν
10	0,5							0,203	0,9	0,4	1,5	0,204	2,0	0,200
	1							0,205	1,1	0,6	2,0	0,205	2,0	0,201
	3	0,209	1,2	5,9	2,96	0,209	2,96	0,209	1,3	0,6	3,0			0,203
	5	0,214	1,3	6,0	4,39	0,214	4,39	0,214	2,4	1,1	4,4			0,205
40	3	0,209	0,2	1,1	2,96	0,209	2,96							0,203
	5	0,213	0,4	1,7	3,90	0,213	3,90							0,205
80	3	0,209	0,2	0,9	2,96									0,203
	5	0,213	0,1	0,3	3,90									0,205
100	3	0,209	0,1	0,5	2,96									0,203
	5	0,213	0,2	1,0	3,90									0,205

dif* : diferença entre o coeficiente de Poisson numérico e o analítico empregando Mori-Tanaka

Observa-se claramente nos resultados das Tabelas acima, que as estimativas micromecânicas são muito próximas das soluções numéricas via MEF, evidenciando a consistência do

esquema Mori-Tanaka na estimativa das propriedades elásticas do CRFA. As maiores diferenças são encontradas para os coeficientes de Poisson, as quais permanecem inferiores a 4,5%. Além disso, embora a condição $d \ll l$, necessária para a separação de escala, ser grosseiramente satisfeita para os valores de d e l adotados, os resultados obtidos parecem ser pouco sensíveis ao valor da relação d/l , pelo menos para os dados considerados. Isto demonstra que o volume do CRFA testado nas simulações numéricas tem a posição de VER.

3.5 COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO SEM ENVELHECIMENTO DO CRFA

Esta seção é dedicada à investigação das propriedades viscoelásticas macroscópicas sem envelhecimento do CRFA. Basicamente, o estudo consiste em empregar o resultado da homogeneização em elasticidade no espaço transformado de Laplace (ou Carson-Laplace) e o princípio da correspondência elástica-viscoelástica (Salençon, 1993; Creus, 1986). O PCEV é baseado no fato de que soluções de problemas viscoelásticos, quando levados para outro domínio matemático transformado, são similares às soluções elásticas (Christensen, 2003). Formalmente, o problema de concentração a ser resolvido para materiais viscoelásticos sem envelhecimento é idêntico ao problema elástico definido em 3.9. As equações constitutivas macroscópicas são, portanto, obtidas através da transformada inversa de Laplace (ou Carson-Laplace).

A formulação que diferencia a análise elástica da viscoelástica está nas equações constitutivas do material. No caso de material elástico, a deformação $\underline{\underline{\epsilon}}(t)$ no tempo t é função apenas da tensão no mesmo tempo, diz-se que a resposta é instantânea. Os materiais viscoelásticos, entretanto, são caracterizados pela dependência na história total do processo de deformação. Tal fato conduz à representação do seu comportamento através de equações constitutivas hereditárias:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\zeta}}(\underline{x}) \circ \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{\zeta}}(\underline{x}, t - \tau) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{x}, \tau) d\tau \quad (3.65)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\zeta}}(\underline{x}) \circ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{\zeta}}(\underline{x}, t - \tau) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(\underline{x}, \tau) d\tau \quad (3.66)$$

onde $\underline{\underline{\zeta}}$ e $\underline{\underline{\zeta}}$ referem-se aos tensores de quarta ordem que incorporam as propriedades mecânicas do material e são denominados, respectivamente, função de relaxação e função de fluência. O argumento ' t ' considera a resposta instantânea do material viscoelástico, enquanto o argumento ' τ ' avalia toda a história de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ou de $\underline{\underline{\sigma}}$ (a dependência em τ caracteriza a resposta diferida). A indicação de dependência espacial, ou seja, a dependência em relação ao vetor posição \underline{x} será omitida na sequência.

É importante ressaltar que o operador ' \circ ' representa o produto de convolução de Riemann das funções tensoriais $t \rightarrow \underline{\underline{\zeta}}(t)$ e $t \rightarrow \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(t)$, $t \rightarrow \underline{\underline{\zeta}}(t)$ e $t \rightarrow \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t)$.

As integrais, apresentadas em 3.65 e 3.66 e também denominadas Integrais de Convolução, descrevem o comportamento multiaxial de materiais viscoelásticos lineares e podem ser obtidas através do Princípio da Superposição de Boltzmann (Betten, 2008).

3.5.1 Fluência e Relaxação

A combinação do comportamento mecânico de materiais elásticos e viscosos caracteriza a resposta de um material viscoelástico. A parcela viscosa é responsável pela energia dissipada, enquanto a parcela elástica armazena energia (Betten, 2008). Os materiais viscoelásticos exibem, portanto, propriedades intermediárias entre os materiais elásticos e os viscosos.

A forma de caracterizar o comportamento de um corpo viscoelástico é analisar a sua resposta quando sujeito a um carregamento constante. Ao ser solicitado mecanicamente o corpo exibe uma resposta elástica instantânea seguida de uma deformação evolutiva retardada que caracteriza o processo de fluência. Tal processo é caracterizado pela deformação continuada do material sob um estado de tensões constante. A Figura 3.22, obtida através de um teste de fluência, ilustra como o fenômeno ocorre.

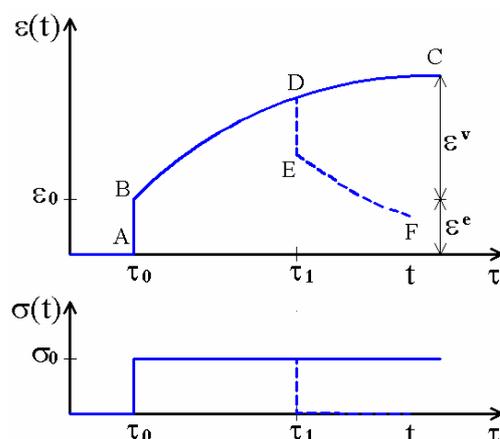


Figura 3.22 – Representação do fenômeno da fluência (adaptado de Creus, 1986).

No instante inicial de aplicação da carga τ_0 , observa-se a resposta elástica instantânea AB, seguida de uma deformação dependente do tempo BC, resultante da combinação dos efeitos elásticos e viscosos. Removendo-se o carregamento no tempo τ_1 , um processo inverso ocorre. Certo nível de recuperação instantânea DE é seguido por uma recuperação da deformação EF que se estende por um certo tempo. O efeito viscoso durante a aplicação do carregamento resulta em uma deformação residual quando ele é removido.

A deformação por fluência $\varepsilon(t)$ para o caso uniaxial pode ser representada pela equação

$$\varepsilon(t) = D(t, \tau_0) \sigma_0 \quad (3.67)$$

a qual resulta de 3.67 ao se aplicar a história de tensão $\sigma(t) = \sigma_0 H(t - \tau_0)$, representada na Figura 3.22 pela linha contínua, sendo $H(t - \tau_0)$ a função passo unitário.

O outro processo inerente aos materiais viscoelásticos é o de relaxação de tensões, o qual é governado por um “alívio” (relaxação) do estado de tensão no corpo sob uma deformação constante prescrita. A Figura 3.23 ilustra como o fenômeno ocorre.

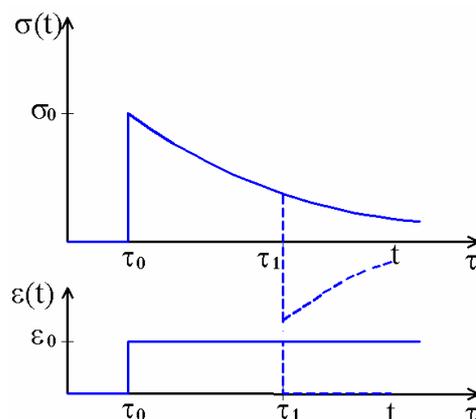


Figura 3.23 – Representação do fenômeno da relaxação (adaptado de Creus, 1986).

Novamente no instante inicial de aplicação da deformação τ_0 , observa-se uma resposta elástica instantânea, seguida de uma diminuição progressiva da tensão ao se manter a deformação constante. Removendo-se no instante τ_1 a deformação aplicada, observa-se uma recuperação instantânea de tensões. É importante observar que neste caso obteve-se uma inversão de sinal na tensão resultante, este fato é de suma importância para materiais como o concreto, que apresenta diferentes resistências em compressão e em tração (Creus, 1986).

A variação de tensão na relaxação $\sigma(t)$ para o caso uniaxial pode ser representada pela seguinte equação:

$$\sigma(t) = E(t, \tau_0) \varepsilon_0 \quad (3.68)$$

a qual resulta de 3.66 ao se aplicar a história de deformação $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - \tau_0)$, representada na Figura 3.23 pela linha contínua.

3.5.2 Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV)

Os problemas viscoelásticos por envolverem equações diferenciais e integrais de convolução, podem ser considerados, muitas vezes, de difícil solução e às vezes de solução impossível quando se trata da solução analítica. Existem, entretanto, ferramentas matemáticas que podem auxiliar na solução de tais problemas. Dentre as ferramentas matemáticas analíticas, usadas na

solução de problemas viscoelásticos, estão as transformadas de Laplace e de Fourier, sendo esta última mais aplicada a problemas que envolvam solicitações periódicas (Souza, 2005).

O Princípio de Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV) se baseiam no fato de que soluções para problemas viscoelásticos, quando levadas para outro domínio matemático transformado, se assemelham a soluções elásticas (Christensen, 2003). A formulação que diferencia a análise elástica da viscoelástica está nas equações constitutivas do material. Para uma grande classe de problemas, a solução de um problema viscoelástico linear pode ser obtida a partir da solução elástica linear, através da substituição da equação constitutiva elástica pela viscoelástica correspondente. Desta forma, soluções para muitos problemas de valor de contorno lineares, isotrópicos e elásticos podem ser convertidas para os correspondentes problemas de valor de contorno lineares, isotrópicos e viscoelásticos.

A principal limitação na utilização deste princípio é que os contornos do problema não podem depender da variável tempo, ou seja, o tipo da condição de contorno em deslocamento ou tensão e a região sobre a qual esta condição atua não podem mudar ao longo do tempo (Souza, 2005).

Considerando-se a transformada de Carson-Laplace de uma função $F(t)$, definida por

$$F^*(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} F(t-\tau) e^{-pt} dt \quad (3.69)$$

onde p é a variável transformada, e as equações constitutivas viscoelásticas 3.65 e 3.66, obtêm-se as seguintes relações entre tensões e deformações no espaço transformado de Carson-Laplace:

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\zeta}}^* \underline{\underline{\varepsilon}}^* \quad (3.70)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = \underline{\underline{\zeta}}^* \underline{\underline{\sigma}}^* \quad (3.71)$$

as quais formalmente expressam relações do tipo elásticas no espaço de Carson-Laplace. Em termos de variáveis transformadas, o problema de concentração que governa tensões e deformações no VER é escrito por:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = 0 & \text{em } V \\ \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\zeta}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}^* & \text{em } V \\ \underline{\underline{u}}^* = \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{x}} & \text{em } \partial V \end{cases} \quad (3.72)$$

que é similar ao problema 3.9. O princípio da correspondência indica que a solução de 3.73 é a transformada de Carson-Laplace da solução de 3.9. Assim, as transformadas da tensão e deformação macroscópicas são relacionadas através de $\underline{\underline{\Sigma}}^* = \underline{\underline{\zeta}}^{\text{hom}*} : \underline{\underline{E}}^*$, onde $\underline{\underline{\zeta}}^{\text{hom}*}$ representa a transformada de Carson-Laplace do tensor de elasticidade macroscópico. Em particular, a transformada de Carson-Laplace da estimativa de Mori-Tanaka $\underline{\underline{\zeta}}^{\text{hom}, MT^*}$ pode ser usada como aproximação de $\underline{\underline{\zeta}}^{\text{hom}*}$ (ou seja, $\underline{\underline{\zeta}}^{\text{hom}*} \approx \underline{\underline{\zeta}}^{\text{hom}, MT^*}$).

Para a realização dos cálculos, é necessário, então, especificar o comportamento viscoelástico de cada componente do CRFA.

3.5.3 Comportamento Viscoelástico da Matriz de Concreto e das Fibras de Aço

O comportamento de materiais viscoelásticos em carregamento uniaxial pode ser eficientemente estimado através de modelos formados pela combinação de dois elementos mecânicos fundamentais: molas (elásticos) e amortecedores (viscosos). Embora os modelos não contenham informações sobre os fenômenos físicos e moleculares que ocorrem, ou seja, são modelos exclusivamente fenomenológicos, eles são úteis para prever a resposta de um material sob condições de fluência e relaxação.

Materiais que apresentam comportamento elástico retornam ao seu estado natural ou indeformado após a remoção do carregamento, sua resposta é imediata. Os sólidos elásticos podem ser representados por um elemento de mola (Figura 3.24a) e modelados de forma unidimensional por uma relação tensão deformação básica, denominada Lei de Hooke, estando a tensão elástica relacionada diretamente à deformação.

Os fluidos viscosos, por sua vez, não possuem a tendência de recuperar a deformação. A sua representação é feita através do elemento amortecedor (Figura 3.24b) e a modelagem unidimensional é realizada por uma relação tensão deformação básica denominada Lei de Newton, expressa pela equação:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ ou } \sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (3.73)$$

onde η representa o coeficiente de viscosidade do fluido e $\dot{\varepsilon}$ a taxa de deformação. Observe-se que a tensão em um fluido viscoso é diretamente proporcional à taxa de deformação.

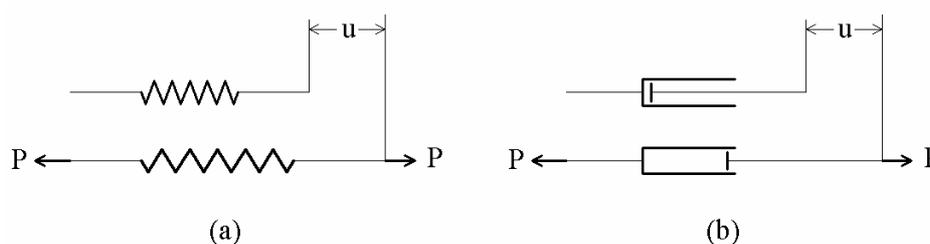


Figura 3.24 – Elementos mecânicos básicos: mola (a) e amortecedor (b).

O comportamento de materiais viscoelásticos é uma combinação dos dois casos simples descritos anteriormente. Para construir modelos mais complexos, propõem-se diferentes associações em paralelo ou em série de molas (modelo de Hooke) e amortecedores (modelo de Newton), representando assim possíveis comportamentos de materiais viscoelásticos. Os modelos de Maxwell e Kelvin são obtidos através da associação simples de molas e amortecedores em série e em paralelo, respectivamente.

A escolha e validação de um modelo devem ser feitas através do ajuste dos parâmetros do modelo matemático aos dados experimentais do material particular que se deseja representar. Os modelos simples de Maxwell e Kelvin não são adequados para representar completamente o comportamento de materiais reais, como o concreto. Eles têm limitações consideráveis na representação do comportamento da maioria dos materiais viscoelásticos: o modelo de Maxwell apresenta uma taxa de deformação constante sob tensão constante, o que pode ser adequado para fluidos, mas não para sólidos; o modelo de Kelvin não pode prever relaxação em função do tempo e não mostra a deformação permanente após o descarregamento (Mehta e Monteiro, 1994). Outros modelos mais complexos proporcionam a modelagem apresentando uma boa descrição da fluência, da recuperação de fluência e da relaxação de tensão. Este é o caso do modelo de Zener, um modelo de três parâmetros composto por uma mola elástica de rigidez E_1 conectada em série a um modelo de Kelvin, arranjo em paralelo

de uma mola de rigidez E_2 e um amortecedor com viscosidade η (Mehta e Monteiro, 1994; Creus, 1986). A Figura 3.25 mostra o modelo de Zener.

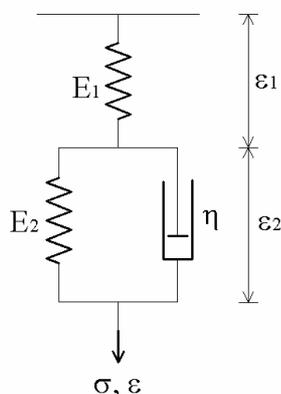


Figura 3.25 – Modelo de Zener.

A descrição do comportamento viscoelástico do concreto é efetuado, neste estudo, utilizando o modelo de Zener. Este é um modelo simplificado para representar o comportamento do concreto, entretanto, é capaz de descrever corretamente todas as características esperadas da resposta em fluência e relaxação observadas experimentalmente (Salençon, 1993; Berthollet, 2003).

Neste modelo, a deformação total é dada pela soma da deformação da mola ε_1 e da deformação resultante do elemento de Kelvin ε_2 :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (3.74)$$

A tensão na mola elástica é:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \quad (3.75)$$

e a tensão resultante do arranjo em paralelo ou modelo de Kelvin é dada por:

$$\sigma_2 = \sigma_{2.1} + \sigma_{2.2} \quad (3.76)$$

com $\sigma_{2.1}$ e $\sigma_{2.2}$ denotando as tensões da mola e do amortecedor do modelo de Kelvin, respectivamente:

$$\sigma_{2,1} = E_2 \varepsilon_2 \text{ e } \sigma_{2,2} = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (3.77)$$

A mola elástica e o elemento de Kelvin suportam a mesma tensão, portanto

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad (3.78)$$

Combinando as Equações anteriores, obtém-se a equação diferencial do modelo de Zener, a qual relaciona tensão $\sigma(t)$, deformação $\varepsilon(t)$ e as suas derivadas:

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} + \frac{(E_1 + E_2)}{\eta} \sigma(t) = E_1 \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon(t) \quad (3.79)$$

Para caracterizar a função de relaxação do modelo de Zener é suposta uma deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ e como condição inicial $\sigma(0) = E_1 \varepsilon_0$. Desta forma, a Equação 3.79 nos fornece a seguinte relação:

$$\sigma(t) = E^{Zener}(t) \varepsilon_0 \quad (3.80)$$

onde a função de relaxação de Zener $E^{Zener}(t)$ é dada por:

$$E^{Zener}(t) = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left[E_2 + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_r}} \right] \quad (3.81)$$

e $\tau_r = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$ é denominado tempo de relaxação.

Para explicitar a função de fluência do modelo de Zener, considera-se uma tensão constante

$\sigma(t) = \sigma_0$ e como condição inicial $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1}$. De 3.80 vem que

$$\varepsilon(t) = D^{Zener}(t) \sigma_0 \quad (3.82)$$

onde $D^{Zener}(t)$ é a função de fluência:

$$D^{Zener}(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_f}} \right] \quad (3.83)$$

e $\tau_f = \frac{\eta}{E_2}$ é o denominado tempo de retardo.

A Figura 3.26 fornece uma descrição qualitativa dos fenômenos de fluência e relaxação do modelo de Zener. Como se observa na literatura (Mehta e Monteiro, 1994; Creus, 1986), o concreto, quando submetido a ensaios de fluência ou relaxação, apresenta como resposta curvas com mesma forma das apresentadas pelo modelo de Zener.

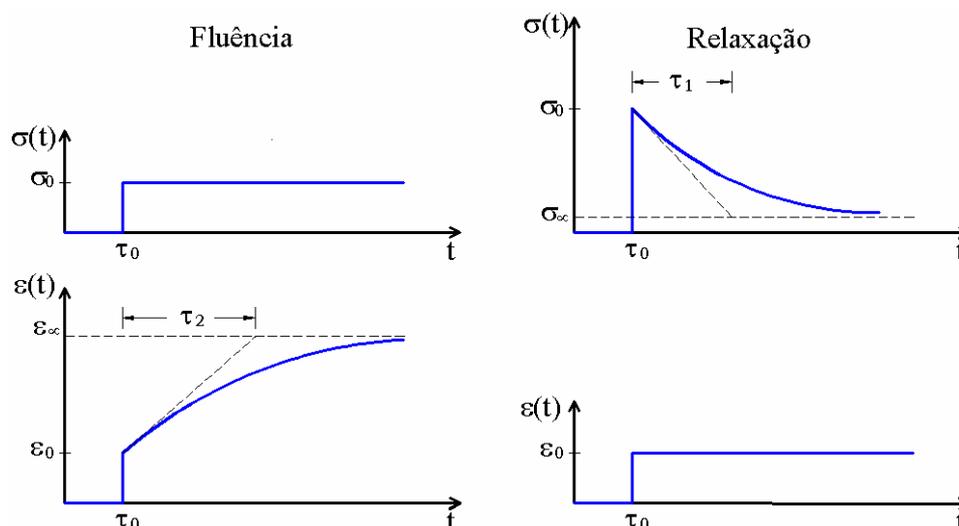


Figura 3.26 – Fluência e relaxação para o modelo de Zener.

Considerando-se a Equação 3.81, verifica-se que $E^{zener}(0) = E_1$ e $E^{zener}(+\infty) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$, os quais, respectivamente, representam o módulo de relaxação instantâneo e assintótico. Portanto, durante um ensaio de relaxação, o módulo do modelo Zener se reduz de um valor inicial E_1 para o seu valor assintótico $E(\infty)$, de acordo com a lei de evolução expressa pela Equação 3.81. Para descrever o comportamento viscoelástico sem envelhecimento tridimensional da matriz de concreto isotrópica, o módulo de relaxação é, primeiramente, aproximado pela função de relaxação de Zener

$$E^m(t) = E^{zener}(t) H(t) \quad (3.84)$$

Onde $H(t)$ é a função passo unitário ou de Heaviside

Os parâmetros de rigidez do modelo são identificados contatando-se que E_1 representa a rigidez elástica instantânea do material, enquanto que o módulo de relaxação assintótico $E(+\infty)$ varia entre 3 e 5 vezes a rigidez instantânea E_1 , dependendo de certos parâmetros, tais como a qualidade do concreto, umidade e temperatura (Mehta e Monteiro, 1994; Ghali e Favre, 1986, Neville e Dilger, 1983). Quanto ao coeficiente de viscosidade η , o seu valor pode ser avaliado a partir do valor do tempo característico em relaxação τ_r , que geralmente varia entre 100 e 300 dias (Mehta e Monteiro, 1994; Neville e Dilger, 1983, Bažant, 2001).

A formulação do comportamento da matriz de concreto é concluída considerando-se como coeficiente de Poisson um valor constante:

$$\nu^m(t) = \nu^m H(t) \quad (3.85)$$

onde ν^m denota o coeficiente de Poisson elástico da resposta instantânea. Esta aproximação, sugerida por diversos estudos (Kogan, 1983; Bažant, 1975; Gopalakrishnan *et al.*, 1969), é normalmente adotada na modelagem do comportamento viscoelástico do concreto.

Quanto às fibras de aço, os efeitos diferidos podem ser negligenciados em temperaturas normais e para os níveis de carregamento considerados. Deste modo, um comportamento elástico linear é adotado para as fibras:

$$E^f(t) = E^f H(t) \quad ; \quad \nu^f(t) = \nu^f H(t) \quad (3.86)$$

sendo E^f e ν^f o módulo de Young e o coeficiente de Poisson elásticos do aço, respectivamente.

3.5.4 Propriedades viscoelásticas homogeneizadas para o CRFA

Para o cálculo das propriedades viscoelásticas homogeneizadas, inicialmente é necessário obter o resultado da homogeneização elástica no espaço transformado de Carson-Laplace. O

primeiro passo é calcular as transformadas dos módulos de compressão e de cisalhamento do concreto e do aço.

$$k^{m*}(p) = \frac{E^{m*}}{3(1-2\nu^{m*})} = \frac{E_1}{3(E_1 + E_2)(1-2\nu^m)} \times \left[E_2 + E_1 \frac{\eta p}{\eta p + E_1 + E_2} \right] \quad (3.87)$$

$$g^{m*}(p) = \frac{E^{m*}}{2(1+\nu^{m*})} = \frac{3}{2} \frac{(1-2\nu^m)}{(1+\nu^m)} \times k^{m*}(p) \quad (3.88)$$

$$k^{f*}(p) = \frac{E^f}{3(1-2\nu^f)} \quad ; \quad g^{f*}(p) = \frac{E^f}{2(1+\nu^f)} \quad (3.89)$$

O princípio da correspondência indica que as transformada de Carson-Laplace dos módulos de compressão e de cisalhamento homogeneizados do CRFA são formalmente obtidas pela substituição dos módulos de compressão e de cisalhamento dos constituintes do CRFA por suas transformadas de Carson-Laplace nas expressões de K^{hom} e G^{hom} . Por simplicidade, a análise restringe-se à situação de fibras com fator de aspecto de valor infinito ($\alpha \rightarrow +\infty$). Esta consideração é justificável, uma vez que este parâmetro mostrou pouca influência no comportamento elástico do CRFA (Figuras 3.13 e 3.14). Assim, considerando-se as Equações 3.59 a 3.62, obtêm-se:

$$K^{\text{hom}*} = \frac{N_K(k^{m*}, g^{m*}, k^{f*}, g^{f*}, f)}{D_K(k^{m*}, g^{m*}, k^{f*}, g^{f*}, f)} \quad e \quad (3.90)$$

$$G^{\text{hom}*} = \frac{N_G(k^{m*}, g^{m*}, k^{f*}, g^{f*}, f)}{D_G(k^{m*}, g^{m*}, k^{f*}, g^{f*}, f)} \quad (3.91)$$

A etapa crucial deste tipo de processo de homogeneização viscoelástica encontra-se na capacidade de se calcular a transformada inversa de Carson-Laplace de 3.91 e 3.92. Geralmente, esse tipo de transformada inversa é obtido por meio de procedimentos numéricos, tais como aqueles apresentados em Abate e Whitt (2006). No presente estudo, a estrutura de 3.91 e 3.92 torna possível derivar expressões para os módulos de relaxação $K^{\text{hom}}(t)$ e $G^{\text{hom}}(t)$ de forma analítica. De fato, é possível reescrever 3.91 e 3.92 sob a forma

$$K^{\text{hom}*} = Q_0 + \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j}{p + q_j} \quad \text{e} \quad (3.92)$$

$$G^{\text{hom}*} = R_0 + \sum_{j=1}^4 \frac{R_j}{p + r_j} \quad (3.93)$$

onde os coeficientes Q_j , R_j , q_j e r_j são funções conhecidas de E_1 , E_2 , η , ν^m , E^f , ν^f e f . A inversão das transformadas de Carson-Laplace 3.92 e 3.93 resulta:

$$K^{\text{hom}}(t) = \left[Q_0 + \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j}{q_j} \left(1 - e^{-q_j t} \right) \right] H(t) \quad \text{e} \quad (3.94)$$

$$G^{\text{hom}}(t) = \left[R_0 + \sum_{j=1}^4 \frac{R_j}{r_j} \left(1 - e^{-r_j t} \right) \right] H(t) \quad (3.95)$$

Utilizando o princípio da correspondência elástica-viscoelástica também é possível obter a função de fluência e o Poisson viscoelástico homogeneizados através da inversão de Carson-Laplace das equações

$$D^{\text{hom}*} = \frac{1}{E^{\text{hom}*}} = \frac{3K^{\text{hom}*} + G^{\text{hom}*}}{9K^{\text{hom}*} G^{\text{hom}*}} \quad \text{e} \quad (3.96)$$

$$\nu^{\text{hom}*} = \frac{3K^{\text{hom}*} - 2G^{\text{hom}*}}{6K^{\text{hom}*} + 2G^{\text{hom}*}} \quad (3.97)$$

O comportamento viscoelástico estimado do CRFA é ilustrado abaixo. Para tanto, utilizou-se os dados apresentados na Tabela 3.5, que correspondem a um concreto e aço convencionais. Os parâmetros do modelo de Zener que descrevem o comportamento viscoelástico do concreto são $E_1 = 31$ GPa, $E_2 = 15,5$ GPa e $\eta = 4650$ GPa \times dias. O fato de estes coeficientes serem tomados constantes é coerente com a aproximação do comportamento do concreto sem envelhecimento. Esta consideração é razoavelmente justificada na situação em que o concreto é carregado em idade avançada (Berthollet, 2003).

Tabela 3.5 – Propriedades adotadas para o concreto e do aço.

Concreto	Módulo de relaxação instantâneo	$E^m(0)$	31000 MPa
	Módulo de relaxação assintótico	$E^m(+\infty)$	10300 MPa
	Tempo de relaxação	τ_r	100 dias
	Coefficiente de Poisson	ν^m	0,2
Aço	Módulo de Young	E^f	210000 MPa
	Coefficiente de Poisson	ν^f	0,3

A variação no tempo do módulo de compressão $K^{\text{hom}}(t)$ e de cisalhamento $G^{\text{hom}}(t)$ é mostrada nas Figuras 3.27 e 3.28, respectivamente. Dois valores de f empregados para CRFA são considerados: $f = 1\%$ e $f = 5\%$. Nas Figuras 3.29 e 3.30 é apresentada a variação no tempo da função de relaxação $E^{\text{hom}}(t)$ e do coeficiente de Poisson viscoelástico $\nu^{\text{hom}}(t)$, respectivamente.

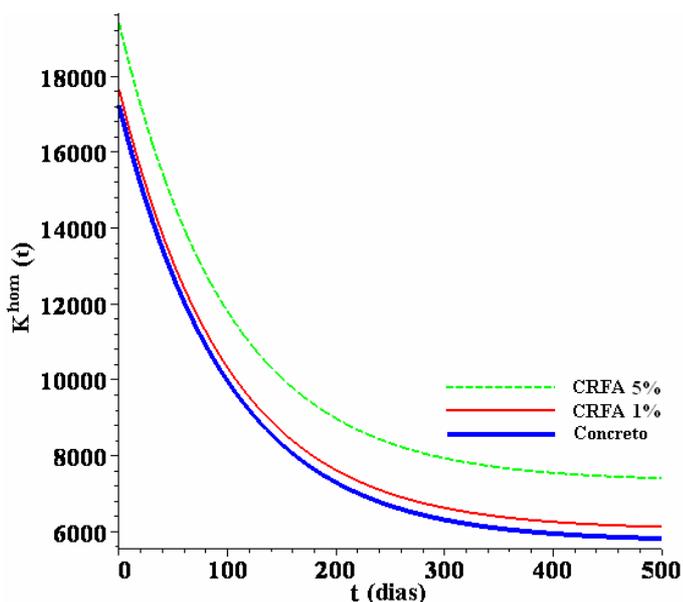


Figura 3.27 – Variação do módulo de compressão viscoelástico homogêneo do CRFA para $f = 1\%$ e $f = 5\%$.

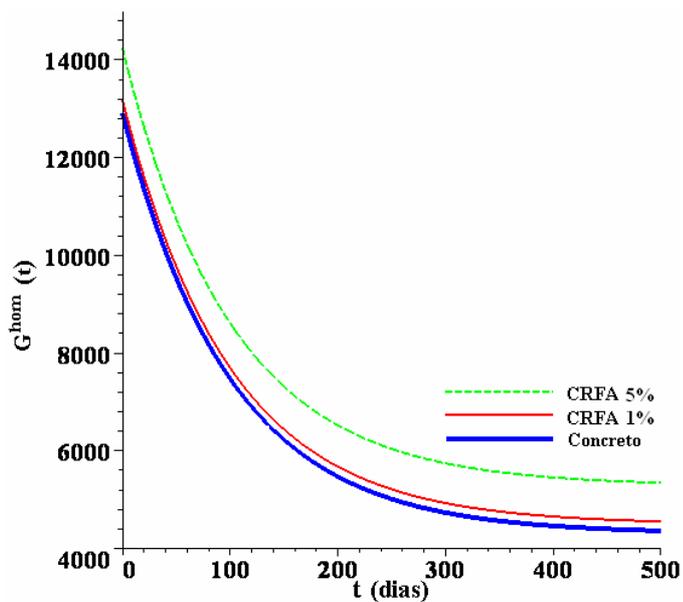


Figura 3.28 – Variação do módulo de cisalhamento viscoelástico homogeneizado do CRFA para $f = 1\%$ e $f = 5\%$.

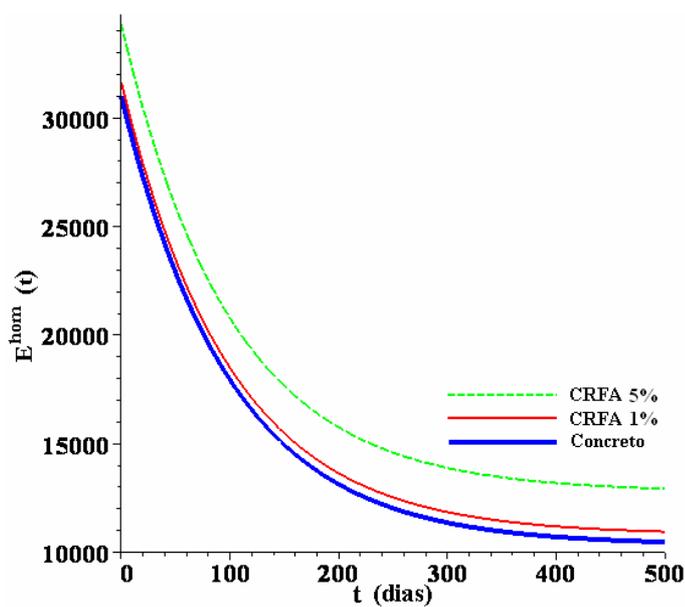


Figura 3.29 – Variação da função de relaxação homogeneizada do CRFA para $f = 1\%$ e $f = 5\%$.

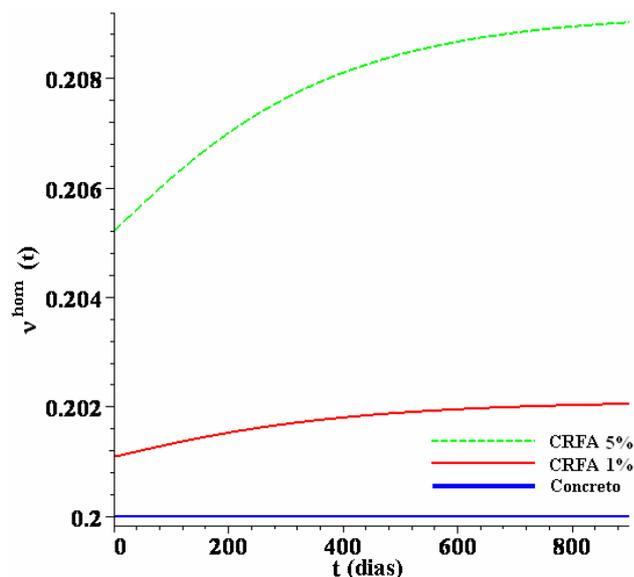


Figura 3.30 – Variação do coeficiente de Poisson viscoelástico homogeneizado do CRFA para $f = 1\%$ e $f = 5\%$.

Os resultados nas Figuras 3.27 a 3.30 indicam que a adição de fibras de aço ao concreto restringe o comportamento viscoelástico do mesmo. Este resultado é coerente com dados experimentais disponíveis na literatura, conforme descrito na próxima seção. As Figuras 3.27 a 3.30 mostram que pequenas quantidades de fibras têm pouca influência nas propriedades viscoelásticas do concreto. O tempo de relaxação e os módulos assintóticos têm pouca alteração ao se adicionar 1% de fibras. A relaxação decresce progressivamente ao se adicionar maiores quantidades de fibras. No caso de 5% de adição, observam-se aumentos dos módulos de compressão e de cisalhamento viscoelásticos assintóticos de 23% e de 28%, respectivamente. Para a função de relaxação, o aumento é de 23%. O coeficiente de Poisson viscoelástico permanece praticamente constante, com aumento de 1,85% para $f = 5\%$, evidenciando ser coerente a adoção de um valor constante para esta propriedade, no caso do CRFA, assim como ocorre com o concreto convencional. Quanto ao tempo de relaxação, observa-se um aumento de apenas 1%.

3.5.5 Comparação com Resultados Experimentais e Modelos Analíticos

Os resultados do comportamento viscoelástico do CRFA, obtidos através dos cálculos descritos anteriormente, são ilustrados na sequência. Para tanto são utilizados os experimentos de Mangat e Azari (1985) e de Chern e Young (1989).

A Tabela 3.6 apresenta os dados experimentais de Mangat e Azari (1985) medidos através de ensaios de fluência de concreto sem fibras sob compressão uniaxial. Os testes foram realizados aos 28 dias com tensão constante de valor igual a 30% da resistência última do concreto, $f_{cu} = 24,8 \text{ MPa}$. Neste caso, os parâmetros do modelo de Zener que descrevem o comportamento viscoelástico do concreto são $E_1 = 20,38 \text{ GPa}$, $E_2 = 7,67 \text{ GPa}$, $\eta = 184,08 \text{ GPa} \times \text{dias}$.

Tabela 3.6 – Propriedades do concreto e do aço (Mangat e Azari, 1985).

Concreto	Deformação instantânea	$\varepsilon^m(0)$	$365 \cdot 10^{-6}$
	Deformação diferida	$\varepsilon^m(+\infty)$	$1335 \cdot 10^{-6}$
	Tempo de retardo	τ_f	24 dias
	Coefficiente de Poisson	ν^m	0,2
Aço	Módulo de Young	E^f	210000 MPa
	Coefficiente de Poisson	ν^f	0,3

Mangat e Azari (1985) utilizaram três tipos de fibras com fatores de aspecto distintos. Para fibras com $\alpha = l_f / d_f = 59$, $l_f = 28,2 \text{ mm}$ e $d_f = 0,48 \text{ mm}$, as quantidades adicionadas foram de 1% e 3%. Para $\alpha = 56$, $l_f = 22,5 \text{ mm}$ e $d_f = 0,40 \text{ mm}$, 1,5% e 3% e para $\alpha = 61$, $l_f = 31,8 \text{ mm}$ e $d_f = 0,52 \text{ mm}$, apenas 3%. Na Figura 3.31 são observados os resultados experimentais da deformação por fluência para o concreto sem fibras e para o CRFA com adição de 3% de fibras e $\alpha = 56, 59$ e 61. A curva para o concreto sem fibras do modelo de Zener obtida através dos coeficientes E_1, E_2 e η , descritos anteriormente, e o resultado calculado no presente trabalho através da teoria da homogeneização e do princípio da correspondência são também representados. O eixo das abscissas representa o tempo de carregamento.

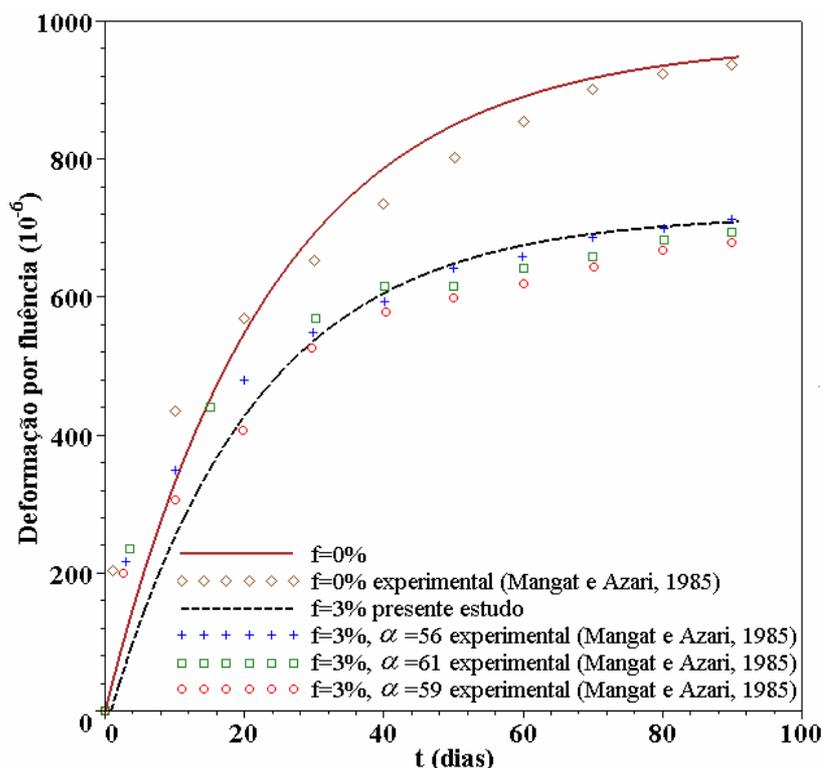


Figura 3.31 – Deformação por fluência estimada e obtida experimentalmente por Mangat e Azari (1985) para CRFA com $f=3\%$.

Conforme descrito anteriormente, o presente trabalho considera por simplicidade $\alpha \rightarrow +\infty$. Desta forma, para as características dos constituintes do CRFA descritos na Tabela 3.6 e 3% de adição de fibras, apenas uma curva é definida para a função de fluência, a qual se mostrou em concordância com os resultados experimentais de Mangat e Azari (1985). Observa-se, através dos experimentos, que o fator de aspecto, assim como ocorre em elasticidade, apresenta pouca influência no comportamento viscoelástico do CRFA, indicando a validade da consideração efetuada neste estudo para α .

Na Figura 3.32 são apresentados os demais resultados experimentais de Mangat e Azari (1985), juntamente com aqueles obtidos através da teoria da homogeneização e do princípio da correspondência.

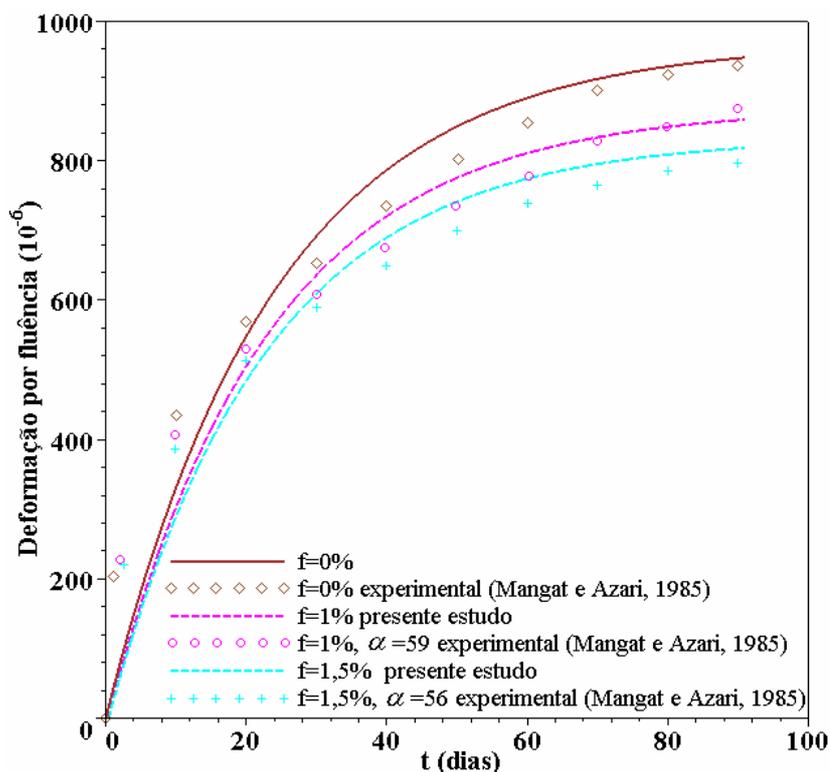


Figura 3.32 – Deformação por fluência estimada e obtida experimentalmente por Mangat e Azari (1985) para CRFA com $f=1\%$ e $1,5\%$.

Verifica-se, através da análise da Figura 3.32, boa concordância entre os resultados experimentais e aqueles calculados no presente estudo também para as adições de fibras em 1% e $1,5\%$. Como se observa nas Figuras 3.31 e 3.32, esta concordância se dá principalmente em idades mais avançadas. Uma possível justificativa é o emprego do modelo de Zener com coeficientes constantes para a caracterização do concreto. Este não considera os efeitos de envelhecimento, os quais influenciam o comportamento do material, sobretudo nas primeiras idades.

Os dados experimentais de Chern e Young (1989), obtidos através de ensaios de fluência em concreto sem fibras sob compressão uniaxial, são apresentados na Tabela 3.7. Neste caso, os parâmetros do modelo de Zener, que descrevem o comportamento viscoelástico do concreto, são $E_1 = 23,5 \text{ GPa}$, $E_2 = 4,397 \text{ GPa}$, $\eta = 184,66 \text{ GPa} \times \text{dias}$. Através destes coeficientes é possível traçar a curva da função de fluência para o concreto sem fibras e estimar a função de fluência para os concretos reforçados.

Tabela 3.7 – Propriedades do aço e do concreto (Chern e Young, 1989).

Concreto	Módulo de fluência instantâneo	$D^m(0)$	$4,26 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$
	Módulo de fluência assintótico	$D^m(+\infty)$	$27 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$
	Tempo de retardo	τ_f	42 dias
	Coefficiente de Poisson	ν^m	0.2
Aço	Módulo de Young	E^f	210000 MPa
	Coefficiente de Poisson	ν^f	0.3

Chern e Young (1989) utilizaram fibras com fator de aspecto 44 e frações volumétricas de 1% e 2%. Os corpos de prova ensaiados foram mantidos sob tensão constante a partir dos 28 dias. Na Figura 3.33 são observados os resultados experimentais para a função de fluência, juntamente com os resultados estimados no presente estudo. O eixo das abscissas representa o tempo de carregamento.

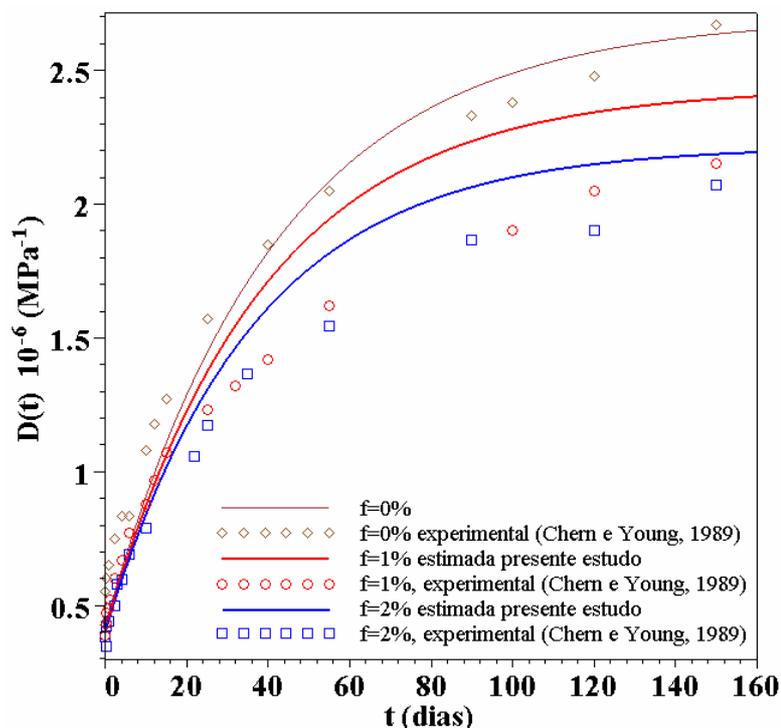


Figura 3.33 – Função de fluência estimada e obtida experimentalmente por Chern e Young (1989) para CRFA com $f=1\%$ e 2% .

Ao contrário de Mangat e Azari (1985), Chern e Young (1989) obtiveram resultados muito parecidos para adições distintas de fibras. Os resultados obtidos no presente estudo apresentam valores próximos aos experimentais com a adição de 2%. Para 1%, os resultados estimados são superiores aos de Chern e Young (1989).

Conforme descrito no Capítulo 2, o CRFA apresenta resposta ao longo do tempo distinta quando sob compressão ou tração. Em compressão observa-se uma redução da deformação por fluência ao se adicionar fibras. Em tração a maioria dos estudos mostrou resultado contrário. O presente estudo mostrou ser capaz de estimar razoavelmente o comportamento viscoelástico de CRFA quando submetidos a solicitações de compressão. Em tração, provavelmente, é necessário considerar outros efeitos, como a presença das fissuras e o escorregamento das fibras. Cabe ressaltar que poucos resultados experimentais são encontrados na literatura para maiores comparações.

Além dos experimentos descritos anteriormente, foram encontrados na literatura dois modelos teóricos para a avaliação da fluência do CRFA: o modelo de Mangat e Azari (1985) e de Zhang (2003). Na sequência ambos os trabalhos são descritos e comparados aos resultados do presente estudo.

Mangat e Azari (1985) desenvolveram um modelo considerando que as fibras provocam uma redução da deformação por fluência irreversível da matriz, proporcionada pela aderência na interface entre fibra e matriz. Segundo os autores, a deformação elástica retardada, que juntamente com a fluência irreversível constitui a fluência total, não é afetada pela presença das fibras.

Para a estimativa da deformação por fluência, os autores consideraram uma distribuição idealizada unidimensional das fibras na direção da aplicação da carga de compressão, empregando o conceito de comprimento efetivo das fibras $l_e = 0,41l_f$ (Figura 3.34 (a)). Através da geometria do corpo de prova (B e H) e das fibras (l_f e d_f) e da quantidade de fibras adicionadas é possível a determinação da distância s entre as fibras, parâmetro necessário para os cálculos de fluência.

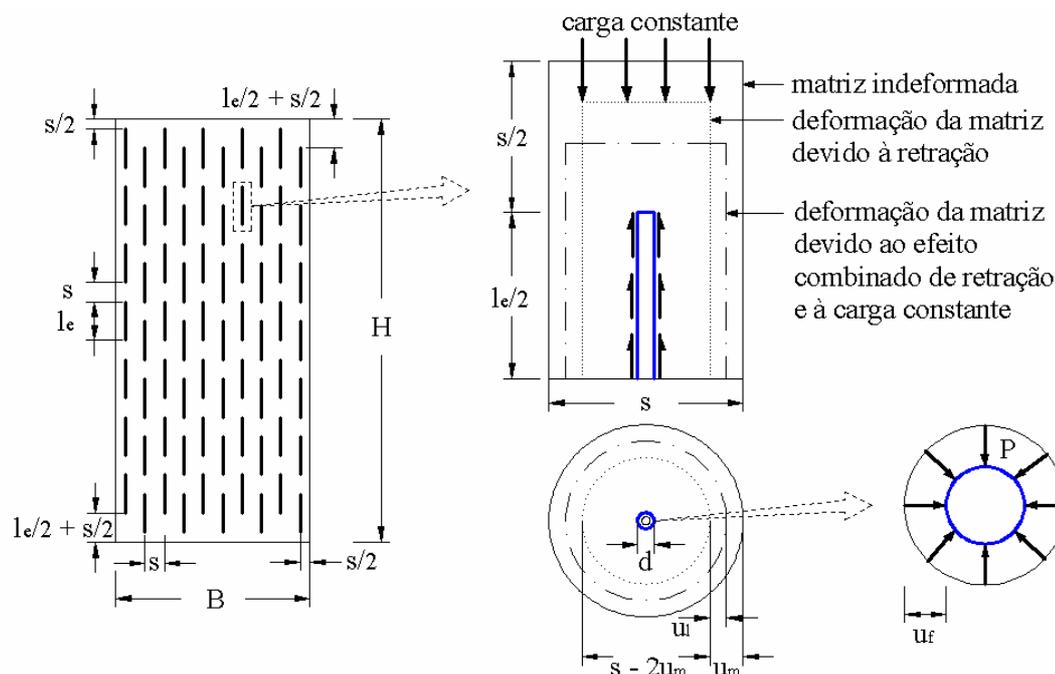


Figura 3.34 – Representação da distribuição idealizada das fibras e do modelo de fluência utilizados por Mangat e Azari (1985).

Os autores supõem que a região da matriz onde está situada a fibra, além da tensão de compressão imposta, está sujeita a uma tensão oposta ao carregamento aplicado, a qual produz uma diminuição na deformação por fluência. Esta tensão é gerada pela resistência de aderência τ na interface fibra-matriz (Figura 3.34 (b)). Através destas considerações, a expressão obtida para a deformação por fluência do CRFA por Mangat e Azari (1985) foi:

$$\varepsilon_{fe} = \varepsilon_{oc} - \frac{0,3362\tau d_f l_f^2}{s^2 E_c (0,41l_f + s)} \quad (3.98)$$

onde ε_{oc} é a deformação por fluência do concreto de referência, sem fibras. E_c é a tangente à curva de deformação por fluência irreversível da matriz sujeita a uma tensão constante. Ambos os dados são obtidos experimentalmente em ensaio de fluência.

A determinação de τ , por sua vez, é possível através da consideração de que a deformação lateral produzida pela compressão provoca uma pressão radial P sobre a área de superfície da fibra (Figura 3.34 (c)). O produto desta pressão radial e o coeficiente de atrito μ , entre a fibra e a matriz, fornece a magnitude da tensão de aderência na interface $\tau = \mu P$. Empregando a equação de Lamé para cilindros espessos com pressão interna e os valores experimentais dos

deslocamentos laterais da matriz gerados pela retração livre $u_m(\varepsilon_{os})$ e pela carga aplicada $u_l(\varepsilon_{ol})$ e do deslocamento lateral da fibra $u_f(\nu_s, E_s)$ provocado por P os autores fornecem a expressão de τ :

$$\tau = \frac{\mu E_E (\varepsilon_{os} - \varepsilon_{ol}) [(s/2) - (d_f/2)]}{\frac{d_f}{2} \left(\left\{ \frac{(s/2)^2 + (d_f/2)^2}{(s/2)^2 - (d_f/2)^2} + \nu \right\} + \frac{(1 - \nu_s)}{(E_s / E_E)} \right)} \quad (3.99)$$

onde E_E e E_s são os módulos de Young do concreto e do aço, respectivamente; ν e ν_s são os coeficientes de Poisson do concreto e do aço, respectivamente; ε_{ol} e ε_{os} são as deformações lateral e por retração livre do concreto de referência, sem fibras, respectivamente.

Nas Figuras 3.35 e 3.36 são representados os valores obtidos pelo modelo de Mangat e Azari (1985) através das equações 3.98 e 3.99 e dos experimentos realizados pelos próprios autores descritos anteriormente. Juntamente, são apresentados os resultados estimados no presente trabalho. A Figura 3.35 contém os valores para o CRFA com fator de aspecto $\alpha = 56$ e adições 1,5% (Figura 3.35(a)) e 3% (Figura 3.35(b)) de fibras e a Figura 3.36 para CRFA com $\alpha = 59$ e adições de 1% (Figura 3.36(a)) e 3% (Figura 3.36(b)).

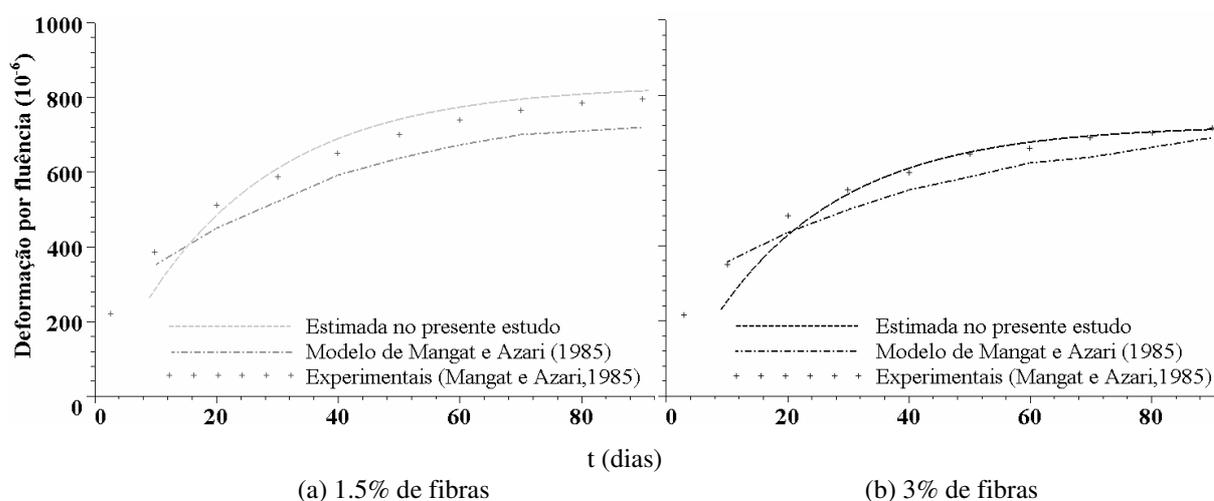


Figura 3.35 – Deformação por fluência estimada neste estudo, obtida pelo modelo de Mangat e Azari (1985) e experimental para CRFA com $\alpha = 56$.

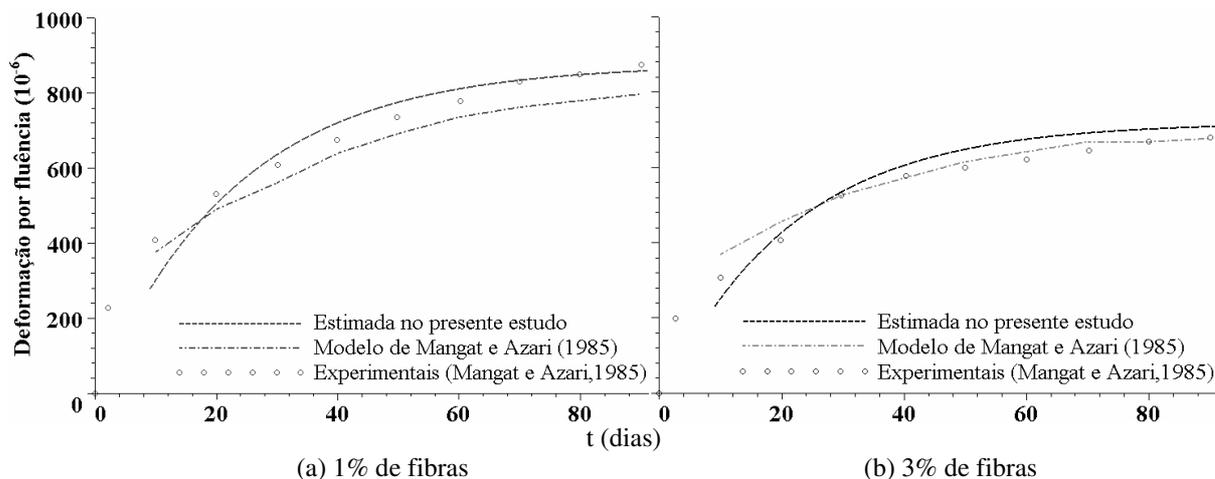


Figura 3.36 – Deformação por fluência estimada neste estudo, obtida pelo modelo de Mangat e Azari (1985) e experimental para CRFA com $\alpha = 59$.

Verifica-se, através da análise das Figuras 3.35 e 3.36, que ambos os modelos têm uma boa concordância aos dados experimentais. Para idades mais avançadas, o presente estudo apresentou resultados melhores do que aqueles obtidos através do modelo de Mangat e Azari (1985).

O modelo desenvolvido por Zhang (2003) adota algumas considerações semelhantes ao modelo de Mangat e Azari (1985) para a estimativa da fluência do CRFA. Da mesma forma que o modelo descrito anteriormente, a deformação por fluência do concreto na direção do carregamento pode ser reduzida pela presença de fibras de comprimento efetivo L_{fe} , posicionadas paralelamente à direção da tensão constante aplicada. Assim, uma matriz reforçada por fibras de comprimento l_f e raio r_f aleatoriamente distribuídas e orientadas é considerada equivalente a um compósito idealizado com fibras alinhadas com comprimento efetivo $L_{fe} = kl_f$ e espaçamento $2R$. k é uma constante que pode assumir os valores 1, $1/\pi$ ou $1/2$ em função da distribuição das fibras de forma uni, bi ou tridimensional, respectivamente. O autor também utiliza o conceito de que quando o CRFA é sujeito a uma carga de compressão constante, surge uma tensão de cisalhamento τ_0 na interface entre fibra e matriz que afeta o comportamento de fluência do material.

Para a obtenção da equação da deformação por fluência ε_c do CRFA, o autor utiliza equações de equilíbrio e a teoria “*shear lag*” de Cox (1952) para a determinação da tensão de

cisalhamento τ_0 . Através destas considerações Zhang (2003) encontra a seguinte equação para ε_c :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cm} \left[1 - \eta \frac{k V_f}{1 - k V_f (1 + 1/\gamma_1)} \left(1 - \frac{1}{\beta \gamma} \tanh \beta \gamma \right) \right] \quad (3.100)$$

onde

$$\eta = \frac{E_f}{E_m}, \quad \gamma = \frac{k l_f}{2 r_f}, \quad \gamma_1 = \frac{k l_f}{2 R}$$

e

$$\beta = \left(\frac{1}{(1 + \nu_m) \eta \log \gamma_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{1}{k V_f (1 + 1/\gamma_1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

sendo V_f a quantidade de fibras adicionada ao concreto, E_f e E_m os módulos de Young das fibras e da matriz, respectivamente, e ν_m o coeficiente de Poisson do concreto. ε_{cm} , por sua vez, é a deformação por fluência do concreto de referência, sem fibras, e no trabalho de Zhang (2003) é calculada pela expressão obtida por Branson (1977):

$$\varepsilon_{cm,t} = \frac{t^{0.6}}{10 + t^{0.6}} \varepsilon_{cm,u} \quad (3.101)$$

sendo $\varepsilon_{cm,t}$ a deformação por fluência no tempo t em dias e $\varepsilon_{cm,u}$ a deformação por fluência obtida após um longo período.

Nas Figuras 3.37 e 3.38 são representados os valores obtidos pelo modelo de Zhang (2003) através das equações 3.100, com $k = 1/2$, e dos experimentos realizados por Mangat e Azari (1985). Juntamente, são apresentados os resultados estimados no presente trabalho. A Figura 3.37 contém os valores para o CRFA com fator de aspecto $\alpha = 56$ e adições 1,5% (Figura 3.37(a)) e 3% (Figura 3.37(b)) de fibras e a Figura 3.38 para CRFA com $\alpha = 59$ e adições de 1% (Figura 3.38(a)) e 3% (Figura 3.38(b)).

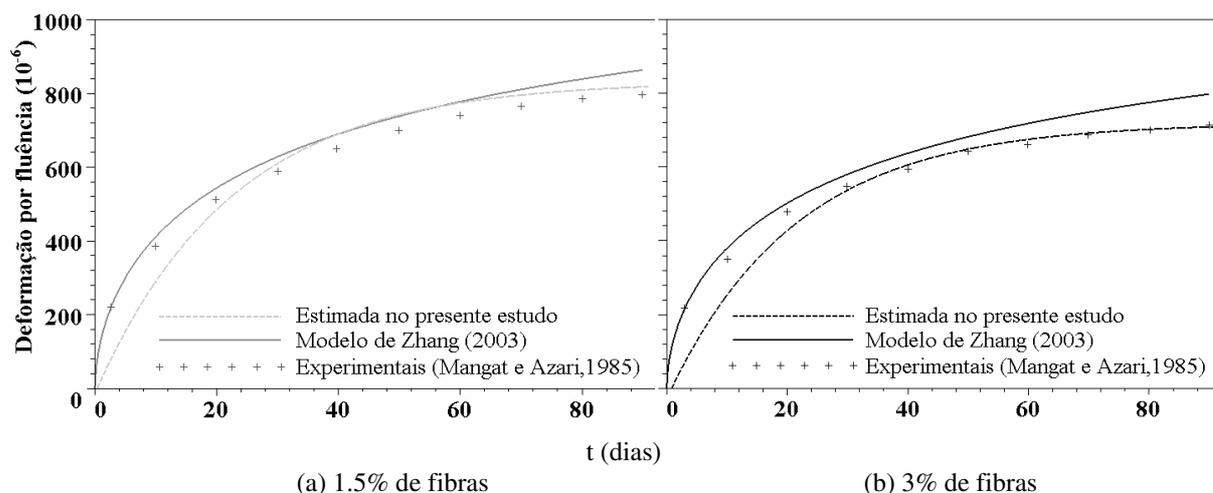


Figura 3.37 – Deformação por fluência estimada neste estudo, obtida pelo modelo de Zhang (2003) e experimental de Mangat e Azari (1985) para CRFA com $\alpha = 56$.

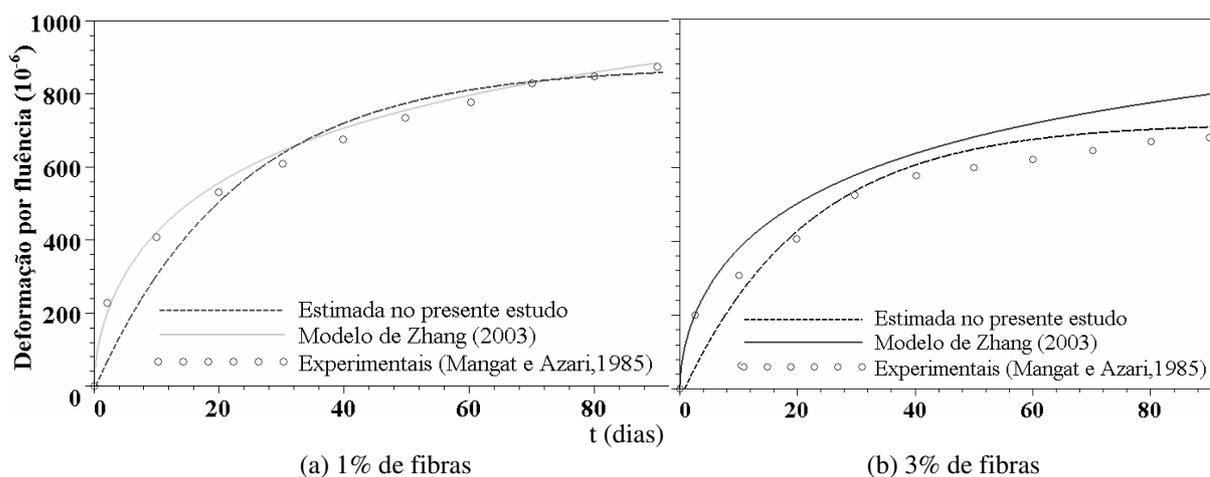


Figura 3.38 – Deformação por fluência estimada neste estudo, obtida pelo modelo de Zhang (2003) e experimental de Mangat e Azari (1985) para CRFA com $\alpha = 59$.

As Figuras 3.37 e 3.38 mostram uma boa concordância entre os dois modelos aplicados aos dados experimentais. Verifica-se que o presente estudo apresentou resultados melhores do que aqueles obtidos através do modelo de Zhang (2003) para idades mais avançadas, enquanto que para idades iniciais o modelo de Zhang (2003) teve melhor desempenho. Cabe ressaltar que a resposta do presente estudo é dependente do modelo viscoelástico que se utiliza para o concreto.

Desta forma conclui-se que a metodologia utilizada para a estimativa do comportamento viscoelástico do CRFA apresentou resultados coerentes com os dados experimentais e com os modelos teóricos encontrados na literatura.

4. Critério de Resistência Macroscópico

O conhecimento da capacidade de resistência de um material é de fundamental importância para a sua adequada utilização nas etapas de dimensionamento e verificação de uma estrutura. Um critério de resistência impõe, por natureza, limitações no nível de tensões nos pontos do material que constituem um dado elemento. É, além disso, um critério importante a ser conhecido para a completa modelagem computacional de estruturas.

Assim como para maioria dos materiais estruturais, a resistência do concreto e o seu comportamento sob estados de tensão multiaxial vêm sendo estudados experimental e teoricamente durante algumas décadas. Tais características são influenciadas principalmente pelas propriedades físicas e mecânicas da pasta de cimento e dos agregados. No caso do concreto reforçado com fibras de aço, poucos são os estudos experimentais ou analíticos visando estabelecer o seu comportamento sob complexos estados de tensão. Entre eles destacam-se os trabalhos experimentais de Yin *et al.* (1989), de Traina e Mansour (1991) e de Swaddiwudhipong e Seow (2006) que buscaram avaliar o comportamento do CRFA sob compressão biaxial. Estes estudos mostraram que o concreto reforçado apresenta uma curva de ruptura distinta daquela obtida para o material não reforçado e que o aumento da resistência à compressão biaxial, em função da presença das fibras, pode ser considerável, conforme descrito no Capítulo 2.

Este capítulo tem como objetivo definir e construir um critério de resistência macroscópico para o concreto reforçado por fibras de aço, aplicando as teorias da análise limite e da homogeneização. A teoria da análise limite, por sua vez, fornece um poderoso instrumento não só na determinação da carga de colapso de elementos estruturais, como também na determinação da capacidade de resistência dos materiais heterogêneos. Ela constitui um método direto, uma vez que não envolve uma análise passo a passo, nem considera a história completa ao longo da evolução do carregamento, como é o caso de uma análise elastoplástica. Para tanto, utiliza os teoremas clássicos dos limites inferior (estático) ou superior (cinemático). A teoria da homogeneização, aplicada à teoria da análise limite, permite definir

de forma rigorosa as propriedades de resistência macroscópicas de um meio heterogêneo. Através desta abordagem, as propriedades de resistência de compósitos reforçados com fibras longas paralelas já foram obtidas, sendo que os resultados teóricos estabelecidos para estes materiais apresentaram boa concordância com resultados experimentais (de Buhan e Taliércio, 1991).

O critério de resistência do CRF é determinado considerando-se as propriedades de resistência dos seus constituintes (matriz e fibras) e a suas frações volumétricas. A formulação empregada permite a consideração de qualquer critério de resistência para os componentes do material compósito. No caso das fibras, apenas as suas resistências à compressão e à tração uniaxial são necessárias. A resistência da matriz de concreto é caracterizada, neste trabalho, pelo critério de Drucker-Prager.

Na próxima seção é descrito como a análise limite, em conjunto com a teoria da homogeneização, permitem avaliar a resistência de materiais heterogêneos. Na seção 4.2 a construção propriamente dita do domínio de resistência macroscópico do CRFA é realizada através do emprego de um modelo aproximado. Os resultados obtidos são comparados com dados experimentais e também com resultados de simulações numéricas das propriedades de resistência do CRFA via elementos finitos. Uma discussão sobre as hipóteses adotadas no modelo analítico é, por fim, efetuada.

4.1 HOMOGENEIZAÇÃO EM ANÁLISE LIMITE

Conforme apresentado no capítulo anterior, a teoria da homogeneização admite a possibilidade de substituir um meio heterogêneo (neste estudo, concreto e fibras) por um meio homogêneo equivalente, onde as propriedades mecânicas do mesmo sejam representativas em relação ao meio heterogêneo inicial, ao nível da estrutura global. Além disso, a homogeneização de meios contínuos heterogêneos está baseada na distinção entre duas escalas características do meio: uma escala microscópica, que permite a descrição das heterogeneidades (neste caso as fibras), e uma escala macroscópica da ordem de grandeza da estrutura.

Assim como no estudo das propriedades elásticas, a avaliação das propriedades de resistência através da homogeneização é realizada através de três etapas (Figura 4.1). Primeiramente é

necessária a descrição da microestrutura do meio analisado. No caso do CRFA, consideram-se as fibras dispostas aleatoriamente na matriz de concreto, sendo ambos os constituintes considerados como meios homogêneos. A segunda etapa se constitui na definição do volume elementar representativo do meio heterogêneo e na determinação das grandezas físicas globais desejadas em função das grandezas locais. Nesta parte do estudo, o interesse reside nas propriedades de resistência do material, ou seja, a grandeza física a ser analisada é a resistência do CRFA. Finalmente, conhecidas as propriedades mecânicas do meio homogêneo equivalente, é possível então avaliar as propriedades mecânicas globais da estrutura.

Esta fase do presente trabalho tem por objetivo descrever a determinação de um critério de resistência homogeneizado que caracterize, em qualquer ponto da estrutura, as capacidades de resistência do CRFA na escala macroscópica. O estudo realizado e exposto nas próximas seções se encontra, portanto, na segunda etapa do processo de homogeneização. Para determinar o critério de resistência macroscópico será empregada a teoria da homogeneização em análise limite, apresentada por Suquet (1983). Na próxima seção é descrito o princípio geral desta teoria.

4.1.1 Princípio Geral do Método

Seja uma estrutura Ω composta por um material fortemente heterogêneo (periódico ou aleatório). Esta estrutura é submetida a um carregamento caracterizado pelo vetor \underline{Q} , formado por n parâmetros (Figura 4.1 (a)). A análise limite tem como objetivo determinar a carga máxima suscetível de ser suportada por uma determinada estrutura e, portanto, oferece um quadro adequado para a análise da resistência de Ω .

A descrição do meio analisado se dá através da caracterização do seu volume elementar representativo (VER). Este último, por sua vez, é formado pela repetição de um grande número de células de base. A célula de base contém todas as informações morfológicas e físicas do material e é, portanto, suficiente para a descrição do meio. A validade do processo de homogeneização é baseada na condição de separação de escalas ($d \ll l \ll L$) (Zaoui, 2002), descrita no capítulo anterior. No caso de meios periódicos, é necessário que o parâmetro que relaciona os tamanhos da célula base e da estrutura ($\varepsilon = l/L$), chamado de fator de escala, seja suficientemente pequeno ($\varepsilon \ll 1$).

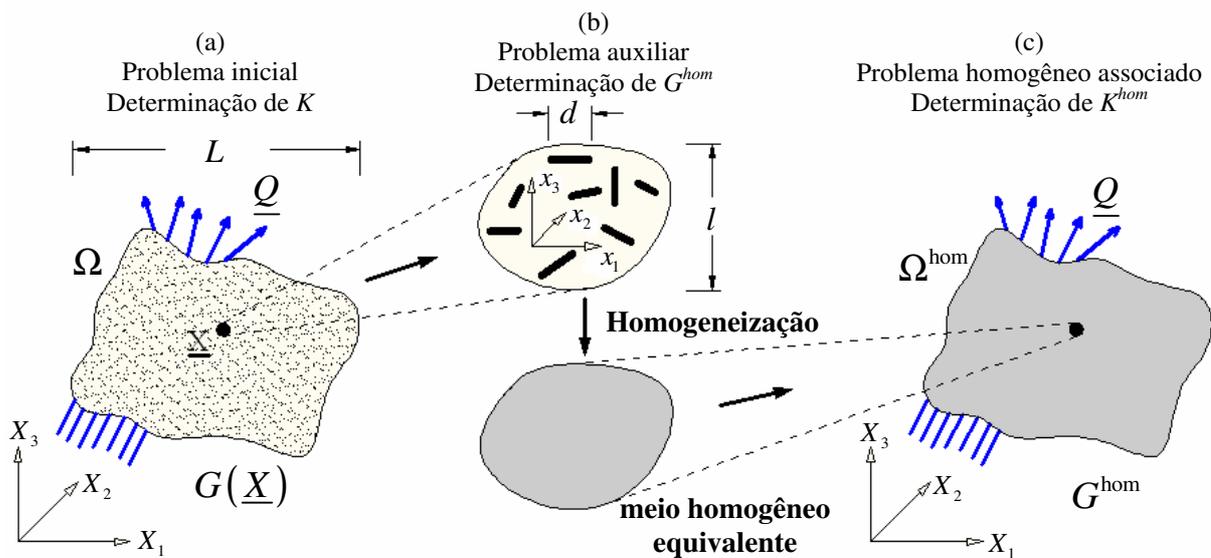


Figura 4.1 – Princípio geral da homogeneização em análise limite.

\underline{X} refere-se à posição da partícula na escala macroscópica (da estrutura), enquanto \underline{x} designa o vetor posição da partícula na escala microscópica (ou seja, do VER). $G(\underline{X})$ denota o domínio convexo que define o critério de resistência da estrutura. Um carregamento é considerado suportável pelo sistema se for estaticamente admissível e respeitar o critério de resistência em todos os pontos do sistema. O conjunto de carregamentos potencialmente suportáveis da estrutura Ω é designado por K e é matematicamente expresso por:

$$K = \left\{ \underline{Q} \mid \exists \underline{\sigma} \text{ E.A. e } \underline{\sigma}(\underline{X}) \in G(\underline{X}), \forall \underline{X} \in \Omega \right\} \quad (4.1)$$

onde E.A. significa “estaticamente admissível”. K é um domínio convexo de R^n , onde n se refere ao número finito de parâmetros de carregamento. Assim, um carregamento é suportável caso se encontre no interior do domínio K . Os carregamentos, que se encontram na fronteira de K , são designados carregamentos limites.

Em razão da forte heterogeneidade da estrutura, a avaliação direta do domínio K se torna bastante difícil. O emprego de um método de homogeneização, que consiste em substituir a estrutura inicial Ω por uma estrutura homogênea associada, então se justifica para superar esta dificuldade. Dispõe-se, para tanto, do método da homogeneização em análise limite (Suquet, 1983; de Buhan, 1986).

A partir da estrutura heterogênea inicial Ω , define-se uma estrutura homogênea associada Ω^{hom} (Figura 4.1 (c)) de mesma geometria da estrutura inicial, submetida ao mesmo carregamento \underline{Q} e onde as capacidades de resistência são caracterizadas por um domínio de resistência G^{hom} , idêntico em qualquer ponto da estrutura. O problema inicial da determinação do domínio K dos carregamentos potencialmente suportáveis da estrutura Ω é então substituído por um problema associado, que consiste em determinar o domínio K^{hom} de carregamentos potencialmente suportáveis da estrutura homogênea associada Ω^{hom} , definido por:

$$K^{\text{hom}} = \left\{ \underline{Q} \mid \exists \underline{\sigma} \text{ E.A. e } \underline{\sigma}(\underline{X}) \in G^{\text{hom}}(\underline{X}), \forall \underline{X} \in \Omega^{\text{hom}} \right\} \quad (4.2)$$

A determinação de K^{hom} necessita da determinação prévia do domínio de resistência macroscópico G^{hom} , que caracteriza as capacidades de resistência do material homogêneo associado. Esta determinação de G^{hom} consiste na resolução de um problema auxiliar de análise limite definido sobre o volume elementar representativo do material (Figura 4.1 (b)). A determinação de G^{hom} depende, então, da definição do VER, efetuada através da especificação das fases que constituem o material heterogêneo, da descrição das suas características geométricas e mecânicas (resistência) e também a descrição da distribuição espacial (ou morfologia) das fases: a fração volumétrica e a forma e orientação das heterogeneidades.

4.1.2 Critério de Resistência Macroscópico

O domínio de resistência macroscópico G^{hom} caracteriza, em qualquer ponto da estrutura, as capacidades de resistência do seu material constitutivo, limitando os estados de tensão macroscópicos. Sua construção ocorre através de um processo de resolução de um problema de análise limite colocado sobre o volume elementar representativo do material analisado. No caso de meios periódicos, da sua célula base.

4.1.2.1 Meios Periódicos

Em geral, a definição de um modo de carregamento está sujeita a determinação conjunta do espaço vetorial \mathcal{S} dos campos de tensão estaticamente admissíveis e do espaço \mathcal{C} dos campos de velocidade cinematicamente admissíveis. No material com estrutura periódica, dada a periodicidade da célula base, estes espaços são definidos da seguinte forma:

Um campo de tensão $\underline{\underline{\sigma}}$ definido em qualquer ponto \underline{x} da célula base pertence a \mathcal{S} se e somente se $\underline{\underline{\sigma}}$ verifica:

- $\text{div}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in A,$
- $[\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{n} = 0$ ao longo de uma superfície de descontinuidade de $\underline{\underline{\sigma}}$ de normal $\underline{n},$
- $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ antiperiódico em $A.$

A antiperiodicidade de $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ significa que os vetores de tensão são opostos em dois pontos quaisquer de ∂A , homólogos por periodicidade, onde \underline{n} é o vetor normal ao exterior.

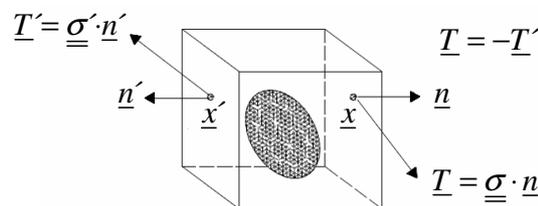


Figura 4.2– Antiperiodicidade do vetor de tensão.

Da mesma forma, um campo de velocidade \underline{v} pertence a \mathcal{C} se e somente se:

- $\underline{v}^*(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}) - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in A,$
- \underline{v}^* periódico em $A,$

onde $\underline{\underline{D}}$ é o tensor da taxa de deformação macroscópica associado a \underline{v} :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2|A|} \int_{\partial A} (\underline{n} \otimes \underline{v} + \underline{v} \otimes \underline{n}) dS = \langle \underline{\underline{d}} \rangle \quad (4.3)$$

ou igualmente:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{|A|} \int_A \underline{\underline{d}} dA + \frac{1}{2|A|} \int_{\Sigma} (n_{\Sigma} \otimes [\underline{v}] + [\underline{v}] \otimes n_{\Sigma}) d\Sigma \quad (4.4)$$

onde, $\underline{\underline{d}}$ representa a taxa de deformação associada a \underline{v} , Σ é o conjunto de superfícies de descontinuidades do campo de velocidade \underline{v} e $[\underline{v}]$ o valor desta descontinuidades. n_{Σ} designa o vetor normal a Σ .

A periodicidade do campo \underline{v}^* significa que, em dois pontos quaisquer de ∂A , homólogos por periodicidade, \underline{v}^* possui valores iguais. Esta condição pode ser expressa pelo fato que em qualquer ponto da célula, a taxa de deformação é a soma de uma taxa de deformação homogênea (sua média volumétrica $\underline{\underline{D}}$) e uma flutuação $\underline{\underline{d}}^*$ periódica, cuja média volumétrica sobre A é nula:

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{d}}(\underline{x})^* \quad \forall \underline{x} \in A \quad (4.5)$$

com

$$\underline{\underline{d}}^* = \frac{1}{2} (\text{grad} \underline{v}^* + {}^t \text{grad} \underline{v}^*) \quad \langle \underline{\underline{d}}^* \rangle = 0 \quad (4.6)$$

Suquet (1982) mostrou que os espaços \mathcal{S} e \mathcal{C} definem um modo de carregamento da célula base que depende linearmente de seis parâmetros escalares. Mais precisamente, os componentes em um sistema de referência ortonormal, do tensor de tensões macroscópicas $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ (média volumétrica sobre a célula base de todos os elementos $\underline{\underline{\sigma}}$ de \mathcal{S}), desempenham o papel de parâmetros de carregamento. Da mesma forma, os componentes do tensor de taxa de deformação macroscópica $\underline{\underline{D}} = \langle \underline{\underline{d}} \rangle$ representam os parâmetros cinemáticos associados por dualidade. Diz-se, então, que a célula base é submetida a um carregamento macroscópico $\underline{\underline{\Sigma}}$, ou que uma taxa de deformação macroscópica $\underline{\underline{D}}$ é imposta.

4.1.2.1.1 Definição estática de G^{hom}

O domínio G^{hom} constitui, portanto, o conjunto de todos os estados de tensão macroscópica $\underline{\underline{\Sigma}}$ obtidos efetuando-se a média volumétrica sobre a célula base de todos os campos de tensão

$\underline{\underline{\sigma}}$ periódicos, em equilíbrio e respeitando o critério de resistência $G(\underline{x})$ em qualquer ponto. O critério de resistência macroscópico G^{hom} depende, desta forma, das capacidades de resistência dos diferentes materiais constituintes que compõem o meio heterogêneo, incluindo as interfaces de contato entre estes materiais.

$$G^{\text{hom}} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \exists \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}, \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in A \right\} \quad (4.7)$$

É importante ressaltar que em função da convexidade de $G(\underline{x})$ em qualquer ponto da célula base, o domínio G^{hom} , assim definido, é também convexo.

4.1.2.1.2 Definição cinemática (dual) de G^{hom}

A convexidade de G^{hom} permite sua definição de uma forma dual à da Equação 4.7. A definição cinemática dual de G^{hom} se dá através do emprego da sua função suporte $\pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}})$:

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) = \sup_{\underline{\underline{D}} \in R^6} \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}; \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \right\} \quad (4.8)$$

De Bujan (1986) estabeleceu que:

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) = \min_{\underline{v} \in C} \left\{ \langle \pi(\underline{d}) \rangle \right\} \quad (4.9)$$

onde \underline{v} é um campo de velocidade cinematicamente admissível, ou seja, composto por uma velocidade com taxa de deformação homogênea mais uma perturbação periódica ($\underline{v} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x} + \underline{v}^*$). A taxa de deformação \underline{d} , portanto, é também um campo periódico: $\underline{d} = \underline{\underline{D}} + \underline{d}^*$ e a média $\langle \underline{d} \rangle$ calculada sobre a célula base é igual a $\underline{\underline{D}}$, uma vez que $\langle \underline{d}^* \rangle$ se anula.

$$\langle \pi(\underline{d}) \rangle = \frac{1}{|A|} \int_A \pi(\underline{d}) \, dA + \frac{1}{|A|} \int_{\Sigma} \pi(n_{\Sigma}, [\underline{v}]) \, d\Sigma \quad (4.10)$$

com π sendo a função de apoio do domínio G :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in A \quad \pi(\underline{d}) &= \sup \{ \underline{\sigma} : \underline{d}, \underline{\sigma} \in G(\underline{x}) \} \\ \forall \underline{x} \in \Sigma \quad \pi(\underline{n}_\Sigma, [\underline{v}]) &= \sup \{ (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_\Sigma) \cdot [\underline{v}], \underline{\sigma} \in G(\underline{x}) \} \end{aligned} \quad (4.11)$$

As funções de apoio de um domínio são uma forma alternativa para a representação do mesmo, ou seja, o domínio de resistência também pode ser representado empregando-se sua função de apoio ($\underline{\sigma} \in G \Leftrightarrow \forall \underline{d} \quad \underline{\sigma} : \underline{d} \leq \pi(\underline{d})$).

Conhecida a função de apoio π^{hom} , a definição cinemática de G^{hom} é a seguinte:

$$G^{\text{hom}} = \bigcap_{\underline{D} \in R^6} \{ \underline{\Sigma} \mid \underline{\Sigma} : \underline{D} \leq \pi^{\text{hom}}(\underline{D}) \} \quad (4.12)$$

ou seja, a interseção no espaço das tensões macroscópicas dos espaços definidos por (Figura 4.3):

$$\underline{\Sigma} : \underline{D} \leq \pi^{\text{hom}}(\underline{D}) \quad (4.13)$$

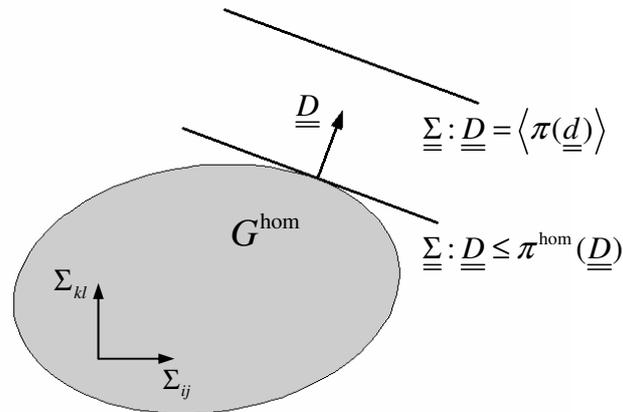


Figura 4.3– Abordagem cinemática de G^{hom} .

4.1.2.2 Meios Não Periódicos

No material com estrutura periódica, onde é possível definir uma célula base, o modo de carregamento desta está definido de forma única (as condições de periodicidade impõem de maneira única as condições de contorno sobre a célula base). No caso de meios aleatórios ou desordenados não existe uma definição única para as condições de contorno sobre o VER, mas condições de contorno compatíveis com a regra das médias.

Classicamente, dois modos de carregamento são adotados para definir a solicitação do VER:

- através da imposição de uma tensão homogênea sobre o contorno do VER ∂V :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \quad \forall \underline{\underline{x}} \in \partial V \quad (4.14)$$

- através da imposição de uma taxa de deformação homogênea sobre o contorno do VER ∂V :

$$\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{x}} \quad \forall \underline{\underline{x}} \in \partial V \quad (4.15)$$

onde $\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}})$ constitui o campo de velocidades no VER. Além disso, lembra-se que a taxa de deformação $\underline{\underline{d}}$, associada a $\underline{\underline{v}}$, é dada pela relação:

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\text{grad} \underline{\underline{v}} + {}^t \text{grad} \underline{\underline{v}}) \quad (4.16)$$

Se o modo de carregamento é definido por (4.14), então é possível mostrar que a tensão macroscópica $\underline{\underline{\Sigma}}$ é a média volumétrica sobre o VER da tensão microscópica $\underline{\underline{\sigma}}$. Por definição, a taxa de deformação macroscópica $\underline{\underline{D}}$ é obtida pela média volumétrica sobre o VER da taxa de deformação microscópica $\langle \underline{\underline{d}} \rangle$.

Para o caso em que o modo de carregamento é definido por (4.15), mostra-se que:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}) dV = \langle \underline{\underline{d}} \rangle \quad (4.17)$$

e por definição, a tensão macroscópica é a média volumétrica sobre o VER da tensão microscópica.

Uma vez que o modo de carregamento do VER no caso de materiais não periódicos pode ser definido de duas formas diferentes, dispõem-se naturalmente de duas definições distintas para o domínio de resistência macroscópico.

4.1.2.2.1 Tensão Homogênea sobre o Contorno do VER

Considerando o modo de carregamento por tensão homogênea, definido por (4.14), o domínio de resistência macroscópico G_{Σ}^{hom} é definido por

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_{\Sigma}^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 & (a) \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} & \forall \underline{x} \in \partial V & (b) \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in V & (c) \end{cases} \quad (4.18)$$

onde $G(\underline{x})$ é o domínio de resistência do material no ponto \underline{x} do VER, ou seja, o conjunto de tensores de tensão $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ admissíveis. No caso do concreto reforçado com fibras, por exemplo, tem-se $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^m \quad \forall \underline{x} \in V^m$ para a matriz, e $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^f \quad \forall \underline{x} \in V^f$ para as fibras. O domínio de resistência, respectivamente, para a matriz e para as fibras, também pode ser representado empregando-se seus critérios de resistência: $\underline{\underline{\sigma}} \in G^m \Leftrightarrow F^m(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ e $\underline{\underline{\sigma}} \in G^f \Leftrightarrow F^f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$, onde F^m e F^f são respectivamente os critérios de ruptura da matriz e da fibra. É importante salientar que para muitos materiais heterogêneos, como por exemplo, o CRFA, a capacidade de resistência das heterogeneidades (fibras) é superior à da matriz, ou seja, $G^m \subset G^f$.

Para a determinação de um limite inferior do domínio de resistência do meio homogeneizado considera-se um campo de tensão micro constante:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (4.19)$$

Se o campo de tensão $\underline{\underline{\Sigma}} \in G^m$, então $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}$ é estaticamente admissível, uma vez que $\underline{\underline{\Sigma}}$ satisfaz equações de equilíbrio (Equação 4.18 (a)) e é consistente com condições de contorno (Equação 4.18 (b)). Adicionalmente, por definição, $\underline{\underline{\sigma}} \in G^m$ e como $G^m \subset G^f$, tem-se $\underline{\underline{\sigma}} \in G^f$. Desta forma também a condição (Equação 4.18 (c)) é satisfeita.

Por definição,

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_{\Sigma}^{\text{hom}} \Rightarrow G^m \subset G_{\Sigma}^{\text{hom}} \quad (4.20)$$

A capacidade de resistência do meio homogeneizado é, portanto, maior do que a capacidade de resistência da matriz, o que constitui um resultado intuitivo. O procedimento descrito anteriormente, com a consideração de um campo de tensões, constitui uma abordagem estática.

Para a determinação de um limite superior do domínio de resistência do meio homogeneizado, considera-se uma taxa de deformação constante no meio heterogêneo:

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (4.21)$$

o qual corresponde a um campo de velocidade cinematicamente admissível.

$$\underline{\underline{v}}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (4.22)$$

Trata-se da consideração da abordagem cinemática. Para tanto é necessário o emprego das funções de apoio dos domínios de resistência da matriz e das heterogeneidades (no caso do CRF, das fibras), respectivamente, π^m e π^f .

A caracterização cinemática do domínio G_Σ^{hom} , empregando sua função de apoio π_Σ^{hom} , é descrita abaixo

$$\forall \underline{\underline{D}} \quad \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi_\Sigma^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) \quad (4.23)$$

onde

$$\pi_\Sigma^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) = \min_{\underline{\underline{v}}/\langle \underline{\underline{d}} \rangle = \underline{\underline{D}}} \langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle \quad (4.24)$$

Através da abordagem cinemática, empregando-se 4.123, o teorema cinemático indica que:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_\Sigma^{\text{hom}} \Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle \quad (4.25)$$

Como $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{D}}$ constante

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_\Sigma^{\text{hom}} \Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \langle \pi(\underline{\underline{D}}) \rangle = (1-f)\pi^m(\underline{\underline{D}}) + f\pi^f(\underline{\underline{D}}) \quad (4.26)$$

Introduzindo-se o domínio G^C , definido pela função de apoio $\pi^C(\underline{\underline{D}}) = \langle \pi(\underline{\underline{D}}) \rangle$

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_{\Sigma}^{\text{hom}} \Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi^C(\underline{\underline{D}})}_{\underline{\underline{\Sigma}} \in G^C} \quad \forall \underline{\underline{D}} \quad (4.27)$$

e

$$G_{\Sigma}^{\text{hom}} \subset G^C \quad (4.28)$$

A combinação das abordagens estática (Equação 4.20) e cinemática (Equação 4.28) fornecem para G_{Σ}^{hom} os seguintes limites

$$G^m \subset G_{\Sigma}^{\text{hom}} \subset G^C \quad (4.29)$$

4.1.2.2 Deformação Homogênea sobre o Contorno do VER

Considerando agora o modo de carregamento por deformação homogênea, definido por (4.15), o domínio de resistência macroscópico G_D^{hom} é definido por

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_D^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 & (a) \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle & (b) \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \in G(\underline{\underline{x}}) \quad \forall \underline{\underline{x}} \in V & (c) \end{cases} \quad (4.30)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado anteriormente, para a determinação de um limite inferior para o domínio de resistência do meio homogeneizado, considera-se um campo de tensão micro constante (Equação 4.19), o qual constitui uma abordagem estática.

O campo simplificado de tensão $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}$ satisfaz as equações de equilíbrio (Equação 4.30 (a)) e a regra das médias (Equação 4.30 (b)):

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = (1-f) \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_m + f \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_f = (1-f) \underline{\underline{\Sigma}} + f \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} \quad (4.31)$$

Neste caso, apenas condições de contorno em taxa de deformação são consideradas.

Além disso, se $\underline{\underline{\Sigma}} \in G^m$, então, por definição, $\underline{\underline{\sigma}} \in G^m$ e como $G^m \subset G^f$, tem-se $\underline{\underline{\sigma}} \in G^f$. Assim, também a condição (Equação 4.30 (c)) é satisfeita. Por definição,

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_D^{\text{hom}} \Rightarrow G^m \subset G_D^{\text{hom}} \quad (4.32)$$

Buscando-se determinar um limite superior para o domínio de resistência do meio homogeneizado, considera-se uma taxa de deformação constante no meio heterogêneo (Equação 4.21), a qual corresponde a um campo de velocidade cinematicamente admissível (compatível com as condições de contorno do problema).

Novamente emprega-se o conceito de função de apoio do domínio de resistência, neste caso π_D^{hom} , para a caracterização cinemática do domínio G_D^{hom} :

$$\forall \underline{\underline{D}} \quad \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi_D^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) \quad (4.33)$$

onde

$$\pi_D^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) = \min_{\substack{v/v(x)=\underline{\underline{D}} \cdot x \\ \forall x \in \partial V}} \langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle \quad (4.34)$$

O teorema cinemático indica que

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_D^{\text{hom}} \Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle \quad (4.35)$$

Como $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{D}}$ constante

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_D^{\text{hom}} \Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \langle \pi(\underline{\underline{D}}) \rangle = (1-f)\pi^m(\underline{\underline{D}}) + f\pi^f(\underline{\underline{D}}) \quad (4.36)$$

Empregando o domínio G^C , introduzido anteriormente, e definido pela função de apoio $\pi^C(\underline{\underline{D}}) = \langle \pi(\underline{\underline{D}}) \rangle$

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_D^{\text{hom}} \Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi^C(\underline{\underline{D}})}_{\forall \underline{\underline{D}}} \quad \forall \underline{\underline{D}} \quad (4.37)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^C$$

e

$$G_D^{\text{hom}} \subset G^C \quad (4.38)$$

A combinação das abordagens estática (Equação 4.32) e cinemática (Equação 4.37) fornecem para G_D^{hom} os seguintes limites:

$$G^m \subset G_D^{\text{hom}} \subset G^C \quad (4.39)$$

Na determinação das capacidades de resistência macroscópica, diferentemente do que ocorre na homogeneização elástica linear, a equivalência entre as duas abordagens, com condições de contorno em tensão e em deformação homogênea, não está estabelecida.

Conforme visto anteriormente (no capítulo sobre elasticidade), a determinação das propriedades elásticas macroscópicas através de condições de contorno em tensão e deslocamento são equivalentes quando a condição de separação de escalas é respeitada, ou seja, quando o tamanho das heterogeneidades é muito menor do que o tamanho do VER. Esta equivalência foi estabelecida por Hill (1967) e Mandel (1972).

Do ponto de vista puramente teórico, as condições de equivalência entre as duas abordagens definidas pelas Equações 4.14 e 4.15 não estão estabelecidas. Trata-se, portanto de um problema que permanece aberto. Porém, é razoável esperar que, se a condição de separação de escala é satisfeita, os domínios G_Σ^{hom} e G_D^{hom} sejam pouco diferentes. É, entretanto, possível verificar que:

$$G_\Sigma^{\text{hom}} \subset G_D^{\text{hom}} \quad (4.40)$$

Se o campo de tensão $\underline{\underline{\underline{\sigma}}} \in G_\Sigma^{\text{hom}}$, então $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ obrigatoriamente satisfaz as condições 4.18 (a) ($\text{div} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = 0$), 4.18 (b) ($\underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\underline{\Sigma}}} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{x} \in \partial V$) e 4.18 (c) ($\underline{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V$). As condições 4.18 (a) e 4.18 (c) também são condições para que $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ pertença à G_D^{hom} (respectivamente, condições 4.30 (a) e 4.30 (c)). A partir de 4.18 (b) é possível mostrar $\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \rangle$. Assim, se a tensão $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ satisfaz 4.18 (b), também satisfaz 4.30 (b), então $\underline{\underline{\underline{\sigma}}} \in G_D^{\text{hom}}$ e, portanto $G_\Sigma^{\text{hom}} \subset G_D^{\text{hom}}$.

Outra forma de se obter o mesmo resultado é através do emprego da abordagem cinemática. Considera-se, neste caso, as funções de apoio para o domínio de resistência G_{Σ}^{hom} (Equação 4.24) e para G_D^{hom} (Equação 4.34). A partir de $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{D} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial V$ é possível mostrar $\underline{D} = \langle \underline{d} \rangle$, então

$$\pi_{\Sigma}^{\text{hom}}(\underline{D}) \leq \pi_D^{\text{hom}}(\underline{D}) \Rightarrow G_{\Sigma}^{\text{hom}} \subset G_D^{\text{hom}} \quad (4.41)$$

4.2 DOMÍNIO DE RESISTÊNCIA PARA O CRFA

4.2.1 Critério de Resistência para o CRFA – Modelo Aproximado

No CRFA, as fibras estão aleatoriamente distribuídas na matriz. Cada orientação constitui uma família de heterogeneidades, caracterizada pela sua direção. O CRFA constitui, portanto um meio aleatório (Figura 4.4 (a)) composto por uma matriz cimentícia e pelas i (inteiro qualquer) famílias de fibras, cada qual caracterizada pela sua direção \underline{e}_i e pelo seu fator de aspecto l_f / d_f (comprimento / diâmetro). Observa-se que para o meio aleatório \underline{e}_i descreve todas as direções do espaço tridimensional.

A construção do domínio de resistência macroscópico G^{hom} para o CRFA resulta da resolução de um problema de análise limite colocado sobre o seu volume elementar representativo. Para tanto é necessário o conhecimento dos domínios de resistência dos seus constituintes (ou seja, da matriz de concreto, das fibras e da interface fibra-matriz), da sua configuração geométrica e da fração volumétrica das fibras.

No presente estudo algumas simplificações foram adotadas para a obtenção do domínio de resistência macroscópico do CRFA de forma analítica. Primeiramente foi admitido que a resistência macroscópica de um meio formado por fibras curtas aleatoriamente distribuídas pode ser obtido considerando-se uma equivalência entre este material e um meio fictício definido por uma matriz de concreto reforçado com fibras longas. Uma segunda simplificação refere-se à consideração de um meio fictício com fibras longas dispostas em três direções perpendiculares para o estudo do meio aleatório, uma vez que a análise com um número

maior de direções envolveria uma formulação mais complexa. Este conceito está representado na Figura 4.4.

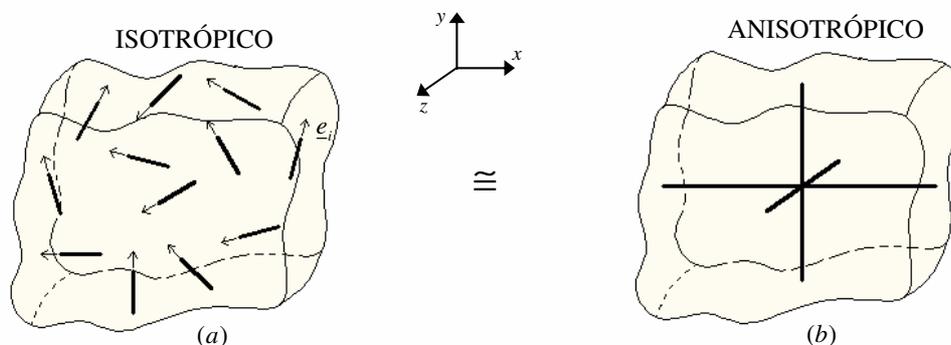


Figura 4.4 – Meio formado por fibras curtas aleatoriamente distribuídas e meio fictício associado.

Este meio fictício deverá apresentar um domínio de resistência macroscópico capaz de aproximar aquele obtido para o meio reforçado com fibras curtas e aleatórias. Para o estabelecimento da correlação entre as propriedades de resistência destes dois meios, ou seja, a determinação das propriedades fictícias a serem empregadas, são necessárias comparações entre os resultados analíticos obtidos e aqueles verificados em experimentos ou análises numéricas.

Assim como ocorre com as propriedades elásticas, a resistência também é influenciada pelo fator de aspecto das fibras e se aproxima a um limite assintótico quando o fator de aspecto aumenta (Kelly e Tyson, 1965). A influência do parâmetro l_f/d_f nas propriedades de resistência do material compósito pode ser obtida, por exemplo, ao se avaliar resultados de experimentos ou de análises numéricas de matrizes reforçadas com fibras de diferentes fatores de aspecto. A comparação destes resultados com os resultados analíticos, obtidos no presente estudo, permite a definição de propriedades fictícias variando em função do fator de aspecto das fibras.

Quanto às propriedades de resistência da interface fibra-matriz, será considerada aderência perfeita entre os constituintes.

4.2.2 Determinação do Critério de Resistência Macroscópico para o CRFA

Compósitos formados por uma matriz reforçada por fibras longas dispostas perpendicularmente em três direções (Figura 4.4 (b)) estão incluídos na categoria de materiais periódicos. Neste caso é, portanto, possível definir uma célula base A , a qual é a estrutura que se repete ao longo de todo o material compósito e que contém todas as informações necessárias para a sua completa descrição.

A determinação do domínio de resistência macroscópico G^{hom} deste material heterogêneo e periódico se reduz à resolução do problema de análise limite definido sobre a sua célula base:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ (e } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ contínuo)} \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ antiperiódico} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in A \end{cases} \quad (4.42)$$

onde $\underline{\underline{\Sigma}}$ é a tensão macroscópica e $\underline{\underline{\sigma}}$ representa o campo de tensão microscópica em A . $G(\underline{x})$ é o domínio de resistência do material no ponto \underline{x} de A , ou seja, o conjunto de tensores de tensão $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ admissíveis. No caso da matriz, tem-se $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^m \quad \forall \underline{x} \in A^m$ e para as fibras $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^f \quad \forall \underline{x} \in A^f$. Os domínios de resistência da matriz e das fibras podem também ser representados empregando-se suas funções critério de resistência, respectivamente, F^m e F^f ($\underline{\underline{\sigma}} \in G^m \Leftrightarrow F^m(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ e $\underline{\underline{\sigma}} \in G^f \Leftrightarrow F^f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$). É importante ressaltar que a Equação 4.42 representa a definição estática de G^{hom} . A definição cinemática dual de G^{hom} se dá através do emprego da sua função suporte $\pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}})$, conforme descrito anteriormente.

No caso de um compósito reforçado por fibras longas dispostas em três direções perpendiculares, orientadas segundo os eixos do sistema de referência $Oxyz$ (Figura 4.4 (b)), se a abordagem estática é adotada, um campo de tensão homogêneo por fase, que satisfaz todas as condições necessárias do problema (Equação 4.42), pode ser escolhido da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m & \forall \underline{x} \in A^m; \\ \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f & \forall \underline{x} \in A^f, f = x, y, z \end{cases} \quad (4.43)$$

com

$$\underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \quad e \quad \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \in G^f \quad (4.44)$$

A abordagem estática descrita, com a consideração de campos de tensão homogêneos por fase, constitui uma aproximação de G^{hom} pelo interior, uma vez que corresponde ao emprego do teorema do limite inferior da análise limite:

$$G_s^{\text{hom}} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{f=1}^3 f_f \sigma^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m; \quad \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \in G^f, f = x, y, z \end{array} \right\} \subset G^{\text{hom}} \quad (4.45)$$

onde s refere-se a estático e $f_f = |A^f|/|A|$ é a fração volumétrica das fibras.

Nas condições particulares definidas por $f \ll 1$ e $G^f \approx \tilde{G}^f / f \gg G^m$, onde \tilde{G}^f é um domínio fixo convexo limitado (*bounded convex domain*), de Buhan e Taliercio (1991) mostram que:

$$G^{\text{hom}} \approx G_s^{\text{hom}} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m, \quad \sigma_f \in [\tilde{\sigma}_f^-, \tilde{\sigma}_f^+] \end{array} \right\} \quad (4.46)$$

onde os parâmetros $\tilde{\sigma}_f^+ = \sup \{ \sigma | \sigma \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \in \tilde{G}^f \} = f \sup \{ \sigma | \sigma \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \in G^f \} = f \sigma_f^+$ e $\tilde{\sigma}_f^- = \inf \{ \sigma | \sigma \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \in \tilde{G}^f \} = f \inf \{ \sigma | \sigma \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \in G^f \} = f \sigma_f^-$ representam, respectivamente, a resistência à tração e à compressão uniaxial das inclusões por unidade transversal de área. σ_f^+ e σ_f^- são, respectivamente, a resistência à tração e à compressão uniaxial das fibras.

Geometricamente, o domínio de resistência G^{hom} para um compósito formado por uma matriz reforçada por fibras longas dispostas em três direções perpendiculares, por exemplo, x , y e z , pode ser interpretado no espaço $R^6 = \{ \Sigma_{xx}, \Sigma_{yy}, \Sigma_{zz}, \Sigma_{xy}, \Sigma_{xz}, \Sigma_{yz} \}$ de tensões macroscópicas

como o envoltório (envelope) convexo de oito domínios obtidos pela translação do domínio de resistência da matriz das quantidades algébricas $f_x\sigma_x^-$ e $f_x\sigma_x^+$ ao longo do eixo Σ_{xx} , $f_y\sigma_y^-$ e $f_y\sigma_y^+$ ao longo do eixo Σ_{yy} e $f_z\sigma_z^-$ e $f_z\sigma_z^+$ ao longo do eixo Σ_{zz} . Estas translações no espaço das tensões macroscópicas expressam o reforço devido à presença das fibras.

A representação geométrica do domínio de resistência G^{hom} de um material compósito reforçado com fibras em três ou mais direções não é trivial. Podem ser identificadas ao longo do envoltório zonas onde um dos parâmetros, relacionados à tensão nas fibras (σ_x , σ_y e σ_z) tem um valor limite e também zonas onde dois ou três destes parâmetros têm um valor limite.

Na Figura 4.5, adaptada de Taliercio *et al.* (1991), está representado de forma genérica o domínio de resistência macroscópico no espaço das componentes da tensão macroscópicas Σ_{xx} , Σ_{yy} e Σ_{zz} de um material compósito formado por uma matriz reforçada com fibras nas direções x , y e z . Por uma questão de clareza, o caso particular de uma matriz com um domínio de resistência limitado e poliédrico é representado. As zonas identificadas como A são aquelas em que apenas um dos parâmetros (σ_x , σ_y e σ_z) tem um valor limite, enquanto que as zonas B e C são aquelas em que dois e três parâmetros, respectivamente, têm um valor limite.

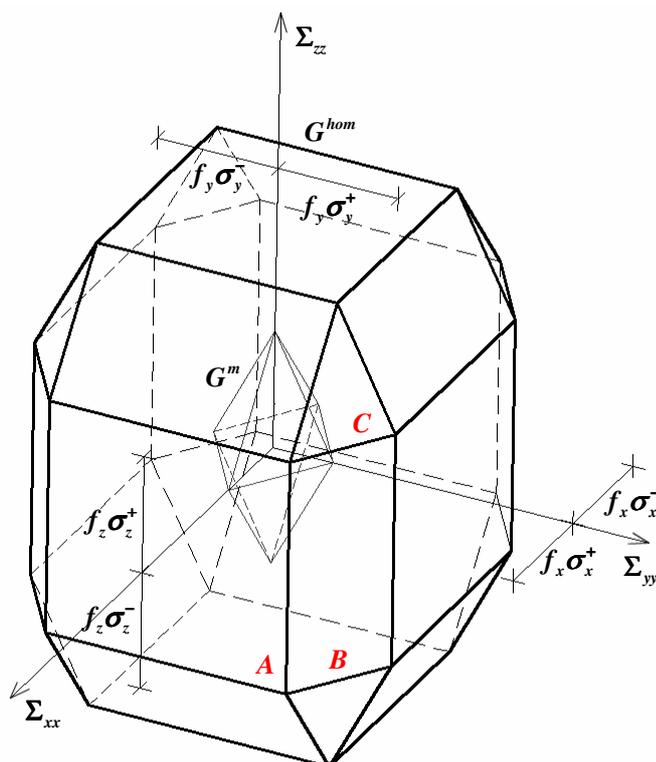


Figura 4.5 – Domínio de resistência macroscópico G^{hom} no espaço das componentes da tensão macroscópicas Σ_{xx} , Σ_{yy} e Σ_{zz} de um material reforçado por fibras longas nas direções x , y e z

Na Figura 4.6 está representada a intersecção do domínio de resistência macroscópico com o plano octaédrico. Neste caso, considera-se a matriz com domínio de resistência cuja intersecção com o plano octaédrico é circular e as fibras nas três direções se apresentam na mesma quantidade e mesmas resistências à compressão e à tração. Nesta representação podem ser verificadas as zonas B e C .

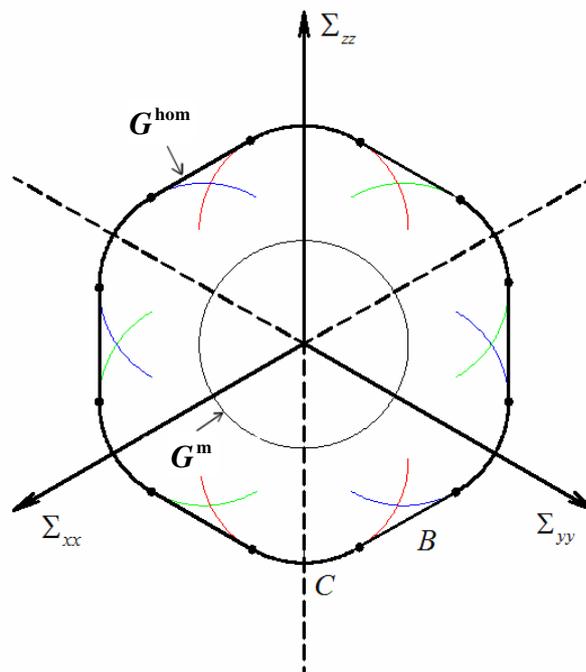


Figura 4.6 – Intersecção com o plano octaédrico do domínio de resistência macroscópico G^{hom} de um material reforçado por fibras nas direções x , y e z .

O domínio de resistência G^{hom} também pode ser representado empregando-se sua função critério de resistência F^{hom} , ou seja, os estados de tensão $\underline{\underline{\Sigma}}$ que satisfazem o critério macroscópico (Equação 4.46) constituem o domínio convexo G^{hom} , definido pelo critério de resistência $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0$:

$$F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{i=1}^3 \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \\ F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0, \quad \sigma_f \in I_f \end{cases} \quad (4.47)$$

com $I_f = [f_f \sigma_f^-, f_f \sigma_f^+]$.

A determinação das expressões matemáticas, que definem o domínio de resistência macroscópico, ou seja, o envelope convexo dos oito domínios obtidos pela translação do domínio de resistência da matriz, é possível através da definição dos parâmetros σ_x , σ_y e σ_z que minimizam a função:

$$g(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = F^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (4.48)$$

$\underline{\underline{\Sigma}}$ sendo prescrito. Ou seja:

$$F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \min_{\substack{\sigma_x \in I_x \\ \sigma_y \in I_y \\ \sigma_z \in I_z}} F^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (4.49)$$

As seguintes situações podem ser identificadas:

- $\begin{cases} \sigma_x \in \partial I_x \\ \sigma_y \in \partial I_y \\ \sigma_z \in \partial I_z \end{cases}$, onde ∂I_i , representa os valores limites do intervalo I_i , definido

anteriormente. Neste caso, os trechos do domínio de resistência macroscópico definidos como C são obtidos.

- $\begin{cases} \sigma_x \in \partial I_x \\ \sigma_y \in \partial I_y \\ \sigma_z \in \overset{\circ}{I}_z \end{cases}$ e permutações de x , y e z , onde $\overset{\circ}{I}_i$, representa os valores dentro do

intervalo I_i . Neste caso, os trechos do domínio de resistência macroscópico definidos como B são obtidos.

- $\begin{cases} \sigma_x \in \partial I_x \\ \sigma_y \in \overset{\circ}{I}_y \\ \sigma_z \in \overset{\circ}{I}_z \end{cases}$ e permutações de x , y e z . Neste caso, os trechos do domínio de

resistência macroscópico definidos como A são obtidos.

- $\begin{cases} \sigma_x \in \overset{\circ}{I}_x \\ \sigma_y \in \overset{\circ}{I}_y \\ \sigma_z \in \overset{\circ}{I}_z \end{cases}$. Neste caso, os trechos do domínio de resistência macroscópico G^{hom} estão

localizados no espaço complementar $\{\Sigma_{xy}, \Sigma_{xz}, \Sigma_{yz}\}$ de R^3 .

Na segunda situação descrita acima, quando dois dos parâmetros atingiram os seus valores limites, o terceiro é obtido anulando-se a derivada de $g(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ correspondente. Por exemplo, se $\sigma_x \in \partial I_x$ e $\sigma_y \in \partial I_y$, σ_z é obtido através de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \sigma_z}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) &= \frac{\partial F^m}{\partial \sigma_z}(\underline{\Sigma} - \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) = \\ &-\frac{\partial F^m}{\partial \sigma_{zz}}(\underline{\Sigma} - \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Em função da simetria que ocorre em relação às três direções consideradas, a resolução dos demais casos é obtida através de permutações de x , y e z .

Na terceira situação descrita acima, quando apenas um dos parâmetros atingiu os seus valores limites, os outros dois parâmetros são obtidos através do sistema formado pelas derivadas de $g(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ correspondentes anuladas. Por exemplo, se $\sigma_z \in \partial I_z$, σ_x e σ_y são obtidos através do sistema:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_x}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = 0 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_y}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = 0 \quad (4.51)$$

A resolução dos demais casos é obtida através de permutações de x , y e z .

4.2.2.1 Matriz caracterizada pelo Critério de Drucker-Prager

Os conceitos descritos até o momento são genéricos, ou seja, podem ser aplicados a matrizes obedecendo a qualquer critério de resistência G^m (definido pela respectiva função $F^m(\underline{\sigma}) \leq 0$). Nesta seção é descrita a formulação para uma matriz com comportamento isotrópico e que obedece ao critério de Drucker-Prager.

O critério de Drucker-Prager foi desenvolvido inicialmente para o estudo do comportamento de solos. Entretanto, tem sido aplicado também para o estudo de rochas, polímeros, espumas, concreto e outros materiais dependentes da pressão hidrostática. No espaço tridimensional de tensões principais, a superfície de Drucker-Prager apresenta a forma de um cone regular com vértice sobre o eixo hidrostático ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$) (Figura 4.7). No espaço bidimensional de tensões (ou seja, considerando uma seção transversal do cone no plano de tensões principais $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$, por exemplo), ele representa um domínio com forma elipsoidal.

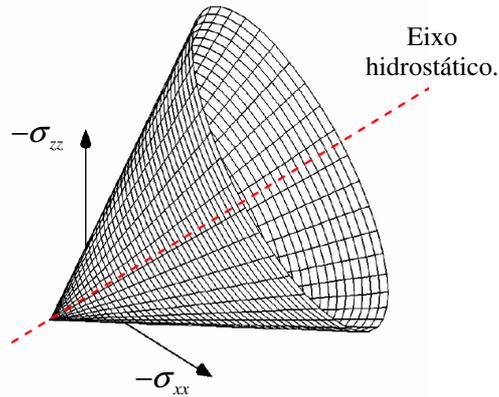


Figura 4.7 – Representação gráfica do critério de Drucker-Prager.

O critério de Drucker-Prager pode ser expresso da seguinte forma:

$$F^m(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}\| + \alpha_m (tr \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m) - \sigma_m \leq 0 \quad (4.52)$$

onde $\|\underline{\underline{s}}\| = (\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2}$ é a norma do tensor de segunda ordem $\underline{\underline{s}}$, o qual é a parte desviadora de $\underline{\underline{\sigma}}$, ou seja, $\underline{\underline{s}} = dev(\underline{\underline{\sigma}})$. σ_m representa o limite elástico do material sob estado de tração uniaxial. O escalar α_m é um parâmetro adimensional variando entre 0 (critério de von Mises) e 1, o qual considera a dependência do critério em relação à tensão hidrostática.

Observa-se que:

$$\frac{\partial F^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|} + \alpha_m \underline{\underline{1}} \quad (4.53)$$

Considerando as Equações 4.52 e 4.53, que expressam, respectivamente, o critério de Drucker-Prager e a derivada da função que o define em relação à $\underline{\underline{\sigma}}$, a resolução da Equação 4.50 leva a:

$$\sigma_z = \frac{3}{2} \left(S_{zz} + \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha_m}{\sqrt{1 - \alpha_m^2}} \sqrt{S : S - \frac{3}{2} S_{zz}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} - (\sigma_x - \sigma_y)(S_{xx} - S_{yy})} \right) \quad (4.54)$$

onde $\underline{\underline{S}} = dev(\underline{\underline{\Sigma}})$ representa a parte desviadora do tensor de tensão macroscópica.

Dois dos trechos B do domínio de resistência macroscópico são então obtidos considerando-se:

$$\sigma_z(\underline{\underline{\Sigma}}) = \begin{cases} f_z \sigma_z^- & \text{se } \sigma_z \leq f_z \sigma_z^- \\ \sigma_z \quad \begin{array}{l} \text{com } \sigma_x = f_x \sigma_x^+ \text{ e } \sigma_y = f_y \sigma_y^- \\ \text{ou } \sigma_x = f_x \sigma_x^- \text{ e } \sigma_y = f_y \sigma_y^+ \end{array} & \text{se } \sigma_z \in I_z \\ f_z \sigma_z^+ & \text{se } \sigma_z \geq f_z \sigma_z^+ \end{cases} \quad (4.55)$$

na expressão $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = F^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$. Os demais trechos B são obtidos pelas permutações de x , y e z nas Equações 4.50, 4.54 e 4.55.

Considerando as Equações 4.52 e 4.53, a resolução do sistema de equações 4.51 fornece as expressões para um dos trechos A . Do sistema 4.51 obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2S_{xx} + S_{yy} + \sigma_z + 2\sqrt{3} \frac{\alpha_m}{\sqrt{1-4\alpha_m^2}} + \sqrt{S_{xy}^2 + S_{xz}^2 + S_{yz}^2} \quad e \\ \sigma_y &= 2S_{yy} + S_{xx} + \sigma_z + 2\sqrt{3} \frac{\alpha_m}{\sqrt{1-4\alpha_m^2}} + \sqrt{S_{xy}^2 + S_{xz}^2 + S_{yz}^2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

O trecho A_3 do domínio de resistência macroscópico é então obtido considerando-se:

$$\begin{aligned} \sigma_x(\underline{\underline{\Sigma}}) &= \begin{cases} f_x \sigma_x^- & \text{se } \sigma_x \leq f_x \sigma_x^- \\ \sigma_x \quad \text{com } \sigma_z = f_z \sigma_z^+ & \text{se } \sigma_x \in I_x \\ f_x \sigma_x^+ & \text{se } \sigma_x \geq f_x \sigma_x^+ \end{cases} \\ \sigma_y(\underline{\underline{\Sigma}}) &= \begin{cases} f_y \sigma_y^- & \text{se } \sigma_y \leq f_y \sigma_y^- \\ \sigma_y \quad \text{com } \sigma_z = f_z \sigma_z^+ & \text{se } \sigma_y \in I_y \\ f_y \sigma_y^+ & \text{se } \sigma_y \geq f_y \sigma_y^+ \end{cases} \end{aligned} \quad (4.57)$$

na função $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = F^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$. Os demais trechos A são obtidos pelas permutações de x , y e z nas Equações 4.51, 4.56 e 4.57.

É importante ressaltar que $f_x \sigma_x^+ = f_y \sigma_y^+ = f_z \sigma_z^+ = -f_x \sigma_x^- = -f_y \sigma_y^- = -f_z \sigma_z^- = (f/3) \sigma_f^+$, sendo f a fração volumétrica das fibras e σ_f^+ a resistência à tração uniaxial das fibras.

4.2.2.1.1 Direções das Tensões Principais Colineares às Direções das Fibras

Considerando-se as direções das fibras e das tensões principais colineares, ou seja, $\Sigma_I = \Sigma_{xx}$, $\Sigma_{II} = \Sigma_{yy}$, $\Sigma_{III} = \Sigma_{zz}$ e $\Sigma_{xy} = \Sigma_{xz} = \Sigma_{yz} = 0$, as seguintes expressões são obtidas para os trechos B do domínio de resistência macroscópico a partir das Equações 4.54 e 4.55:

$$\begin{aligned}
 \text{Trecho } B_1: \Sigma_I &= \frac{(f_1 + f_2)(f_7 - f_8)}{f_9}, \text{ com } \sigma_x = f_x \sigma_x^+ \text{ e } \sigma_z = f_z \sigma_z^- \\
 \text{Trecho } B_2: \Sigma_{II} &= \frac{(f_3 + f_4)(-f_7 + f_8)}{f_9}, \text{ com } \sigma_y = f_y \sigma_y^+ \text{ e } \sigma_z = f_z \sigma_z^- \\
 \text{Trecho } B_3: \Sigma_{II} &= \frac{(f_5 - f_6)(f_7 - f_8)}{f_9}, \text{ com } \sigma_x = f_x \sigma_x^- \text{ e } \sigma_y = f_y \sigma_y^+ \\
 \text{Trecho } B_4: \Sigma_I &= \frac{(-f_1 + f_2)(f_7 + f_8)}{f_9}, \text{ com } \sigma_x = f_x \sigma_x^- \text{ e } \sigma_z = f_z \sigma_z^+ \\
 \text{Trecho } B_5: \Sigma_{II} &= \frac{(f_3 - f_4)(f_7 + f_8)}{f_9}, \text{ com } \sigma_y = f_y \sigma_y^- \text{ e } \sigma_z = f_z \sigma_z^+ \\
 \text{Trecho } B_6: \Sigma_{II} &= \frac{(f_5 + f_6)(-f_7 - f_8)}{f_9}, \text{ com } \sigma_x = f_x \sigma_x^+ \text{ e } \sigma_y = f_y \sigma_y^-
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

sendo $f_1 = \sqrt{3}(1 - \alpha_m^2)(-\sigma_x + \sigma_z - \Sigma_{III})$, $f_2 = \sqrt{1 - \alpha_m^2}(3\alpha_m(-\sigma_x - \sigma_z + \Sigma_{III}) - 2\sigma_m(1 + \alpha_m))$,
 $f_3 = \sqrt{3}(1 - \alpha_m^2)(\sigma_y - \sigma_z + \Sigma_{III})$, $f_4 = \sqrt{1 - \alpha_m^2}(3\alpha_m(\sigma_y + \sigma_z - \Sigma_{III}) + 2\sigma_m(1 + \alpha_m))$,
 $f_5 = \sqrt{3}(1 - \alpha_m^2)(\sigma_x - \sigma_y - \Sigma_{III})$, $f_6 = \sqrt{1 - \alpha_m^2}(3\alpha_m(\sigma_x + \sigma_y - \Sigma_{III}) + 2\sigma_m(1 + \alpha_m))$,
 $f_7 = 3\alpha_m\sqrt{1 - \alpha_m^2}$, $f_8 = \sqrt{3}(1 - \alpha_m^2)$ e $f_9 = 3(1 - \alpha_m^2)(1 - 4\alpha_m^2)$.

Enquanto as expressões que definem os trechos B_1 , B_2 , B_4 e B_5 são constantes para cada escolha das propriedades da matriz e do reforço e para cada Σ_{III} , as expressões para os trechos B_3 e B_6 são funções $f(\Sigma_I, \Sigma_{II}) = 0$.

As expressões obtidas para os trechos A do domínio de resistência macroscópico, considerando-se as direções das fibras e das tensões principais colineares, são descritas de forma simplificada abaixo:

$$\begin{aligned}
\text{Trecho } A_1: \Sigma_I &= \frac{3\alpha_m \sigma_x + \sigma_m (\alpha_m + 1)}{3\alpha_m}, \text{ com } \sigma_x = f_x \sigma_x^+ \\
\text{Trecho } A_2: \Sigma_{II} &= \frac{3\alpha_m \sigma_y + \sigma_m (\alpha_m + 1)}{3\alpha_m}, \text{ com } \sigma_y = f_y \sigma_y^+ \\
\text{Trecho } A_3: \Sigma_{III} &= \frac{3\alpha_m \sigma_z + \sigma_m (\alpha_m + 1)}{3\alpha_m}, \text{ com } \sigma_z = f_z \sigma_z^+
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Através das expressões acima, verifica-se que os trechos A_1 , A_2 , e A_3 são constantes em relação às componentes da tensão macroscópicas Σ_I , Σ_{II} e Σ_{III} , respectivamente. Os planos definidos pelas expressões 4.59 correspondem a planos sobre quatro vértices de quatro domínios obtidos pela translação do domínio de resistência da matriz.

As resistências à compressão uniaxial e biaxial do CRFA, respectivamente, f_c^{CRFA} e f_{cb}^{CRFA} , podem ser estimadas, através das considerações adotadas nesta seção, pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
f_c^{CRFA} &= \frac{(2 + \alpha_m)(f/3)\sigma_f^+ + (1 + \alpha_m)\sigma_m}{(\alpha_m - 1)} e \\
f_{cb}^{CRFA} &= \frac{(2 - \alpha_m)(f/3)\sigma_f^+ + (1 + \alpha_m)\sigma_m}{(2\alpha_m - 1)}
\end{aligned}$$

sendo f a fração volumétrica das fibras e σ_f^+ a resistência à tração uniaxial das fibras.

Na Figura 4.8 observa-se a intersecção do domínio de resistência macroscópico de um compósito reforçado com fibras nas direções x , y e z com o plano $\Sigma_{III}/\Sigma_0 = 0$ ao se considerar uma matriz obedecendo ao critério de Drucker-Prager. Σ_0 é uma tensão de referência. As intersecções com o mesmo plano do domínio de resistência da matriz e dos oito domínios obtidos pelas suas translações $f_x \sigma_x^\pm e_x + f_y \sigma_y^\pm e_y + f_z \sigma_z^\pm e_z$, também podem ser visualizadas. É possível verificar que o domínio de resistência macroscópico do compósito é o envoltório convexo destes oito domínios.

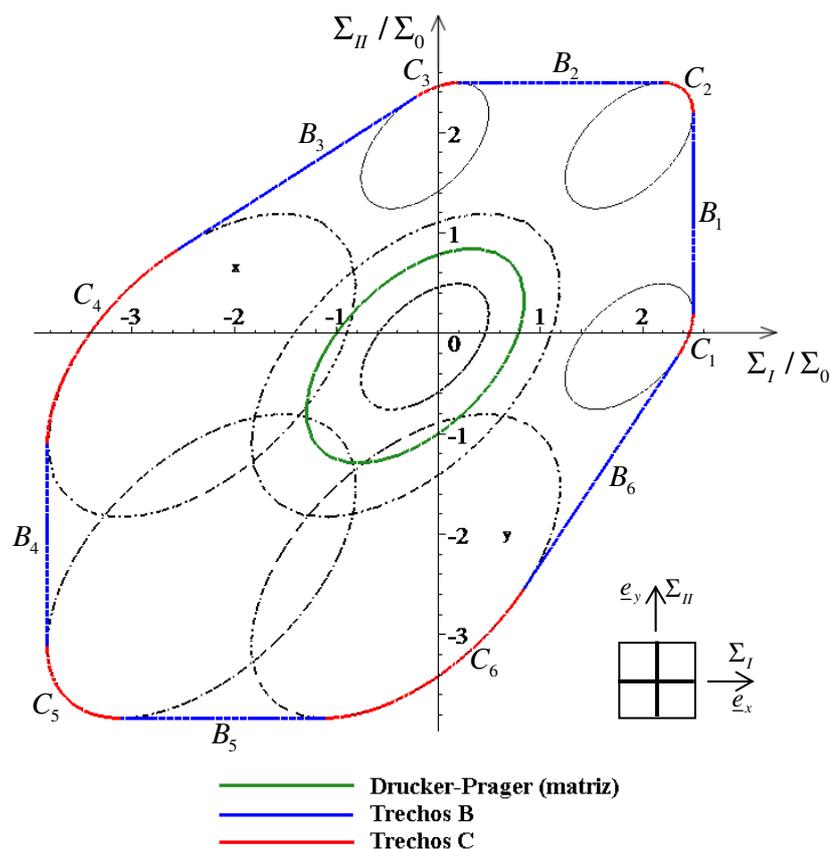


Figura 4.8 – Domínio de resistência macroscópico G^{hom} no plano Σ_I, Σ_{II} de um compósito reforçado nas direções x, y e z e cuja resistência da matriz é representada pelo critério Drucker-Prager.

Na Figura 4.9 estão representadas as intersecções do domínio de resistência macroscópico do compósito com os planos $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 0$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 0,7$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 1,41$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 2$ e $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 3,41$. As intersecções do domínio de resistência da matriz com estes planos (elipses) também estão representadas.

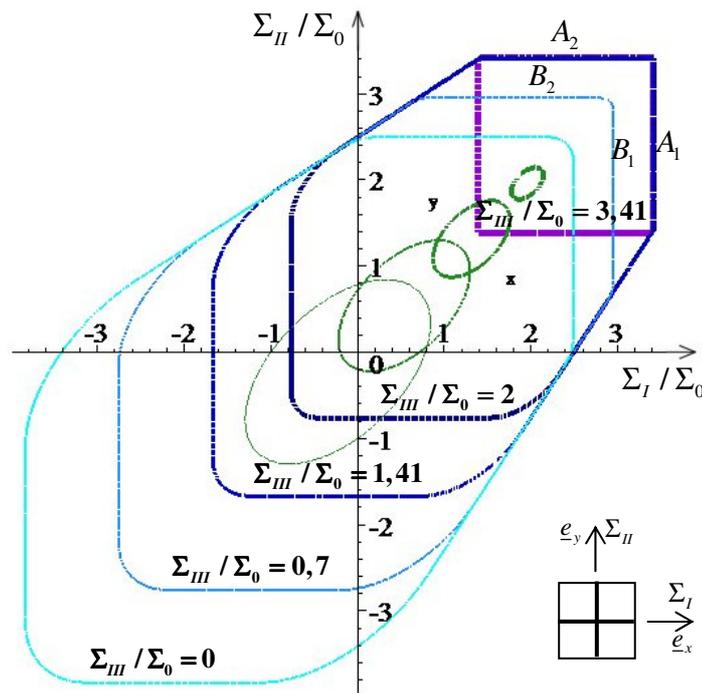


Figura 4.9 – Intersecções de G^{hom} e do domínio de resistência da matriz com os planos $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 0$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 0,7$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 1,41$, $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 2$ e $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 3,41$.

No plano $\Sigma_{III} = (3\alpha_m \sigma_z + \sigma_m(\alpha_m + 1)) / 3\alpha_m$, com $\sigma_z = f_z \sigma_z^-$, estão localizados os vértices dos domínios de resistência obtidos pelas translações $f_x \sigma_x^+ e_x + f_y \sigma_y^+ e_y + f_z \sigma_z^- e_z$ (translação vertical negativa) do domínio de resistência da matriz. Neste plano, os trechos C_1 , C_2 e C_3 representam três pontos (os vértices) e os trechos A_1 e B_1 e A_2 e B_2 se interceptam, ou seja, ocorre a intersecção entre os mesmos. Para tensões Σ_{III} abaixo deste valor (plano), apenas os trechos definidos como B e C ocorrem, assim como mostrado na Figura 4.8. Para tensões acima deste valor, as equações dos trechos A_1 e A_2 passam a definir o domínio de resistência macroscópico substituindo, respectivamente, as equações dos trechos B_1 e B_2 , como pode ser visualizado na Figura 4.9. No plano $\Sigma_{III} = (3\alpha_m \sigma_z + \sigma_m(\alpha_m + 1)) / 3\alpha_m$, com $\sigma_z = f_z \sigma_z^+$, por sua vez, estão localizados os vértices de todos os domínios de resistência obtidos pelas translações $f_x \sigma_x^+ e_x + f_y \sigma_y^+ e_y + f_z \sigma_z^+ e_z$ (translação vertical positiva) do domínio de resistência da matriz. Neste plano está localizado o trecho A_3 do domínio de resistência macroscópico do

compósito. Estados de tensões onde Σ_{III} possui um valor maior que este plano, representam a ruptura do material.

4.2.3 Qualificação do Modelo Analítico

Com o objetivo de qualificar a relevância dos resultados analíticos obtidos, efetua-se, nesta seção, a comparação dos mesmos com dados experimentais disponíveis na literatura. Adicionalmente e com o mesmo objetivo, a resolução do problema de análise limite colocado sobre o volume elementar representativo do material é efetuada numericamente. Para tanto, uma ferramenta numérica baseada no Método dos Elementos Finitos e na Teoria da Plasticidade até atingir o regime de escoamento plástico livre é empregada. Os resultados numéricos são também comparados aos analíticos. A abordagem numérica, além de permitir qualificar a relevância do modelo, permite analisar a influência da geometria real das fibras sobre a resistência do compósito.

4.2.3.1 Comparação dos Resultados Analíticos com Dados Experimentais

Os resultados obtidos a partir da teoria da homogeneização e da análise limite são comparados, nesta seção, aos resultados experimentais de Yin *et al.* (1989), de Lim e Nawy (2005), de Swaddiwudhipong e Seow (2006) e de Peres (2008), executados em concreto reforçado com fibras de aço.

Na análise, as propriedades reais do meio aleatório são usadas para a caracterização do meio fictício empregado (Figura 4.4).

Yin *et al.* (1989), em seus experimentos, empregaram fibras com razão de aspecto $l_f/d_f = 60$ e fração volumétrica de $f = 1\%$ e 2% . As resistências à compressão uniaxial e à compressão biaxial da matriz de concreto eram, respectivamente, $f_c^m = 37,6$ MPa e $f_{cb}^m = 1,34f_c^m$. Através destas resistências, obtêm-se os seguintes valores para os parâmetros do critério de Drucker-Prager: $\alpha_m = 0,2023$ e $\sigma_m = 24,94$ MPa. As fibras apresentavam uma resistência à tração uniaxial de 414 MPa. Na Figura 4.10 estão representados os resultados experimentais de Yin *et al.* (1989) e aqueles obtidos no presente estudo (linhas contínuas).

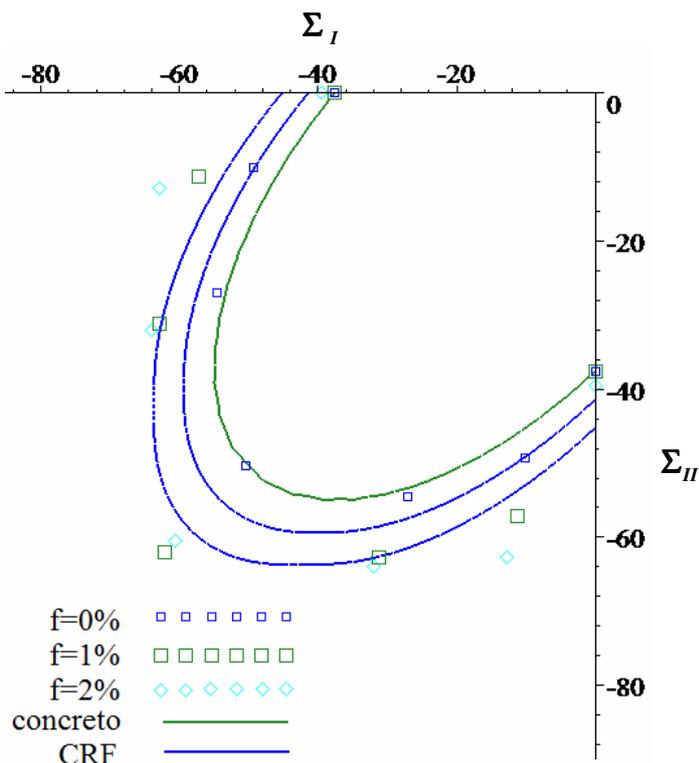


Figura 4.10 – Dados experimentais de Yin *et al.* (1989) e resultados analíticos do presente estudo.

Lim e Nawy (2005), em seus experimentos, empregaram fibras com razão de aspecto $l_f/d_f = 70$ e fração volumétrica de $f = 0,5\%$, 1% e $1,5\%$. As resistências à compressão uniaxial e à compressão biaxial da matriz de concreto eram, respectivamente, $f_c^m = 82,3$ MPa e $f_{cb}^m = 1,20f_c^m$. O valor de $f_{cb}^m = 1,16f_c^m$ foi, entretanto, considerado para que a superfície de Drucker-Prager melhor se aproximasse dos demais pontos experimentais de resistência da matriz de concreto sob compressão-compressão biaxial. Através destas resistências ($f_c^m = 82,3$ MPa e $f_{cb}^m = 1,16f_c^m$), obtêm-se os seguintes valores para os parâmetros do critério de Drucker-Prager: $\alpha_m = 0,12$ e $\sigma_m = 64,5$ MPa. As fibras apresentavam uma resistência à tração uniaxial de 1115 MPa. Na Figura 4.11 estão representados os resultados experimentais de Lim e Nawy (2005) e aqueles obtidos no presente estudo (linhas contínuas).

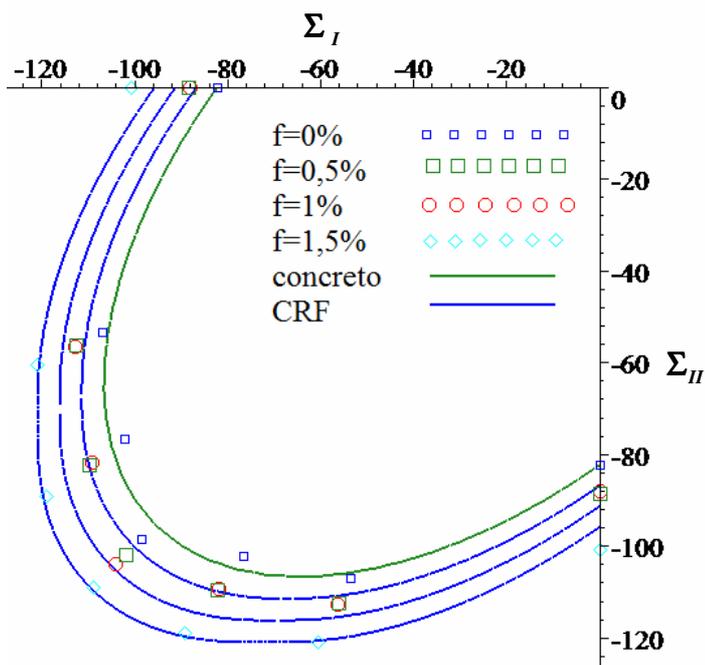


Figura 4.11 – Dados experimentais de Lim e Nawy (2005) e resultados obtidos no presente estudo.

Swaddiwudhipong e Seow (2006), em seus experimentos, empregaram fibras com razão de aspecto $l_f/d_f = 55$ e fração volumétrica de $f = 0,5\%$, 1% e $1,5\%$. As resistências à compressão uniaxial e à compressão biaxial da matriz de concreto eram, respectivamente, $f_c^m = 22,96$ MPa e $f_{cb}^m = 1,23f_c^m$. Através destas resistências, obtêm-se os seguintes valores para os parâmetros do critério de Drucker-Prager: $\alpha_m = 0,1575$ e $\sigma_m = 16,754$ MPa. As fibras apresentavam uma resistência à tração uniaxial de 1100 MPa. Na Figura 4.12 estão representados os resultados experimentais de Swaddiwudhipong e Seow (2006) e aqueles obtidos no presente estudo (linhas contínuas).

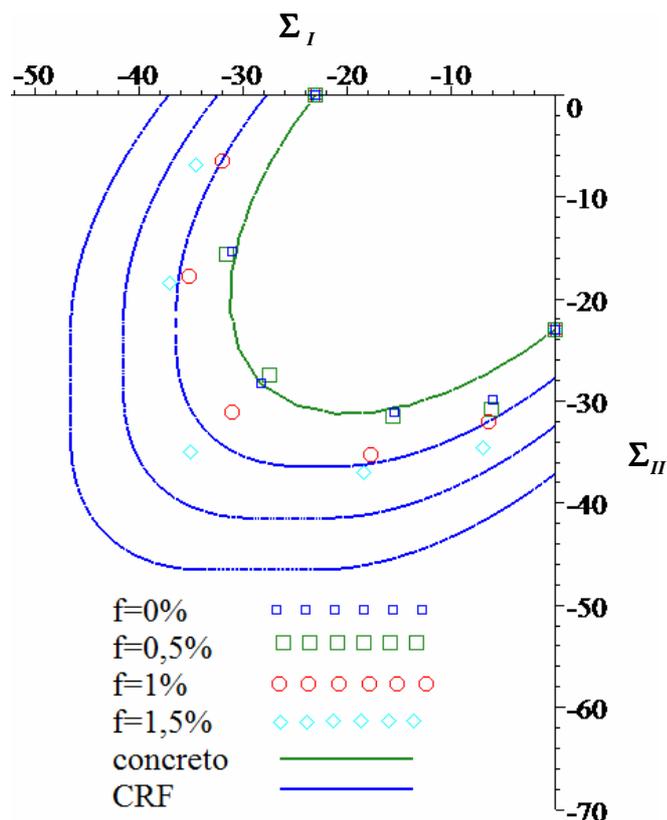


Figura 4.12 – Dados experimentais Swaddiwudhipong e Seow (2006) e resultados obtidos no presente estudo.

Peres (2008), em seus experimentos, empregou fibras com razão de aspecto $l_f/d_f = 44$ e fração volumétrica de $f = 0,5\%$, 1% e $1,5\%$. As resistências à compressão uniaxial e à compressão biaxial da matriz de concreto eram, respectivamente, $f_c^m = 28,24$ MPa e $f_{cb}^m = 1,16f_c^m$. Através destas resistências obtém os seguintes valores para os parâmetros do critério de Drucker-Prager: $\alpha_m = 0,121$ e $\sigma_m = 22,13$ MPa. As fibras apresentavam uma resistência à tração uniaxial de 1200 MPa. Na Figura 4.13 estão representados os resultados experimentais de Peres (2008) e aqueles obtidos no presente estudo (linhas contínuas).

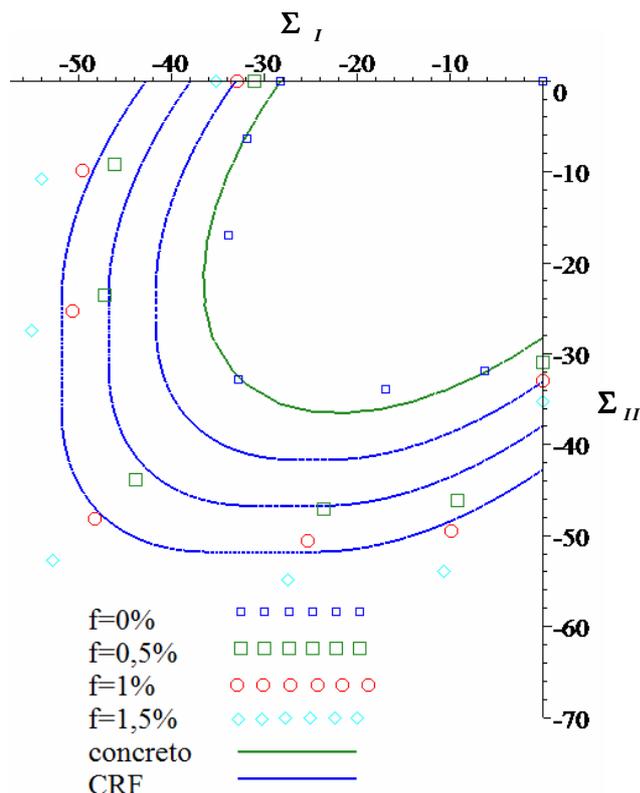


Figura 4.13 – Dados experimentais de Peres (2008) e resultados obtidos no presente estudo.

Os resultados apresentados acima confirmam que o uso do critério de Drucker Prager é adequado para o estudo do concreto sob estado de compressão biaxial. Este critério apresenta uma formulação mais simples do que os critérios de Ottosen e Willan-Warnke, por exemplo, não permitindo a caracterização do comportamento à tração e à compressão com os mesmos parâmetros. Entretanto ele permite realizar o estudo proposto, empregando as teorias da homogeneização e da análise limite, de forma analítica.

O efeito de “expansão” que ocorre no critério de resistência da matriz de concreto ao se adicionarem fibras pode ser obtido por meio da abordagem empregada no presente estudo. Todavia, através da comparação com os resultados experimentais de Yin *et al.* (1989) e Peres (2008), verifica-se que os resultados obtidos subestimam os valores da resistência à compressão biaxial e superestimam os resultados da resistência à compressão uniaxial. É importante ressaltar, primeiramente, que outros estudos (Williamson, 1974; Narayanan e Darwish, 1987; Bentur e Mindess, 2006; Lim e Oh, 1999) indicaram que o aumento da resistência à compressão uniaxial, em função da adição de fibras, pode ser maior do que aquele encontrado nos experimentos de Yin *et al.* (1989) e de Swaddiwudhipong e Seow

(2006). Além disso, os ensaios descritos nesta seção foram realizados em corpos de prova com dimensões maiores segundo as duas direções de aplicação de carga: Yin *et al.* (1989) – 15,2x15,2x3,8 cm³, Swaddiwudhipong e Seow (2006) – 15x15x4 cm³, e Peres (2008) – 15x15x5 cm³. Esta configuração de corpo de prova pode causar uma maior concentração de fibras segundo as suas maiores dimensões e, portanto, segundo as direções de carregamento. Este fato pode justificar a grande diferença encontrada entre os dados experimentais de resistência do CRFA sob compressão-compressão biaxial e os resultados analíticos.

Melhores aproximações foram encontradas ao se comparar o modelo analítico e os dados experimentais de Lim e Nawy (2005). Nestes experimentos foram empregados corpos de prova cúbicos (10x10x10 cm³), os quais podem ter possibilitado uma distribuição aleatória tridimensional para as fibras.

Finalmente, uma vez que a análise foi realizada considerando-se um meio fictício com fibras longas e as propriedades reais dos materiais, era esperado que fossem obtidos resultados maiores para o critério de resistência do material reforçado, em relação aos dados experimentais para fibras curtas. Estudos numéricos realizados, e detalhados na próxima seção, buscaram avaliar a influência de l_f/d_f na resistência do material compósito e nas propriedades fictícias do meio fictício empregado. Entretanto, a comparação dos resultados obtidos aos dados experimentais de Yin *et al.* (1989), Lim e Nawy (2005) e Peres (2008), indicam que para valores usuais da razão de aspecto l_f/d_f , o uso das propriedades reais para a caracterização do meio fictício pode ser apropriado. Seguindo este raciocínio, o fato dos resultados analíticos terem sido maiores, em relação aos dados experimentais de Swaddiwudhipong e Seow (2006), pode estar relacionado à consideração de aderência perfeita entre constituintes do material compósito, o que equivale a considerar o material da interface fibra/matriz com resistência infinita. Uma abordagem mais apropriada deve considerar as propriedades de resistência da interface na formulação do domínio de resistência macroscópico G^{hom} .

4.2.3.2 Comparação dos Resultados Analíticos com Simulações Numéricas

A fim de avaliar a relevância e a precisão do modelo, os resultados analíticos foram comparados também com aqueles obtidos através de simulações numéricas das propriedades

de resistência do CRFA. Para tanto, o problema de análise limite formulado sobre o volume elementar representativo (VER) do CRFA foi resolvido numericamente através de uma ferramenta numérica baseada no método de elementos finitos, no contexto da plasticidade.

Por simplicidade, um VER cúbico, de lado l_{VER} , é considerado. O carregamento do VER é definido pela deformação macroscópica:

$$\underline{\underline{E}} = E_0(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \gamma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad \text{com} \quad E_0 > 0 \quad (4.60)$$

onde o parâmetro real γ estabelece o caminho de carregamento no espaço bidimensional de deformações macroscópicas (estabelece a proporção com que a deformação E_0 é aplicada na direção do versor \underline{e}_y em relação à direção do versor \underline{e}_x). Este carregamento permitiu a comparação dos resultados numéricos com os resultados do modelo analítico no espaço bidimensional (plano) de tensões macroscópicas Σ_I, Σ_{II} .

Admite-se uma distribuição simétrica de fibras de forma que apenas um oitavo da geometria do VER, com condições de contorno apropriadas, seja considerado para a análise numérica (Figura 4.14).

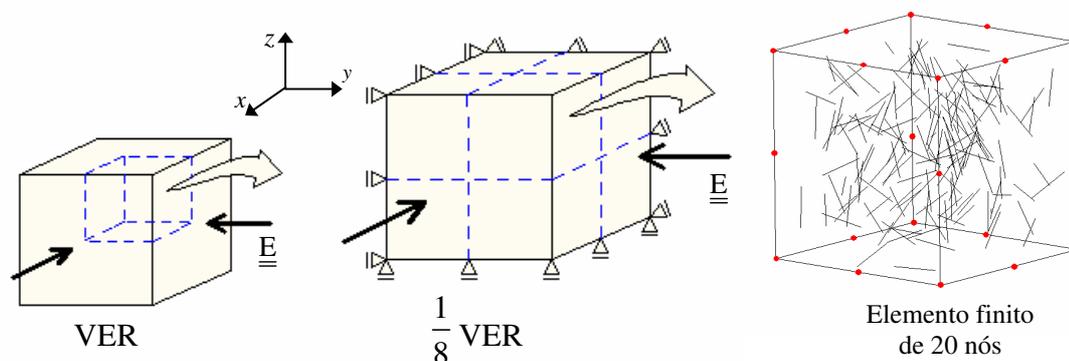


Figura 4.14 – VER e deformação macroscópica considerados nas simulações numéricas.

Elementos finitos hexaédricos quadráticos de 20 nós foram utilizados para a discretização geométrica da matriz de concreto. Quanto aos elementos de reforço, as fibras foram geradas aleatoriamente e inseridas nos elementos finitos da matriz de concreto. Esta consideração é possível através do emprego do Modelo Incorporado (*embedded model*) (Elwi e Hrudey, 1989), comumente usado na análise de estruturas de concreto armado. Neste modelo a

localização e a geometria das fibras são independentes da malha de elementos finitos o que permite que as elas sejam colocadas em qualquer posição no domínio do problema. Os deslocamentos nodais das fibras, por sua vez, são escritos em função dos deslocamentos dos nós dos elementos finitos de concreto onde elas estão inseridas, sendo considerada compatibilidade de deslocamentos entre seus pontos e os pontos de concreto localizados na mesma posição.

Os elementos de reforço, assim considerados, contribuem com a rigidez e com o trabalho de deformação interna do elemento (ou dos elementos) no qual eles estão inseridos, uma vez que na formulação do modelo incorporado a matriz de rigidez e o vetor de forças internas, referentes às fibras, são adicionados, respectivamente, à matriz de rigidez e ao vetor de forças nodais internas do elemento correspondente.

É importante ressaltar que foi admitida aderência perfeita entre a matriz de concreto e fibras.

A distribuição espacial e a orientação das fibras são geradas aleatoriamente por meio de um procedimento específico utilizando a função intrínseca RAN da linguagem de programação Fortran.

Quanto ao comportamento dos materiais concreto e aço, ambos são considerados com comportamento elastoplástico perfeito. No caso do concreto, considera-se a superfície de Drucker-Prager (Equação 4.52) e plasticidade associada para a caracterização da plastificação do material. As fibras, por sua vez, são consideradas resistindo apenas a esforços axiais na sua direção. Condições uniaxiais do tipo $\sigma_f^- \leq \sigma \leq \sigma_f^+$ são desta forma, utilizadas para descrever o seu comportamento, sendo necessário apenas o conhecimento da tensão que caracteriza o início do comportamento plástico. A análise elastoplástica é realizada empregando-se o algoritmo de retorno de tensões apresentado por Owen e Hinton (1980).

Uma vez obtida a solução numérica, a tensão macroscópica é calculada por meio de integrais de superfície:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\sigma}}(x) dV = \int_{\partial V} \underline{x} \otimes (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) dS \quad (4.61)$$

Os tamanhos adotados para o VER e para as fibras foram, respectivamente, $l_{VER} = 20$ cm e $l = 3$ cm. Os valores adotados para o fator de aspecto e para a fração volumétrica das fibras foram, respectivamente, 20 e 100 e 0,5%, 2% e 5%.

Os parâmetros σ_m e α_m da superfície de Drucker-Prager foram escolhidos de forma que as resistências à compressão uniaxial e biaxial fossem adequadamente caracterizadas. Assim apenas tensões de compressão foram avaliadas. Concretos com quatro diferentes resistências à compressão uniaxial, $f_c^m = 30$ MPa, 50 MPa, 70 MPa e 120 MPa, foram analisados; todos eles com uma resistência à compressão biaxial igual a $f_{cb}^m = 1,16f_c^m$. Quanto às fibras de aço, valores de $\sigma_f^+ = -\sigma_f^- = 1000$ MPa foram adotados para a resistência à tração uniaxial.

Aplicou-se de forma incremental uma deformação macroscópica $E_0 = -0,05$, variando-se o parâmetro γ entre -0,5 e 1. Para cada valor de γ determinou-se o ponto gráfico (Σ_I, Σ_{II}) , referente a um estado de tensões limites. Com o conjunto dos resultados obtidos ao se variar o parâmetro γ , é possível visualizar o domínio de resistência macroscópico do material analisado. Os resultados numéricos são representados graficamente na Figura 4.15 juntamente com os resultados analíticos descritos na seção anterior, considerando-se as direções das tensões principais e das fibras colineares.

As linhas contínuas representam os resultados analíticos para o domínio de resistência do CRFA, enquanto que os símbolos se referem aos resultados numéricos. Apenas os resultados numéricos para o CRFA com fator de aspecto $l_f / d_f = 100$ são apresentados uma vez que os resultados obtidos para os dois diferentes fatores de aspecto analisados (20 e 100) apresentaram diferenças insignificantes.

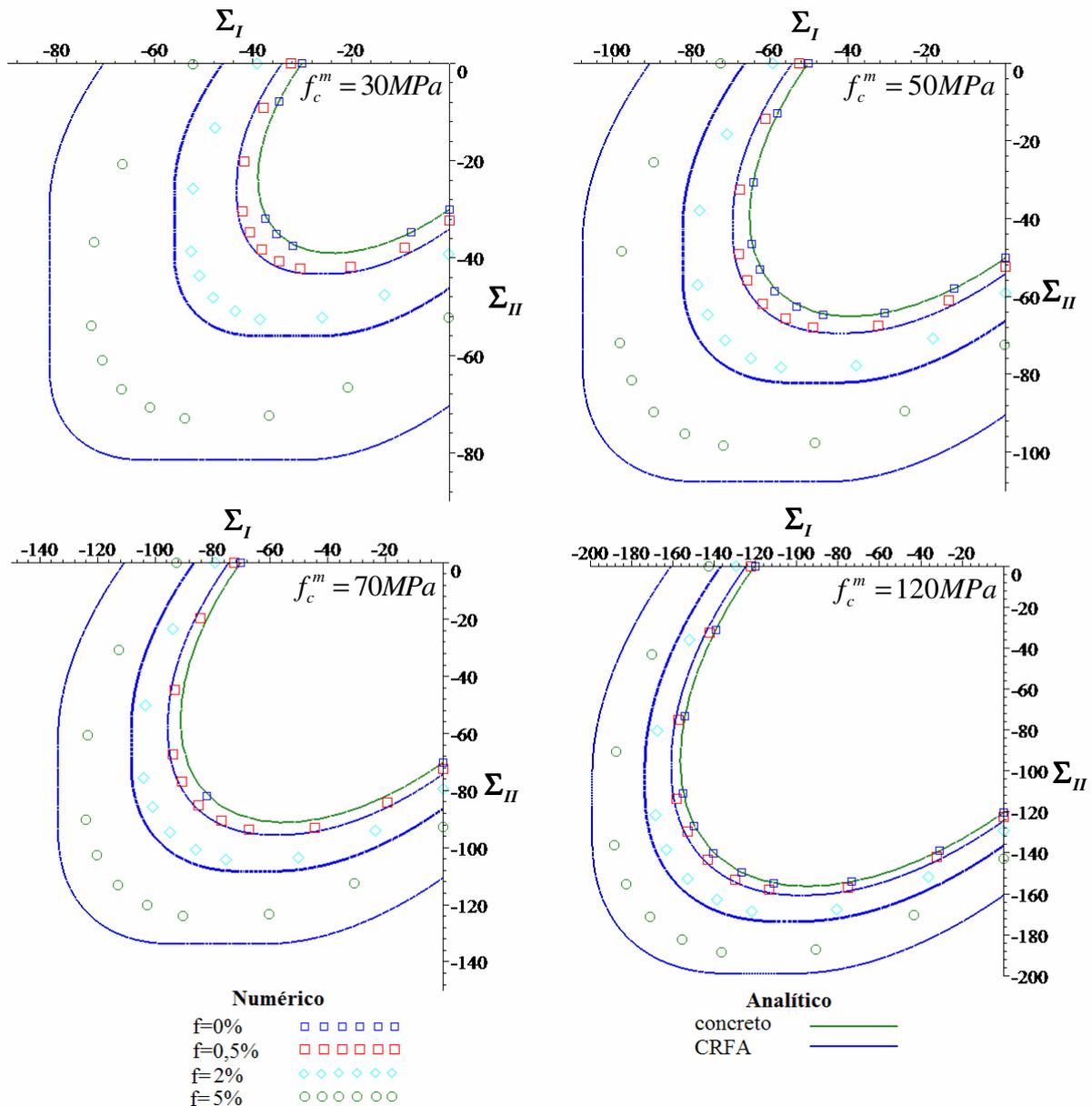


Figura 4.15 – Resultados numéricos e correspondentes resultados analíticos.

A comparação das duas abordagens indica que as estimativas da resistência, obtidas para o meio fictício, superestimam a resistência de um meio reforçado com fibras curtas aleatoriamente distribuídas. Isso acontece porque as fibras curtas se encontram isotropicamente distribuídas na matriz de concreto, enquanto no meio fictício as fibras se encontram concentradas segundo as direções principais de carregamento, conduzindo a estimativas para as propriedades de resistência que superestimam as reais. Este fato sugere a análise da influência da direção da aplicação do carregamento em relação à direção das fibras no domínio de resistência macroscópico.

Em relação ao fator de aspecto l_f/d_f , as simulações numéricas indicaram que este parâmetro apresenta pouca influência nas propriedades de resistência do compósito. De fato, estudos experimentais (Nunes e Agopyan, 1998; Bayramov *et al.* 2004; Garcez, 2005; Yazici *et al.*, 2007, Köksal *et al.*, 2008, Góis, 2010), bem como a presente análise numérica, parecem indicar que o fator de aspecto (valores usuais) tem pequena influência sobre as resistências à tração e à compressão uniaxial do CRFA. O trabalho de Kölle (2006), por sua vez, indica a mesma tendência para a resistência do CRFA sob estados de tensão biaxial.

Novas análises numéricas, envolvendo um número maior de elementos finitos, são necessárias para investigar o efeito de l_f/d_f sobre a resistência do compósito. Apesar da pequena quantidade de fibra adicionada ao concreto, tal tarefa seria, no entanto, excessiva em termos de custo computacional. Na realidade, para valores usuais de f , entre 0,5 e 5%, a influência de l_f/d_f não deverá ser significativo.

4.2.4 Discussão sobre as Hipóteses Adotadas no Modelo Analítico

4.2.4.1 Influência da Dimensão da Fibra

Assim como ocorre para um meio reforçado com fibras longas, a determinação do domínio de resistência macroscópico de um meio reforçado com fibras curtas é possível através da resolução de um problema de análise limite definido sobre o seu volume elementar representativo (VER).

No caso de um meio reforçado com fibras curtas distribuídas periodicamente, o domínio de resistência macroscópico é definido de forma semelhante ao domínio de resistência macroscópico para o meio reforçado com fibras longas (Equação 4.42).

No caso de um meio reforçado com fibras curtas aleatoriamente distribuídas (Figura 4.4 (a)) e considerando-se o modo de carregamento do VER através da imposição de uma taxa de deformação homogênea sobre o contorno do mesmo, o domínio de resistência macroscópico é definido por:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_D^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ (e } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ contínuo)} & \text{(a)} \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle & \text{(b)} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V & \text{(c)} \end{cases} \quad (4.62)$$

Ao se estudar um meio periódico reforçado com fibras longas, a escolha do campo de tensão homogêneo por fase, expresso nas Equações 4.43 e 4.44, permite que todas as condições necessárias para a resolução do problema de análise limite, definido sobre a sua célula base, sejam satisfeitas. No caso de fibras curtas, este mesmo campo de tensões não pode ser empregado, uma vez que a condição de continuidade dos vetores de tensão ($\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$) atuando sobre a interface fibra/matriz Γ não é satisfeita nas extremidades das fibras, conforme descrito na sequência.

Considerando-se uma fibra curta posicionada paralela ao eixo coordenado x , as extremidades das fibras apresentam como o vetor normal $\underline{n}^\Gamma = \underline{e}_x$ ou $\underline{n}^\Gamma = -\underline{e}_x$. Assim, nas extremidades das fibras, $(\underline{\underline{\sigma}}^f - \underline{\underline{\sigma}}^m) \cdot \underline{e}_x = \sigma^f \underline{e}_x$ não é igual a zero se $\sigma^f \neq 0$. Este campo de tensão não representa, portanto, um campo de tensão apropriado para o estudo de uma matriz reforçada com fibras curtas. Um campo mais adequado para a resolução do problema é aquele cujo componente de tensão σ_{xx}^f apresenta uma redução de valor a partir de certo comprimento da fibra (l_1) atingindo o valor σ_{xx}^m nas extremidades da mesma, conforme está representado na Figura 4.16.

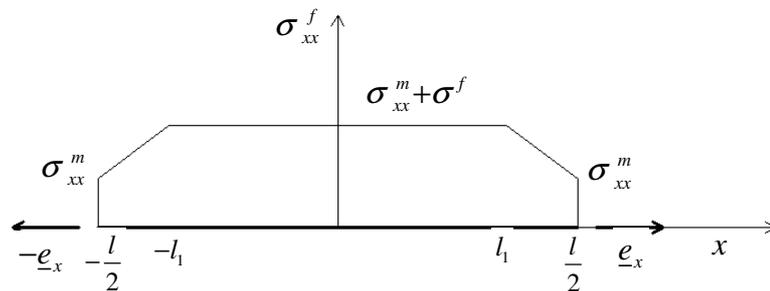


Figura 4.16 – Possível campo de tensões em uma fibra curta.

O emprego deste campo de tensão permite que a condição de continuidade do vetor de tensão $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ na interface entre a fibra curta e a matriz Γ seja satisfeita ao longo de toda a interface.

Entretanto, o mesmo viola o equilíbrio ($\text{div}\underline{\underline{\sigma}} = 0$) nos intervalos $-\frac{l}{2} \leq x < -l_1$ e $l_1 < x \leq \frac{l}{2}$. Assim, um campo de tensão mais apropriado para a resolução do problema é aquele que apresenta os demais componentes do tensor de tensão $\underline{\underline{\sigma}}^f$, ou ainda de $\underline{\underline{\sigma}}^f$ e de $\underline{\underline{\sigma}}^m$, variáveis, satisfazendo as condições de equilíbrio.

A definição de tal campo de tensão e a resolução analítica do problema empregando o mesmo é uma tarefa complexa. Uma alternativa para o estudo de um material reforçado com fibras curtas é, então, a aproximação deste meio por um meio fictício reforçado com fibras longas, cuja solução analítica já é conhecida. Ou seja, admite-se que a resistência macroscópica de um meio formado por fibras curtas pode ser obtido considerando-se uma correspondência entre este material e um meio fictício definido por uma matriz reforçada com fibras longas. Este conceito foi empregado no presente estudo e está representado na Figura 4.4.

Conforme descrito anteriormente, para o estabelecimento da correlação entre as propriedades de resistência destes dois meios, ou seja, a determinação das propriedades fictícias a serem empregadas, são necessárias comparações entre os resultados analíticos obtidos para compósitos com fibras longas e aqueles verificados em experimentos, análises numéricas ou mesmo modelos analíticos disponíveis.

No resultado obtido a partir das teorias da análise limite e homogeneização, descrito na seção anterior, o domínio de resistência macroscópico de um meio reforçado com fibras longas é dependente de quatro parâmetros: a resistência da matriz $F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0$, as resistências à compressão σ_f^- e à tração σ_f^+ uniaxiais e a fração volumétrica f das fibras. No caso de fibras constituídas de material com resistências à compressão e à tração uniaxiais semelhantes, como por exemplo, as fibras de aço, e uma vez que o domínio de resistência macroscópico é função das resistências à tração e à compressão uniaxiais das inclusões por unidade transversal de área $\sigma_0 = |f\sigma_f^-| = |f\sigma_f^+|$, o domínio de resistência macroscópico do meio fictício pode ser obtido através da determinação de apenas dois parâmetros fictícios, $F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0$ e σ_0 . Considerando-se as resistências das matrizes do meio fictício e do meio real semelhantes, apenas o parâmetro σ_0 deverá ser determinado e através dele os efeitos na resistência do compósito da geometria das fibras, da interação entre as mesmas e da

concentração de tensões na matriz geradas pela presença das fibras podem ser levados em conta.

No caso do CRFA, onde as fibras estão dispostas de forma aleatória e onde a sua fração volumétrica é pequena ($f < 5\%$), estudos experimentais (Nunes e Agopyan, 1998; Bayramov *et al.* 2004; Garcez, 2005; Yazici *et al.*, 2007, Köksal *et al.*, 2008, Góis, 2010) mostram que ocorre uma pequena variação das resistências à compressão e à tração uniaxiais do compósito ao se variar o fator de aspecto das fibras. O trabalho de Kölle (2006), o qual analisa a resistência do CRFA sob estados de tensão biaxial (compressão-compressão, compressão-tração), avaliando inclusive a influência do fator de aspecto, indica a mesma tendência. As análises realizadas no presente estudo também indicam este comportamento. Para estados mais complexos de tensão, os resultados experimentais disponíveis não permitem avaliar a influência deste parâmetro (l_f / d_f) na resistência do CRFA.

No caso de outras matrizes reforçadas com fibras curtas como, por exemplo, aquelas estudadas por Kelly e Tyson (1965) (matriz de cobre reforçada com fibras de tungstênio ou molibdênio), por Chen (1971) e por Halpin e Kardos (1978), a influência do fator de aspecto das fibras na resistência do compósito é significativa. Halpin e Kardos (1978) propõem um fator de redução de resistência em função de l_f / d_f , entretanto os seus estudos estão baseados em compósitos reforçados com grandes quantidades de fibras curtas (entre 20% e 40%) dispostas periodicamente em uma direção.

4.2.4.2 Direções das Tensões Principais e das Fibras Não Colineares

A resistência biaxial do compósito formado por matriz e fibras longas dispostas perpendicularmente em três direções, quando as direções das tensões principais não coincidem com aquelas das fibras, é avaliado nesta seção.

Consideram-se estados de tensão definidos pelas tensões principais Σ_I e Σ_{II} ($\Sigma_{III} = 0$). As direções das tensões principais são definidas através dos ângulos de Euler ψ , φ e θ em relação às fibras (Figura 4.17). Os ângulos ψ e θ definem a orientação do vetor normal ao plano no qual as tensões principais agem. Enquanto φ define a orientação de Σ_I e Σ_{II} em tal

plano. O caso discutido nas seções anteriores representa a situação em que ψ , φ e θ são nulos.

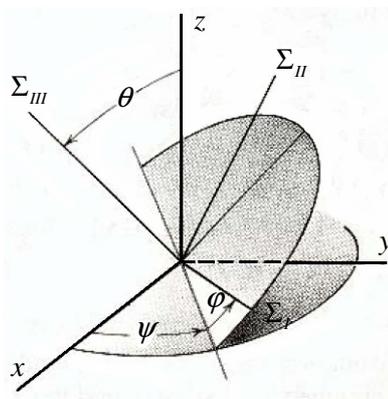


Figura 4.17 – Direções das fibras e das tensões principais e ângulos de Euler.

É importante notar que, de forma rigorosa, as direções das tensões principais macroscópicas (Σ_I , Σ_{II} e Σ_{III}) são conhecidas, e o triedro formado pelas direções das fibras é definido pelos ângulos ψ , φ e θ . A resolução deste problema, entretanto, equivale a considerar o triedro das direções das fibras como fixo e as direções das tensões principais definidas pelos ângulos ψ , φ e θ em relação ao triedro das fibras, assim como se considerou no presente estudo.

As expressões do domínio de resistência macroscópico são obtidas através do uso das Equações 4.54, 4.55 e permutações e 4.56, 4.57 e permutações na função $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}})$, considerando-se $\underline{\underline{\Sigma}}(\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III}, \psi, \varphi, \theta)$. A substituição de variáveis realizada $(F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \rightarrow F^{hom}(\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III}, \psi, \varphi, \theta))$ é descrita no Anexo C.

Figura 4.18 (b) mostra o domínio de resistência quando uma das direções de tensões principais e uma das direções de fibras são colineares e as demais direções das tensões principais estão a 45° em relação às demais direções de fibras. A Figura 4.18 (c) mostra o domínio de resistência para uma orientação genérica das direções das tensões principais em relação às fibras (sem colinearidade ou simetria significativa). A resistência biaxial quando as direções das tensões principais e das fibras são colineares também é representada (Figura 4.18 (a)).

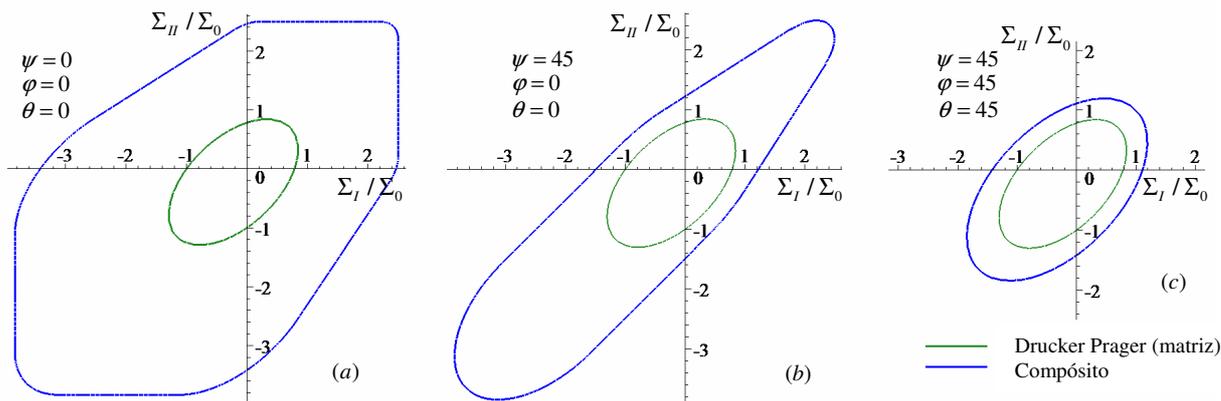


Figura 4.18 – Domínios de resistência biaxial para diferentes ângulos de Euler para um compósito cuja resistência da matriz é representada pelo critério Drucker-Prager.

Os resultados apresentados na Figura 4.18 mostram que para todas as situações consideradas, a resistência biaxial aumenta para qualquer combinação de tensões principais. No segundo caso (b), o ganho máximo de força produzida pelas fibras é obtido quando as duas tensões principais são iguais ($\Sigma_I = \Sigma_{II}$). A Figura 4.18 (c) indica como a presença das fibras fornece um aumento limitado na resistência do compósito quando uma orientação genérica é considerada ($\psi = 45$, $\varphi = 45$ e $\theta = 45$).

Estes resultados indicam a importância de considerar a anisotropia no estudo de compósitos reforçados com fibras longas dispostas em três direções perpendiculares.

A avaliação dos resultados analíticos, considerando valores não nulos para ψ , φ e θ (Figura 4.18) e a comparação dos resultados analíticos e numéricos (Figura 4.15) sugere que se definam valores para os ângulos (ψ , φ e θ) de tal forma que as estimativas analíticas se tornem próximas aos resultados numéricos.

Para a definição dos ângulos ψ , φ e θ que fornecem resultados analíticos mais apropriados, as resistências analíticas à compressão uniaxial e biaxial do CRFA foram avaliadas, considerando-se diferentes valores para esses ângulos. Concretos com duas resistências à compressão uniaxial distintas, de 30 MPa e 70 MPa, foram empregados. A Figura 4.19 permite a comparação da resistência à compressão uniaxial obtida nas análises numéricas e da resistência obtida variando-se as direções principais de carregamento. Considerou-se

$\psi = \varphi = \theta$ e as frações volumétricas $f = 0,5\%$, 2% e 5% . A Figura 4.20 mostra a comparação das resistências à compressão biaxiais analíticas e numéricas.

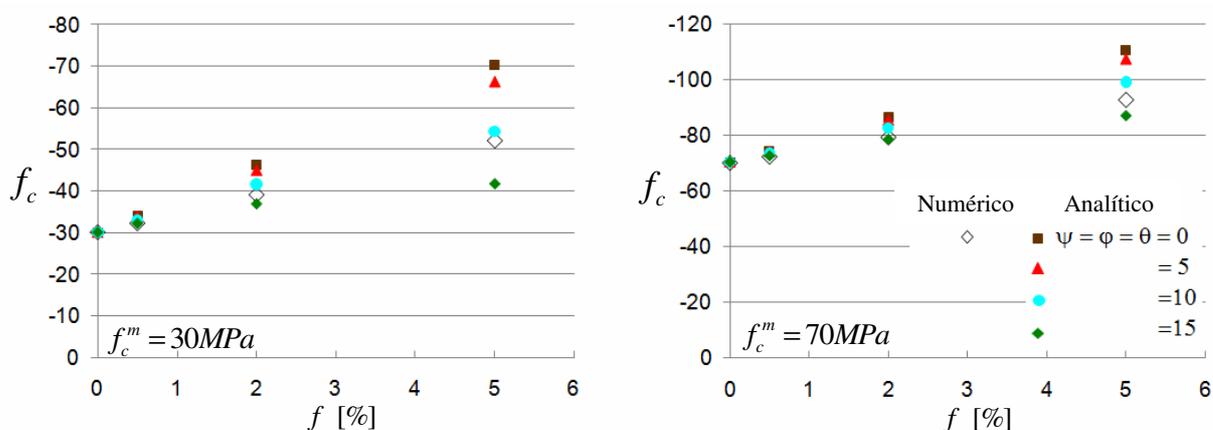


Figura 4.19 – Resistências à compressão uniaxial numéricas e correspondentes resultados analíticos considerando-se distintas direções principais de carregamento.

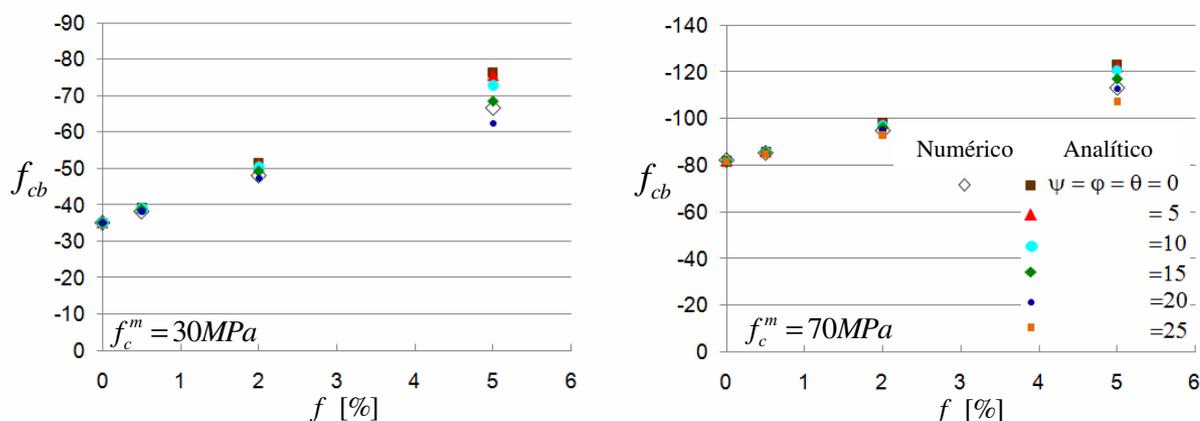


Figura 4.20 – Resistências à compressão biaxial numéricas e correspondentes resultados analíticos considerando-se distintas direções de carregamento.

Os resultados apresentados na Figura 4.19 indicam que, para um CRFA cuja matriz tem f_c^m entre 30 MPa e 70 MPa e as fibras com $\sigma_f^+ = -\sigma_f^- = 1000$ MPa, a consideração de direções principais de carregamento ($\psi = \varphi = \theta$) entre 10 e 15 graus fornece uma melhor aproximação da resistência à compressão uniaxial analítica à resistência à compressão uniaxial para o meio

aleatório obtida numericamente. Para a resistência à compressão biaxial, os resultados indicam uma melhor aproximação ao se considerar $\psi = \varphi = \theta$ entre 15 e 20 graus.

A Figura 4.21 apresenta os resultados numéricos e os resultados analíticos correspondentes, com $\psi = \varphi = \theta = 11$ graus, para o concreto com $f_c^m = 30$ MPa (Figura 4.21 (a)), e com $\psi = \varphi = \theta = 12$ graus, para o concreto com $f_c^m = 70$ MPa (Figura 4.21 (b)). Esses ângulos permitem uma melhor aproximação das resistências à compressão uniaxial numérica e analítica. Como se pode observar, os demais estados de tensão biaxial também são adequadamente estimados pelo modelo analítico através do emprego destes valores para ψ , φ e θ . A escolha de ângulos, que permitem a aproximação das resistências à compressão biaxiais obtidas numérica e analiticamente, fornece estimativas inadequadas para outros estados de tensão biaxial.

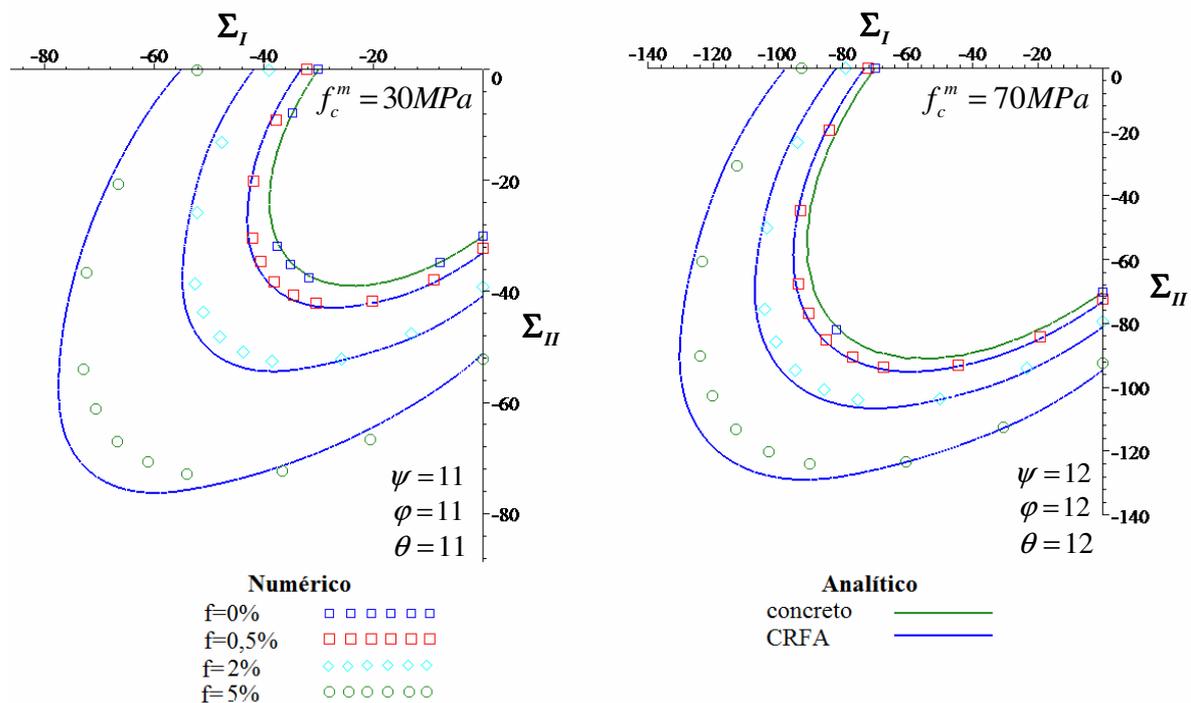


Figura 4.21 - Resultados numéricos e correspondentes resultados analíticos.

A Figura 4.21 mostra que para o CRFA cujas fibras têm $\sigma_f^+ = -\sigma_f^- = 1000$ MPa e cuja matriz tem f_c^m entre 30 MPa e 70 MPa, o uso do modelo proposto (meio fictício), considerando-se

$\psi = \varphi = \theta$, respectivamente, entre 11 e 12 graus fornece resultados razoáveis para a resistência à compressão biaxial.

É interessante notar que os parâmetros adotados para as resistências das fibras de aço e da matriz de concreto no meio fictício referem-se às propriedades reais do meio aleatório. A comparação dos resultados analíticos e numéricos indica que para os valores usuais do fator de aspecto l_f/d_f , o uso das propriedades reais para a caracterização do meio fictício pode ser apropriado, confirmando a indicação da pequena influência deste parâmetro na resistência do material em estudo, conforme observado anteriormente.

O CRFA é um material com comportamento isotrópico, uma vez que as fibras são incorporadas aleatoriamente na matriz de concreto. No modelo atual, apenas três direções de fibras foram consideradas, portanto, um modelo anisotrópico. A análise deve ser estendida ao caso de um modelo com um número maior de direções de fibras, conforme descrito na próxima seção. Este modelo, mais complexo, permitiria uma melhor consideração da isotropia do CRFA.

Alternativamente, uma forma de melhor caracterizar a isotropia do CRFA pode ser realizada empregando-se o resultado encontrado nesta seção. A partir da teoria da homogeneização em análise limite, determinou-se o domínio $\tilde{G}^{hom}(\psi, \varphi, \theta)$ de um meio reforçado com fibras em três direções perpendiculares, o qual depende da orientação das fibras em relação às tensões principais macroscópicas. A média de todos os possíveis resultados de $\tilde{G}^{hom}(\psi, \varphi, \theta)$, considerando todas as possíveis direções que as fibras poderiam assumir, ou seja:

$$G^{hom} = \langle \tilde{G}^{hom}(\psi, \varphi, \theta) \rangle \quad (4.63)$$

permitiria obter um domínio de resistência isotrópico para a caracterização da resistência do meio isotrópico analisado, o CRFA.

Na sequência o cálculo da média descrita na Equação 4.63 é realizado para as resistências à compressão uniaxial e biaxial.

4.2.4.2.1 Resistência à compressão uniaxial

Para a obtenção da equação que define a resistência à compressão uniaxial homogeneizada do material em estudo, supõe-se um estado de tensão uniaxial $\underline{\Sigma}$ com orientação arbitrária (Figura 4.22). A orientação de $\underline{\Sigma}$ é definida pelo vetor unitário $\underline{g} = [\cos\varphi \text{sen}\theta, \text{sen}\varphi \text{sen}\theta, \cos\theta]^T$ com componentes g_f , $f = x, y, z$. O objetivo é encontrar o mínimo valor da tensão $\underline{\Sigma}$ em conformidade com as propriedades de resistência do material compósito definidas pelo domínio G^{hom} , considerando-se o modelo aproximado (Figura 4.4) e a matriz obedecendo ao critério de Drucker-Prager:

$$G^{hom}(\underline{\Sigma}) = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{i=1}^3 \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f, \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}^m\| + \alpha_m (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^m - \sigma_m) - \sigma_m \leq 0, \quad \sigma_f \in [f_f \sigma_f^-, f_f \sigma_f^+], \quad f = x, y, z \end{array} \right\} \quad (4.64)$$

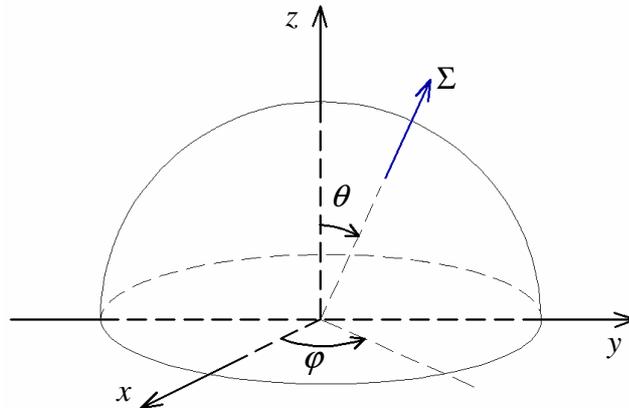


Figura 4.22 – Tensão uniaxial $\underline{\Sigma}$ e definição da sua orientação.

O valor da resistência à compressão macroscópica é dado por:

$$\Sigma^-(\underline{g}) = \min \left\{ \Sigma \mid \underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{g} \otimes \underline{g}; \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{\Sigma}} - \sum_{i=1}^3 \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f; \right. \\ \left. \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}^m\| + \alpha_m (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^m - \sigma_m) - \sigma_m \leq 0; |\sigma_f| \leq f_f \sigma_f^+, \quad f = x, y, z \right\} \quad (4.65)$$

ou, após manipulações da Equação 4.65:

$$\Sigma^-(\underline{g}) = \min \left\{ \frac{\sum_{f=1}^3 \sigma_f (3g_f^2 - 1 - 2\alpha_m^2) - 2\alpha_m (\alpha_m + 1) \sigma_m - \sqrt{\beta}}{2(1 - \alpha_m^2)}, \right. \\ \left. |\sigma_f| \leq f_f \sigma_f^+, f = x, y, z \right\} \quad (4.66)$$

$$\beta = \left(-\sum_{f=1}^3 \sigma_f (3g_f^2 - 1 - 2\alpha_m^2) + 2\alpha_m (\alpha_m + 1) \sigma_m \right)^2 \\ - 4(1 - \alpha_m^2) \left(-\left((\sigma_m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f) \alpha_m + \sigma_m \right)^2 + \sum_{f=1}^3 \sigma_f^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right) \quad (4.67)$$

Em função da complexidade da formulação obtida através do emprego do critério de Drucker-Prager, a resistência uniaxial (Equação 4.66) não foi determinada algebricamente (como Taliercio *et al.* (1991) obtiveram empregando o critério de von Mises) e sim numericamente.

Uma estimativa da resistência à compressão uniaxial na direção \underline{g} pode, então, ser definida através da expressão:

$$f_c = \langle \Sigma^-(\underline{g}) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Sigma^-(\varphi, \theta) d\theta d\varphi \quad (4.68)$$

Esta última também foi computada numericamente, sendo empregados 169 pontos de integração. Este cálculo foi realizado em um programa desenvolvido em linguagem *Fortran 90/95* e que permite variar os valores dos parâmetros σ_f , com $f = x, y, z$ de forma a encontrar o menor valor de Σ para cada ângulo considerado.

O resultado obtido para a resistência à compressão uniaxial ao se considerar a média $f_c = \langle \Sigma^-(\underline{g}) \rangle$ (Equação 4.68) é, na sequência, comparado aos resultados experimentais de resistência à compressão uniaxial de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008). Os dados destes experimentos foram descritos na seção 4.2.3.1.

Na Figura 4.23 estão representados os resultados experimentais de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008), juntamente com os correspondentes resultados numéricos obtidos através de $f_c = \langle \Sigma^-(\underline{g}) \rangle$.

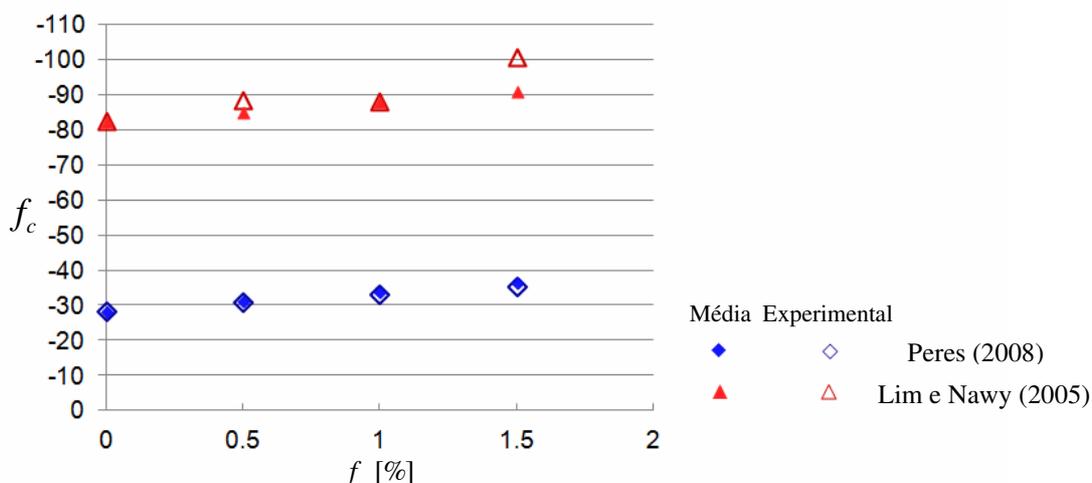


Figura 4.23 – Dados experimentais de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008) e correspondentes resultados numéricos de f_c .

Através da Figura 4.23 verifica-se que os resultados numéricos de resistência à compressão uniaxial, calculados através da média de todos os possíveis resultados de $\Sigma^-(\varphi, \theta)$, considerando todas as possíveis direções que as fibras poderiam assumir, se encontram bastante próximos aos dados experimentais de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008). Este resultado indica que a abordagem adotada para o cálculo da resistência à compressão uniaxial (Equação 4.68) pode fornecer boas estimativas desta propriedade.

Os resultados da resistência à compressão uniaxial ao se considerar $f_c = \langle \Sigma^-(\underline{g}) \rangle$ (Equação 4.68) são também comparados àqueles obtidos através da modelagem numérica via método dos elementos finitos (seção 4.2.3.2). Concretos com duas resistências à compressão uniaxial f_c^m distintas, de 30 MPa e 70 MPa, foram avaliados. A Figura 4.24 permite verificar os resultados calculados a partir da Equação 4.68 variando-se a fração volumétrica das fibras de 0,5% a 5%. Na Figura também estão representadas as resistências à compressão uniaxial obtidas através da modelagem numérica via MEF.

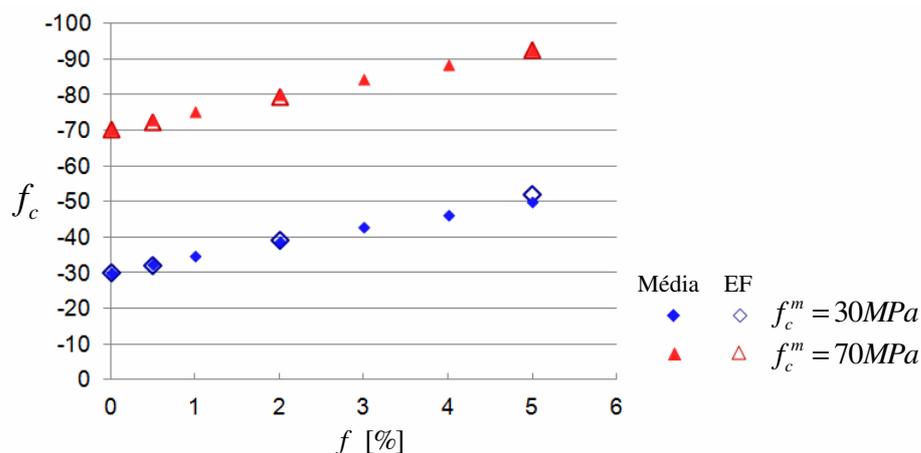


Figura 4.24 – Resistências à compressão uniaxial médias e numéricas via MEF.

Ambos os resultados apresentados na Figura 4.24 consideram o CRFA como um meio isotrópico. Um deles é obtido ao se avaliar a estrutura real do material em estudo, com as fibras curtas distribuídas aleatoriamente na matriz. O segundo é obtido através da média da resistência, calculada empregando-se a abordagem estática da análise limite combinada à teoria da homogeneização para o meio fictício considerado. A boa concordância entre os resultados indica que a média do domínio de resistência (Equação 4.63) pode fornecer uma boa estimativa das propriedades de resistência do CRFA, especialmente quando a ruptura do material não ocorre na interface, uma vez que em ambas as abordagens considerou-se aderência perfeita entre os constituintes.

4.2.4.2.2 Resistência à compressão biaxial

Para a obtenção da equação que define a resistência à compressão biaxial homogeneizada do material em estudo, supõe-se um estado de tensão biaxial ($\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \Sigma \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}$) com orientação arbitrária (Figura 4.25). A orientação dos vetores unitários \underline{e}_I e \underline{e}_{II} é definida pela matriz de rotação \mathbf{A} (Equação 4.69) com componentes a_{ij} . O objetivo é encontrar o mínimo valor da tensão Σ em conformidade com as propriedades de resistência do material compósito definidas pelo domínio G^{hom} (Equação 4.64).

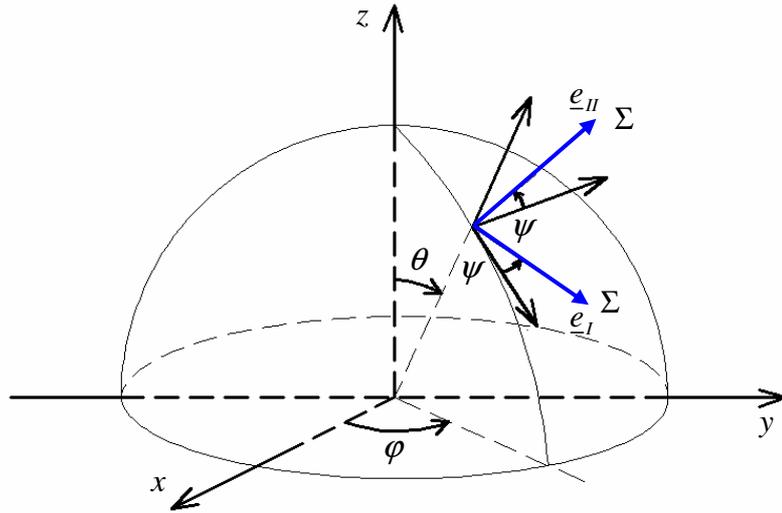


Figura 4.25 – Tensão biaxial e definição da sua orientação.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \text{sen } \varphi \text{sen } \psi & \cos \theta \text{sen } \varphi \cos \psi + \cos \varphi \text{sen } \psi & -\text{sen } \theta \cos \psi \\ -\cos \theta \cos \varphi \text{sen } \psi - \text{sen } \varphi \cos \psi & -\cos \theta \text{sen } \varphi \text{sen } \psi + \cos \varphi \cos \psi & \text{sen } \theta \text{sen } \psi \\ \text{sen } \theta \cos \varphi & \text{sen } \theta \text{sen } \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

O valor da resistência à compressão biaxial macroscópica é dado por:

$$\Sigma_b^-(a_{ij}) = \min \left\{ \begin{array}{l} |\Sigma| \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \Sigma \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}; \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{\Sigma}} - \sum_{i=1}^3 \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f; \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}^m\| + \alpha_m (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^m - \sigma_m) - \sigma_m \leq 0; \quad |\sigma_f| \leq f_f \sigma_f^+, \quad f = x, y, z \end{array} \right. \quad (4.70)$$

ou, após manipulações da Equação 4.70:

$$\Sigma_b^-(a_{ij}) = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\sum_{f=1}^3 \sigma_f (2(1+2\alpha_m^2) - 3(a_{1f}^2 + a_{2f}^2)) - 4\alpha_m (\alpha_m + 1)\sigma_m - \sqrt{\beta_b}}{2(1-4\alpha_m^2)} \\ |\sigma_f| \leq f_f \sigma_f^+, \quad f = x, y, z \end{array} \right. \quad (4.71)$$

$$\beta_b = \left(\sum_{f=1}^3 \sigma_f (2(1+2\alpha_m^2) - 3(a_{1f}^2 + a_{2f}^2)) + 4\alpha_m (\alpha_m + 1)\sigma_m \right)^2 - 4(1-4\alpha_m^2) \left(- \left((\sigma_m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f)\alpha_m + \sigma_m \right)^2 + \sum_{f=1}^3 \sigma_f^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right) \quad (4.72)$$

Assim como para a resistência uniaxial, a resistência biaxial foi determinada numericamente. Uma estimativa da resistência à compressão biaxial pode, então, ser definida através da expressão:

$$f_{cb} = \langle \Sigma_b^-(a_{ij}) \rangle = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Sigma_b^-(\varphi, \theta, \psi) d\psi d\theta d\varphi \quad (4.73)$$

Esta última também foi computada numericamente, sendo empregados 2197 pontos de integração. Este cálculo foi realizado em um programa desenvolvido em linguagem *Fortran 90/95* e que permite variar os valores dos parâmetros σ_f , com $f = x, y, z$ de forma a encontrar o menor valor de Σ para cada ângulo considerado.

O resultado obtido para a resistência à compressão biaxial ao se considerar $f_{cb} = \langle \Sigma_b^-(a_{ij}) \rangle$ (Equação 4.73) é, na sequência, comparado aos resultados experimentais de resistência à compressão biaxial de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008). Os dados destes experimentos foram descritos na seção 4.2.3.1.

Na Figura 4.26 estão representados os resultados experimentais de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008), juntamente com os correspondentes resultados numéricos obtidos através de $f_{cb} = \langle \Sigma_b^-(a_{ij}) \rangle$.

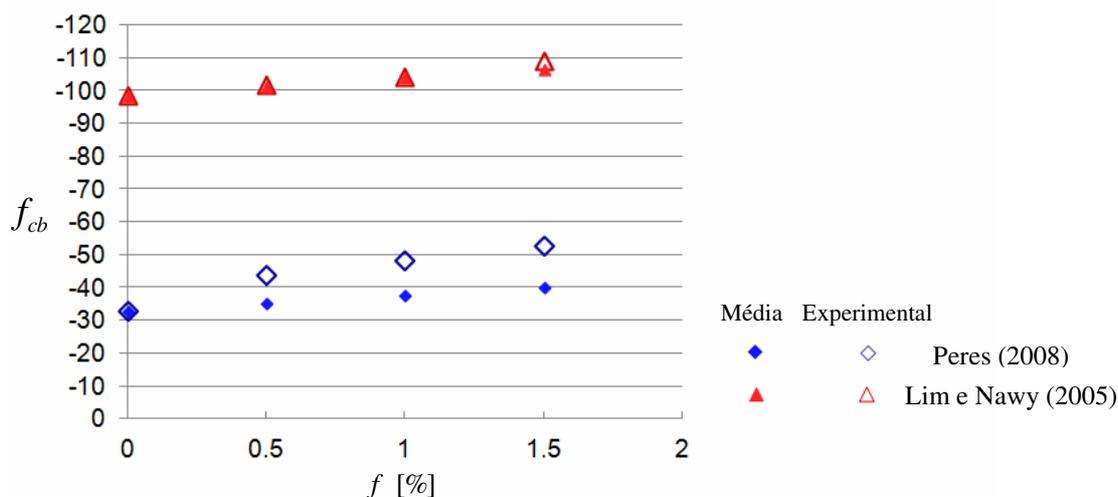


Figura 4.26 – Dados experimentais de Lim e Nawy (2005) e de Peres (2008) e correspondentes resultados numéricos de f_{cb} .

Através da Figura 4.26 verifica-se que os resultados numéricos de resistência à compressão biaxial, calculados através da média de todos os possíveis resultados de $\Sigma_b^-(\varphi, \theta, \psi)$, considerando todas as possíveis direções que as fibras poderiam assumir, se encontram bastante próximos aos dados experimentais de Lim e Nawy (2005). O mesmo comportamento não foi observado em relação aos dados de Peres (2008). Conforme já descrito anteriormente, este fato pode estar relacionado ao emprego de corpos de prova com dimensões maiores segundo as duas direções de aplicação de carga ($15 \times 15 \times 5 \text{ cm}^3$) nos ensaios biaxiais de Peres (2008). Esta configuração de corpo de prova pode causar uma maior concentração de fibras segundo as suas maiores dimensões e, portanto, segundo as direções de carregamento, o que pode justificar a grande diferença encontrada entre os dados experimentais de resistência do CRFA sob compressão biaxial e os resultados numéricos. Melhores aproximações foram encontradas ao se comparar o modelo analítico e os dados experimentais de Lim e Nawy (2005). Nestes experimentos foram empregados corpos de prova cúbicos ($10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$), os quais podem ter possibilitado uma distribuição aleatória tridimensional para as fibras.

Este resultado indica que a abordagem adotada para o cálculo da resistência à compressão biaxial (Equação 4.73) pode fornecer boas estimativas desta propriedade.

Os resultados da resistência à compressão biaxial ao se considerar $f_{cb} = \langle \Sigma_b^-(a_{ij}) \rangle$ (Equação 4.73) são também comparados àqueles obtidos através da modelagem numérica via método dos elementos finitos (seção 4.2.3.2). Concretos com duas resistências à compressão uniaxial

f_c^m distintas, de 30 MPa e 70 MPa, foram avaliados. A Figura 4.27 permite verificar os resultados calculados a partir da Equação 4.73 variando-se a fração volumétrica das fibras de 0,5% a 5%. Na Figura também estão representadas as resistências à compressão biaxial obtidas através da modelagem numérica via MEF.

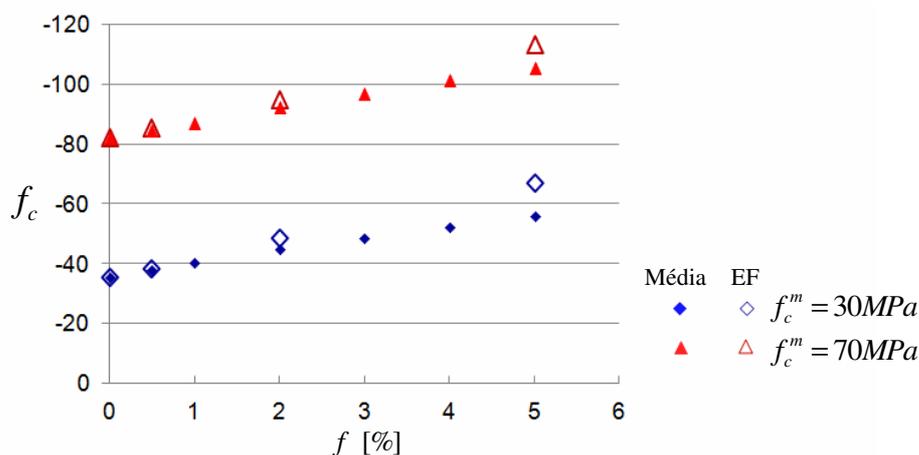


Figura 4.27 – Resistências à compressão biaxial médias e numéricas via MEF.

Assim como se verificou para a resistência à compressão uniaxial, para a resistência a compressão biaxial também foi encontrada uma boa aproximação entre os resultados via método dos elementos finitos e aqueles calculados através da média da resistência biaxial do modelo aproximado quando as frações volumétricas adicionadas são baixas. Para frações volumétricas de fibras mais altas as duas abordagens apresentaram maiores diferenças (diferença de 16,4% para $f = 5\%$).

4.2.4.3 Consideração de um número maior de direções de fibras

No caso de um compósito reforçado por fibras longas dispostas em n direções orientadas segundo e_f , com $f = 1, n$; se a abordagem estática é adotada, um campo de tensão homogêneo por fase, que satisfaz todas as condições necessárias do problema de análise limite, definido sobre a sua célula base (Equação 4.42), pode ser escolhido da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m & \forall \underline{x} \in A^m; \\ \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f & \forall \underline{x} \in A^f, f = 1, n \end{cases} \quad (4.74)$$

com

$$\underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \quad e \quad \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \in G^f \quad (4.75)$$

n e \underline{e}_f devem ser escolhidos de tal forma que a isotropia do material seja melhor caracterizada. Quanto maior for o n , maior será o número de direções consideradas e melhor será o resultado em termos de isotropia. Entretanto, maior será a complexidade do problema a ser resolvido. Neste caso:

$$G^{\text{hom}} = G_s^{\text{hom}} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{f=1}^n \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m, \quad \sigma_f \in [\tilde{\sigma}_f^-, \tilde{\sigma}_f^+] \end{array} \right\} \quad (4.76)$$

O domínio de resistência G^{hom} também pode ser representado empregando-se sua função critério de resistência F^{hom} , ou seja, os estados de tensão $\underline{\underline{\Sigma}}$ que satisfazem o critério macroscópico (Equação 4.46) constituem o domínio convexo G^{hom} , definido pela função $F^{\text{hom}}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0$:

$$F^{\text{hom}}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{f=1}^n \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \\ F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0, \quad \sigma_f \in I_f \end{array} \right. \quad (4.77)$$

com $I_f = [f_f \sigma_f^-, f_f \sigma_f^+]$.

A determinação das expressões matemáticas que definem o domínio de resistência macroscópico, ou seja, o envelope convexo dos n domínios obtidos pela translação do domínio de resistência da matriz, é possível através da definição dos n parâmetros σ_f que minimizam a função:

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = F^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sum_{f=1}^n \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f) \quad (4.78)$$

$\underline{\underline{\Sigma}}$ sendo prescrito. Ou seja:

$$F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \min_{\sigma_f \in I_f} F^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sum_{f=1}^n \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f) \quad (4.79)$$

E de forma mais geral, para uma distribuição aleatória de fibras:

$$F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{1}{4\pi} \sigma_f \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \sin\theta d\theta d\phi \\ F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0, \sigma_f \in [f\sigma_f^-, f\sigma_f^+] \end{cases} \quad (4.80)$$

Os ângulos θ e ϕ , definem a orientação de uma fibra no espaço, conforme descrito na seção 3.3 (Figura 3.12).

A determinação de F^{hom} a partir das Equações 4.77 ou 4.80 não foi realizada no contexto desta tese. Este cálculo constitui, portanto, uma sugestão para trabalhos futuros. A sua resolução permitiria uma melhor caracterização da resistência não só do CRFA, como também para outros materiais reforçados aleatoriamente com fibras.

5. Condição de *cut-off* em Tração e Interface

No Capítulo 4, determinou-se analiticamente o critério de resistência para o CRFA, baseando-se na teoria da homogeneização em análise limite. Para a obtenção do mesmo, considerou-se a matriz caracterizada pelo critério de ruptura de Drucker–Prager e aderência perfeita entre fibra/matriz. Neste capítulo, serão abordadas duas hipóteses que podem ser adotadas para o cálculo de um domínio de resistência mais realista para o material composto em estudo. A primeira se refere à consideração de um critério de *cut-off* em tração para melhor caracterizar a resistência da matriz de concreto, bem como a do CRFA, sob solicitações de tração. A segunda, por sua vez, está relacionada à consideração das propriedades limitadas de resistência da interface, na formulação do domínio de resistência macroscópico.

5.1 CONDIÇÃO DE *CUT-OFF* EM TRAÇÃO

O concreto possui um bom desempenho quando submetido a tensões de compressão. A norma brasileira NBR 6118 (2007), para projeto de estruturas de concreto simples, armado e protendido, abrange os casos de estruturas de concreto com f_{ck} inferior a 50 MPa. A NBR 8953 (2009), por sua vez, estabelece classes de concreto cujo f_{ck} varia de 10 MPa (C10) a 80 MPa (C80). Notadamente, os avanços tecnológicos vêm possibilitando a produção de concretos de resistência ainda maiores (alta resistência), cujos valores de f_{ck} podem ser superiores a 150 MPa.

O bom comportamento da matriz cimentícia, entretanto, fica comprometido por sua limitada resistência à tração. O concreto possui, normalmente, microfissuras na zona de transição entre matriz e agregados graúdos, e pouca energia é necessária para que ocorra o aumento destas microfissuras. Quando o concreto se encontra submetido a solicitações de tração, as tensões se concentram nas extremidades das microfissuras, provocando um alargamento incontrolado das mesmas e fazendo com que a ruína do material se apresente de forma frágil. Uma vez que

estas fissuras são perpendiculares à direção da solicitação, provocam uma diminuição da área resistente e conseqüentemente uma redução na resistência à tração do material.

Com base no comportamento do concreto observado experimentalmente, no que se refere à sua resistência, diversos critérios de ruptura foram propostos para a caracterização do mesmo. Chen (1982) classificou os critérios de resistência conforme o número de constantes do material que aparecem nas suas expressões. Entre os critérios já empregados para a caracterização da resistência do concreto, estão os critérios de Tresca e de von Mises, classificado por Chen (1982) como modelos de um parâmetro, os critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager, de dois parâmetros, a superfície de Bresler-Pister, de três parâmetros, as superfícies de Ottosen e Hsieh-Ting-Chen, de quatro parâmetros, e o modelo refinado de cinco parâmetros de Willam-Warnke. Os modelos mais refinados reproduzem todas as mais importantes características da superfície de ruptura do concreto e apresentam ótimas aproximações com os dados experimentais disponíveis. Os critérios mais simples (Tresca, von Mises e Drucker-Prager), são comumente empregados associados a uma condição de *cut-off* em tração (Oliveira, 2001; Silvano, 2002; Brandão, 2005; Miller, 2008), para melhor caracterizar a ruptura do concreto.

O critério de ruptura de Drucker-Prager, empregado neste trabalho, é uma simples adaptação do critério de von Mises para os materiais que possuem resistências diferentes sob solicitações de tração e de compressão e que são dependentes da tensão hidrostática, como o concreto. Para tanto se introduz no critério de von Mises um termo adicional, que reflete a influência da tensão hidrostática na ruptura do material. Este critério pode ser empregado para a descrição do comportamento do concreto, entretanto, ele não permite a caracterização da sua resistência à tração e à compressão com os mesmos parâmetros. A sua associação com uma condição de *cut-off* em tração permite caracterizar de forma mais adequada o comportamento do concreto sob solicitações de tração.

5.1.1 Critério de Resistência Macroscópico – Consideração da Condição de *Cut-Off* em Tração

A formulação para o critério de resistência do CRFA ao se considerar a condição de *cut-off* em tração para a matriz de concreto, e, assim, melhor avaliar a resistência sob tração do material compósito em estudo, é descrita na sequência.

Nesta seção, assim como no capítulo anterior, o modelo aproximado, considerando fibras longas dispostas em três direções perpendiculares, é utilizado para o estudo do CRFA. Para a determinação do domínio de resistência macroscópico G^{hom} deste material, é necessária a resolução do problema de análise limite definido sobre a sua célula base:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ (e } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ contínuo)} \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle; \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ antiperiódico}; \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in A \end{cases} \quad (5.1)$$

A adoção da abordagem estática, correspondente à utilização do teorema do limite inferior da análise limite, e o emprego do resultado de de Buhan e Taliercio (1991), conduz ao seguinte domínio de resistência para o meio reforçado com fibras longas dispostas em três direções perpendiculares:

$$G^{\text{hom}} \simeq G_s^{\text{hom}} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m, \quad \sigma_f \in [f \sigma_f^-, f \sigma_f^+] \end{array} \right\}, \quad (5.2)$$

o qual também pode ser representado através de sua função critério de resistência F^{hom} :

$$F^{\text{hom}}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{i=1}^3 \sigma_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i \\ F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0, \quad \sigma_i \in [f_i \sigma_i^-, f_i \sigma_i^+] \end{cases}, \quad (5.3)$$

conforme detalhado no Capítulo 4.

No caso da matriz caracterizada pelo critério de Drucker-Prager associado a uma condição de *cut-off* em tração do tipo Rankine, o critério de resistência da matriz pode ser expresso como:

$$F^m(\underline{\underline{\sigma}}) = \max(F^{DP}(\underline{\underline{\sigma}}), \sigma_I - f_t, \sigma_{II} - f_t, \sigma_{III} - f_t) \leq 0 \quad (5.4)$$

onde $F^{DP}(\underline{\underline{\sigma}})$ representa o critério de Drucker-Prager (Equação 4.52), σ_I , σ_{II} e σ_{III} referem-se às três tensões principais e f_t refere-se à resistência à tração uniaxial da matriz.

As expressões matemáticas obtidas na resolução do problema, as quais definem o domínio de resistência macroscópico, são as mesmas expressões apresentadas na seção 4.2.2.1. A consideração da condição de *cut-off* em tração do tipo Rankine para a matriz de concreto

acrescenta, na formulação do critério de resistência do CRFA apresentado na seção 4.2.2.1.1, as seguintes restrições para as tensões macroscópicas:

$$\begin{aligned}\Sigma_I &\leq f_t + f_x \sigma_x^+ \\ \Sigma_{II} &\leq f_t + f_y \sigma_y^+ \\ \Sigma_{III} &\leq f_t + f_z \sigma_z^+\end{aligned}\tag{5.5}$$

quando as direções das tensões principais são colineares às direções das fibras ($\Sigma_I = \Sigma_{xx}$, $\Sigma_{II} = \Sigma_{yy}$ e $\Sigma_{III} = \Sigma_{zz}$). Sendo $f_x \sigma_x^+ = f_y \sigma_y^+ = f_z \sigma_z^+$.

Restringe-se a seguir à situação na qual as direções principais da tensão macroscópica coincidem com as direções x , y e z do reforço.

Geometricamente, o domínio de resistência G^{hom} , de um material compósito formado por uma matriz reforçada com fibras nas direções x , y e z , continua sendo interpretado no espaço de tensões macroscópicas como o envoltório (envelope) convexo de oito domínios obtidos pela translação do domínio de resistência da matriz, das quantidades algébricas $f_x \sigma_x^-$ e $f_x \sigma_x^+$ ao longo do eixo Σ_{xx} , $f_y \sigma_y^-$ e $f_y \sigma_y^+$ ao longo do eixo Σ_{yy} e $f_z \sigma_z^-$ e $f_z \sigma_z^+$ ao longo do eixo Σ_{zz} . Podem ser identificadas ao longo do envoltório, zonas onde dois dos parâmetros, relacionados à tensão nas fibras (σ_x , σ_y e σ_z), têm um valor limite. Estas são identificadas como B . Há também as zonas onde três destes parâmetros têm um valor limite, as quais são identificadas como C (seção 4.2.2.1.1).

Na Figura 5.1 observa-se a intersecção do domínio de resistência macroscópico, de um compósito reforçado com fibras nas direções x , y e z , com o plano $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = 0$, ao se considerar uma matriz obedecendo ao critério de Drucker-Prager e condição de *cut-off* em tração do tipo Rankine. Σ_0 é uma tensão de referência. As intersecções, com o mesmo plano, do domínio de resistência da matriz e dos oito domínios obtidos pelas suas translações $f_x \sigma_x^\pm e_x + f_y \sigma_y^\pm e_y + f_z \sigma_z^\pm e_z$, também podem ser visualizadas. É possível verificar que o domínio de resistência macroscópico do compósito é o envoltório convexo destes oito domínios.

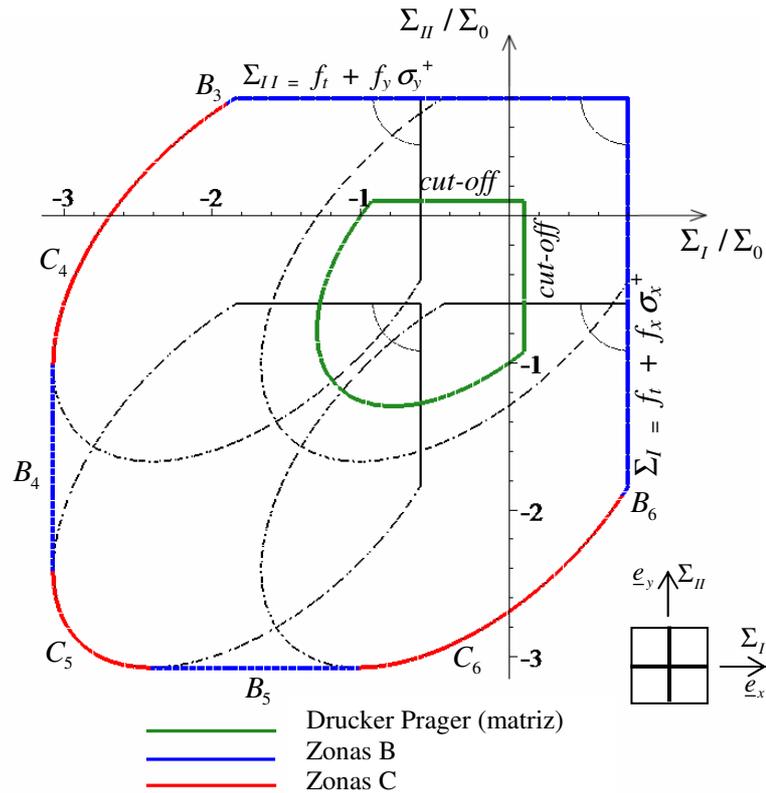


Figura 5.1 – Domínio de resistência macroscópico G^{hom} , no plano Σ_I, Σ_{II} , de um compósito reforçado nas direções x , y e z e cuja resistência da matriz é representada pelo critério Drucker-Prager e condição de *cut-off* em tração do tipo Rankine.

Na Figura 5.2 estão representadas as intersecções do domínio de resistência macroscópico do compósito com diferentes planos $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = cte$. As intersecções do domínio de resistência da matriz com estes planos (curvas verdes) também estão representadas. Esta figura permite observar o aumento de resistência que ocorre na matriz ao ser reforçada, quando se encontra sob um estado de tensões triaxiais.

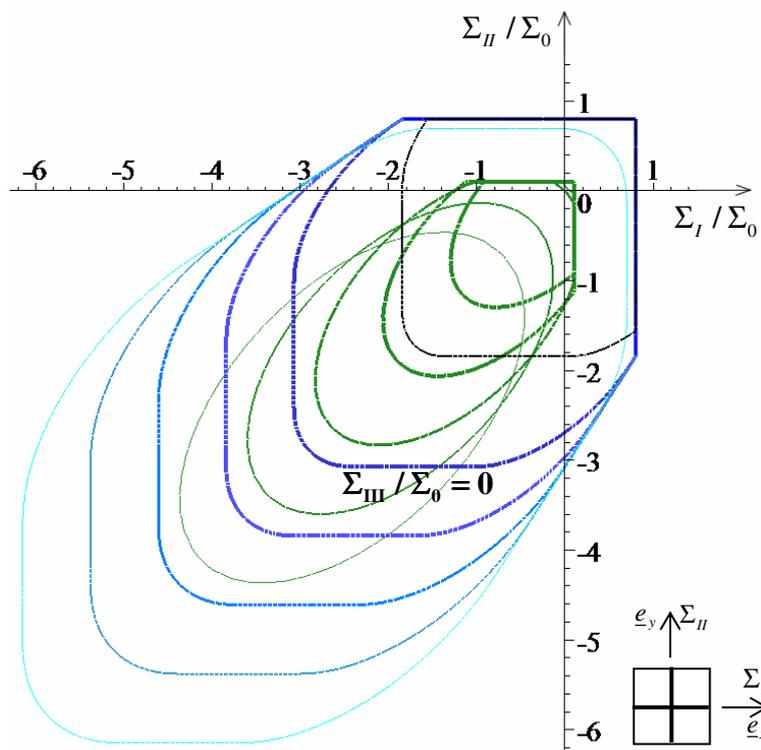


Figura 5.2 – Intersecções de G^{hom} e do domínio de resistência da matriz com diferentes planos $\Sigma_{III} / \Sigma_0 = cte$.

As expressões matemáticas, que definem o domínio de resistência macroscópico, representado nas Figuras 5.1 e 5.2, são as mesmas expressões apresentadas na seção 4.2.2.1, juntamente com as condições descritas na Equação 5.5. É importante salientar que neste estudo as tensões principais estão sendo consideradas colineares às direções das fibras.

O modelo analítico proposto fornece a seguinte expressão para a estimativa da resistência à tração uniaxial do CRFA f_t^{CRFA} :

$$f_t^{CRFA} = f_t + \frac{f\sigma_f^+}{3} \quad (5.6)$$

onde f_t e σ_f^+ são, respectivamente, as resistências à tração uniaxial da matriz e das fibras e f é a fração volumétrica das fibras.

O modelo analítico indica que ocorre um aumento considerável na resistência à tração uniaxial do concreto ao se adicionar fibras. No caso de um concreto com resistência à tração uniaxial de 3 MPa, reforçado com 2% de fibras, cuja resistência é de 1000MPa, o modelo

prevê um aumento da resistência à tração uniaxial para o CRFA superior a 200%. O que se verifica nos ensaios experimentais (Padmarajaiah e Ramaswamy, 2004; Song e Hwang, 2004; Holanda, 2002; El Niema, 1991), é que ocorre um aumento da resistência à tração da matriz ao se adicionar fibras de aço, entretanto, menor do que aquele previsto pelo modelo empregado.

A Figura 5.3 reúne os dados experimentais de resistência à tração por compressão diametral de concretos reforçados com fibras de diversos autores e é possível observar o aumento da resistência provocada pela adição de fibras em distintos trabalhos.

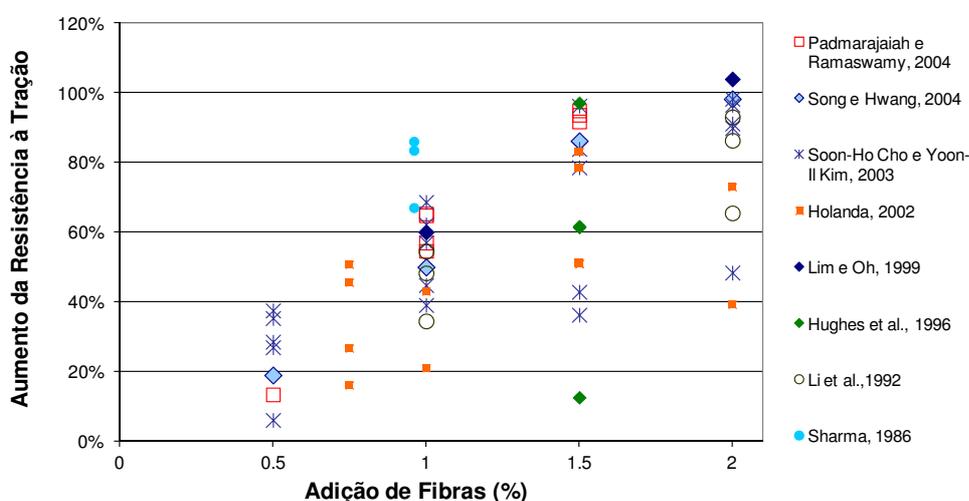


Figura 5.3 – Aumento da resistência à tração obtida pela adição de fibras de aço.

Uma possível justificativa para esta superestimação pode estar relacionada ao fato de se considerar, no presente estudo, aderência perfeita para a caracterização da interface fibra/matriz. A consideração de propriedades limitadas de resistência da interface poderia proporcionar resultados mais realistas para o critério de resistência do CRFA.

5.1.1.1 Formulação Alternativa Simplificada

Uma formulação alternativa simplificada, a qual emprega resultados experimentais de resistência à tração do CRFA poderia, entretanto, ser empregada para a caracterização do compósito sob solicitações de tração. Neste caso, o domínio de resistência para o CRFA seria obtido através de:

$$G^{\text{hom}} = \tilde{G}^{\text{hom}} \cap G_{\text{cut-off}} \quad (5.7)$$

onde \tilde{G}^{hom} representa o domínio de resistência formulado no Capítulo 4 e

$$G_{\text{cut-off}} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} / \Sigma_i - F_t \leq 0, i = I, II, III \right\} \quad (5.8)$$

sendo que Σ_i , com $i = I, II, III$ representam as tensões macroscópicas principais e F_t uma limitação da tensão em tração (*tensile cut-off*), a ser identificada experimentalmente.

Os domínios G^{hom} e $G_{\text{cut-off}}$, respectivamente, Equações 5.7 e 5.8, também podem ser representados através de suas funções critério de resistência, respectivamente, F^{hom} e $F_{\text{cut-off}}$:

$$F^{\text{hom}}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \max(\tilde{F}^{\text{hom}}(\underline{\underline{\Sigma}}), F_{\text{cut-off}}(\underline{\underline{\Sigma}})) \leq 0 \quad (5.9)$$

$$F_{\text{cut-off}}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \max(\Sigma_I - F_t, \Sigma_{II} - F_t, \Sigma_{III} - F_t) \leq 0 \quad (5.10)$$

Dois trabalhos experimentais (Demeke e Tegos (1994) e Kölle (2006)) sobre a resistência do CRFA sob estado de tensões biaxiais de compressão-tração foram encontrados na literatura. Os resultados obtidos pelos autores são comparados, na sequência, ao modelo analítico proposto empregando a formulação analítica simplificada descrita.

Demeke e Tegos (1994), em seus experimentos, analisaram corpos de provas de CRFA submetidos simultaneamente a tensões de compressão e de tração. Os principais parâmetros examinados foram a combinação das duas tensões biaxialmente aplicadas e a proporção volumétrica das fibras. Os autores verificaram que a adição de fibras aumenta significativamente a resistência da matriz de concreto dependendo da quantidade de fibras adicionadas. O mesmo resultado não foi obtido para a resistência à compressão uniaxial.

Nos estudos, empregou-se um concreto com resistências à compressão uniaxial de $f_c = 30$ MPa e à tração uniaxial de $f_t = 3,14$ MPa e frações volumétricas de fibras de $f = 0,5\%$, 1% e $1,5\%$. Utilizaram-se fibras de aço com razão de aspecto $l_f/d_f = 60$. As resistências à

compressão biaxial do concreto e à tração uniaxial das fibras não foram fornecidas. Foram então empregados, no modelo analítico, os seguintes valores para estas propriedades, $f_{cb} = 1,16f_c$ e 1000 MPa, respectivamente. Através das resistências f_c e f_{cb} , obteve-se os seguintes valores para os parâmetros do critério de Drucker-Prager: $\alpha_m = 0,123$ e $\sigma_m = 23,46$ MPa.

As resistências à tração uniaxial dos concretos reforçados com fibras, identificadas experimentalmente, as quais são empregadas para a definição dos parâmetros da formulação alternativa simplificada F_t , foram as seguintes $f_t^{0,5\%} = F_t^{0,5\%} = 4,11$ MPa, $f_t^{1\%} = F_t^{1\%} = 4,70$ MPa e $f_t^{1,5\%} = F_t^{1,5\%} = 5,48$ MPa.

Na Figura 5.4 estão representados os resultados experimentais de Demeke e Tegos (1994) e aqueles obtidos no presente estudo (linhas contínuas).

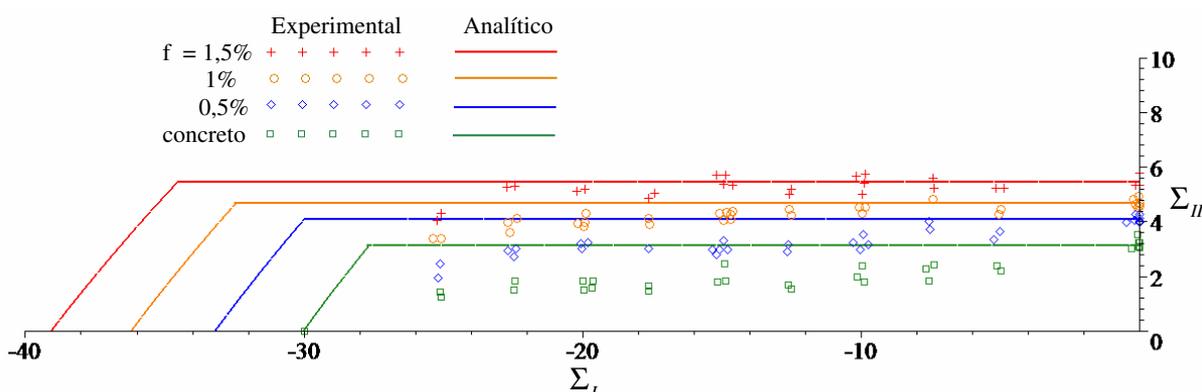


Figura 5.4 – Dados experimentais de Demeke e Tegos (1994) e resultados analíticos do presente estudo.

A comparação dos resultados permite afirmar que a formulação empregada, apesar de simplificada, aproxima-se satisfatoriamente aos resultados experimentais. Maiores diferenças são encontradas para as maiores tensões de compressão, principalmente para a resistência a compressão uniaxial, onde os autores apenas encontraram um acréscimo de 5% para a adição de 1,5% de fibras. É importante ressaltar que outros estudos (Williamson, 1974; Narayanan e Darwish, 1987; Bentur e Mindess, 2006; Lim e Oh, 1999) indicaram que o aumento da resistência à compressão uniaxial, em função da adição de fibras, pode ser maior do que aquele encontrado por Demeke e Tegos (1994). Outros fenômenos, como por exemplo, a incorporação de ar ao concreto e a ausência de aderência entre fibra/matriz, os quais não estão

sendo incluídos neste modelo analítico, poderiam ser a justificativa para a falta de aumento de resistência do CRFA produzido por Demeke e Tegos (1994).

Kölle (2006), por sua vez, analisou a resistência do concreto de alta resistência reforçado com fibras de aço quando submetido a tensões biaxiais de compressão-compressão e compressão-tração. Os ensaios de compressão-compressão foram realizados aos 330 dias, enquanto os ensaios de compressão-tração aos 256 dias. Considerou-se a matriz com uma resistência à compressão uniaxial de $f_c = 107,5$ MPa, para a análise do trecho de tensões biaxiais de compressão, e com $f_c = 93,84$ MPa, para a análise do trecho de tensões de compressão-tração. Quanto às resistências à tração uniaxial e à compressão biaxial, os seguintes valores, respectivamente, foram encontrados $f_t = 5,69$ MPa e $f_{cb} = 1,13f_c$, os quais foram obtidos a partir da média dos dados de resistência experimentais.

Foram estudadas as frações volumétricas de fibras de $f = 0,5\%$, 1% , $1,5\%$ e 2% e fibras com dois valores de razão de aspecto $l_f/d_f = 45$ e $l_f/d_f = 65$, cuja resistência à tração uniaxial era de 1200 MPa. Através das resistências f_c e f_{cb} , obteve-se os seguintes valores para os parâmetros do critério de Drucker-Prager: $\alpha_m = 0,10$ e $\sigma_m = 87,77$ MPa, para o trecho de compressão-compressão, e $\alpha_m = 0,10$ e $\sigma_m = 76,28$ MPa para o trecho de compressão-tração.

Apenas os CRFA com $f = 1\%$ e 2% foram analisados sob tensões de compressão-tração. As resistências à tração uniaxial destes concretos, identificadas experimentalmente, as quais são empregadas para a definição dos parâmetros da formulação alternativa simplificada F_t , foram as seguintes $f_t^{1\%} = F_t^{1\%} = 5,74$ MPa e $f_t^{2\%} = F_t^{2\%} = 6,92$ MPa para os concretos reforçados com fibras com $l_f/d_f = 45$, e $f_t^{1\%} = F_t^{1\%} = 6,22$ MPa e $f_t^{2\%} = F_t^{2\%} = 6,86$ MPa, para os concretos reforçados com fibras com $l_f/d_f = 65$.

Nas Figuras 5.5 e 5.6 estão representados os resultados experimentais de Kölle (2006) e aqueles obtidos no presente estudo (linhas contínuas). A Figura 5.5 se refere aos concretos reforçados com fibras de $l_f/d_f = 45$, enquanto na Figura 5.6 se refere aos concretos reforçados com fibras de $l_f/d_f = 65$.

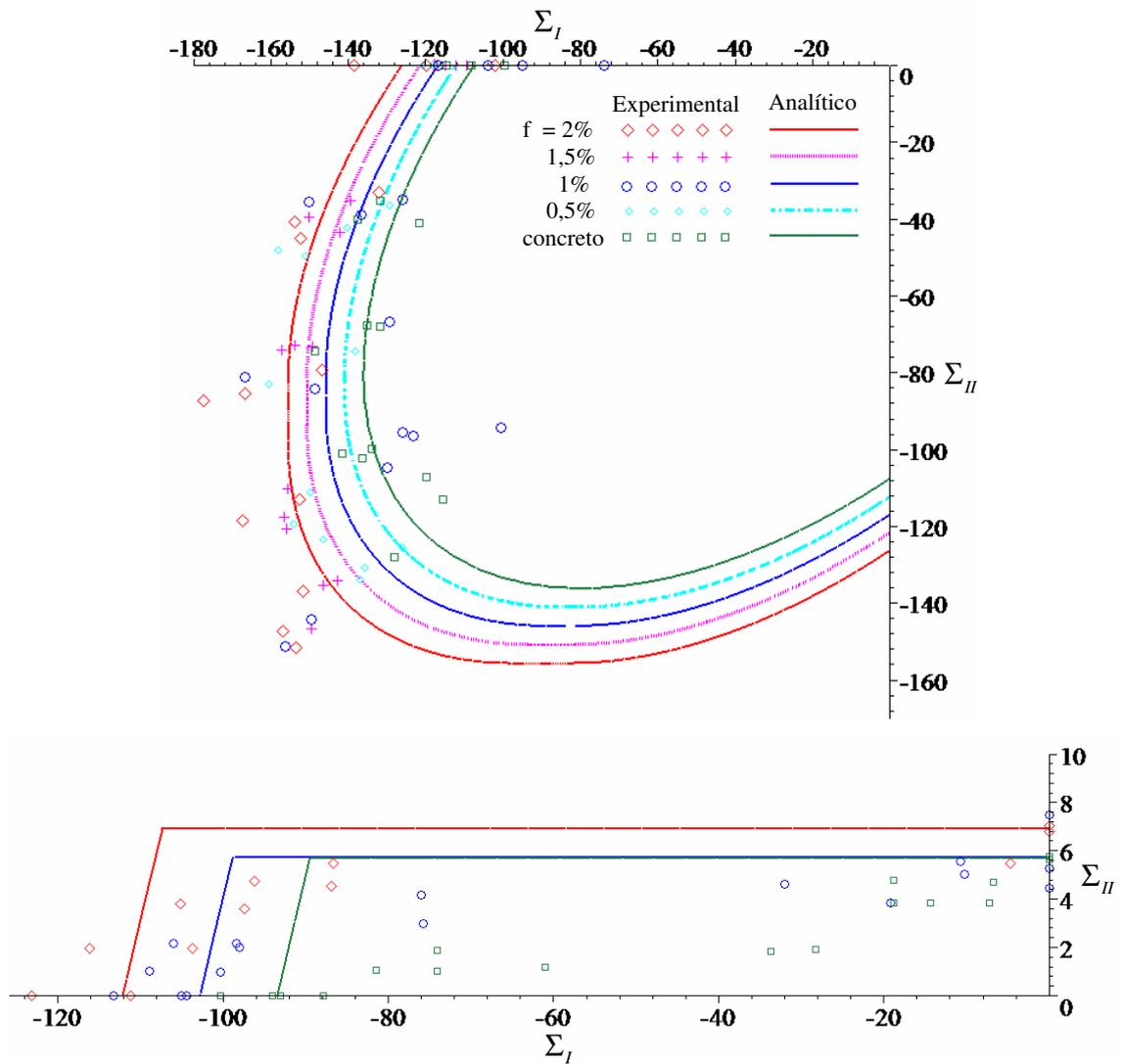


Figura 5.5 – Dados experimentais de Kölle (2006) ($l_f/d_f = 45$) e resultados analíticos do presente estudo (a). Detalhe da região de tensões de compressão-tração.

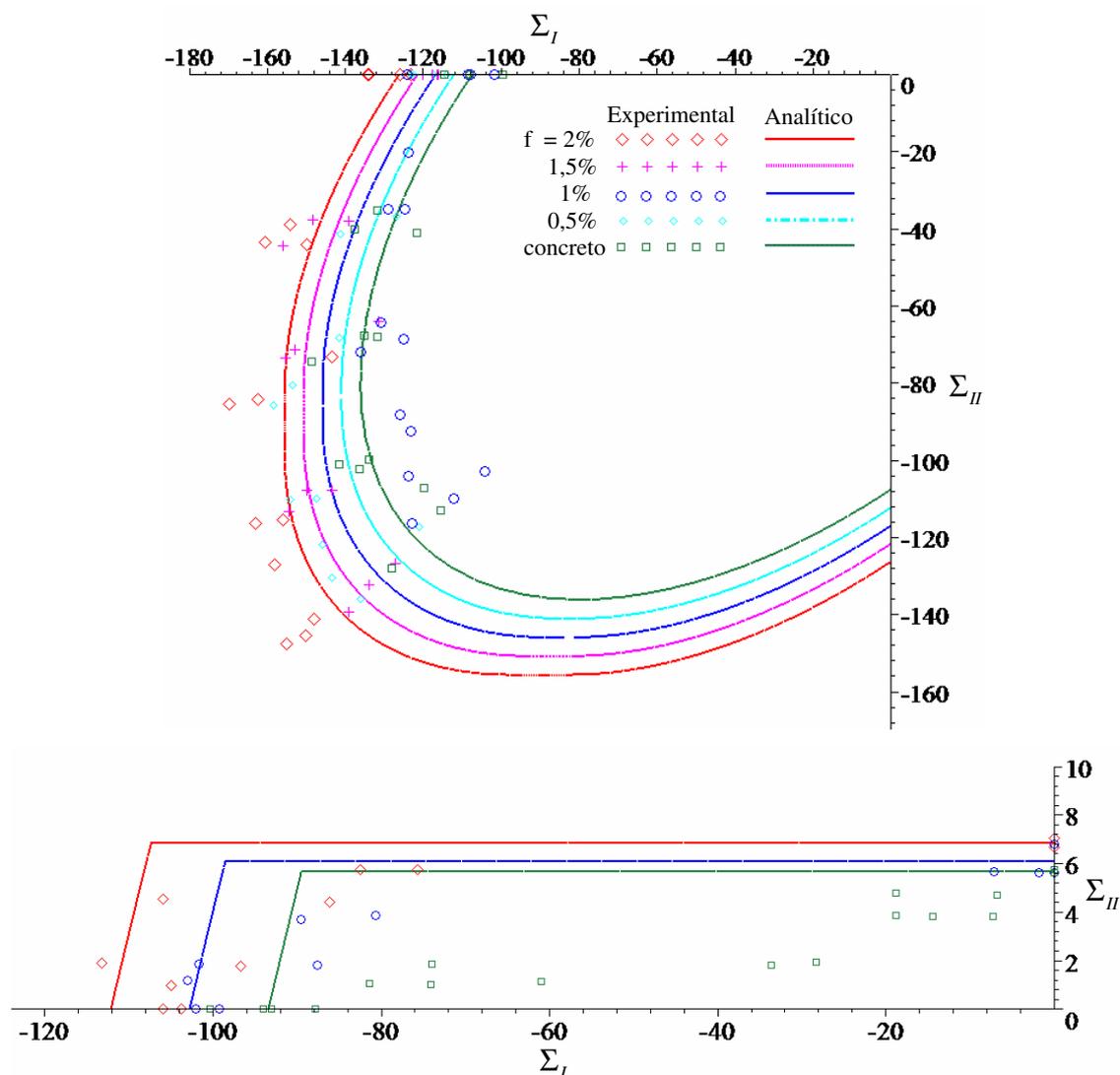


Figura 5.6 – Dados experimentais de Kölle (2006) ($l_f/d_f = 65$) e resultados analíticos do presente estudo (a). Detalhe da região de tensões de compressão-tração.

Os resultados experimentais de Kölle (2006), apesar de sua dispersão, indicam que ocorre um aumento da resistência do concreto ao se incorporar fibras, em função da quantidade de fibra adicionada, assim como nos estudos de Yin *et al.* (1989), de Lim e Nawy (2005), de Swaddiwudhipong e Seow (2006) e de Peres (2008). Sob estado de tração uniaxial também obteve-se um aumento de resistência, da ordem de 20% para a adição de 2% de fibras. Na região de tensões de compressão-tração, é possível verificar tendência de aumento de resistência ao se adicionar fibras.

Através da comparação dos dados experimentais de Kölle (2006) com o modelo analítico, verifica-se que, na maioria dos casos, os resultados obtidos no presente estudo subestimam os

valores da resistência à compressão biaxial, assim como observado na comparação com os experimentos de Yin *et al.* (1989) e Peres (2008). Novamente, uma possível justificativa pode estar na geometria dos corpos de prova empregados ($20,5 \times 20,5 \times 5 \text{ cm}^3$), os quais podem causar uma maior concentração de fibras segundo as suas maiores dimensões e, portanto, segundo as direções de carregamento. Este fato pode justificar a diferença encontrada entre os dados experimentais de resistência do CRFA sob compressão-compressão biaxial e os resultados analíticos.

Quanto à região de compressão-tração, o modelo analítico proposto não se aproximou adequadamente aos dados experimentais. Acredita-se que uma alternativa seria o emprego do critério de Willan-Warnke ou o critério de Ottosen para a caracterização da matriz, o que possivelmente permitiria uma melhor aproximação do modelo analítico aos resultados experimentais do CRFA sob tensões de tração, bem como aos resultados da matriz de concreto não reforçado.

Por fim, verifica-se que Kölle (2006) obteve resultados muito próximos de resistência para o concreto reforçado com fibras de diferentes fatores de aspecto ($l_f/d_f = 45$ e $l_f/d_f = 65$). Este resultado, juntamente com resultados de resistências à compressão e à tração uniaxiais obtidos por outros autores (Nunes e Agopyan, 1998; Bayramov *et al.* 2004; Garcez, 2005; Yazici *et al.*, 2007, Köksal *et al.*, 2008, Góis, 2010), indicam a pequena influência do fator de aspecto das fibras na resistência do CRFA e confirmam a validade da consideração efetuada neste estudo para l_f/d_f .

5.2 INTERFACE

Conforme descrito no Capítulo 4, a construção do domínio de resistência macroscópico G^{hom} de um compósito reforçado com fibras, como o CRFA, resulta da resolução de um problema de análise limite colocado sobre o seu volume elementar representativo. Para tanto é necessário o conhecimento dos domínios de resistência dos seus constituintes (ou seja, da matriz de concreto, das fibras e da interface fibra/matriz). Quanto às propriedades de resistência da interface fibra/matriz, considerou-se, na análise, aderência perfeita entre os constituintes do CRFA.

A consideração de aderência perfeita entre constituintes de um material compósito, equivale a computar o material da interface fibra/matriz com resistência infinita e desconsiderar qualquer fenômeno de falha que possa ocorrer no mesmo.

Observações experimentais levam à conclusão de que o comportamento do CRFA, como o de outros materiais compósitos, pode, muitas vezes, ser influenciado pela falta de aderência entre os constituintes (Bentur e Mindess, 2006). Uma abordagem mais apropriada deve, portanto, avaliar as propriedades limitadas de resistência da interface na formulação do domínio de resistência macroscópico G^{hom} .

5.2.1 Interação Fibra-Matriz

O comportamento do concreto com adição de fibras é controlado por processos de transferência de tensão da matriz para as fibras. O fenômeno da transferência de tensão é influenciado por uma série de fatores, tais como: a condição da matriz, ou seja, antes da fissuração ou após a fissuração; propriedades mecânicas da matriz e da fibra; a geometria da fibra, ou seja, o seu comprimento, forma, diâmetro e mecanismo de ancoragem, o teor de fibras no compósito, e também as características e propriedades mecânicas da interface.

Em compósitos cimentícios, a microestrutura ao redor da inclusão é diferente do restante da estrutura. Esta zona é comumente referida como zona de transição interfacial (ZTI). A presença desta zona resulta em um gradiente de microestrutura e, como consequência, um gradiente de propriedades mecânicas. Bentur e Mindess (2006) identificam duas situações que podem ocorrer: a primeira se refere a uma interface porosa e fraca que causa uma redução global da ligação (vínculo) entre os materiais; a segunda, a uma interface fraca que não se encontra na superfície da fibra, mas sim na camada porosa da interface, um pouco longe da superfície da fibra. A primeira situação afeta diretamente a ligação e a resistência ao arrancamento, enquanto a segunda tem um efeito indireto, influenciando o modo de descolagem, quando as fissuras se desenvolvem nestas partes da matriz e propagam na direção das fibras.

Existem meios utilizados para reduzir o tamanho e as heterogeneidades da ZTI, as quais levam ao seu fortalecimento e, por consequência, a melhoria da ligação entre os constituintes. Um fator é a maior quantidade de finos e uma graduação adequada dos agregados na

composição da matriz, permitindo um melhor empacotamento do conjunto, assim como ocorre nos concretos de alta resistência e concretos auto-adensáveis. Além disso, a presença de adições minerais, como sílica ativa, cinza de casca de arroz, cinza volante, causa uma melhor aderência entre fibra/matriz, e, conseqüentemente, uma maior eficiência das fibras quando solicitadas (Balaguru e Shah, 1992).

Segundo Bentur e Mindess (2006), antes da fissuração da matriz, o mecanismo dominante de transferência de tensão é o elástico e os deslocamentos longitudinais na interface da fibra e da matriz são geometricamente compatíveis. Tensões tangenciais são desenvolvidas na interface, as quais são requeridas para a distribuição da carga externa entre as fibras e matriz. Os autores também afirmam que a distribuição das tensões tangenciais ao longo da interface fibra/matriz não é uniforme.

Em avançados estágios de carga, ocorrem descolamentos entre a fibra e a matriz e o mecanismo de transferência de tensão entre ambas passa a ser por atrito, ocorrendo deslocamentos relativos entre a fibra e a matriz. A tensão de atrito desenvolvida é uma tensão tangencial, considerada por muitos modelos, como uniformemente distribuída ao longo da interface. Este modo de transferência de tensão tem maior importância na pós-fissuração, onde as fibras atuam como pontes de ligação através das fissuras, controlando, inclusive, propriedades como a resistência e a deformação específicas últimas do compósito (Bentur e Mindess, 2006).

A transição do mecanismo de transferência de tensão elástico para transferência de tensão por atrito ocorre quando as tensões tangenciais na interface fibra-matriz excedem o seu limite de resistência ao cisalhamento τ_{au} . Quando esta tensão é excedida, o descolamento entre fibra e matriz é iniciado e tensões de atrito passam a atuar na interface. τ_{fu} é chamado de tensão de cisalhamento friccional máxima que pode ser suportada pela interface. Os valores de τ_{au} e τ_{fu} não são necessariamente os mesmos. O valor de τ_{fu} é bastante sensível a tensões e deformações normais; na maioria dos tratamentos analíticos é admitido constante em todo o intervalo em que ocorre o arrancamento, implicando na curva idealizada de *tensão de cisalhamento interfacial x deslocamento*, apresentada na Figura 5.7. Entretanto, na prática, τ_{fu} pode ser reduzido, em estágios avançados de carga (*slip softening*), ou aumentado (*slip*

hardening), dependendo da natureza da interação e do dano ocorrido ao longo da interface durante o processo de deslizamento.

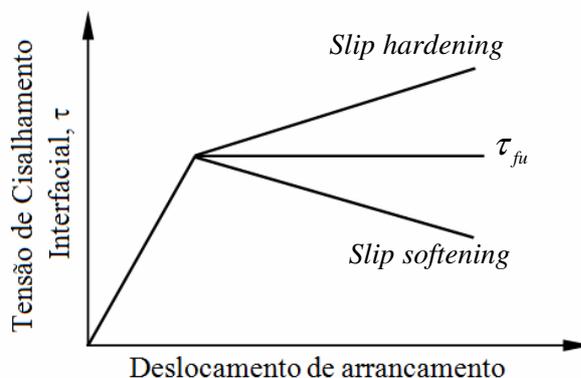


Figura 5.7 – Representação das tensões tangenciais (de cisalhamento) na interface fibra-matriz (adaptado de Bentur e Mindess, 2006).

A transição do tipo de transferência de tensão, por aderência elástica (antes do descolamento) e por atrito (após o descolamento), é um processo gradual, durante o qual, ambos os mecanismos são efetivos. A ocorrência do descolamento é dependente das propriedades dos materiais que constituem o compósito e da sua interação, como a resistência de aderência e a resistência à tração da matriz.

A tensão de cisalhamento desenvolvida paralela à interface fibra-matriz é um importante mecanismo de transferência de carga entre fibra e matriz, conforme indicado anteriormente; entretanto, também devem ser considerados os efeitos das tensões e deformações normais que surgem na interface. As tensões normais são resultantes do efeito de Poisson, de alterações de volume e de carregamentos biaxiais e triaxiais; podendo causar enfraquecimento da interface e um desligamento prematuro das fibras, alterando a resistência ao atrito, que é sensível às tensões normais (Bentur e Mindess, 2006).

Uma abordagem adequada para modelar a transferência de tensão entre fibra/matriz requer o tratamento simultâneo dos fenômenos descritos: “transferência de tensão elástica”, transferência de tensão por atrito, descolamento, e influência das tensões e deformações normais, o que constitui uma tarefa bastante complexa.

Para as fibras que possuem dispositivos de ancoragem em sua geometria, além dos mecanismos de transferência de tensões mencionados anteriormente, deve ser considerada a transferência mecânica de tensões proporcionada pela ancoragem. Nestas fibras, o

arrancamento e a retificação da ancoragem permitem um aumento considerável da carga de arrancamento (Naaman e Najm, 1991) e, portanto uma melhoria das propriedades de resistência da interface.

A transferência de carga induzida pela fibra que conecta uma fissura é comumente simulada por testes de *pull-out*, nos quais o arrancamento de uma fibra ou um conjunto de fibras pode ser analisado. Uma vez que as propriedades da interface não podem ser avaliadas com os mesmos ensaios empregados para a caracterização da matriz e das fibras, estes testes permitem avaliar os mecanismos de ligação entre fibra/matriz e verificar a natureza da interação entre as mesmas (elástico, atrito, ou ambos), como também conhecer os valores de resistência característicos da ligação.

5.2.2 Critério de Resistência Macroscópico – Consideração da Interface

Para a avaliação das propriedades de resistência da interface, necessárias na determinação do domínio de resistência macroscópico do compósito, considera-se, inicialmente, o vetor de tensão $\underline{T}(\underline{x})_i = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i$ que age sobre um ponto \underline{x} da interface i entre a fibra e a matriz (Figura 5.8 a).

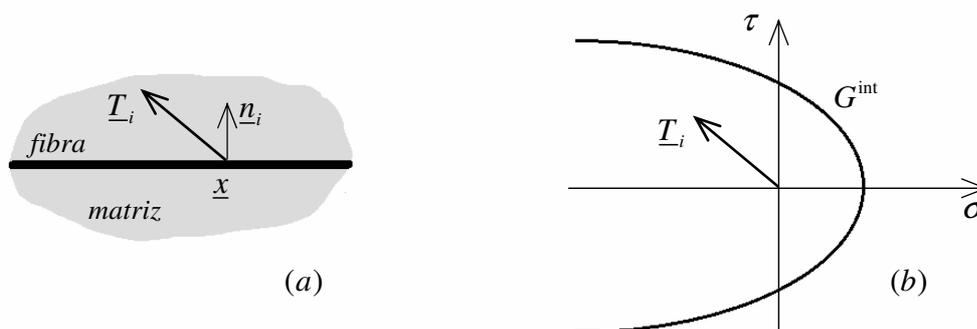


Figura 5.8 – Interface matriz/fibra e sua capacidade de resistência.

A condição de resistência da interface pode ser expressa da seguinte forma:

$$\underline{T}_i \in G^{\text{int}} \Leftrightarrow g^{\text{int}}(\underline{T}_i) \leq 0 \quad (5.11)$$

onde g^{int} é uma função convexa do R^3 composta por vetores de tensão $T_i(\sigma, \tau)$ admissíveis (Figura 5.8 b). Supõe-se a interface homogênea e isotropa, e, portanto G^{int} (ou g^{int}) é independente do ponto \underline{x} da interface.

A determinação do domínio de resistência macroscópico $G_{\text{int}}^{\text{hom}}$ do material compósito, considerando a resistência da interface, se reduz à resolução do problema de análise limite definido sobre a sua célula base:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_{\text{int}}^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \left\{ \begin{array}{l} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ (e } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ contínuo)} \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ antiperiódico} \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \quad \forall \underline{x} \in A^m \quad \text{e} \quad \underline{\underline{\sigma}}^f \in G^f \quad \forall \underline{x} \in A^f \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_i \in G^{\text{int}} \quad \forall \underline{x} \in I^{fm} \end{array} \right. \quad (5.12)$$

onde G^m e G^f são, respectivamente, os critérios de resistência da matriz e das fibras. G^{int} designa o critério de resistência da interface entre as fibras e a matriz. \underline{n}_i é o vetor normal à interface da fibra disposta segundo a direção \underline{e}_i e I^{fm} refere-se à interface fibra/matriz.

Considerando-se o resultado de Buhan e Taliercio (1991) e as fibras dispostas segundo três direções perpendiculares (modelo aproximado, Capítulo 4), o domínio de resistência $G_{\text{int}}^{\text{hom}}$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_{\text{int}}^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \quad (\Leftrightarrow F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0) \\ \sigma_{x,y,z} \in I_{x,y,z}, \quad I_f = [f_f \sigma_f^-, f_f \sigma_f^+] \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_i \in G^{\text{int}}, \quad \text{com} \quad \underline{n}_i \perp \underline{e}_i, \quad i = x, y, z \end{array} \right. \quad (5.13)$$

onde $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_i$ é o vetor de tensão da interface entre a matriz e a fibra disposta segundo a direção \underline{e}_i .

Adotando-se a abordagem estática, baseada em um campo de tensão homogêneo por fase, como aquela adotada no Capítulo 4, é possível verificar que o domínio de resistência de um compósito reforçado com fibras em três direções perpendiculares pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Sigma}} \in G_{s,int}^{\text{hom}} &\Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} \in G_s^{\text{hom}} \cap G^{\text{int}} \\
\underline{\underline{\Sigma}} \in G_s^{\text{hom}} &\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \\ \sigma_{x,y,z} \in I_{x,y,z}, I_f = [f_f \sigma_f^-, f_f \sigma_f^+] \end{cases} \\
\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{int}} &\Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}_i \in G^{\text{int}}, \text{ com } i = x, y, z
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Geometricamente, o domínio de resistência $G_{s,int}^{\text{hom}}$, para um compósito formado por uma matriz reforçada por fibras longas dispostas em três direções perpendiculares e considerando a resistência da interface fibra/matriz G^{int} , pode ser obtido, no espaço $R^6 = \{\Sigma_{xx}, \Sigma_{yy}, \Sigma_{zz}, \Sigma_{xy}, \Sigma_{xz}, \Sigma_{yz}\}$ de tensões macroscópicas, pela intersecção de G_s^{hom} e G^{int} :

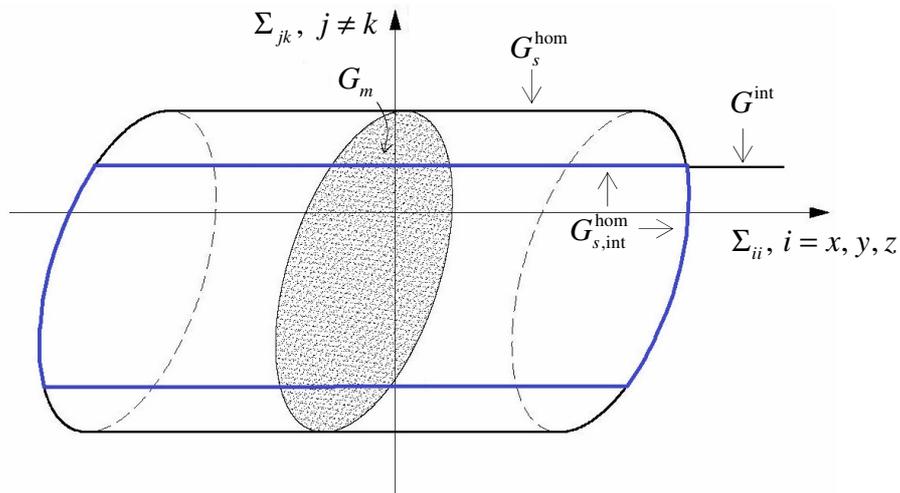


Figura 5.9 – Domínio $G_{s,int}^{\text{hom}}$ (intersecção de G_s^{hom} e G^{int}).

Uma vez que se admite a possibilidade de falha na interface, obtém-se um domínio de resistência para o material compósito, conforme pode ser observado na Figura 5.9, mais restritivo para o nível de tensões do mesmo, em relação ao domínio de resistência calculado ao se considerar aderência perfeita, ou seja, $G_{s,int}^{\text{hom}} \subset G_s^{\text{hom}}$.

5.2.2.1 Domínio de Resistência da Interface G^{int}

A abordagem com aderência perfeita entre fibra e matriz, não impõe nenhuma limitação sobre o tensor de tensão \underline{T}_i da interface. Neste caso, o domínio G^{int} constitui o espaço R^3 inteiramente. Além desta, outras duas abordagens podem ser consideradas:

- A primeira se refere à consideração do critério do tipo Coulomb para caracterizar a ruptura da interface:

$$g^{\text{int}}(\underline{T}_i) = |\tau| + \sigma t g \phi^{\text{int}} - c^{\text{int}} \leq 0 \quad (5.15)$$

onde ϕ^{int} e c^{int} são, respectivamente, o ângulo de atrito e a coesão da interface. τ e σ são as tensões de cisalhamento e normal referentes à \underline{T}_i .

- A segunda, por sua vez, limita em tração, a um valor σ^{int} , a tensão normal que ocorre em qualquer ponto da interface:

$$g^{\text{int}}(\underline{T}_i) = \sigma - \sigma^{\text{int}} \leq 0 \quad (5.16)$$

O primeiro tipo de critério (Equação 5.15), aquele que limita a tensão de cisalhamento na interface, em função do nível de tensão normal à mesma, é o mais apropriado para o estudo do comportamento da interface entre concreto e fibras.

5.2.2.2 Domínio de Resistência do CRFA – Consideração da Interface

A obtenção do domínio de resistência para o CRFA resulta da determinação do domínio $G_{s,\text{int}}^{\text{hom}}$ (Equação 5.14), ou seja, do conhecimento de G_s^{hom} e G^{int} . O domínio G_s^{hom} foi determinado na seção 4.2; resta, então, determinar G^{int} (ou g^{int}) e suas intersecções com G_s^{hom} .

Para a obtenção de g^{int} , considera-se, inicialmente, a fibra posicionada segundo a direção \underline{e}_z . Na Figura 5.10 é possível observar o vetor normal à interface $\underline{n}(\underline{x})_z$.

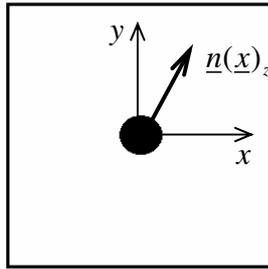


Figura 5.10 – Vetor normal à interface para fibra disposta segundo \underline{e}_z .

A partir de $\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n(x)}_z$ é possível obter as tensões de cisalhamento e normal da interface, respectivamente, τ e σ , as quais estão relacionadas pelo critério da interface (Equação 5.15). τ e σ são função das componentes da tensão macroscópica (Σ_{xx} , Σ_{yy} , Σ_{xy} , Σ_{xz} e Σ_{yz}).

Considerando-se as direções das fibras e das tensões principais colineares, τ e σ são função das tensões principais Σ_I e Σ_{II} .

Através da Equação 5.15, e das expressões encontradas para τ e σ , é possível obter as seguintes expressões para o domínio de resistência da interface, considerando-se a fibra posicionada segundo a direção \underline{e}_z :

$$g_z^{\text{int}} = \pm \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \mp \phi^{\text{int}} \right) \left(\frac{\Sigma_I - \Sigma_{II}}{2} \right) + \text{tg} \phi^{\text{int}} \left(\Sigma_I \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\phi^{\text{int}}}{2} \right) + \Sigma_{II} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\phi^{\text{int}}}{2} \right) \right) - c^{\text{int}} \leq 0 \quad (5.17)$$

Em função da simetria que ocorre em relação às três direções de reforço consideradas, a resolução dos demais casos (g_x^{int} e g_y^{int}) é obtida através de permutações de x , y e z e de I , II e III , na Equação 5.17. g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int} representam planos no espaço tridimensional de tensões principais e retas no plano de tensões principais Σ_I, Σ_{II} . Na Figura 5.11 é possível verificar os domínios g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int} no plano Σ_I, Σ_{II} . Σ_0 é uma tensão de referência.

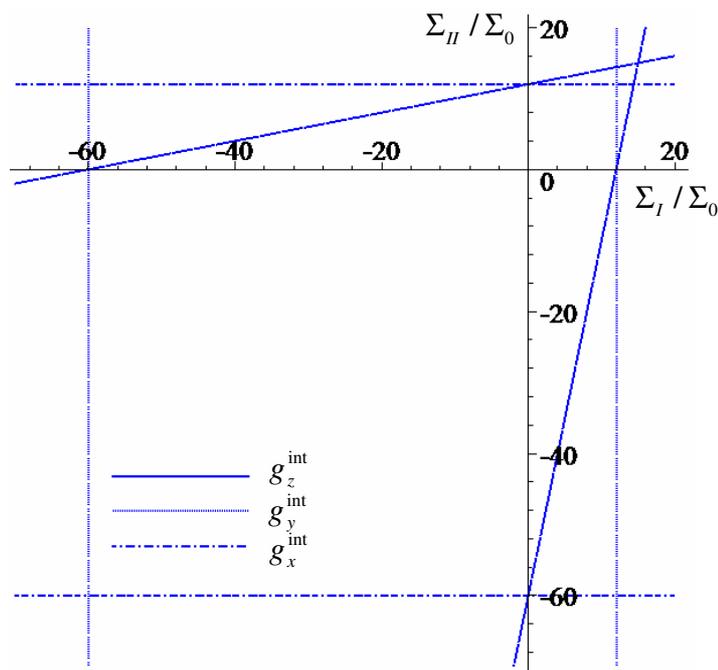


Figura 5.11 – Critérios de resistência g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int} da interface no plano de tensões principais Σ_I, Σ_{II} .

A interseção dos domínios g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int} com o domínio G_s^{hom} , permite a obtenção do domínio de resistência macroscópico $G_{s,\text{int}}^{\text{hom}}$ para o compósito em estudo.

Os parâmetros ϕ^{int} e c^{int} definem as propriedades da interface. Em função da impossibilidade de se testar o material da interface diretamente, a obtenção dos parâmetros ϕ^{int} e c^{int} é realizada, neste trabalho, através de uma análise inversa, onde as propriedades de resistência do CRFA e da matriz auxiliam na sua determinação. Abordagem semelhante é empregada por Proença (1988) e Carmo (2005), os quais determinaram, através das resistências à compressão e à tração uniaxiais, os parâmetros coesão e ângulo de atrito para concretos de resistência normal e alta resistência. Através desta abordagem a influência da forma da fibra pode ser incorporada indiretamente ao modelo.

ϕ^{int} e c^{int} podem ser calculados a partir das expressões:

$$\text{tg} \phi^{\text{int}} = \frac{-(\Sigma^* + f_t^{\text{CRFA}})}{2\sqrt{-(\Sigma^* + f_t^{\text{CRFA}})}} \quad (5.18)$$

$$c^{int} = \frac{-(\Sigma^* f_t^{CRFA})}{2\sqrt{-(\Sigma^* + f_t^{CRFA})}}$$

onde f_t^{CRFA} refere-se à resistência à tração uniaxial do CRFA (Figura 5.12).

$$\Sigma^* = (-f_1 + f_2)(f_7 + f_8)/f_9, \quad \text{com} \quad f_1 = \sqrt{3}(1 - \alpha_m^2)(-\sigma_x + \sigma_z),$$

$$f_2 = \sqrt{1 - \alpha_m^2}(3\alpha_m(-\sigma_x - \sigma_z) - 2\sigma_m(1 + \alpha_m)), \quad f_7 = 3\alpha_m\sqrt{1 - \alpha_m^2}, \quad f_8 = \sqrt{3}(1 - \alpha_m^2),$$

$$f_9 = 3(1 - \alpha_m^2)(1 - 4\alpha_m^2) \text{ e } \sigma_x = f_x\sigma_x^- \text{ e } \sigma_z = f_z\sigma_z^+.$$

Sendo σ_m e α_m os parâmetros do critério de resistência de Drucker-Prager, definidos a partir das propriedades de resistência da matriz.

σ_f^+ e σ_f^- são, respectivamente, a resistência à tração e à compressão uniaxial das fibras.

Na Figura 5.12 são representados os domínios g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int} , juntamente com o domínio

G_s^{hom} , sendo possível verificar as suas intersecções e determinar o domínio $G_{s,int}^{hom}$:

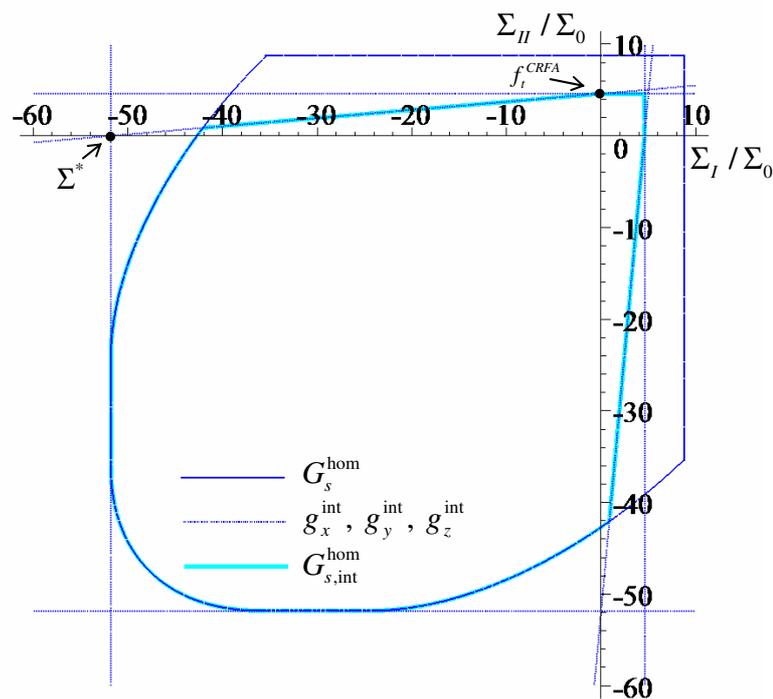


Figura 5.12 – Domínio $G_{s,int}^{hom}$, obtido a partir de G_s^{hom} , g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int} .

Para a representação de G_s^{hom} , na Figura 5.12, considerou-se uma matriz de concreto cujas resistências à compressão uniaxial e à compressão biaxial são de $f_c = 28$ MPa e $f_{cb} = 1,16f_c$,

respectivamente. As fibras, por sua vez, foram consideradas com uma resistência à tração uniaxial de 1200 MPa e com fração volumétrica de $f = 1,5\%$. Para representar a influência da interface no domínio de resistência, considerou-se que as fibras proporcionaram um aumento da resistência à tração uniaxial da matriz de 65%, ou seja, $f_t^{CRFA} = 4,6$ MPa.

O resultado obtido ao se considerar a resistência da interface na formulação do critério de resistência do CRFA é, na sequência, comparado aos resultados experimentais de Kölle (2006). Os dados destes experimentos estão descritos na seção 5.1.1.1. Os valores obtidos para os parâmetros ϕ^{int} e c^{int} , a partir dos próprios dados experimentais de resistência do CRFA, empregando as Equações 5.18, estão detalhados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Coesão e ângulo de atrito empregados para caracterizar a resistência da interface fibra/matriz.

l_f / d_f	45		65	
f	1%	2%	1%	2%
c^{int} (MPa)	13,60	15,48	14,05	15,41
ϕ^{int}	66,20°	64,85°	65,43°	64,96°

Nas Figuras 5.13 e 5.14 estão representados os resultados experimentais de Kölle (2006) e aqueles obtidos no presente estudo (linhas contínuas). A Figura 5.13 se refere aos concretos reforçados com fibras de $l_f / d_f = 45$, enquanto na Figura 5.14 se refere aos concretos reforçados com fibras de $l_f / d_f = 65$.

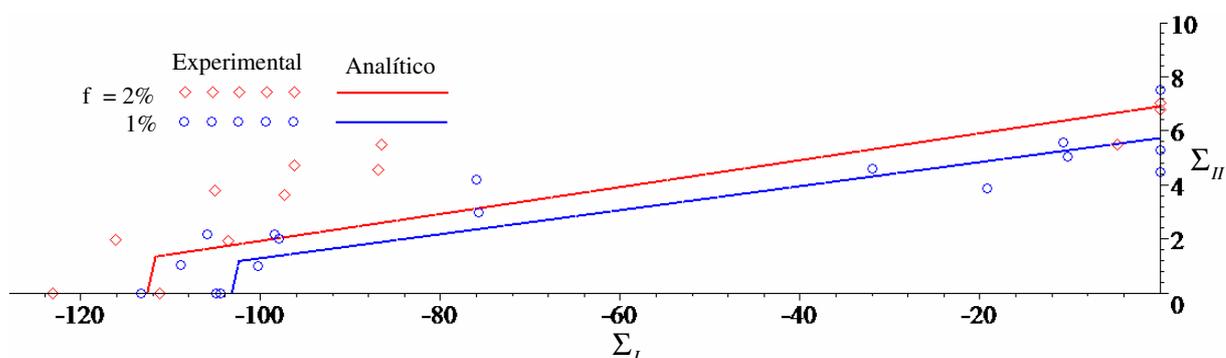


Figura 5.13 – Dados experimentais de Kölle (2006) ($l_f / d_f = 45$) e resultados analíticos do presente estudo.

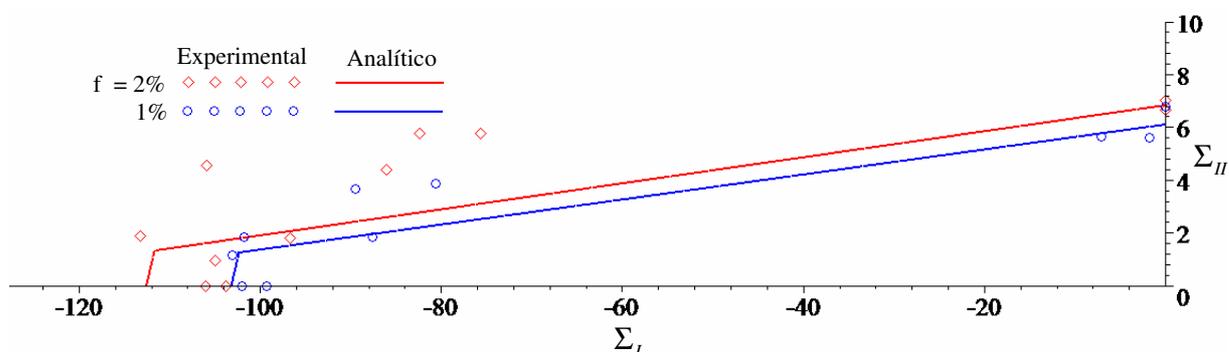


Figura 5.14 – Dados experimentais de Kölle (2006) ($l_f / d_f = 65$) e resultados analíticos do presente estudo.

Através das Figuras 5.13 e 5.14, verifica-se que os resultados analíticos se encontram próximos aos dados experimentais para a fração volumétrica $f = 1\%$. No caso de $f = 2\%$, o modelo subestima a resistência do CRFA sob tensões biaxiais de compressão-tração.

A definição dos parâmetros ϕ^{int} e c^{int} , e, portanto, da inclinação das retas das Figuras 5.13 e 5.14, as quais caracterizam a resistência da interface, é realizada conforme descrito anteriormente na Equação 5.18, uma vez que na prática apenas é conhecida a resistência à tração uniaxial da matriz ou do CRFA. Para os experimentos de Kölle, um segundo ponto experimental no trecho compressão-tração poderia ser adotado na estimativa de ϕ^{int} e c^{int} , o que provavelmente conduziria a uma melhor aproximação do modelo aos dados experimentais. Na prática, entretanto, a Equação 5.18 poderia fornecer resultados satisfatórios, conforme se verifica nas Figuras 5.13 e 5.14.

O resultado obtido ao se considerar a resistência da interface na formulação do critério de resistência do CRFA é, na sequência, comparado aos resultados experimentais de Demeke e Tegos (1994). Os dados destes experimentos estão descritos na seção 5.1.1.1. Os valores obtidos para os parâmetros c^{int} e ϕ^{int} , a partir dos próprios dados experimentais de resistência do CRFA, empregando as Equações 5.18, foram, respectivamente, 6,82 MPa e 56,52°, para $f = 0,5\%$, 7,71 MPa e 56,17°, para $f = 1\%$, e 8,76 MPa e 55,27°, para $f = 1,5\%$.

Na Figura 5.15 estão representados os resultados experimentais de Demeke e Tegos (1994) e aqueles obtidos no presente estudo (linhas contínuas).

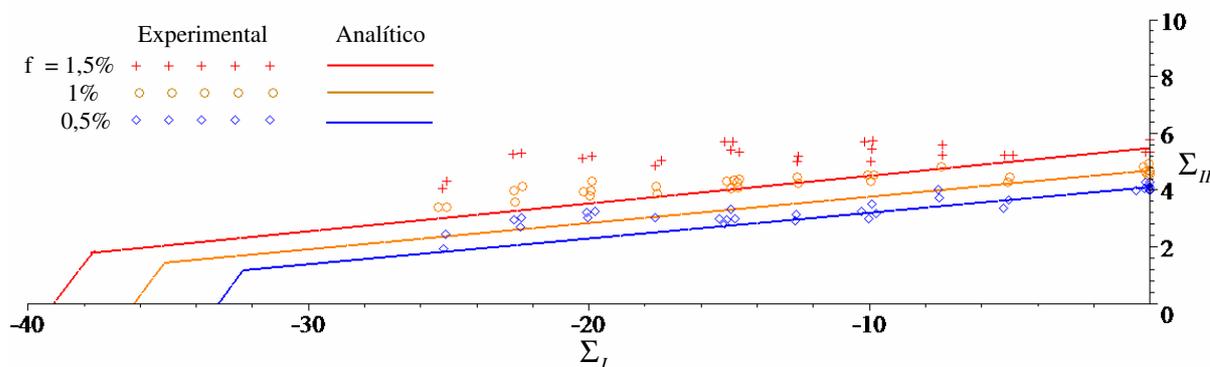


Figura 5.15 – Dados experimentais de Demeke e Tegos (1994) e resultados analíticos do presente estudo.

A Figura 5.15 mostra que, para os concretos produzidos por Demeke e Tegos (1994), o modelo proposto para a interface, empregando a Equação 5.18 para a identificação dos parâmetros ϕ^{int} e c^{int} , produz resultados que não se aproximam adequadamente dos experimentais. A combinação do critério de *cut-off*, juntamente com o critério de interface empregando dois pontos experimentais do trecho compressão-tração para identificação de ϕ^{int} e c^{int} , possivelmente forneceria uma melhor aproximação do modelo aos dados experimentais de Demeke e Tegos (1994).

Outra alternativa para a identificação dos parâmetros ϕ^{int} e c^{int} , os quais caracterizam a resistência da interface, seria a obtenção destes parâmetros a partir de dados experimentais de ensaios de aderência.

É importante salientar que, neste capítulo, as tensões principais estão sendo consideradas colineares às direções das fibras. Uma análise semelhante àquela realizada na seção 4.2.4.2, onde as direções das fibras e das tensões principais são consideradas não colineares, incluindo a condição de *cut-off* em tração e os domínios g_x^{int} , g_y^{int} e g_z^{int} , que representam a influência da resistência da interface no domínio de resistência do CRFA, faz-se necessária. Este estudo, entretanto, não será contemplado no presente trabalho e constitui, portanto, sugestão para trabalhos futuros.

6. Considerações Finais

A presente tese de doutorado teve por objetivo principal a formulação de um modelo constitutivo para o material compósito concreto reforçado com fibras de aço. O conhecimento das equações constitutivas de um material permite a descrição de como o mesmo se comporta ao ser solicitado. A partir de uma abordagem micromecânica empregando-se técnicas de homogeneização buscou-se, então, formular um modelo constitutivo para o material CRFA.

Neste trabalho, a elasticidade e a resistência do CRFA foram avaliadas. No Capítulo 3, foi apresentado o estudo do comportamento do CRFA no regime elástico. Através da teoria da homogeneização e da estimativa de Mori-Tanaka obtiveram-se as propriedades elásticas do material em estudo. Empregando-se o princípio da correspondência elástica-viscoelástica, a resposta elástica obtida foi utilizada para a investigação do comportamento viscoelástico sem envelhecimento do concreto reforçado com fibras.

No Capítulo 4, determinou-se analiticamente o critério de resistência para CRFA baseando-se na teoria da homogeneização em análise limite. No Capítulo 5, complementou-se a formulação do critério de resistência macroscópico através da consideração de um critério de *cut-off* em tração para melhor caracterizar a resistência da matriz de concreto, bem como a do CRFA, sob solicitações de tração; e da consideração das propriedades limitadas de resistência da interface.

Neste capítulo são elencadas as conclusões obtidas a partir dos estudos realizados, os quais têm seus resultados apresentados nos Capítulos 3, 4 e 5. Além disso, são apresentadas recomendações para trabalhos futuros, visando a continuação e o aprofundamento dos estudos sobre a modelagem do comportamento do CRFA.

6.1 CONCLUSÕES

6.1.1 Propriedades Elásticas

As propriedades macroscópicas de um material compósito formado por uma matriz de concreto e fibras dispersas são influenciadas pelas propriedades dos seus constituintes. A forma como estas propriedades, bem como a geometria das fibras e a sua fração volumétrica, influenciam nas propriedades elásticas macroscópicas, foi o objetivo do estudo apresentado no Capítulo 3.

Os resultados obtidos mostraram que as constantes elásticas do CRF não são diretamente proporcionais à quantidade de fibras adicionadas e às constantes elásticas dos seus constituintes. Isso sugere maior atenção ao se utilizar a regra das médias na estimativa das propriedades de compósitos, principalmente quando os constituintes apresentam características bastante distintas, como é o caso do concreto e das fibras de aço.

Um aumento ou um decréscimo nos módulos de compressão (K) e de cisalhamento (G) da matriz pode ocorrer, influenciado pelo tipo de fibra adicionada. Caso a fibra possua um módulo K menor do que o da matriz, quanto mais se adicionam fibras, menor será o módulo de compressão do compósito, da mesma forma que este pode aumentar no caso em que o K da fibra for maior do que o da matriz, como se observa para as fibras de aço, carbono, vidro e aramida. O mesmo comportamento pode ser verificado para o módulo de cisalhamento.

A análise da influência da razão de aspecto das fibras sobre as propriedades macroscópicas elásticas do compósito, indicou que esta variável tem pouca influência sobre os Módulos K e G do compósito.

Através da análise via método dos elementos finitos de fibras aleatoriamente distribuídas na matriz de concreto (modelo incorporado), concluiu-se que os valores obtidos, para as propriedades elásticas do CRFA, são bastante próximos àqueles determinados a partir de esquemas de homogeneização que empregam as estimativas de Mori-Tanaka. A comparação das propriedades elásticas analíticas com dados experimentais também se mostrou

satisfatória, indicando que as propriedades elásticas do CRFA podem ser adequadamente estimadas através das estimativas de Mori-Tanaka.

É importante salientar que a adição de fibras de aço, em quantidades tão pequenas quanto às comumente usadas para o CRFA, tem um pequeno efeito sobre as propriedades elásticas efetivas. Do ponto de vista prático, o cálculo das propriedades elásticas efetivas deste material poderia ser omitido. No entanto, este é um passo necessário para a formulação de um modelo micromecânico consistente, que permita descrever completamente o comportamento elastoplástico do CRFA.

6.1.2 Propriedades Viscoelásticas

A partir da combinação dos resultados das propriedades elásticas efetivas do CRFA, anteriormente estimados, e do Princípio da Correspondência, as propriedades viscoelásticas (módulo de compressão, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson viscoelásticos e funções de relaxação e de fluência) homogeneizadas do CRFA foram obtidas.

O modelo usado não considera o fenômeno de envelhecimento da matriz de concreto e a sua influência na resposta viscoelástica do CRFA e, portanto, são adequados para o estudo do comportamento do material compósito quando solicitado em idades mais avançadas, onde o envelhecimento, para o comportamento viscoelástico do concreto, pode ser negligenciado.

Os resultados obtidos indicam que a adição de fibras de aço ao concreto restringe o comportamento viscoelástico do mesmo. Este resultado é coerente com dados experimentais de corpos de prova sob solicitações de compressão disponíveis na literatura. Em tração a maioria dos experimentos mostrou resultado contrário. Este comportamento contrário poderia ser causado pela incorporação de ar na matriz ao se adicionar fibras e ainda pelo deslizamento das fibras na matriz, fenômenos que não foram avaliados no modelo proposto.

Além disso, verificou-se que pequenas quantidades de fibras têm pouca influência nas propriedades viscoelásticas do concreto e o que coeficiente de Poisson viscoelástico permanece praticamente constante, evidenciando ser coerente a adoção de um valor constante para esta propriedade, no caso do CRFA, assim como ocorre com o concreto convencional.

A validade do modelo foi analisada por meio de comparação com dados experimentais disponíveis de corpos de prova de CRFA sob solicitações de compressão. Verifica-se, através da comparação, uma boa concordância entre os resultados experimentais e aqueles calculados no presente estudo. Esta concordância se dá principalmente em idades mais avançadas. Uma possível justificativa é a não consideração, através da abordagem empregada, dos efeitos de envelhecimento, os quais influenciam o comportamento do material, sobretudo nas primeiras idades.

O presente estudo mostrou ser capaz de estimar razoavelmente o comportamento viscoelástico de CRFA quando submetido a solicitações de compressão. Em tração, provavelmente, é necessário considerar outros efeitos, como a presença das fissuras e deslizamento das fibras. Cabe ressaltar que poucos resultados experimentais foram encontrados na literatura para maiores comparações.

O modelo proposto também foi comparado com dois modelos teóricos disponíveis na literatura, verificando-se que os três modelos fornecem resultados bastante parecidos. Para idades mais avançadas, o presente estudo apresentou resultados melhores do que aqueles obtidos através dos dois modelos teóricos.

6.1.3 Resistência

As propriedades de resistência do CRFA foram avaliadas através das teorias da homogeneização e da análise limite. Assumindo a existência de uma equivalência entre o meio aleatório (CRFA) e um meio fictício definido por uma matriz de concreto reforçado com fibras longas, o domínio de resistência deste material foi obtido analiticamente. O critério de resistência do compósito foi determinado considerando-se as frações volumétricas dos seus constituintes (matriz e fibras) e as suas propriedades de resistência. No caso das fibras, apenas as suas resistências à compressão e à tração uniaxial são necessárias. A resistência da matriz de concreto, por sua vez, foi caracterizada pelo critério de Drucker-Prager. Este critério apresenta uma formulação mais simples do que os critérios de Ottosen e Willan-Warnke, por exemplo, não permitindo a caracterização do comportamento à tração e à compressão da matriz de concreto com os mesmos parâmetros. Ele permite, no entanto, realizar o estudo proposto, empregando as teorias da homogeneização e da análise limite, de forma analítica.

Observa-se que o efeito de “expansão” que ocorre no critério de resistência da matriz de concreto ao se adicionar fibras pode ser obtido por meio da abordagem empregada. A comparação dos resultados analíticos com os dados experimentais disponíveis na literatura, sugere que o modelo proposto se aproxima satisfatoriamente aos experimentos. Todavia, verifica-se que os resultados obtidos subestimam os valores da resistência à compressão biaxial e superestimam os resultados da resistência à compressão uniaxial. Estas diferenças podem estar relacionadas a uma série de efeitos não considerados no modelo analítico, como por exemplo, a influência da resistência da interface no domínio de resistência macroscópico, direções das tensões principais distintas das direções de reforço e, até mesmo, a consideração de uma distribuição não aleatória das fibras, que pode ter ocorrido nos corpos de prova empregados nos experimentos avaliados.

A fim de avaliar a relevância e a precisão do modelo, os resultados analíticos foram comparados também com aqueles obtidos através de simulações numéricas das propriedades de resistência do CRFA. Para tanto, o problema de análise limite formulado sobre o volume elementar representativo (VER) do CRFA foi resolvido numericamente através de uma ferramenta numérica baseada no método de elementos finitos, no contexto da plasticidade.

A comparação das duas abordagens indica que as estimativas da resistência obtidas para o meio fictício superestimam a resistência de um meio reforçado com fibras curtas aleatoriamente distribuídas. Isso acontece porque as fibras curtas se encontram isotropicamente distribuídas na matriz de concreto, enquanto no meio fictício as fibras se encontram concentradas segundo as direções principais de carregamento, conduzindo a estimativas para as propriedades de resistência que superestimam as reais. Este fato sugere a análise da influência da direção da aplicação do carregamento em relação à direção das fibras no domínio de resistência macroscópico. Esta análise foi também realizada, fornecendo uma estimativa do ângulo que deve ser considerado entre fibras e tensões principais para que o modelo analítico (aproximado) forneça resultados mais próximos àqueles obtidos numericamente (meio heterogêneo aleatório).

Em relação ao fator de aspecto, as simulações numéricas indicaram que para valores usuais este parâmetro apresenta pouca influência nas propriedades de resistência do compósito. De fato, estudos experimentais anteriores, bem como a presente análise numérica, parecem indicar que o fator de aspecto tem pouca influência sobre as resistências à tração e à compressão uniaxial do CRFA. Novas análises numéricas, envolvendo um número maior de

elementos finitos, são necessárias para investigar o efeito deste parâmetro sobre a resistência do compósito. Apesar da pequena quantidade de fibra adicionada ao concreto, tal tarefa seria, no entanto, excessiva em termos de custo computacional. Na realidade, para valores usuais de f , entre 0,5 e 5%, a influência de l_f / d_f parece não ser significativa.

Quanto às considerações de um critério de *cut-off* em tração para a matriz de concreto e das propriedades de resistência da interface, estas permitiram uma melhor caracterização da resistência do CRFA.

Uma vez que se consideraram na análise as tensões principais colineares às direções das fibras, as estimativas de resistência à tração uniaxial para o CRFA foram superiores aos resultados experimentais disponíveis na literatura. Uma abordagem alternativa simplificada permite a partir de dados experimentais de resistência à tração uniaxial, caracterizar de forma adequada o critério de ruptura do CRFA no trecho compressão-tração.

Finalmente, a consideração de propriedades limitadas de resistência da interface na formulação do domínio de resistência macroscópico G^{hom} permite inserir na mesma a influência do fenômeno de falha que pode ocorrer na interface fibra/matriz. Em função da impossibilidade de se testar o material da interface diretamente, a obtenção dos parâmetros que definem as propriedades da interface foi realizada através de uma análise inversa, onde as propriedades de resistência do CRFA e da matriz auxiliaram na sua determinação. Através desta abordagem a influência da forma da fibra pôde ser incorporada indiretamente ao modelo.

6.2 RECOMENDAÇÕES

Apesar de diversos trabalhos envolvendo o CRFA já terem sido executados, outros estudos, tanto de caráter experimental quanto analítico e numérico, necessitam ser realizados para ampliar o conhecimento do desempenho deste material.

Entre os trabalhos experimentais, está a caracterização do CRFA quando sob solicitações biaxiais e triaxiais. Poucos dados são encontrados a respeito do comportamento deste compósito quando submetido à compressão biaxial. Quanto à tração e à tração-compressão biaxial e a solicitações triaxiais, a quantidade de estudos encontrados é ainda menor.

Quantificar e avaliar de que forma o aumento destas resistências é obtido ao se adicionar fibras é um fator importante a ser entendido.

Quantificar as propriedades de resistência da interface é outro ponto importante para a sua adequada consideração. Geralmente ensaios de aderência clássicos (arrancamento) os quais medem a tensão de aderência e o escorregamento da fibra são encontrados. Entretanto, ensaios que avaliam também a tensão normal na interface são pouco efetuados. O conhecimento das tensões normais e de cisalhamento em ensaios de aderência permitiria avaliar as propriedades coesão e coeficiente de atrito que caracterizam o domínio de resistência da interface.

O critério de resistência do compósito foi determinado, neste estudo, considerando-se um meio fictício com fibras dispostas em três direções perpendiculares. Um modelo mais realista e capaz de definir de forma mais adequada a isotropia deste material, seria aquele composto de um número maior de direções de fibras. Além disso, outros critérios de resistência para caracterização da matriz de concreto, como os critérios de Ottosen e Willan-Warnke, poderiam ser empregados para a obtenção do critério de resistência do CRFA.

Para a caracterização completa do comportamento elastoplástico do CRFA, é necessário formular o seu comportamento após atingir o limite de elasticidade, ou seja, é preciso determinar o critério de plastificação e uma regra de endurecimento para o material. A evolução elastoplástica também pode ser analisada através da teoria da homogeneização, a partir da resolução de um problema de localização colocado sobre o VER do CRFA, considerando-se o comportamento elastoplástico dos materiais constituintes. Esta análise não foi realizada no contexto desta tese e constitui uma sugestão para trabalhos futuros. De posse das equações que definem o comportamento elástico, a evolução elastoplástica e a ruptura do material, é então possível efetuar modelagem numérica via método dos elementos finitos de estruturas compostas por CRFA.

Esta modelagem também pode ser realizada empregando um modelo simplificado. Este modelo constitui da consideração do critério de plasticidade semelhante ao critério de resistência, desprezando-se, então, o endurecimento na escala macroscópica. Assim, a partir de C^{hom} e G^{hom} , obtidos neste trabalho, e da sua implementação em um programa de elementos finitos, também é possível estudar o comportamento de elementos de CRFA. Este

constitui um modelo mais simples, mas que potencialmente pode fornecer resultados interessantes.

Finalmente, uma vez que o emprego de fibras ao concreto não fica restrito ao caso de fibras de aço, novos modelos constitutivos podem ser propostos e implementados para a situação de adição de fibras produzidas com diferentes materiais (polipropileno, aramida, vidro, fibras naturais), os quais constituem outras formas de reforço de matrizes cimentícias.

Referências Bibliográficas

- ABATE, J.; WHITT, W. A Unified Framework for Numerically Inverting Laplace Transforms. *INFORMS Journal on Computing*, vol. 18, n. 4, p. 408-421. Jan. 2006.
- ABDULL-AHAD, R. B.; ABBAS, J. M. Behavior of steel fiber reinforced concrete under biaxial stresses. In: *Fiber Reinforced Cements and Concretes: Recent Developments*, Elsevier, Eds. R. N. Swamy, B. Barr. p. 126-135. 1989.
- ADEBAR, P.; MINDESS, S.; ST.-PIERRE, D.; OLUND, B. Shear Tests of Fiber Concrete Beams without Stirrups. *ACI Structural Journal*, vol. 94, n. 1, p. 68-76, Jan.-Feb. 1997.
- ADVANI, S. G; TUCKER, C. L. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites. *Journal of Rheology*, vol. 31, n. 8, p. 751-784. 1987.
- ALTOUBAT, S. A.; LANGE, D. A. Creep, Shrinkage, and Cracking of Restrained Concrete at Early Age. *ACI Materials Journal*, vol.98, n.4, p. 323-331. Jul. 2001.
- ALWAN, J. M. Modeling of the mechanical behavior of fiber reinforced cement based composites under tensile loads. Ph. D Thesis, Dept. of Civill and Envir. Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, 1994.
- ALWAN, J.; MOBASHER, B.; BOLANDER, J.E.; LEUNG, C.K.Y.; NAAMAN, A.E.; REDDY, D. V.; ROSSI, P.; STROEVEN, P.; STROEVEN, M.; VAN MIER, J.G.; WANG, M.L. Computer Models. In: *High Performance Fiber Reinforced Cement Composites. Vol. 2, Rilem Proceedings of the 2nd International Workshop*, Eds. A. E. Naaman, and H. W. Reinhardt. p. 229-289, E &FN Spon, 1995.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, *Building Code Requirements of Structural Concrete, and Commentary (ACI 318-08)*, Farmington Hills, MI. 2008.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Report on fiber reinforced concrete (ACI 544.1R-96). In: *Manual of Concrete Practice. Reapproved 2002*.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Guide for Specifying, Proportioning, and Production of Fiber-Reinforced Concrete (ACI 544.3R-08)*. ACI Committee Report. 2008.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete (ACI 544.4R-88)*. In: *Manual of Concrete Practice. Reapproved 1999*.
- AMERICAN SOCIETY OF TESTING AND MATERIALS *Standard Test Method for Flexural Toughness and First-Crack Strength of Fiber-Reinforced Concrete (Using Beam With Third-Point Loading) (ASTM C1018-97)*. Withdrawn 2006.

ARAÚJO, D. L. Cisalhamento entre Viga e Laje Pré-Moldadas Ligadas Mediante Nichos Preenchidos com Concreto de Alto Desempenho. Tese (Doutorado) 319p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2002.

ASHOUR, S. A.; WAFI, F. F.; KAMAL, M. I. Effect of the concrete compressive strength and tensile reinforcement ratio on the flexural behavior of fibrous concrete beams. *Engineering Structures*, vol. 22, n. 9, p. 1145-1158. Sep. 2000.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8890: Tubo de concreto, de seção circular, para águas pluviais e esgotos sanitários – Requisitos e Métodos de Ensaio. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8953: Concreto para fins estruturais - Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência. Rio de Janeiro, 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA NORMAS TÉCNICAS. NBR 15530: Fibras de Aço para Concreto – Especificação . Rio de Janeiro, 2007.

ATIŞ, C. D., KARAHAN, O. Properties of steel fiber reinforced fly ash concrete. *Construction and Building Materials*, vol. 23, n. 1, p. 392-399. 2009.

AVESTON, J.; COOPER, G. A.; KELLY, A. Single and multiple fracture. In: *Conference on the Properties of Fiber Composites*. Proceedings NPL, London. p. 15-26. 1971.

BALAGURU, P. N.; SHAH, S. P. *Fiber-reinforced cement composites*. McGraw-Hill, Michigan. 530 p. 1992.

BAYRAMOV, F.; TADEMIR, C.; TADEMIR, M. A. Optimisation of Steel Fibre Reinforced Concretes by Means of Statistical Response Surface Method. *Cement and Concrete Composites*, vol. 26, p. 665-675, 2004.

BARONI, H. J. M. Avaliação do Comportamento dos Deslocamentos Transversais ao Longo do Tempo em Vigas de Concreto Armado Não Convencional. Dissertação (Mestrado) 168 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2003.

BARROS, J. A. O. Estado-de-Arte dos betões reforçados com Fibras. *Journal of the Civil Engineering of the Civil Depart. of Minho University*, n. 3, p. 29-47, 1996.

BARROS, J. A. O.; FIGUEIRAS, J. A. Flexural Behavior of SFRC: Testing and Modeling. *Journal of Materials in Civil Engineering*, vol. 11, n. 4, p. 331-339. Nov 1999.

BAŽANT, Z. P. Theory of creep and shrinkage in concrete structures: A precis of recent developments. *Mechanics Today*, S. Nemat-Nasser, ed. (American Academy of Mechanics), Pergamon Press, New York, vol. 2, p. 1–93. 1975.

BAŽANT, Z. P. Creep of concrete. *Encyclopedia of materials: Science and Technology*, K.H.J. Buschow *et al.* (Eds). Elsevier, Amsterdam, Vol. 2C, p. 1797–1800. 2001.

BENTUR, A.; MINDESS, S. *Fibre Reinforced Cementitious Composites*. New York: Elsevier Science Publishers, 2006.

BERNARDI, S. T. Avaliação do Comportamento de Materiais Compósitos de Matrizes Cimentícias Reforçadas com Fibra de Aramida Kevlar. Dissertação (Mestrado) 164 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2003.

BERNAUD, D.; BUHAN, P.; MAGHOUS, S. Numerical Simulation of the Convergence of a Bolt-Supported Tunnel Through a Homogenization Method. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 19, p. 267–288, 1995.

BERTHOLLET, A. Contribution à la modélisation du béton vis-à-vis du vieillissement et de la durabilité: interaction des déformations de fluage et du comportement non-linéaire du matériau PhD Thesis, Ecole doctorale de Mécanique, Energétique, Génie civil et Acoustique, Lyon. 2003.

BETTEN, J. *Creep Mechanics (3rd Edition)*. Springer. 367 p. 2008.

BISSONNETTE, B.; PIGEON, M. Tensile creep at early ages of ordinary, silica fume and fiber reinforced concretes. *Cement and concrete research*, vol. 25, n. 5, pp. 1075-1085. 1995.

BISSONNETTE, B.; PIGEON, M.; VAYSBURD, A. M. Tensile Creep of Concrete: Study of Its Sensitivity to Basic Parameters. *ACI Materials Journal*, vol. 104, n. 4, p. 360-368. Jul. 2007.

BOLANDER JR., J. E.; SAITO, S. Discrete modeling of short-fiber reinforcement in cementitious composites. *Advanced Cement Based Materials*, vol. 6, n. 3-4, p. 76-86, Oct. 1997.

BORNERT, M.; BRETHERAU, T.; GILORMINI, P. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 - Matériaux aléatoires élastiques et périodiques*. Hermès Science Publications, Paris, 2001.

BRANDÃO, J. H. Análise Experimental e Numérica de Cascas de Concreto de Ultra-Alto Desempenho Reforçado com Fibras. Tese (Doutorado) 128 p. Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2005.

BRANDT, A. M. Fibre reinforced cement-based (FRC) composites after over 40 years of development in building and civil engineering. *Composite Structures*, vol. 86, n. 1-3, p. 3-9, Nov. 2008.

BRANSON, D. E. *Deformation of concrete structures*. McGraw-Hill, New York. 546 p. 1977.

CARMO, L. C. Ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alta resistência reforçadas com fibras metálicas: Análise via Método dos Elementos Finitos. Dissertação (Mestrado) 190 p. Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia. 2005.

CASANOVA, P.; ROSSI, P. High-Strength Concrete Beams Submitted to Shear: Steel Fibers versus Stirrups. *Structural Applications of Fiber Reinforced Concrete*, SP-182, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, p. 53-68, 1999.

CHEN, P. E., Strength properties of discontinuous fiber composites. *Polymer Engineering and Science*, vol. 11, n. 1, p. 51-56, 1971.

CHEN, W. F. *Plasticity in reinforced concrete*. New York: McGraw-Hill, 474 p. 1982.

CHEN, W. F.; CARSON, J. L. Stress strain properties of random wire reinforced concrete. *Journal of American Concrete Institute*, vol. 68, n. 12. p. 933-936. Dec. 1971.

CHERN, J. C.; YANG, H. J.; CHEN, H. W. Behavior of Steel Fiber Reinforced Concrete in Multiaxial Loading. *ACI Materials Journal*, vol. 89, n. 1, p. 32-40. Jan. 1992

CHERN, J. C.; YOUNG, C. H. Compressive Creep and Shrinkage of Steel Fiber Reinforced Concrete. *International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, vol. 11, n. 4, p. 205-214. Nov. 1989.

CHRISTENSEN, R. M. *Theory of Viscoelasticity (Second Edition)*. Courier Dover Publications, 378 p. 2003.

CHUNXIANG, Q.; PATNAIKUNI, I. Properties of High-Strength Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams in Bending. *Cement and Concrete Composites*, vol. 21, n. 1, p. 73-81. Feb. 1999.

COUTO, E. Um Modelo Tridimensional para Túneis Escavados em Rocha Reforçada por Tirantes Passivos. Tese (Doutorado). Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2011.

COX, H. L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British Journal of Applied Physics*. vol. 3, p. 72-79. 1952.

CREUS, G. J. *Viscoelasticity: Basic Theory and Applications to Concrete Structures*. Springer-Verlag, Berlin. 169 p. 1986.

CUCCHIARA, C.; MENDOLA, L. L.; PAPIA, M. Effectiveness of stirrups and steel fibres as shear reinforcement. *Cement and Concrete Composites*, vol. 26, n. 7, p. 777-786, Oct. 2004.

DE BUHAN, P. Homogénéisation en Calcul à la Rupture; le Cas du Matériau Composite Multicouche, *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences*, T. 296, série II, p. 1355–1358, 1983.

DE BUHAN, P. Approche Fondamentale du Calcul à la Rupture des Ouvrages en Sols Renforcés. Thèse de Doctorat-ès-Sciences. Université Pierre et Marie Curie, Paris. 1986.

DE BUHAN, P.; SALENÇON, J. Yield Strength of Reinforced Soils as Anisotropic Media. In: *Mechanical Engineering Publications*, ed. J. P. Boehler. Mech. Eng. Publ. London. p. 791-803. 1990.

DE BUHAN, P.; TALIERCIO, A. A Homogenization Approach to the Yield Strength of Composite Materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 10, n. 2, p. 129-150, 1991.

DEMEKE, A.; TEGOS, I. A. Steel fiber reinforced concrete in biaxial stress tension-compression conditions. *ACI Materials Journal*, vol. 91, n. 5, p. 579-584. 1994.

DUCTAL Homepage, “<http://www.taiheiyo-cement.co.jp/ductal/>” (in Japanese) 2011.

EL NIEMA, E. I. Effectiveness of Stirrups and Steel Fibres as Shear Reinforcement. *ACI Structural Journal*, vol. 88, n. 2, p. 178-183, Mar.-Apr. 1991.

ELWI, A. E.; HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics Division*, vol. 115, n. 4, p. 740-754. Apr. 1989.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A 241, p. 376-396, 1957.

EZELDIN, A. S.; BALAGURU, P. N. Normal- and High-Strength Fiber-Reinforced Concrete under Compression. *Journal of Materials in Civil Engineering*, vol. 4, n. 4, p. 415-429. Nov. 1992.

FAIVRE, G. Hétérogénéités ellipsoïdales dans un milieu élastique anisotrope. *Journal of Physics*, vol. 32, n. 4, p. 325–331. Avr. 1971.

FIGUEIREDO, A. D. Concreto com Fibras de Aço. *Boletim Técnico, Série BT/PCC/260–Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*, São Paulo. 69 p. 2000.

FIGUEIREDO, A. D. Concreto com Fibras. In: *Concreto: Ciência e Tecnologia*. Ed. Geraldo C. Isaia IBRACON, v. 2, cap. 37, p.1327-1366. São Paulo: Iphis Gráfica e Editora. 2011.

FIGUEIREDO, A. D.; CHAMA NETO, P.; FARIA, H. M. A nova Normalização Brasileira Sobre Fibras de Aço. *Concreto & Construções*, São Paulo, vol. 36, n. 50, p. 67-76, abr./maio/jun. 2008.

FIGUEIREDO, M. P. Aplicação do Método dos Elementos Discretos na Análise Estática e Dinâmica de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço. Dissertação (Mestrado) 92 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2006.

GARCEZ, E. O. Análise Teórico-Experimental do Comportamento de Concretos Reforçados com Fibras de Aço Quando Submetidos a Cargas de Impacto. Dissertação (Mestrado) 113 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2005.

GAVA, G. P. Análise Teórica-Experimental do Comportamento à Flexão de Vigas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço. Tese (Doutorado) 306 p. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2006.

GHALI, A.; FAVRE, R. *Concrete Structures: Stresses and Deformations*, Chapman and Hall, London, 1986.

GÓIS, F. A. P. Avaliação Experimental do Comportamento de Concreto Fluido Reforçado com Fibras de Aço: Influência do Fator de Forma e da Fração Volumétrica das Fibras nas Propriedades Mecânicas do Concreto. Dissertação (Mestrado) 156 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió. 2010.

GOPALAKRISHNAN, K. S.; NEVILLE, A. M.; GHALI, A. Creep Poisson's Ratio of Concrete Under Multiaxial Compression. *ACI Journal*, vol. 66, n. 12, p. 1008–1020. Dec. 1969.

GOPALARATNAM, V.; GETTU, R. On the characterization of flexural toughness in fiber reinforced concretes. *Cement and Concrete Composites*, v. 17, p.239-254, 1995.

GOPALARATNAM, V. S.; SHAH, S. P. Tensile Fracture of Steel Fiber Reinforced Concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 113, May 1987.

GROSS, D.; SEELIG, T. Micromechanics and homogenization. In: *Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics (Mechanical Engineering Series)*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Germany. Cap. 8, p. 217-287. 2006.

GROSSI, B. F. Uma Contribuição para a Modelagem Numérica do Concreto com Fibras Curtas de Aço. Tese (Doutorado). 227 p. Universidade Federal de Minas Gerais. UFMG. Belo Horizonte. 2006.

HALPIN, J.C.; KARDOS, J. L. Strength of Discontinuous Reinforced Composites: I. Fiber Reinforced Composites. *Polymer Engineering and Science*, vol.18, n. 6, p. 496–504, 1978.

- HANNANT, D. J. Fibre cements and fibre concretes. Chichester, John Wiley. 219 p. 1978.
- HANNANT, D. J. Polymer Fibre Reinforced Cement and Concrete. In: Advances in Cement-Matrix Composites, ed. D. M. Roy, A. J. Majumdar, S. P. Shah & J. A. Manson, Proc. Symp. L, Materials Research Society, Boston. p. 171-180, 1980.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 11, n. 2, p. 127-140. March-April 1963.
- HILL, R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 15, n. 2, p. 79-95. 1967
- HINTON, E. Numerical methods and software for dynamics analysis of plates and shells. Swansea: Pineridge Press, 1988.
- HOLANDA, K. M. A. Análise dos Mecanismos Resistentes e da Similaridade dos Efeitos de Adição de Fibras de Aço na Resistência e na Ductilidade à Punção de Lajes-Cogumelo e ao Cisalhamento de Vigas de Concreto. Tese (Doutorado) 278 p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2002.
- HSU, L. S.; HSU, C-T. T. Stress-Strain Behavior of Steel-Fiber High-Strength Concrete under Compression. ACI Structural Journal, vol. 91, n. 4, p. 448-457. Jul. 1994.
- HU. X. D.; DAY, R.; DUX, P. Biaxial Failure Model for Fiber Reinforced Concrete. Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 15, n. 6, p. 609-615. 2003.
- IGARASHI, S.; BENTUR, A.; MINDESS, S. Characterization of the microstructure and strength of cement paste by microhardness testing, Advances in Cement Research, vol. 8, n. 30, p.87-92, 1996.
- IYENGAR, K. T. S. R.; VISWANATHA, C. S. Discussion of the paper: Stress-Strain Properties of Random Wire Reinforced Concrete. ACI Journal, vol. 69, n. 6, p. 346-349, Jun. 1972.
- JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS Standard for Flexural Strength and Flexural Toughness, Method of Tests for Steel fiber Reinforced Concrete (JSCE-SF4). Japan Concrete Institute (JCI). 1984.
- JOHNSTON, C. D. Toughness of steel fiber reinforced concrete. In: Steel Fiber Concrete, ed. S. P. Shah e A. Skarendahl. Proceedings US-SWEDEN Joint Seminar (NSF-STU), Elsevier Applied Science Publishers, Stockholm. p. 333-360. 1985.
- JU, J. W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. International Journal of Solids Structures, vol. 25, n. 7, p. 803-833. 1989.

KELLY, A.; TYSON, W. R. Tensile Properties of Fibre-Reinforced Metals: Copper/Tungsten and Copper/Molybdenum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, n. 6, p. 329-350, 1965.

KOGAN, E. A. Creep of concrete under multiaxial compression. *Power Technology and Engineering*, vol. 17, n. 9, p. 448-452. Sep. 1983.

KÖKSAL, F.; ALTUN, F.; YİĞİT, I.; ŞAHİN, Y. Combined Effect of Silica Fume and Steel Fiber on the Mechanical Properties of High Strength Concretes. *Construction and Building Materials*, vol. 22, p. 1874-1880, 2008.

KÖLLE, B. Behaviour of Steel Fibre Reinforced High Performance Concrete Under Biaxial Loading Conditions. Thesis (Doctorate) 319 p. Department of Civil Engineering, University of Glasgow, Glasgow. 2006.

KOSMATKA, S.; KERKHOFF, B.; PANARESE, W. Design and Control of Concrete Mixtures. Chapter 7 Fibers. 14th edition, Portland Cement Association, Skokie, Illinois. 358 p. 2003.

KOVAL JUNIOR, G. Aplicação da Teoria da Homogeneização em Materiais Compósitos Viscoelásticos. Dissertação (Mestrado) 159 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2003.

KWAK, Y. K.; EBERHARD, M. O.; KIM, W. S.; KIM, J. Shear Strength of Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams Without Stirrups. *ACI Structural Journal*, vol. 99, n. 4, p. 530-538, July-Aug., 2002.

LAWS, N. The determination of stress and strain concentrations at an ellipsoidal inclusion in an anisotropic material. *Journal of Elasticity*, vol. 7, n. 1, p. 91-97. Jan. 1977.

LÉVESQUE, M. Modélisation du comportement mécanique de matériaux composites viscoélastiques non linéaires par une approche d'homogénéisation. Doctorat Mécanique et Matériaux, ENSAM. 176 p. 2004.

LI, V. C. From Micromechanics to Structural Engineering - The Design of Cementitious Composites for Civil Engineering Applications. *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering*, JSCE, n. 471/I-24, p. 1-12, 1993.

LIM, D. H.; NAWY, E. G. Behaviour of plain and steel-fibre-reinforced high-strength concrete under uniaxial and biaxial compression. *Magazine of Concrete Research*, vol. 57, n. 10, p. 603-610, Dec. 2005.

LIM, D.H.; OH, B. H. Experimental and Theoretical Investigation on the Shear of Steel Fibre Reinforced Concrete Beams. *Engineering Structures*, vol. 21, n. 10, p. 937-944, 1999.

LIM, T. Y.; PARAMASIVAM, P.; LEE, S. L. Analytical Model for Tensile Behavior of Steel- Fiber Concrete. *ACI Materials Journal*, v.84, n. 4, p. 286-298, Jul.-Aug. 1987.

LIMA, R. C. A. Investigação do Comportamento de Concretos em Temperaturas Elevadas. Tese (Doutorado) 241 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2005.

LOPES, M. M. Substituição Parcial de Armadura de Flexão por Fibras de Aço em Vigas de Concreto, Dissertação (Mestrado) 130 p. Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2005.

MAJUMDAR, A. J. Properties of GRC, Fibrous Concrete. Proceedings Symp. The concrete society London Concrete International, p. 48–68, 1980.

MANDEL, J. Plasticité classique et viscoplasticité, CISM Courses and Lectures n. 97, Springer-Verlag, Berlin. 1972.

MANGAT, P. S.; AZARI, M. M. A theory for the creep of steel fibre reinforced cement matrices under compression. Journal of Materials Science, vol. 20, n. 3, p. 1119-1133. Mar. 1985.

MANSUR, M. A.; CHIN, M. S.; WEE, T. H. Stress-Strain Relationship of High Strength Fiber Concrete in Compression. Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 11, n. 1, p. 21-29. Feb. 1999.

MATSUMOTO, T.; MIHASHI, H. JCI-DFRCC summary report on DFRCC terminologies and application concepts. In: Proceedings of the JCI International Workshop on Ductile Fiber Reinforced Cementitious Composites (DFRCC) – Application and Evaluation, Japan Concrete Institute. 2002.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M.. Concreto: Estrutura, propriedades e materiais. Pini, São Paulo, 1994.

MILLER, K. P. Estudo da fluência em vigas de concreto reforçado com fibras de aço, com aplicação de conceitos da mecânica da fratura. Dissertação (Mestrado) 305 p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2008.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Metallurgica, vol. 21, p. 571-574, 1973.

MURA, T. Micromechanics of Defects in Solids. Nijhoff, The Hague, The Netherlands. 587 p. 1987.

MURUGAPPAN, K.; PARAMASIVAM, P.; TAN, K. H. Failure Envelope for Steel-Fiber Concrete under Biaxial Compression. Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 5, n. 4, p. 436-446. 1993.

NAAMAN, A. E. Fiber reinforcement for concrete. Concrete International, vol. 7, n. 3, p. 21-25, Mar. 1985.

NAAMAN, A. E. Fiber Reinforcement for Concrete: Looking Back, Looking Ahead. In: Proceedings of Fifth RILEM Symposium on Fiber Reinforced Concretes (FRC), BEFIB' 2000, Edited by P. Rossi and G. Chanvillard, Rilem Publications, S.A.R.L., Cachan, France, p. 65-86. Sep. 2000.

NAAMAN, A. E.; NAJM, H. S. Bond-slip mechanisms of steel fibers in concrete. *ACI Materials Journal*, v. 88, n. 2, p. 135-145, Mar.-Apr. 1991.

NARAYANAN, R.; DARWISH, I. Y. S. Use of Steel Fibers as Shear Reinforcement. *ACI Structural Journal*, vol. 84, n. 3, p. 216-227, May-June, 1987.

NATARAJA, M. C.; DHANG, N.; GUPTA, A. P. Stress-strain curves for steel-fiber reinforced concrete under compression. *Cement and Concrete Composites*, vol. 21, n. 5-6, p. 383-390. Dec. 1999.

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier, Amsterdam, North-Holland. 786 p. 1999

NEVILLE, A. M.; DILGER, W. H.; BROOKS, J. J. *Creep of Plain and Structural Concrete*. Construction Press, London (1983).

NUNES, N. L.; AGOPYAN, V. A influência do fator de forma da fibra na tenacidade à flexão do concreto reforçado com fibras de aço. 26 p. Boletim Técnico, Série BT/PCC/225 – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

OH, B. H. Flexural Analysis of Reinforced Concrete Beams Containing Steel Fibres. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 118, n. 10, p. 2821–2836. 1992.

OLIVEIRA, R. S. *Análise de Pavimentos de Edifícios de Concreto Armado com a Consideração da não Linearidade Física - Modelagem e Metodologia de Aplicação a Projetos*. Tese (Doutorado) 197 p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2001.

OTTOSEN, N. S. A Failure Criterion for Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 103, n. 4, p. 527-535. 1977.

OUAAR, A. *Micromechanics of rate-independent multi-phase composites. Application to Steel Fiber-Reinforced Concrete*. Thèse (docteur) 249 p. Center for Systems Engineering and Applied Mechanics, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées, Louvain. 2006.

OWEN, D. R. J.; HINTON., E. *Finite element in plasticity: theory and practice*. Swansea: Pineridge Press. 594 p. 1980.

PADMARAJAIAH, S. K.; RAMASWAMY, A. Finite Element Assessment of Flexural Strength of Fiber Reinforced High Strength Concrete Prestressed Beams. *Journal of Cement and Concrete Composites*, vol. 24, n. 2, p. 229-241. Apr. 2002.

PADMARAJAIAH, S. K.; RAMASWAMY, A. Flexural Strength Predictions of Steel Fiber Reinforced High Strength Concrete in Fully / Partially Prestressed Beam Specimen. *Cement and Concrete Composites Journal*, vol. 26, p. 275-290. 2004.

PASA, V. F. Análise do Comportamento de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço via Método dos Elementos Finitos. Dissertação (Mestrado) 160 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2007.

PERES, M. V. N. N. Aparatos de Baixo Custo para Ensaio Biaxiais em Concretos Reforçados com Fibras de Aço. Dissertação (Mestrado) 180 p. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2006.

PORTER, H. F. The Preparation of Concrete-From Selection of Materials to Final Deposition. *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 6, n. 2, p.287-303, Feb. 1910.

PROENÇA, S. P. B. Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições. Tese (Doutorado) 330 p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 1988.

REINHARDT, H. W.; FRITZ, C. Optimization of SIFCON Mix. *Fibre Reinforced Cements and Concretos: Recent Developments*, p. 11-20, 1989.

REUSS, A. Berchung der Fiessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Z. Angew. Math. Mech.* 9, p. 49-58. 1929.

ROMUALDI, J. P. e BASTÓN, G. B., Mechanics of Crack Arrest in Concrete. *ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, vol. 89, p. 147-168, 1963.

ROMUALDI, J. P. e MANDEL, J. A. Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed and closely spaced short lengths of wire reinforcement. *Journal of the American Concrete Institute*, p. 657-672, 1964.

ROSS, A. Steel fibre reinforced concrete (SFRC) – Quality, performance and specification. *New Zealand Concrete Industry Conference*. 2009. Disponível em: <http://www.bosfa.com/upload/docs/NZ_Conference_Paper_SFRC_-_Quality_performance_and_specification.pdf>. Acesso em: 15.12.2011.

ROSSI, P.; WU, X. Dimensioning and Numerical Modelling of Metal-Fibre Reinforced Concrete (MFRC) Structures. *Cement and Concrete Composites*, vol. 14, n. 3, p. 195-198. 1992.

SALENÇON, J. *Viscoélasticité*. Presse de l'Ecole Nationales des Ponts et Chaussées, Paris. 92 p. (1993).

SANT'ANA, V. P. Modelo Numérico para Concreto Reforçado com Fibras. Dissertação (Mestrado) 105 p. Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes. 2005.

SCHLANGEN, E.; VAN MIER, J. G. M. Experimental and Numerical Analysis of Micromechanism of Fracture of Cement based Composites. *Cement and Concrete Composites*, vol. 14, n. 2, p. 105-118. 1992.

SEOW P. E. C.; SWADDIWUDHIPONG, S. Failure Surface for Concrete under Multiaxial Load—a Unified Approach. *Journal of Materials in Civil Engineering – ASCE*, vol. 17, n. 2, p. 219-228, Mar. 2005.

SHARMA, A. K. Shear strength of steel fiber reinforced concrete beams. *ACI Journal*, v. 83, n. 4, p. 624-628, Jul.-Aug. 1986.

SILVOSO, M. M. Modelagem Numérica do Concreto a Poucas Idades. Tese (Doutorado) 72 p. Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2002

SIMÕES, L. C. Um Modelo Constitutivo para Concreto com Fibras. Dissertação (Mestrado). 111 p. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 1998.

SONG, H. W.; HWANG, S. Mechanical Properties of High Strength Reinforced Concrete. *Construction and Building Materials*, vol. 18, n. 9, p. 669–673, 2004.

SOUZA, F. V. Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Suscetíveis ao Dano. Dissertação (Mestrado) 189p. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2005.

SUQUET, P. Plasticité et Homogénéisation. Thèse de Doctorat d'Etat. Université Pierre et Marie Curie, Paris. 1982.

SUQUET, P. Analyse Limite et Homogénéisation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series IIB, Mechanics*, vol. 296, p. 1355-1358, 1983.

SUVOROV A.; DVORAK, G. Rate form of the Eshelby and Hill tensors. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, n. 21-22, p. 5659–5678. 2002.

SWADDIWUDHIPONG, S.; SEOW P. E. C. Modelling of steel fiber-reinforced concrete under multi-axial loads. *Cement and Concrete Research*, v. 36, n. 7, p. 1354-1361, Jul. 2006.

SWAMY, R. N.; THEODORAKOPOULOS, D. D. Flexural Creep Behavior of Fiber Reinforced Cement Composites. *International Journal of Cement Composites*, vol. 1, n. 1, p. 37-49. 1979.

SWAMY, R. N.; THEDORAKOPOULOS, D. D.; STRAVIDES, H. Shrinkage and creep characteristics of glass fibre reinforced composites. In: Proceedings of the International Congress on Glass Fibre Reinforced Cement, Brighton. p. 76–96. 1977.

TALIERCIO, A.; ROVATI, M.; SACCHI-LANDRIANI, G. Formulation of a Macroscopic Strength Criterion for Tridirectional Fiber Composites. In: Mechanics of Composites at Elevated and Cryogenic Temperatures; Proceedings of the Symposium, ASME Applied Mechanics Conference, Columbus, OH, p. 171–180, 1991.

TAN, K. H.; PARAMASIVAM, P.; TAN, K. C. Instantaneous and Long-Term Deflections of Steel Fiber Reinforced Concrete Beams. Structural Journal, vol. 91, n. 4, Jul. 1994a.

TAN, K. H.; PARAMASIVAM, P.; TAN, K. C. Creep and Shrinkage Deflections of RC Beams with Steel Fibers. Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 6, n. 4, p. 474-494. Nov. 1994b.

TAN, K. H.; SAHA, M. K. Ten-Year Study on Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams Under Sustained Loads. Structural Journal, vol. 102, n. 3, May 2005.

TENG, T. L.; CHU, Y. A.; CHANG, F. A.; CHIN, H. S. Calculating the elastic moduli of steel-fiber reinforced concrete using a dedicated empirical formula. Computational Materials Science, vol. 31, n. 3-4, p. 337-346. Nov. 2004.

THOMAS, J.; RAMASWAMY, A. Mechanical properties of steel fiber-reinforced concrete. Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 19, n. 5, p. 385-392. 2007

TOLEDO FILHO, R. D. Materiais Compósitos Reforçados com Fibras Naturais: Caracterização Experimental, Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 1997.

TRAINA, L. A.; MANSOUR, S. A. Biaxial strength and deformational behavior of plain and steel fiber concrete. ACI Materials Journal, v. 88, n. 4, p. 354–362, Jul. 1991.

VOIGT, W. Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. Wied. Ann. 38, p. 573–587. 1889.

WILLIAMSON, G. R. The effect of steel fibers on the compressive strength of concrete. International Symposium on Fiber Reinforced Concrete, SP 44-11, American Concrete Institute, 195–207. 1974

YAZICI, Ş.; İNAN, G.; TABAK, G. Effect of Aspect Ratio And Volume Fraction of Steel Fiber on the Mechanical Properties of SFRC. Construction and Building Materials, vol. 21, n. 6, p. 1250-1253, 2007.

YIN, W. S.; SU, E. C. M.; MANSUR, M. A.; HSU, T. T. C. Biaxial tests of plain and fiber concrete. ACI Materials Journal, v. 86, n. 3, p. 236–243, May 1989.

ZAOUI, A. (2002). Continuum Micromechanics: Survey. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, n. 8, p. 808-816.

ZHANG, J. Modeling of the influence of fibers on creep of fiber reinforced cementitious composite. *Composites Science and Technology*, vol. 63, n. 13, p. 1877-1884. Oct. 2003.

ZONSVELD, J. J. Properties and Testing of Concrete Containing Fibers Other Than Steel, RILEM Symposium on Fiber Reinforced Concrete, London. p. 217-226, 1975.

Anexo A

Expressões analíticas para os componentes do tensor de Eshelby

Na sequência são apresentadas expressões analíticas dos componentes do tensor de Eshelby para uma inclusão elipsoidal alinhada ao longo eixo 1 e caracterizada pela relação de aspecto

$$\alpha = l_f / d_f \quad (\text{A.1})$$

Onde l_f é o comprimento do elipsóide e d_f o seu diâmetro, conforme Figura A.1.

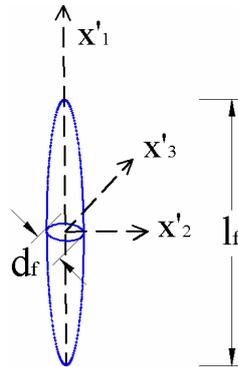


Figura A.1 – Eixos locais da inclusão para o cálculo do tensor de Eshelby.

Os componentes do tensor de Eshelby S_{ijkl} de forma geral são dados por

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu_0)} \left[1 - 2\nu_0 + \frac{3(\alpha)^2 - 1}{(\alpha)^2 - 1} - \left(1 - 2\nu_0 + \frac{3(\alpha)^2}{(\alpha)^2 - 1} \right) g \right] \quad (\text{A.2})$$

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{3}{8(1-\nu_0)} \frac{(\alpha)^2}{(\alpha)^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left[1 - 2\nu_0 - \frac{9}{4((\alpha)^2 - 1)} \right] g \quad (\text{A.3})$$

$$S_{1122} = S_{1133} = \frac{1}{2(1-\nu_0)} \left\{ 2\nu_0 - 1 - \frac{1}{(\alpha)^2 - 1} + \left[1 - 2\nu_0 + \frac{3}{2((\alpha)^2 - 1)} \right] g \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$S_{2211} = S_{3311} = -\frac{1}{2(1-\nu_0)} \frac{(\alpha)^2}{(\alpha)^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left(\frac{3(\alpha)^2}{(\alpha)^2 - 1} - 1 + 2\nu_0 \right) g \quad (\text{A.5})$$

$$S_{P(22,33)} = \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left\{ \frac{(\alpha)^2}{2((\alpha)^2 - 1)} - \left[1 - 2\nu_0 + \frac{3}{4((\alpha)^2 - 1)} \right] g \right\} \quad (\text{A.6})$$

$$S_{P(2,3)P(2,3)} = \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left\{ \frac{(\alpha)^2}{2((\alpha)^2 - 1)} + \left[1 - 2\nu_0 - \frac{3}{4((\alpha)^2 - 1)} \right] g \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$S_{P(1,2)P(1,2)} = S_{P(1,3)P(1,3)} = \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left\{ 1 - 2\nu_0 - \frac{(\alpha)^2 + 1}{(\alpha)^2 - 1} - \frac{1}{2} \left[1 - 2\nu_0 - \frac{3(\alpha)^2 + 3}{(\alpha)^2 - 1} \right] g \right\} \quad (\text{A.8})$$

Onde ν_0 é o coeficiente de Poisson da matriz, $P(.,.)$ são todas as possíveis permutações dos índices do tensor: por exemplo, $S_{P(1,2)P(1,2)}$ dá $S_{1212}, S_{1221}, S_{2112}$ e S_{2121} enquanto $S_{P(11,22)}$ dá S_{1122} e S_{2211} . g é dado por

$$g = \frac{1}{((\alpha)^2 - 1)^{3/2}} \left[(\alpha)((\alpha)^2 - 1)^{1/2} - \cosh^{-1}(\alpha) \right] \quad (\text{A.9})$$

para elipsóides alongados na direção dos pólos (*prolate ellipsoid*), por

$$g = \frac{1}{(1 - (\alpha)^2)^{3/2}} \left[\cosh^{-1}(\alpha) - (\alpha)(1 - (\alpha)^2)^{1/2} \right] \quad (\text{A.10})$$

para elipsóides na forma de disco chato (*oblate or penny shape ellipsoid*) e por

$$g = \frac{2}{3} \quad (\text{A.11})$$

para esferas.

Para inclusões esféricas ou $\alpha = 1$, as expressões dos componentes do tensor de Eshelby não nulas resultam em

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = \frac{7-5\nu_0}{15(1-\nu_0)} \quad (\text{A.12})$$

$$S_{1122} = S_{2233} = S_{3311} = \frac{5\nu_0-1}{15(1-\nu_0)} \quad (\text{A.13})$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{4-5\nu_0}{15(1-\nu_0)} \quad (\text{A.14})$$

Para fibras longas $0 < \alpha \rightarrow \infty$, as expressões dos componentes do tensor de Eshelby não nulas resultam em

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{5-4\nu_0}{8(1-\nu_0)} \quad (\text{A.15})$$

$$S_{2211} = S_{3311} = \frac{\nu_0}{2(1-\nu_0)} \quad (\text{A.16})$$

$$S_{2233} = S_{3322} = \frac{4\nu_0-1}{8(1-\nu_0)} \quad (\text{A.17})$$

$$S_{P(2,3),P(2,3)} = \frac{3-4\nu_0}{8(1-\nu_0)} \quad (\text{A.18})$$

$$S_{P(1,2),P(1,2)} = S_{P(1,3),P(1,3)} = \frac{1}{4} \quad (\text{A.19})$$

Para elipsóide em forma de disco chato $\alpha \rightarrow 0$, as expressões dos componentes do tensor de Eshelby não nulas resultam em

$$S_{1111} = 1 \quad (\text{A.20})$$

$$S_{1122} = S_{1133} = \frac{\nu_0}{1-\nu_0} \quad (\text{A.21})$$

$$S_{P(1,2)P(1,2)} = S_{P(1,3)P(1,3)} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.22})$$

Anexo B

Transformação de coordenadas

Na seqüência é dada uma breve explanação a respeito da transformação de coordenadas necessária na obtenção dos componentes do tensor de Eshelby em coordenadas globais e das propriedades elásticas efetivas.

Consideram-se duas bases ortogonais x_i e x'_i , com $i=1,2,3$ conforme Figura B.1.

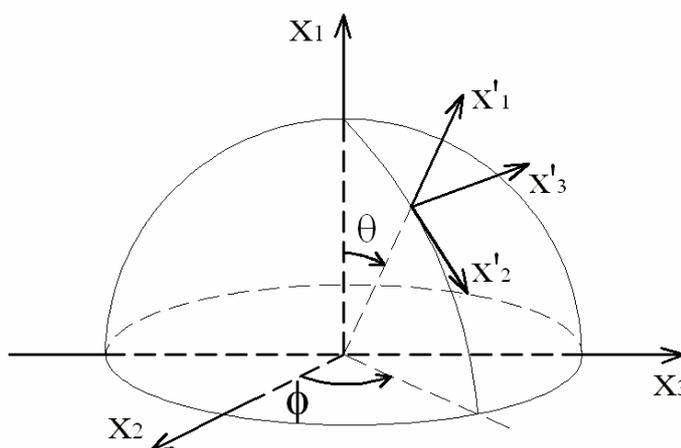


Figura B.1 – Coordenadas locais e globais e ângulos de Euler.

Um vetor unitário e'_i no sistema de coordenadas local x'_i , o qual está fixado na fibra, e um vetor unitário e_j no sistema de coordenada global x_i podem ser conectados através dos ângulos de Euler θ e ϕ como se segue

$$e_j = q_{ij}e'_i \quad (\text{B.1})$$

onde

$$q_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \cos \phi & \text{sen } \theta \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Os componentes de um tensor de quarta ordem A em coordenadas globais A_{ijkl} e em coordenadas locais A'_{pqrs} são relacionados através da expressão

$$A_{ijkl} = q_{pi} q_{qj} q_{rk} q_{sl} A'_{pqrs} \quad (\text{B.3})$$

Anexo C

Transformação de coordenadas - tensões escritas em termos das tensões e direções principais

Para obter a formulação do domínio de resistência do CRFA em função das tensões principais e direções principais, ou seja, $F^{hom}(\underline{\Sigma}) \rightarrow F^{hom}(\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III}, \psi, \varphi, \theta)$, é necessário considerar:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \Sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \Sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III} \quad (C.1)$$

com

$$\begin{aligned} \underline{e}_I &= a_{11}\underline{e}_x + a_{12}\underline{e}_y + a_{13}\underline{e}_z \\ \underline{e}_{II} &= a_{21}\underline{e}_x + a_{22}\underline{e}_y + a_{23}\underline{e}_z \\ \underline{e}_{III} &= a_{31}\underline{e}_x + a_{32}\underline{e}_y + a_{33}\underline{e}_z \end{aligned} \quad (C.2)$$

onde a_{ij} são as componentes da matriz de rotação \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi & \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \sin\varphi \\ -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi & \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\psi \sin\theta & -\cos\psi \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (C.3)$$