

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR
BARRAS NO ESTUDO DO COLAPSO DE ESTRUTURAS**

por

Luis Eduardo Kostascki

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Julho 2012

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR
BARRAS NO ESTUDO DO COLAPSO DE ESTRUTURAS**

por

Luis Eduardo Kostascki

Mestre em Ciências da Engenharia, orientação Estruturas

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa FEC / UNICAMP

Prof. Dr. Jorge Daniel Riera PPGEC / UFRGS

Prof. Dr. Eduardo Bittencourt PPGEC / UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 18, de julho de 2012

*A minha companheira no caminho da vida,
Luciana; familiares e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Ignacio, meu Orientador e grande amigo, por seus conselhos e por ter me dado a oportunidade de começar esta nova etapa em minha vida, que foi vir a Brasil para fazer o Doutorado.

Graças a isso, conheci gente fabulosa, como a mulher da minha vida, Luciana, e grandes amigos. Todos alegraram minha vida fazendo com que eu esteja feliz e com vontade de seguir trabalhando no Brasil.

Agradeço a minha família, tanto a “velha” como a que ganhei, por ser meu respaldo, sempre, e pelo carinho incondicional que me entregam.

Agradeço, especialmente, a Deus, por colocar todas essas pessoas no meu caminho.

Finalmente, agradeço ao PROMEC e aos integrantes do GMAP, pela recepção recebida, ao apoio financeiro da Capes, cuja Bolsa fez possível minha especialização, assim como também à CNPq quem custeou o “Sanduíche” que fiz na Índia.

A todos vocês, MUITO OBRIGADO.

Partes do conteúdo desta Tese ou trabalhos do mesmo tema que já foram publicadas em:

- *Trabalhos em Jornais:*

Kosteski, L.E.; Barrios D'ambra, R.; Iturrioz, I. **Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method.** International Journal of Fracture, v. 174, p. 139-161, 2012.

Kosteski, L.E.; Iturrioz, I.; Batista, R.G.; Cisilino, A.P. **The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics.** Engineering Computations, v. 28, p. 765-787, 2011.

Kosteski, L.E.; Barrios D'ambra, R.; Iturrioz, I. **Fractomechanics parameter calculus using the Discrete Element Method with bars.** Latin American Journal of Solids and Structures, v. 6, p. 301-321, 2009.

- *Trabalhos em Congressos:*

Kosteski, L.E.; Riera, J.D.; Iturrioz, I. **Ultimate load analysis of Barcom test model employing the discrete element method.** In: SMiRT21, 2011, Nueva Delhi. SMiRT21, 2011.

Iturrioz, I.; Riera, J.D.; Miguel, L.F.F.; Kosteski, L. E. **Scale Effects in Quasi-Fragile Materials Subjected to Compress.** In: SMiRT21, 2011, Nueva Delhi. SMiRT21, 2011.

Kosteski, L.E.; Iturrioz, I.; Riera, J.D. **Consideration of size effect multifractal theory in fracture analysis by means of the truss-like Discrete Element Method (DEM).** In: Third International Symposium on Solid Mechanics - MecSol 2011, Florianópolis, Santa Catarina. Mechanics of Solids in Brazil 2011, p. 249-266. 2011.

Kosteski, L.; Riera J.D.; Iturrioz, I. **Sobre la incertidumbre de modelo en la determinación numérica de la respuesta no-lineal de grandes estructuras.** XXXIV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, San Juan, Argentina, 27 de setembro a 1 de outubro de 2010.

Kosteski, L.; Riera J.D.; Iturrioz, I. **Consideration of size effects and stress localization in response determinations using the DEM.** Mecánica Computacional, Cilamce-Mecom 2010, v. XXIX, p. 2785-2801, 2010.

Kosteski, L.; Pinto, O.; Iturrioz, I. **Combinação entre o método dos elementos discretos composto por barras e o método dos elementos finitos no ambiente Abaqus.** Mecánica Computacional, Cilamce-Mecom 2010, v. XXIX, p. 5259-5283, 2010.

Puglia, B.V.; Iturrioz, I.; Riera, J.D.; Kosteski, L. **Random field generation of the material properties in the truss-like discrete element method,** Mecánica Computacional, Cilamce-Mecom 2010, v. XXIX, p. 6793-6807, 2010.

Barrios D'ambra, R.; Kostascki, L.; Iturrioz, I.; Cisilino, A.; Frontini, P.; Fasce, L.; Pettarín, V. **Application of the Truss-Like Discrete Element Method to Model the Impact Test of Circular Thin Polymer Plates**. ECCM 2010, IV European Conference on Computational Mechanics, Palais des Congrès, Paris, France, May 16-21, 2010.

Barrios D'ambra, R.L.; Kostascki, L.; Podesta, J.M.; Uberti, B.; Iturrioz, I. **Estudio del comportamiento de placas delgadas sometidas a cargas de impacto utilizando el método de los elementos discretos**, Enief 2009. Mecánica Computacional, v. XXVIII, p. 973-984, 2009.

Outros trabalhos apresentados durante o período de doutorado:

Silva de Oliveira, R.; Cardoso, T.; Prates, C.L.M.; Riera, J.D.; Iturrioz, I.; Kostascki, L.E. **Considerations concerning the analysis of NPP structures subjected to blast loading**. In: SMiRT21, 2011, Nueva Delhi. SMiRT21, 2011.

Pizzatto, L.; Casagrande, A.S.; Iturrioz, I.; Tedesco, F.; Kostascki, L.E.; Rodriguez, I. **Sensibilidade do momento último de embarcações de navegação interior na bacia do sudeste frente a reduções de espessuras das chapas resistentes**. In: 7º Seminário de Transporte e Desenvolvimento Hidroviário Interior da SOBENA, 2011, Porto Alegre. 7º Seminário de Transporte e Desenvolvimento Hidroviário Interior da SOBENA, 2011.

Soares, G.P.; Kostascki, L.; Gomes, H.M.; Iturrioz, I. **Optimization of composite materials with matrix and spherical inclusions using genetic algorithms**, COBEM 2009, 20th International Congress of Mechanical Engineering, November 15-20, 2009, Gramado, RS, Brazil.

Kostascki, L.; Iturrioz, I.; Barrios D'ambra, R. **Different aspect of critical crack propagation in elastic solid study using the bar like discrete element method**, COBEM 2009, 20th International Congress of Mechanical Engineering, November 15-20, 2009, Gramado, RS, Brazil.

Kostascki, L.; Mezzomo, G.P.; Iturrioz, I. **Modelo de superfície de resposta para o módulo de elasticidade de um material composto bifásico**, Cilamce 2009. 30th Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, November 08-11, 2009, Armação de Búzios, RJ, Brazil.

RESUMO

No presente trabalho é apresentada uma versão do Método dos Elementos Discretos formado por barras (DEM) no estudo do colapso de estruturas. O Método dos Elementos Discretos foi introduzido, especialmente, para a simulação numérica de problemas de dano e fratura. Esse método tem habilidade natural para introduzir descontinuidades de uma maneira muito direta e intuitiva. Além disso, métodos discretos oferecem uma estrutura conveniente para dar conta da desordem da microestrutura do material por meio de modelos estatísticos. A versão do DEM utilizada neste trabalho consiste na discretização do contínuo em barras que formam uma treliça espacial regular, onde massas equivalentes são concentradas nos nós, e as rigidezes das barras são equivalentes ao contínuo que tentam representar. Leis uniaxiais de dano permitem modelar fratura e dano anisotrópico com relativa facilidade. Esta versão foi amplamente testada em diversos campos da Engenharia, entre eles, problemas dinâmicos, de impacto, geração e propagação de sismos, estudo de efeito de escala em rochas e concreto, análise da microestrutura de materiais. Este trabalho apresenta dois grandes temas, nos quais foram realizadas implementações no DEM que aumentam sua aplicabilidade. Também são implementadas modificações nas leis constitutivas antes utilizadas, e apresentadas, também, novas leis para dar flexibilidade na calibração dos modelos. São comparados os resultados utilizando as diversas leis na análise do efeito de escala de placas submetidas à tração. Também são analisados os resultados obtidos sob a óptica da teoria de escala multifractal. Neste campo, encontram-se respostas muito interessantes que explicam os mecanismos de fratura, assim como dão uma noção de que alterações deveriam ser realizadas no DEM para conseguir que o método fique completamente objetivo em relação à escala. Nesse processo, estudam-se diferentes formas de obter as dimensões fractais de placas de rocha submetidas à tração e é analisada a influência de alguns dos parâmetros do DEM, além da relação constitutiva utilizada. Finalmente, o DEM é introduzido dentro do sistema comercial *Abaqus*, com objetivo de resolver problemas com grande quantidade de graus de liberdade ou com as condições de contorno ou de carregamento muito complexos. Apresentam-se exemplos de validação e exemplos de aplicação que mostram as vantagens das inovações realizadas.

Palavras-chave: Método dos elementos discretos; Método dos elementos Finitos; *Abaqus*, Efeito de escala, Multifractalidade.

ABSTRACT

This paper presents a version of the Truss-like Discrete Element Method in the study of the collapse of structures. The discrete element method was introduced especially for numerical simulation of fracture and damage problems. This method has the natural ability to introduce discontinuities in a very direct and intuitive way. Moreover, discrete methods offer a convenient framework to account for the disorder of the material microstructure by means of statistical models. The truss-like Discrete Element Method (DEM) used in this work represents the continuum by means of a periodic spatial arrangement of bars with the masses lumped at their ends. The rigidity of the bars is equivalent to the continuum to trying to represent. Uniaxial damage Laws allow model fracture and anisotropic damage with relative ease. This version was widely tested in various engineering fields including: dynamics problems, impact, generation and propagation of earthquakes, study of scale effect in rock and concrete analysis of the microstructure of materials. This work presents two major issues in which were performed DEM implementations that increase its applicability. To obtain a better description of the model modifications in the constitutive laws are implemented and new ones are presented. The scale effect results of plates of rock subjected to traction obtained to different laws are compared. These obtained results are examined under the Multifractal scaling law theory. In this field, very interesting answers that explain the mechanisms of fracture are found. They give some notions of which changes should be made in DEM to obtain a fully scale objective method. In the process, different ways to obtain the fractal dimension of rock plates subjected to traction are studied. The influence of some DEM parameter and constitutive laws are also analyzed. Finally, the DEM has been implemented within the commercial system ABAQUS to solve problems with a large number of degrees of freedom or very complex contour or loading conditions. Presents examples of validation and application that show the benefits of innovations through.

Keywords: Discrete element method, Finite element method, Abaqus, Scaling effects, Multifractal.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	3
1.2	Organização do trabalho	5
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	Introdução à mecânica de fratura	6
2.2	Lei coesiva de Hillerborg	8
2.3	Fractalidade	9
2.4	Lei coesiva independente da escala	10
2.4.1	Resistência à tração fractal	12
2.4.2	Deformação crítica fractal	16
2.4.3	Energia fractal de fratura	19
2.4.4	Relação entre os expoentes de escala	22
2.5	Determinação experimental da dimensão fractal das superfícies de fratura (Δ_G)	23
2.6	Efeito de escala	26
2.6.1	Teoria de Bažant	27
2.6.2	Lei de escala Multifractal	28
2.6.3	Comparação da teoria de Bažant com a lei de escala Multifractal	34
3	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS	35
3.1	Introdução do Método dos Elementos Discretos	35
3.2	O Método dos Elementos Discretos formado por barras	36
3.3	Modelo constitutivo não-linear para dano de material	38
3.3.1	Lei bilinear ou modelo de Hillerborg	41
3.3.2	Modelo trilinear	45
3.3.3	Modelo com amolecimento exponencial	47
3.3.4	Modelo de Weibull	48
3.3.5	Deformações remanescentes nas leis constitutivas	51
3.4	Forma de modelar o amortecimento	52

3.5	Inclusão do carácter aleatório	52
3.5.1	Aleatoriedade nas propriedades do material simulado	52
3.5.2	Aleatoriedade perturbando a malha	56
3.6	Relação do tamanho do elemento com o comprimento de correlação do campo aleatório gerado	57
3.7	Indicadores de dano no DEM	59
4	LEI DE ESCALA MULTIFRACTAL NO DEM	60
4.1	Placas de rocha de diferentes tamanhos submetidas à tração uniaxial	60
4.1.1	Descrição do modelo	60
4.1.2	Resposta das placas de rocha simuladas com o DEM	61
4.2	Cálculo dos expoentes fractais	66
4.2.1	Tensões fractais: obtenção do d_σ	66
4.2.2	Deformações fractais: obtenção do d_ε	67
4.2.3	Energia de fratura fractal: obtenção do d_G	72
4.2.4	Relação entre os expoentes fractais. Lei coesiva independente da escala	79
4.3	Curvas tensão-deformação com <i>Snap-back</i>	83
4.4	Discussão sobre objetividade na RCE	88
4.5	Estudo paramétrico das RCE. Influência da aleatoriedade	89
4.6	Análise da influência do amortecimento	95
5	DEM NO AMBIENTE ABAQUS/EXPLICIT	97
5.1	Implementação do DEM dentro do <i>Abaqus/Explicit</i>	97
5.1.1	Modelagem da treliça espacial	97
5.1.2	Discretização das massas	98
5.1.3	Introdução do modelo constitutivo no <i>Abaqus/Explicit</i>	101
5.1.4	Diferença entre as definições de energias	101
5.1.5	Inclusão do carácter aleatório	104
5.2	Validação do DEM- <i>Abq</i>	105
5.2.1	Viga elástica linear em balanço	105
5.2.2	Viga em balanço que rompe a flexão	110
5.3	Exemplos de aplicação	116

5.3.1	Interação entre duas trincas que propagam em forma instável	116
5.3.2	Fratura em discos de PMMA submetidos a impacto no DEM- <i>Abq</i>	116
5.3.3	Análise de impacto em uma placa de concreto reforçado com o Método dos Elementos Discretos formado por barras	117
5.3.4	Simulação de uma estrutura de contenção de uma central nuclear	117
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	119
6.1	Conclusões	119
6.1.1	Leis constitutivas e fractalidade	119
6.1.2	Implementação do DEM no ambiente <i>Abaqus</i>	122
6.2	Trabalhos futuros	123
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	124
	APÊNDICE A – Análise do erro colocando coeficiente de Poisson diferente de 0,25	132
	APÊNDICE B – Propagação instável de fissuras	135
B.1	Trincas que emanam de duas cavidades submetidas a uma solicitação explosiva, experimento de Simha et al., 1986	135
B.1.1	Modelo ensaiado	135
B.1.2	Modelo em DEM- <i>Abq</i>	136
B.1.3	Vantagem do DEM- <i>Abq</i> sobre o DEM tradicional	139
B.2	Encontro entre duas trincas, Swenson e Ingraffea	140
B.2.1	Modelo em DEM- <i>Abq</i>	141
B.2.2	Estudo de Sensibilidade	142
B.2.3	Estudo da orientação da malha nas previsões do DEM	145
B.3	Conclusões	146
	APÊNDICE C – Fratura em discos de PMMA submetidos a impacto no DEM-<i>Abq</i>	147
C.1	Descrição do ensaio realizado e propriedades do material e dos modelos	147
C.2	Simulações realizadas	149
C.3	Análise da variação do apoio	152
C.4	Impacto excêntrico	155
C.5	Conclusões	156

APÊNDICE D – Análise de impacto em uma placa de concreto reforçado com o Método dos Elementos Discretos formado por barras	157
D.1 Descrição do problema	157
D.2 Descrição do modelo	158
D.2.1 Modelo do concreto no DEM	158
D.2.2 Reforços de aço	158
D.2.3 Projéteis	159
D.3 Validação do modelo	160
D.3.1 Análise de convergência	161
D.3.2 Análise de frequência	163
D.4 Resultados numéricos	166
D.4.1 R-12-X: <i>placa de 120mm reforçada (0,6%), impacto de projétil duro com velocidade 215m/s</i>	166
D.4.2 R-12-Y: <i>placa de 120mm reforçada (0,6%), impacto de projétil duro com velocidade 164m/s</i>	167
D.4.3 R-12-Z: <i>placa de 120mm reforçada (0,6%), impacto de projétil duro com velocidade 95m/s</i>	170
D.4.4 R-12-S: <i>placa de 120mm reforçada (0,6%), impacto de projétil mole com velocidade 199m/s</i>	173
D.5 Comparação e discussão	176
D.5.1 Influência da velocidade inicial do projétil	177
D.5.2 Influência da dureza do projétil	177
D.6 Conclusões	177

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Discretização do contínuo com o DEM. Treliça espacial regular utilizada no método	2
Figura 1.2	<i>a)</i> Tensão tangencial vs distorção para um cubo de 1m calculadas utilizando cinco malhas diferentes, <i>b)</i> Malha 1, 5×5×5 módulos cúbicos, <i>c)</i> Malha 5: 20×20×20. Em todos os casos se gera uma fissura grande próxima à borda inferior, com danos pequenos em outros lugares [Iturrioz <i>et al.</i> , 2009]	4
Figura 2.1	Modelo coesivo de Hillerborg, <i>a)</i> curva tensão-deformação elástica, <i>b)</i> lei coesiva tensão-COD	9
Figura 2.2	Exemplos de fractais na natureza	10
Figura 2.3	Modelo coesivo independente da escala	11
Figura 2.4	Re-normalização das tensões de tração sobre uma secção resistente fractal lacunar	12
Figura 2.5	Efeito de escala fractal da tensão nominal e interpretação gráfica da transformação de re-normalização	15
Figura 2.6	<i>a)</i> localização de deformações fractais, <i>b)</i> lei de escala para o deslocamento crítico w_c	17
Figura 2.7	Deformações sobre a barra <i>a)</i> extremadamente difusas e <i>b)</i> extremamente localizadas	18
Figura 2.8	Re-normalização da energia de fratura sobre um espaço de dissipação fractal invasivo	19
Figura 2.9	<i>a)</i> Domínio da energia dissipada e <i>b)</i> lei de escala para a energia de fratura G_f	22
Figura 2.10	Método de cobertura com caixas	24
Figura 2.11	Aplicação do método de contagem de caixa para análise de um perfil de concreto [Carpinteri <i>et al.</i> , 1999]	24
Figura 2.12	Esquema de aproximação por triangulação, método de <i>patchwork</i>	25
Figura 2.13	Lei de efeito de escala de Bažant (SEL)	27
Figura 2.14	Lei de escala Multifractal (MFSL) para a resistência à tração e a energia de fratura	30
Figura 2.15	Leis de escala da energia de fratura para dois materiais diferentes	31
Figura 2.16	Aplicação da MFSL a dados de tensão ruptura apresentados em Carpinetri e Chiaia, 1997	34
Figura 3.1	Discretização utilizada no DEM: <i>a)</i> modelo cúbico básico, <i>b)</i> geração do corpo prismático	37

Figura 3.2	Esquema de funcionamento do DEM	38
Figura 3.3	a) sólido cúbico de dimensões $L \times L \times L$, b) módulo do DEM de dimensões $L \times L \times L$	39
Figura 3.4	a) Relações constitutivas elementares do DEM, a) Modelo de Hillerborg, b) Modelo trilinear, c) modelo com amolecimento exponencial e d) modelo de Weibull	40
Figura 3.5	Mudança de R_f no Modelo de Hillerborg mantendo L , E e G_f constantes	43
Figura 3.6	Relação constitutiva trilinear utilizada no DEM proposta por Batista, 2007	46
Figura 3.7	Comparação entre as diferentes relações constitutivas elementares utilizadas para os elementos uniaxiais do DEM consideradas no trabalho	50
Figura 3.8	Modificação nos modelos de a) Hillerborg, b) e c) Trilinear, para ter em conta deformações remanescentes	51
Figura 3.9	Esquema da incorporação da aleatoriedade no DEM	54
Figura 3.10	Variação da média de $\varphi^{1/2}$ em função do CV (G_f)	55
Figura 3.11	Variação do CV (ε_p) em função do CV (G_f)	56
Figura 3.12	Influência da perturbação da malha na discretização e nos resultados	57
Figura 3.13	Distribuição dos pólos e do comprimento de correlação no domínio do modelo de elementos discretos (DEM)	58
Figura 3.14	Elementos que contribuem à quantificação do dano em um módulo básico do DEM	59
Figura 4.1	Configuração da placa e condições de contorno	61
Figura 4.2	a) Curvas tensão-deformação das placas de comprimento $b=0,20$ m para as quatro simulações e curvas médias (em azul) para o Modelo de Hillerborg, b) comparação das curvas tensão-deformação obtidas com as quatro leis constitutivas estudadas	62
Figura 4.3	Configurações de ruptura para placas com comprimento $b=0,20$ m, para os modelos: a) de Hillerborg, b) trilinear, c) com amolecimento exponencial e d) de Weibull	62
Figura 4.4	Dano distribuído na placa de $b=0,20$ m, para: a) Modelo de Hillerborg, b) modelo trilinear, c) Modelo com amolecimento exponencial e d) Modelo de Weibull	63
Figura 4.5	a) Curvas tensão-deformação médias globais para as diferentes dimensões da RCE de Hillerborg, b) mudança de comportamento relativo aos resultados	63
Figura 4.6	Efeito de escala para as quatro RCE de a) tensões últimas e b) deformações características médias (escala bi-logarítmica)	65

Figura 4.7	a) Representação gráfica da equação (2.19), b) Variação da tensão média última como o tamanho do bloco (em escala bi-logarítmica)	66
Figura 4.8	Configurações em três tempos diferentes de uma placa tracionada com aleatoriedade ($CV(G_f)=40\%$)	68
Figura 4.9	a) Pontos da curva tensão-deformação coincidentes com as imagens da Figura 4.8. b) Deformações normalizadas relativos ao comprimento da placa das faixas marcadas na figura anterior	69
Figura 4.10	a) Forma de cálculo do número de seções danificadas com o método das caixas (ver seção 2.5) e b) forma de aproximar o limite para a obtenção de d_ε	70
Figura 4.11	a)Variação do expoente fractal médio da placa com a deformação da mesma. b) d_ε médio das quatro placas de 0,2m em função do limiar de dano considerado	71
Figura 4.12	Variação do expoente fractal com o tamanho da placa para cada RCE analisada	71
Figura 4.13	a) Configuração de ruptura de uma placa com duas trincas analisada com o DEM, b) identificação dos centróides dos elementos diagonais quebrados, c) agrupamento dos pontos em diferentes fraturas, e d) superfícies de fratura determinadas por pós-processamento	73
Figura 4.14	Comparação entre a) a configuração de ruptura obtida com o DEM e b) a superfície de fratura determinada por pós-processamento. c) forma de obter o comprimento da fissura em função do tamanho do segmento de discretização	74
Figura 4.15	Diagrama bi-logarítmico de ℓ vs r para a simulação de uma placa de 0,20m submetida a tração prescrita utilizando a RCE de Hillerborg	74
Figura 4.16	Variação do expoente fractal da energia de fratura com o tamanho da placa usando o método de <i>Patchwork</i>	75
Figura 4.17	Evolução da energia dissipada por dano e energia elástica com a deformação para uma placa de rocha de 0,20m submetida à tração prescrita simulada utilizando a RCE de Hillerborg	76
Figura 4.18	Configuração de ruptura de uma placa de rocha de 0,20m submetida a tração prescrita simulada com a RCE de Hillerborg e detalhes dos mecanismos de falha a 0° e 45°	77
Figura 4.19	Variação do expoente fractal da energia de fratura com o tamanho da placa	78
Figura 4.20	Variação do expoente fractal de deformações, a) com o tamanho da placa, b) com a deformação da placa	80
Figura 4.21	Curva tensão-deslocamento para a placa de 0,2m mostrando as definições dos deslocamentos	81

Figura 4.22	a) Curva tensão-deslocamento para a placa de 0,2m, usando as duas definições do deslocamento efetivo; e curvas tensão-deformação fractal construídas com elas, considerando o expoente fractal b) e c) constante e d) variável	82
Figura 4.23	a) Curvas tensão-deformação reconstruídas usando a teoria fractal para placas grandes, e b) para placas intermédias comparadas com simulações normais. Foi usada a lei constitutiva de Hillerborg	84
Figura 4.24	a) Curvas tensão-deformação para placas nas quais propaga uma e duas fissuras, assim como duas se juntando. b) Curvas tensão-deformação fractal para placas com uma e duas fissuras	84
Figura 4.25	a) Curvas tensão-deformação para uma placa de 0,5m amortecida ($\xi=35\%$) obtida fazendo carregamento e descarregamento nos pontos de instabilidade e curva original, b) Energia elástica e dissipada por dano para as duas simulações	85
Figura 4.26	Distribuição do índice de dano I_{Dz} nos pontos marcados na Figura 4.25a para uma placa de 0,5m de lado amortecida ($\xi=35\%$) usando a Lei constitutiva de Hillerborg	86
Figura 4.27	Curvas tensão-deformação envolventes para placas de 0,5m amortecida ($\xi=35\%$), obtida fazendo carregamento e descarregamento nos pontos de instabilidade e curvas reconstruídas com a teoria fractal	87
Figura 4.28	Gráfico ilustrativo das relações constitutivas elementares utilizadas para os elementos uniaxiais do DEM consideradas no trabalho	89
Figura 4.29	Efeito de escala nas deformações e nas tensões para as três RCE analisadas	90
Figura 4.30	Variação do tamanho crítico da placa com o K_r e relação constitutiva adotada	91
Figura 4.31	Configurações de ruptura para uma placa do mesmo tamanho para diferentes RCE e parâmetros da simulação	92
Figura 4.32	Efeito de escala nas deformações e nas tensões para a lei de Hillerborg .	93
Figura 4.33	Efeito de escala nas deformações e nas tensões para a lei de Hillerborg usando diferentes valores de $CV(G_f)$	94
Figura 4.34	Aumento de dispersão das curvas com o K_r na lei de Hillerborg usando $CV(G_f)=160\%$	95
Figura 4.35	Variação das configurações de ruptura com o amortecimento	96
Figura 5.1	Cubo modelado com o DEM onde se mostram as diferentes seções modeladas no <i>Abaqus/Explicit</i> . Seção arestas (S^A) vermelhas, faces (S^C) verdes, internos (S^I) azuis e diagonais (S^D) roxo, as últimas duas só alguns elementos de exemplo	98

Figura 5.2	Cubo modelado com o DEM onde se mostram as massas discretizadas. Massa dos nós do vértice em azul ($\rho L^3/16$), massas dos nós das arestas em vermelho ($\rho L^3/8$) e massa dos nós das faces em verdes ($\rho L^3/4$). Os nós restantes têm massa de $\rho L^3/2$	99
Figura 5.3	Massas adicionadas nos nós internos dos módulos das faces para que a distribuição das massas nodais seja correta	100
Figura 5.4	Modelo de tensão pós falha vs deslocamento vinculada à energia de fratura utilizado no <i>Abaqus/Explicit</i>	101
Figura 5.5	Balço de energias vinculado à RCE a) do DEM, b) do DEM- <i>Abq</i>	103
Figura 5.6	Função de densidade de probabilidade onde foram definidos x intervalos com a mesma probabilidade de ocorrência	104
Figura 5.7	Esquema da viga em balanço	105
Figura 5.8	Representação gráfica dos três modelos utilizados. a) DEM- <i>Abq</i> , b) MEF e c) MEF/DEM- <i>Abq</i>	106
Figura 5.9	Detalhe do encontro do modelo misto. Os nós ressaltados do DEM- <i>Abq</i> não apresentam deslocamentos relativos com relação aos da superfície modelada com o MEF	106
Figura 5.10	Formas dos primeiros dez modos de vibração e comparação dos resultados obtidos com valores analíticos usando a teoria de Euler-Bernoulli	107
Figura 5.11	a) função de carga aplicada, b) curva tempo vs deslocamento no extremo livre da viga para o modelo DEM- <i>Abq</i> , MEF e MEF/DEM- <i>Abq</i>	108
Figura 5.12	Reações no tempo dos três métodos para uma carga aplicada com amplitude Heaviside	109
Figura 5.13	a) Curvas Força vs tempo e b) curvas de energias, da viga engastada - livre para os modelos realizados com o DEM e o DEM- <i>Abq</i> . Energia elástica E_S , Energia cinética E_K e Energia dissipada por dano E_D	111
Figura 5.14	Configurações de ruptura dos modelos realizados com o DEM e o DEM- <i>Abq</i> . a) deformada e elementos rompidos eliminados, b) não-deformada com elementos rompidos destacados	111
Figura 5.15	Distribuição de probabilidade (frequência/somatório das frequências) de ε_p dividido pela amplitude do intervalo vs ε_p dos cinco eventos e de sua média, obtidos a) no DEM, b) no DEM- <i>Abq</i> , para $CV(G_f) = 10\%$	112
Figura 5.16	Distribuição de probabilidade de ε_p dividido pela amplitude do intervalo vs ε_p das médias de cinco eventos obtidos no DEM e no DEM- <i>Abq</i> , comparadas com a distribuição teórica para $CV(G_f) = 10\%$	113
Figura 5.17	Configurações não deformadas com barras rompidas destacadas, dos cinco eventos simulados com o DEM e o DEM- <i>Abq</i> para $CV(G_f) = 10\%$, de $CV(G_f) = 50\%$ e de $CV(G_f) = 100\%$	113

Figura 5.18	Curvas médias e desvios de Força vs tempo <i>a)</i> para $CV(G_f) = 10\%$, <i>b)</i> para $CV(G_f) = 50\%$ e <i>c)</i> para $CV(G_f) = 100\%$; e curvas médias e desvios das energias <i>d)</i> para $CV(G_f) = 10\%$, <i>e)</i> para $CV(G_f) = 50\%$ e <i>f)</i> para $CV(G_f) = 100\%$, dos cinco eventos da viga em balanço para os modelos realizados com o DEM e o DEM- <i>Abq</i>	114
Figura 5.19	Curvas reação vs tempo para o DEM e o DEM- <i>Abq</i> (eixo à esquerda) e deslocamento prescrito aplicado vs tempo (eixo direita)	115
Figura 5.20	Curvas de energias para os modelos realizados com o DEM e o DEM- <i>Abq</i> . Energia elástica E_S e Energia dissipada por dano E_D	115
Figura A.1	Erro porcentual cometido no cálculo de C_{44} com a variação do coeficiente de Poisson	132
Figura A.2	Bloco modelado com o DEM para obter cisalhamento puro	132
Figura A.3	Influência do coeficiente de Poisson nos termos de cisalhamento em uma simulação realizada com o DEM comparada com a curva teórica ...	134
Figura B.1	Geometria dos modelos testados por Simha <i>et al.</i> , 1986	136
Figura B.2	Casos analisados e comportamento observado por Simha <i>et al.</i> , 1986	136
Figura B.3	Forma da interfase DEM-MEF utilizada	137
Figura B.4	Modelos A, B e C com detalhe da configuração de ruptura, sem simetria, com simetria horizontal e com dupla simetria, vertical e horizontal, respectivamente	138
Figura B.5	Modelos e detalhes da configuração de ruptura para o encontro de duas trincas a 120° . Pré-trinca saindo <i>a)</i> da esquina da malha de DEM, e <i>b)</i> um pouca mais acima	139
Figura B.6	Modelos compostos DEM- <i>Abq</i> que simulam o encontro a 90° e 60° e detalhes das configurações de ruptura obtidas	140
Figura B.7	Forma da interface DEM-MEF utilizada	141
Figura B.8	Modelo do DEM- <i>Abq</i> do exemplo analisado por Swenson e Ingraffea, 1987	142
Figura B.9	Detalhes das configurações de ruptura variando o incremento de tempo e o amortecimento numérico do <i>Abaqus Explicit</i>	143
Figura B.10	Energias durante o processo de ruptura variando o incremento de tempo e o amortecimento numérico do <i>Abaqus Explicit</i>	144
Figura B.11	Modelo com malha do DEM girado 15° respeito da horizontal	144
Figura B.12	Configurações de ruptura variando o incremento de tempo e o amortecimento numérico do <i>Abaqus Explicit</i> , para a malha do DEM girada 15°	145
Figura B.13	Configurações de ruptura variando a inclinação da malha do DEM	146

Figura C.1	Esquema do modelo	147
Figura C.2	a) Configurações de ruptura, b) Curvas força vs tempo, e c) Curvas velocidade do dardo vs tempo para os quatro corpos de prova testados [Fasce, 2002]	148
Figura C.3	Curvas força vs tempo das simulações realizadas com o DEM [Barrios D'ambra <i>et al.</i> , 2009], DEM- <i>Abq</i> (reações vs tempo) e a curva experimental do Teste 4	150
Figura C.4	Curva velocidade do dardo vs tempo realizadas com o DEM- <i>Abq</i> e a curva experimental do Teste 4	150
Figura C.5	Vistas onde se mostram as camadas superior e inferior para o modelo com apoios fixos	151
Figura C.6	Configuração de ruptura final onde se mostram as camadas superior e inferior para o modelo com apoios fixos	151
Figura C.7	a) Modelo com apoio fixo, b) Modelo A e c) Modelo C. Para facilitar a visualização foram tirados os elementos diagonais e interiores do DEM.	152
Figura C.8	Curvas força vs tempo do Teste experimental 4 junto com, a) Modelo A, b) Modelo B e c) Curvas velocidade do dardo vs tempo para os três modelos mais o modelo com apoio fixo e o modelo experimental Teste 4	153
Figura C.9	Configurações de ruptura para os dois modelos, Modelo A e Modelo C. Observam-se as camadas superior e inferior	154
Figura C.10	Configurações de ruptura para o disco com o dardo excêntrico. Podem-se ver a camada superior e inferior	155
Figura C.11	a) Curvas força vs tempo e b) curvas velocidade do dardo vs tempo para o modelo do dardo excêntrico mais o Teste 4 experimental	156
Figura D.1	Curva tensão-deformação do aço	159
Figura D.2	Projéteis a) duros e b) moles	159
Figura D.3	Vistas da deformação localizada no projétil duro quando usado propriedade elastoplástica	160
Figura D.4	Curva força-deslocamento da simulação do teste de compressão estático do projétil mole e configurações deformadas nos diferentes tempos	161
Figura D.5	Malhas utilizadas na análise de convergência	162
Figura D.6	Velocidade e aceleração do projétil em todo o processo de falha, reação total e energia de dissipação por dano e plástica	163
Figura D.7	Vistas e perspectiva da malha de concreto e estrutura de reforço de aço com $L=0,03m$	164
Figura D.8	Resposta a uma carga <i>Heaviside</i> da placa de concreto armado modelada com o DEM	165

Figura D.9	Vista total, vista dos módulos mais próximos e vista de elementos quebrados na cara mais afastada à incidência do projétil, para as quatro réplicas da placa	166
Figura D.10	Vista total, vista dos módulos mais próximos e vista de elementos quebrados na cara mais afastada à incidência do projétil, para as quatro réplicas da placa	168
Figura D.11	Curva média de velocidade do Projétil vs tempo para o caso R-12-Y onde é marcada a variação dos resultados. As cruzes indicam os pontos em que algumas simulações deram algum tipo de instabilidade nos elementos do projétil	169
Figura D.12	a) Balance energético considerando projétil como corpo rígido; Energia média, máxima e mínima b) elástica, c) cinética e d) de dissipação plástica, para simulação as quatro de R-12-Y considerando $CV(G_f)=40\%$	170
Figura D.13	Vista total, vista dos módulos mais próximos e vista de elementos quebrados na cara mais afastada à incidência do projétil, para as quatro réplicas da placa	171
Figura D.14	Reações da placa; velocidade, aceleração e deslocamento médios do Projétil dos casos analisados	172
Figura D.15	Energia média, máxima e mínima para cada caso simulado de dissipação plástica, elástica, cinética e de dissipação por dano	173
Figura D.16	Vista total, vista dos módulos mais próximos e vista de elementos quebrados na cara mais afastada à incidência do projétil, para as quatro réplicas da placa	174
Figura D.17	Resultado do teste experimental do caso R-12-S [Kojima <i>et al.</i> , 1989 e Kojima, 1991], e configurações deformadas dos quatro projéteis simulados	175
Figura D.18	Reações da placa; velocidade, aceleração e deslocamento médios do Projétil para o caso R-12-S	175

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Valores dos expoentes de escala e os parâmetros do material independentes da escala para estruturas extremadamente pequenas e grandes [Carpinteri et al., 2002]	33
Tabela 4.1	Parâmetros do material e DEM	60
Tabela 4.2	Valores médios da tensão pico e deformação crítica e de ruptura para as diferentes dimensões da placa e as diferentes leis constitutivas estudadas	64
Tabela 4.3	Expoentes fractais de deformações para os quatro modelos estudados	67
Tabela 4.4	Resumo dos expoentes fractais para a lei de Hillerborg	79
Tabela 5.1	Diferença entre cada método com relação ao resultado analítico de deflexão no extremo livre da viga em balanço	108
Tabela 5.2	Propriedades da lei constitutiva bilinear utilizada nos elementos do DEM e do DEM- <i>Abq</i>	110
Tabela B.1	Quantidade de graus de liberdade para cada um dos modelos simulados	139
Tabela B.2	Propriedades da lei constitutiva bilinear utilizada nos elementos do DEM- <i>Abq</i>	141
Tabela C.1	Propriedades do material para o exemplo estudado, parâmetros utilizados na simulação e RCE utilizada	149
Tabela D.1	Comparação entre os resultados experimentais e as simulações do DEM	176

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CFL	critério de Courant-Friedrichs-Lewy
COD	<i>Crack Opening Displacement</i> , deslocamento de abertura da trinca
CTOA	<i>Crack Tip Open Angle</i> , ângulo de abertura da ponta da trinca
DDA	Análise de deformação descontínua
DEM	Método dos elementos discretos formado por barras
DEM- <i>Abq</i>	Método dos elementos discretos implementado no sistema <i>Abaqus</i>
GDL	Graus de liberdade
MD	Método de Dinâmica Molecular
MEC	Métodos dos elementos de contorno
MEF	Métodos dos elementos finitos
MFEL	Mecânica de fratura elástica linear
MFSL	<i>Multifractal scaling law</i> , lei de escala multifractal
PETN	Tetranitrato de pentaeritritol ou tetranitrato de eritrina
PMMA	Polimetilmetacrilato
PROMECC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
RCE	Relação constitutiva elementar
SED	Critério da densidade de energia de deformação (do inglês)
SEL	<i>Scaling effect law</i> , lei de efeito de escala para o concreto
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

(Unidades no sistema internacional)

[F]	Força
[L]	Comprimento
a	Comprimento da trinca
A	Área aparente
A_0	Área transversal nominal
A_d	Seção transversal do elemento diagonal
A_l	Seção transversal do elemento longitudinal
A^*	Área do conjunto fractal
A_i^f	Área de fratura equivalente
b	Dimensão de referência que define a escala global, lado da placa
c	Relação entre E'/E na RCE tri-linear
c_A	Parâmetro de escala utilizado para fazer cumprir a equivalência entre Γ e Γ_{DEM}
C	Matriz de amortecimento
CV(.)	Coefficiente de variação
C_p	Velocidade de propagação da onda longitudinal
C_{ij}	Matriz constitutiva elástica
d	Tamanho dos prismas elementares
d_G	Expoente fractal da energia de fratura
d_{Ge}	Expoente fractal da energia de fratura obtida pelo Método energético
d_{Gpatch}	Expoente fractal da energia de fratura obtida pelo Método de <i>patchwork</i>
d_{max}	Tamanho característico da microestrutura
d_ε	Expoente fractal das deformações
d_σ	Expoente fractal das tensões
D_f	Constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico, ζ_n
E	Módulo de elasticidade de Young
EW	Trabalho externo
E_{dis}	Energia dissipada por dano e plasticidade
E_D	Energia de dano
E_F	Energia dissipado por efeitos de fricção

E_i	Nível i na análise de Re-normalização
E_K	Energia cinética
E_S	Energia elástica
E'	Módulo de elasticidade da segunda inclinação da lei constitutiva tri-linear
f	Função força
f_n	Frequência natural de vibração do modo n expressado em [Hz]
f_t	Tensão plástica limite
F	Força
$\mathbf{F}(t)$	Vetor forças internas que atuam nas massas nodais
G_c	Energia específica de fratura do material
G_f	Energia específica de fratura
$\overline{G_f}$	Valor médio de G_f
G_f^*	Energia de fratura fractal, energia de fratura re-normalizada
H	Expoente de Hurst
I_D	Índice de dano escalar
I_{Dj}	Índices de dano direcionais
J	Integral J
K_{Ic}	Fator de intensidade de tensões crítico para o Modo I
K_r	Coeficiente que relaciona ε_p com ε_r
K_r'	Coeficiente que relaciona ε_p' com ε_r , da lei constitutiva tri-linear
ℓ	Comprimento da fratura
l_{corr}	Comprimento de correlação do campo aleatório de G_f
l_{ch}	Comprimento característico do material
L	Comprimento do módulo cúbico
L_{cr}	Comprimento de elemento crítico
L_i	Comprimento relacionado ao Nível i
\mathbf{M}	Matriz de massa
N	Número de prismas
N_n	Número de elemento no nível n
p	Razão de similaridade
$\mathbf{P}(t)$	Vetor forças externas que atuam nas massas nodais

r	Fator de escala, tamanho do segmento de discretização, relação entre deformações $\varepsilon_r^T / \varepsilon_r^H$ utilizada na RCE tri-linear
R_f	Fator de falha
s	Número de fragilidade estático
S^A	Seções correspondentes a elementos das arestas do modelo global
S^C	Seções correspondentes a elementos das caras ou faces do modelo global
S^D	Seções correspondentes a elementos diagonais do modelo global
S^I	Seções correspondentes a elementos internos do modelo global
T	Temperatura
u_{n0}	Deslocamento para o qual não são mais transmitidas tensões
V_i	Pólos aos que se atribuem valores aleatórios com distribuições de probabilidades não correlacionadas
w	Apertura da trinca
w_c	Espessura da banda fissurada, abertura da trinca crítica, deslocamento crítico
w_e	Deslocamentos devidos às deformações elásticas
w_T	Deslocamento total
w_{pp}	Deslocamento devido à deformações elásticas e anelásticas antes do pico de tensões ser atingido no teste analisado
W	Trabalho total
\mathbf{x}	Vetor deslocamentos nodais
$\dot{\mathbf{x}}$	Vetor velocidade nodal
$\ddot{\mathbf{x}}$	Vetor aceleração nodal
Y	Parâmetro adimensional que depende das dimensões do espécime e da trinca
Z	Parâmetro alternativo
Z_{mat}	Parâmetro alternativo no momento de colapso em um corpo de prova
β	Parâmetro de escala da função exponencial de Weibul tipo 2
γ	Parâmetro de forma da função exponencial de Weibul tipo 2, distorção angular, coeficiente de segurança
Γ	Energia dissipada pela fratura de uma amostra contínua de material devido a uma ruptura paralela a uma de suas caras
Γ_{DEM}	Energia dissipada quando o módulo do DEM de dimensões $L \times L \times L$ quebra em duas partes
$\Gamma(.)$	Função Gamma
δ_5	Versão do COD, método apresentado Heinz Schwalbe
ΔW	Energia total dissipada

Δe	Dimensão fractal obtida pelo Método energético
Δ_G	Dimensão fractal de superfícies de fratura, invasivas
Δ_{patch}	Dimensão fractal obtida pelo Método de <i>patchwork</i>
Δt	Incremento de tempo
Δ_ε	Dimensão fractal da projeção lacunar das secções danadas
Δ_σ	Dimensão fractal da superfície tensionada (superfície lacunar)
ε	Deformação longitudinal
ε_c	Deformação crítica, Deformação correspondente a w_c
ε_p	Deformação crítica de falha
ε_r	Deformação limite
ε_u	Deformação correspondente a σ_u
$\widehat{\varepsilon}_p$	Deformação obtida a partir de \overline{G}_f
ε_c^*	Deformação crítica fractal
ε_p'	Deformação correspondente ao segundo ponto de câmbio na RCE tri-linear
φ	Número aleatório com distribuição Weibull de dois parâmetros e média 1
φ_v	Valor aleatório interpolado para o ponto i
Λ	Área de fratura atual
μ	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coefficiente de Poisson
ξ_n	Coefficiente de amortecimento crítico
ρ	Densidade de massa
σ	Tensão normal
$\sigma_{máx eq}$	Tensão máxima equivalente
$\sigma_{rup eq}$	Tensão de ruptura equivalente
σ_t	Tensão de tração do modelo coesivo
σ_{tu}	Tensão de falha à tração do modelo coesivo
σ_u	Resistência global, tensão última
σ_u^*	Tensão última fractal, tensão de tração re-normalizada
τ	Tensão de cisalhamento

1 INTRODUÇÃO

Durante a década de 1960, introduziu-se um conjunto alternativo de métodos computacionais que não usam equações diferenciais ou integrais para descrever o problema. Dependendo do elemento individual introduzido, tais como partículas, agentes ou moléculas, foram inventados métodos, como por exemplo, de dinâmica molecular (MD), elementos discretos, análise de deformação descontínua (DDA) ou similares. Neste processo surgiu a mecânica computacional descontínua, a qual agora é uma parte integrante da pesquisa de ponta em nanotecnologia nos mais diversos processos industriais [Munjiza, 2009].

A simulação numérica de problemas de dano e fratura é sempre um tema de investigação ativa. Os métodos dos elementos finitos (MEF) e de elementos de contorno (MEC) são os melhores métodos desenvolvidos neste campo (ver, por exemplo, Anderson, 2005; Aliabadi e Rooke, 1991). No entanto, estes métodos se baseiam em uma abordagem contínua e, assim, a modelagem de nucleação e propagação da trinca pode ser uma tarefa complicada. Em contraste, pode-se argumentar que os métodos discretos têm a habilidade natural para introduzir descontinuidades de uma maneira muito direta e intuitiva, basta romper a ligação entre seus componentes discretos. Além disso, métodos discretos oferecem uma estrutura conveniente para dar conta da desordem da microestrutura do material por meio de modelos estatísticos. Esse recurso representa uma vantagem em relação aos modelos tradicionais de micromecânica contínua que adotam técnicas de homogeneização para converter um material desordenado em um modelo contínuo equivalente. Esta abordagem, razoável no estado puro, não é realista na presença de fenômenos de cooperação entre os defeitos existentes e/ou microfissuras [Rinaldi *et al.*, 2008]. Dentro deste contexto, explora-se neste trabalho, a aplicação do Método dos Elementos Discretos formado por barras, e como lidar com problemas de dano e fratura.

A versão do Método dos Elementos Discretos formado por barras utilizado neste trabalho (doravante DEM) consiste na discretização do contínuo em barras que formam uma treliça espacial regular, como a que se ilustra na Figura 1.1, onde massas equivalentes são concentradas nos nós, e as rigidezes das barras são equivalentes ao contínuo que tentam representar. Leis uniaxiais de dano permitem modelar fratura e dano anisotrópico com relativa facilidade. Aplicações em diversos campos da Engenharia podem ser mencionadas, entre elas a resolução de problemas dinâmicos de cascas sujeitos a cargas impulsivas [Riera e Iturrioz, 1995, e 1998], estudo da fratura em fundações elásticas apoiadas sobre solos moles [Schnaid

et al., 2004], simulação da geração e posterior propagação de sismos [Dalguer *et al.*, 2001], estudo do efeito de escala em concreto e rochas [Rios e Riera, 2004, Miguel *et al.*, 2008 e Iturrioz *et al.*, 2009]; cálculo de parâmetros fractomecânicos [Barrios D'ambra *et al.* 2007, Kostaski *et al.*, 2008 e 2009]. Relacionado diretamente com o estudo da microestrutura de materiais compostos é possível citar o trabalho realizado por Batista, 2007, que analisou com DEM a microestrutura de um ferro fundido nodular formado por nódulos de grafite dispersos numa matriz ferrosa, e no estudo do efeito de escala de materiais quase frágeis [Rios e Riera, 2004, Iturrioz *et al.*, 2007, Miguel *et al.*, 2008, Iturrioz *et al.*, 2009, Miguel *et al.*, 2010 e Iturrioz *et al.*, 2011].

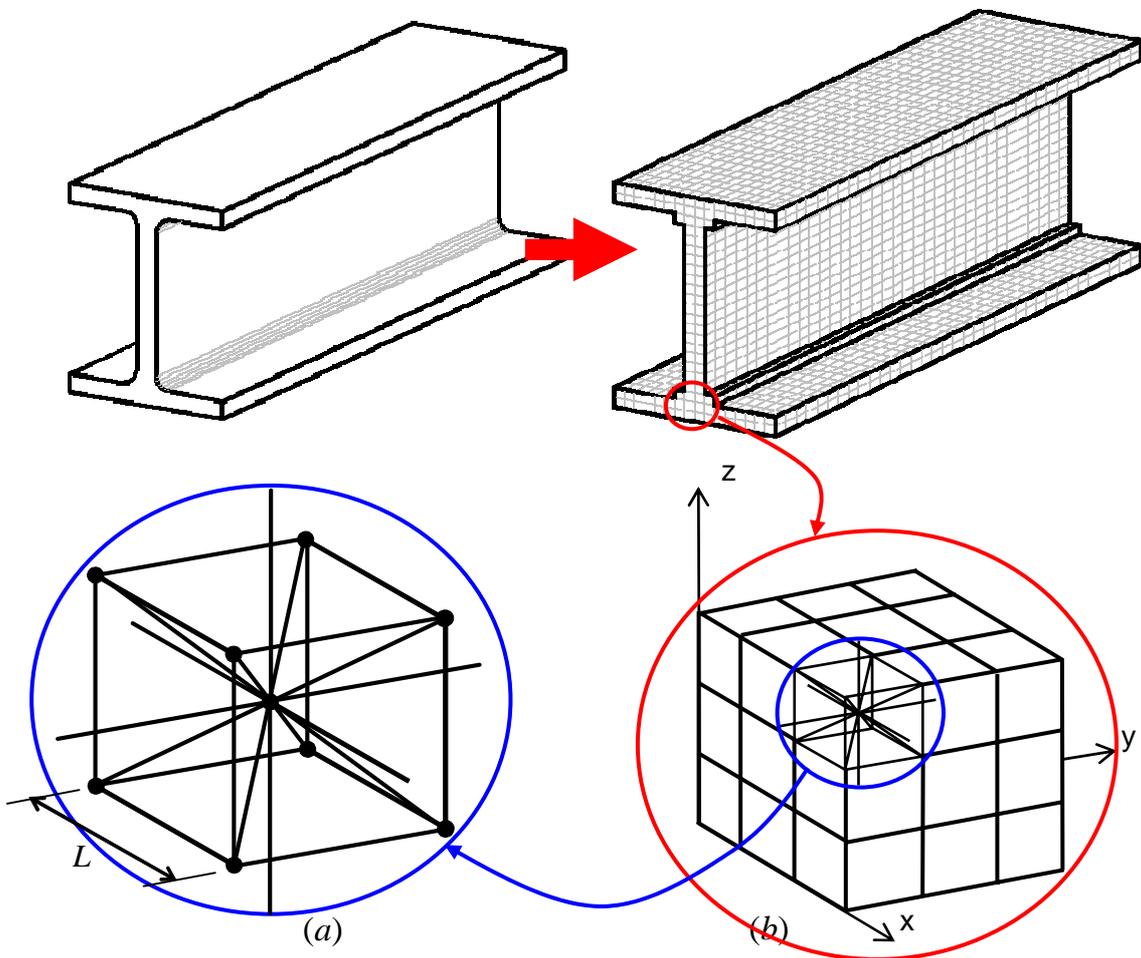


Figura 1.1 – Discretização do contínuo com o DEM. Treliça espacial regular utilizada no método.

1.1 Objetivos

O objetivo geral desta Tese é desenvolver o Método dos Elementos Discretos formado por barras (DEM), para assim torná-lo uma ferramenta mais eficiente na resolução de problemas de interesse na Engenharia.

Como objetivos específicos, podem-se citar:

- a) Implementar modificações e desenvolver novas leis constitutivas das barras para permitir mais flexibilidade na calibração do modelo;
- b) Comparar os resultados obtidos com o DEM para modelar materiais quase frágeis com o enfoque Multifractal proposto por Carpinteri [Carpinteri *et al.*, 2002].
- c) Implementar o DEM dentro do ambiente de trabalho do Sistema *Abaqus*, dando assim mais flexibilidade na resolução de problemas de maior complexidade;

Cada um dos objetivos específicos indicados é desenvolvido de forma mais detalhada, a seguir.

- a) Tendo mais alternativas de leis constitutivas, é possível utilizar a que melhor se ajuste à resposta mecânica do material simulado com o modelo. É vista, também, a influência que pode ter a lei constitutiva elementar nos resultados, principalmente no efeito de escala. Com esta implementação, aumenta a aplicabilidade do DEM, dando assim flexibilidade para modelar corretamente o comportamento de fratura e fragmentação em sólidos quase frágeis (materiais com microestrutura desordenada que exibem localização do dano), como por exemplo, concreto, rocha e cerâmicos.
- b) A comparação do DEM com a Teoria Multifractal proposta por Carpinteri *et al.*, 2002, refere-se a um dos desafios atuais em mecânica computacional.

Este problema está solucionado somente quando o sistema estudado apresenta localização induzida pela geometria (identação, entalhe ou fissura pré-existente), e ou pelas condições de contorno. Neste caso, os métodos numéricos atingem objetividade dos resultados com relação da discretização utilizada sem maiores problemas. Dentro do âmbito do DEM é possível citar os resultados que se ilustram na Figura 1.2, apresentados em detalhe em Iturrioz *et al.*, 2009, onde a localização se consegue mediante a condições de contorno.

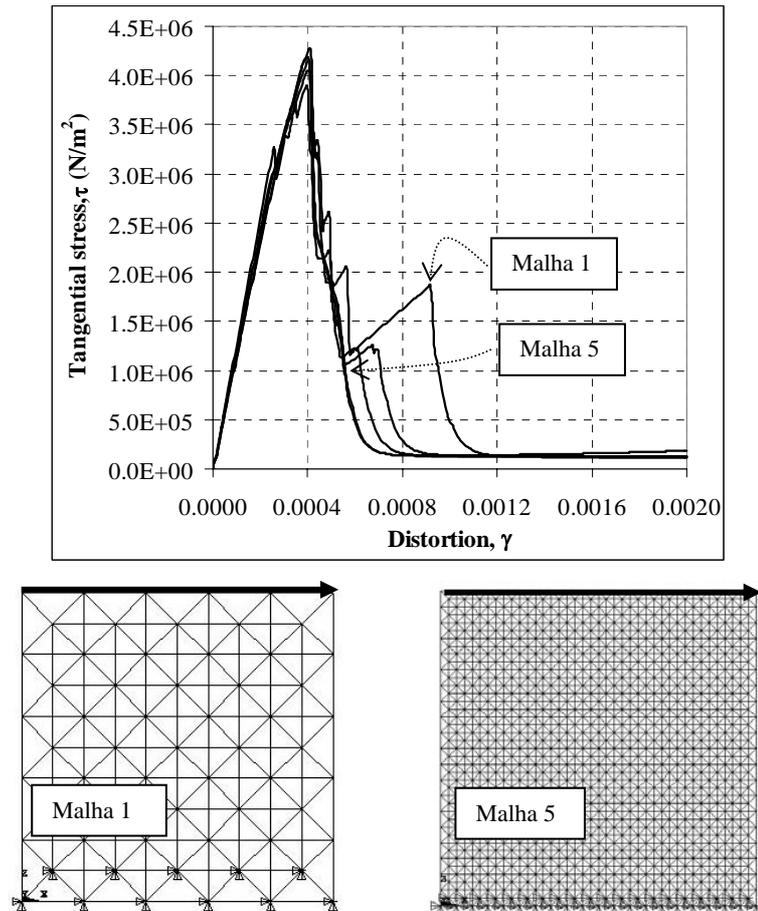


Figura 1.2 – a) Tensão tangencial vs distorção para um cubo de 1m calculadas utilizando cinco malhas diferentes, b) Malha 1, 5×5×5 módulos cúbicos, c) Malha 5: 20×20×20. Em todos os casos se gera uma fissura grande próxima à borda inferior, com danos pequenos em outros lugares [Iturrioz *et al.*, 2009].

O que não está solucionado em nenhum método numérico é como obter a objetividade do método com relação da discretização quando, no problema analisado, a localização não é induzida. Trabalhos realizados com o DEM como Miguel *et al.*, 2010; Iturrioz *et al.*, 2009; Puglia *et al.* 2010, entre outros, salientam este problema. Por outro lado, o professor Carpinteri tem desenvolvido uma teoria chamada de *Teoria Multifractal* que explica o efeito de escala de propriedades de materiais quase frágeis, tais como a tenacidade do material, a tensão e deformação de ruptura, sem a restrição de ter localização induzida pela geometria e/ou as condições de contorno.

No desenvolvimento deste objetivo específico, se verificaram os aspectos da teoria Multifractal no DEM. Apresentam-se ideias sobre como têm que ser realizadas alterações ao modelo constitutivo empregado no DEM para obter a objetividade dos resultados com a mudança da malha, utilizando elementos dessa teoria.

c) Outra dificuldade encontrada nos desenvolvimentos realizados com o DEM é a grande limitação na geração de exemplos com geometrias mais complexas, e inclusão de não linearidades relacionadas a condições de contorno e relações constitutivas. Por isto, aparece o terceiro objetivo específico. Como estratégia para contornar esta limitação, propõe-se incorporar a versão do DEM dentro do Sistema *Abaqus*. Desta forma é aberta a possibilidade de utilizar a combinação de elementos finitos junto com o DEM para modelar assim problemas de geometria mais complexa. Por outro lado, pode-se aproveitar a livreria de materiais do *Abaqus* para testar outras leis de comportamento para as barras do DEM. Também é incorporada a possibilidade de estudar problemas de contato, sem nenhum custo adicional. Para atingir este objetivo, considera-se fundamental realizar aplicações de um grau de complexidade elevada, para que desta forma fique em evidencia as vantagens da implementação realizada.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho desenvolvido é apresentado em seis capítulos, sendo o primeiro a Introdução. No capítulo 2, apresenta-se a fundamentação teórica e revisão bibliográfica onde é exposto um breve comentário sobre a mecânica de fratura e uma introdução à Teoria Multifractal. No capítulo 3, é apresentada a base teórica do DEM, as diferentes leis constitutivas já utilizadas e implementadas durante o doutorado, e a forma em que é introduzida a aleatoriedade intrínseca do material. Comenta-se também sobre trabalhos paralelos que procuram deixar a aleatoriedade independente da discretização assim como a forma de medir os índices de dano no método. A forma de calcular parâmetros referentes à lei de escala Multifractal no DEM é apresentada no capítulo 4, onde também é mostrada a influência das diferentes leis constitutivas elementares no efeito de escala de corpos submetidos a tração. No capítulo 5, apresenta-se a introdução do DEM dentro do sistema *Abaqus* e são expostos exemplos de aplicação que permitem validar a implementação. Finalmente, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões obtidas ao longo do transcurso da tese. Nos Apêndices são apresentadas, em detalhes, três aplicações realizadas no DEM-*Abaqus* que ilustram as vantagens desta implementação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, encontra-se a introdução teórica juntamente com a revisão bibliográfica realizada para compreender o tema aqui abordado, efeito de escala. A este efeito, realiza-se uma breve introdução à mecânica de fratura, logo é mostrada a lei coesiva de Hillerborg, que é amplamente utilizada para modelar materiais suscetíveis de falha utilizando a mecânica de fratura. O problema do efeito de escala é explicado por intermédio de duas teorias que explicam este fenômeno, a teoria de Bažant e a lei de escala Multifractal. Como nesta tese é estudado o efeito de escala sob a óptica desta última lei, a mesma se encontra mais explicada. Uma base teórica fractal e a lei coesiva fractal, que, em oposição à lei coesiva de Hillerborg, mostra invariância com o tamanho, necessárias para compreender melhor a lei de escala Multifractal, são encontradas também neste capítulo.

2.1 Introdução à mecânica de fratura

Usualmente, nos problemas de engenharia, para verificar a segurança de uma estrutura, calcula-se a tensão máxima equivalente a que se encontra submetida, $\sigma_{m\acute{a}x\ eq}$, por alguma teoria de resistência (von Mises, Tresca, Rankine entre outras). Esta é comparada com o valor de tensão de ruptura equivalente $\sigma_{rup\ eq}$, que caracteriza a ruptura de um corpo de prova do mesmo material que terá uma geometria simples e normalizada, a qual é submetida a um valor de tensão, também simples e normalizado. A tensão máxima equivalente, $\sigma_{m\acute{a}x\ eq}$, é uma função da geometria, das condições de contorno e das cargas aplicadas (σ), enquanto que a tensão de ruptura equivalente, $\sigma_{rup\ eq}$, depende do material e das condições em que foi feito o teste experimental para obtê-la (temperatura T , velocidade de aplicação da carga $\dot{\sigma}$).

O sucesso da aplicação deste procedimento tradicional de cálculo depende do uso de um coeficiente de segurança (γ) que seja suficientemente grande, para evitar falhas provocadas por qualquer aspecto que não seja levado em conta no cálculo, e suficientemente pequeno, para evitar um peso excessivo ou consumo de material não necessário, para minimizar seu custo. Estes coeficientes são escolhidos com base na experiência acumulada [Anderson, 2005; Kaninnen e Popelar, 1985].

Tem-se então:

$$\sigma_{max\ eq}(\text{Geometria, Cond. de contorno, } \sigma) \leq \sigma_{rup\ eq}(\text{material, } T, \dot{\sigma})/\gamma \quad (2.1)$$

Se a estrutura analisada possui defeitos, para valores de cargas relativamente pequenos, o valor das tensões equivalentes nas proximidades das pontas dos defeitos será

muito elevado para a Mecânica Linear Elástica. Ainda assim, está comprovado que as estruturas com defeitos resistem, embora neste caso não seja possível utilizar a expressão (2.1) para dimensionar as mesmas, porque sempre se verificara que $\sigma_{máx\,eq} \geq \sigma_{rup\,eq}$. Então, para analisar estruturas com defeitos, uma solução seria comparar parâmetros do material e da estrutura que não sejam diretamente tensões equivalentes. Esta expressão terá que ser função de um parâmetro alternativo, denominado Z . Na estrutura em análise, Z será função das condições de contorno aplicadas, da geometria e do tamanho da trinca (a), a qual será comparada com o valor deste parâmetro Z_{mat} medido no momento de colapso em um corpo de prova com geometria e condições de contorno simples. Assim, a expressão de dimensionamento equivalente à equação (2.1), mas considerando um meio com trincas será:

$$Z(a, \text{Cond. de contorno, Geometria,}) \leq Z_{mat}(\text{material, } T, \dot{\sigma})/\gamma \quad (2.2)$$

Quando a expressão (2.2) se verifica, considera-se que a trinca não propaga em forma instável.

Existem várias propostas para o parâmetro Z , duas válidas dentro da chamada Mecânica de Fratura Elástica Linear (MFEL). Os conceitos da mecânica de fratura elástica linear são aplicáveis àqueles materiais com trincas que obedecem à lei de Hooke e cujo comportamento global tem caráter linear e elástico. Para estes, a teoria estabelece uma descrição quantitativa da criticidade do defeito analisado proporcionando uma predição da vida útil das estruturas.

Como foi mencionado, na MFEL existem duas maneiras de encarar o estudo:

- Critério energético de Griffith ou critério global: se baseia na determinação da energia disponível para o avanço ou extensão instável da trinca pré-existente, que se obtém ao fazer um balanço energético em toda a estrutura.
- Critério do fator de intensidade de tensões de Irwin ou critério local: se baseia na determinação do estado de tensões da estrutura nas proximidades da ponta da trinca.

A Mecânica de Fratura Elástica Linear (MFEL) é válida sempre que a deformação não linear do material seja confinada em uma pequena região próxima da ponta da trinca. Em muitos materiais é virtualmente impossível caracterizar o comportamento da fratura com MFEL, e se requer um modelo alternativo de mecânica de fratura.

Assim, dentro da mecânica de fratura não linear, a qual considera a interação da propagação instável de uma trinca com a plasticidade, apresentam-se dois parâmetros clássicos, a saber:

- A integral J , proposta por Rice em 1968, que se considera como parâmetro global que envolve também o balanço energético da estrutura em análise;
- O Crack Opening Displacement (COD), parâmetro introduzido por Wells em, 1961, que é considerado também como um parâmetro local.

Detalhes sobre características destes parâmetros podem ser encontrados em textos clássicos de mecânica da fratura entre eles podem-se citar: Anderson, 2005; Kaninnen e Popelar, 1985; Aliabadi e Rooke, 1991.

Na atualidade existem alternativas diferentes, porém, ainda não consolidadas para levar em conta a plasticidade na ponta da trinca, como ser:

- O δ_5 (versão do COD) é um método apresentado por Heinz Schwalbe e o grupo GKSS [Schwalbe *et al.*, 2005 e Schwalbe, 2010].
- O Crack Tip Open Angle (CTOA), ângulo da ponta da trinca. [Newman e James, 2001, e Newman *et al.*, 2003].
- O critério da densidade de energia de deformação (do inglês SED), desenvolvido por Sih [Sih, 1975].

Estes parâmetros descrevem as condições da ponta da trinca em materiais onde já não é válido o comportamento elástico linear, e cada um pode ser utilizado como um critério de falha. Os valores críticos do COD, δ_5 , ou da integral J dão uma medida da tenacidade à fratura, inclusive para relativamente grandes quantidades de plasticidade na ponta da trinca. Existem limites para a aplicação destes parâmetros, mas estes limites são muito menos restritivos que os requisitos de validade da MFEL.

2.2 Lei coesiva de Hillerborg

O comportamento do concreto, assim como de outros materiais com microestrutura desordenada, que exibem localização do dano (chamados materiais quase frágeis), é descrito satisfatoriamente pelo modelo de fissuras fictícias ou coesivo, introduzido por Hillerborg *et al.*, 1976. De acordo com este modelo, o material pode ser caracterizado por duas leis constitutivas: uma relação tensão-deformação (σ - ϵ), válida para o material sem dano, e uma relação tensão-apertura da trinca (COD, crack opening displacement), (σ - w), a chamada lei coesiva (Figura 2.1). Esta, descreve como decai a tensão desde seu máximo valor até zero, com a variação da distância entre as faces da trinca desde zero até o deslocamento crítico w_c . A área debaixo da curva tensão-COD representa a energia gasta em criar uma superfície de fratura (G_f). Se a duas porções nas quais o espécime é separado experimentam descarga

elástica, o trabalho total realizado para dividir o espécime pode ser considerado exatamente igual ao produto de G_f pela área fraturada.

Infelizmente, ensaios de tensão uniaxial em espécimes de concreto [Carpinteri e Ferro, 1994; van Vliet e van Mier, 2000] mostraram que os parâmetros do material que caracterizam o modelo coesivo são funções do tamanho da estrutura. Este comportamento particular é geralmente referido como *efeito do tamanho*.

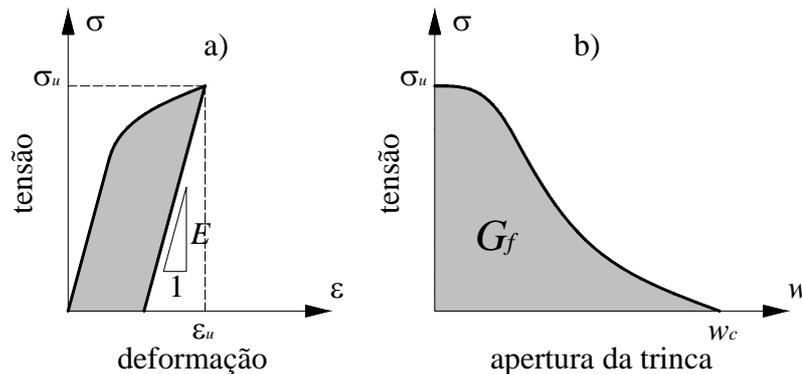


Figura 2.1 – Modelo coesivo de Hillerborg, a) curva tensão-deformação elástica, b) lei coesiva tensão-COD.

2.3 Fractalidade

Mandelbrot, 1982, definiu *fractal* como um sistema organizado para o qual a dimensão de Hausdorff excede a dimensão topológica ou euclidiana. Assim, o conceito de fractalidade se remonta às tentativas de medir o tamanho de objetos nos quais as definições tradicionais da geometria euclidiana falham.

A natureza mesma apresenta vários exemplos nos quais a dimensão não é inteira. Assim, o perfil das montanhas, o contorno das nuvens, as costas, os padrões dos rios, as crateras da lua, o sistema arterial, os relâmpagos e até a forma de plantas e frutas podem ser representadas com fractais com dimensão entre 1 e 2. Existem outros exemplos da natureza que podem ser representados por uma dimensão fractal entre 2 e 3, como, por exemplo, esponjas, espuma, as dobras do cérebro e até a massa do universo. Na Figura 2.2, mostram-se alguns destes exemplos da natureza.

Da mesma forma, a superfície de ruptura dos materiais pode ser representada por um fractal com dimensão entre 2 e 3, como foi encontrado para metais por Mandelbrot *et al.*, 1984, e para o concreto por Saouma *et al.*, 1990. A superfície resistente do material correspondente ao o pico de tensões também pode ser representada com um fractal com dimensão entre 1 e 2, como é apresentado por Carpinteri, 1994a e 1994b.

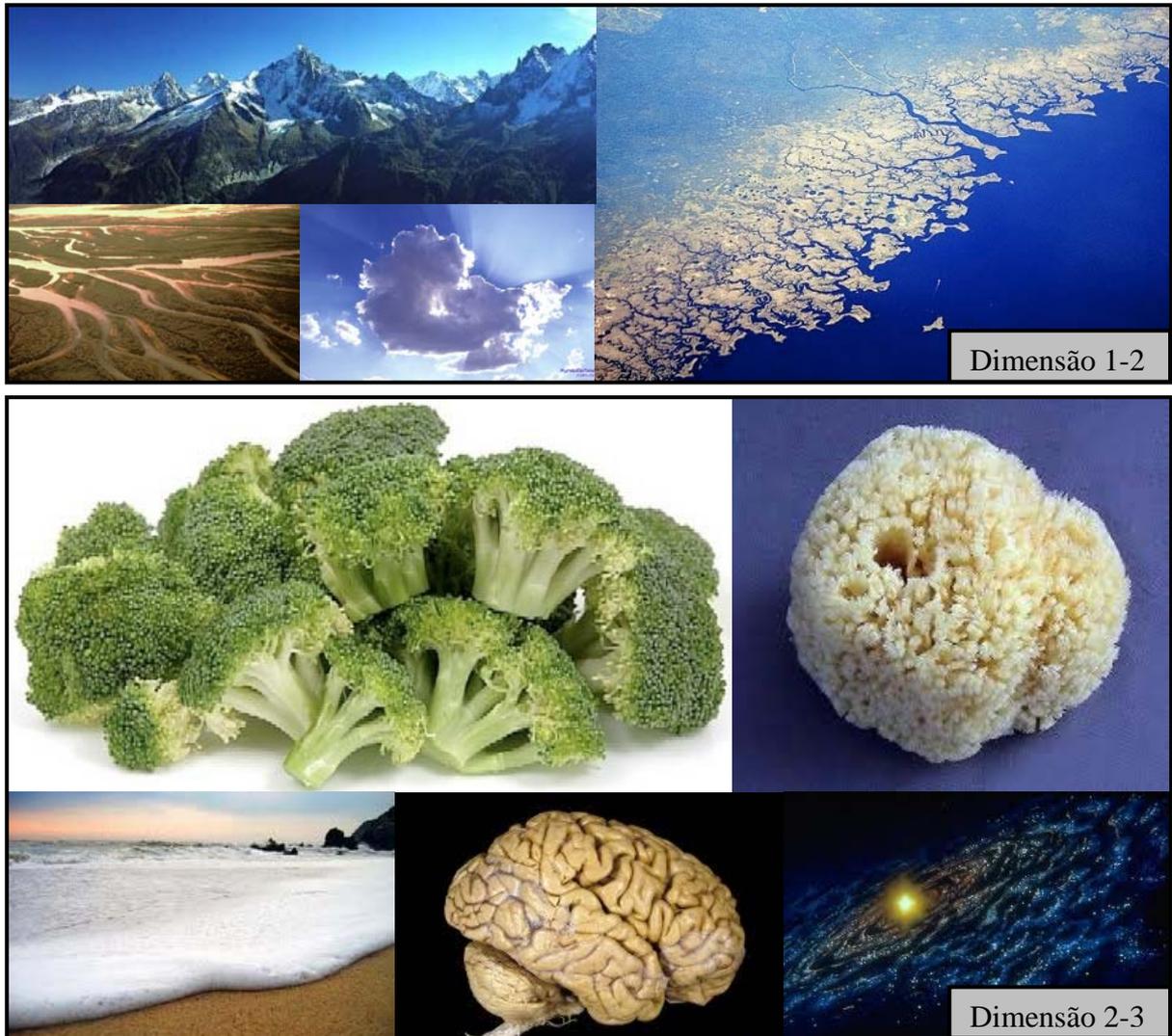


Figura 2.2 – Exemplos de fractais na natureza.

2.4 Lei coesiva independente da escala

Como explicado em 2.2, o modelo original de Hillerborg está baseado na suposição que ambos, o COD crítico w_c e a tração última σ_u são independentes do tamanho da estrutura. Desafortunadamente, resultados experimentais mostram que isto não é verdade. Consequentemente, a lei coesiva clássica não pode ser considerada como uma propriedade do material se analisado um amplo intervalo de escalas.

Para superar esta limitação, Carpinteri *et al.*, 2002, apresentam um modelo associado à lei linear elástica (Figura 2.3a), válida para o material não danificado, que é uma relação entre tensões e deformações fractais, admitindo que σ_u^* e ε_c^* são parâmetros realmente independentes da escala. De um ponto de vista técnico, é interessante notar que a energia de

fratura fractal G_f^* pode ser obtida como a área debaixo do diagrama de descarga de tensão-deformação fractal (Figura 2.3b):

$$G_f^* = \int_0^{\varepsilon_c^*} \sigma^* d\varepsilon^* \quad (2.3)$$

Durante o regime de descarga, isto é, quando a maior parte da dissipação ocorre, σ^* diminui de um valor máximo σ_u^* ate 0, enquanto ε^* aumenta de 0 a ε_c^* . Entretanto, as partes não danificadas da barra mantêm descargas elásticas. O diagrama $\sigma^* - \varepsilon^*$ é chamado lei coesiva fractal ou independente da escala, mostrado na Figura 2.3b. Contrariamente à lei clássica de Hillerborg, que é sensível com o tamanho da estrutura, esta curva é uma propriedade exclusiva do material.

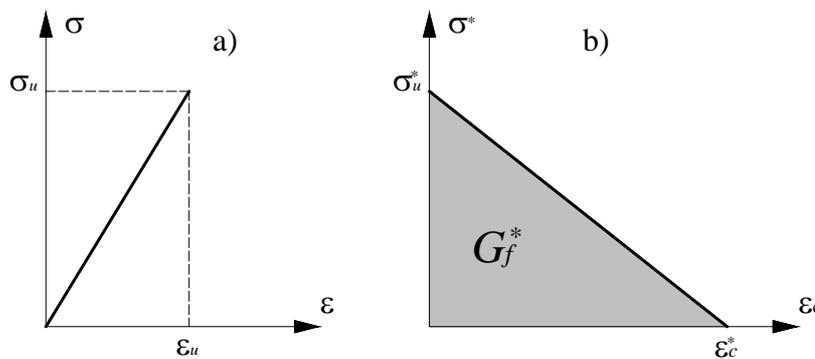


Figura 2.3 – Modelo coesivo independente da escala.

A seguir, apresentam-se como se obtém estes três parâmetros independentes da escala utilizados na teoria fractal.

Para isto é importante salientar que, como comentam Carpinteri *et al.*, 2002 e 2003, Carpinteri e Chiaia, 2002, todos os conjuntos de fractais na natureza mostram morfologias auto-similares aleatórias, no sentido de que o seu aspecto parece estatisticamente o mesmo (e não exatamente iguais, como no caso dos fractais matemáticos) sob mudanças na escala de observação. Além de aleatoriedade têm que ser esclarecidos dois aspectos a mais, que são peculiares a todas as estruturas fractais naturais, a presença de um limite superior e um limite inferior no intervalo de escala e, conseqüentemente, a transição inevitável que ocorre do regime fractal (desordenado) a níveis microscópicos para um regime Euclidiano (homogêneo) em escalas maiores. Este ponto em particular é tratado quando se analisa a Lei Multifractal (2.6.2).

2.4.1 Resistência à tração fractal

Resultados experimentais sobre a microestrutura porosa do concreto [Carpinteri *et al.*, 1999] levaram a acreditar em uma modelação consistente do fenômeno de dano no concreto através da geometria fractal. Em particular, podem ser usados conjuntos fractais lacunares (que possuem uma dimensão fractal Δ_σ menor que a topológica) para modelar um fenômeno ocorrendo no volume, como um fluxo de tensões em um meio poroso submetido a cargas de tração. Deste ponto de vista, a secção transversal resistente rarefeita gerada com a evolução do dano correspondente ao progressivo aumento de tensões de tração, pode ser modelada por um conjunto fractal lacunar estocástico de dimensão Δ_σ , com $1 < \Delta_\sigma \leq 2$. Da geometria fractal, é sabido que a medida Euclidiana aparente (área) de conjuntos lacunares é dependente da escala e tende a zero quando a resolução aumenta. Estes conjuntos apresentam área zero e comprimento infinito. Assim, a definição de tensão de Cauchy não pode ser aplicada. Será realizado um procedimento de re-normalização sobre este conjunto autossimilar, onde é possível ver que a dimensão fractal é menor do que a topológica.

Considere-se, por simplicidade, um conjunto fractal determinístico (conjunto de Cantor terço meio), e um caso bidimensional. Assim, a dimensão fractal cai para um valor $0 < \Delta_\sigma \leq 1$. Como é mostrado na Figura 2.4, a secção transversal fractal está representada em diferentes escalas de ampliação. Nota-se que, refinando a escala de observação, a secção resistente, em cada etapa, é representada por uma quantidade menor que o valor nominal da “superfície”.

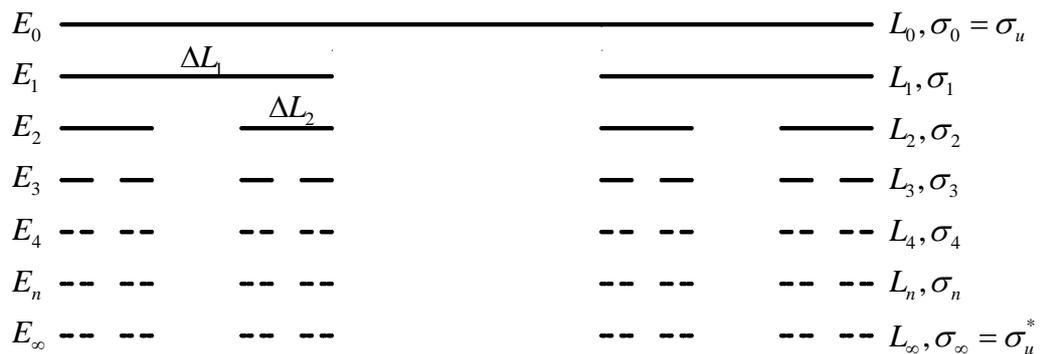


Figura 2.4 – Re-normalização das tensões de tração sobre uma secção resistente fractal lacunar.

Ao nível E_0 (macro nível), este espaço se parece com uma superfície lisa (comprimento = L_0) e toda a secção resistente parece transmitir as tensões através do corpo. Ao nível E_1 , verifica-se que a secção resistente é reduzida devido ao dano a

$L_1 = 2\Delta L_1 = (2/3)L_0 < L_0$, enquanto no nível E_2 , torna-se $L_2 = 4\Delta L_2 = (4/9)L_0 < (2/3)L_0$, e assim por diante, E_n idealmente tende a zero no limite representado pelo conjunto fractal adequado (E_∞). Este enfraquecimento da secção transversal autossimilar é devido à presença de poros, vazios, trincas e inclusões em todas as escalas de comprimento, e sua extensão depende também da natureza evolutiva do dano material.

A cada escala de observação, pode-se associar uma micro-tensão fictícia σ_n , que é considerada como o esforço realizado na escala n . Por outro lado, a força total externa F é um parâmetro “macro”, no sentido de que é independente da escala de observação, uma vez que ela tem que satisfazer a condição de equilíbrio global. Assim, verifica-se a seguinte igualdade:

$$F = \sigma_0 L_0 = \sigma_1 N_1 \Delta L_1 = \sigma_2 N_2 \Delta L_2 = \dots = \sigma_n N_n \Delta L_n = \dots \quad (2.4)$$

Onde N_n é o número de elemento no nível n , cada um com comprimento ΔL_n ($N_n \Delta L_n = L_n$).

Generalizando para qualquer par de escalas subsequentes:

$$\sigma_n N_n \Delta L_n = \sigma_{n+1} N_{n+1} \Delta L_{n+1} \quad (2.5)$$

Da equação anterior segue que:

$$\sigma_n = \frac{N_{n+1}}{N_n} \frac{\Delta L_{n+1}}{\Delta L_n} \sigma_{n+1} \quad (2.6)$$

A expressão (2.6) representa a transformação de re-normalização, relacionando a micro-tensão na escala n com a mesma quantidade na escala $n+1$. Seja p a razão de similaridade ($p = 3$ para o conjunto de Cantor na Figura 2.4):

$$\frac{\Delta L_{n+1}}{\Delta L_n} = \frac{1}{p} \quad (2.7)$$

A partir das relações fundamentais da geometria fractal [Mandelbrot, 1982], a dimensão fractal da projeção da secção resistente pode ser deduzida como:

$$\Delta_\sigma = \frac{\ln\left(\frac{N_{n+1}}{N_n}\right)}{\ln(p)} \quad (2.8)$$

Onde $\Delta_\sigma = 0.63$ no caso do conjunto triádico de Cantor (Figura 2.4).

Pode-se interpretar que a tensão de tração nominal em cada escala depende estritamente do comprimento da escala própria:

$$\sigma_n = \sigma(\Delta L_n) \quad (2.9)$$

Utilizando as expressões (2.7) e (2.9), a expressão (2.6) fica:

$$\sigma(\Delta L_n) = \frac{N_{n+1}}{N_n} \frac{1}{p} \sigma\left(\frac{\Delta L_n}{p}\right) \quad (2.10)$$

Além disso, no contexto dos fenômenos críticos (invariância de escala), pode-se expressar a dependência assintótica de σ_n com a escala como uma relação de uma lei de potencia ($\sigma(\Delta L_n) \approx (\Delta L_n)^x$), com que a expressão (2.10) pode ser reformulada de seguinte forma:

$$(\Delta L_n)^x = \frac{N_{n+1}}{N_n} p^{-(x+1)} (\Delta L_n)^x \quad (2.11)$$

que serve para qualquer par de escalas seguintes devido à invariância de escala no ponto crítico (ponto fixo na transformação de re-normalização). Este tipo de universalidade corresponde, no nosso caso, para um espaço monofractal. A equação (2.11) resolvida em x , a fim de extrair o expoente de escala crítica, é:

$$x = \log_p \left(\frac{N_{n+1}}{N_n} \right) - 1 = \frac{\ln \left(\frac{N_{n+1}}{N_n} \right)}{\ln p} - 1 \quad (2.12)$$

Substituindo a expressão (2.8) em (2.12):

$$x = \Delta_\sigma - 1 = -d_\sigma \quad (2.13)$$

que representa o expoente crítico para o comportamento de escala da tensão à tração de ruptura em relação ao comprimento:

$$\sigma(\Delta L_n) \approx (\Delta L_n)^{d_\sigma} \quad (2.14)$$

No caso geral tridimensional, todas as dimensões de comprimento tem que ser aumentadas em 1 e o expoente crítico torna-se igual a $\Delta_\sigma - 2$. A equação (2.14) ainda é válida obviamente, desde que o expoente fractal ou decremento fracionário, d_σ , seja sempre um número positivo entre 0 e 1.

A fim de obter uma quantidade física independente de escala, está-se, portanto, obrigado a abandonar as dimensões físicas habituais de σ_u ($[F][L]^{-2}$) e ir para a tensão de tração re-normalizada que se caracteriza por dimensões físicas não-inteiras:

$$\sigma_u^* = [F][L]^{-(2-d_\sigma)} \quad (2.15)$$

É interessante notar que o mesmo resultado pode ser obtido a partir da hipótese de invariância de escala e considerando uma sequência de escalas de observação. A primeira escala de observação é a macroscópica, sendo A_0 a área transversal nominal ($A_0 = b^2$) e $\sigma_0 = \sigma_u$ a tensão de tração convencional, calculada como o cociente da carga máxima e a área nominal. Por outro lado, a área efetiva não tem um valor único e é dependente da escala. Enquanto a escala de observação assintótica é definida como a microscópica (fractal) onde $A_\infty = A^*$ é a medida, no sentido de Hausdorff, do conjunto fractal e σ_u^* a tensão de tração re-normalizada definida na expressão (2.15).

$$F = \sigma_u A_0 = \sigma_1 A_1 = \dots = \sigma_u^* A^* \quad (2.16)$$

A tensão fractal de tração σ_u^* é uma constante verdadeira do material, isto é, é invariante com a escala (ver a representação gráfica da re-normalização na Figura 2.5). Da definição da medição de Hausdorff, se b é a dimensão característica da secção transversal, chega-se à seguinte relação:

$$A_0 \approx b^2, \quad A^* \approx b^{2-d_\sigma} \quad (2.17)$$

Das expressões (2.16) e (2.17) encontra-se que a carga máxima sustentável aumenta com o tamanho do espécime de acordo com b^{2-d_σ} em vez de b^2 .

$$\sigma_u = \sigma_u^* b^{-d_\sigma} \quad (2.18)$$

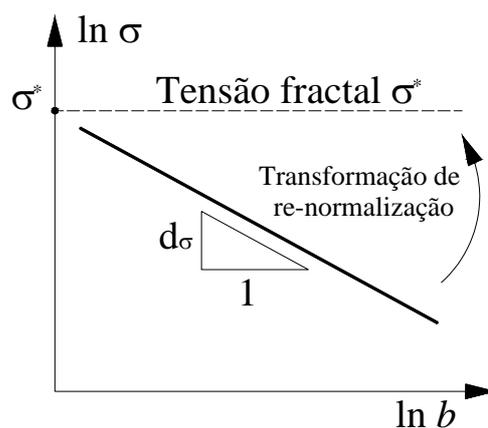


Figura 2.5 – Efeito de escala fractal da tensão nominal e interpretação gráfica da transformação de re-normalização.

É mais interessante extrair da expressão (2.18) a lei fractal de escala da tensão nominal de tração σ_u e colocá-la na forma logarítmica:

$$\ln \sigma_u = \ln \sigma_u^* - d_\sigma \ln b \quad (2.19)$$

o que implica linearidade no diagrama bi-logarítmico, com inclinação igual a $-d_\sigma$ (Figura 2.5). A última expressão representa o bem conhecido efeito de escala decrescente na resistência à tração, como já foi detectada experimentalmente por diversos autores, como cita Carpinteri *et al.*, 2002.

Resultados experimentais e teóricos permitem afirmar que d_σ pode variar entre um limite inferior, 0 (isto é, σ_u^* segurando sua dimensão canônica $[F][L]^{-2}$ e ausência do efeito de escala na tensão de tração), e um limite superior, 1/2 (σ_u^* com dimensões do fator de intensidade de tensões $[F][L]^{-3/2}$ e efeito de escala máximo, que é o caso da mecânica de fratura elástica linear).

Assim, é mostrado que o conceito de Hausdorff da mensurabilidade não-inteira [Mandelbrot, 1982] é equivalente ao conceito de re-normalização das quantidades físicas.

2.4.2 Deformação crítica fractal

Levando a atenção para uma secção transversal simples do espécime completo, pode-se notar que o dano é muitas vezes não localizado em uma secção simples, mas é distribuído sobre uma banda finita. Como é explicado em 2.6.1, baseado nesta hipótese, Bažant desenvolveu a teoria de bandas de fissuração. Sabendo que a espessura das bandas onde é localizado o dano está relacionada com a máxima dimensão do agregado, isto significa que é independente da escala. Como explica Carpinteri *et al.*, 2002, outros autores encontraram padrões fractais nas bandas, pelo que assumem que o dano no meio heterogêneo apresenta um padrão fractal.

Considere-se agora uma estrutura simples, uma barra sujeita a tração, onde, aplicada a carga máxima, as deformações de dilatação tendem a se concentrar em bandas fractais de dano, enquanto o resto do corpo sofre descarga elástica. Se, de maneira simplificada, assume-se que as deformações (dentro da banda) são localizadas em secções transversais cuja projeção no eixo longitudinal é dada por um conjunto fractal determinístico, por exemplo, pelo conjunto de Cantor, a função deslocamentos até a ruptura pode ser representada pelo gráfico da escada de Devil. Este último gráfico é uma função fractal singular que é sempre constante

exceto nos pontos correspondentes ao conjunto de Cantor (Figura 2.6a). As deformações definidas da forma clássica não tem sentido nos pontos de singularidade.

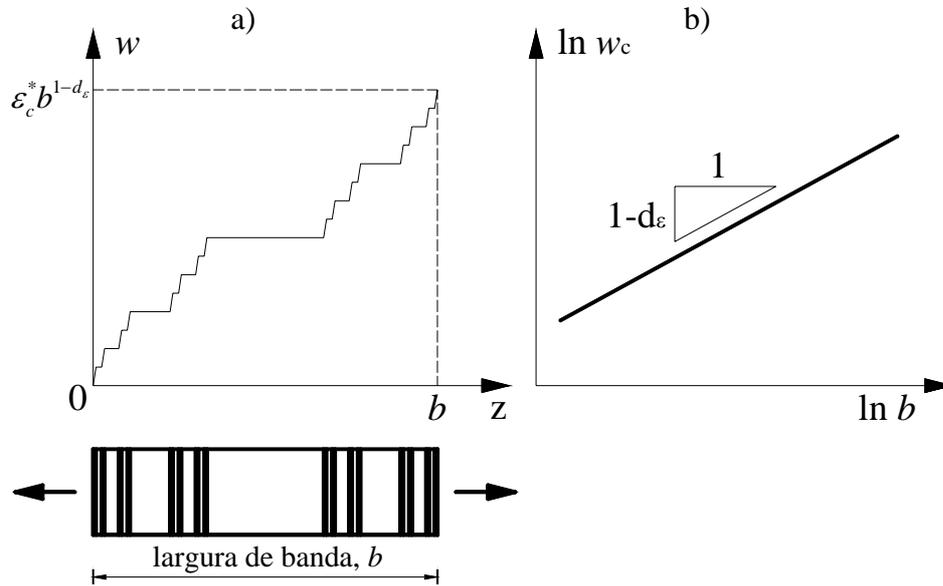


Figura 2.6 – a) localização de deformações fractais, b) lei de escala para o deslocamento crítico w_c .

Seja $\Delta_\varepsilon = 1 - d_\varepsilon$ a dimensão fractal da projeção lacunar das seções danificadas. Como Δ_ε pode ser menor ou igual a 1, o decremento fracionário ou expoente fractal, d_ε , está compreendido entre 0 e 1. Pode-se calcular o deslocamento crítico w_c como o produto da tensão nominal à ruptura ε_c vezes a largura nominal b da banda danificada. Por outro lado, a medição Euclidiana da banda danificada é dependente da escala. Assim, de acordo com a medição fractal da linha de projeção do dano, a elongação total da banda danificada até a ruptura pode ser obtida pelo produto de medição fractal $b^{(1-d_\varepsilon)}$ do conjunto de Cantor vezes a deformação crítica fractal ε_c^* :

$$w_c = \varepsilon_c b = \varepsilon_c^* b^{1-d_\varepsilon} \quad (2.20)$$

Devido à homogeneidade dimensional, a deformação crítica fractal ε_c^* tem uma dimensão física anômala $[L]^{d_\varepsilon}$. A deformação fractal crítica é uma constante real do material, isto é, o único parâmetro invariante com a escala que governa a cinemática da banda fractal. A lei de escala fractal do deslocamento crítico pode ser obtida da expressão (2.20) e colocada na forma logarítmica:

$$\ln w_c = \ln \varepsilon_c^* + (1-d_\varepsilon) \ln b \quad (2.21)$$

o que implica linearidade no diagrama bi-logarítmico, com inclinação igual a $1-d_\varepsilon$ (Figura 2.6b). Se o tamanho do espécime é modificado, a expressão (2.21) representa um efeito de escala positivo no deslocamento crítico w_c .

O expoente fracionário d_ε está intimamente relacionado com o grau de desordem do processo de dano mesoscópico: quanto menor d_ε maior o desordem que ocorre na cinemática do dano. Quando d_ε varia, o parâmetro de controle cinemático ε_c^* se move desde a deformação crítica clássica ε_c ($[L]^0$) até o COD crítico w_c ($[L]^1$). Portanto, quando $d_\varepsilon = 0$ (dano difuso, comportamento dúctil), obtém-se a resposta clássica, onde o colapso é governado pela deformação canônica crítica ε_c , independente do tamanho da banda b (Figura 2.7a). Neste caso, mantém-se mecanismos de dano contínuo, e o deslocamento crítico w_c é sujeito ao máximo efeito de escala ($w_c \sim b$). Por outra parte, quando $d_\varepsilon = 1$ (dano localizado sobre uma secção transversal simples, isto é, comportamento frágil, Figura 2.7b) o colapso é governado pelo deslocamento crítico w_c , que é independente da escala como na formulação de Hillerborg. Isso significa que $d_\varepsilon = 1$ corresponde à Mecânica de Fratura e o que é mais relevante, que a estrutura se fragiliza com o incremento do tamanho da mesma.

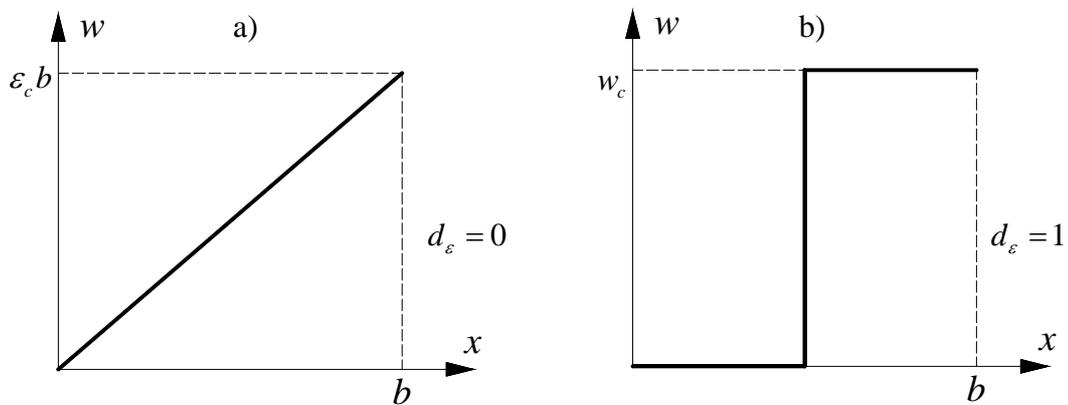


Figura 2.7 – Deformações sobre a barra a) extremadamente difusas e b) extremadamente localizadas.

Resumindo, o colapso ocorre em escalas pequenas quando a deformação ε chega a seu valor limite (ε_c^0), enquanto, a escalas grandes, quando o valor limite para deslocamentos w_c^∞ é alcançado. Em situações intermédias, isto acontece quando a razão entre o deslocamento e o comprimento da barra elevado ao expoente fractal (w_c/b^{1-d_ε}) atinge seu valor limite ε_c^* .

Desde que a influência da desordem microestrutural é maior para tamanhos pequenos, parece razoável admitir d_ε igual a zero para barras muito curtas (máxima desordem, significa,

dano difuso em todo o volume, correspondendo com um comportamento dúctil), e $d_c=1$ para barras muito cumpridas (máximo ordem, significa, localização da fratura somente em uma secção transversal, correspondendo um comportamento frágil).

2.4.3 Energia fractal de fratura

A terceira quantidade mecânica envolvida na lei coesiva, a energia de fratura G_f , que também é dependente da escala. Mais precisamente, G_f aumenta com o tamanho do espécime.

Da mesma forma que para a Resistência à tração fractal, pode ser também aplicada uma transformação de re-normalização para escalar a energia de fratura G_f , devido à variação de escala topológica do espaço de dissipação. Modela-se esta “superfície” por meio de um fractal invasivo determinístico (Figura 2.8). Por razões de simplicidade, refere-se a uma estrutura bidimensional (um perfil), ou seja, a interseção da superfície fractal com um plano vertical. A dimensão fractal, que é maior que 2 no caso da superfície, satisfaz $1 < \Delta_G < 2$ no caso do perfil, e a autossimilaridade, perdendo o caráter aleatório, torna-se uma propriedade determinista.

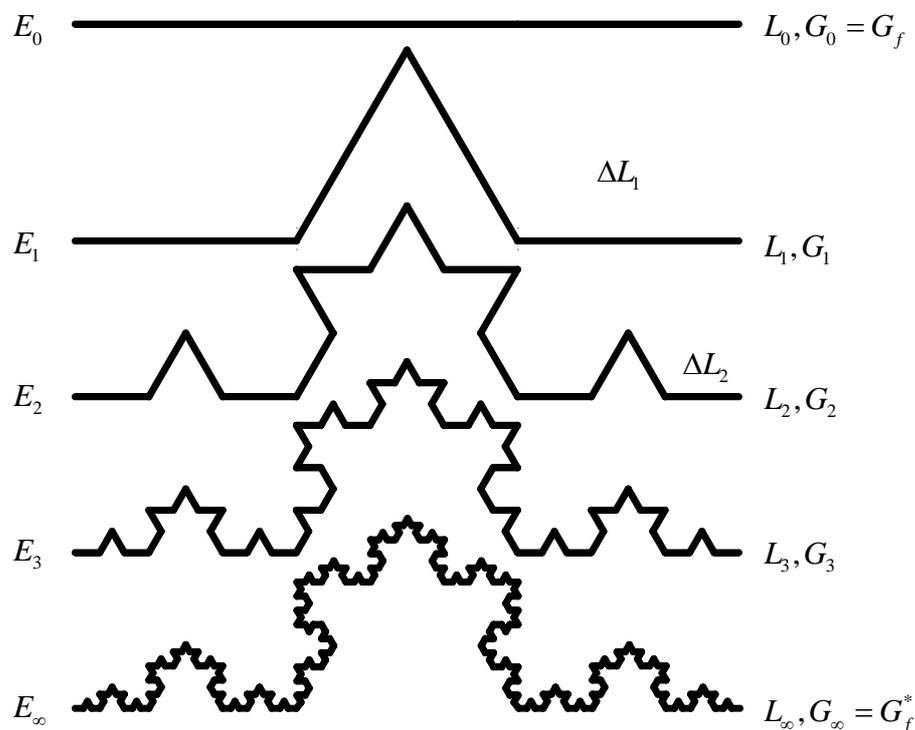


Figura 2.8 – Re-normalização da energia de fratura sobre um espaço de dissipação fractal invasivo.

Seguindo o mesmo raciocínio antes utilizado, considere-se o perfil fractal em diferentes escalas de ampliação (Figura 2.8). Note-se que, refinando a escala de observação, a dissipação de energia implica, em cada etapa, uma quantidade maior de “superfície” nominal. Ao nível E_0 (macro nível), este espaço se parece com uma superfície lisa (comprimento = L_0). Ao nível E_1 pode ser facilmente notado que o comprimento nominal, $L_1 = 4\Delta L_1 = (4/3)L_0 > L_0$, enquanto no nível E_2 , torna-se $L_2 = 16\Delta L_2 = (16/9)L_0 > (4/3)L_0$, e assim por diante. Idealmente, no limite representado pelo conjunto fractal adequado (E_∞) o comprimento tende a infinito. Este incremento autossimilar ($L_{k+1} > L_k$), que vem da microestrutura desordenada do material assim como da forma em que se geram múltiplas microfissuras inclinadas com relação à direção da macrofissura, fornece as dimensões não-inteiras de Hausdorff do espaço no qual ocorre a dissipação de energia.

A cada escala de observação pode ser associada uma energia fictícia da fratura G_n que é considerada como a energia dissipada na escala n durante a formação da uma área de fratura unitária. Por outro lado, a energia total dissipada ΔW é um parâmetro macroscópico, no sentido de que ele é independente da escala de observação, uma vez que tem que satisfazer o balanço energético global com a taxa crítica de liberação de energia de deformação. Assim, as seguintes igualdades devem ocorrer:

$$\Delta W = G_0 L_0 = G_1 N_1 \Delta L_1 = G_2 N_2 \Delta L_2 = \dots = G_n N_n \Delta L_n = \dots \quad (2.22)$$

Onde N_n é o número de elemento no nível n , cada um com comprimento ΔL_n ($N_n \Delta L_n = L_n$). Seguindo assim o procedimento realizado para a re-normalização da resistência à tração fractal, expressa-se a dependência assintótica na escala como uma relação de uma lei de potencia ($G(\Delta L_n) \approx (\Delta L_n)^x$), a hipótese de invariância de escala chega finalmente a:

$$x = \Delta_G - 1 \quad (2.23)$$

Como o espaço fractal de dissipação possui uma dimensão estritamente maior do que a topológica ($\Delta_G = 1.2619$ para o fractal na Figura 2.8), denotando-se por d_G ao incremento dimensional fracionário, ou expoente fractal, em relação ao espaço Euclidiano ($d_G = \Delta_G - 1$), obtém-se:

$$G(\Delta L_n) \approx (\Delta L_n)^{d_G} \quad (2.24)$$

Esta relação expressa o comportamento de escala da energia de fratura nominal em relação ao comprimento. No caso geral tridimensional, todas as dimensões de comprimento

têm que ser aumentadas em 1 e o expoente crítico torna-se igual a $\Delta_G - 2$. A equação (2.24) ainda é válida, visto que o expoente fractal é sempre um número positivo entre 0 e 1.

A fim de obter uma quantidade física independente de escala, obriga-se a abandonar as dimensões físicas habituais de G_f ($[F][L]^{-1}$) e ir para a energia de fratura re-normalizada que se caracteriza por dimensões físicas não-inteiras:

$$G_f^* = [F][L]^{-(1+d_G)} \quad (2.25)$$

Como foi antes mencionado, o mesmo resultado pode ser obtido a partir da hipótese de invariância de escala e considerando uma sequência de escalas de observação. A primeira escala de observação é a macroscópica sendo A_0 a área transversal e $G_0 = G_f$ a energia de fratura convencional, enquanto que a escala de observação assintótica é definida como a microscópica (fractal), sendo $A_\infty = A^*$ a medida, no sentido de Hausdorff, do conjunto fractal e G_f^* a energia de fratura re-normalizada definida na expressão (2.25). Cabe esclarecer que A_0 e G_f são unicamente quantidades nominais ou fictícias, A^* , o domínio de dissipação invasivo, e G_f^* , a energia fractal de fratura, são respectivamente, as variáveis geométricas e físicas reais do processo. Assim, a energia total gasta ΔW , necessária para levar o espécime à falha (invariante com a escala), é encontrada igual a:

$$\Delta W = G_f A_0 = G_1 A_1 = \dots = G_f^* A^* \quad (2.26)$$

Da definição da medição de Hausdorff, se b é a dimensão característica da secção transversal, chega-se à seguinte relação:

$$A_0 \approx b^2, \quad A^* \approx b^{2+d_G} \quad (2.27)$$

Resultando:

$$G_f = G_f^* b^{d_G} \quad (2.28)$$

Ou em forma logarítmica:

$$\ln G_f = \ln G_f^* + d_G \ln b \quad (2.29)$$

o que implica uma escala linear no diagrama bi-logarítmico (ver Figura 2.9). Esta equação representa o efeito tamanho bem conhecido no domínio da energia de fratura.

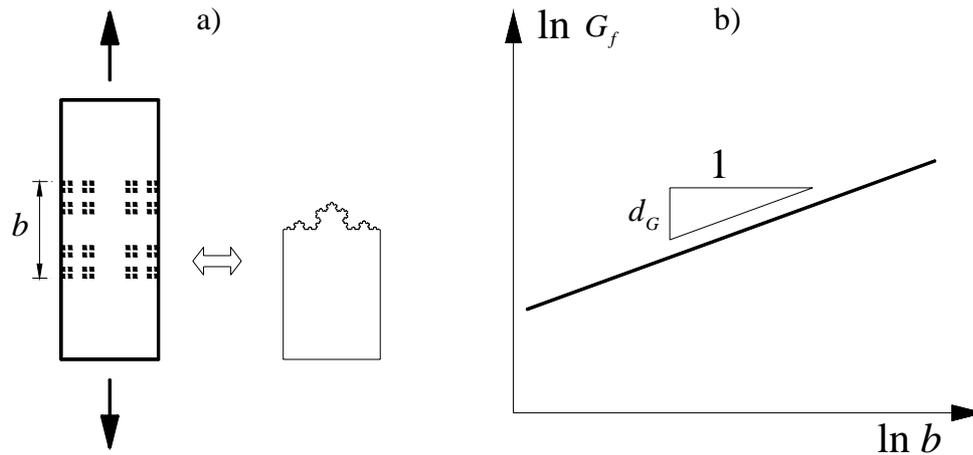


Figura 2.9 – a) Domínio da energia dissipada e b) lei de escala para a energia de fratura G_f .

2.4.4 Relação entre os expoentes de escala

Assumindo que, depois que a carga de pico é alcançada, a energia é dissipada sobre um número infinito de seções lacunares (nas que se desenvolve a deformação crítica fractal) onde a descarga ocorre dentro das bandas danificadas. Durante o regime de descarga, o processo de dano é governado pelas tensões e deformações fractais, de tal maneira que se podem generalizar as expressões (2.18) e (2.19) para quaisquer valores de cargas e deslocamentos, obtendo:

$$\sigma = \sigma^* b^{-d_\sigma}, \quad w = \varepsilon^* b^{1-d_\varepsilon} \quad (2.30)$$

Diferentes de σ_u e w_c , a energia de fratura é uma quantidade interna definida sobre o regime de descarga inteiro, $G_f = \int_0^{w_c} \sigma dw$. Quando aplicada a esta integral, as variáveis apresentadas na expressão (2.30) permitem entender o efeito de escala estrutural da energia de fratura nominal:

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma dw = b^{1-d_\varepsilon-d_\sigma} \int_0^{\varepsilon_c^*} \sigma^* d\varepsilon^* = G_f^* b^{1-d_\varepsilon-d_\sigma} \quad (2.31)$$

A lei que descreve o fator de escala da energia de fratura (Figura 2.9b) é provida da fractalidade do domínio onde a energia é dissipada.

Comparando as expressões (2.28) e (2.30), o valor de d_G pode ser obtido como função de d_σ e d_ε . Portanto, a relação fundamental entre os três expoentes de escala é:

$$d_\sigma + d_\varepsilon + d_G = 1 \quad (2.32)$$

onde todos os expoentes são positivos e menores (ou iguais) a 1. Enquanto d_ε pode atingir todos os valores no intervalo $[0,1]$, d_σ e d_G parecem ser compreendidos entre 0 e $1/2$

(desordem Browniano). A expressão (2.32) coloca uma restrição clara ao máximo grau de desordem. Mais especificamente, confirma que a soma de d_σ e d_G é sempre menor que 1, como foi argumentado por Carpinteri, 1994b, utilizando argumentos dimensionais

Estudos experimentais realizados por Carpinteri e Chaia, 1995, sobre superfícies de fratura do concreto também mostram que a maior desordem possível na microestrutura é representada pela desordem Browniana, no sentido de que uma dimensão fractal igual a 2.5 é o mais elevado no limite da escala microscópica de observação. Além do apresentado anteriormente, tais suposições termodinâmicas são confirmadas, também, pelas magnitudes da dimensão fractal medidas em diferentes materiais e que foram relatadas na literatura, e pela hipótese de que as superfícies Brownianas minimizariam globalmente a dissipação de energia [Carpinteri e Chaia, 1997].

Carpinteri *et al.*, 2002 notaram analogia entre o modelo Cantoriano dos ligamentos materiais lacunares (dimensão = 1.5) e a teoria da turbulência de Kolmogorov, onde uma lei de potência de $2/3$ entra em jogo com a escala. Eles argumentam que deve existir uma conexão entre todos os fenômenos caóticos dissipativos.

2.5 Determinação experimental da dimensão fractal das superfícies de fratura (Δ_G)

Apresentam-se a seguir algumas formas de mensurar a dimensão fractal das superfícies de fratura, uma vez obtida dita superfície. São metodologias usadas experimentalmente, mas que são modificadas para caracterizar também as superfícies de fratura obtidas por métodos numéricos, ou até superfícies resistentes ou localizações de deformações.

Métodos determinísticos e estocásticos podem ser explorados para a medição da dimensão fractal de padrões de fratura. Em princípio, todos eles são equivalentes no limite menor da escala, mas diferem significativamente quando aplicada a perfis digitalizados.

Várias abordagens têm sido propostas para determinar a dimensão fractal invasiva de Δ_G em estudos experimentais [Carpinteri *et al.*, 1999]. É interessante notar que, na literatura, a dimensão fractal de superfícies rugosas é normalmente calculada pela simples extrapolação dos valores das dimensões fractais obtidas de cortes verticais (perfis) ou a partir de seções horizontais [Mandelbrot, 1982].

Baseado no conceito clássico da cobertura de dimensão, originalmente usado por Mandelbrot, 1982, o método de contagem de caixas permite calcular a dimensão fractal de conjuntos fractais lacunares e invasivos. A superfície de fratura é assumida como sendo um fractal invasivo autossimilar em um sentido estatístico. Isto significa que uma representação

tridimensional da superfície $f(x, y, z)$ será estatisticamente semelhante a $f(rx, ry, r^H z)$, onde r é o fator de escala e H é o expoente de Hurst devido à anisotropia no procedimento de dimensionamento.

Como mostrado na Figura 2.10, a dimensão fractal pode ser avaliada a partir da taxa entre o crescimento do número N de prismas, necessários para cobrir toda a superfície, com a diminuição do tamanho d dos prismas elementares (cujo volume é $V = d \times d \times d^H$). A seguinte equação tem:

$$A_{\text{box}} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(1/d)} \quad (2.33)$$

Do ponto de vista prático, a dimensão fractal pode ser avaliada a partir da inclinação da reta de regressão no diagrama bi-logarítmico $\log N$ vs $\log d$.

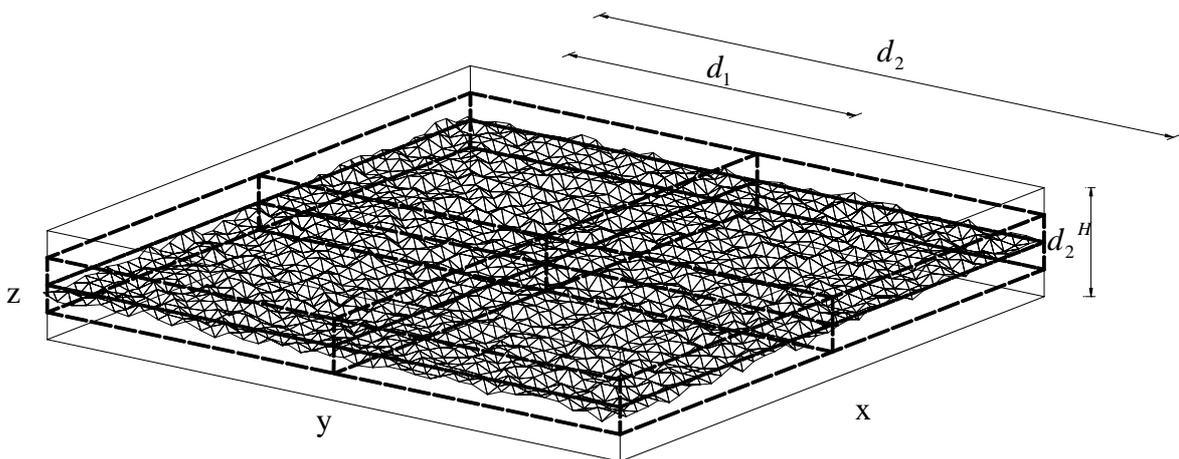


Figura 2.10 – Método de cobertura com caixas.

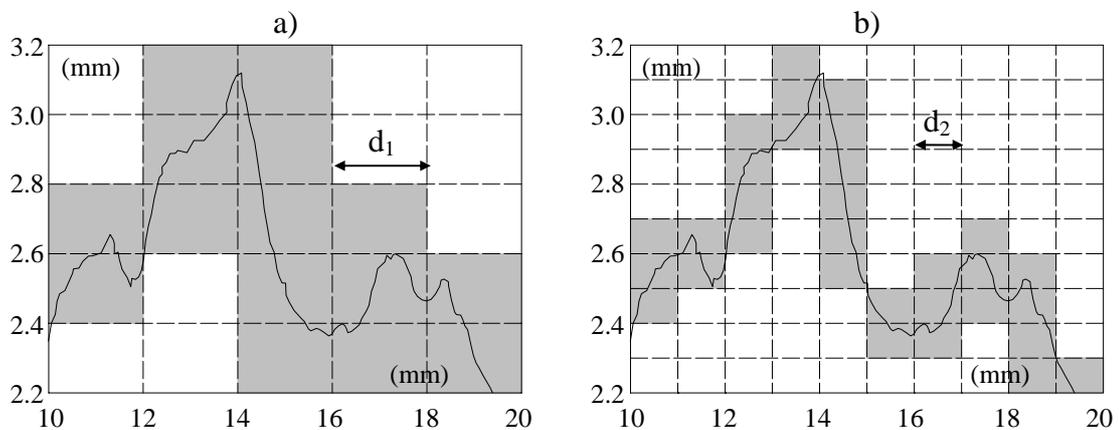


Figura 2.11 – Aplicação do método de contagem de caixa para análise de um perfil de concreto [Carpinteri *et al.*, 1999].

Em princípio, o conceito de cobertura generalizada permite adotar qualquer tipo de formas convexas para realizar a cobertura. Por outro lado, do ponto de vista computacional, são sempre utilizados grades quadradas ou retangulares. Na Figura 2.11, aprecia-se o procedimento para medir o expoente fractal pelo método de contagem de caixas em um perfil de falha em 2D.

Embora o algoritmo de contagem de caixas estime a dimensão fractal a partir da taxa de decremento do volume total de cobertura à medida que aumenta a resolução, o chamado método de *patchwork* aproxima o domínio fractal (que é intrinsecamente não-diferenciável) por elementos de superfície (Figura 2.12). A dimensão fractal *patchwork* Δ_{patch} , originalmente definida por Clarke, 1986, é obtida a partir da taxa de divergência de área aparente de A (a área total dos triângulos) com a diminuição do tamanho dos elementos de superfície. Em outras palavras, o método de *patchwork* tem como objetivo avaliar o mesmo valor-limite, ou seja, a dimensão fractal, a partir de um caminho diferente. Assim, quando o tamanho da grade diminui, a área aparente A aumenta (enquanto a área nominal permanece constante). Com o incremento de resolução, mais e mais detalhes são levados em conta, o que confirma a natureza de dependência da escala da descrição Euclidiana:

$$\Delta_{patch} = 2 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log A(r)}{\log r} \quad (2.34)$$

Na qual r o tamanho do segmento de discretização.

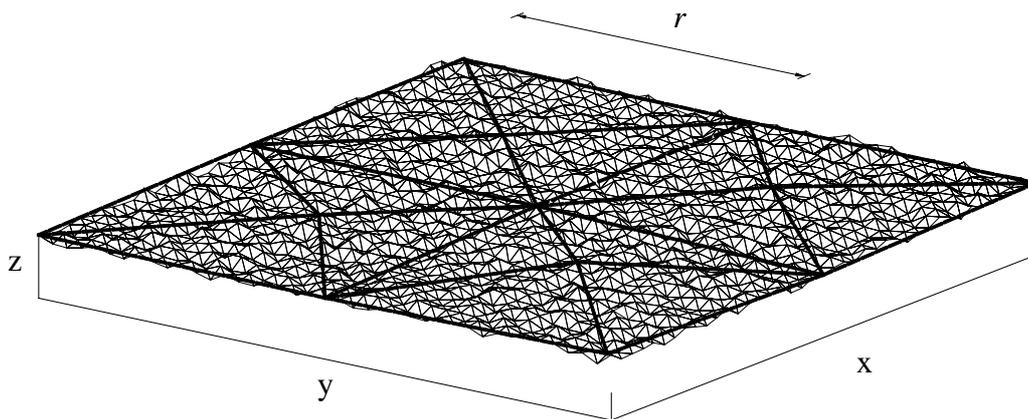


Figura 2.12 – Esquema de aproximação por triangulação, método de *patchwork*.

Outra forma de calcular a dimensão fractal de superfícies de fratura é por um método espectral tri dimensional, projetado especialmente para conjuntos autossimilares [Turcotte, 1992, Carpinteri *et al.*, 1999]. Este é baseado na transformada de Fourier bi-dimensional do

relevo da fratura. O método prevê a dimensão fractal como uma função da potência espectral média, mas não vai ser utilizado no presente trabalho. Para mais informações, recorrer aos autores antes mencionados.

2.6 Efeito de escala

Na mecânica dos sólidos, é necessário que se faça uma distinção entre efeito de escala estrutural e efeito do tamanho nas quantidades mecânicas (aparentes). Sobre o primeiro efeito, uma transição do comportamento dúctil ao comportamento frágil, pode ser evidenciado quando o tamanho da estrutura aumenta. Este tipo de efeito de escala é detectado em todos os materiais utilizados na engenharia (por exemplo, grandes estruturas de aço têm comportamento frágil e pequenos filamentos de vidro apresentam ductilidade). Quando aumenta o tamanho das estruturas, é esperada uma falha catastrófica, desde que a taxa de liberação de energia durante a fratura seja progressivamente maior que a taxa de energia consumida na superfície da fissura. Embora, de fato, a energia acumulada num sólido muda proporcionalmente ao volume $[L]^3$, a energia dissipada para abrir uma fissura muda proporcionalmente à área $[L]^2$. Carpinteri e Chiaia, 1996, demonstraram que esta competição dimensional é suavizada quando a dissipação da energia ocorre também no volume, como é o caso das zonas em que ocorrem dano e plasticidade, ou quando ocorre dentro dos domínios com dimensão fractal maior que 2 (conjuntos intermediários entre superfícies e volumes). Em todos estes casos, um colapso mais dúctil ocorre.

O mais importante efeito de escala nas propriedades nominais dos materiais é o efeito do tamanho da estrutura sobre a resistência aparente [Bažant e Chen, 1997]. Este problema foi inicialmente abordado por Leonardo da Vinci, que pode ser considerado o primeiro a estudar o chamado efeito de tamanho estatístico. Ele afirmou, na verdade, que “se duas cordas têm a mesma espessura, a mais longa é a mais fraca”. A abordagem estatística moderna é baseada no conceito de elo mais fraco, originalmente proposto por Weibull, 1939, e posteriormente, desenvolvida por Freudenthal, 1968, e Carpinteri, 1986, entre outros. Neste contexto, o efeito de tamanho da resistência nominal é fornecido pela probabilidade de encontrar o defeito mais crítico (dependendo do seu tamanho e orientação), o que obviamente aumenta com o acréscimo do tamanho da estrutura.

Atualmente, existem diferentes teorias que levam em conta estes dois efeitos, entre elas, mostram-se na continuação duas delas, que apresentam resultados até antagônicos, a Teoria de Bažant e a Lei de Escala Multifractal.

2.6.1 Teoria de Bažant

Para a Mecânica de Fratura Elástica Linear, a resistência global (σ_u) varia com ($b^{-1/2}$), sendo b uma dimensão de referência que define a escala global. Os critérios de ruptura provenientes da Resistência dos Materiais, bem como da plasticidade, não incorporam qualquer tipo de efeito de escala.

$$\begin{aligned} \sigma_u &\approx b^{-1/2} && \text{MFEL} \\ \sigma_u &= \text{constante} && \text{Resistência dos Materiais} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Segundo Bažant, a análise experimental tem mostrado que para materiais de natureza granular, como o concreto e a rocha, a tendência a uma resistência infinita prevista para corpos de pequenas dimensões não ocorre. O que se observa em tais casos é uma aproximação do critério de tensões críticas da Resistência dos Materiais, enquanto para corpos de grandes dimensões continua sendo válida a MFEL. Assim, o fenômeno do efeito de escala para tais materiais seria melhor representado por uma curva que resulte de uma transição gradual entre os dois critérios. Tal curva é apresentada na Figura 2.13 como a lei não linear de Bažant.

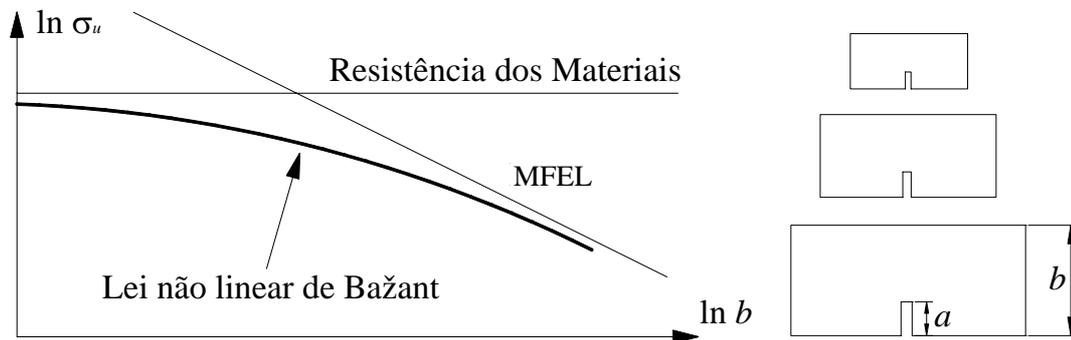


Figura 2.13 – Lei de efeito de escala de Bažant (SEL).

Para corrigir a teoria linear, em 1983, Bažant propôs que o consumo de energia de fratura fosse considerado não apenas proporcional à área de fratura formada, mas também ao volume de uma banda de fissuração hipotética [Bažant e Oh, 1983]. Tal banda seria caracterizada por uma espessura w_c , considerada como propriedade do material. A espessura w_c representa também um limite inferior para as dimensões de elementos de discretização. Tal ideia se justifica pelo fato de que, em materiais compostos, não faria sentido analisá-los localmente, no domínio das fases que os compõem. Como resultado da teoria de Bažant, para corpos de dimensões muito grandes em relação à espessura da banda de fissuração, esta última passa a ser desprezível, aproximando-se então à situação prevista na MFEL.

Nesta lei proposta, chamada lei de efeito de escala para o concreto (do inglês SEL), foram juntados a MFEL e conceitos de análise limite, obtendo:

$$\sigma_u = \frac{Bf_t}{[1+(b/b_0)]^{1/2}} \quad (2.36)$$

Onde f_t é a tensão plástica limite, B e b_0 são duas constantes a serem determinadas em cada caso do ajuste dos dados experimentais.

Bažant assume que a energia potencial total, liberada durante a fratura, é proporcional ao quadrado do comprimento da fissura a , que muda proporcionalmente com o tamanho do espécime b (a/b =constante). Ao mesmo tempo, a energia de dissipação é proporcional a a , devido a que se assume que a espessura da banda fissurada é constante e proporcional ao tamanho máximo do agregado.

Carpinteri e Chiaia, 2002, comentam que diversas análises sobre a sensibilidade da trinca usando o modelo de trinca fictícia de Hillerborg *et al.*, 1976, têm apoiado a SEL de Bažant e que, porque os efeitos de escala estão presentes até mesmo nos corpos sem trincas iniciais, eles acham que a SEL foi erroneamente estendida também para geometrias sem entalhe.

2.6.2 Lei de escala Multifractal

Nos conjuntos naturais fractais, além da aleatoriedade, dois aspectos têm que ser destacados. A presença de um limite superior e um inferior no intervalo de escala e , conseqüentemente, a transição inevitável do regime fractal (desordenado) no nível microscópico para um regime Euclidiano (homogêneo, ordenado) em escalas maiores. O limite superior é representado pelo tamanho macroscópico do conjunto, b , enquanto o inferior está relacionado ao tamanho das menores partículas mensuráveis, sendo estes os grãos no caso dos metais, os cristais no caso das rochas, e os agregados no caso do concreto. Pode-se argumentar que a presença deste comprimento interno, típicos de cada microestrutura, inibe o desenvolvimento de uma escala perfeita autossimilar para toda a faixa de escala. Foi proposto por Carpinteri *et al.*, 1995, ligar o valor do comprimento interno l_{ch} a algum tamanho característico da microestrutura, por exemplo, no caso do concreto, com o tamanho máximo do agregado.

Se espécimes de tamanhos diferentes, feitos do mesmo material, são testados em tensão uniaxial, resultados experimentais mostram que a lei fractal de escala de σ_u e G_f é estritamente válida somente em um intervalo de escala limitado, onde a dimensão fractal pode

ser considerada como constante. A multifractalidade topológica, estritamente conectada com as características dos fractais autossimilares, implica o desaparecimento progressivo de fractalidade ($d_\sigma \rightarrow 0$, $d_G \rightarrow 0$) com o aumento da escala.

Intuitivamente, uma vez que a microestrutura de um material desordenado é a mesma independentemente do tamanho macroscópico do espécime, a influência da desordem nas propriedades mecânicas dependem essencialmente da relação entre o comprimento característico do material, l_{ch} , e o tamanho externo do espécime, b . Portanto, o efeito da desordem microestrutural no comportamento mecânico dos materiais torna-se progressivamente menos importante em grandes escalas, ao passo que representa um elemento fundamental nas escalas menores. Em escalas pequenas, Carpinteri, 1994a, observou que a desordem Browniana parece ser a maior desordem possível, gerando expoentes de escala fractal iguais a $+1/2$ e $-1/2$, para topologias invasivas e lacunares, respectivamente.

Na base destes argumentos físicos e geométricos, Carpinteri propôs, em princípio, dois modelos de leis de escala multifractais (do inglês MFSL), uma para a energia de fratura e outra para a tensão de tração [Carpinteri e Chaia, 1996, e Carpinteri *et al.*, 1995], que podem ser escritos da seguinte forma:

$$G_f(b) = G_f^\infty \left[1 + \frac{l_{ch}}{b} \right]^{-1/2} \quad (2.37)$$

$$\sigma_u(b) = f_t \left[1 + \frac{l_{ch}}{b} \right]^{1/2} \quad (2.38)$$

Estas leis de escala, mostradas na Figura 2.14, são ambas modelos de dois parâmetros, onde o valor assintótico da quantidade nominal (G_f^∞ ou f_t), correspondentes respectivamente à energia nominal de fratura mais alta e à menor tensão de tração nominal, são alcançadas somente no limite de tamanhos infinitos.

O termo adimensional dentro do colchete, que é controlado pelo valor do comprimento característico l_{ch} , representa a influência variável da desordem no comportamento mecânico, assim, quantifica-se a diferença entre a quantidade nominal medida na escala b e o valor assintótico constante. Note a similitude entre as duas leis de escala, onde a única diferença é o sinal no expoente Browniano, $\pm 1/2$, relacionado respectivamente à topologia invasiva ou lacunar.

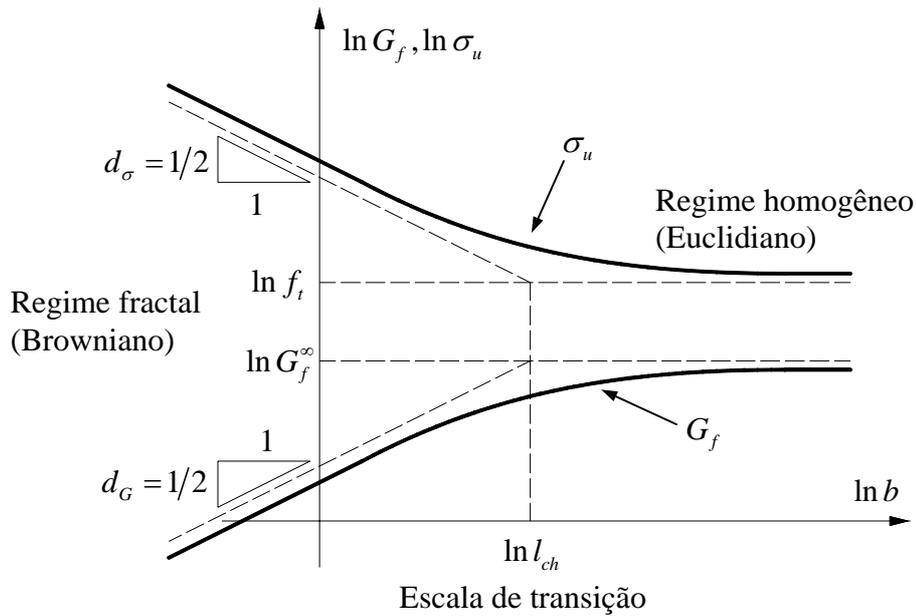


Figura 2.14 – Lei de escala Multifractal (MFSL) para a resistência à tração e a energia de fratura.

Nos diagramas bi-logarítmicos mostrados na Figura 2.14, a transição do regime fractal para o Euclidiano se torna evidente. O limite dessa transição é representado pelo ponto abscissa $\ln l_{ch}$. Observe que a assíntota oblíqua é controlada em ambos os casos por uma quantidade com dimensões de um fator de intensidade de tensões ($[F] [L]^{-3/2}$), significando que MFEL entra em jogo somente quando o tamanho característico a de um microdefeito é comparável com a dimensão externa, b (desordem elevada), enquanto, em escalas maiores, a correlação entre os aumentos de microfissuras leva à homogeneização no limite para tamanhos infinitos (regime ordenado).

O parâmetro comprimento interno torna-se importante quando é comparado o comportamento com a escala de dois materiais diferentes, como é mostrado na Figura 2.15 para a energia de fratura. Pode-se afirmar que, no caso de um material mais refinado, como um composto cerâmico, a MFSL é deslocada para a esquerda em comparação com o caso do concreto, o valor de l_{ch} é muito menor para cerâmicos que para o concreto. Portanto, duas amostras de diferentes materiais, com o mesmo tamanho estrutural b_l , além de, obviamente, mostrar dois valores diferentes de energia nominal de fratura, devem ser estabelecidos em dois regimes de escala diferente. Com referência à Figura 2.15, a amostra de concreto se comporta de acordo com o regime fractal, enquanto a de cerâmica está na região assintótico da MFSL, mostrando um comportamento homogêneo macroscópico. De um modo geral, deve-se determinar, para cada material a faixa adequada de escalas, onde o regime fractal é

predominante e, conseqüentemente, o tamanho mínimo estrutural, para além do qual a resistência local e as flutuações de força são macroscopicamente médias e pode ser determinado um valor constante de energia de fratura.

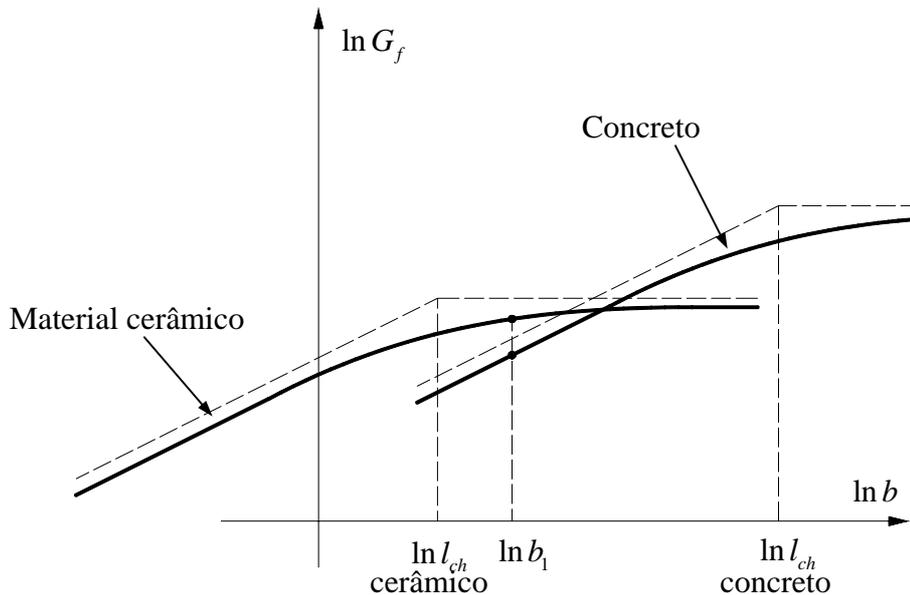


Figura 2.15 – Leis de escala da energia de fratura para dois materiais diferentes.

Como comentado em Carpinteri e Chaia, 1996, no âmbito da mecânica estatística, a dualidade entre G_f e σ_u surge simplesmente considerando a dicotomia entre o termo “entropia”, relacionado à desordem (mecânica e topológica) microestrutural, e um termo “energético”, relacionado com a energia elástica armazenada, na maior parte, em torno da microfissura em propagação. O último termo tende a favorecer a propagação instável de uma trinca pré-existente, enquanto o primeiro tende a espalhar o dano em todo o material. Na competição incessante entre esses termos, o termo entrópico predomina nas fases iniciais do processo de dano (antes do pico de tensões). Por outro lado, além do pico de tensão (região de amolecimento), a desordem é superada pelo termo energético.

Portanto, no regime fractal, onde a influência da desordem é predominante, a resistência nominal à tração σ_u aumenta, sendo produzido pela região ascendente da curva tensão-deformação, enquanto a energia nominal de fratura G_f atinge seu valor máximo em correspondência com o regime homogêneo (Euclidiano), sendo essencialmente igual à área debaixo da região de amolecimento (descendente), que é uma região energética. Note-se que, em um material perfeitamente ordenado, o termo entrópico estaria ausente e a teoria puramente energética de Griffith seria recuperada.

Logo, Carpinteri analisou este comportamento com a escala, para os parâmetros cinemáticos, e mostrou que a deformação nominal crítica ε_c diminui quando o comprimento da barra aumenta (ver expressão 2.20). Incrementando o tamanho, a barra perde progressivamente sua capacidade de deformação (ou ductilidade) e tende a um comportamento mais frágil. Para um determinado material, o expoente fractal d_ε aumenta com o tamanho da barra, desde um valor $d_\varepsilon=0$ (deformação homogênea) até $d_\varepsilon=1$ (deformação altamente localizada). No limite de tamanhos muito grandes ou muito pequenos, o colapso cinemático será governado respectivamente por um deslocamento de abertura puro (w_c^∞) de uma trinca simples ou por uma dilatação pura (ε_c^0) [Carpinteri e Chaia, 1996]

A MFSL para a deformação crítica pode ser escrita como:

$$\varepsilon_c(b) = \varepsilon_c^0 \left[1 + \frac{b}{l_{ch}} \right]^{-1} \quad (2.39)$$

onde ε_c^0 é o valor assintótico da deformação crítica, válida para tamanhos pequenos, e l_{ch} é o comprimento característico, dependente da microestrutura do material e da geometria do teste. A equação (2.39) expressa equivalentemente em termos do deslocamento crítico é:

$$w_c(b) = w_c^\infty \left[1 + \frac{l_{ch}}{b} \right]^{-1} \quad (2.40)$$

desde que $\varepsilon_c^0 = w_c^\infty / l_{ch}$. Juntas as expressões (2.37), (2.38) e (2.40) completam a descrição dos efeitos de tamanho sobre os parâmetros da lei coesiva.

Concluindo, a relação fundamental sobre os três expoentes fractais, que é apresentada na expressão (2.32) e diz que a soma dos três expoentes fractais é igual à unidade, pode ser especificada para várias escalas como:

$$\begin{aligned} \text{MACROESCALA} \quad d_\sigma \cong d_G \cong 0, \quad d_\varepsilon = 1 \\ \text{MESOESCALA} \quad d_\varepsilon + d_\sigma + d_G = 1 \\ \text{MICROESCALA} \quad d_\sigma \cong d_G \cong 1/2, \quad d_\varepsilon \cong 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

A expressão (2.32) é válida em todos os casos. As três MFSL (2.37), (2.38) e (2.40) para estruturas extremadamente pequenas ($b \rightarrow 0$) se tornam respectivamente:

$$G_f = \frac{G_f^\infty}{\sqrt{l_{ch}}} b^{1/2}, \quad \sigma_u = (f_t \sqrt{l_{ch}}) b^{-1/2}, \quad w_c = \frac{w_c^\infty}{l_{ch}} b \quad (2.42)$$

Comparando estas expressões com as equações (2.18), (2.20) e (2.28) se chega a:

$$G_f^* = \frac{G_f^\infty}{\sqrt{l_{ch}}}, \quad \sigma_u^* = f_t \sqrt{l_{ch}}, \quad \varepsilon_c^* = \frac{w_c^\infty}{l_{ch}} \quad (2.43)$$

Estas últimas expressões indicam a relação entre os parâmetros invariantes de escala que governam a falha por tração do concreto a escalas extremamente pequenas e grandes.

Em resumo, na Tabela 2.1, apresentam-se os valores limites dos expoentes de escala e os parâmetros invariantes de escala ε_c^* , σ_u^* e G_f^* . Observe-se que a grandes escalas eles coincidem com os parâmetros da lei coesiva, isto é, o deslocamento crítico de abertura da trinca, a tensão de ruptura à tração e a energia de fratura, enquanto a escalas pequenas suas dimensões físicas mudam, devido ao efeito que produz o comprimento característico do material.

Tabela 2.1 – Valores dos expoentes de escala e os parâmetros do material independentes da escala para estruturas extremadamente pequenas e grandes [Carpinteri *et al.*, 2002].

Pequenas estruturas	Dano Fractal	$d_\varepsilon = 0$	Dano difuso, deformação uniforme na massa, ductilidade	$\varepsilon_c^* = \frac{w_c^\infty}{l_{ch}} \quad [L]^0$
		$d_\sigma = 1/2$	Secção transversal resistente com topologia lacunar na carga máxima	$\sigma_u^* = f_t \sqrt{l_{ch}} \quad [F][L]^{-1.5}$
		$d_G = 1/2$	Energia dissipada em um domínio fractal invasivo	$G_f^* = \frac{G_f^\infty}{\sqrt{l_{ch}}} \quad [FL][L]^{-2.5}$
Grandes estruturas	Mecânica de fratura	$d_\varepsilon = 1$	Dano localizado em um número finito se secções transversais, fragilidade	$\varepsilon_c^* = w_c^\infty \quad [L]$
		$d_\sigma = 0$	Secção transversal resistente bi-dimensional	$\sigma_u^* = f_t \quad [F][L]^{-2}$
		$d_G = 0$	Energia dissipada em superfícies localizadas	$G_f^* = G_f^\infty \quad [FL][L]^{-2}$

2.6.3 Comparação da teoria de Bažant com a lei de escala Multifractal

Carpintri e Chiaia, 1997 e 2002; mostram para vários exemplos a diferença encontrada entre a lei de Bažant (Figura 2.13) e a lei Multifractal (Figura 2.14). Na Figura 2.16 se apresenta uma destas comparações que mostram quantitativamente os resultados obtidos nos outros casos. A primeira diferença claramente visível no gráfico bi-logarítmico é que a curva que representa a lei de Bažant é convexa, enquanto a lei Multifractal proposta por Carpintri é côncava.

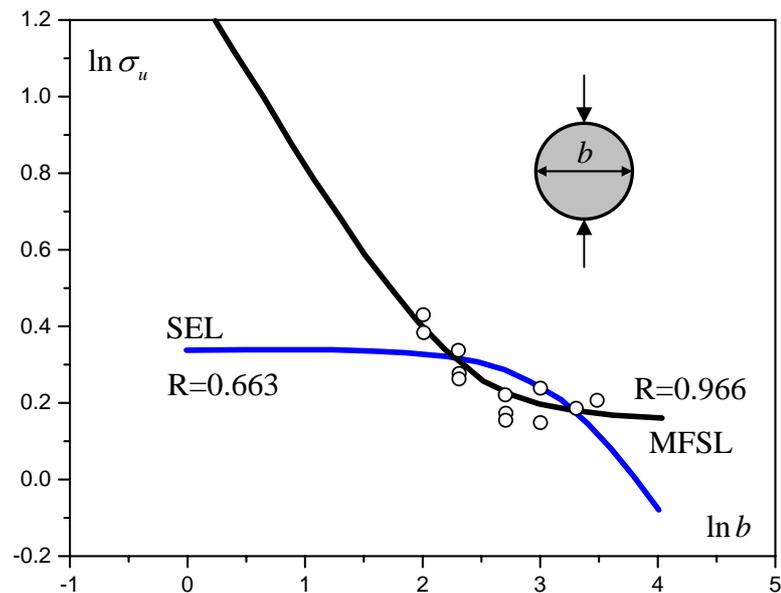


Figura 2.16 – Aplicação da MFSL a dados de tensão ruptura apresentados em Carpinetri e Chiaia, 1997.

3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS

Neste capítulo é apresentado o Método dos Elementos Discretos formado por barras (DEM). É exposta toda a fundamentação teórica do método, bem como a lei constitutiva clássica utilizada, o modelo bilinear ou de Hillerborg, além dos outros modelos e modificações que são implementações originais desenvolvidas nesta Tese (modelo com descarga exponencial, modelo de Weibull, modificação da lei trilinear, descarga plástica). Mostra-se, também, a forma de introduzir o amortecimento e a aleatoriedade.

3.1 Introdução ao Método dos Elementos Discretos

A representação de um sólido contínuo por meio de elementos discretos foi, primeiramente, apresentada no trabalho de Hrenikoff, 1941, que utiliza um arranjo de barras sólidas com essa finalidade. Absi, 1971, desenvolveu uma ideia semelhante e utilizou um arranjo de barras para simular as fundações elásticas e paredes estruturais em edifícios altos. Cundall e Strack, 1979, representaram o contínuo usando elementos discretos para simular o comportamento de solos granulares em problemas geotécnicos.

Mais recentemente, têm sido propostos diversos métodos de elementos discretos para mecânica dos sólidos. Os métodos propostos são essencialmente bidimensionais, e usam arranjos de vigas ou de barras. Entre outros, Schlangen e Garboczi, 1997, e Chiaia *et al.*, 1997, utilizaram arranjos de vigas para estudar os diferentes aspectos da fratura quase frágil dos materiais cimentícios. Por outro lado, formulações discretas com base em arranjos de barras foram introduzidas por: Fraternali *et al.*, 2002, para resolver deformações pequenas num problema contínuo com plano anisotrópico; Slepnyan, 2005, para modelar a propagação de fissuras; Rinaldi e Lai, 2007, e Rinaldi *et al.*, 2008, para estimar os danos e propriedades mecânicas efetivas da microestrutura desordenada. Além disso, os métodos dos elementos discretos foram acoplados ao método dos elementos finitos (MEF) para lidar com problemas de mecânica do dano. Entre outros, Klerck *et al.*, 2004, desenvolveram uma formulação explícita MEF- elementos discretos, para modelar fratura discreta em geo-materiais quase frágeis, enquanto Cottrel *et al.*, 2003, introduziram um método MEF- partícula discreta, para modelar o desgaste de materiais cerâmicos quando submetidos a cargas dinâmicas de grande escala.

A formulação do método dos elementos discretos é baseada nos estudos realizados por Nayfeh e Hefzy, 1978. O objetivo desse trabalho foi determinar as propriedades equivalentes

de um contínuo elástico ortotrópico para modelar painéis compostos por um grande número de pequenas barras interconectadas. Usando a abordagem oposta, isto é, representar um contínuo ortotrópico utilizando uma treliça regular de barras (ver o conceito de homogeneização inversa, proposto por Sigmund, 1994), os resultados obtidos por Nayfeh e Hefzy, 1978, foram utilizados para desenvolver um método discreto, com finalidade de resolver problemas de mecânica dos sólidos. Desta forma, há aplicações do Método dos Elementos Discretos formado por barras (DEM) para modelar: cascas submetidas a cargas impulsivas [Riera e Iturrioz, 1995 e 1998], fratura de fundações elásticas em leitos de areia fofa [Schnaid *et al.*, 2004]; fratura dinâmica [Miguel *et al.*, 2010]; geração e propagação de sismos [Dalguer *et al.*, 2001]; efeito de escala em concreto [Rios e Riera, 2004] e rochas [Miguel *et al.*, 2008 e Iturrioz *et al.*, 2009] e cálculo de parâmetros de fratura [Kosteski *et al.*, 2009].

3.2 O Método dos Elementos Discretos formado por barras

No Método dos Elementos Discretos formado por barras (DEM) o contínuo é representado por intermédio de um arranjo espacial de barras com a massa concentrada nas suas pontas. A configuração utilizada por Nayfeh e Hefzy, 1978, é mostrada na Figura 3.1a e 3.1b. O módulo básico é construído interconectando 20 elementos de barra e nove nós. Cada nó tem três graus de liberdade, dados pelas componentes do vetor deslocamento referido a coordenadas globais. No caso de um material elástico isotrópico, a área da seção transversal do elemento longitudinal (aqueles que definem os eixos do módulo e aqueles que conectam os nós internos) no modelo discreto equivalente, A_l , é:

$$A_l = \phi L^2 \quad (3.1)$$

onde L é o comprimento do módulo cúbico. De forma similar, a área dos elementos diagonais, A_d , é:

$$A_d = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \phi L^2 \quad (3.2)$$

o coeficiente $2/\sqrt{3}$ leva em conta a diferença no comprimento entre os elementos diagonais e longitudinais. Para sólidos isotrópicos, $\phi = (9 + 8\delta)/(18 + 24\delta)$ e $\delta = 9\nu(4 - 8\nu)$, onde ν é o módulo de Poisson do sólido. É importante notar que para $\nu = 0.25$ a equivalência com o contínuo isotrópico é completa. Por outro lado, aparecem diferenças nos termos de cisalhamento para $\nu \neq 0.25$, como se mostra no Apêndice A. Os detalhes do cálculo da seção

transversal equivalente por unidade de comprimento das barras longitudinais e diagonais das equações (3.1) e (3.2) podem ser encontradas nos trabalhos de Nayfeh e Hefzy, 1978, e Dalguer *et al.*, 2001 e foram explicadas detalhadamente também em Hayashi, 1982, Iturrioz, 1995 e Kostaski, 2008.

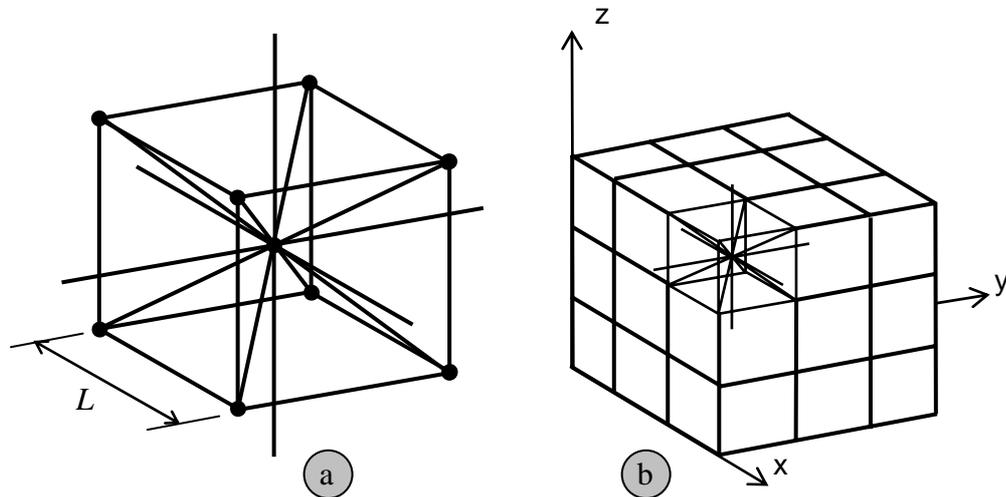


Figura 3.1 – Discretização utilizada no DEM: *a)* modelo cúbico básico, *b)* geração do corpo prismático.

Como foi mencionado, a massa do corpo simulado é discretizada e colocada nos nós da treliça, sendo o valor da mesma correspondente ao volume de influência de cada nó.

O sistema de equações resultante de aplicar a segunda lei de Newton em cada nó tem a forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}(t) - \mathbf{P}(t) = 0 \quad (3.3)$$

onde \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{x}}$ são os vetores deslocamentos, velocidade e aceleração nodais, e \mathbf{M} e \mathbf{C} são as matrizes de massa e amortecimento respectivamente. Os vetores $\mathbf{F}(t)$ e $\mathbf{P}(t)$ contêm as forças internas e externas que atuam nas massas nodais. Como as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{C} são diagonais, as equações (3.3) não são acopladas. Para integrar as equações (3.3) no domínio do tempo é utilizado um esquema de integração explícita de diferenças finitas. É interessante notar que, desde que as coordenadas nodais são atualizadas a cada passo de tempo, grandes deslocamentos são contabilizados naturalmente.

Na Figura 3.2 se apresenta um esquema do funcionamento do DEM.

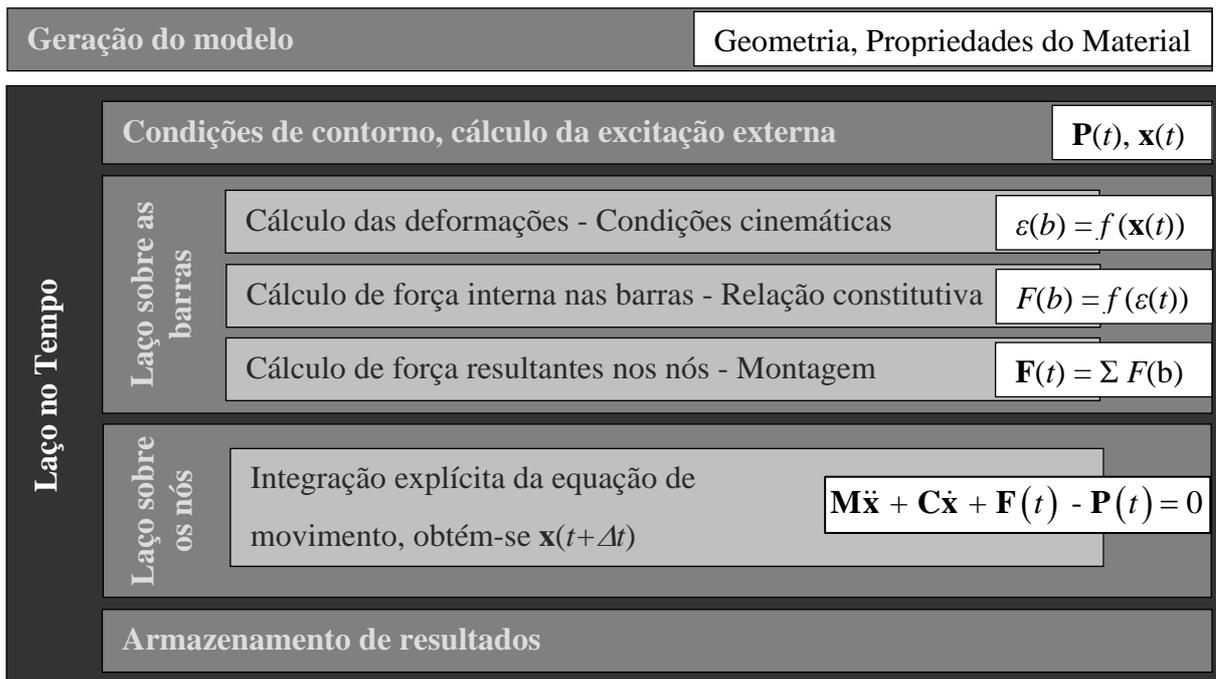


Figura 3.2 – Esquema de funcionamento do DEM.

Seguindo o critério de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [ver, por exemplo, Bathe, 1996], a estabilidade do esquema de integração é assegurada limitando o incremento de tempo. Para a presente implementação, os elementos em piores condições (isto é, aqueles que requerem um Δt menor) são os diagonais. Assim, considerando a relação entre os comprimentos dos dois tipos de barras, a limitação do incremento de tempo é:

$$\Delta t \leq \frac{0.6L}{C_\rho} \quad (3.4)$$

onde C_ρ é a velocidade de propagação da onda longitudinal,

$$C_\rho = \sqrt{E/\rho} \quad (3.5)$$

A convergência do DEM para elasticidade linear e instabilidade elástica foi verificada por Hayashi, 1982.

3.3 Modelo constitutivo não-linear para dano de material.

Para levar em conta a energia de fratura dissipada no processo de ruptura, impõe-se como condição que a energia dissipada pela fratura do material contínuo e sua representação discreta sejam equivalentes. Com este propósito, é considerada a fratura de um espécime

cúbico de dimensões $L \times L \times L$ (ver Figura 3.3a). A energia dissipada pela fratura de uma amostra contínua de material devido a uma ruptura paralela a uma de suas faces é:

$$\Gamma = G_f \Lambda = G_f L^2 \quad (3.6)$$

onde Λ é a área de fratura atual. Por outro lado, a energia dissipada quando o módulo do DEM de dimensões $L \times L \times L$ é dividido em duas partes leva em conta a contribuição de cinco elementos longitudinais (quatro coincidentes com os eixos do módulo e um interno) e quatro elementos diagonais (sendo seu comprimento, $L_d = 2/\sqrt{3} L$), ver Figura 3.3b. Assim, a energia dissipada pelo módulo do DEM pode ser escrito como a seguir:

$$\Gamma_{\text{DEM}} = G_f \left(4 \cdot 0.25 \cdot c_A + c_A + 4 \cdot c_A \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) L^2 \quad (3.7)$$

onde o primeiro termo na soma considera os quatro elementos dos eixos (o coeficiente 0.25 é devido ao fato de que cada elemento é compartilhado por quatro módulos), o segundo termo considera o elemento longitudinal interno, e o terceiro termo considera a contribuição dos quatro elementos diagonais.

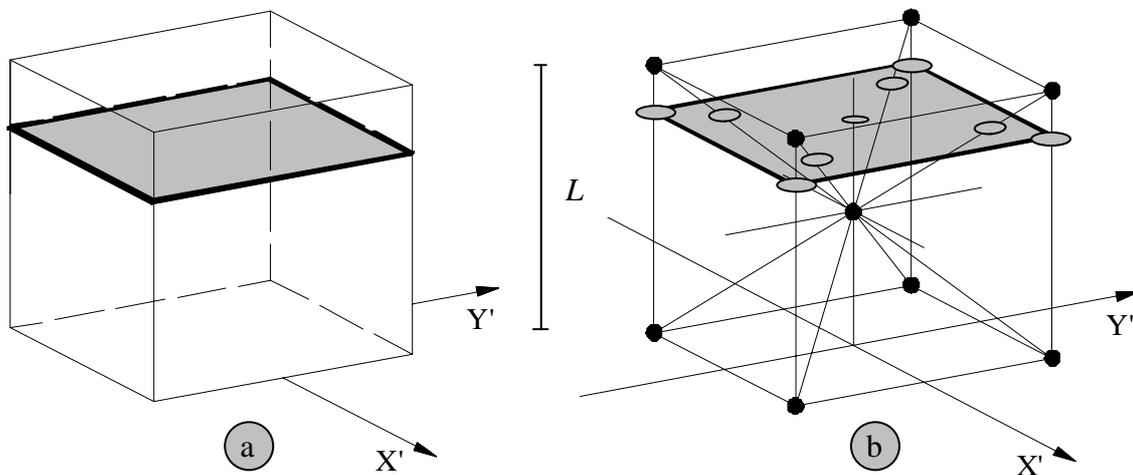


Figura 3.3 – a) sólido cúbico de dimensões $L \times L \times L$, b) módulo do DEM de dimensões $L \times L \times L$.

O coeficiente c_A é um parâmetro de escala utilizado para fazer cumprir a equivalência entre Γ e Γ_{DEM} . Assim, trabalhando as expressões (3.6) e (3.7) resulta:

$$G_f L^2 = G_f \left(\frac{22}{3} c_A \right) L^2 \quad (3.8)$$

da qual pode-se deduzir facilmente que $c_A = 3/22$ para que exista equivalência entre Γ e Γ_{DEM} . Finalmente a *Área de fratura equivalente*, $A_i^f = c_A L_i^2$, para os longitudinais e diagonais é, respectivamente:

$$A_l^f = (3/22)L^2, \quad A_d^f = (4/22)L^2 \quad (3.9)$$

Resumindo, quando um elemento quebra, geram-se as áreas de fratura equivalentes indicadas na Eq. 3.7, liberando-se energia de fratura que depende da área da fratura e da equação constitutiva do material. Riera, 1984 e Riera e Rocha, 1991 adotaram a lei proposta por Hillerborg, 1978 para materiais quase-frágeis como Relação Constitutiva Elementar (RCE), estendendo assim o Método dos Elementos Discretos para problemas de fratura frágil. A lei bilinear ou de Hillerborg, mostrada na Figura 3.4a, foi extensamente utilizada para simular o comportamento de materiais quase-frágeis. No presente trabalho se estudam também RCE alternativas: o modelo trilinear apresentado na Figura 3.4b, o modelo com amolecimento exponencial mostrado na Fig. 3.4c e o modelo de Weibull Figura 3.4d.

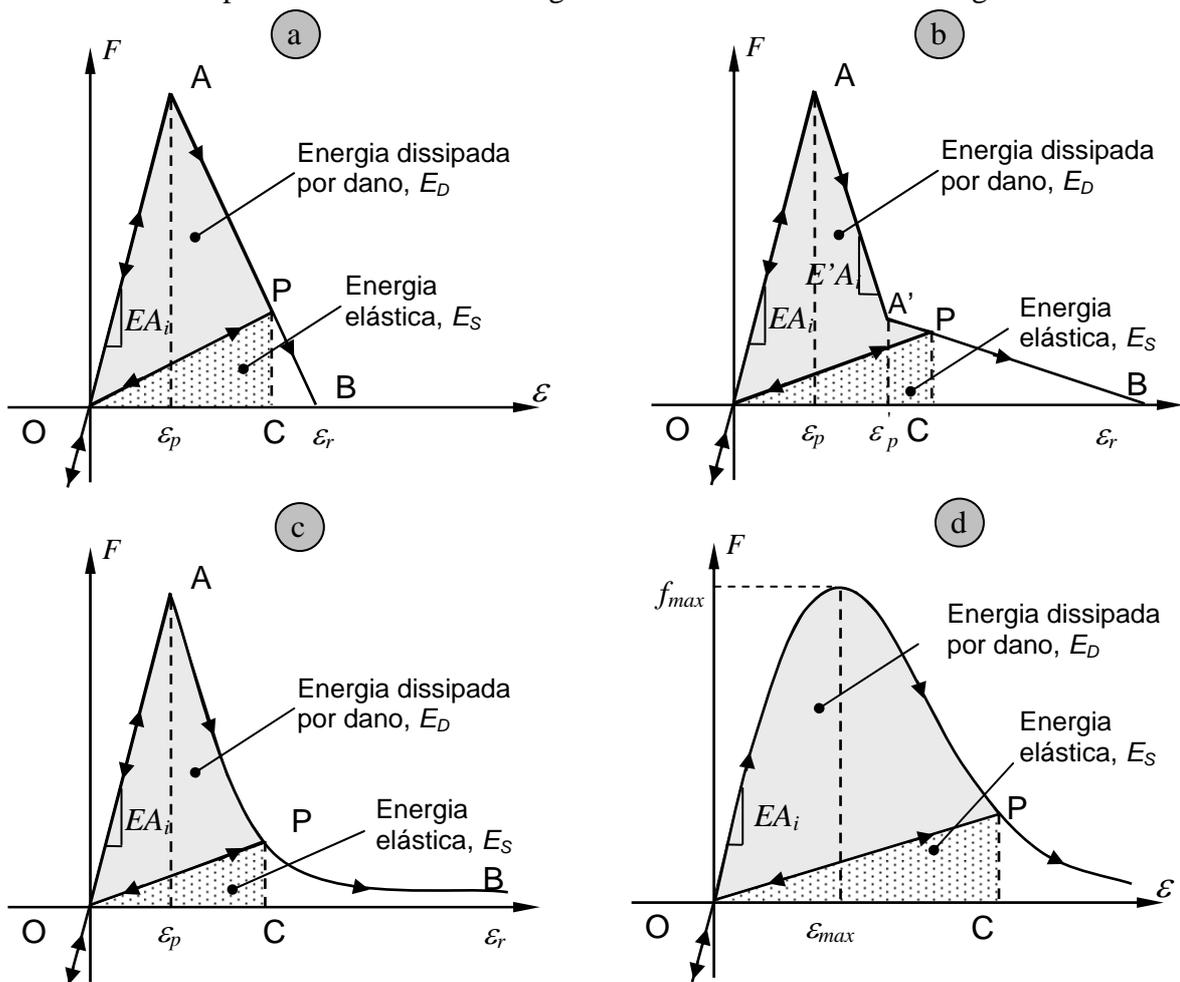


Figura 3.4 – a) Relações constitutivas elementares do DEM, a) Modelo de Hillerborg, b) Modelo trilinear, c) modelo com amolecimento exponencial e d) modelo de Weibull.

Os parâmetros constitutivos e símbolos utilizados nas definições dos modelos constitutivos são os seguintes: *Força*, F é força axial no elemento, função da deformação específica ε no mesmo, enquanto a *Rigidez do elemento* é definida pelo produto do módulo de Elasticidade do material (E) pela área da seção transversal A . O *Comprimento do módulo do DEM* é L . As áreas dos elementos longitudinais ou diagonais são A_l ou A_d segundo as equações (3.1) e (3.2), respectivamente. Cabe esclarecer que cada elemento é caracterizado por duas áreas, uma indicada acima, relacionada à sua rigidez e outra a área de fratura equivalente. Estas duas áreas são funções exclusivas da discretização, isto é, da forma do módulo básico do DEM e do seu comprimento L . A energia específica de fratura, G_f , assim como o módulo de Elasticidade (E), são características do material. A *deformação limite* ε_r é o valor de deformação axial para o qual o elemento perde sua capacidade de carga. Este valor deve ser calculado para satisfazer a condição que, quando o elemento falha, a densidade de energia dissipada seja igual ao produto da área de fratura equivalente do elemento, A_i^f , vezes a energia específica de fratura, G_f , dividida pelo comprimento do elemento, isto é:

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} \quad (3.10)$$

onde os sub-índices i têm que ser substituídos por l ou d , dependendo se o elemento em causa é longitudinal ou diagonal, respectivamente.

Na presente formulação do DEM admitem-se falhas por tração unicamente. Mudando a forma da curva força-deformação que pode resistir cada elemento se terão diferentes modelos constitutivos. Mas a premissa fundamental para levar em conta a fratura é que a área debaixo da curva força-deformação deve ser igual à densidade de energia necessária para fraturar a área de influência do elemento (a área de fratura equivalente).

Em contrapartida, sob tensões de compressão o material se comporta como elástico linear. Assim, a falha sob compressão é induzida por tração indireta. Esta suposição é razoável para materiais quase frágeis para os quais a tensão última sob compressão uniaxial é usualmente de cinco a dez vezes maior que sob tração uniaxial [ver Kupfer e Gerstle, 1973].

3.3.1 Lei bilinear ou modelo de Hillerborg

Rocha *et al.*, 1991, estenderam o uso do DEM para representar materiais frágeis introduzindo uma relação constitutiva elementar (RCE) bilinear como mostrada na Figura 3.4a. Esta lei bilinear, baseada no modelo proposto por Hillerborg em 1978, leva em conta a

fratura frágil e também permite capturar os efeitos irreversíveis da nucleação e propagação das fissuras, portanto, tem em conta a redução na capacidade de carregamento do elemento. A equação (3.11) apresenta a relação constitutiva deste modelo bilinear o de Hillerborg sendo ε_p e ε_r , respectivamente, as deformações crítica de falha e limite, mostradas na Figura 3.4a e definidas mais adiante.

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} EA_t \varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_p \\ EA_t \varepsilon_p \frac{\varepsilon_r - \varepsilon}{\varepsilon_r - \varepsilon_p} & \text{se } \varepsilon_p < \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ 0 & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_r \end{cases} \quad (3.11)$$

A lei bilinear o modelo de Hillerborg cumpre com a condição necessária, que a área debaixo da curva força-deformação (área do triângulo OAB na Figura 3.4a) seja a densidade de energia necessária para fraturar a área de influência do elemento. Assim, para um ponto P na curva força-deformação, a área do triângulo OPC representa a densidade de energia elástica armazenada no elemento. No entanto, a área do triângulo OAP é a densidade de energia dissipada por fratura. Uma vez que a densidade de energia dissipada por dano é igual à energia de fratura, o elemento falha e perde sua capacidade de carga.

A descarga se realiza linearmente até a origem, como mostrado na Figura 3.4a, sendo esta mesma inclinação a utilizada em um novo carregamento. Cabe salientar que o elemento submetido à compressão ($\varepsilon < 0$) tem um comportamento elástico linear.

Como foi definido em Rocha *et al.*, 1991 e Rocha, 1989 a *Deformação crítica de falha* ε_p , é a deformação máxima atingida pelo elemento antes da iniciação do dano (ponto A na Figura 3.4a). A relação entre ε_p e a energia específica de fratura G_f é dada em termos da Mecânica de Fratura Elástica Linear como:

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G_f}{E}} \quad (3.12)$$

onde R_f é chamado de fator de falha, o qual leva em conta a presença de um defeito intrínseco de tamanho a , expresso como:

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{a}} \quad (3.13)$$

O parâmetro adimensional Y , que depende tanto das dimensões do espécime quanto da trinca, se pode entender também como função de forma intrínseca que estabelece como esta trinca de tamanho a está distribuída dentro do elemento de tamanho L . É interessante salientar que o

tamanho do defeito intrínseco a é pré-determinado pode ser considerado como uma propriedade material. Qualquer desordem nas propriedades do material é introduzido no modelo, indicando uma distribuição aleatória na energia de fratura específica, G_f , como será explicado mais adiante.

Na equação (3.13) E , G_f e ε_p têm um significado físico bem claro, mas o fator de falha R_f não permite uma interpretação imediata. Para interpretar o significado de R_f pode ser útil o conceito de número de fragilidade estático s introduzido por Carpinteri, 1986, escrito como:

$$s = \frac{K_{IC}}{\sigma_p \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{G_f E}}{E \varepsilon_p \sqrt{a}} \quad (3.14)$$

Pode-se entender o número de fragilidade s como a razão entre duas tensões generalizadas. O número de fragilidade aumenta com o incremento da ductilidade do material. Usando as Eqs. (3.12) e (3.13) obtém-se:

$$s = Y \sqrt{a/L}, \quad s = \frac{1}{(R_f \sqrt{L})} \quad (3.15)$$

Esta conexão entre R_f e s , nos permite entender melhor a informação que o parâmetro de falha R_f contém.

Na lei bilinear ou modelo de Hillerborg é possível obter uma família de curvas de relações constitutivas elementares mostradas na Figura 3.5 considerando um elemento com comprimento L , no qual G_f e E são mantidos constantes enquanto o valor de R_f muda. Caso s aumente até infinito, R_f tende a zero, o que implica que ε_p diminui e, como mostrado na Figura 3.5, a curva força-deformação apresenta uma tendência a comportamento mais dúctil. Por outro lado, quando s diminui R_f aumenta juntamente com ε_p , o que implica um comportamento mais frágil.

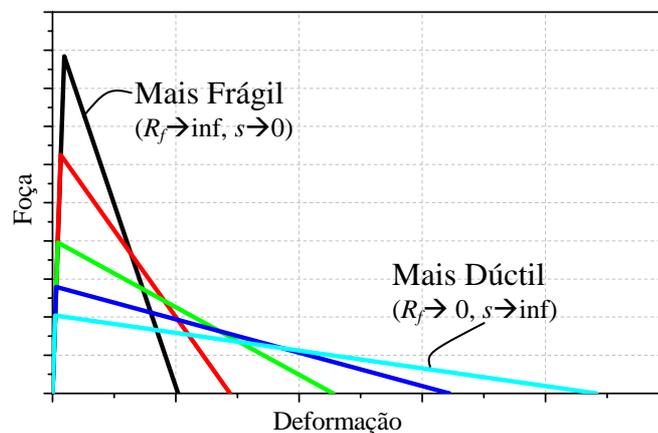


Figura 3.5 – Mudança de R_f no Modelo de Hillerborg mantendo L , E e G_f constantes.

O elemento perde sua capacidade de carregamento quando a deformação limite ε_r é atingida (ponto B na Fig. 3.4a). Esta deformação limite pode ser relacionada com a deformação crítica de falha por intermédio da constante K_r da seguinte forma:

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad (3.16)$$

Como foi mencionado, a Eq. (3.10) representa que a área debaixo da curva força-deformação é igual ao produto da área de fratura equivalente do elemento A_i^f vezes a energia específica de fratura G_f dividida pelo comprimento do elemento. Com ela, obtém-se uma importante relação dos parâmetros de fratura com a deformação limite ε_r ou o coeficiente K_r :

$$\frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_p E A_i}{2} = \frac{K_r \varepsilon_p^2 E A_i}{2} \quad (3.17)$$

onde o sub-índices i tem que ser substituídos por l ou d , segundo o elemento seja longitudinal ou diagonal, respectivamente. O coeficiente K_r é uma função das propriedades do material e do comprimento do elemento, L_i , como a seguir:

$$K_r = \left(\frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) \left(\frac{2}{L_i} \right) \quad (3.18)$$

Para garantir a estabilidade do algoritmo deve-se cumprir a condição que $K_r \geq 1$ [Riera e Rocha, 1991]. Neste sentido é interessante definir o comprimento de elemento crítico:

$$L_{cr} = 2 \left(\frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) \quad (3.19)$$

O coeficiente (A_i^f / A_i) na equação (3.19) é $(A_l^f / A_l) = 3/22\phi$ e $(A_d^f / A_d) = \sqrt{3}/11\delta\phi$ para os elementos longitudinais e diagonais, respectivamente, (ver equações 3.1, 3.2 e 3.9). No caso especial de um contínuo isotrópico com $\nu=0,25$, que as funções tomam o valor $\delta=1.125$ e $\phi=0.4$, o que resulta em $(A_l^f / A_l) \approx (A_d^f / A_d) \approx 0,34$. Assim, para fins práticos, um único valor de comprimento crítico do elemento é utilizado tanto para elementos longitudinais como para diagonais. Portanto, a condição de estabilidade antes apresentada pode ser expressa como:

$$K_r = \frac{L_{cr}}{L_i} \geq 1 \Rightarrow L_i \leq L_{cr} \quad (3.20)$$

isto é, existe um comprimento máximo de elemento que preserva a estabilidade da RCE.

É interessante ver que os parâmetros utilizados para definir a RCE, são propriedades que dependem somente do material, da discretização, ou tanto da discretização como do

material. Desta forma ε_p , E , R_{fc} e G_f são propriedades do material, A_i^f e L dependem unicamente da discretização do modelo, e ε_p , R_{fc} e ε_r dependem tanto das propriedades do material como da discretização. Além disso, é importante notar que, embora o DEM use uma lei dano escalar para descrever o comportamento uniaxial dos elementos, o modelo global leva em conta dano anisotrópico, uma vez que possui elementos orientados nas diferentes direções espaciais (ver seção 3.7).

Na Figura 3.7 apresenta-se uma ilustração da lei de Hillerborg com os seguintes parâmetros, $E = 7,5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\varepsilon_p = 1,088 \times 10^{-4}$ e $G_f = 1300 \text{ N/m}$. ($K_r = 202,8$, e $R_f = 0,8$) comparada com os outros modelos a seguir explicados.

3.3.2 Modelo trilinear

A RCE bilinear, descrita anteriormente, foi estendida por Batista, 2007, para levar conta, a princípio, o dano dúctil, introduzindo uma relação constitutiva trilinear mostrada na Figura 3.6. Batista considerou que para a lei trilinear a área debaixo da curva força vs deformação (área do quadrilátero OAA'B na Figura 3.6) está associada não unicamente com a energia específica de fratura do material ($G_f > G_c$), mas também com a energia dissipada por qualquer outro mecanismo, que dependendo do material modelado pode ser uma hipótese interessante.

No presente trabalho se mostra uma forma alternativa para este modelo que pode servir para representar materiais quase-frágeis que apresentam uma cauda pronunciada no amolecimento, observada em ensaios de laboratório. A relação constitutiva trilinear foi mostrada na Figura 3.4b. Assim, nota-se que na lei trilinear a área debaixo da curva força vs deformação (área do quadrilátero OAA'B na Figura 3.4b) está também associada com a energia específica de fratura do material G_f . Por isso, para um ponto P na curva força vs deformação, a área do triângulo OPC representa a densidade de energia elástica reversível armazenada no elemento, enquanto a área do quadrilátero OAA'P corresponde à densidade de energia dissipada por dano. Além dos parâmetros introduzidos anteriormente, a lei trilinear é caracterizada por dois parâmetros extras, ε'_p e E' (ver Figuras 3.4b e 3.6).

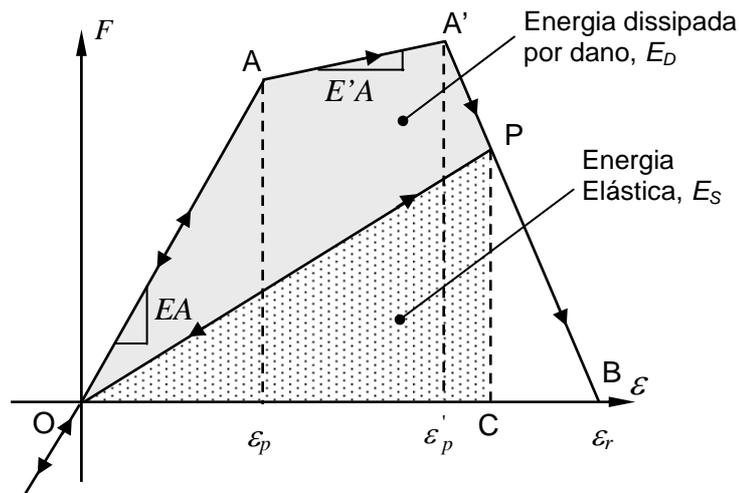


Figura 3.6 – Relação constitutiva trilinear utilizada no DEM proposta por Batista, 2007.

Similarmente ao modelo Hillerborg, a falha do elemento ocorre quando a densidade de energia dissipada por dano (área OAA'P tanto na Figura 3.4b como na Figura 3.6) é igual a área total sob a curva da lei constitutiva uniaxial força vs deslocamento (área OAA'B). Isto é:

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{\overbrace{O A \varepsilon_p}^{\varepsilon_p^2 E A_i}}{2} + \overbrace{(\varepsilon'_p - \varepsilon_p) \varepsilon_p E A + \frac{(\varepsilon'_p - \varepsilon_p)^2 E' A_i}{2}}^{\varepsilon_p A A' \varepsilon'_p}} + \frac{\overbrace{(\varepsilon_r - \varepsilon'_p)(\varepsilon_p E A_i + (\varepsilon'_p - \varepsilon_p) E' A_i)}^{\varepsilon'_p A' \varepsilon_r}}{2} \quad (3.21)$$

Na qual os termos $O A \varepsilon_p$, $\varepsilon_p A A' \varepsilon'_p$ e $\varepsilon'_p A' \varepsilon_r$ levam em conta as diferentes subáreas debaixo da curva força vs deformação representada nas Figuras 3.4b e 3.6. Seguindo o mesmo raciocínio usado que para o modelo de Hillerborg, é possível obter o valor para o fator K'_r que relaciona a deformação ε'_p com a deformação limite ε_r :

$$\varepsilon_r = K'_r \varepsilon'_p \quad (3.22)$$

a expressão para K'_r resulta da equação (3.22) e é:

$$K'_r = \frac{\frac{2G_f A_i^f}{L_i \varepsilon_p} + \frac{\varepsilon_p^2}{\varepsilon_p} (E - E') A_i + 2E' A_i \varepsilon_p}{(\varepsilon_p (E - E') A_i + \varepsilon'_p E' A_i)} - 1 \quad (3.23)$$

A estabilidade para a RCE trilinear é assegurada por meio de duas condições:

$$\varepsilon'_p \geq \varepsilon_p, \text{ e } K'_r \geq 1 \quad (3.24)$$

Chamando c à razão entre E'/E na Fig. 3.4b, e r ao quociente entre as deformações limite dos modelos trilinear (ε_r^T) e Hillerborg (ε_r^H):

$$c = E'/E, \text{ e } r = \varepsilon_r^T / \varepsilon_r^H \quad (3.25)$$

é possível definir ε_p' como:

$$\varepsilon_p' = (1 - c r) \varepsilon_r^H + c \varepsilon_p \quad (3.26)$$

Utilizando estas últimas equações, a expressão matemática da relação constitutiva trilinear pode ser escrita como:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} EA_i \varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_p \\ EA_i c \varepsilon_p + EA_i (1 - c) \frac{\varepsilon_p' - \varepsilon}{\varepsilon_p' - \varepsilon_p} & \text{se } \varepsilon_p < \varepsilon \leq \varepsilon_p' \\ EA_i c \varepsilon_p \frac{\varepsilon_r - \varepsilon}{\varepsilon_r - \varepsilon_p'} & \text{se } \varepsilon_p' < \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ 0 & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_r \end{cases} \quad (3.27)$$

Como mostrado na Figura 3.4b, a descarga se realiza linearmente até a origem desde qualquer ponto na curva força-deformação. A mesma inclinação é utilizada para posteriores carregamentos, diminuindo assim o módulo de elasticidade com o dano do elemento.

O modelo trilinear considerando $E = 7,5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\varepsilon_p = 1,088 \times 10^{-4}$ e $G_f = 1300 \text{ N/m}$, $c=0,10$, $r=2$ ($\varepsilon_p' = 0,0177$, $K_r' = 2,499$) é também mostrado na Figura 3.7.

3.3.3 Modelo com amolecimento exponencial

O Modelo com amolecimento exponencial mostrado na Figura 3.4c, apresenta uma cauda de forma exponencial. A região de amolecimento é definida pela expressão a seguir, válida para valores da deformação maiores que ε_p :

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} EA_i \varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_p \\ a e^{-b\varepsilon} & \text{se } \varepsilon_p < \varepsilon \end{cases} \quad (3.28)$$

onde f denota a força e a e b são constantes. Como valor desta função quando $\varepsilon = \varepsilon_p$ tem que ser o mesmo que na região linear do modelo, então:

$$a e^{-b\varepsilon_p} = \varepsilon_p EA_i \quad (3.29)$$

Finalmente, a área sob a curva, para valores de ε maiores que zero, tem que ser igual à densidade de energia dissipada por dano, assim:

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{\varepsilon_p^2 EA_i}{2} + \frac{a}{b} e^{-b\varepsilon_p} \quad (3.30)$$

A partir das Eqs. (3.29) e (3.30) obtêm-se os parâmetros do modelo:

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon_p EA_i e^{-b\varepsilon_p} \\ b &= \frac{\varepsilon_p EA_i}{\frac{G_f A_i^f}{L_i} - \frac{\varepsilon_p^2 EA_i}{2}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da mesma forma que os modelos anteriores, a descarga, e posteriores carregamentos, se realiza linearmente desde qualquer ponto na curva força-deformação até a origem, como mostrado na Figura 3.4c.

As definições de R_f e s apresentadas no modelo de Hillerborg (3.3.1) não mudam para este modelo nem para o modelo trilinear. Isto ocorre porque tanto R_f como s se definem a partir da relação que tem o ε_p com a tensão máxima, que é a mesma nos três modelos apresentados até agora.

A Figura 3.7 mostra o modelo com amolecimento exponencial, para $E = 7,5 \times 10^{10}$ N/m², $\varepsilon_p = 1,088 \times 10^{-4}$ e $G_f = 1300$ N/m, o que conduz aos parâmetros $a = 82,397$ e $b = 91,073$.

3.3.4 Modelo de Weibull

No modelo denominado de Weibull a forma da curva força-deformação tem a mesma forma da distribuição de probabilidades tipo Weibull (Figura 3.4d) sendo a expressão mostrada na equação (3.32). Como características positivas da deste modelo se podem mencionar que a forma da curva é muito similar à encontrada nos resultados experimentais, além de ser uma função contínua.

A função de Weibull tem a seguinte forma:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} EA_i \varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq 0 \\ a \varepsilon e^{-b\varepsilon^c} & \text{se } 0 < \varepsilon \end{cases} \quad (3.32)$$

onde f denota a força e a , b e c são constantes. É importante notar que a constante b é conhecida como parâmetro de escala e a constante c como parâmetro de forma. A inclinação da curva na origem, que define a rigidez inicial do elemento, é obtida derivando a expressão anterior:

$$df/d\varepsilon = a(1 - bc\varepsilon^c) e^{-b\varepsilon^c} \quad (3.33)$$

quando $\varepsilon = 0$, a rigidez será:

$$df/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = a = EA_i \quad (3.34)$$

A deformação vinculada à tensão máxima ε_{max} e o pico de tensão f_{max} são dados por:

$$\varepsilon_{max} = (bc)^{-1/c} \quad (3.35)$$

$$f_{max} = a(bc)^{-1/c} e^{-1/c} \quad (3.36)$$

Finalmente a área debaixo da curva para valores positivos de ε , que define o trabalho total W requerido para fraturar um elemento, está dado por:

$$W/L = ac^{-1}b^{-2/c}\Gamma(2/c) \quad (3.37)$$

Onde Γ denota a função Gamma.

A função proposta na equação (3.32) apresenta várias características atraentes, sob uma ampla gama de parâmetros difere pouco da lei bilinear de Hillerborg, é contínua e tem derivada contínua de primeira ordem. O primeiro parâmetro a denota a rigidez inicial e, por último, mas não menos importante, assemelha-se às curvas tensão-deformação globais medidas em amostras de concreto submetidas a tração sob taxas de deformação constante [Roelfstra e Wittmann, 1987]. Agora, fazendo o trabalho W/L da eq. (3.37) igual à área do diagrama da Fig. (3.4d) e utilizando a expressão 3.10:

$$\frac{G_f A_i^f}{L_i} = ac^{-1}b^{-2/c}\Gamma(2/c) \quad (3.38)$$

Caso se conheça a rigidez inicial, isto é, a inclinação da curva força-deformação na origem (EA_i), a energia específica de fratura G_f e o pico de tensões f_{max} , as equações (3.36) e (3.38) são suficientes para definir os parâmetros restantes, b e c necessários para determinar a expressão (3.32). A seguir se apresenta um resumo das condições necessárias para definir a eq. (3.32):

$$\begin{aligned} a &= EA \\ f_{max} &= \frac{EA}{(bc)^{1/c}} e^{-1/c} \\ G_f &= \frac{\Gamma(2/c)}{cb^{2/c}} \frac{A_i}{A_i^f} L_i E \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituído e trabalhando se pode obter:

$$a = EA$$

$$b = \left(\frac{1}{c^{1/c}} e^{-1/c} \frac{EA_i}{f_{\max}} \right)^c \quad (3.40)$$

$$b = \left(\frac{\Gamma(2/c)}{c} \frac{A_i}{A_i^f} \frac{L_i E}{G_f} \right)^{c/2}$$

As últimas duas expressões da equação (3.40) representam curvas no plano b - c . Sua intersecção define os parâmetros b e c , os quais podem ser obtidos numericamente.

A Figura 3.7 também mostra a lei bilinear e o modelo de Weibull que satisfaz a seguintes condições:

- A rigidez na origem é a mesma que na lei bilinear, resultando a princípio em respostas similares para pequenas deformações.
- Os picos de tensões, que define o começo da cauda de amolecimento, são também idênticos.
- A área total sob as curvas são iguais, desde que estão relacionadas à energia específica de fratura do material, G_f .

Como a descarga se realiza em forma linear até a origem, o modelo de Weibull apresenta energia dissipada por dano praticamente desde o começo. Quando colocada aleatoriedade nas propriedades do material (ver seção 3.5) se observou que além de ter dano na região de comportamento “elástico” a resposta rapidamente se afasta do módulo de elasticidade que tem o sólido que se pretende simular. Além de que deixa de ter um comportamento elástico nesta região.

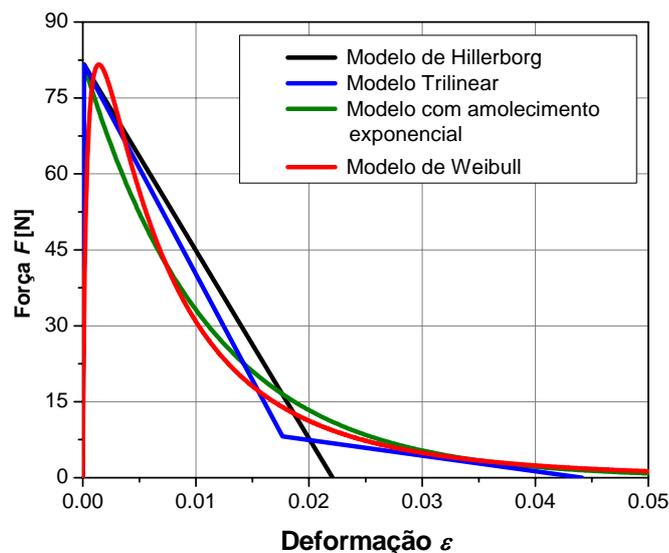


Figura 3.7 – Comparação entre as diferentes relações constitutivas elementares utilizadas para os elementos uniaxiais do DEM consideradas no trabalho.

Entende-se que o modelo de Weibull é um modelo a ser utilizado em outra escala maior, isto é, seria apto para representar o comportamento médio que tem um conjunto de elementos menores que tenham uma variabilidade no seu comportamento. Isso será exposto mais adiante.

3.3.5 Deformações remanescentes nas leis constitutivas

Para captar deformações remanescentes observadas em experiências realizadas com vários materiais, é possível modificar as leis antes apresentadas. Isto foi feito na lei constitutiva trilinear do DEM, proposta por Batista, 2007 [Kosteski *et al.*, 2011a]. Na Figura 3.8a, b e c se apresenta a modificação da descarga nos modelos de Hillerborg e Trilinear.

Como se pode ver na Figura 3.8a descarga é sempre paralela à primeira parte da curva. Originalmente, para um ponto P na curva força vs deformação, a área do triângulo OPC representa a densidade de energia elástica reversível armazenada no elemento (ver Figura 3.4a e b e Figura 3.6), enquanto para a nova lei a energia elástica no ponto P é dada pela área do triângulo O'PC, sensivelmente menor. Nas Figura 3.4a e b e Figura 3.6, as áreas do quadrilátero OAP (Hillerborg) e OAA'P (Trilinear) correspondem com a densidade de energia dissipada por dano, já na Figura 3.8, a área formada pelos pontos AOPO' e OAA'PO' representam a soma das densidades de energia dissipada por dano e plasticidade.

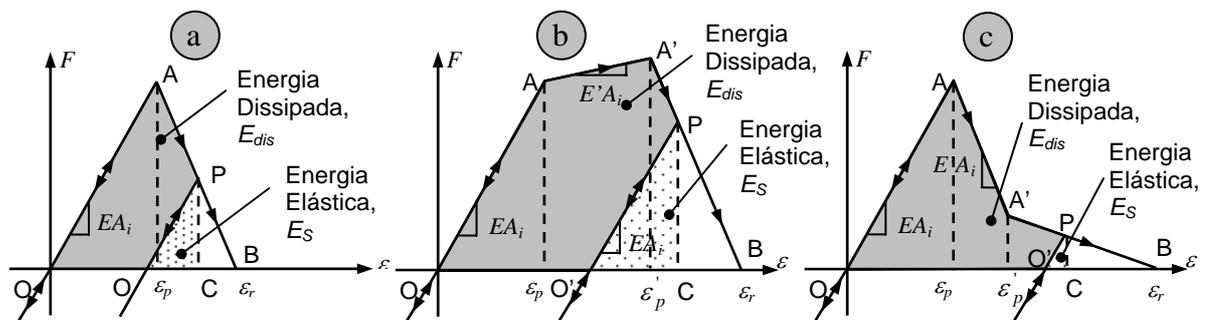


Figura 3.8 – Modificação nos modelos de a) Hillerborg, b) e c) Trilinear, para ter em conta deformações remanescentes.

Todos os outros parâmetros introduzidos pelas RCE bilinear e trilinear, seguem sendo utilizados sem modificações.

Este mesmo conceito pode ser aplicado aos outros modelos já apresentados. Estudos adicionais têm que ser realizados para avaliar melhor como realizar a interação entre dano e plasticidade na modificação proposta, e como fazer para que a mesma dependa também do grau de triaxialidade.

3.4 Forma de modelar o amortecimento

Como foi mencionado anteriormente, no DEM é possível colocar uma matriz de amortecimento proporcional às massas [Iturrioz, 1995], de tal forma que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} D_f \quad (3.41)$$

sendo D_f uma constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico, ξ_n , como segue:

$$D_f = \xi_n 2\pi f_n \quad (3.42)$$

onde f_n representa a frequência natural de vibração do modo n expressado em [Hz]. O modo n se adota em geral igual ao modo fundamental de vibração da estrutura [Iturrioz, 1995].

Também seria possível incluir no sistema um amortecimento que dependesse da rigidez das barras do sistema. Isto se consegue considerando uma lei constitutiva que não só dependa da deformação, como o modelo apresentados aqui, senão que dependam também da velocidade de deformação. Assim, a força nas barras ficaria $F(t, \varepsilon, d\varepsilon/dt)$.

3.5 Inclusão do caráter aleatório

Apresentam-se duas formas de incluir aleatoriedade no DEM. A primeira forma é incluir a aleatoriedade nas propriedades do material, como é feito desde 1989 por Rocha. A segunda forma de incluir aleatoriedade é perturbando levemente a malha do DEM, sem alterar as propriedades. A primeira forma leva em conta as imperfeições ou heterogeneidades de escala inferior ao tamanho do cubo elementar e representa uma homogeneização de micro a macro ou meso escala. Já colocando aleatoriedade na malha se estaria levando em conta as imperfeições ou heterogeneidades da ordem do tamanho do cubo básico do DEM, meso ou macro escala. A combinação das duas formas de introduzir aleatoriedade seria a forma ideal de representar o comportamento de um material dado.

3.5.1 Aleatoriedade nas propriedades do material simulado

Rocha, 1989, introduziu o aspecto aleatório considerando a tenacidade do material G_f , como uma variável aleatória, admitindo para a mesma uma distribuição de probabilidades (função de probabilidade acumulada) tipo Weibull de dois parâmetros,

$$W(G_f) = 1 - e^{-(G_f/\beta)^\gamma} \quad (3.43)$$

onde β e γ são os parâmetros de escala e de forma, respectivamente. Verificam-se as seguintes expressões para a média e o desvio padrão:

$$E(G_f) = \overline{G_f} = \beta [\Gamma(1+1/\gamma)] \quad (3.44)$$

$$\sigma^2(G_f) = \text{Cv}(G_f) = \beta [\Gamma(1+2/\gamma) - \Gamma^2(1+1/\gamma)]^{1/2} \quad (3.45)$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ é a função Gamma.

Para gerar valores de G_f com a função escolhida, isola-se a variável na expressão (3.43):

$$G_f = \beta [-\ln(1-u)]^{1/\gamma} \quad (3.46)$$

onde u é um número aleatório com densidade de probabilidade uniforme entre 0 e 1.

É conveniente colocar G_f como uma função de sua média $\overline{G_f}$ e um parâmetro aleatório φ :

$$G_f = \varphi \overline{G_f} \quad (3.47)$$

Isolando φ da exp. (3.47) e utilizando a expressão (3.44) para descrever a média, tem-se:

$$\varphi = \frac{[-\ln(1-u)]^{1/\gamma}}{\Gamma(1+1/\gamma)} \quad (3.48)$$

onde φ é um número aleatório com distribuição Weibull de dois parâmetros e média 1.

Obtém-se o parâmetro de forma γ a partir do coeficiente de variação, que se considera conhecido. A partir das expressões (3.44) e (3.45):

$$\text{CV}(G_f) = \frac{[\Gamma(1+2/\gamma) - \Gamma^2(1+1/\gamma)]^{1/2}}{\Gamma(1+1/\gamma)} \quad (3.49)$$

Pode-se procurar iterativamente o valor de γ que satisfaça a equação anterior. O parâmetro de escala β é obtido substituindo as expressões (3.46) e (3.48) em (3.47):

$$\beta [-\ln(1-u)]^{1/\gamma} = \frac{[-\ln(1-u)]^{1/\gamma}}{\Gamma(1+1/\gamma)} \overline{G_f}, \quad \beta = \frac{\overline{G_f}}{\Gamma(1+1/\gamma)} \quad (3.50)$$

A Figura 3.9 mostra o processo de incorporação da aleatoriedade na energia específica de fratura G_f . Essa energia, relacionada com a área da RCE, tem uma variação espacial segundo uma distribuição tipo Weibull mostrada na parte superior da figura. Assim, diferentes elementos terão diferentes RCE, com forma similar, como mostrado também na Figura 3.9.

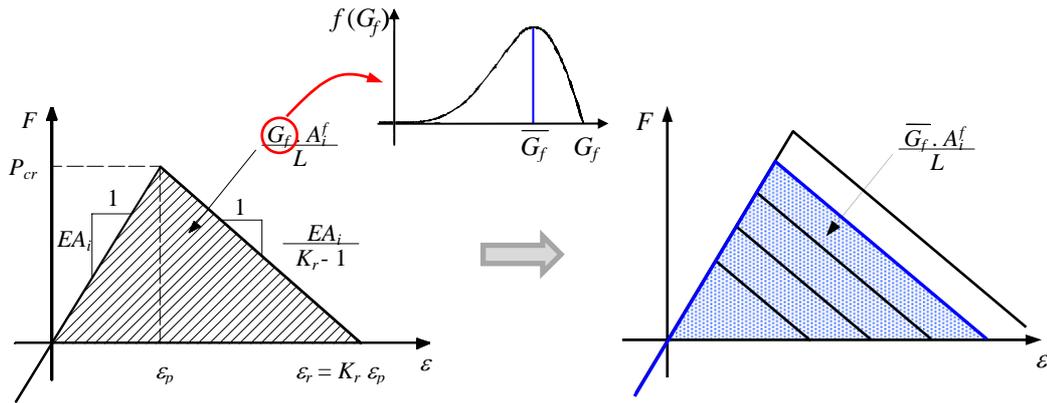


Figura 3.9 – Esquema da incorporação da aleatoriedade no DEM.

Como é mais simples implementar no DEM aleatoriedade em ε_p do que em G_f , escrevemos este último em função de ε_p (ver expressão 3.12) da seguinte forma:

$$G_f = c \varepsilon_p^2, \quad \text{com } c = E(1 - \nu^2) / R_f \quad (3.51)$$

e definimos $\widehat{\varepsilon}_p$ a deformação crítica relacionada com a energia específica média da seguinte forma:

$$\widehat{\varepsilon}_p^2 = \overline{G_f} c^{-1} \quad (3.52)$$

a qual não sempre coincide com a deformação crítica média, $\overline{\varepsilon}_p$. Substituindo em a expressão (3.52) na (3.47) se obtém:

$$c \varepsilon_p^2 = \varphi c \widehat{\varepsilon}_p^2, \quad \varepsilon_p = \varphi^{1/2} \widehat{\varepsilon}_p \quad (3.53)$$

Cabe esclarecer que $\varphi^{1/2}$ não tem média 1, e seu valor varia em função de $CV(G_f)$

Desta forma também é possível escrever a função de distribuição de probabilidades (3.43) em função de ε_p :

$$W(\varepsilon_p) = 1 - e^{-(c \varepsilon_p^2 / \beta)^\gamma} \quad (3.54)$$

chamando $\beta' = (\beta / cte)^{1/2}$ e $\gamma' = 2\gamma$, pode se escrever:

$$W(\varepsilon_p) = 1 - e^{-(\varepsilon_p / \beta')^{\gamma'}} \quad (3.55)$$

como $W(\varepsilon_p)$ é uma distribuição de probabilidades tipo Weibull de dois parâmetros, ε_p tem a seguinte média e variância:

$$E(\varepsilon_p) = \overline{\varepsilon_p} = \beta' [\Gamma(1+1/\gamma')] \quad (3.56)$$

$$\sigma^2(\varepsilon_p) = \beta' [\Gamma(1+2/\gamma') - \Gamma^2(1+1/\gamma')]^{1/2} \quad (3.57)$$

Trabalhando com a expressão (3.50), pode-se obter o valor de β em função de $\widehat{\varepsilon}_p$:

$$\beta = \frac{cte \widehat{\varepsilon}_p^2}{\Gamma(1+1/\gamma)} \quad \beta' = \left(\frac{\widehat{\varepsilon}_p}{\Gamma(1+1/\gamma)^{1/2}} \right) \quad (3.58)$$

$$E(\varepsilon_p) = \overline{\varepsilon_p} = \widehat{\varepsilon}_p \frac{\Gamma(1+1/2\gamma)}{\Gamma(1+1/\gamma)^{1/2}} \quad (3.59)$$

Comparando as expressões (3.53) com (3.59), pode-se ver que a última parte da expressão anterior é a média de $\varphi^{1/2}$. Na Figura 3.10 é apresentada a variação da média de $\varphi^{1/2}$ em função do coeficiente de variação de G_f .

Conhecida a relação entre os parâmetros de forma das duas funções de densidade, pode-se avaliar a relação entre os respectivos coeficientes de variação implícitos:

$$\frac{CV(\varepsilon_p)}{CV(G_f)} = \frac{\Gamma(1+1/\gamma) [\Gamma(1+2/\gamma') - \Gamma^2(1+1/\gamma')]^{1/2}}{\Gamma(1+1/\gamma') [\Gamma(1+2/\gamma) - \Gamma^2(1+1/\gamma)]^{1/2}} \quad (3.60)$$

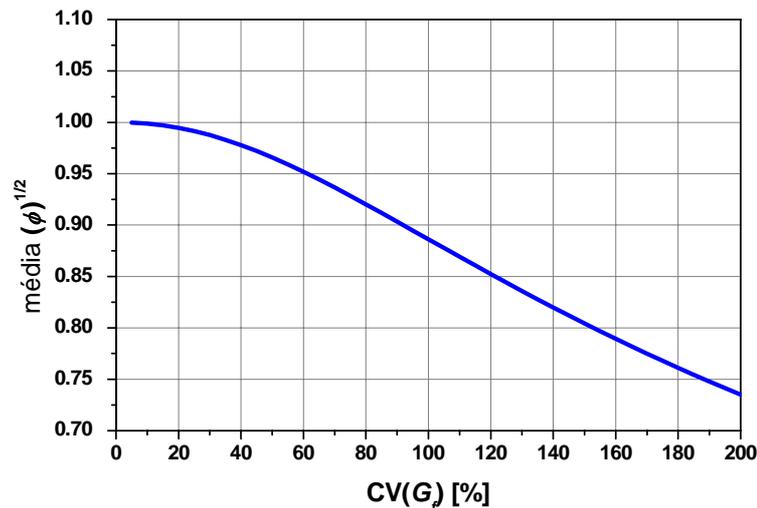


Figura 3.10 – Variação da média de $\varphi^{1/2}$ em função do CV (G_f).

Lembrando que $\gamma' = 2\gamma$, pode-se expressar equação anterior em função de γ , que por sua vez é obtido a partir de CV (G_f). Assim, é possível obter a variação de CV (ε_p) em função do CV (G_f). Isto é mostrado na Figura 3.11.

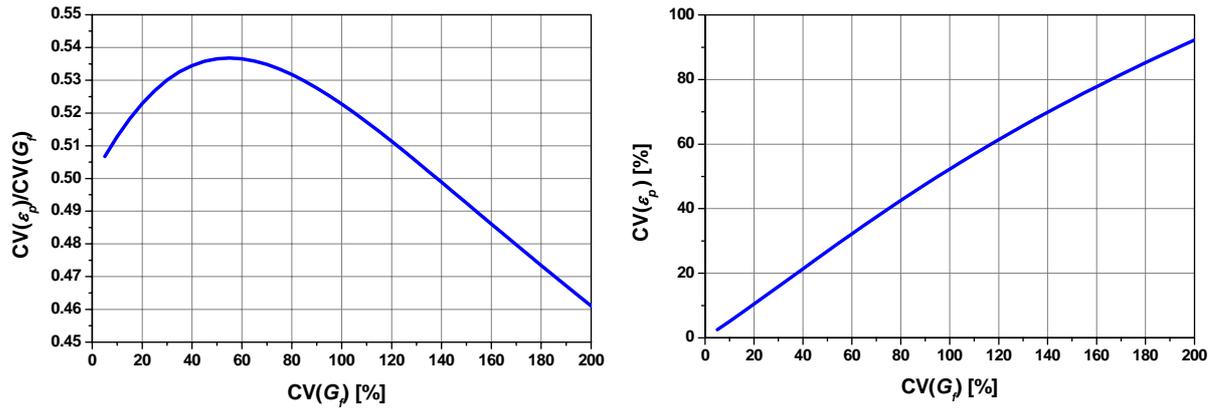


Figura 3.11 – Variação do CV (ε_p) em função do CV (G_f).

A aplicação da aleatoriedade nos outros modelos apresentados, trilinear, com amolecimento exponencial e Weibull, é feita utilizando um modelo de Hillerborg equivalente. Por exemplo, uma vez definidos os valores de c e r do modelo trilinear (exp. 3.25) com a expressão (3.26) relacionamos a única variável móvel do modelo com o valor de ε_p do modelo de Hillerborg que, como mostrado anteriormente, tem uma distribuição aleatória. Assim para cada valor de ε_p corresponde um ε_p' do modelo trilinear que tem também distribuição aleatória tipo Weibull. Para os modelos com amolecimento exponencial e de Weibull, utilizando as expressões (3.31) e (3.40) se podem também relacionar os parâmetros destes modelos com o valor de ε_p do modelo de Hillerborg que contém a variabilidade do campo aleatório.

3.5.2 Aleatoriedade perturbando a malha

A perturbação da malha se consegue permitindo que cada nó da discretização do DEM seja deslocado levemente em cada direção dos eixos coordenado. Este deslocamento perturba a configuração original sendo que variável aleatória que define esta perturbação segue uma distribuição normal, com média e coeficiente de variação definidos. Assim, o comprimento dos elementos do DEM será diferente. Como a RCE se encontra relacionada com o comprimento, é introduzida também uma variabilidade nas propriedades resultantes do modelo.

Na Figura 3.12 se mostra a diferença da malha para uma placa sem e com perturbação (acima e abaixo, respectivamente), com duas discretizações. Foi colocada uma perturbação com CV=1% em ambas as direções da placa. A Figura 3.12 também mostra as diferenças das configurações de ruptura destas placas tracionadas, sendo todas as outras características e

propriedades das placas idênticas. Pode-se observar que as configurações de ruptura variam sensivelmente colocando esta pequena perturbação na malha.

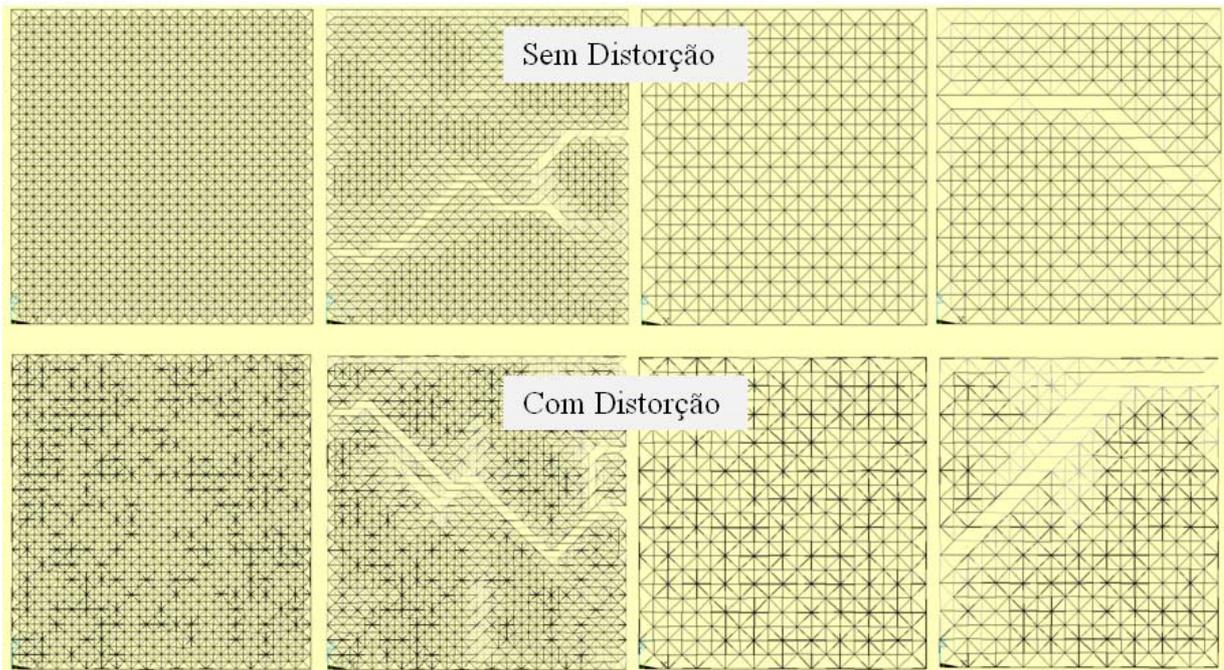


Figura 3.12 – Influência da perturbação da malha na discretização e nos resultados.

3.6 Relação do tamanho do elemento com o comprimento de correlação do campo aleatório gerado.

O comprimento de correlação do campo aleatório da tenacidade G_f , que será representado aqui como l_{corr} , está atrelada à discretização empregada (L). Isto é, uma limitação considerável que foi contornada parcialmente na implementação realizada por Rios, 2002, e posteriormente por Miguel, 2005, utilizando a metodologia proposta por Shinozuka e Deodatis, 1996, para tornar independente a discretização do tamanho do comprimento de correlação do campo aleatório simulado. A metodologia proposta por Deodatis e Shinozuka, 1996, somente é válida para uma distribuição de probabilidades normal.

No trabalho de Puglia *et al.*, 2010, que forma parte de desenvolvimento da tese deste primeiro autor, apresenta-se uma técnica simples originalmente proposta por Miguel *et al.*, 2009, utilizada na modelagem da velocidade do vento em estruturas. Esta metodologia pode ser empregada para gerar o campo aleatório da tenacidade G_f sem necessidade de ter a discretização atrelada ao comprimento de correlação do campo aleatório gerado.

Dita metodologia consiste em dividir o domínio formado pelos elementos do DEM em regiões prismáticas que tenham como lados os comprimentos de correlação, que podem ser diferentes nas três direções cartesianas (l_{cx} , l_{cy} , l_{cz}). Nos vértices destes prismas se situam os

pólos ($V_1 \dots V_8$), e aos mesmos se atribuem valores aleatórios com distribuições de probabilidades não correlacionadas. Na Figura 3.13 são apresentadas as entidades anteriormente definidas e, para uma melhor interpretação, um exemplo bidimensional. Posteriormente, realiza-se uma interpolação tridimensional para determinar o valor do campo aleatório correspondente a cada ponto no interior do prisma. Na presente implementação do DEM, a localização espacial da barra i é caracterizada pelas coordenadas de seu baricentro (x_i, y_i, z_i). A interpolação é realizada utilizando a expressão (3.61).

$$\varphi_v(x_i, y_i, z_i) = V_1 + \frac{V_2 + V_1}{l_{cx}} x_i + \frac{V_3 - V_1}{l_{cy}} y_i + \frac{V_5 - V_1}{l_{cz}} z_i + \frac{V_4 - V_3 - V_2 + V_1}{l_{cx} l_{cy}} x_i y_i + \frac{V_6 - V_5 - V_3 + V_1}{l_{cx} l_{cz}} x_i z_i + \frac{V_7 - V_5 - V_3 + V_1}{l_{cy} l_{cz}} y_i z_i + \frac{V_8 - V_7 - V_6 + V_5 - V_4 + V_3 + V_2 - V_1}{l_{cx} l_{cy} l_{cz}} x_i y_i z_i \quad (3.61)$$

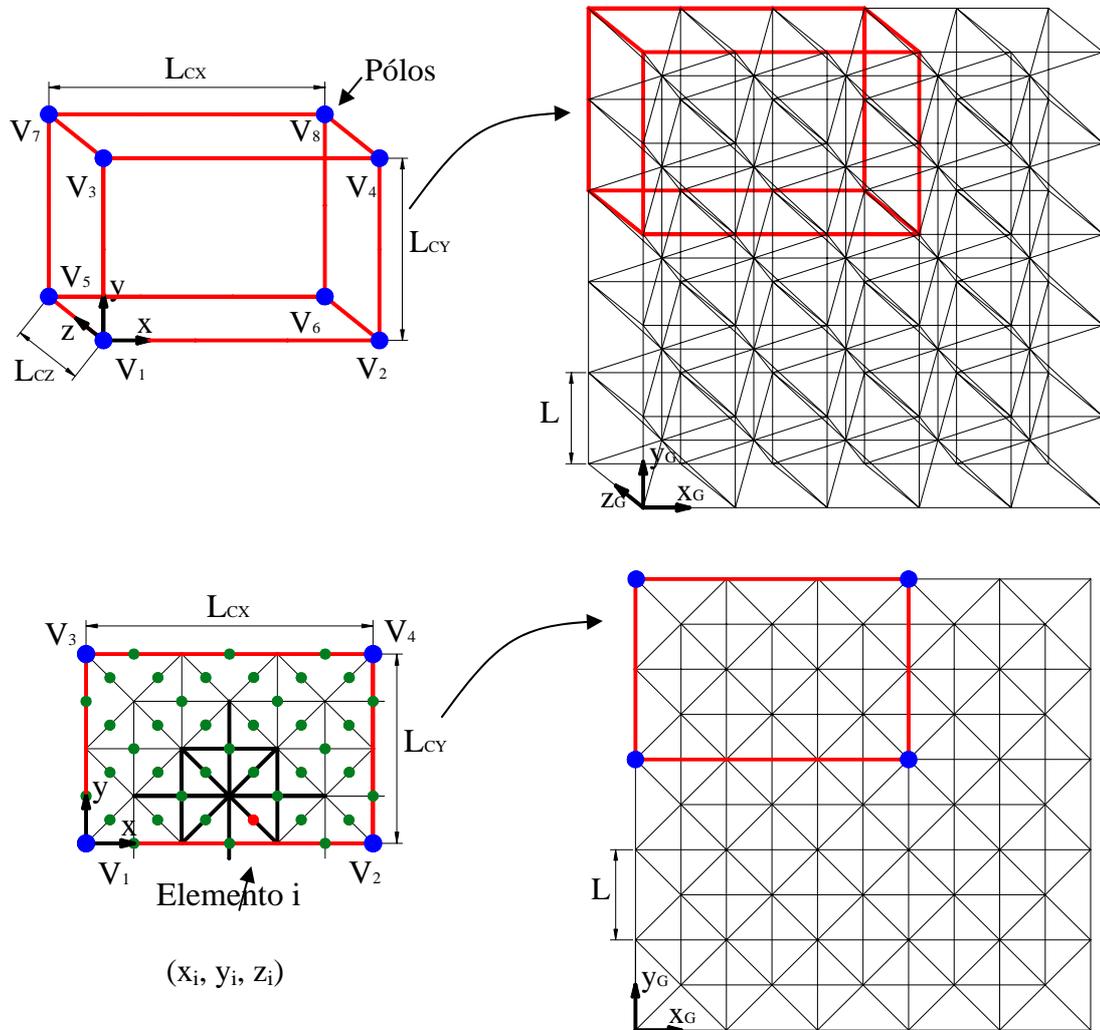


Figura 3.13 – Distribuição dos pólos e do comprimento de correlação no domínio do modelo de elementos discretos (DEM).

onde $\varphi_v(x_i, y_i, z_i)$ é o valor aleatório interpolado para o ponto i de coordenadas x_i , y_i e z_i , sendo V_k os valores do campo aleatório nos pólos. l_{cx} , l_{cy} e l_{cz} são os comprimentos de correlação nas direções cartesianas.

É importante salientar que a terna de eixos x , y e z com origem no pólo V_i representam o sistema de coordenadas locais ao qual está referido cada prisma (indicado na Figura 3.13). A terna de eixos X_G , Y_G e Z_G representa o sistema de coordenadas globais, ao qual está referido o modelo global. Cada barra i do sistema está referida ao sistema de coordenadas globais X_{Gi} , Y_{Gi} e Z_{Gi} , e ao sistema de coordenadas local dentro do prisma que contém x_i , y_i e z_i . Mais detalhes desta implementação como verificações e validação podem ser encontradas em Puglia *et al.*, 2010.

3.7 Indicadores de dano no DEM.

Um indicador de dano em um elemento do DEM é definido como um número adimensional entre 0 e 1. Este *índice de dano* é definido como a relação entre a energia dissipada por dano (área correspondente com E_D na Figura 3.4) no elemento e a energia necessária para romper a área de influência do elemento (área total na Figura 3.4).

No caso do modelo de Weibull, a área debaixo da curva (OP na Figura 3.4) é obtida mediante integração numérica, considerando 50 intervalos de integração. Nos outros modelos é possível utilizar formulações teóricas para obter essas áreas.

O índice de dano no módulo elementar, chamado I_D , tende a quantificar o *dano escalar* do mesmo, fazendo a média dos índices de dano dos 26 elementos que o compõem (ver Figura 3.14a). Os índices direcionais I_{D_j} , $j=x,y,z$ quantificam o dano nas direções coordenadas x , y e z , como ilustrado na Figura 3.14b, c e d. Cabe notar que o dano das barras diagonais somente é tido em conta no índice de dano escalar.

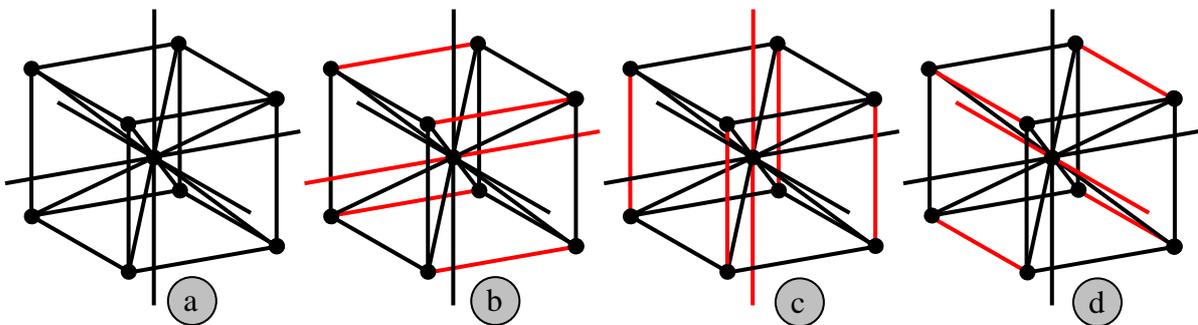


Figura 3.14 – Elementos que contribuem à quantificação do dano em um módulo básico do DEM.

4 LEI DE ESCALA MULTIFRACTAL NO DEM

Nesta seção são apresentados os avanços realizados no estudo da Lei Multifractal e sua vinculação com o DEM. Estuda-se a fractalidade analisando os resultados do efeito de escala de placas tracionadas utilizando diferentes leis constitutivas elementares. Quer-se chegar à relação entre a lei constitutiva do DEM com a lei invariante proposta por Carpinteri para propor uma lei constitutiva independente da escala.

4.1 Placas de rocha de diferentes tamanhos submetidas à tração uniaxial

4.1.1 Descrição do modelo

Para estudar o efeito de escala no DEM e assim avaliar o desempenho das leis propostas, é simulado um grupo de placas quadradas de rocha, fixas na face inferior, submetidas a deslocamentos crescentes na face superior, que induzem uma taxa de deformação de tração nominal uniforme nos espécimes. As placas são analisadas até a completa ruptura das mesmas. O comprimento b das placas varia de 0,05 a 3,5 m. O menor arranjo que conduz a resultados satisfatórios consiste em $10 \times 10 \times 1$ módulos cúbicos, com 1026 graus de liberdade (GDL), usado para a placa de 0,05m, enquanto o modelo da placa de 3,5m consiste em $700 \times 700 \times 1$ módulos cúbicos, com 1472802 GDL, constituindo o maior modelo utilizado neste estudo. Para simular estado plano de deformações, em todos os casos são restritos os deslocamentos nodais na direção normal ao plano médio da placa. As propriedades do material são indicadas na Tabela 4.1. Na Figura 3.7, são mostradas as quatro leis constitutivas básicas com os parâmetros adotados no presente estudo.

Tabela 4.1 – Parâmetros do material e DEM.

Propriedades do Material	Valor
E (módulo de Elasticidade)	$7,5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$
ρ (massa específica)	2700kg/m^3
ν (coeficiente de Poisson)	0,25
Propriedades do DEM	Valor
L (comprimento do módulo básico)	0,005 m
$E(G_f)$ (valor esperado da energia específica de fratura)	1300N/m
$CV(G_f)$ (coeficiente de variação de G_f)	40%
ε_p médio (deformação crítica)	$1,088 \times 10^{-4}$

A Figura 4.1 mostra a configuração da placa, as suas dimensões e as condições de contorno, engastadas na face inferior e com deslocamentos prescritos na superior. A energia específica de fratura G_f é modelada como um campo aleatório com as propriedades indicadas na Tabela 4.1. Para todos os modelos a distribuição de probabilidades de G_f foi admitida tipo Weibull e o comprimento de correlação $L_{corr}=0,3L$, valor relacionado à microestrutura do material. Devido a esta variabilidade espacial das propriedades, para obter resultados médios representativos, foram realizadas quatro simulações para cada comprimento e para cada RCE.

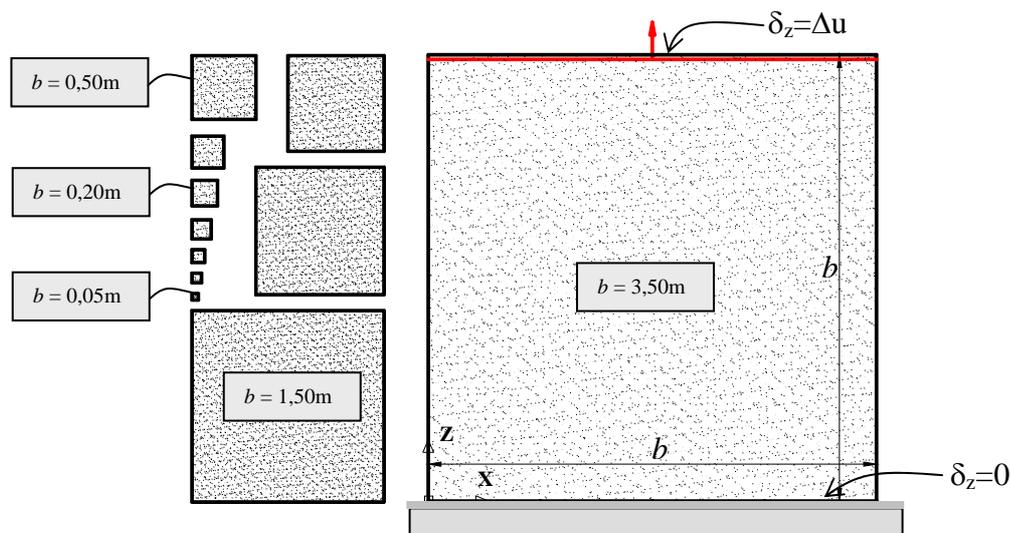


Figura 4.1 – Configuração da placa e condições de contorno.

4.1.2 Resposta das placas de rocha simuladas com o DEM

A Figura 4.2a apresenta as curvas tensão-deformação determinadas nas quatro simulações das placas com $b=0,20m$, assim como a curva média, utilizando o modelo de Hillerborg como RCE. Também estão representados os pontos característicos da curva, onde σ_u indica a tensão última, ε_u a correspondente deformação chamada de última e a deformação crítica ε_c a deformação para a qual a resistência é totalmente esgotada, definida por questões práticas como a deformação correspondente ao ponto no qual a tensão passa a ser menor que 2% da tensão máxima ou última (σ_u). Em placas com comprimentos maiores, nas quais ocorre uma falha frágil, não é possível distinguir claramente a diferença entre a deformação última ε_u e a deformação crítica ε_c . Na Figura 4.2b, estão comparadas as curvas tensão-deformação médias determinadas com as quatro leis constitutivas estudadas. Fica em evidência que o comportamento do modelo de Weibull é bem diferente dos outros modelos, sendo a tangente inicial (modulo de elasticidade da placa completa) igual aos outros modelos somente no começo, separando-se rapidamente do valor que deveria ter o modelo. O desvio da linearidade

em esta curva tensão-deformação global é devido à combinação da contribuição dos diferentes elementos de um módulo, os quais têm diferentes orientações e propriedades, como já foi explicado.

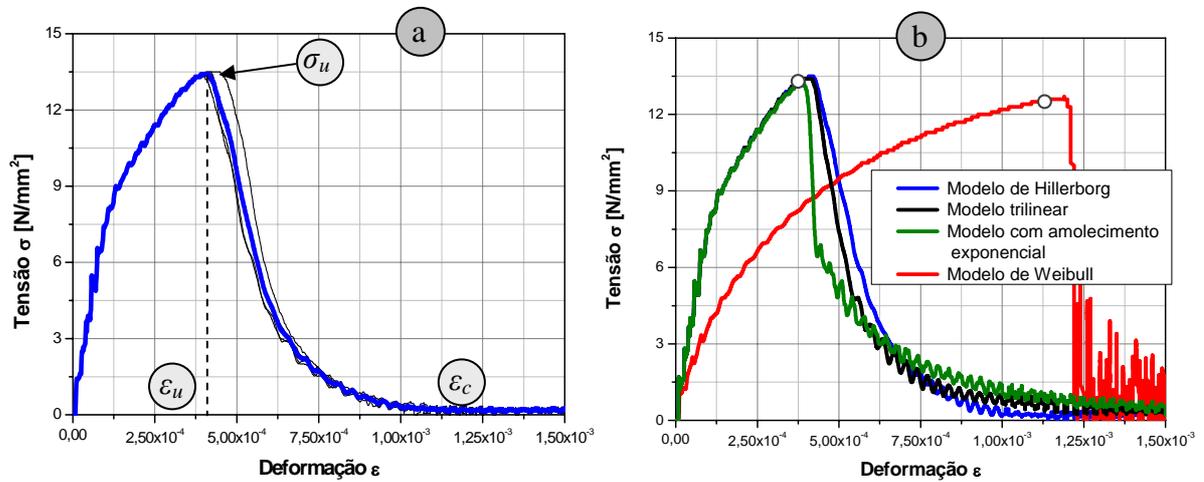


Figura 4.2 – a) Curvas tensão-deformação das placas de comprimento $b=0,20\text{m}$ para as quatro simulações e curvas médias (em azul) para o Modelo de Hillerborg, b) comparação das curvas tensão-deformação obtidas com as quatro leis constitutivas estudadas.

A Figura 4.3 mostra uma das configurações de ruptura obtida com cada modelo. Pode-se observar que as configurações finais são quase idênticas para os modelos de Hillerborg, trilinear e com amolecimento exponencial, mas surgem algumas diferenças importantes depois da nucleação das fissuras, já na fase de amolecimento. Já com o modelo de Weibull a configuração de ruptura muda um pouco mais marcadamente, mas existem semelhanças nas regiões de começo da propagação.

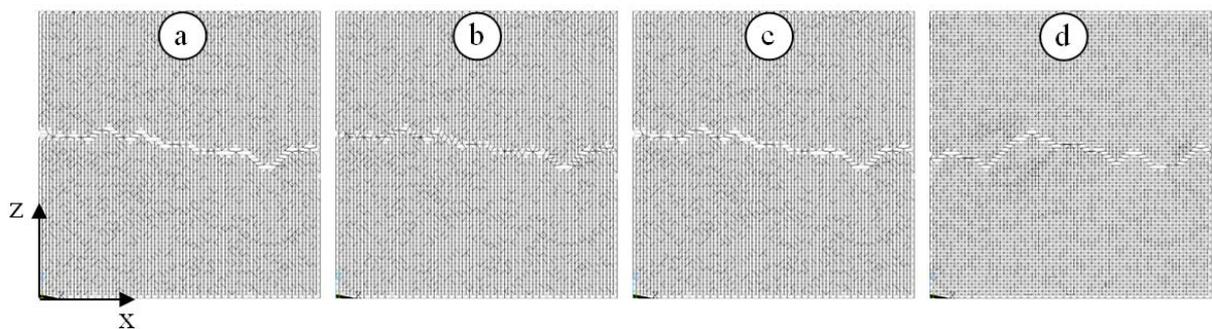


Figura 4.3 – Configurações de ruptura para placas com comprimento $b=0,20\text{ m}$, para os modelos: a) de Hillerborg, b) trilinear, c) com amolecimento exponencial e d) de Weibull.

Para analisar melhor as diferenças entre os modelos, na Figura 4.4 é mostrada a distribuição dos índices de dano obtidos em cada simulação no ponto correspondente à curva

tensão-deformação marcado na Figura 4.2b. É possível observar que as regiões de dano são similares, mas o modelo de Weibull apresenta maiores valores de dano. A trinca tem sua nucleação na mesma região da placa em todos os casos, mas quando propaga, devido à quantidade de dano, segue caminhos diferentes, principalmente no modelo de Weibull, como se observa comparando com a Figura 4.3.

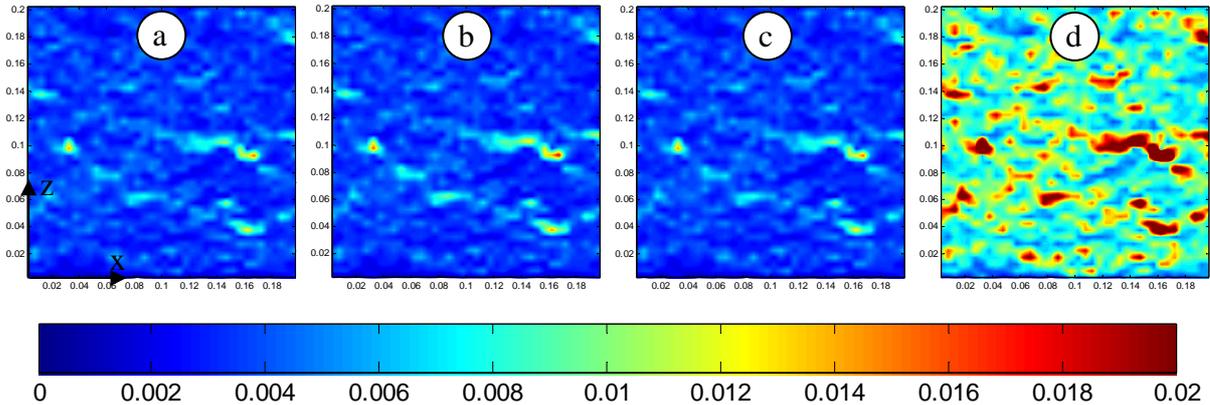


Figura 4.4 – Dano distribuído na placa de $b=0,20$ m, para: a) Modelo de Hillerborg, b) modelo trilinear, c) Modelo com amolecimento exponencial e d) Modelo de Weibull.

A Figura 4.5a ilustra as funções tensão-deformação globais médias para as diferentes dimensões resultantes da RCE bilinear (Hillerborg). Observa-se uma mudança do comportamento relacionada com um tamanho de placa entre 0,25 e 0,5m, onde, se passa de ter propagação estável para ter instabilidade na propagação. Como foi mostrado na Figura 4.1a, podem-se especificar as curvas por intermédio da identificação dos valores característicos sem perder muitas informações essenciais. Na Tabela 4.2, estão listados os correspondentes valores médios característicos das curvas tensão-deformação para as quatro RCE, para as simulações das placas com os diferentes tamanhos.

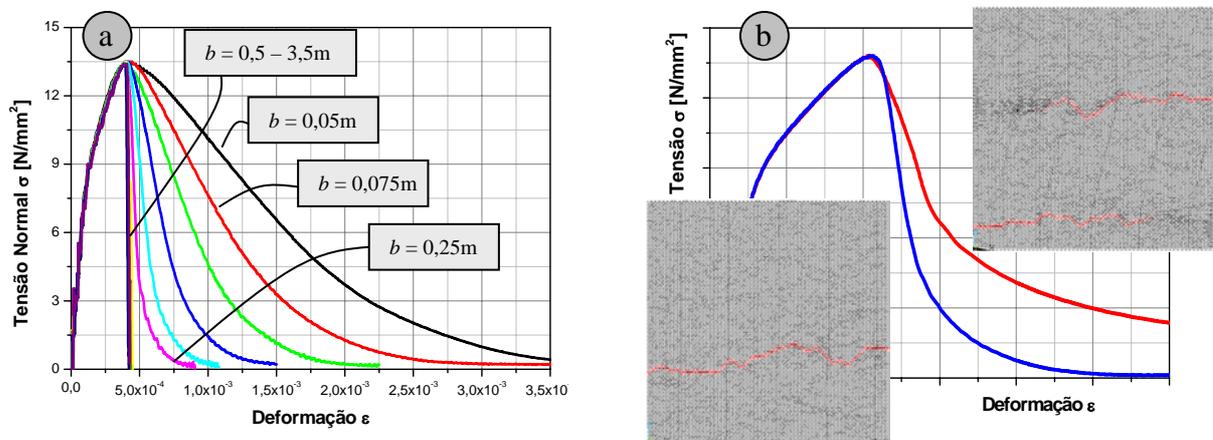


Figura 4.5 – a) Curvas tensão-deformação médias globais para as diferentes dimensões da RCE de Hillerborg, b) mudança de comportamento relativo aos resultados.

Cabe esclarecer que sempre foram utilizadas configurações autossimilares. Isso quer dizer que tem casos em que as simulações produzem diferentes padrões de ruptura, como mostrado na Figura 4.5b, na qual algumas vezes produzem somente uma fissura e outras vezes duas ou mais. Para realizar todos os seguintes estudos, sempre foram utilizadas simulações que tivessem a propagação de somente uma fissura, ou somente duas, não misturando nunca comportamentos diferentes entre si.

Na Figura 4.6a, mostra-se o efeito de escala das tensões médias últimas em escala bi-logarítmica para as quatro leis constitutivas, já na Figura 4.6b estão representadas, também em escala bi-logarítmica, a variação dos valores médios das deformações últimas e críticas (ver suas definições na Figura 4.2) com o tamanho da placa para as RCE estudadas.

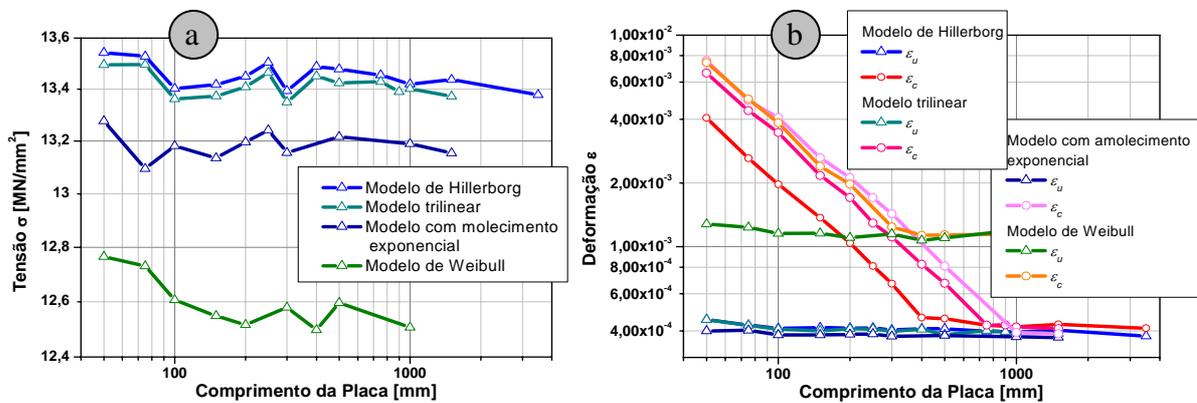


Figura 4.6 – Efeito de escala para as quatro RCE de a) tensões últimas e b) deformações características médias (escala bi-logarítmica).

Em princípio, na Figura 4.6a, observa-se que praticamente não se tem efeito de escala nas tensões para os modelos de Hillerborg, trilinear e com amolecimento exponencial. Já o modelo de Weibull apresenta um efeito de escala mais marcado. Isso também pode ser visto na Tabela 4.2. As diferenças entre os valores das tensões máximas e mínimas são de apenas 1,23%, 1,09% e 1,39% para os modelos de Hillerborg, trilinear e com amolecimento exponencial, respectivamente, e 2,14% para Weibull. Na Figura 4.6, o tamanho da placa no qual muda o comportamento de propagação estável a propagação instável (frágil) fica em evidência. Este valor muda com a lei constitutiva adotada, sendo para o modelo bilinear (Hillerborg) da ordem de 0,40m, para o modelo trilinear de 0,90m, de 1,00m para o modelo com amolecimento exponencial e de 0,3m para o modelo de Weibull.

Como é apreciado nas últimas figuras, o modelo de Weibull é bastante diferente dos outros três. O modelo mencionado não pode ser comparado nas mesmas condições, isto é,

com o mesmo coeficiente de variação, tamanho de malha, etc., já que como se observa na Figura 4.2b a resposta global é bastante diferente. Assim, como o modelo de Weibull apresenta dano, praticamente desde o começo, poderia entender-se que representa, em uma escala maior, o comportamento de uma média sobre elementos com alguma das outras leis com um campo aleatório determinado. Por esse motivo, no que segue do trabalho, não é mais levada em conta dita lei constitutiva.

4.2 Cálculo dos expoentes fractais

Trabalhando com o problema apresentado e simulado na seção 4.1, é possível medir os expoentes fractais. Nesta seção são mostrados os resultados obtidos deste ponto de vista para os modelos de Hillerborg, trilinear e com amolecimento exponencial.

4.2.1 Tensões fractais: obtenção do d_σ

Como é explicado na seção 2.4.1, expresso na equação (2.19) e mostrado na Figura 4.7a, o expoente fractal das tensões é a tangente da curva bi-logarítmica de tensões nominais máximas ou últimas (ver σ_u na Figura 4.2a) versus tamanho da dimensão característica da seção (b). Fica claro que o expoente fractal de tensões é uma medida de quanto é importante o efeito de escala de tensões. Isto é, quando $d_\sigma = 0$ não se tem efeito de escala nas tensões e quanto maior o d_σ maior o efeito de escala.

Na Figura 4.7b, mostra-se o gráfico em escala bi-logarítmica de tensões médias vs comprimento da placa, onde se observa, também, uma reta obtida com mínimos quadrados para cada lei constitutiva. A tangente desta reta é o expoente fractal e a tensão fractal de tração σ_u^* , que é uma constante verdadeira do material invariante com a escala (ver capítulo 2), é o termo constante de dita reta.

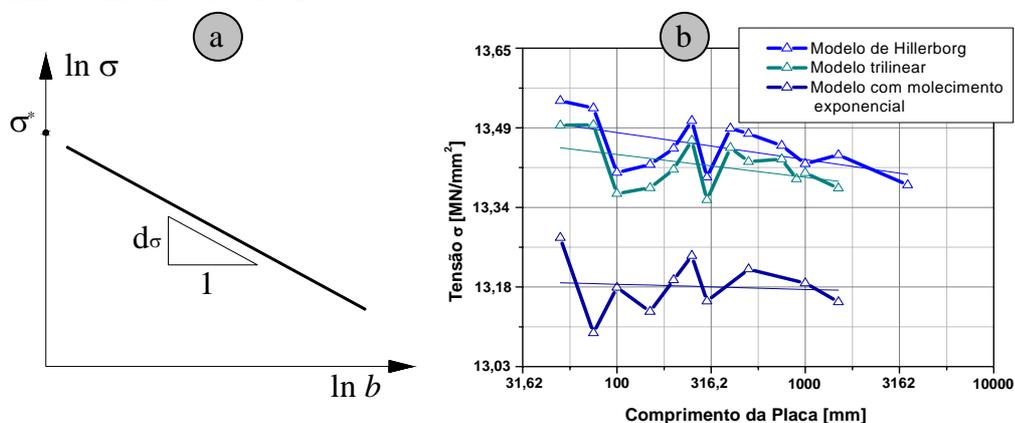


Figura 4.7 – a) Representação gráfica da equação (2.19), b) Variação da tensão média última como o tamanho do bloco (em escala bi-logarítmica).

Assim, para o modelo de Hillerborg se tem $d_\sigma = 0,0017$ e $\sigma_u^* = 13,586 \text{ MN/mm}^{1,9983}$. Como o expoente fractal é praticamente nulo, não se tem efeito de escala nas tensões, como já foi observado anteriormente. Para o modelo trilinear $d_\sigma = 0,0014$ e $\sigma_u^* = 13,526 \text{ MN/mm}^{1,9986}$ e para o modelo com amolecimento exponencial $d_\sigma = 0,0003$ e $\sigma_u^* = 13,207 \text{ MN/mm}^{1,9993}$, onde tampouco é observado o efeito de escala

4.2.2 Deformações fractais: obtenção do d_ε

Seguindo um raciocínio similar ao anterior, segundo a equação (2.21), cuja representação é encontrada na Figura 2.6b, seria possível obter o expoente fractal de deformações d_ε medindo a tangente da curva bi-logarítmica deslocamento crítico (lembrando que $w_c = \varepsilon_c b$) versus tamanho da dimensão característica da seção (b). Mas levando em conta os últimos dois termos da equação (2.20), transcrita a seguir:

$$w_c = \varepsilon_c b = \varepsilon_c^* b^{1-d_\varepsilon} \quad (4.1)$$

resolvendo a deformação crítica e aplicando logaritmos se chegar à seguinte expressão:

$$\ln \varepsilon_c = \ln \varepsilon_c^* - d_\varepsilon \ln b \quad (4.2)$$

que expressa que também é possível obter o expoente fractal de deformações d_ε da curva deformação crítica versus tamanho da dimensão característica da seção (b), em escala bi-logarítmica, medindo a tangente da mesma.

Assim, da Figura 4.6b é possível obter os expoente fractais de deformações críticas e últimas, para cada modelo, que estão resumidos na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Expoentes fractais de deformações para os quatro modelos estudados.

	Hillerborg	Trilinear	Amolecimento Exponencial
ε_c^*	0,1838	0,3475	0,3518
$d\varepsilon_c$	0,9801	1,0088	0,9746
ε_u^*	0,0005	0,0005	0,0004
$d\varepsilon_u$	0,0299	0,0313	0,0199

Essa forma de medir o expoente fractal crítico não é representativa, já que o mencionado expoente é sempre muito próximo de 1. Também pode mudar com a forma em que é identificada a deformação crítica, que neste caso foi considerada quando se chegava a

uma tensão igual a 2% da tensão máxima. Para explicar porque este d_ϵ não pode ser utilizado, analisem-se as configurações apresentadas na Figura 4.8. Esta figura mostra a configuração de ruptura da placa quadrada com comprimento $b=0,20$ m, utilizando o Modelo de Hillerborg, em quatro tempos diferentes sinalados na Figura 4.9a. Os elementos danificados são expostos no gráfico de uma cor mais escura, enquanto os quebrados em vermelhos.

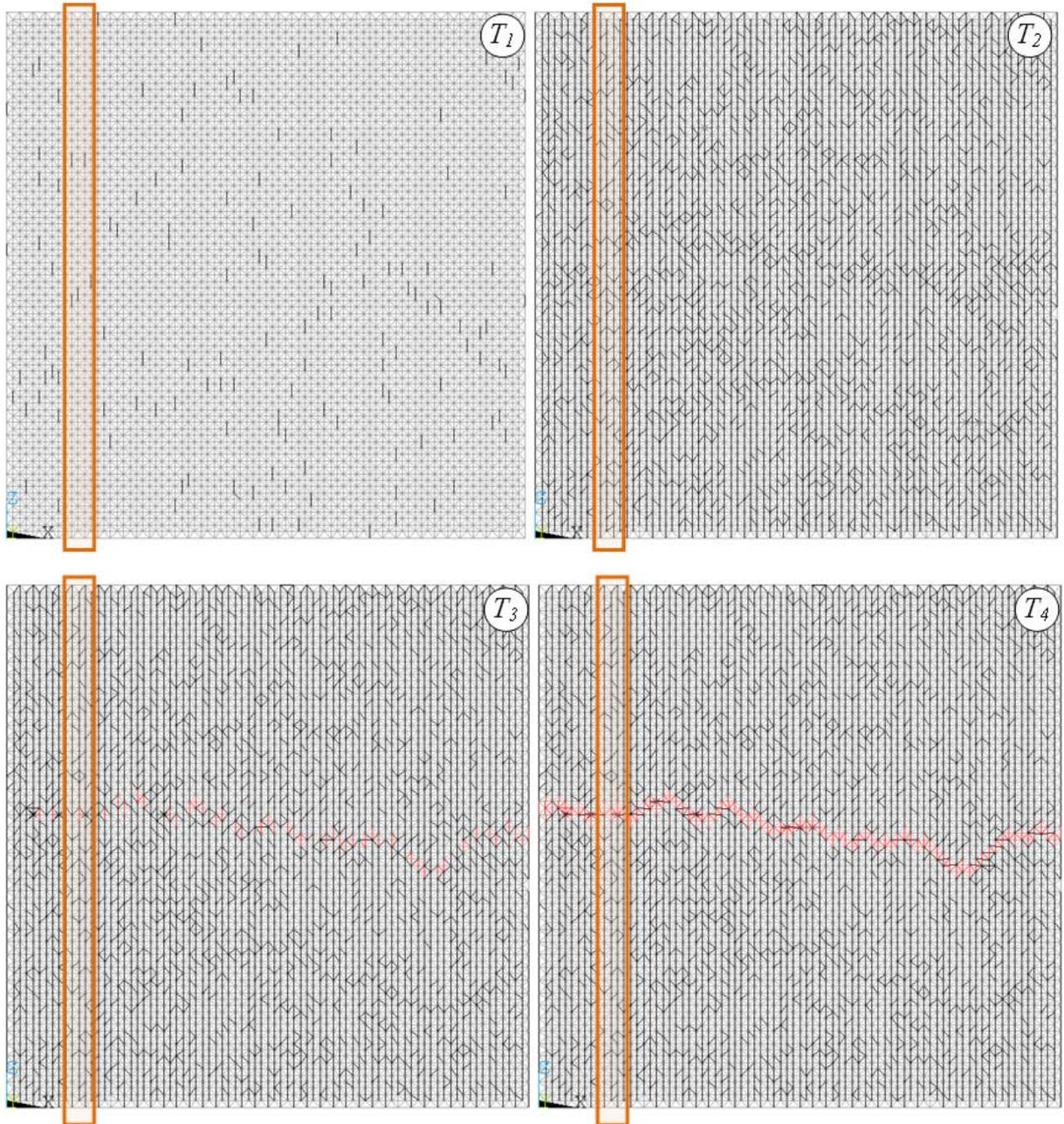


Figura 4.8 – Configurações em três tempos diferentes de uma placa tracionada com aleatoriedade ($CV(G_f)=40\%$).

Como é mostrado na Figura 4.9a, a primeira imagem ocorre bem antes de alcançar o ponto (ϵ_u, σ_u) , como é possível ver, existe dano distribuído ao longo da placa. A segunda

imagem corresponde a um ponto um pouco depois do valor máximo de tensões. Pode-se observar que já se têm elementos quebrados, isto significa que já ocorreu a nucleação do dano. A terceira imagem mostra a placa com uma trinca muito mais definida, enquanto na última a placa, está quebrada e com uma trinca totalmente definida.

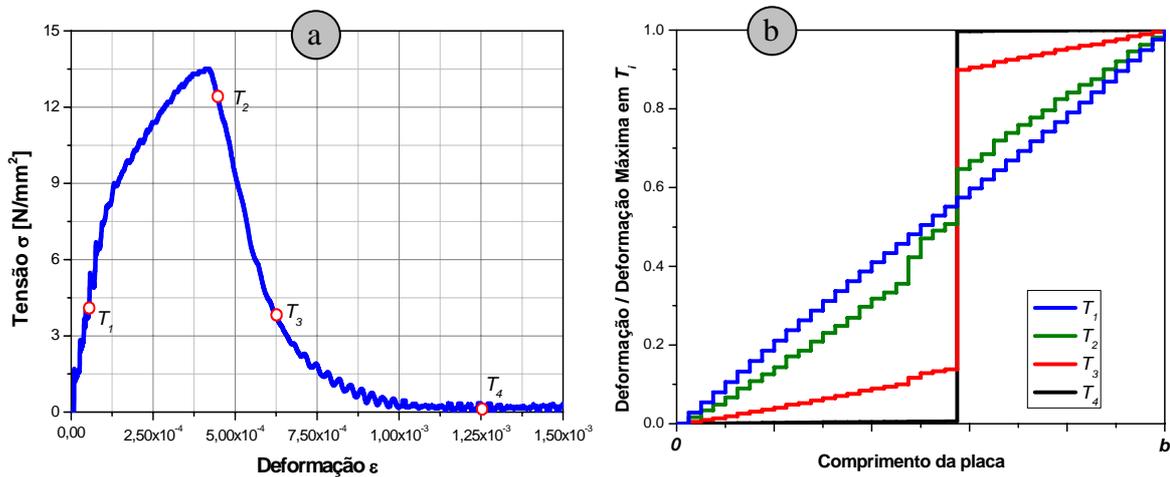


Figura 4.9 – a) Pontos da curva tensão-deformação coincidentes com as imagens da Figura 4.8. b) Deformações normalizadas relativos ao comprimento da placa das faixas marcadas na figura anterior.

Na Figura 4.9b, são mostradas as deformações normalizadas da faixa, ressaltada na Figura 4.8, para cada um dos tempos mostrados na Figura 4.9a. Cabe esclarecer que foi considerado que as deformações estão concentradas nos nós. Pode-se comparar esta figura com a Figura 2.7, que mostra as deformações sobre uma barra sujeita a tração extremamente difusas ($d_e=0$) e extremamente localizadas ($d_e=1$). Assim, observa-se que durante o processo de falha a faixa da placa analisada passa de ter um expoente fractal de deformações de zero a um de 1, já que as deformações voltam a zero nas regiões fora da trinca (em todas as leis constitutivas elásticas a descarga se faz até a origem). Por isto, o valor do expoente fractal de deformações buscado é, então, o referente a antes que aconteça a nucleação do dano.

Volte-se a considerar somente a faixa marcada da Figura 4.8. Suponha-se que existem fissuras nos cubos básicos do DEM que formam essa faixa quando algum dos elementos que o compõem é encontrado danificados. Para esta identificação, usam-se os índices de dano apresentados na seção 3.7. Como o índice de dano expressa a quantidade de dano que tem cada módulo, quando este valor ultrapassa um $x\%$, considera-se que o módulo está danificado (ver Figura 4.10a). Agora utilizando o método das caixas para o cálculo do expoente fractal

(ver seção 2.5), o mesmo se obtém como o limite da inclinação da curva bi-logarítmica N vs d . A Figura 4.10b mostra as diferentes curvas $\log(N)$ vs $\log(d)$ para vários valores de dano x considerados como limiares de dano para considerar o bloco como danificado. Pode-se apreciar que o expoente fractal será muito sensível a este valor de dano x .

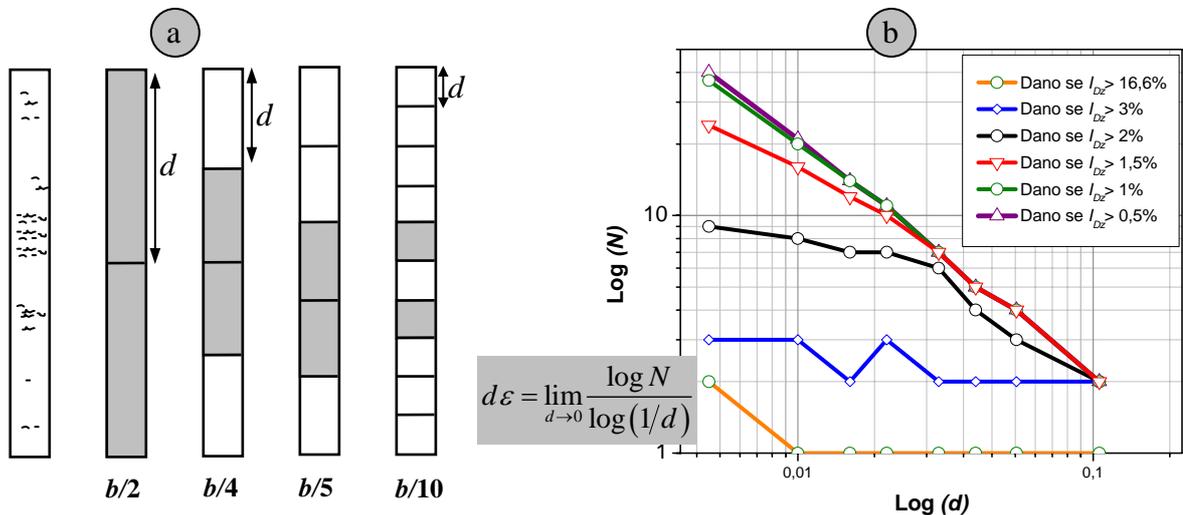


Figura 4.10 – a) Forma de cálculo do número de seções danificadas com o método das caixas (ver seção 2.5) e b) forma de aproximar o limite para a obtenção de d_ϵ .

Fazendo o mesmo em cada faixa que compõe a placa e realizando a média dos expoentes fractais de cada faixa obtém-se o expoente fractal médio da placa. Como foi mostrado na Figura 4.10b, esta forma de expressar o expoente fractal é sensível ao limiar de dano que identifica o bloco como danificado, mas considerando I_D menor que o 1% o expoente fractal já se encontra estabilizado. Assim, definem-se dois valores de I_D como limiares de danificação do bloco, quando é maior que 1% e quando é maior que 16,6% (considerando dano na direção z). Este último valor corresponde com o índice de dano de um elemento quebrado dentro do módulo. Na Figura 4.11a, mostram-se os valores dos expoentes fractais de deformação médios da placa para diferentes deformações com diferentes limiares de dano. Nesta figura, encontra-se comparada a curva tensão-deformação, onde se pode apreciar que, próximo ao pico, a distribuição das superfícies de dano se estabiliza. Aparentemente, este ponto corresponde com o começo da propagação da trinca.

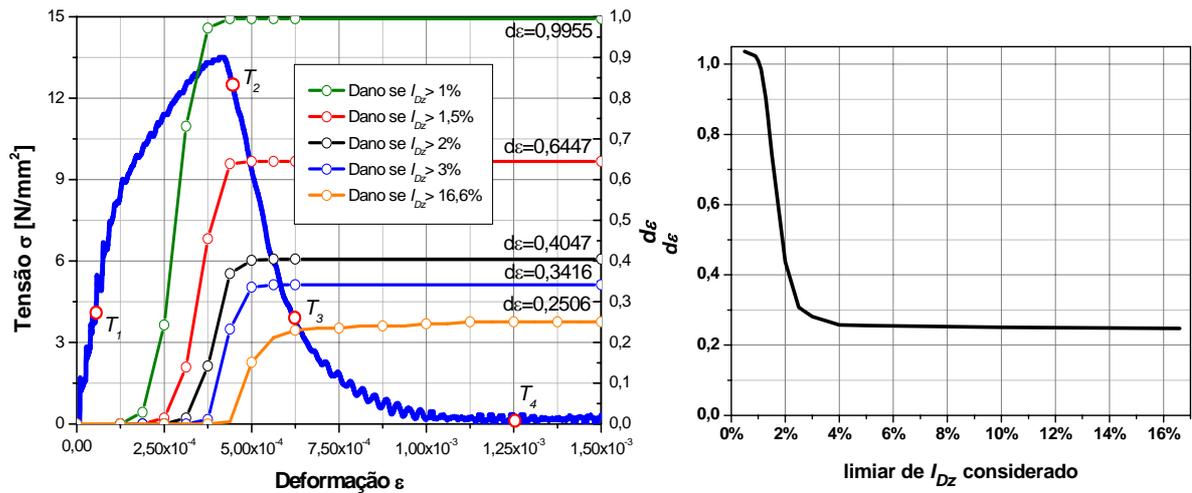


Figura 4.11 – a) Variação do expoente fractal médio da placa com a deformação da mesma.
b) d_ε médio das quatro placas de 0,2m em função do limiar de dano considerado.

Fazendo a média para as quatro simulações de cada tamanho de placa e para todas as leis constitutivas, considerando os dois limiares antes mencionados, encontrou-se que o expoente fractal de deformações varia de 0,25 considerando dano quando $I_{Dz} > 16,6\%$ a 1 considerando dano quando $I_{Dz} > 1\%$. Observou-se que o expoente fractal até pode ser levemente maior que 1, dependendo de como se define o dano, ver Figura 4.12. Praticamente não existe diferença entre as leis de Hillerborg, Trilinear e com Amolecimento Exponencial.

O expoente fractal não parece ser invariável com a escala, isto é um bom indicador. Mas o valor é muito sensível a como se define o dano. Dependendo de como se considerem pode se chegar a conclusões totalmente diferentes.

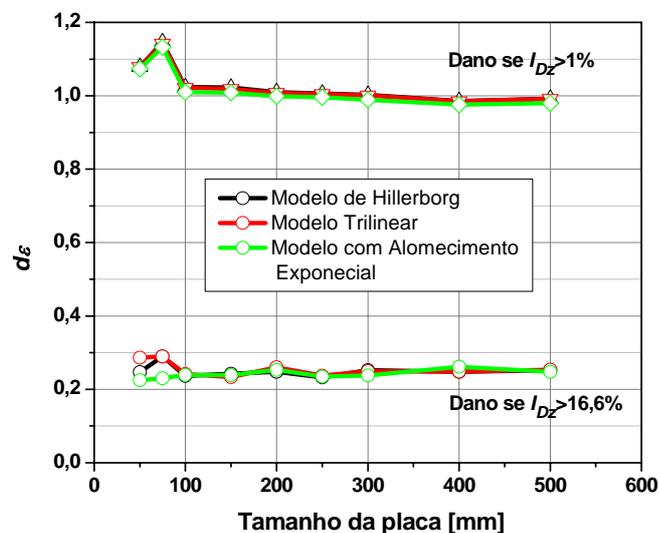


Figura 4.12 – Variação do expoente fractal com o tamanho da placa para cada RCE analisada.

Como esta forma de definir o expoente fractal está relacionada com a distribuição do dano, e o dano está relacionado com a relação constitutiva e o campo aleatório com o qual foi definida a energia específica de fratura, acredita-se que é possível encontrar uma relação teórica entre estes, isto é, definir como pode variar o expoente fractal com estas variáveis. Mas esta análise fica fora do escopo da presente tese.

4.2.3 Energia de fratura fractal: obtenção do d_G

Para definir totalmente a lei coesiva fractal, faltaria medir somente a dimensão fractal d_G de energia específica de fratura. Uma forma de obter este expoente é por intermédio da dimensão fractal de superfície de fratura (seção 2.4.3) $d_G = \Delta_G - 2$, sendo Δ_G a dimensão fractal de superfície de fratura.

A seguir são mostradas duas formas diferentes de medir a dimensão fractal da superfície da fratura, utilizando em princípio a placa quadrada de lado 0,20m simulada com o DEM utilizando a RCE de Hillerborg.

Método 1: método patchwork.

Na expressão (2.34) apresenta-se a fórmula do método de *patchwork* para uma superfície. Conhecendo a relação entre d_G e Δ_G e substituindo a superfície pelo comprimento da mesma, já que se estuda uma placa em estado plano de tensões, dita expressão pode ser substituída por:

$$d_{Gpatch} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \ell(r)}{\log r} \quad (4.3)$$

Na qual ℓ é o comprimento da fissura e r o tamanho do segmento de discretização.

Para a utilização deste método é necessário conhecer a forma da área de fratura ou comprimento ℓ da trinca em estado plano. A seguir, mostra-se a metodologia implementada para medir dita área, ou o comprimento da trinca, obtida mediante a simulação numérica com o DEM.

Uma vez realizada a simulação, em um pós-processo das configurações de ruptura, identificam-se primeiro, os centróides dos elementos diagonais com falha (totalmente danificados), para depois ser subdivididos em grupos de pontos. São considerados pontos pertencentes ao mesmo grupo, quando a distância até o ponto mais próximo é menor que o comprimento de um módulo básico (L). Apenas são considerados os elementos diagonais para simplificar o processo de identificação, sem afetar, significativamente, a superfície ou

comprimento resultante. Para exemplo, a Figura 4.13 mostra em *a*) os elementos quebrados em uma placa de onde se geram duas trincas no processo de falha, em *b*) a posição dos centróides dos elementos diagonais quebrados, e em *c*) o agrupamento desses pontos em dois grupos que representam as duas fissuras diferentes. Este agrupamento é executado a partir das distâncias entre os pontos. Não são levadas em conta fraturas individuais com um comprimento inferior a 10% do lado da placa, já que isto complica, consideravelmente, o processamento.

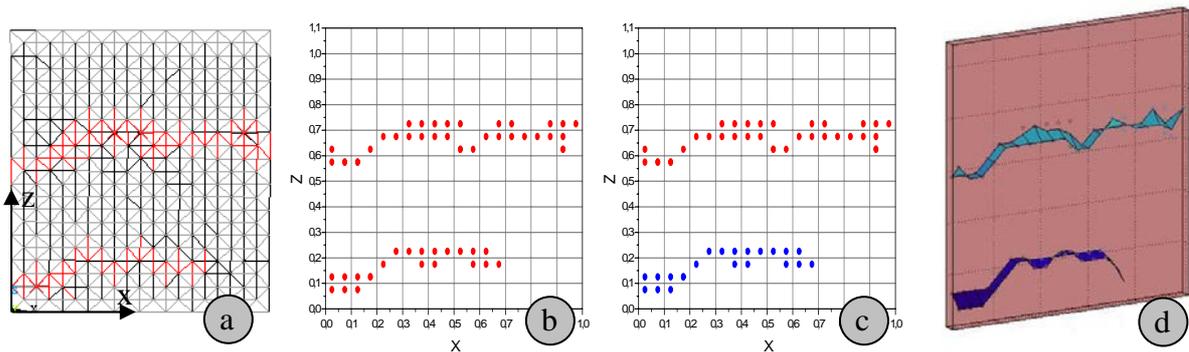


Figura 4.13 – a) Configuração de ruptura de uma placa com duas trincas analisada com o DEM, b) identificação dos centróides dos elementos diagonais quebrados, c) agrupamento dos pontos em diferentes fraturas, e d) superfícies de fratura determinadas por pós-processamento.

Para determinar a posição real da superfície de trinca (para trincas propagando na direção x), caso mais de um ponto apresente a mesma coordenada em x , a coordenada z da fratura é determinada pela média das coordenadas em z elementos quebrados.

Note-se que as intersecções da superfície de fratura geradas com as faces da placa não são, necessariamente, iguais, portanto, podem ter comprimentos levemente diferentes. O comprimento ℓ da fissura é determinado como a média dos dois comprimentos. Na Figura 4.13d, mostra-se a superfície das fissuras obtidas com a metodologia proposta. É importante fazer notar que quando a fissura apresenta bifurcação, o comprimento ℓ é computado como a soma dos comprimentos de todas as fissuras.

A Figura 4.14 mostra a configuração de ruptura obtida com o DEM e a superfície da fissura gerada por pós-processamento para calcular o comprimento ℓ da mesma, para uma placa de 0,20m submetida à tração prescrita utilizando a RCE de Hillerborg.

Para poder obter o valor de d_{Gpatch} (expressão 4.3) da placa mostrada na Figura 4.14 é necessário obter para diferentes valores de r , o tamanho do segmento de discretização, o comprimento da fissura $\ell(r)$. Na Figura 4.14c, mostra-se como seria o comprimento para diferentes valores do segmento de discretização.

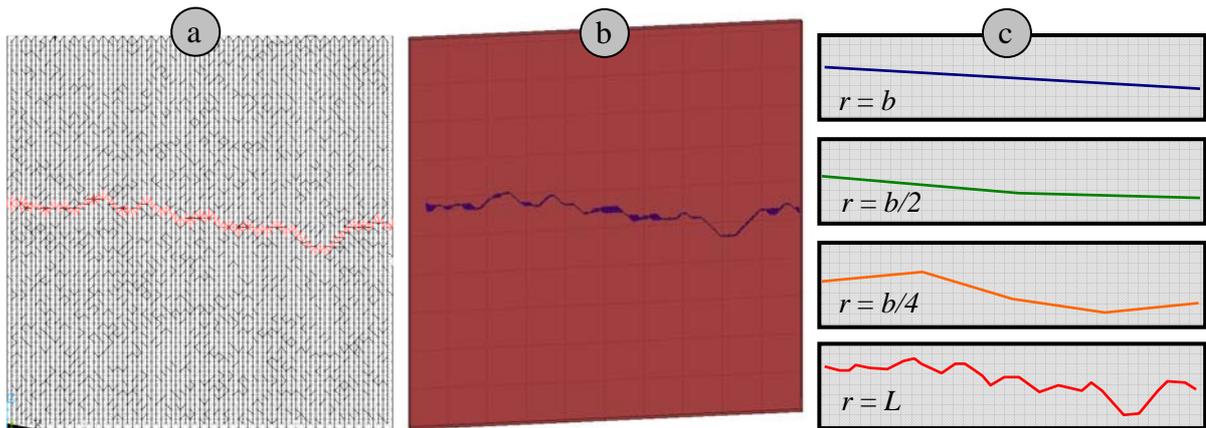


Figura 4.14 – Comparação entre a) a configuração de ruptura obtida com o DEM e b) a superfície de fratura determinada por pós-processamento. c) forma de obter o comprimento da fissura em função do tamanho do segmento de discretização.

Na Figura 4.15, é apresentado o diagrama bi-logarítmico $\log(\ell)$ vs $\log(r)$ para a placa de 0,20m, submetida à tração prescrita mostrada na figura anterior. O expoente fractal pode ser avaliado a partir da inclinação da reta de regressão no diagrama bi-logarítmico, antes mencionado [Carpinteri *et al.*, 1999].

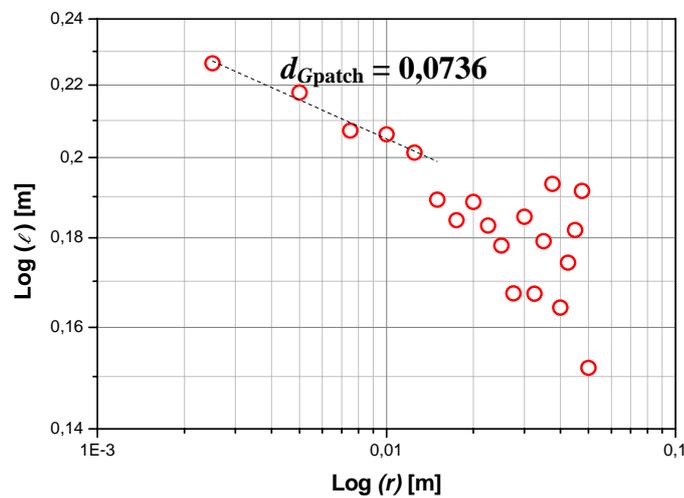


Figura 4.15 – Diagrama bi-logarítmico de ℓ vs r para a simulação de uma placa de 0,20m submetida a tração prescrita utilizando a RCE de Hillerborg.

Fazendo isto e tirando a média para cada placa do mesmo tamanho, para todos os tamanhos e para cada relação constitutiva analisada, obtêm-se os valores apresentados na Figura 4.16.

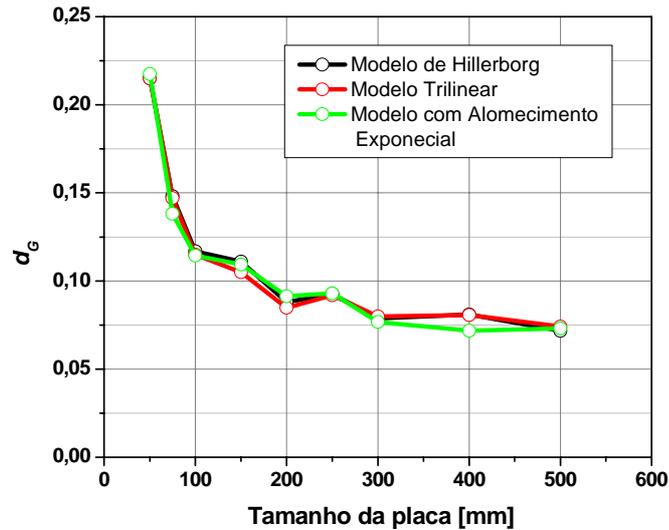


Figura 4.16 – Variação do expoente fractal da energia de fratura com o tamanho da placa usando o método de *Patchwork*.

Método 2: método energético.

Este procedimento para obter a dimensão fractal da superfície invasiva de fratura, designado como método energético, envolve a energia de fratura dissipada no processo. De acordo com os princípios básicos da MFEL, a energia mínima E_{Dmin} necessária para dividir a placa ou bloco em consideração em duas partes pode ser escrita pela equação (4.4), enquanto a energia gasta pela fratura (E_D) é definida pela equação (4.5).

$$E_{Dmin} = G_f n r \quad (4.4)$$

$$E_D = G_f n^{1+d_{Ge}} r \quad (4.5)$$

Onde n é o número de intervalos de tamanho r , no qual é dividida a seção.

Combinando as expressões (4.4) e (4.5), é possível chegar à seguinte expressão do expoente fractal d_{Ge} :

$$d_{Ge} = \frac{\log(E_D/E_{Dmin})}{\log n} \quad (4.6)$$

Essa forma de medir energia foi empregada primeiramente por Miguel *et al.*, 2010, na determinação da dimensão fractal de corpos de prova cúbicos de rocha ($\Delta e=2+d_{Ge}$).

A expressão (4.6) constitui uma boa estimativa do expoente fractal caso o comprimento de discretização r é igual ou menor que a dimensão característica do campo aleatório que define as propriedades do material. Note-se que neste trabalho o campo aleatório da energia de fratura é definido com uma distribuição tipo Weibull.

A Figura 4.17 mostra a variação com a deformação da energia dissipada por dano da placa de rocha de 0,20m submetida à tração prescrita, simulada utilizando a RCE de Hillerborg. Depois que a placa rompe completamente, a energia dissipada por dano tende a estabilizar-se, mas o valor utilizado para obter a dimensão fractal com a expressão (4.6) é o correspondente com a energia elástica mínima.

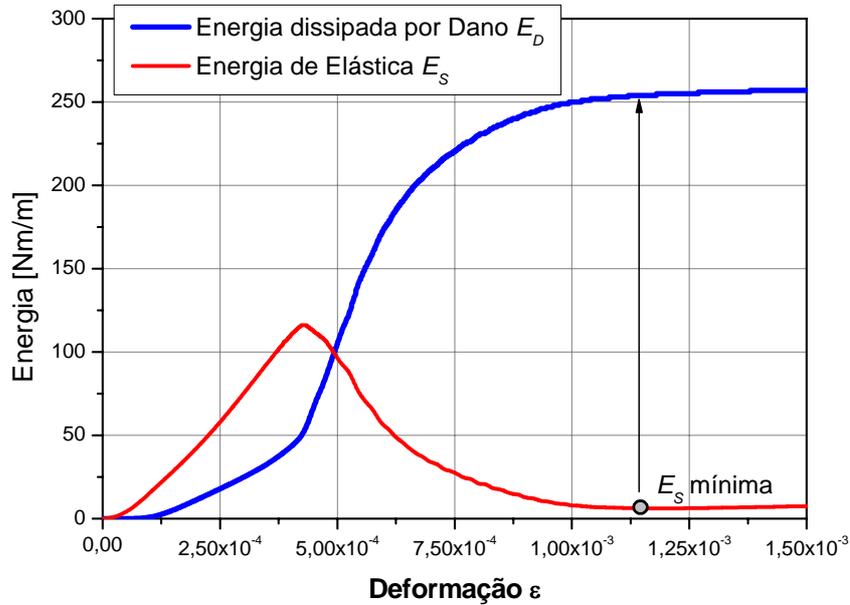


Figura 4.17 – Evolução da energia dissipada por dano e energia elástica com a deformação para uma placa de rocha de 0,20m submetida à tração prescrita simulada utilizando a RCE de Hillerborg.

Lembrando que a placa é simulada em estado plano de deformações, a energia dissipada por dano mínima para romper esta placa em duas partes por unidade de espessura é:

$$E_{Dmin} = G_f b = 1300 \text{ N/m} \cdot 0,20 \text{ m} = 260 \text{ Nm/m} \quad (4.5)$$

Pode-se obter esta mesma energia considerando que rompem as cinco barras longitudinais e as quatro diagonais de todos os módulos no comprimento da placa (ver expressão 3.7).

A ruptura não sempre ocorre desta forma, como se aprecia na Figura 4.14a ou no detalhe na Figura 4.18. Caso a fissura propague a 45° no DEM, somente se romperiam dois elementos longitudinais do lado do cubo básico mais um elemento interno, além de dois elementos diagonais. Ficam as barras horizontais, que formam um mecanismo, e somente rompem quando tracionadas, muito tempo depois. A Figura 4.18 mostra a configuração de ruptura de outra placa de 0,2m de comprimento submetida à tração prescrita simulada, utilizando a RCE de Hillerborg vinculada à curva tensão-deformação. Nela se mostram

detalhes da configuração de ruptura em diferentes regiões e para diferentes deformações. Nela aprecia-se claramente que nas regiões onde a fissura propaga a 45°, no começo rompem somente as barras verticais e logo as diagonais tracionadas. A resistência global da placa neste instante é praticamente nula. As barras horizontais, cuja posição coincide com a da fissura, começam a girar até ficar tracionadas e, finalmente, quebram. Este último mecanismo ocorre bastante depois do anterior, observando-se neste momento, um leve aumento na resistência global da placa antes da ruptura total. Este processo de falha é mostrado nos detalhes superiores de Figura 4.18. Cabe notar que este mecanismo é o responsável pelo aumento de energia elástica e de dissipação de dano depois de atingida a energia elástica mínima na Figura 4.17.

Quando a fissura propaga horizontalmente ou em leve ziguezague, rompem-se os quatro elementos dos eixos do módulo básico mais um elemento interno junto com quatro diagonais, como esperado e suposto nas bases do método (ver Figura 3.3, na seção 3.3). Este mecanismo fica evidente no detalhe inferior (verde) da Figura 4.18. É interessante destacar que este mecanismo ocorre de uma só vez e antes ou durante a perda de resistência global da placa.

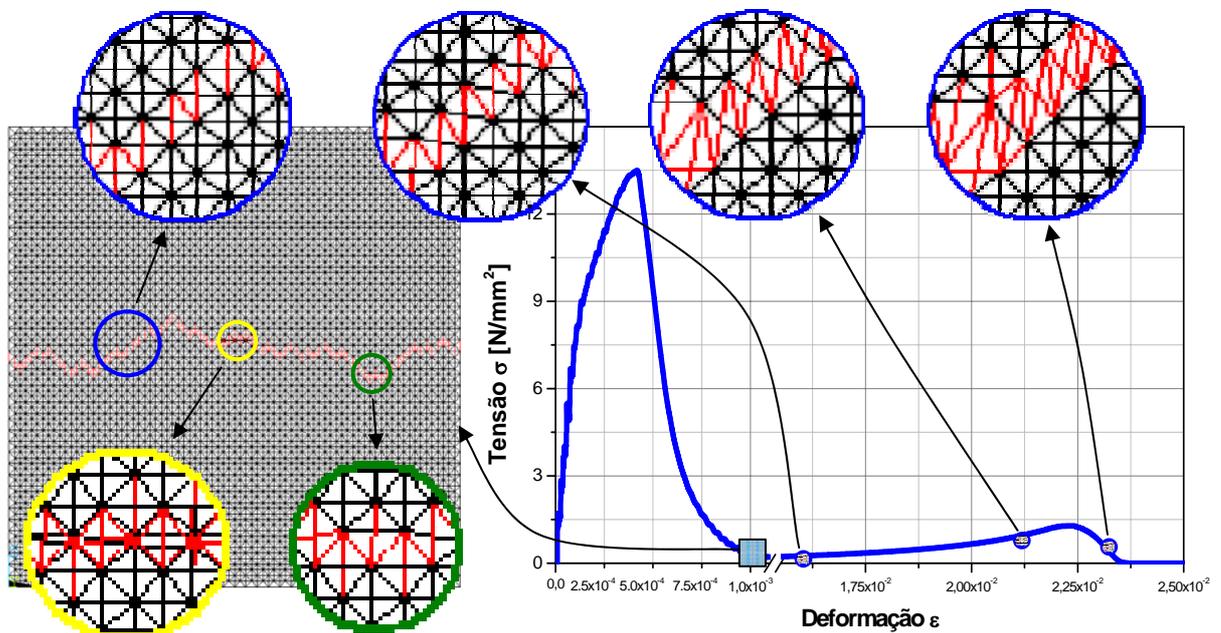


Figura 4.18 – Configuração de ruptura de uma placa de rocha de 0,20m submetida a tração prescrita simulada com a RCE de Hillerborg e detalhes dos mecanismos de falha a 0° e 45°.

No círculo amarelo da Figura 4.18, mostra-se uma variação do mecanismo antes mencionado, devido à menor resistência de algumas das diagonais. A propagação ocorre na fase do módulo básico, rompendo duas barras internas, duas diagonais da frente do módulo

inferior e duas diagonais de atrás do módulo superior, além da barra horizontal que une estas diagonais. A energia para este mecanismo é similar à de propagação a zero grau.

Assim, a mínima energia dissipada por dano no DEM, seria obtida com uma fissura propagando a 45° ao longo de toda a placa. Calculando a contribuição do dano de todos os elementos quebrados segundo esta forma de falha no DEM, ter-se-ia $E_{Dmin} = 147,7$ Nm/m. Considerando uma média entre a energia mínima com propagação a 0° (exp. 4.5) e a 45° se teria uma medida de energia de dano mínima necessária para romper uma placa modelada com o DEM.

Finalmente, normalizando as energias de dano obtidas na simulação (Figura 4.17) com cada uma das alternativas de considerar a energia mínima no DEM, é possível obter o expoente fractal da energia de fratura com a expressão (4.6).

A variação do expoente fractal da energia de fratura para cada lei constitutiva com o tamanho da placa, calculado com o método energético, é mostrada na Figura 4.19. O valor do expoente fractal para cada tamanho de placa foi considerado como a média dos valores das quatro simulações e expostos no gráfico considerando a energia dissipada por dano normalizada em relação à energia para propagação a 0°, 45° e uma média de ambas.

É interessante ressaltar que o expoente fractal da energia de fratura calculado com o método de *patchwork* tem em conta somente a superfície da fissura principal, enquanto com o método energético são levadas em conta, também, todas as fissuras e microfissuras distribuídas em toda a placa.

Salienta-se, também, que não se aprecia muita variação entre os resultados das três leis analisadas.

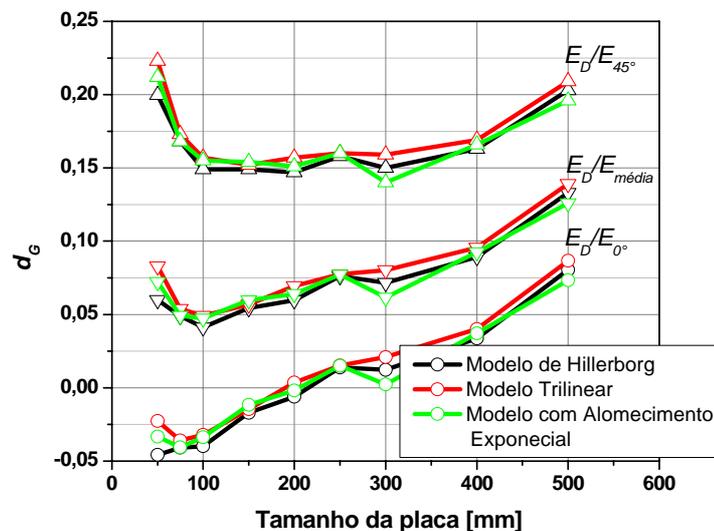


Figura 4.19 – Variação do expoente fractal da energia de fratura com o tamanho da placa.

4.2.4 Relação entre os expoentes fractais. Lei coesiva independente da escala

Na Tabela 4.4, apresenta-se um resumo de todos os valores dos expoentes fractais obtidos nos itens anteriores. Como não se observou grande variação com a relação constitutiva, na presente seção, trabalhar-se-á somente com os resultados obtidos usando a lei bilinear ou de Hillerborg.

Foi considerado somente o expoente fractal da superfície de fratura calculado com energias, porque representa as fissuras distribuídas em toda a placa. Dentro destes valores, considerou-se o normalizado com relação à energia de propagação a 45°, a mínima necessária no DEM para romper uma placa.

Tabela 4.4 – Resumo dos expoentes fractais para a lei de Hillerborg.

	d_σ	d_ε			d_G		
		Analisando as curvas	$I_{Dz} > 16,6\%$	$I_{Dz} > 1\%$	mín	máx	médio
Hillerborg	0,0017	0,9801	0,25	1	0,15	0,22	0,16

Como explicado na seção 2.4.4, a introdução da lei coesiva fractal estabelece que a soma dos três expoentes fractais seja igual à unidade.

Na deformação fractal, têm-se dois processos e expoentes relacionados, que interagem entre si. O primeiro está relacionado com a distribuição do dano na placa, onde o expoente fractal varia de zero até um valor máximo (que depende do limiar de energia para considerar o dano) em um ponto próximo ao da localização do dano. O segundo processo está relacionado justamente com a localização, onde o expoente fractal varia de zero a um (o quase como obtido analisando as curvas) desde o ponto onde começa a localização até o final do processo de ruptura.

Com base na invariância da soma dos expoentes fractais e considerando o expoente fractal da energia de fratura médio, o expoente fractal de deformações relacionado com a distribuição do dano teria que ser:

$$d_G + d_\varepsilon + d_\sigma = 1, \quad d_\sigma \approx 0, \quad d_G \approx 0,16 \quad \Rightarrow \quad d_\varepsilon \approx 0,84 \quad (4.7)$$

Para obter este expoente fractal de deformações analisando a distribuição do dano, ter-se-ia que considerar dano quando o índice de dano seja maior que 1,37% (como se observa na Figura 4.11b). A Figura 4.20a mostra o expoente fractal de deformações utilizando como limiar de dano 1,37%. Para o modelo de Hillerborg, este valor de dano corresponderia a somente um elemento danificado o qual se encontra em um ponto da RCE posicionado aos

8,7% do total do amolecimento, ou a que todos os elementos verticais se encontrem um ponto a 1,8% em dita parte da RCE. Outra característica interessante é que nas placas simuladas com 10 e 15 módulos básicos ($b=50$ e 75 mm) o valor do expoente fractal é sempre maior que para as outras placas, pelo que não poderia ser aplicado o mesmo critério. Isto aparenta ser uma questão de refino da malha.

Logo, na Figura 4.20b, mostra-se a variação do expoente fractal de deformações com a deformação da placa. Para melhorar a interpretação colocou-se na figura também a curva tensão-deformação da placa de 0,2m de comprimento. Aqui pode se apreciar que a variação de zero ao valor máximo (0,84 em média) do expoente fractal ocorre para as mesmas deformações não importando o tamanho da placa, chegando ao máximo na região do pico da curva (como visto na Figura 4.5a, este pico não tem muita variação com o tamanho da placa tampouco).

Para construir a curva tensão-deformação fractal, a curva σ^* vs ε^* , que é independente da escala, primeiro se tem que analisar a definição do deslocamento. Carpinteri definiu em vários trabalhos [Carpinteri, 1994b; Carpinteri *et al.*, 1999 ou Carpinteri *et al.*, 2002] que o deslocamento pode ser escrito como:

$$w = w_T - w_{pp} \quad (4.8)$$

onde w_T é o deslocamento total e w_{pp} é o deslocamento devido à deformações elásticas e inelásticas antes do pico de tensões ser atingido no teste analisado.

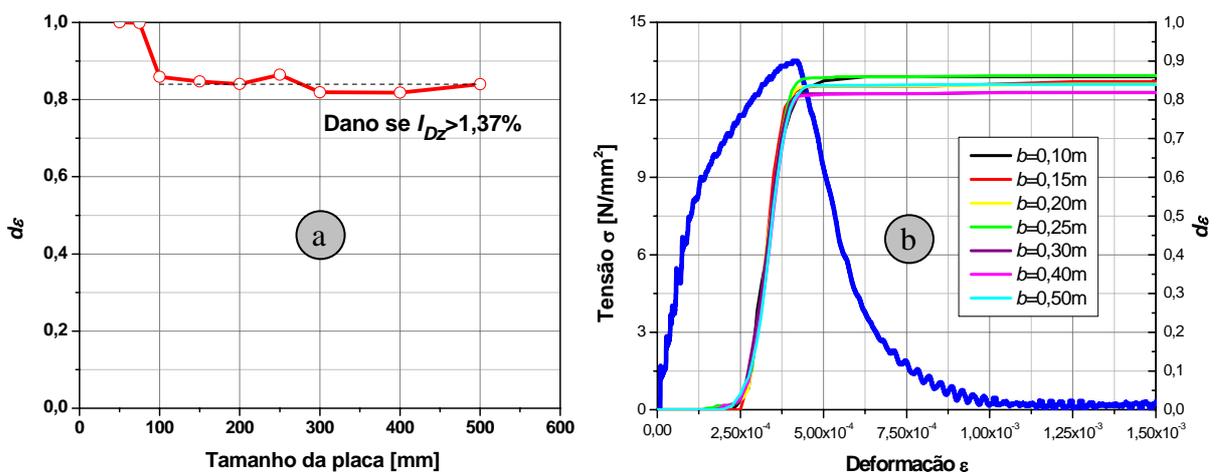


Figura 4.20 – Variação do expoente fractal de deformações, a) com o tamanho da placa, b) com a deformação da placa.

Em trabalhos prévios realizados com o DEM, e antes de encontrar a variação do expoente de deformações com a deformação [Kosteski *et al.*, 2011b], encontrou-se que a curva σ^* vs ε^* não ficava independente da escala usando esta definição de deslocamentos. No entanto, a independência de escala desta curva era obtida quando na equação (4.8) se substituía w_{pp} por w_e , os deslocamentos devidos às deformações elásticas somente. Esta diferença entre deslocamentos fica esclarecida na Figura 4.21.

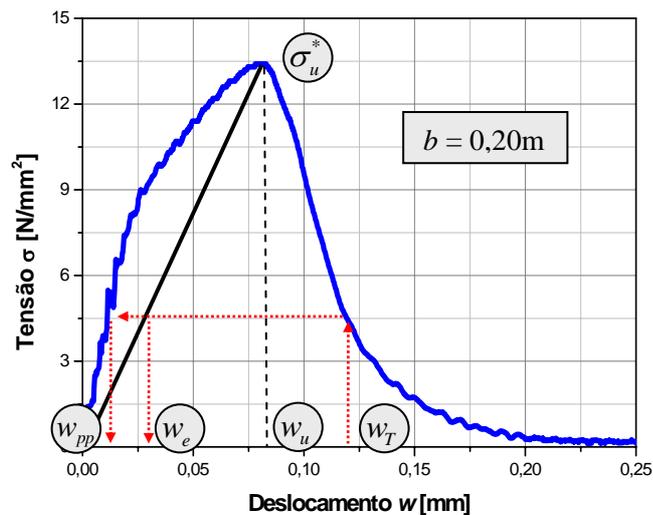


Figura 4.21 – Curva tensão-deslocamento para a placa de 0,2m mostrando as definições dos deslocamentos.

Na Figura 4.22a, mostram-se as curvas tensão-deslocamento (w), considerando o deslocamento como $w_T - w_{pp}$ e $w_T - w_e$ para todas as placas que mostram uma propagação estável. As curvas se encontram deslocadas para poder interpretar melhor as diferenças entre elas.

Lembrando que $d\sigma \approx 0$, trabalhando com a eq. (4.1) se escreve:

$$\varepsilon^* = w b^{d_\varepsilon - 1} \quad (4.9)$$

Com o que é possível obter as curvas σ^* vs ε^* , primeiro, considerando $d_\varepsilon = 0,98$ constante, obtido analisando as curvas (ver Tabela 4.3). Esta forma de obter as curvas foi apresentada em Kosteski *et al.*, 2011b. As curvas resultantes são mostradas na Figura 4.22b.

Como foi mostrado anteriormente, utilizando a distribuição de dano e tendo em conta a soma invariante dos expoentes, o expoente fractal de deformações toma um valor máximo de 0,84 depois do pico de tensões. Na Figura 4.22c, mostram-se as curvas tensão-deformação fractais considerando $d_\varepsilon = 0,84$ constante.

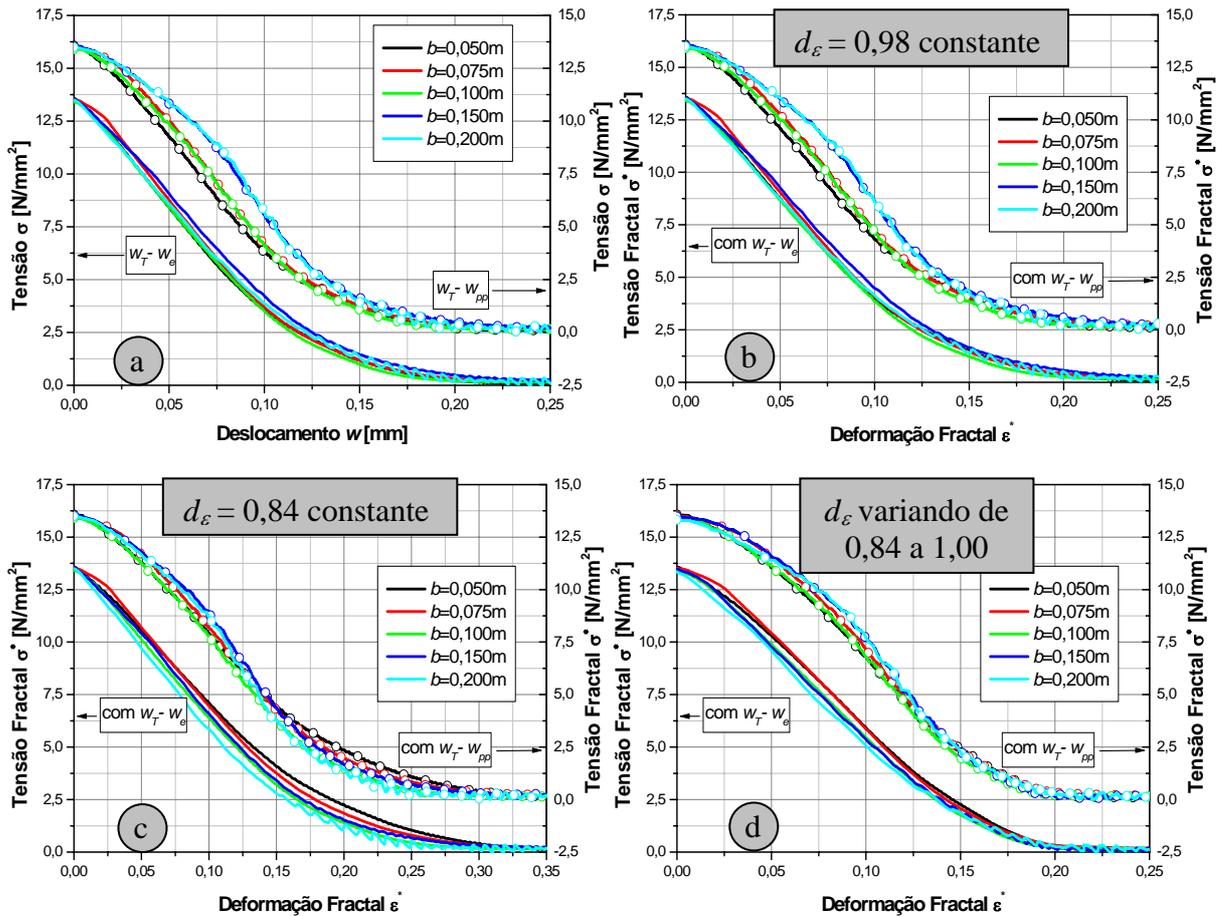


Figura 4.22 – a) Curva tensão-deslocamento para a placa de 0,2m, usando as duas definições do deslocamento efetivo; e curvas tensão- σ -deformação fractal construídas com elas, considerando o expoente fractal b) e c) constante e d) variável.

Finalmente, na Figura 4.22d, mostra-se uma combinação dos fenômenos de distribuição do dano e localização de deformações, onde se considera que $d_\epsilon = 0,84$ no começo do processo de amolecimento e varia até $d_\epsilon = 1$ para um deslocamento de 0,0002m, que corresponde quando o deslocamento se estabiliza próximo de zero.

Na figura anterior, é possível ver que as curvas tensão- σ -deformação fractal mais invariáveis com o tamanho se conseguem para $w_T - w_e$ e com $d_\epsilon = 0,98$ constante e para $w_T - w_{pp}$ e com d_ϵ variando de 0,84 até 1 durante o processo de fratura. Considera-se esta última alternativa como a correta por duas questões, primeiro a soma dos expoentes fractais será 1, e segundo a área total debaixo da curva tensão- σ -deformação está sendo considerada e não somente parte dela como acontece no primeiro caso, e já foi discutido em Kostaski *et al.*, 2011b.

Alterando as propriedades do material simulado pode-se encontrar um $d\sigma$ diferente de zero. Em princípio, esta metodologia proposta não seria afetada por este expoente. Seria interessante realizar esta verificação e até utilizar o mesmo limiar de índice de dano crítico para definir a distribuição do dano na placa, para ver se a soma dos expoentes segue sendo 1 ou se esta forma de identificar a distribuição de localizações é também dependente do material.

4.3 Curvas tensão-deformação com *Snap-back*

Utilizando a curva tensão-deformação fractal obtida no item anterior, é possível reconstruir as curvas tensão-deformação quando se tem propagação instável, isto é, captar o *snap-back* que acontece neste tipo de problemas.

A Figura 4.22d apresenta os resultados em termos da tensão $\sigma^* = \sigma b^{d_\sigma}$ e a deformação fractal ε^* , para $\varepsilon \geq \varepsilon_u$. A definição de deformação fractal é dada pela equação (4.10). No domínio fractal, esta relação é independente do tamanho.

$$\varepsilon^* = (w_T - w_{pp}) b^{-(1-d_\varepsilon)}, \quad \varepsilon^* = (\varepsilon_T - \varepsilon_{pp}) b^{d_\varepsilon} \quad (4.10)$$

ε_T pode ser calculada como:

$$\varepsilon_T = \varepsilon^* b^{-d_\varepsilon} + \varepsilon_{pp} \quad (4.11)$$

A Figura 4.23a mostra as curvas tensão-deformação para as placas grandes ($b \geq 0,4\text{m}$) com o amolecimento calculado com a equação (4.11), considerando a invariância da curva tensões-deformações fractais apresentada na Figura 4.22d. Na Figura 4.23b, mostra-se a comparação entre as curvas reconstruídas com este procedimento e as obtidas por simulação para tamanhos intermediários (placas de 0,25m e 0,3m), utilizando a RCE de Hillerborg. Como se vê nesta figura, a última parte da cauda concorda com a reconstrução da curva utilizando os expoentes fractais.

Como já foi mencionado, e mostrado na Figura 4.5b, todo o estudo prévio, assim como as curvas obtidas na figura anterior, foi feito considerando autossimilaridade na configuração e processo de fratura. Mais ainda, foi considerado que a placa apresenta a propagação somente de uma trinca. Mas isto não acontece em todas as réplicas obtidas na simulação. Observou-se que aparecem também a formação e propagação de duas trincas, ou até a formação de duas trincas que logo se encontram e propaga somente uma. A diferença das curvas tensão-deformação globais obtidas para estes casos são mostradas na Figura 4.24a.

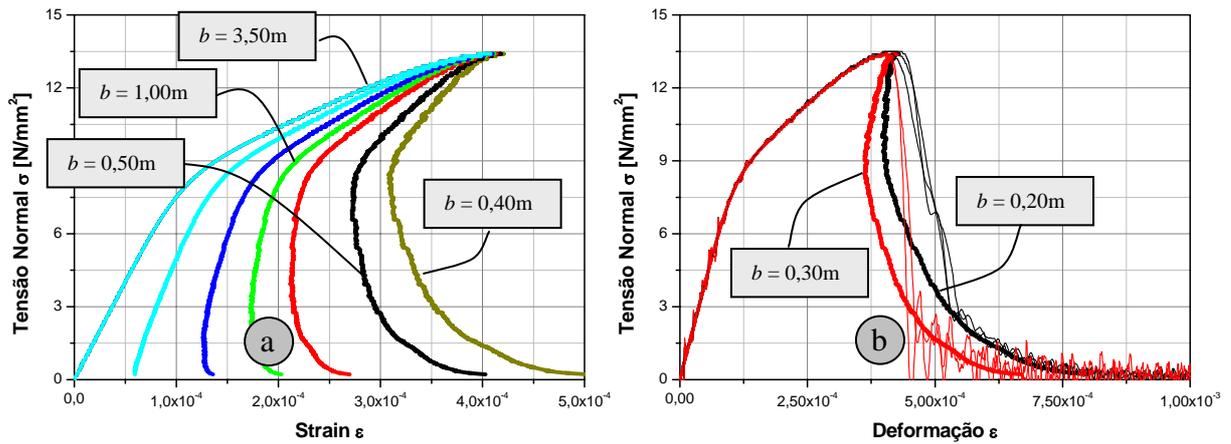


Figura 4.23 – a) Curvas tensão-deformação reconstruídas usando a teoria fractal para placas grandes, e b) para placas intermédias comparadas com simulações normais. Foi usada a lei constitutiva de Hillerborg.

Seguindo o mesmo procedimento feito até aqui, poder-se-ia, então, obter a curva tensão-deformação fractal para placas nas quais propagam duas trincas, como mostrado na Figura 4.24b. Caso consigam-se simulações nas quais propaguem mais fissuras, poder-se-iam gerar as curvas tensão-deformação fractais para placas nas quais propagam três, quatro, ou mais fissuras.

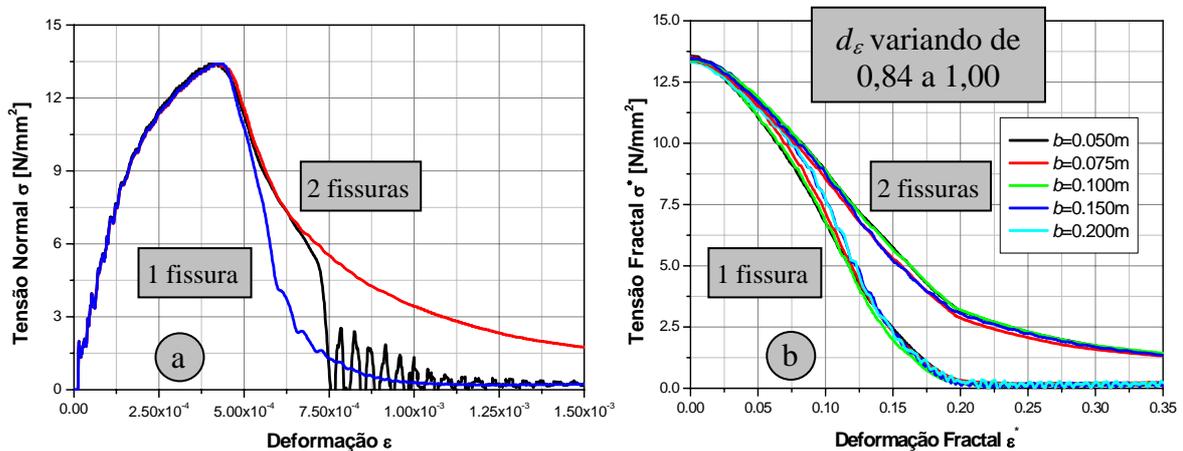


Figura 4.24 – a) Curvas tensão-deformação para placas nas quais propaga uma e duas fissuras, assim como duas se juntando. b) Curvas tensão-deformação fractal para placas com uma e duas fissuras.

Seria possível medir de forma experimental diretamente o pós-pico ou *snap-back* das curvas tensão-deformação das placas com comportamento instável mediante a aplicação de condições de contorno não convencionais [van Mier e van Vliet, 2000]. Foram realizadas

tentativas para simular com o DEM estas condições, mas os resultados não foram muito satisfatórios. Por isso, utilizou-se um artifício simples com o qual se conseguiu realizar a simulação desta parte instável da curva sem grandes implementações.

Carregou-se a placa até o ponto onde começa a instabilidade e nesse ponto descarregou-se a mesma rapidamente. Logo voltou a carregar-se até que se produza a instabilidade novamente, e voltou-se a descarregar logo após isso acontecer. Repetindo este procedimento uma e outra vez conseguiu-se obter com uma envolvente externa a curva tensão-deformação *real* da placa. Devido à mudança brusca da velocidade do carregamento foi necessário colocar um amortecimento elevado ($\xi=35\%$) para eliminar vibrações espúrias que complicam a interpretação e sujam a forma da curva. É importante mencionar que este amortecimento pode mudar um pouco as características das configurações e distribuição de dano da placa, mas em princípio se aceita esta distorção para poder dar início ao entendimento do processo de falha.

Na Figura 4.25a, apresenta-se a curva tensão-deformação para uma placa de 0,5m amortecida ($\xi=35\%$), juntamente com a curva obtida para esta mesma placa fazendo carregamento e descarregamento nos pontos de instabilidade. As comparações entre as energias elásticas e de dissipação por dano para as os dois tipos de carregamento na mesma placa são mostradas na Figura 4.25b. Observa-se que o valor final da dissipação por dano é praticamente o mesmo, e as configurações de ruptura obtidas também são muito parecidas (ver detalhe da Figura 4.25).

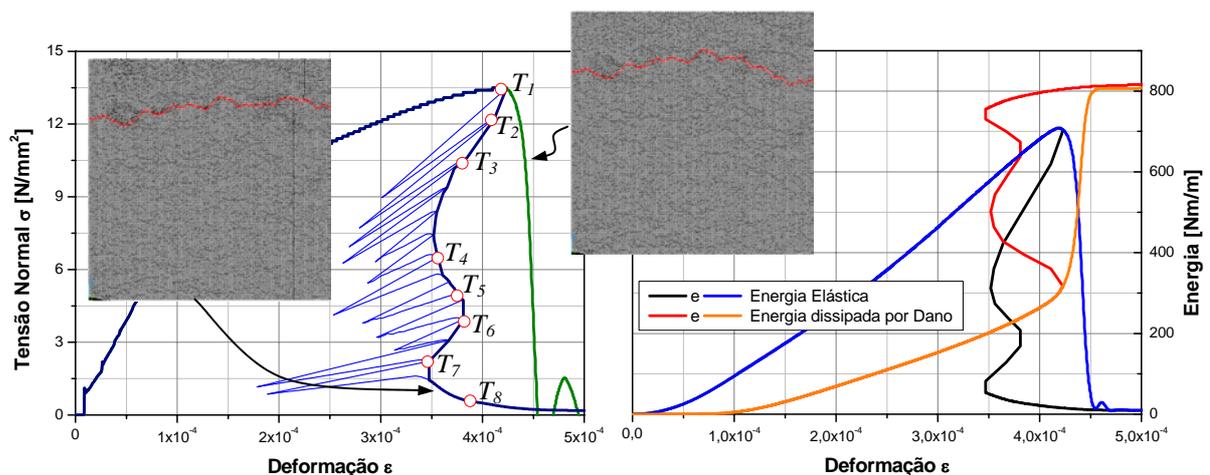


Figura 4.25 – a) Curvas tensão-deformação para uma placa de 0,5m amortecida ($\xi=35\%$) obtida fazendo carregamento e descarregamento nos pontos de instabilidade e curva original,

b) Energia elástica e dissipada por dano para as duas simulações.

Os gráficos da distribuição do dano na direção na qual a placa se encontra tracionada (I_{Dz}) para cada um dos pontos definidos na Figura 4.25a, são mostradas na Figura 4.26. No ponto T_1 , correspondente com o pico de tensões, observa-se que o dano se encontra localizado em diferentes regiões da placa. A fissura poderia tomar qualquer caminho que vincule algumas dessas regiões danificadas. No ponto T_2 , ainda estão ativas as mesmas regiões de dano antes mencionadas, mas começam a aparecer algumas concentrações maiores. Aqui se podem apreciar no mínimo três fissuras incipientes, como marcado na Figura 4.26 T_2 . Pouco depois deste ponto aprecia-se uma mudança na envolvente da curva.

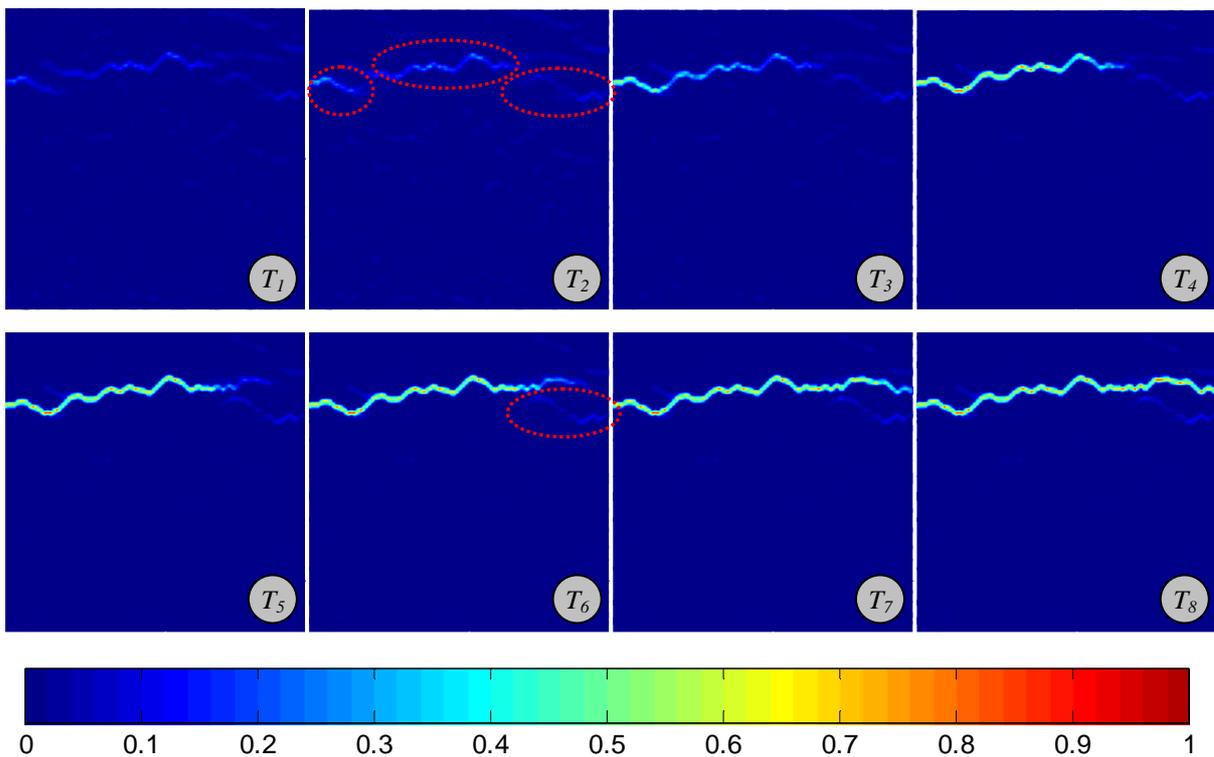


Figura 4.26 – Distribuição do índice de dano I_{Dz} nos pontos marcados na Figura 4.25a para uma placa de 0,5m de lado amortecida ($\xi=35\%$) usando a Lei constitutiva de Hillerborg.

Na Figura referente ao ponto T_3 , observa-se que duas das regiões danificadas se juntaram, formando uma só fissura do lado esquerdo da placa, mas no direito ainda existe uma distribuição menos definida do dano. Aqui se pode apreciar que existe uma fissura bem definida, além de, pelo menos, mais uma fissura incipiente. Os pontos T_3 , T_4 e T_5 se encontram posicionados numa mesma região na curva envolvente tensão-deformação. As distribuições de dano destes pontos confirmam esta observação já que não existe uma mudança nas características da distribuição do dano na placa a não ser o aumento do dano em algumas regiões bem definidas.

Como se aprecia na Figura 4.25a, o ponto T_6 se localiza em uma zona de transição. Isto se observa também na distribuição do dano correspondente a este ponto. Aqui, a fissura que estava propagando desde a esquerda antes deste ponto, segue sua propagação desviando uma segunda região danificada. Esta última se encontra remarcada na Figura 4.26 T_6 .

Finalmente, os pontos T_7 e T_8 também estão em uma mesma zona da curva envolvente tensão-deformação. Como mostram as imagens de distribuição do índice de dano referentes a estes pontos, aqui se tem somente uma fissura ativa.

Analisando as regiões danificadas na placa, pode-se ver que a diferença entre as configurações de ruptura mostradas no detalhe da Figura 4.25, para as diferentes formas de carregamento concordam com regiões danificadas na placa. No caso em que se colocam deslocamentos monotonicamente crescentes, a fissura se nucleia e propaga com uma determinada velocidade. Quando chega à parte direita da placa pode seguir qualquer caminho. Por isso, mudando o amortecimento, os resultados podem ser levemente diferentes.

Utilizando as curvas tensão-deformação fractal mostradas na Figura 4.24b, é possível reconstruir a curva tensão-deformação para a placa de $b=0,50\text{m}$. A comparação da curva tensão-deformação obtida carregando e descarregando várias vezes a placa, mostrada na Figura 4.25a, com a reconstrução fractal da curva tensão-deformação considerando a propagação de uma e duas trincas, é mostrada na Figura 4.27. Aqui, também, colocaram-se as envolventes das curvas tensão-deformação, obtidas carregando e descarregando, de quatro placas de $0,50\text{m}$, colocando o já mencionado amortecimento.

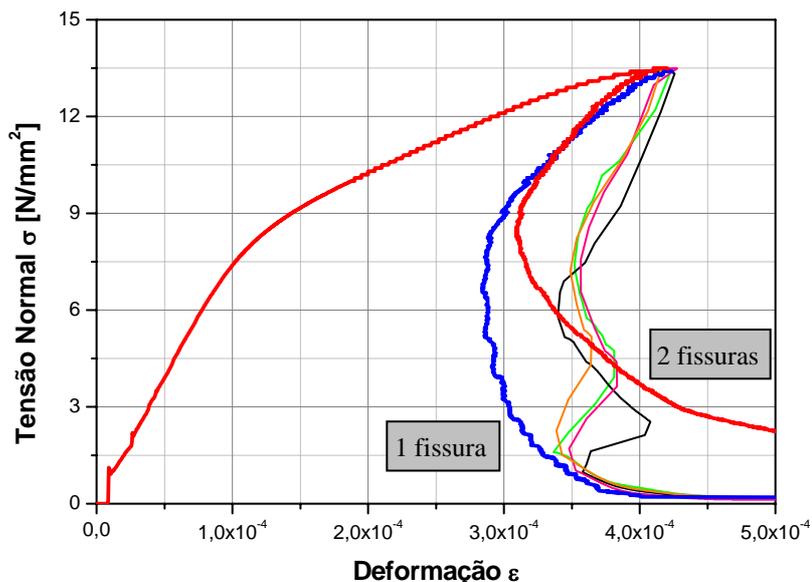


Figura 4.27 – Curvas tensão-deformação envolventes para placas de $0,5\text{m}$ amortecida ($\xi=35\%$), obtida fazendo carregamento e descarregamento nos pontos de instabilidade e curvas reconstruídas com a teoria fractal.

É possível observar que nas regiões da curva, na qual estão ativas uma ou duas fissuras, há uma boa concordância com a reconstrução fractal. Como foi observado na Figura 4.26 T_1 e T_2 , nesta região há mais de duas fissuras ativas. Poder-se-ia fazer uma curva tensão-deformação fractal para mais de duas fissuras para ajustar esta parte da curva. Quando há uma mudança na quantidade de fissuras ativas ocorre um salto de uma curva para a outra. A forma de realizar este salto assim como sua posição aparenta ser aleatório, mas com regiões predominantes para isso acontecer. Espera-se que esse comportamento mude com o tamanho da placa porque, quanto maior a placa, pode-se ter maior quantidade de fissuras ativas num começo e ir diminuindo no transcurso da ruptura, assim como com a aleatoriedade colocada ao modelo, como será analisado posteriormente.

Seria importante analisar a possibilidade de obter a curva fractal para propagação de duas fissuras a partir de curva fractal da propagação de uma fissura. Caso isso seja possível, poder-se-ia estender essa transformação para a propagação de mais fissuras e assim obter, por combinações aleatórias, a curva tensão-deformação reconstruída para diversos tamanhos.

É interessante aqui comentar que uma placa é grande, não somente quando o tamanho dela é grande, mas também quando está mais afastada do tamanho crítico ou de mudança no comportamento (ver Figura 4.6b). Por isso, quanto mais afastada deste tamanho crítico, mais fissuras podem estar ativas e, quando a fissura propaga levando energia cinética consigo, pode ir se dividindo em outras regiões, isto é, bifurcando-se. Portanto, quanto mais longe do tamanho crítico, mais bifurca ou maior quantidade de dano distribuído se tem.

4.4 Discussão sobre objetividade na RCE

Para obter uma relação constitutiva objetiva quando não existem concentradores de tensões (como entalhes ou condições de contorno específicas), seria necessário vinculá-la à fractalidade. Por isso, seria feita utilizando os invariantes de tensões σ_u^* , de deformações ε_c^* . Mas é necessário levar em conta que, quando se muda o tamanho da malha dentro da região de propagação estável (tamanho do elemento menor que o tamanho crítico), ter-se-ia que a relação constitutiva elementar esteja relacionada à curva tensão-deformação fractal para uma ou no máximo duas fissuras. Já quando o tamanho do elemento é maior que o tamanho crítico (lembrar que o tamanho crítico é uma função do material, isto é, $CV(G_f)$, G_f , K_r , E , etc.) a relação constitutiva elementar deve levar em conta uma combinação de várias curvas tensão-deformação fractais, mais quanto maior o tamanho do elemento. Isso é que a relação

constitutiva objetiva estará relacionada com o tamanho crítico correspondente ao material simulado.

Fica desta forma em evidência que a tenacidade (G_f) não aumenta com o tamanho do elemento, o que aumenta é o número de fissuras que ficarão dentro dele, isto é, maior quantidade de áreas de fratura dentro do elemento. Na implementação direta no DEM isto pode ser levado em conta aumentando a quantidade de áreas nas quais se rompe um elemento (aumenta o c_A na eq. 3.7, ver Figura 3.3), ou aumentando a energia específica de fratura uma quantidade que leve em conta este aumento de fissuração.

4.5 Estudo paramétrico das RCE. Influência da aleatoriedade

Sem alterar a tenacidade, mas mudando, por exemplo, a deformação crítica de ralação constitutiva elementar ε_p e, simultaneamente, K_r no modelo de Hillerborg, o DEM prediz um efeito de escala nas tensões de ruptura. Isso acontece também com as outras duas leis constitutivas. Na Figura 4.29, apresenta-se em escala bi-logarítmica, para as relações constitutivas elementares mostradas na Figura 4.28, a variação com o comprimento da placa das deformações características e tensões máximas. As RCE, mostradas na Figura 4.28, foram obtidas com ε_p de $1,538 \times 10^{-4}$, $2,176 \times 10^{-4}$ e $4,351 \times 10^{-4}$, o que equivale no modelo de Hillerborg a K_r 101,4, 50,7 e 12,68, considerando todas as outras propriedades iguais às mostradas na Tabela 4.1 (ver Eq. 3.12 e 3.18). Os parâmetros dos modelos trilinear e com amolecimento exponencial foram obtidos com as Eq. (3.22), (3.26) e (3.31). Os valores de c e r para o modelo trilinear são mantidos constantes e iguais a 0,1 e 2, respectivamente.

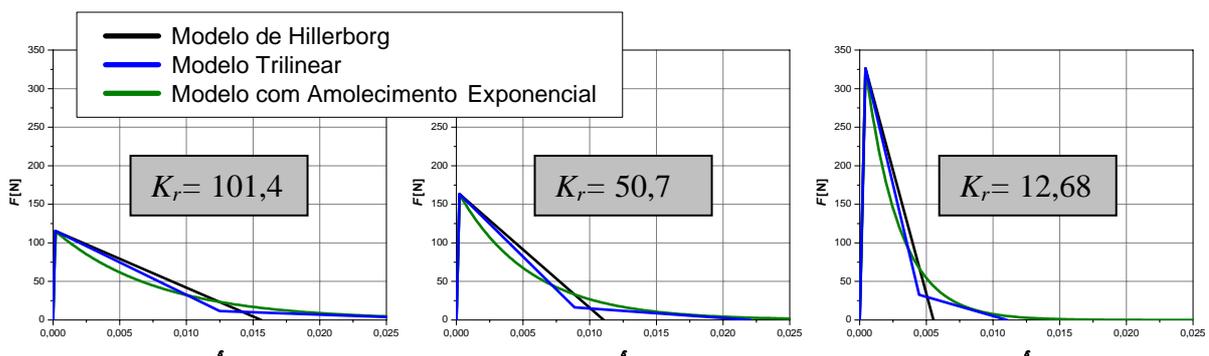


Figura 4.28 – Gráfico ilustrativo das relações constitutivas elementares utilizadas para os elementos uniaxiais do DEM consideradas no trabalho.

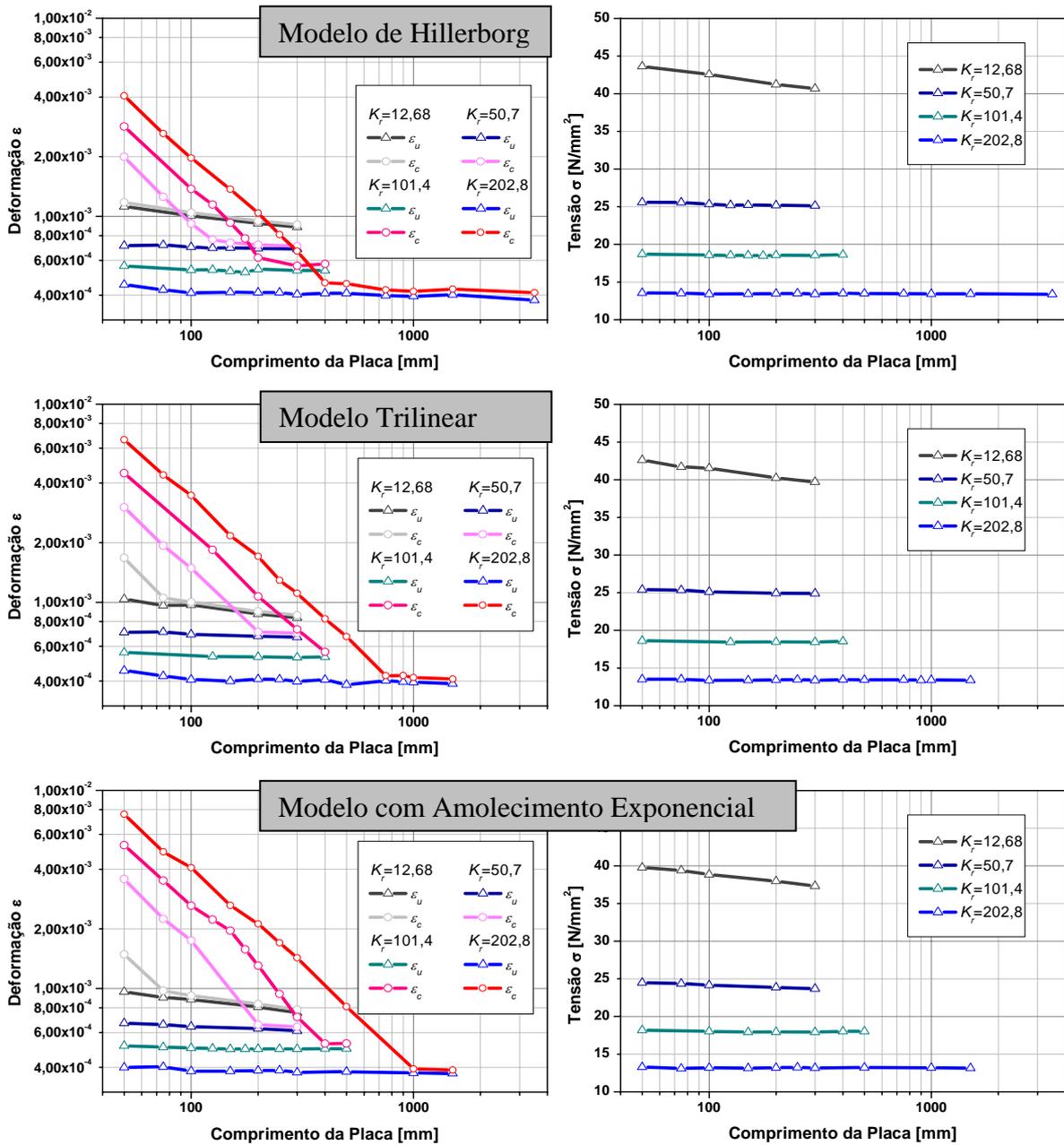


Figura 4.29 – Efeito de escala nas deformações e nas tensões para as três RCE analisadas.

Pode-se observar que o valor da tensão de pico σ_u , assim como a deformação relacionada com esta, ε_u , variam muito pouco com a lei constitutiva. Para valores menores de K_f a diferença ente os resultados utilizando diferentes leis constitutivas aumenta levemente. A variação da curva de deformação crítica ε_c tem que ser analisada em duas regiões, quando há propagação estável ou instável. Quando há propagação instável a curva se mostra paralela à curva de deformação última ε_u , para todo valor de K_f e em cada uma das relações constitutivas elementares analisadas. Por isso, esta parte da curva não é muito diferente entre as diversas leis estudadas. A parte da curva de deformação crítica, que se obtém quando há propagação

estável, também mostra a mesma inclinação para diferentes valores de K_r e em cada RCE, porém, o tamanho crítico (ponto onde muda de um comportamento para outro) se mostrou bem sensível com a variação do K_r e também com a mudança da lei constitutiva. Na Figura 4.30, mostra-se a variação do tamanho crítico com o valor de K_r e a relação constitutiva adotada.

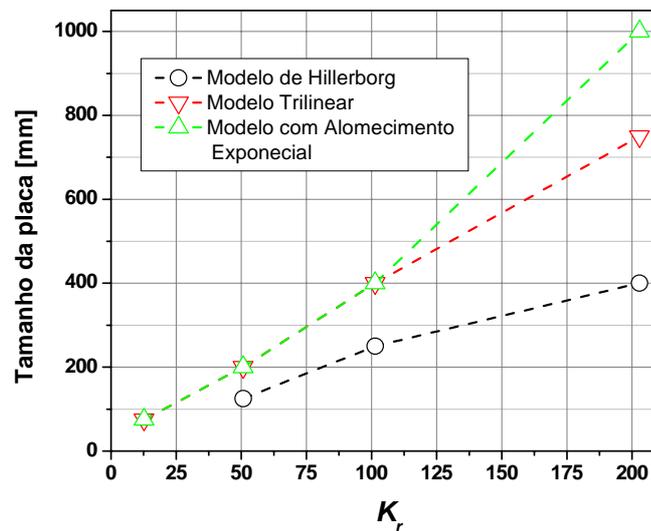


Figura 4.30 – Variação do tamanho crítico da placa com o K_r e relação constitutiva adotada.

As configurações de ruptura numa placa de 0,20m de lado para cada RCE e os quatro valores de K_r , são mostradas na Figura 4.31. Como é apreciado, não há grandes diferenças entre as três leis constitutivas. Aqui fica perceptível que, quando se reduz K_r , a propagação resulta menos estável, apresentando maior quantidade de fissuras na configuração de ruptura. Isto concorda com as observações realizadas no ponto anterior, já que para $b=0,20m$ com $K_r=202,8$, a trinca apresenta uma propagação estável devido a que o tamanho da placa é menor que o tamanho crítico (mudança de propagação estável a instável). Quando se diminui o valor de K_r , com o mesmo tamanho de placa, aproxima-se ao valor do tamanho crítico e até que para os K_r menores passam a ser maiores que dito tamanho. Para $K_r = 12,68$ o tamanho da placa fica bastante maior que o tamanho crítico, por isto a configuração apresenta mais dano distribuído e fissuras que bifurcam. Esta observação ratifica o raciocínio encontrado com as curvas tensão-deformação fractais.

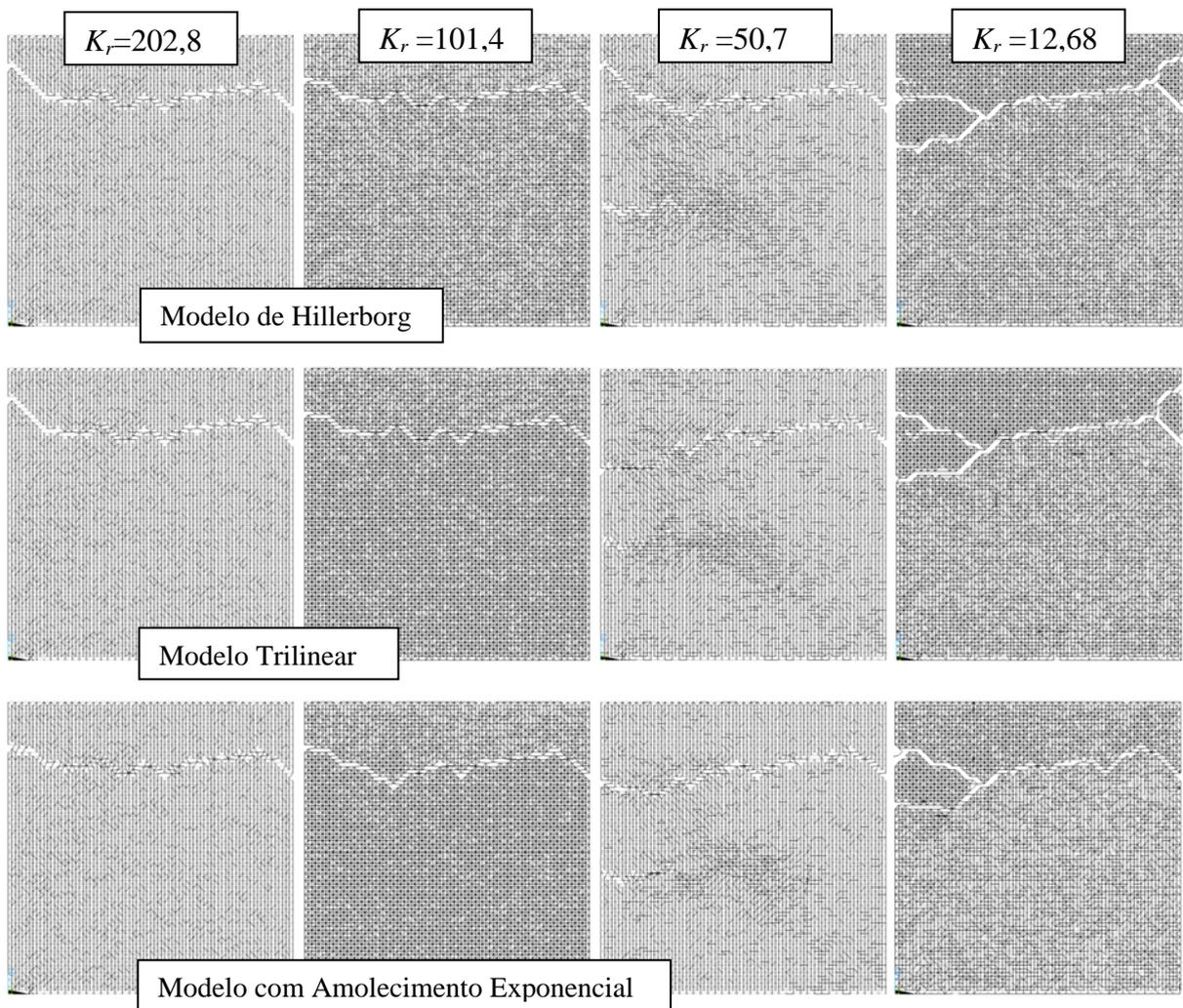


Figura 4.31 – Configurações de ruptura para uma placa do mesmo tamanho para diferentes RCE e parâmetros da simulação.

Seguindo este pensamento, e supondo que o tamanho crítico segue diminuindo com o valor de K_r utilizado (e, por conseguinte ε_p), com valores próximos de 1, estar-se-á bastante longe do tamanho crítico. Por isso, seria necessário aumentar a quantidade de fissuras nas quais rompe o elemento básico do DEM (ou majorar a energia específica de fratura), para poder captar a distribuição de dano e quantidade de fraturas que acontece nesses casos.

Para confirmar essa observação e realizar essa correção, ter-se-iam que analisar a variação dos expoentes fractais e as curvas tensão-deformação fractais para outros valores de K_r , o que é pretendido realizar em futuros trabalhos.

Aqui ficou em evidência a importância do tamanho crítico, por isso, deve-se estudar como varia este com o valor de K_r e com a aleatoriedade colocada no material, $CV(G_f)$. Para condensar informação e ajudar nas comparações, seria possível colocar os resultados

apresentados na Figura 4.29 em um gráfico em três dimensões, como mostrado na Figura 4.32. Para obter a superfície de deformações, foi utilizada uma interpolação linear no espaço bi-logarítmico e uma interpolação cúbica no espaço normal para as tensões.

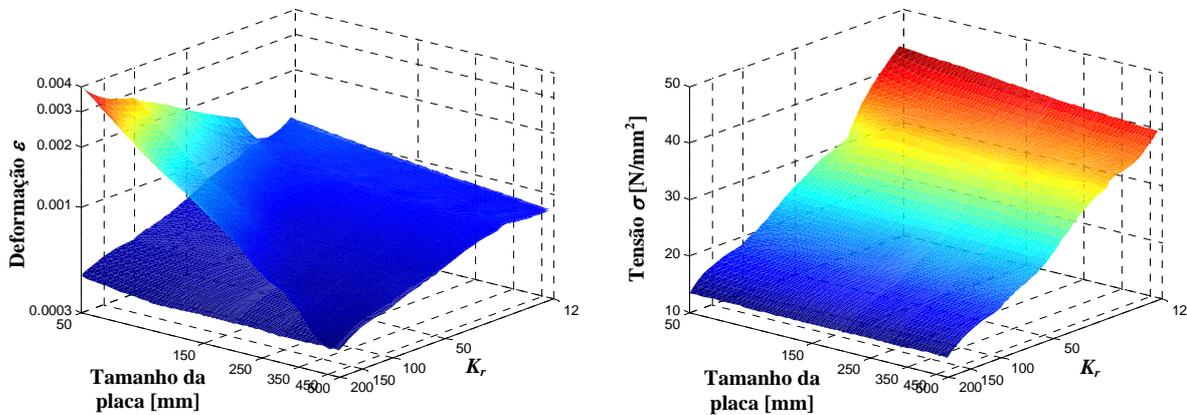


Figura 4.32 – Efeito de escala nas deformações e nas tensões para a lei de Hillerborg.

Na Figura 4.33, acham-se condensados os resultados da tensão média máxima e sua deformação correspondente, e a deformação crítica média para diferentes tamanhos de placa, variando o valor do K_r e utilizando unicamente a Lei de Hillerborg. Foi considerando, também, a variação do campo aleatório da energia específica de fratura. Para isso, foram utilizados $CV(G_f)$ iguais a 10%, 20%, 40%, 80% e 160%.

É possível observar que com o aumento do $CV(G_f)$ diminuem os valores médios da tensão e a deformação vinculada a esta. A variação desses valores com o K_r também se atenua, assim quanto maior a aleatoriedade menos influência tem a forma da lei constitutiva (teria que se analisar se ocorre o mesmo com as outras leis constitutivas). Em contrapartida, o aumento da aleatoriedade traz consigo uma maior variação com o tamanho do elemento simulado, isto é maior influência do efeito de escala. A parte das superfícies da deformação crítica, que correspondem à propagação instável da fissura, mostra o mesmo comportamento que a superfície de deformação última. Variando o $CV(G_f)$, seguem sendo superfícies paralelas.

Porém, nas regiões onde ocorre propagação estável, as superfícies seguem apresentando a mesma inclinação mostrando baixa sensibilidade com a aleatoriedade. Mas o tamanho crítico muda consideravelmente com o valor do $CV(G_f)$ adotado. Observa-se que, quando a aleatoriedade é demasiada ($CV(G_f)=160\%$), a inclinação começa a mudar e deixa ser constante.

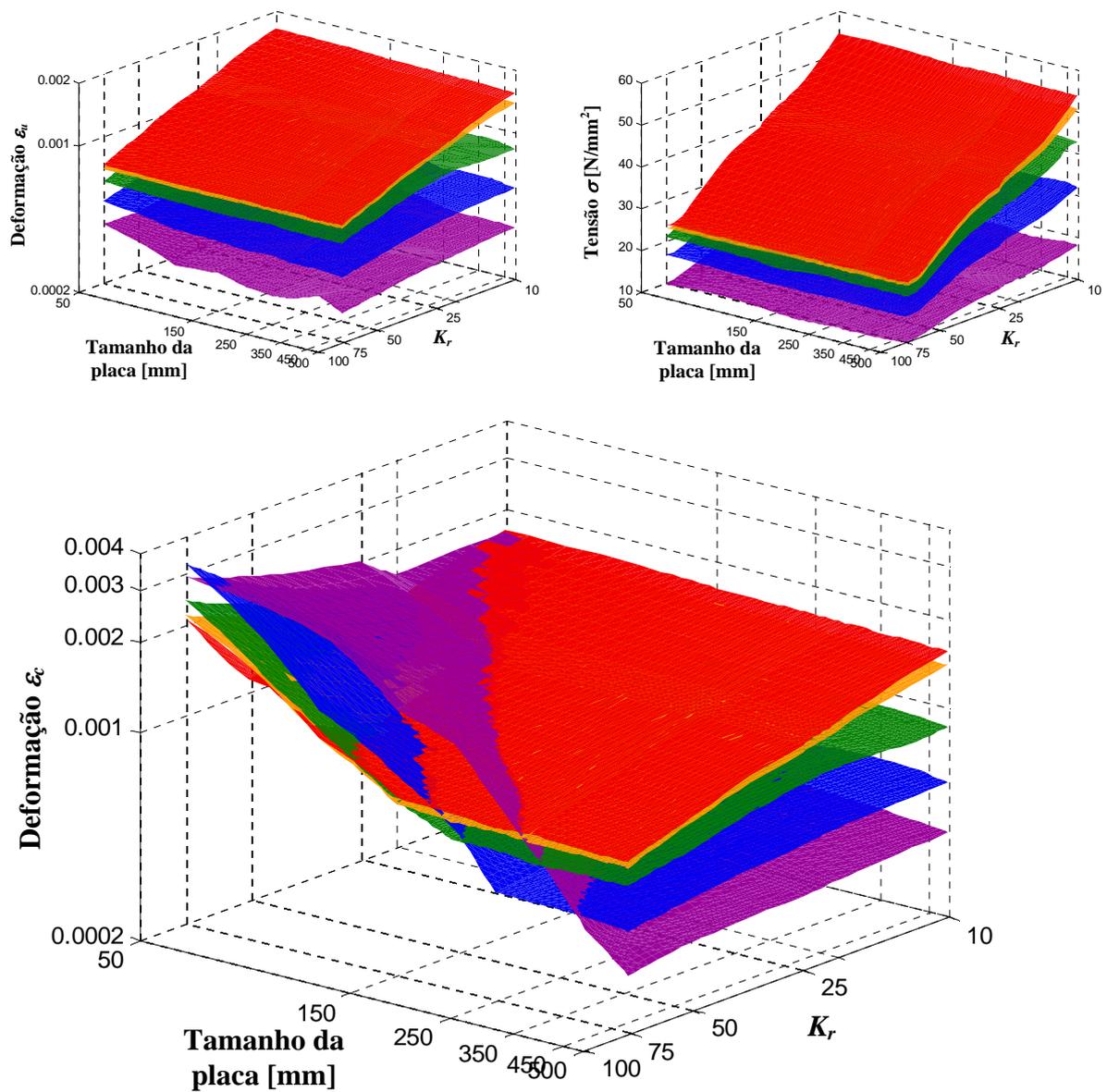


Figura 4.33 – Efeito de escala nas deformações e nas tensões para a lei de Hillerborg usando diferentes valores de $CV(G_f)$.

As superfícies, mostradas na Figura 4.33, foram realizadas com poucos valores de K_r e o tamanho crítico foi obtido variando de 50mm em 50mm o tamanho da placa. Para obter resultados mais conclusivos, dever-se-ia conseguir de forma mais precisa o tamanho crítico da placa para maior quantidade de valores de K_r , pelo menos para dois valores diferentes $CV(G_f)$. Caso exista uma forte correlação, poder-se-iam extrapolar os resultados para outros campos aleatórios, senão seria necessário realizar este detalhado estudo de K_r e tamanho crítico para uma mais ampla gama de $CV(G_f)$.

Com o aumento do $CV(G_f)$, fica mais difícil encontrar placas que propaguem somente com uma fissura, pelo que foi necessário simular 6 réplicas e, algumas vezes, nenhuma delas apresentava esse tipo de propagação. As placas com propagação estável são muito variáveis, encontrando-se combinações de propagações de múltiplas fissuras e encontros e bifurcações delas. Na Figura 4.34 são apresentadas as seis curvas para placas de $b=0,050\text{m}$ com $CV(G_f)=160\%$, com K_r de 50,7 e 10. Pode-se dizer que, com o aumento da aleatoriedade e a diminuição de K_r , aumenta a quantidade de dispersão do dano assim como a quantidade de fissuras a aparecer na configuração.

Essa dificuldade de encontrar placas com propagação de somente uma fissura, podem estar distorcendo os resultados, apresentados na Figura 4.33 usando o $CV(G_f)=160\%$.

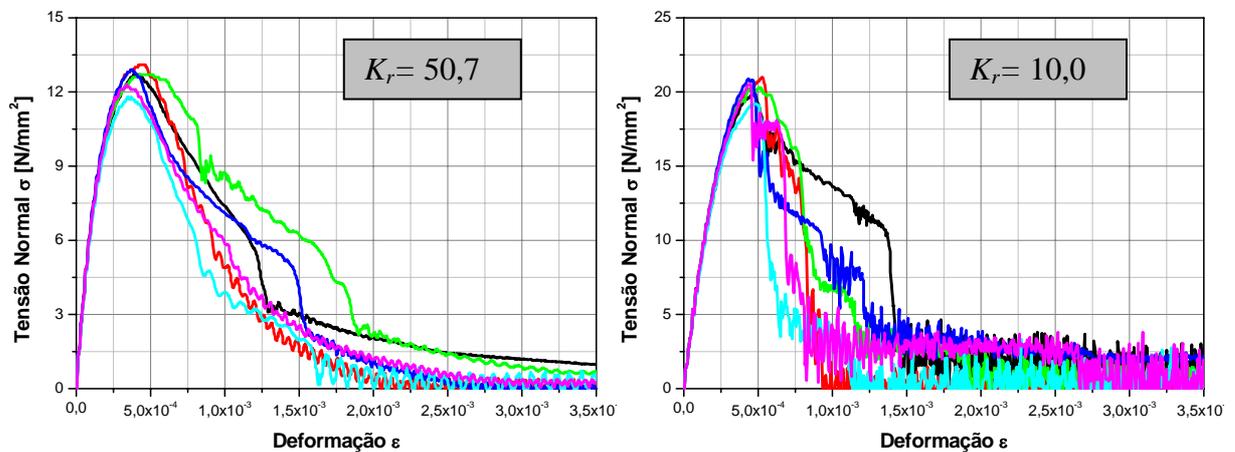


Figura 4.34 – Aumento de dispersão das curvas com o K_r na lei de Hillerborg usando $CV(G_f)=160\%$.

Como foi mostrado em 3.5.2, é também possível incluir aleatoriedade no DEM alterando a malha. Em estudos preliminares, essa alteração da malha se mostra muito promissora, já que assim se diminui a orientação que gera a malha regular do DEM. Mas o estudo de como a mencionada implementação é influenciada pelo efeito de escala e o tamanho crítico, até a relação entre as duas formas de colocar aleatoriedade, não será analisada no presente texto.

4.6 Análise da influência do amortecimento

Quando se quer rodar uma análise estática no DEM, tem que ser colocada a carga muito devagar até chegar ao valor desejado. A colocação de um amortecimento ajuda a rodar menos tempo e conseguir bons resultados. O amortecimento colocado, também, pode servir

para estabilizar certos casos, nos quais as cargas são colocadas muito rápidas, ou a diminuir a energia cinética gerada na propagação de trincas. Mas em alguns casos, este amortecimento pode alterar, consideravelmente, as respostas obtidas na simulação.

Uma forma simples de mostrar qual é a influência do amortecimento, é mostrando como variam as configurações de ruptura de uma mesma placa (exatamente as mesmas propriedades) com amortecimentos diferentes. Na Figura 4.35, apresentam-se as diferenças nas configurações de ruptura, onde se pode observar que os resultados são bastante sensíveis ao amortecimento colocado.

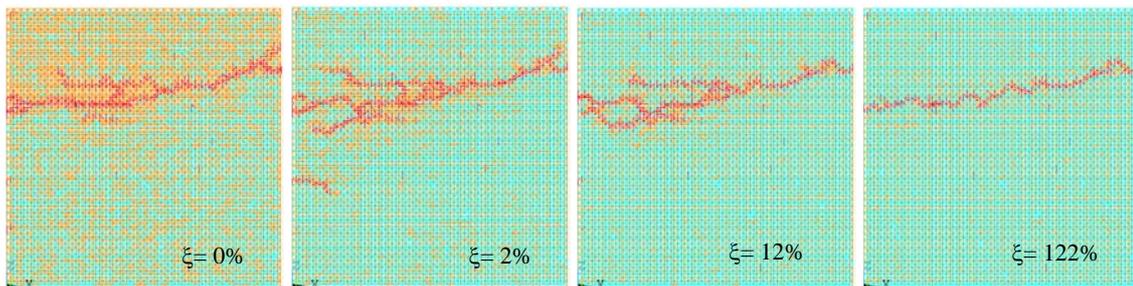


Figura 4.35 – Variação das configurações de ruptura com o amortecimento.

Como se observa na figura, a macrofissura apresenta a mesma orientação e forma, mas quanto menor o amortecimento, ocorrem maior quantidade de bifurcações e distribuição do dano.

5 DEM NO AMBIENTE ABAQUS/EXPLICIT

No presente capítulo, é apresentada a implementação de DEM dentro do software comercial *Abaqus* (DEM-*Abq*), assim como também exemplos de validação e aplicação que utilizam essas implementações.

5.1 Implementação do DEM dentro do *Abaqus/Explicit*

A seguir, é descrito como as características do DEM, apresentadas no capítulo 3, foram implementadas no software comercial *Abaqus*, ganhando assim flexibilidade para simular problemas com geometrias e condições de contorno mais complexas, criar modelos mistos DEM+MEF, ou implementar outras leis constitutivas uniaxiais para as barras, entre outras vantagens.

O *software Abaqus* é um dos programas comerciais de análise de elementos finitos mais completo e flexível utilizado para: desenvolver novos projetos (*design*); compreender o comportamento de novos materiais; ou simular processos de manufatura. O *software* proporciona soluções precisas, robustas e de alto desempenho para problemas não-lineares complexos, aplicações dinâmica em grande escala e simulação de design de rotina. Outra vantagem é que a análise de elementos finitos do *Abaqus* aproveita os ambientes de alto desempenho da computação paralela, o que permite incluir detalhes nos modelos, antigamente excluídos devido a limitações no poder de computação.

Abaqus/Explicit é um produto do ambiente *Abaqus* de análise de elementos finitos, que é particularmente bem adaptado para análise não-linear, transiente e dinâmico de sólidos ou de estruturas, utilizando integração explícita. A capacidade de *Abaqus/Explicit* para agir, eficazmente, em problemas acentuadamente não-lineares o torna eficaz para aplicações também quase estáticas.

Para mais informações, visitar a página eletrônica www.simulia.com/unified.

5.1.1 Modelagem da treliça espacial

A treliça espacial gerada pela superposição de módulos básicos é gerada no *Abaqus/Explicit* utilizando elementos finitos de barra tridimensional com 2 nós (T3D2).

No *Abaqus/Explicit*, cada elemento encontra-se associado a uma seção e, a cada seção, atribui-se um tipo de material. Na disposição cúbica, implementada na presente formulação do DEM, podem ser identificados quatro tipos de seções diferentes, correspondentes a

elementos colocados nas arestas (S^A), nas faces (S^C), internos (S^I) e diagonais (S^D), do modelo global (ver na Figura 5.1 barras vermelhas, verdes, azuis e roxas, respectivamente). As áreas dos elementos pertencentes a cada seção são:

$$S^A = A_l/4, \quad S^C = A_l/2, \quad S^I = A_l \quad \text{e} \quad S^D = A_d \quad (5.1)$$

onde A_l e A_d já foram definidas nas equações (3.1) e (3.2).

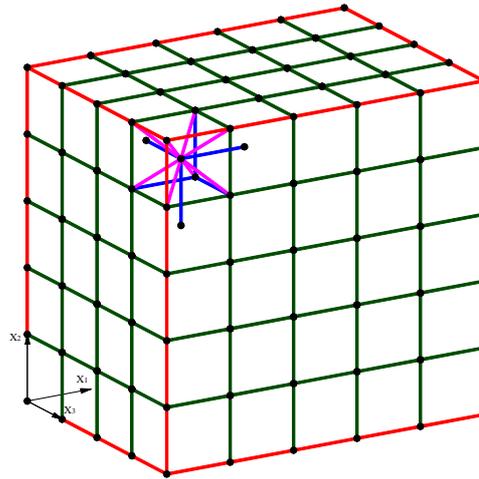


Figura 5.1 – Cubo modelado com o DEM onde se mostram as diferentes seções modeladas no *Abaqus/Explicit*. Seção arestas (S^A) vermelhas, faces (S^C) verdes, internos (S^I) azuis e diagonais (S^D) roxo, as últimas duas só alguns elementos de exemplo.

5.1.2 Discretização das massas

No DEM a massa do corpo simulado é discretizada e concentrada nos nós da treliça, e o valor da mesma depende do volume de influência do nó. Considerando-se o módulo cúbico básico da Figura 3.1a, pode-se observar que no volume do módulo (L^3) está contido o nó central e o somatório da oitava parte dos nós dos vértices do módulo.

A massa deste módulo cúbico deve ser igual a (ρL^3), sendo ρ a massa específica do material. Por isto, para formar a massa de um módulo cúbico colaboram um nó central que aportará toda sua massa ($\rho L^3/2$), e oito oitavos devidos aos nós dos vértices ($8 \times \rho L^3/16$).

Assim, os nós do vértice do modelo global (Figura 5.2) têm somente um oitavo da massa de um nó completo ($\rho L^3/16$), azuis na Figura 5.2, e os nós das arestas e os pertencentes às faces ou superfícies do modelo global terão um quarto e a metade da massa do nó completo, vermelhos e verdes na Figura 5.2, respectivamente.

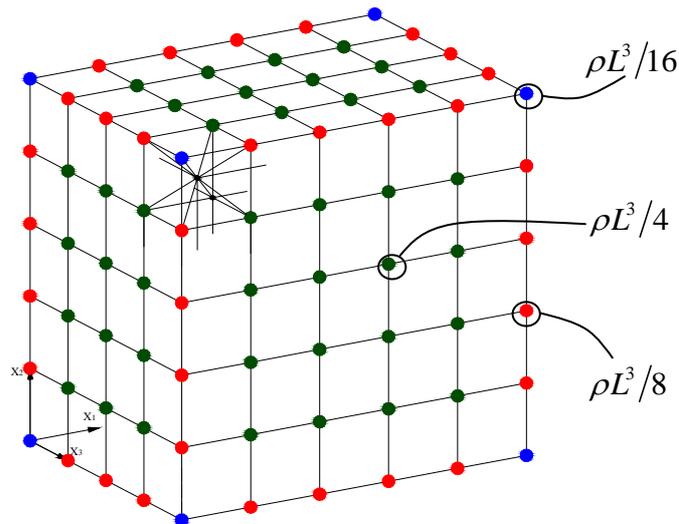


Figura 5.2 – Cubo modelado com o DEM onde se mostram as massas discretizadas. Massa dos nós do vértice em azul ($\rho L^3/16$), massas dos nós das arestas em vermelho ($\rho L^3/8$) e massa dos nós das faces em verdes ($\rho L^3/4$). Os nós restantes têm massa de $\rho L^3/2$.

No *Abaqus/Explicit* não se pode colocar as massas unicamente concentradas nos nós porque se teriam barras sem massas, o que geraria erros no cálculo (não se pode definir uma barra com massa zero). Porém, visto que o *Abaqus/Explicit* discretiza a massa do elemento de barra utilizado concentrando-a nos nós do elemento, optou-se por colocar uma densidade de massa nas barras que equivale às massas nodais do DEM

Considerando duas densidades de massa equivalentes, uma para as barras longitudinais e outra para as barras diagonais, ρ_l e ρ_d respectivamente, impõem-se duas restrições, que os nós do centro do modelo global tenham uma massa de $\rho L^3/2$ e os nós dos vértices do modelo global $\rho L^3/16$.

Nos nós centrais do modelo global concorrem 6 barras longitudinais e 8 diagonais, enquanto em um nó do vértice só concorrem 3 barras longitudinais e 1 diagonal. Multiplicando o volume de cada barra (comprimento vezes área, das expressões 3.1 e 3.2) por sua densidade de massa, e considerando que sua massa se concentra nos extremos em partes iguais, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho L^3 &= \frac{1}{2} 6 \rho_l \phi L^3 + \frac{1}{2} 8 \rho_d \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \phi L^3 \\ \frac{1}{16} \rho L^3 &= \frac{1}{2} 3 \rho_l \frac{1}{4} \phi L^3 + \frac{1}{2} \rho_d \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \phi L^3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Resolvendo o sistema (5.2) no caso especial de um contínuo isotrópico com $\nu=0,25$, para o qual o valor das funções $\delta=1,125$ e $\phi=0,4$, são encontradas as densidades de massa das barras longitudinais e diagonais são $\rho_l = \rho/7.8$ e $\rho_d = \rho/5.2$, respectivamente.

Considerando estas densidades de massa para as barras longitudinais e diagonais também se satisfaz que os nós de arestas e faces tenham a massa correspondente. No entanto, alguns nós ainda não tem a massa que deveriam, são os nós internos dos elementos cúbicos que formam as faces, arestas e vértices do modulo global (Figura 5.3). Por isso, optou-se por colocar elementos de massa concentrada nestes nós que, somados as massas provenientes das barras, atingem o valor definido pelo método. Este déficit de massa se dá nos nós internos dos módulos cúbicos externos do modelo global, e se deve à falta de uma ou mais barras longitudinais dentre as seis que chegam normalmente a estes nós. Na Figura 5.3, são apresentados vários casos possíveis e qual é a massa adicionada em cada um.

Está sendo estudada uma alternativa mais geral para implementar as massas no modelo do DEM dentro do *Abaqus*.

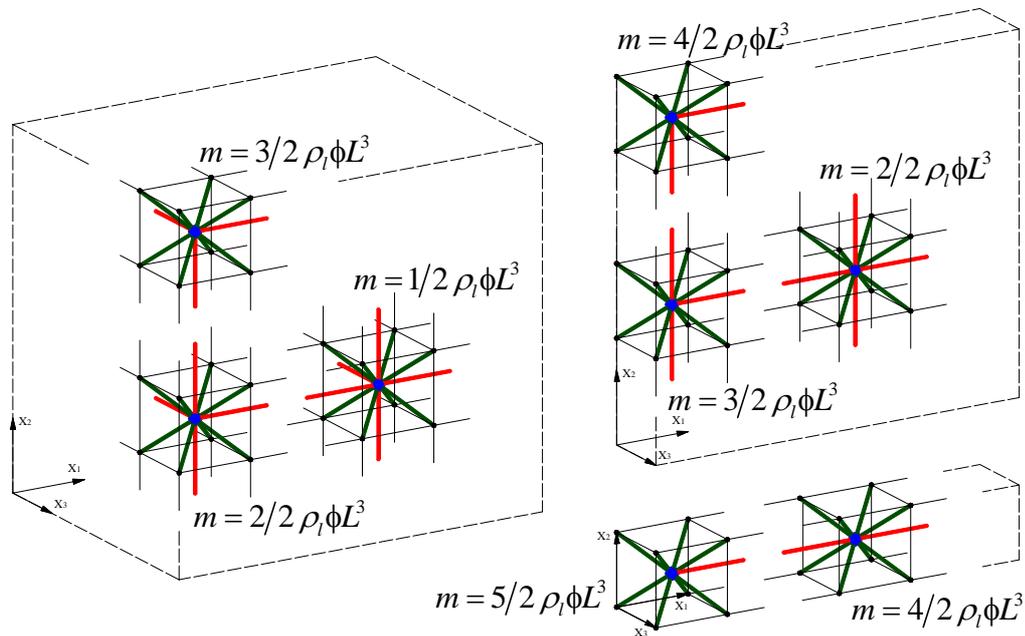


Figura 5.3 – Massas adicionadas nos nós internos dos módulos das faces para que a distribuição das massas nodais seja correta.

5.1.3 Introdução do modelo constitutivo no *Abaqus/Explicit*

O modelo de ruptura para concreto do *Abaqus/Explicit* (Abaqus Analysis User's Manual (versão 6.7), 18.5.2) tem características similares a da lei constitutiva bilinear do DEM. Entre elas se destacam:

- O comportamento à compressão é sempre elástico linear.
- O comportamento antes de começar o dano é elástico linear.
- Podem-se remover os elementos quando eles forem totalmente danificados.

O *Abaqus/Explicit* utiliza o modelo de fissuras distribuídas (smeared crack model) para representar descontinuidades no comportamento frágil do concreto. O critério de fratura se baseia no modelo de Hillerborg, 1976, e usa a taxa de liberação de energia em Modo I, G_f como parâmetro de fratura. A relação constitutiva após atingir a tensão máxima é mostrada na Figura 5.4.

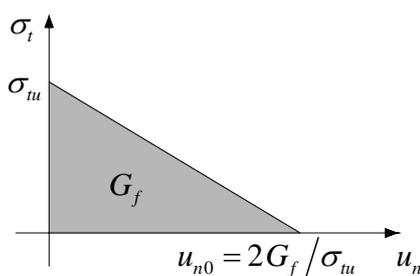


Figura 5.4 – Modelo de tensão pós falha vs deslocamento vinculada à energia de fratura utilizado no *Abaqus/Explicit*.

A tensão de falha é definida como:

$$\sigma_{tu} = E\varepsilon_p \quad (5.3)$$

O deslocamento para o qual não são mais transmitidas tensões fica então $u_{n0} = 2G_f / \sigma_{tu}$, este valor está diretamente relacionado com a deformação limite ε_r . No *Abaqus/Explicit* se especifica o valor da deformação (ε_r) em vez do deslocamento.

5.1.4 Diferença entre as definições de energias

Tanto no DEM tradicional como no DEM implementado no *Abaqus* (doravante denominado DEM-*Abq*), na parte ascendente da relação constitutiva elementar (RCE), a energia elástica corresponde com a área embaixo da curva força vs deformações e não se tem energia dissipada por dano.

Uma vez que se alcança a carga crítica (relacionada com o valor de ε_p) começa a dissipação de trabalho por dano, e a se modificar a energia elástica acumulada na barra.

Na Figura 5.5, apresenta-se como é a variação das energias elástica e de dano, tanto no DEM como no DEM-*Abq*, em diferentes pontos da RCE, tanto em carga como em descarga (sempre a tração).

No DEM-*Abq* a energia elástica diminui uma vez que se chega à carga crítica, no DEM a energia elástica pode aumentar devido que se gerou no processo de falha uma perda de rigidez, o que faz com o elemento danificado tenha uma maior flexibilidade.

No entanto, num processo de descarga-carga, uma vez atingida a carga crítica, a energia dissipada por dano pode aumentar ou diminuir no DEM-*Abq*. Já no DEM, a energia dissipada por dano não é recuperável, isto é, não diminui nunca. No processo de descarga-carga antes mencionado, a energia dissipada por dano permanece constante.

Cabe notar que o somatório das duas energias é sempre igual nas duas implementações.

Estas diferenças na relação constitutiva criam diferenças marginais nos resultados, como será ilustrado nas aplicações.

É importante remarcar que a energia cinética, tanto no *Abaqus* como no DEM, se calcula somando em todo o domínio a metade da velocidade ao quadrado multiplicada pela massa.

No *Abaqus* se faz um balance de energia definido como:

$$E_{TOTAL} = E_K + E_S + E_D + E_F - EW = \text{constante} \quad (5.4)$$

onde E_K é a energia cinética, E_S é a energia elástica, E_D a energia dissipada por dano, E_F energia dissipada por efeitos de fricção e EW o trabalho externo. A soma destes componentes de energia é E_{TOTAL} , que deve ser constante. No modelo numérico E_{TOTAL} é apenas aproximadamente constante, geralmente com um erro inferior a 1%.

O *Abaqus* tem disponível uma grande variedade de métodos para especificar o amortecimento que modela a dissipação da energia em um sistema dinâmico.

Cada fonte pode incluir tanto amortecimento de tipo viscoso como estrutural. Se necessário, podem-se combinar diferentes fontes de amortecimento num mesmo modelo (*Abaqus Analysis User's Manual*, 6.3.3 Explicit dynamic analysis).

Em algumas partes deste trabalho, utiliza-se um amortecimento sob a forma de viscosidade de massa para controle oscilações de alta frequência.

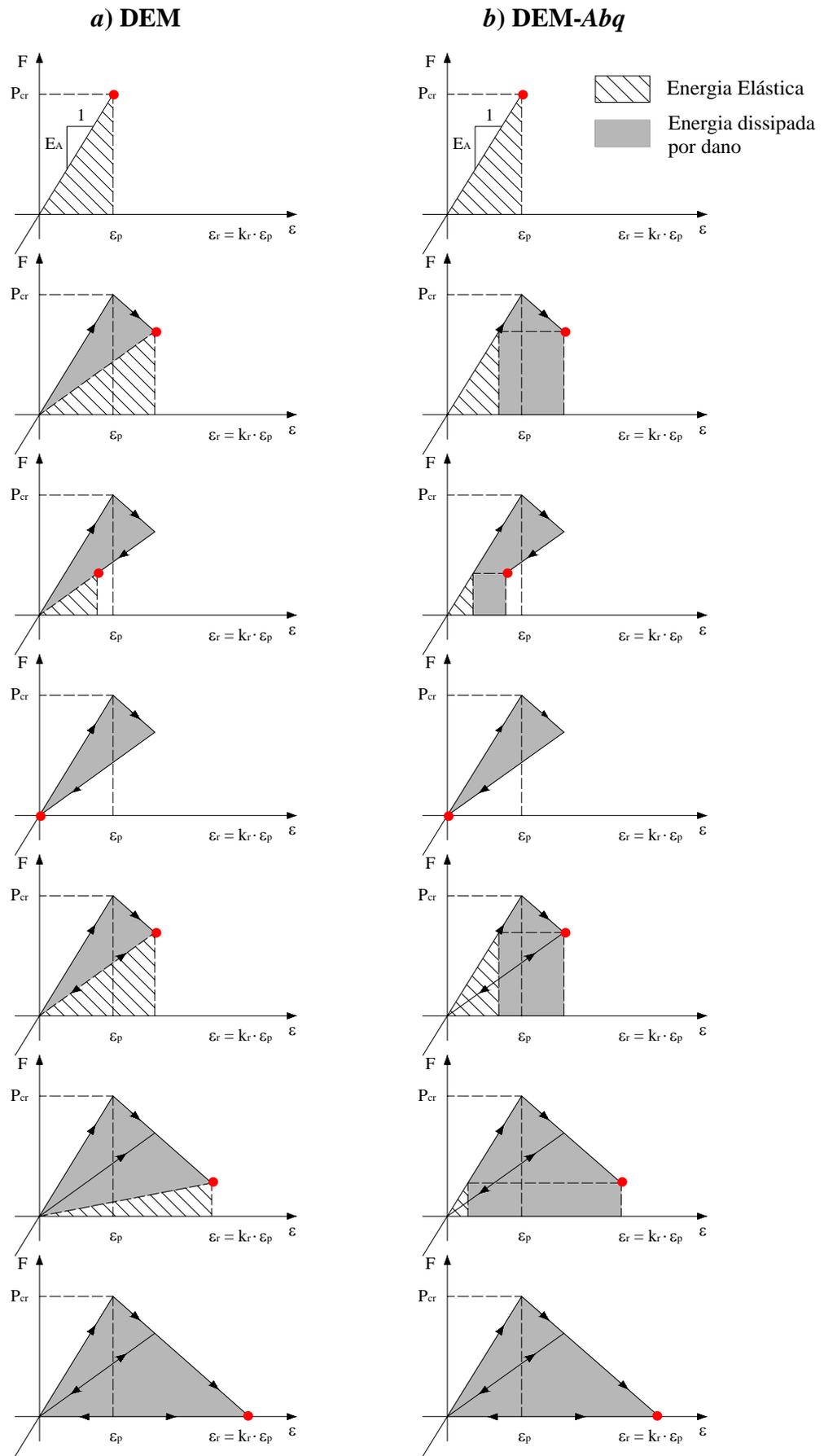


Figura 5.5 – Balanço de energias vinculado à RCE a) do DEM, b) do DEM-Abq.

5.1.5 Inclusão do caráter aleatório

Na seção 3.5.1, é descrita a forma de incluir aleatoriedade no DEM. Já na implementação no *Abaqus/Explicit*, para definir aleatoriedade do material optou-se por definir x conjuntos de propriedades associadas ao material, e para cada conjunto quatro tipos de seções (seções correspondentes a elementos colocados nas arestas (S^A), nas faces (S^C), internos (S^I) e diagonais (S^D), do modelo global, ver seção 5.1).

Logo se divide a função de densidade de probabilidade de ε_p em x intervalos, associados aos conjuntos de propriedades antes definidos, de tal forma a probabilidade dentro destes seja a mesma, isto é, que a área encerrada nestes intervalos seja constante e igual a $1/x$ (ver Figura 5.6).

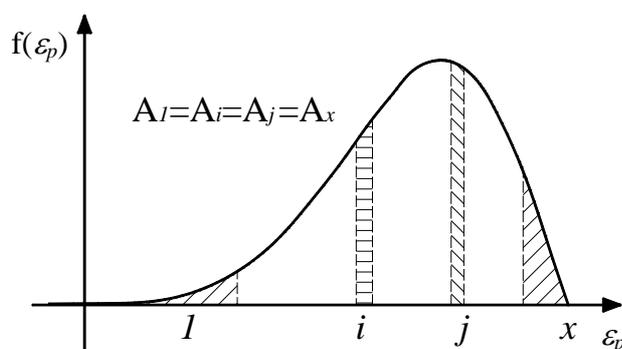


Figura 5.6 – Função de densidade de probabilidade onde foram definidos x intervalos com a mesma probabilidade de ocorrência.

A cada conjunto de propriedades associadas ao material se atribui o valor de ε_p médio de cada intervalo correspondente. A probabilidade que um valor de ε_p caia nestes intervalos é constante, já que todas as probabilidades (áreas na distribuição) são iguais. Para que um elemento tenha uma propriedade aleatória basta sortear um número pertencente ao intervalo $[1; x]$ com distribuição de probabilidade uniforme, e atribuir esse material ao elemento.

Dessa forma consegue-se uma quantidade similar de elementos em cada conjunto de propriedades associadas ao material, e globalmente obtém-se uma distribuição tipo Weibull de ε_p e de G_f .

5.2 Validação do DEM-*Abq*

Na continuação, apresentam-se exemplos que permitem verificar a implementação realizada no DEM dentro do sistema *Abaqus* (DEM-*Abq*).

5.2.1 Viga elástica linear em balanço

Estuda-se o caso de uma viga elástica linear em balanço. Na Figura 5.7 é apresentado um esquema da mesma onde $L=0,6$ m, $h=0,06$ m e $b=0,02$ m. Considerou-se a viga com módulo de Elasticidade 210 GPa e massa específica 7800 kg/m³.

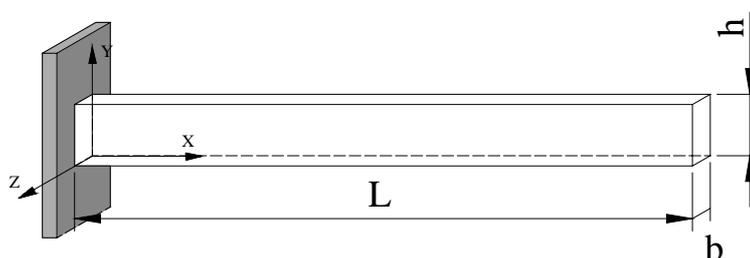


Figura 5.7 – Esquema da viga em balanço.

Na Figura 5.8a, apresenta-se o modelo no DEM-*Abq* com o engaste na origem do sistema de coordenadas local (zona marcada). Para realizar este modelo, adotou-se como tamanho do módulo básico do DEM-*Abq* (L) 0,01m, resultando em $60 \times 6 \times 2$ módulos, o que gera um modelo de 6000 graus de liberdade.

Com o objetivo de comparar resultados se realizou um modelo de elementos finitos também dentro do ambiente *Abaqus* (ver Figura 5.8b) com elementos hexaédricos lineares com 8 nós, com integração reduzida com o controle *hourglass* (elemento sólido, designado C3D8R no *Abaqus*). O elemento C3D8R tem um ponto de integração de Gauss e três graus de liberdade translacionais por nó. A malha adotada coincide com o tamanho do módulo básico do DEM-*Abq*, tem-se 3843 graus de liberdade.

O terceiro modelo avaliado com o objetivo de analisar a interação entre o DEM-*Abq* e MEF, consiste na viga da Figura 5.7 modelada com DEM-*Abq* e MEF, (ver Figura 5.8c). Os nós de uma fase do DEM-*Abq* foram colados com uma superfície do modelo em MEF de modo que não existem deslocamentos relativos entre estes. A forma em que foram vinculados se apresenta na Figura 5.9.

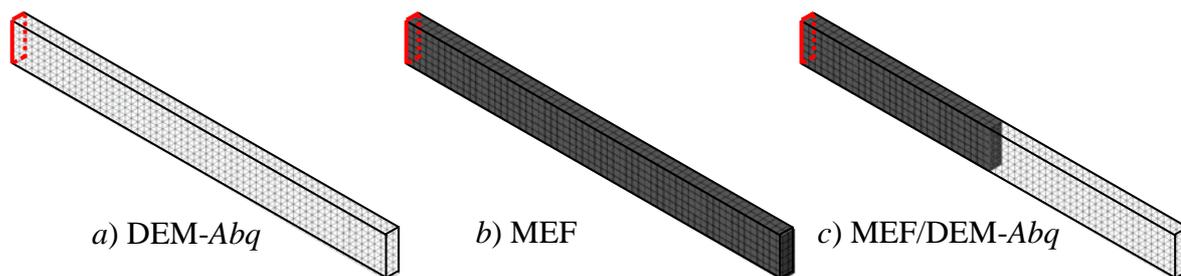


Figura 5.8 – Representação gráfica dos três modelos utilizados. a) DEM-*Abq*, b) MEF e c) MEF/DEM-*Abq*.

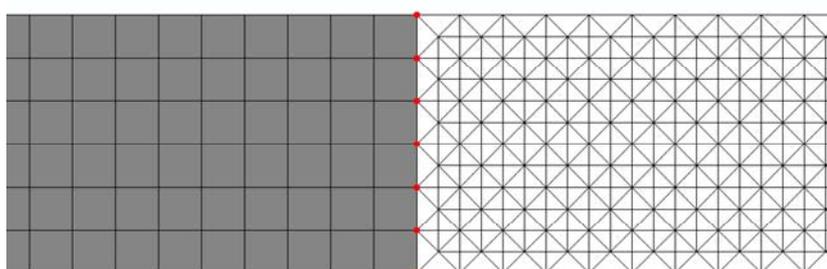


Figura 5.9 – Detalhe do encontro do modelo misto. Os nós ressaltados do DEM-*Abq* não apresentam deslocamentos relativos com relação aos da superfície modelada com o MEF.

Análise de frequências (Modal)

Calcularam-se as frequências naturais dos modelos da viga em balanço apresentada. Isso foi feito tanto numericamente, com os três modelos antes apresentados, como analiticamente, para os modos flexionais usando a teoria de Euler-Bernoulli e axiais [ver, por exemplo, Dimarogonas, 1996]. Para os cálculos numéricos dos modos de vibração, utilizou-se a análise de frequências do *Abaqus*.

Na Figura 5.10, são indicados os resultados obtidos, onde se computa também o erro percentual com relação ao do valor analítico correspondente. Os resultados mostram uma precisão razoável, que poderia ser melhorada aumentando a discretização dos modelos simulados. Cabe salientar que, para os modelos flexionais mais elevados, parte da responsabilidade da elevada diferença entre os resultados analíticos e os numéricos deve-se a que nestes casos a hipótese de viga fina começa a ser questionável.

É possível observar, também, que os resultados obtidos com o modelo misto apresentaram resultados com um grau de precisão aceitável, o que indica que a interface entre os modelos em princípio é adequada.

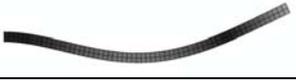
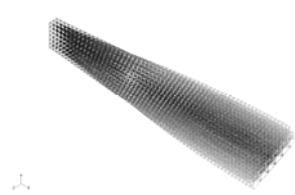
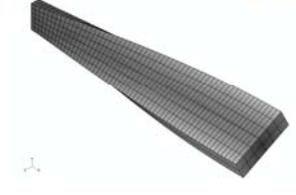
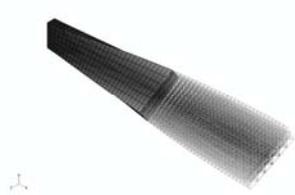
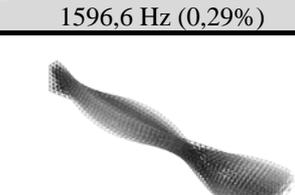
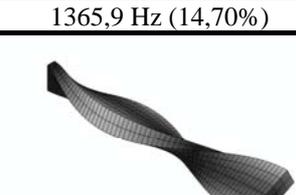
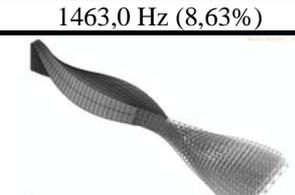
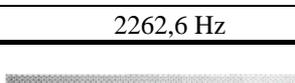
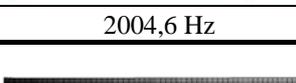
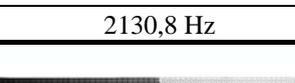
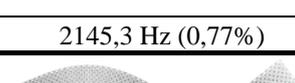
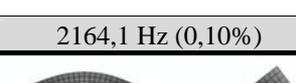
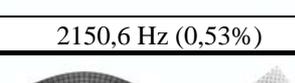
Modo	DEM- <i>Abq</i>	MEF	MEF/DEM- <i>Abq</i>
1			
	47,63 Hz (2,30%)	40,50 Hz (13,02%)	40,76 Hz (12,46%)
2			
	138,26 Hz (1,03%)	136,90 Hz (2,00%)	136,70 Hz (2,15%)
3			
	296,89 Hz (1,74%)	252,72 Hz (13,39%)	268,06 Hz (8,14%)
4			
	751,84 Hz	666,46 Hz	695,33 Hz
5			
	824,38 Hz (0,89%)	703,17 Hz (13,94%)	761,88 Hz (6,76%)
6			
	830,45 Hz (5,13%)	822,62 Hz (6,03%)	817,31 Hz (6,64%)
7			
	1596,6 Hz (0,29%)	1365,9 Hz (14,70%)	1463,0 Hz (8,63%)
8			
	2262,6 Hz	2004,6 Hz	2130,8 Hz
9			
	2145,3 Hz (0,77%)	2164,1 Hz (0,10%)	2150,6 Hz (0,53%)
10			
	2191,1 Hz (10,60%)	2171,4 Hz (11,40%)	2171,2 Hz (11,41%)

Figura 5.10 – Formas dos primeiros dez modos de vibração e comparação dos resultados obtidos com valores analíticos usando a teoria de Euler-Bernoulli.

Análise de deflexão

Na viga em balanço apresentada na Figura 5.7 se aplicou uma força, no extremo livre, no sentido negativo do eixo Y com uma função de carga-tempo mostrada na Figura 5.11a, sendo a amplitude máxima de 1N. Aplicou-se essa função de carga lentamente para simular um estado final quase estático. Na Figura 5.11b, apresenta-se a curva tempo vs deslocamento na ponta da viga para os três modelos estudados. Pode-se apreciar que ainda existem efeitos inerciais. Para comparar os valores de deflexão dos três modelos com o resultado analítico da deflexão estática no extremo livre de uma viga em balanço [Hibbeler 2004], apresentou-se na Tabela 5.1, realizou-se um ajuste de mínimos quadrados.

Não foi aplicado nenhum tipo de amortecimento nestas simulações.

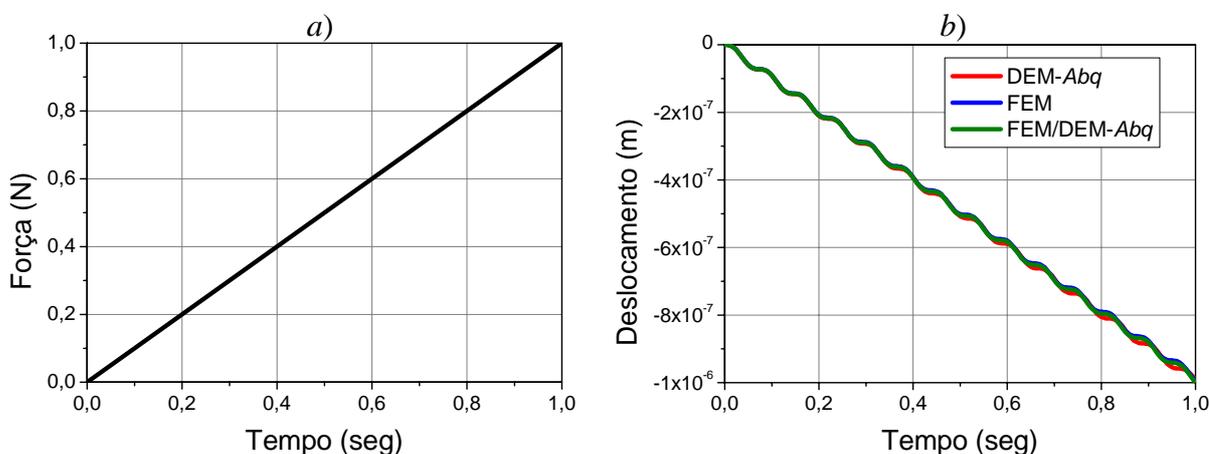


Figura 5.11 – a) função de carga aplicada, b) curva tempo vs deslocamento no extremo livre da viga para o modelo DEM-Abq, MEF e MEF/DEM-Abq.

Tabela 5.1 - Diferença entre cada método com relação ao resultado analítico de deflexão no extremo livre da viga em balanço.

Diferença com o resultado analítico	DEM-Abq	MEF	MEF/DEM-Abq
	4,31%	3,35%	3,84%

Essa diferença com relação à solução analítica pode ser devida à taxa de aplicação da carga utilizada, que não foi suficientemente lenta para simular o problema estático (transiente) do qual foi calculada a solução. Adicionando amortecimento ao modelo, pode-se diminuir a oscilação devida aos efeitos inerciais.

Análise de propagação de ondas

Para analisar o comportamento dinâmico do DEM-*Abq* e a interação entre o DEM e o MEF, foi aplicada uma pressão uniforme com amplitude de função Heaviside na viga engastada da Figura 5.7. Esta pressão foi aplicada na superfície oposta ao engaste, na direção e sentido de X, com valor de 1000Pa.

Na Figura 5.12, mostram-se as reações nos três modelos, onde se ilustra que não há grandes diferenças entre eles. Também é possível observar que os valores de reação oscilam em torno do valor da força aplicada com um valor máximo próximo ao dobro da mesma, como esperado.

Não foi colocado nenhum tipo de amortecimento no sistema.

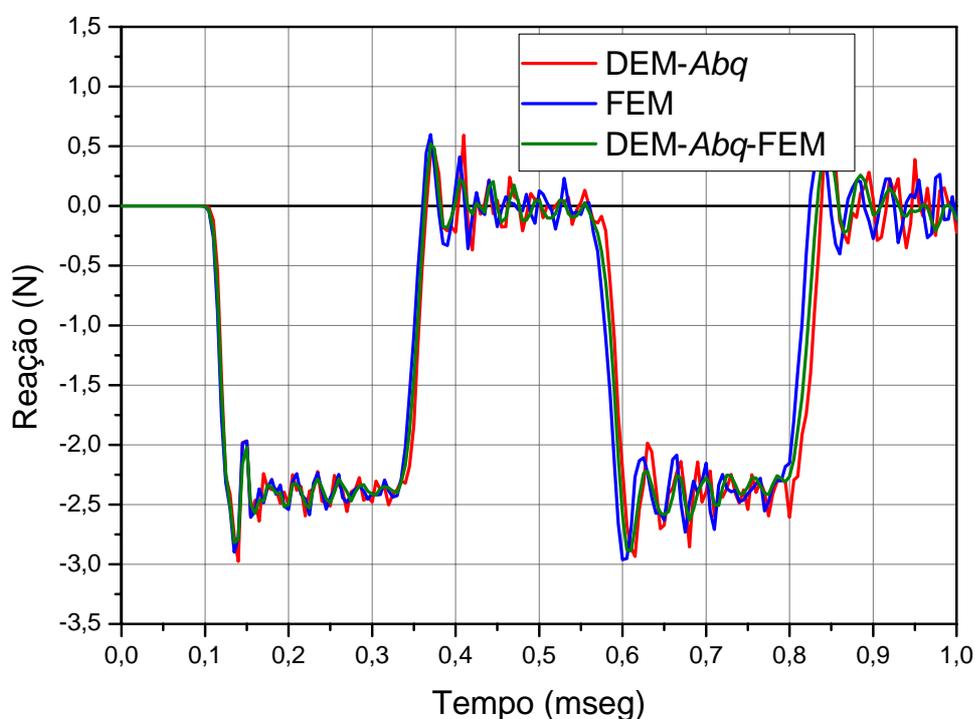


Figura 5.12 – Reações no tempo dos três métodos para uma carga aplicada com amplitude Heaviside.

Como é possível observar na Figura acima, existe um tempo entre a aplicação da carga e o aparecimento da reação. Este é o tempo que a onda de tensão gerada pela carga demora até chegar ao engaste e pode ser expresso pelo período em que não foi registrado valor significativo de reações no engaste.

Como mostrado na Figura 5.12, o tempo para o qual começa a aparecer reação é praticamente o mesmo nos três modelos, 0,1 mseg. Esse tempo é concordante com o tempo

que tarda em chegar à onda de tensão em um meio elástico com estas propriedades, que é 0,106 mseg.

5.2.2 Viga em balanço que rompe a flexão

Nesta aplicação se utilizou a mesma configuração geométrica apresentada na Figura 5.7, mas utilizando a lei constitutiva bilinear descrita na seção 3.3.1 deste trabalho. Foi aplicada uma carga pontual no extremo livre da viga no sentido negativo da direção Y (da mesma forma que na Análise de deflexão da aplicação anterior). Esta carga foi incrementada monotonicamente de forma mostrada na Figura 5.11a até causar a ruptura da viga. Para verificar a implementação realizada no ambiente *Abaqus*, o modelo foi realizado tanto no DEM tradicional como no DEM-*Abq*.

Na Tabela 5.2 são apresentados os parâmetros empregados na lei bilinear utilizada tanto no modelo do DEM tradicional como do DEM-*Abq*.

Tabela 5.2 - Propriedades da lei constitutiva bilinear utilizada nos elementos do DEM e do DEM-*Abq*.

Propriedade	Valor
G_f (energia específica de fratura)	1000 N/m
ε_p (deformação crítica de falha)	0,005
E (módulo de Elasticidade)	210 GPa
ρ (massa específica)	7800 kg/m ³
L (tamanho do módulo cúbico do DEM)	0,01 m

Na Figura 5.13a, apresentam-se os resultados em termos das curvas reações vs tempo para o modelo do DEM tradicional e o DEM-*Abq*. A Figura 5.13b mostra o balanço energético durante o processo de ruptura para os dois modelos. Na comparação dos resultados é possível observar uma boa concordância dos resultados, diferenças entre os dois caminhos começam a ser percebidas somente depois que começa a ruptura, já que não rompem exatamente os mesmos elementos nas duas simulações.

Na Figura 5.14, apresentam-se as configurações de ruptura deformadas com os elementos rompidos eliminados e uma configuração sem deformar onde as barras rompidas se encontram ressaltadas, tanto para o modelo realizado com o DEM, como para o realizado com o DEM-*Abq*. Aprecia-se que a zona onde aparecem as barras rompidas é a mesma.

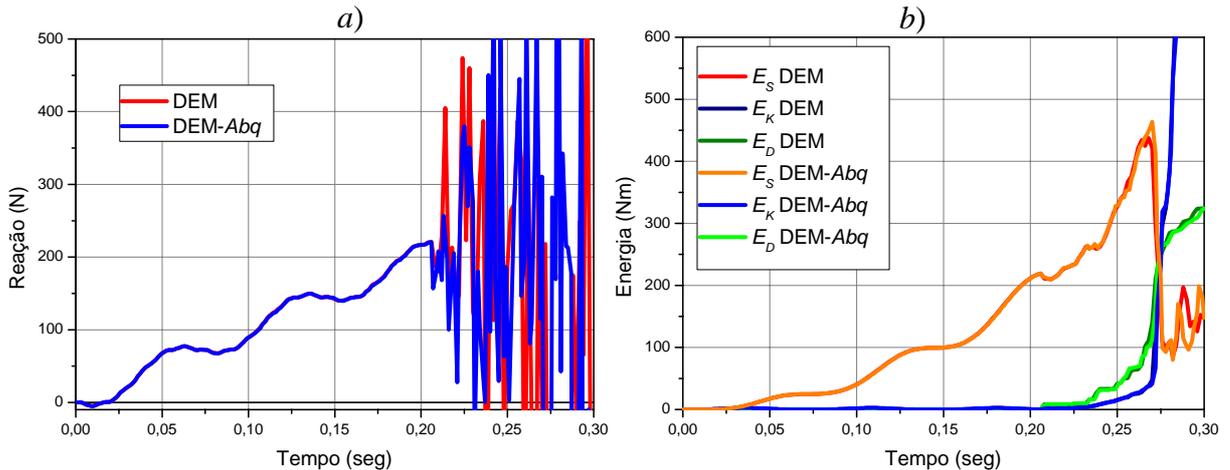


Figura 5.13 – *a)* Curvas Força vs tempo e *b)* curvas de energias, da viga engastada - livre para os modelos realizados com o DEM e o DEM-*Abq*. Energia elástica E_S , Energia cinética E_K e Energia dissipada por dano E_D .

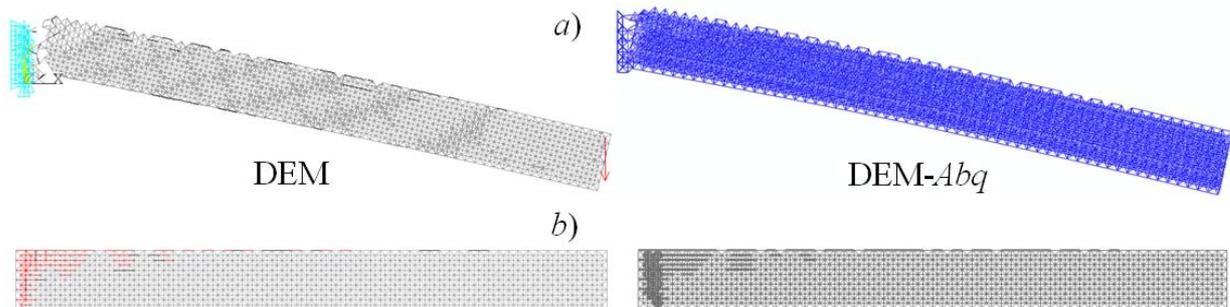


Figura 5.14 – Configurações de ruptura dos modelos realizados com o DEM e o DEM-*Abq*. *a)* deformada e elementos rompidos eliminados, *b)* não-deformada com elementos rompidos destacados.

Aleatoriedade

Simularam-se cinco vigas, iguais à mostrada no ponto anterior, mas com um $CV(G_f)$ variável e com campos aleatórios diferentes, tanto no DEM como no DEM-*Abq*.

Colocando um coeficiente de variação de 10% para G_f e simulando cinco vigas, obteve-se, no DEM, um $CV(\varepsilon_p)$ médio de 5,13% (que é o que deveria dar analiticamente, ver seção 3.5.1 e Figura 3.11). Na Figura 5.15*a*, apresenta-se a distribuição de probabilidade (frequência/somatório das frequências) de ε_p dividido pela amplitude do intervalo com que se realizou o histograma (para normalizar os resultados) das cinco simulações realizadas com o DEM e sua média, quando colocado $CV(G_f) = 10\%$.

Já realizando cinco simulações com o DEM-*Abq* e colocando $CV(G_f) = 10\%$, obtém-se um $CV(\varepsilon_p)$ médio de 5,16%. Que esse valor seja um pouco superior ao teórico (5,13%, ver

Figura 3.11) para o coeficiente de variação analisado, é devido a uma combinação de dois fatores, primeiro, a pouca quantidade de simulações realizadas (cinco), segundo, que para obter a distribuição de probabilidade se utilizaram 50 grupos (materiais diferentes) e não uma distribuição contínua como ocorria com o DEM. Na Figura 5.15b, apresenta-se a distribuição de probabilidade de ε_p dividido pela amplitude do intervalo que é variável (ver Figura 5.6), das cinco simulações realizadas com o DEM-*Abq* e sua média, também para $CV(G_f) = 10\%$.

Colocando $CV(G_f) = 50\%$, obtém-se no DEM, $CV(\varepsilon_p)$ médio de 26,82%, enquanto no DEM-*Abq* é 26,89%. Teoricamente para este valor de coeficiente de variação de G_f tem que obter, $CV(\varepsilon_p) = 26,83\%$ (Figura 3.11). Já para $CV(G_f) = 100\%$, encontraram-se $CV(\varepsilon_p)$ médios de 52,12% e 52,54%, para DEM e DEM-*Abq*, respectivamente, quando teria que dar 52,27%. Essas diferenças são desprezíveis, mas fica em evidência que o $CV(\varepsilon_p)$ obtido com DEM-*Abq* é sempre levemente superior ao obtido com o DEM, espera-se que estes primeiros modelos tenham maior resistência que os últimos.

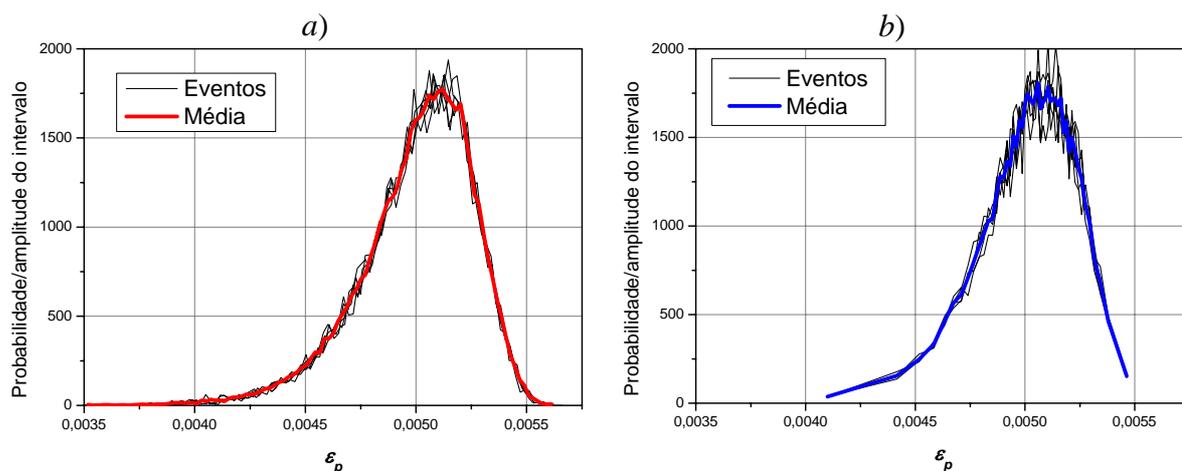


Figura 5.15 – Distribuição de probabilidade (frequência/somatório das frequências) de ε_p dividido pela amplitude do intervalo vs ε_p dos cinco eventos e de sua média, obtidos a) no DEM, b) no DEM-*Abq*, para $CV(G_f) = 10\%$.

Por exemplo, na Figura 5.16, comparam-se a média dos cinco eventos, mostrada na Figura 5.15, junto com a distribuição teórica para $CV(G_f) = 10\%$, já que para outros valores de $CV(G_f)$ as três curvas variam semelhantemente.

Na Figura 5.17, são comparadas as configurações não deformadas, onde se encontram ressaltadas as barras rompidas, destes três casos. Pode-se observar como aumenta a distribuição do dano com o aumento do $CV(G_f)$.

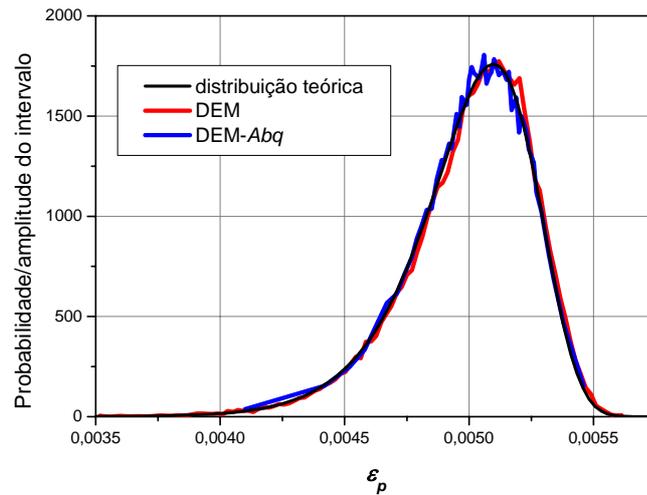


Figura 5.16 – Distribuição de probabilidade de ε_p dividido pela amplitude do intervalo vs ε_p das médias de cinco eventos obtidos no DEM e no DEM-*Abq*, comparadas com a distribuição teórica para $CV(G_f) = 10\%$.

A tendência no aumento na aleatoriedade de fazer a barra romper mais cedo, mostrada na Figura 5.17, pode ser deduzida a priori, já que aparecem elementos de menor resistência originários de uma maior dispersão das propriedades do material.

Na Figura 5.18, apresentam-se as curvas de reações e as de energias médias e seus desvios vs o tempo, feitas no DEM e no DEM-*Abq*, para um coeficiente de variação G_f pequeno (10%), médio (50%) e elevado (100%).

	$CV(G_f) = 10\%$	$CV(G_f) = 50\%$	$CV(G_f) = 100\%$
DEM			
DEM-<i>Abq</i>			

Figura 5.17 – Configurações não deformadas com barras rompidas destacadas, dos cinco eventos simulados com o DEM e o DEM-*Abq* para $CV(G_f) = 10\%$, de $CV(G_f) = 50\%$ e de $CV(G_f) = 100\%$.

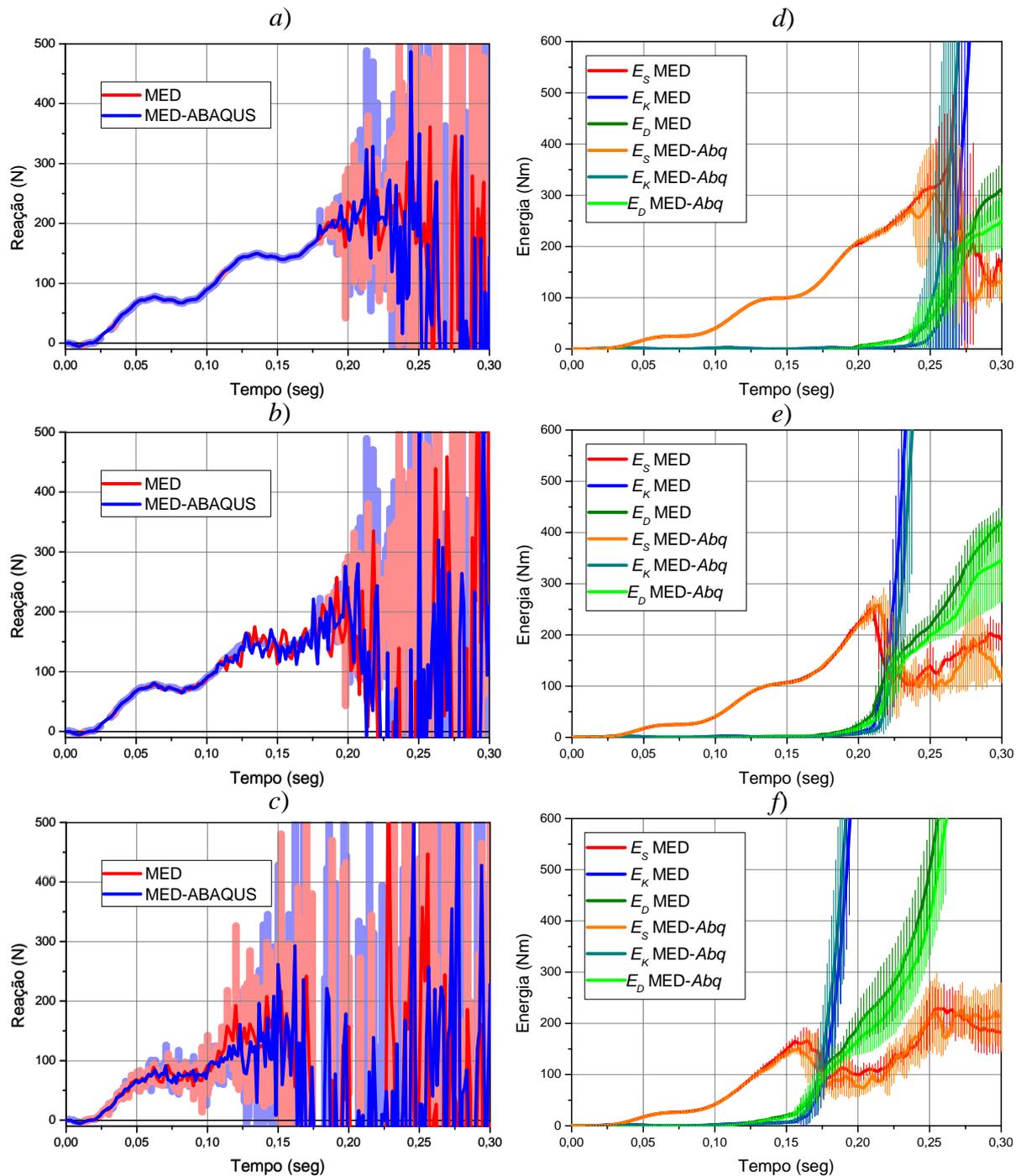


Figura 5.18 – Curvas médias e desvios de Força vs tempo *a)* para $CV(G_f) = 10\%$, *b)* para $CV(G_f) = 50\%$ e *c)* para $CV(G_f) = 100\%$; e curvas médias e desvios das energias *d)* para $CV(G_f) = 10\%$, *e)* para $CV(G_f) = 50\%$ e *f)* para $CV(G_f) = 100\%$, dos cinco eventos da viga em balanço para os modelos realizados com o DEM e o DEM-Abq.

Carga e descarga

No exemplo a seguir, aplica-se um deslocamento prescrito da forma apresentada na Figura 5.19 no extremo livre da viga em balanço utilizada nos casos anteriores. O

deslocamento prescrito segue a direção longitudinal da viga (direção X segundo a Figura 5.7). Para poder capturar a diferença entre as formas de calcular as energias entre o DEM e o DEM-*Abq*, modificou-se o valor da tenacidade ($G_f = 2000\text{N/m}$), mantendo as outras propriedades iguais às apresentadas na Tabela 5.2.

Na Figura 5.19, também se observam as reações obtidas no DEM e no DEM-*Abq* onde não se apreciam diferenças significativas entre os dois modelos.

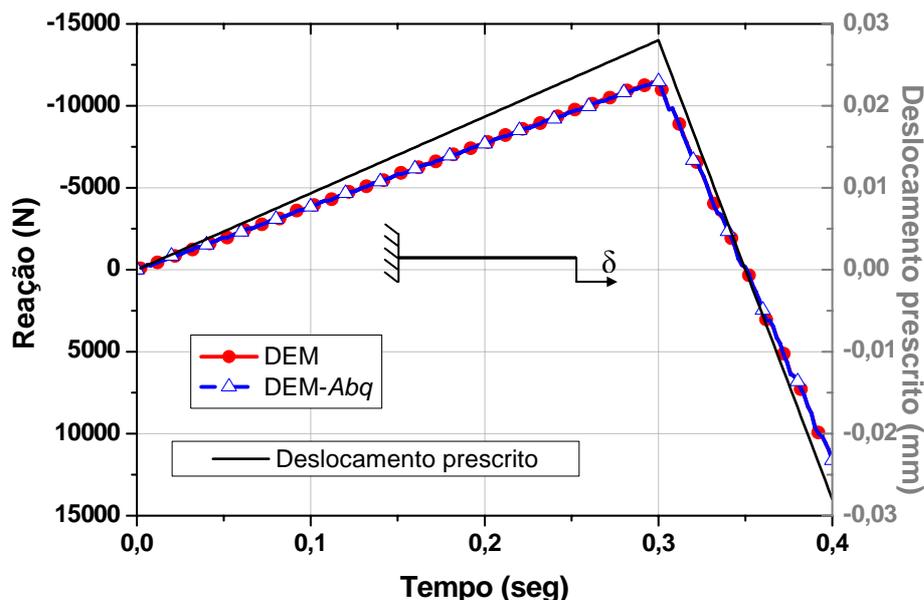


Figura 5.19 – Curvas reação vs tempo para o DEM e o DEM-*Abq* (eixo à esquerda) e deslocamento prescrito aplicado vs tempo (eixo direita).

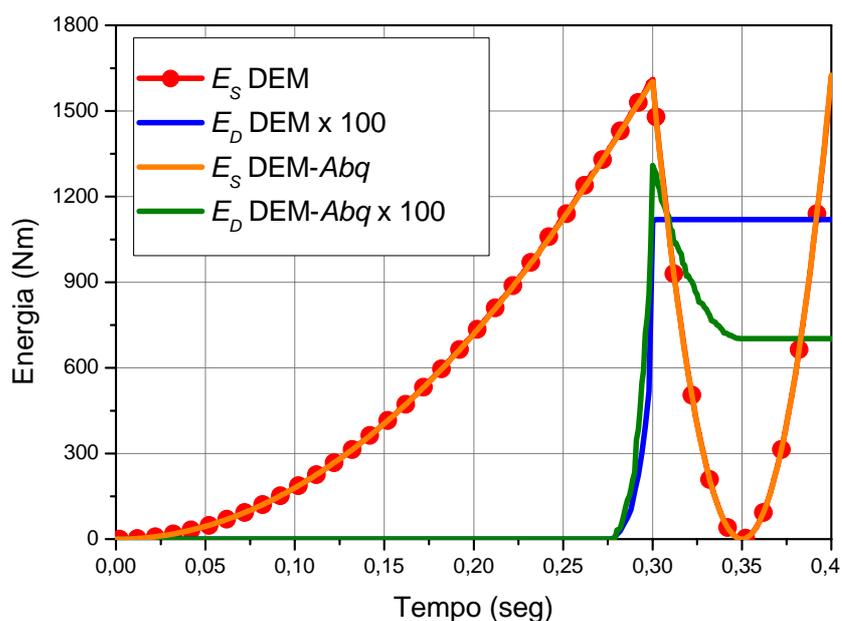


Figura 5.20 – Curvas de energias para os modelos realizados com o DEM e o DEM-*Abq*.

Energia elástica E_S e Energia dissipada por dano E_D .

O deslocamento aplicado gera um dano parcial nas barras. Na Figura 5.20, apreciam-se as diferenças entre as curvas de dano quando o deslocamento prescrito atinge seu valor máximo (ver a na Figura 5.5), onde no DEM tradicional a curva permanece constante e no DEM-*Abq* a curva decai. Isto é devido à relação constitutiva do *Abaqus*. A energia cinética não foi apresentada por ter, neste exemplo, valores muito inferiores aos outros tipos de energia envolvidos no processo.

5.3 Exemplos de aplicação

Apresentam-se, a seguir, uma breve descrição das quatro aplicações mais complexas que ilustram o potencial de ter implementado o DEM dentro do ambiente do sistema *Abaqus*.

5.3.1 Interação entre duas trincas que propagam em forma instável

Neste exemplo é mostrada uma das utilidades práticas de programar o DEM dentro do ambiente *Abaqus*. Modelam-se uma placa polimérica com dois entalhes onde a propagação das trincas é mutuamente influenciada. Caso se queira realizar este exemplo com o DEM tradicional a quantidade de graus de liberdade do problema seria da ordem dos 50 milhões, o que impossibilita seu cálculo. Mas, com a implementação realizada, gera-se a malha do DEM somente numa região da placa onde se espera as trincas propagarem. O restante da placa é modelado com elementos finitos. A diminuição de graus de liberdade assim obtida permite realizar o cálculo em computadores normais. As formas das propagações são consistentes com as obtidas experimentalmente ou com simulações encontradas na bibliografia.

No Apêndice B é estudado esse exemplo mais amplamente. Estes resultados ainda não foram publicados em artigos.

5.3.2 Fratura em discos de PMMA submetidos a impacto no DEM-*Abq*

Este é um problema complexo cujo estudo foi iniciado por Kostas, 2008, e por Barrias D'ambra *et al.*, 2009. No passado, foram obtidos bons resultados com o DEM, mas tem alguns detalhes que eram muito difíceis de modelar, como a interação que ocorre entre o penetrador e o disco. Isso é solucionado utilizando o DEM dentro do *Abaqus/Explicit* e utilizando as ferramentas que ele possui.

No Apêndice C é apresentado o estudo completo desse ponto. Estes resultados ainda não foram publicados em artigos.

5.3.3 Análise de impacto em uma placa de concreto reforçado com o Método dos Elementos Discretos formado por barras

Este exemplo foi realizado durante o meu Doutorado Sanduíche realizado no Indian Institute of Technology Bombay sob a co-orientação do professor Tarun Kant e o Dr. Ran Kumarg Singh. Os resultados deste estudo ainda não foram publicados e são apresentados no Apêndice D.

Apresenta-se o DEM como uma ferramenta simples para estudar o impacto de projeteis a altas velocidades em placas de concreto armado, no qual cada parâmetro do mesmo está relacionado às propriedades físicas do material e não é necessário nenhum artifício matemático para simular a penetração.

O exemplo mostra o impacto de dois tipos de projeteis colidindo em placas de concreto reforçado a diferentes velocidades. Comparam-se os resultados com experiências realizadas por Kojima *et al.*, 1989.

Os resultados obtidos mostram que a implementação do DEM no sistema *Abaqus*, permite o estudo de problemas complexos sendo os resultados confiáveis.

5.3.4 Simulação de uma estrutura de contenção de uma central nuclear

A simulação de uma estrutura de contenção em escala 1:4 da contenção de uma central nuclear foi parcialmente publicado em Kosteski *et al.*, 2010a e 2011c nas XXIV Jornadas Sul-americanas de Engenharia Estrutural e no XX SMiRT, respectivamente.

O sistema de contenção do Reator de Água Pesada Pressurizada (PHWR em inglês) da Central Nuclear de 540 MWe de Tarapur –CNT– (Unidades 3 y 4), Índia, consiste em um edifício primário de contenção (interno) e em um recipiente secundário (externo) que fecha todos os sistemas e componentes, estabelecendo uma barreira impermeável contra a contaminação radiativa do meio ambiente [Singh, 2009]. O modelo físico construído em Bhabha Atomic Research Center (BARCOM) é uma representação em escala 1:4 do edifício interno de contenção de concreto protendido da CNT. Projeta-se ensaiar dito modelo até a ruptura sob a ação de pressão interna, como parte de um ambicioso projeto de pesquisa sobre o comportamento de estruturas de contenção submetida a cargas extremas. Um dos objetivos do projeto é estudar a incerteza do modelo na análise de grandes estruturas de concreto armado protendido.

Devido a limitações na capacidade de armazenamento de dados e hardware disponíveis, uma análise não linear até a ruptura do modelo completo da estrutura discretizada

com o DEM não era viável. Cabe esclarecer que a abordagem aqui utilizada visa dar conta das incertezas físicas em conexão com as propriedades do material, das propriedades geométricas da estrutura e da carga. Para esse propósito, foi realizado um modelo numérico, com cerca de 500000 graus de liberdade (GDL) para realizar as simulações. Um modelo completo da estrutura com o DEM implicaria a análise de um modelo com, pelo menos, 40E6 GDL.

O meu Doutorado *Sanduiche*, realizado no *Indian Institute of Technology Bombay*, teve como objetivo particular aprimorar a simulação e assistir aos ensaios do modelo em escala, mas estes ensaios foram adiados sem previsão de realização.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente capítulo, são resumidas as principais conclusões obtidas nesta tese a partir dos objetivos, geral e específicos, apresentados no Capítulo 1. Finalmente, marcam-se possíveis trabalhos futuros que ficam em aberto ou que foram detectados durante o desenvolvimento deste trabalho.

6.1 Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado o Método dos Elementos Discretos formado por barras no estudo do colapso de estruturas. No transcurso da Tese fica em evidência a aptidão do método proposto para a análise de falha de estruturas, e como as melhoras realizadas ampliam as possibilidades do mesmo. Entende-se que, neste trabalho, foram realizadas duas contribuições importantes:

A primeira, explorar as potencialidades do DEM em simular o efeito de escala analisado sob teoria Multifractal. Utilizando estes resultados será possível, no futuro, ajustar a lei constitutiva do DEM para obter a objetividade dos resultados relativos à malha, ainda no caso de rupturas onde exista ou não a localização.

A segunda contribuição é a incorporação do DEM no ambiente do sistema *Abaqus*. Obtém-se desta forma grande flexibilidade, que permite resolver problemas com uma maior complexidade na sua geometria e condições de contorno, assim como combinar o DEM com modelos de elementos finitos.

As conclusões são divididas seguindo estas duas contribuições, fazendo referência às leis constitutivas e sua decorrência sobre o efeito de escala e fractalidade, e as implementações do DEM no ambiente *Abaqus*.

6.1.1 Leis constitutivas e fractalidade

Foram implementadas um conjunto de leis constitutivas, com e sem plasticidade, que possibilitam a melhor simulação de diferentes materiais (Capítulo 3). Realizou-se um estudo comparativo entre as diversas leis mostrando semelhança nos resultados (seção 4.1).

Também foi estudada a relação entre a lei de escala Multifractal com o DEM, com as diferentes leis constitutivas (seção 4.2). Esta lei de escala Multifractal propõe parâmetros que sejam realmente independentes da escala a serem implementados em uma lei coesiva. Dentro deste estudo, obtiveram-se as seguintes conclusões:

Expoente de tensões fractais

Foi possível medir o expoente de tensões fractais usando os modelos de Hillerborg (bilinear), Trilinear e com Amolecimento Exponencial. Não foi observada grande diferença entre as três leis constitutivas, sendo sempre este expoente muito pequeno. Também, encontrou-se que o efeito de escala nas tensões aumenta com a diminuição do K_r (ver Figura 4.28). Quando foi alterada a aleatoriedade colocada ao modelo (Figura 4.32), também se encontrou que quanto menor o $CV(G_f)$ menos efeito de escala se tem e, por conseguinte menor expoente fractal, já que este é uma medida direta deste efeito (ver 4.2.1).

Expoente de deformações fractais

Este expoente foi medido de duas formas, diretamente como a inclinação da curva em escala bi-logarítmica de deformações críticas versus tamanho da placa e analisando a distribuição do dano na placa. Os expoentes medidos da primeira forma foram descartados devido a que levam em conta o processo de localização das deformações e que este sempre tende a 1 quando a fissura fica bem definida. O segundo método para o cálculo do expoente fractal mostrou que existe uma variação do expoente com o limiar de energia utilizado no cálculo (Figuras 4.10 e 4.11). Além disso, encontrou-se que o expoente varia de zero até um valor máximo próximo ao ponto de nucleação. Além disso, o expoente de deformações fractais apresenta variações no tempo em que ocorre a ruptura. Foram obtidos bons resultados considerando um valor médio quando ocorre a nucleação e, logo, um progressivo aumento do mesmo até 1 quando a fissura propaga.

Não foi observada grande variação com a lei constitutiva utilizada (Figura 4.12), mas se espera que altere bastante com a aleatoriedade, já que esta está vinculada com a distribuição do dano.

Expoente fractal da energia de fratura

O método de patchwork, utilizado para calcular a dimensão fractal da superfície de fratura e o expoente fractal da energia de fratura, leva em conta somente a superfície final da fratura e não a distribuição espacial das mesmas. Por isso, não seria utilizado, já que a tensão e deformação são definidas ao longo da placa completa, e a energia está vinculada à área tensão-deformação. Além disso, observou-se variabilidade do expoente assim definido com o tamanho da placa (Figura 4.16).

O método energético leva a bons resultados sendo necessário um mínimo de pós-processamento. Quando se normaliza a energia relativamente à energia mínima para romper

uma placa do DEM a 45° (ver Figura 4.18), o expoente fractal obtido é pouco variável com o tamanho da placa e com a lei constitutiva utilizada (Figura 4.19).

Lei coesiva independente da escala

Considerando a soma dos expoentes fractais iguais a 1 (ver seção 2.4.4), encontrou-se a curva tensão-deformação fractal, utilizando um expoente fractal de deformações variável de 0,84 a 1, em princípio para uma fissura propagando. Com esta, é possível reconstruir as curvas tensão-deformação, quando há propagação instável. A comparação das curvas reconstruídas utilizando esta metodologia fractal, com as obtidas mediante simulação aplicando condições de carregamento especiais é bastante boa (Figuras 4.23 e 4.27).

Algumas observações

Encontrou-se que o tamanho crítico, definido este como o tamanho no qual existe uma mudança de ruptura por propagação de fissuras estável a instável no sólido, é muito importante e variável. Dentro da região de propagação estável, seria possível definir o comportamento do sólido utilizando a curva tensão-deformação fractal. Quando na região de propagação instável, quanto mais longe do tamanho crítico, mais quantidade de fissuras ativas é esperável. Nestes casos, uma combinação de várias curvas tensão-deformação fractais (de uma, duas, três,..., fissuras propagando) seria necessária.

Este tamanho crítico varia com o K_r (relacionado ao material), com a relação constitutiva elementar usada e com a aleatoriedade colocada, $CV(G_f)$ (também se espera que varie com a distribuição de aleatoriedade adotada). Quanto maior a aleatoriedade, mais cresce o tamanho crítico, mas é mais fácil também encontrar propagações estáveis com múltiplas fissuras (é de esperar já que tem mais variabilidade espacial das propriedades, então mais dano distribuído). Isso leva à necessidade de utilizar uma combinação de muitas curvas tensão-deformação fractal para representar o comportamento até de placas com propagação estável (Figuras 4.33 e 4.34).

A utilização do índice de dano, na análise dos resultados, resultou ser de grande ajuda. Porém, este índice não está corretamente definido, já que não leva em conta a área de influência relacionada a cada elemento. No caso de corpos em 3D, esta diferença é minimizada, mas quando se simulam geometrias em duas dimensões, como o caso desta Tese, essa diferença é importante.

6.1.2 Implementação do DEM no ambiente *Abaqus*

A implementação do DEM dentro do sistema de elementos finitos *Abaqus*, que foi realizada para acrescentar a capacidade do DEM de resolver problemas mais complexos, é apresentada e validada exitosamente. Um exemplo de uma viga em balanço é analisado sobre diversos pontos de vista para validar a implementação realizada. Após, foram apresentados (detalhadamente nos Apêndices B, C e D) exemplos mais complexos que seriam impossíveis de realizar sem ter feito essa implementação. As conclusões referidas a este ponto se enumeram a seguir:

- Não são encontradas grandes diferenças entre o DEM tradicional e o DEM-*Abq*, o que indicaria que a implementação é correta;
- Por mais que a forma de colocar aleatoriedade no DEM-*Abq* é diferente da utilizada no DEM tradicional os resultados não mostram diferenças sensíveis. Essa implementação seria compatível também com as modificações na forma de introduzir aleatoriedade que estão sendo estudadas por Puglia;
- Conseguiu-se interconectar o DEM junto com o MEF de forma eficiente;
- A possibilidade de utilizar corpos rígidos e superfícies teóricas, junto com as leis de contato disponíveis no *Abaqus*, aumentaram as alternativas de estudo com o DEM;
- Como mostrado no Apêndice B, o DEM capta fenômenos complexos da propagação dinâmica, mesmo sem introduzir ajudas como precisam outros métodos numéricos. Mas há alguma interferência da malha regular do DEM nos resultados do caminho de propagação obtido;
- No Apêndice C, podem ser observados resultados muito mais próximos aos experimentais com o DEM-*Abq* do que os obtidos com o DEM tradicional. Graças a esta implementação, descobriram-se as possíveis fontes de distúrbios nos resultados experimentais;
- No Apêndice D, foi apresentado um exemplo bastante complexo, que mostra as vantagens obtidas com a implementação realizada. Os resultados são compatíveis com os resultados experimentais e as fórmulas empíricas.

6.2 Trabalhos futuros

No decorrer do doutorado foi possível observar pontos plausíveis de serem estudados como continuação desta pesquisa.

Seria interessante analisar a forma da superfície de falha obtida para cada lei constitutiva, assim como o efeito de escala sobre as mesmas. Desta forma, poder-se-ia definir que características das leis constitutivas na simulação de um determinado material.

O aprofundamento da definição do tamanho crítico, para saber que propriedades seriam necessárias colocar à relação constitutiva quando o tamanho do módulo do DEM utilizado para simular um problema fica definido, é muito importante.

Mesmo que foi apresentada a forma de colocar aleatoriedade perturbando a malha do DEM, esta implementação não foi corretamente testada. Fica em aberto encontrar a relação entre o CV da perturbação de malha com o CV (G_f), além de analisar o que acontece na combinação das duas formas de colocar a aleatoriedade.

A inclusão de diferentes leis constitutivas foi originada para melhorar o comportamento das simulações a compressão. Por isso, completar o estudo do comportamento e do efeito de escala de corpos submetidos à compressão fica como tarefa pendente.

Finalmente, várias das melhorias encontradas deveriam ser programadas no DEM-*Abq*, para realizar os estudos e pesquisas futuras com uma ferramenta muito mais interessante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abaqus Analysis User's Manual (v6.7).

Absi, E. **Théorie des equivalences-determination de quelques éléments types**, Proceedings of L'institut Technique Du Balument el des Travau Publics, No 281, p. 83-86, 1971.

Adeli, H.; Amin, A.M. **Local effects of impactors on concrete structures**. Nuclear Engineering and Design, 88, 301-317. 1985.

Aliabadi M.H. e Rooke D.P. **Computational Mechanics Publications**. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. ISBN 1-85312-057-X, 1991.

Anderson T.L. **Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications**. CRC Press. ISBN: 978-0-8493-1656-2, 2005.

Barrios D`Ambra, R.L.; Iturrioz, I.; Coceres, H.; Kostascki, L.; Tech ,T. W.; Cisilino, A. **Cálculo del factor de intensidad de tensiones utilizando el metodo de los elementos discretos**, Revista Sul- Americana de Engenharia Estrutural., v. 4, No 3, p. 7-20, 2007.

Barrios D`Ambra, R.L.; Kostascki, L.; Podesta, J.M.; Uberti, B.;Iturrioz, **Estudio del comportamiento de placas delgadas sometidas a cargas de impacto utilizando el método de los elementos discretos**, Enief 2009. Mecánica Computacional, v. XXVIII, p. 973-984, 2009.

Barrios D`ambra. R.L. ; Kostascki, L.E.; Iturrioz, I.; Cisilino, A.P.; Frontini, P.; Fasce L.; Pettarín, V. **Application of the Truss-Like Discrete Element Method to Model the Impact Test of Circular Thin Polymer Plates**. ECCM 2010, IV European Conference on Computational Mechanics, Palais des Congrès, Paris, France, May 16-21, 2010.

Bathe, K.J. **Finite element procedures**, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1996.

Batista, R.G. **Aplicação do Método dos elementos discretos ao estudo de micromecânica do dano de materiais microporosos de matriz metálica**. Tese (Doutorado), de posgraduação em engenharia mecânica da UFRGS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 2007.

Bažant, Z.P. e Oh, B.H. **Crack band theory for fracture of concrete**. Mater Struct, v. 16, p. 155-77, 1983.

Bažant, Z.P. e Chen E.P. **Scaling of structural failure**. Appl. Mech. Rev. 50, p. 593-627, 1997.

Carpinteri, A. **Mechanical damage and crack growth in concrete: plastic collapse to brittle fracture**. Dordrecht: Martinus Nijhoff; 1986

Carpinteri, A. **Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials**. Int. J, Solids Struct, v. 31, p. 291-302, 1994a.

Carpinteri, A. **Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties**. Mech. Mater. v. 18, p. 89-101, 1994b.

Carpinteri, A e Ferro, G. **Size effects on tensile fracture properties: a unified explanation based on disorder and fractality of concrete microstructure**, Mater Struct, v.28, p. 563-571, 1994.

Carpinteri, A e Chiaia, B. **Multifractal nature of concrete fracture surfaces and size effects on nominal fracture energy**. Mater. Struct. v.28, p. 435-443, 1995.

Carpinteri, A.; Chiaia, B.; Ferro, G. **Size effects on nominal tensile strength of concrete structures: multifractality of material ligaments and dimensional transition from order to disorder**. Mater. Struct. v. 28, p. 311-317, 1995.

Carpinteri, A. e Chiaia, B. **Power scaling laws and dimensional transitions in solid mechanics**. Chaos, Solitons & Fractals, v. 7, p. 1343-1364, 1996.

Carpinteri, A. e Chiaia, B. **Multifractal Scaling Laws in the Breaking Behaviour of Disordered Materials**, Chaos, Solitons & Fractals, v. 8, No. 2, p. 135-150, 1997.

Carpinteri, A.; Chiaia, B.; Invernizzi, S. **Three-dimensional fractal analysis of concrete fracture at the meso-level**. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, v. 31, p. 163-172, 1999.

Carpinteri, A. e Chiaia, B. **Embrittlement and decrease of apparent strength of large-sized concrete structures**. Sadhana, India, v. 27, Part 4, p. 425-448, 2002.

Carpinteri, A.; Chiaia, B.; Cornetti, P. **A scale-invariant cohesive crack model for quasi-brittle materials**, Engineering Fracture Mechanics, v. 69, p. 207-217, 2002.

Carpinteri, A.; Chiaia, B.; Cornetti, P. **On the mechanics of quasi-brittle materials with a fractal microstructure**, Engineering Fracture Mechanics, v. 70, p. 2321-2349, 2003.

Chiaia B.; Vervuurt A.; Van Mier J.G. **Lattice model evaluation of progressive failure in disordered particle composites**, Engineering Fracture Mechanics, v. 57, No. 2/3, p. 301-318, 1997.

Clarke, K.C. **Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method**. Computer and Geosciences, v. 12, p. 713-722, 1986.

Cottrel M.G.; Yu J.; Owen D.R.J. **The adaptive and erosive numerical modelling of confined boron carbide subjected to large-scale dynamic loadings with element conversion to undeformable meshless particles**, International Journal of Impact Engineering, v. 28, p. 1017-1035, 2003.

Cundall, P.A. e Strack O.D.L. **A distinct element model for granular assemblies**, Geotechnique, v. 29:47, p. 65, 1979.

Dalguer, L.A.; Irikura, K.; Riera, J.D.; Chiu, H.C. **The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: Brief interpretation of the damage distribution on buildings.** Bull. Seismol. Soc. Am., v. 91, p. 1112-1127, 2001.

Dimarogonas, A. **Vibration for Engineers**, Second Edition. Prentice-Hall. ISBN 0-13-456229-1, 1996

Fasce, L.A. **Comportamiento mecánico de polipropileno modificado con una poliolefina elastomérica.** Tese (Doutorado) INTEMA, Universidad Nacional de Mar del Plata, Mar del Plata, Argentina, Agosto 2002.

Fraternali F.; Angelillo M.; Fortunato A. **A lumped stress method for plane elastic problems and the discrete-continuum approximation**, International Journal of Solids and Structures, v. 39, p. 6211-6240, 2002.

Freudenthal, A.M. **Statistical approach to brittle fracture.** In Fracture (ed.) H Liebowitz (New York: Academic Press) p 591-619, 1968.

Harris. C.M.; Piersol, A.G. **Harris' Shock and Vibration Handbook.** 5th Edition. McGraw-Hill. 2002

Hayashi, Y. **Sobre uma representação discreta de meios contínuos em dinâmica não-linear.** Tese (Mestrado), CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 1982.

Hibbeler, R.C. **Mechanics of materials**, Fifth edition. Prentice-Hall. ISBN 978-85-87918-67-3. 2004

Hillerborg, A.; Modeer, M.; Peterson, P.E. **Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.** Cement Concrete Res; v. 6, p.773-82, 1976.

Hillerborg, A. **A Model for Fracture Analysis.** Cod LUTVDG/TV BM-3005/1-8, 1978.

Hrennikoff A. **Solution of problems of elasticity by the framework method**, Journal of Applied Mechanics, v. 12, p. 169-175, 1941.

Iturrioz, I. **Aplicação de Método dos Elementos Discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado.** Tese (Doutorado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 1995.

Iturrioz, I.; Morquio, A.; D'ávila, V.; Bittencourt, E. **Performance of the discrete element method to represent the scale effect.** In: M. Alves, H. S. da Costa Mattos. (Org.). Solid Mechanics in Brasil. 1 ed. São Paulo: ABCM, v. 1, p. 251-262. 2007.

Iturrioz, I.; Miguel, L.F.F.; Riera, J.D. **Dynamic fracture analysis of concrete or rock plates by means of the Discrete Element Method.** Latin American Journal of Solids and Structures, v. 6, p. 229-245, 2009.

Iturrioz, I.; Riera, J.D.; Miguel, L.F.F.; Kostascki, L. E. **Scale Effects in Quasi-Fragile Materials Subjected to Compress.** In: SMiRT21, 2011, Nueva Delhi. SMiRT21, 2011.

Kanninen M.F. e Popelar C.H. **Advanced Fracture Mechanics.** Oxford University Press 1985. ISBN 0-19-503532-1, 1985.

Klerck P.A.; Sellers E.J.; Owen D.R.J. **Discrete fracture in quasi-brittle materials under compressive and tensile stress states,** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 193, p. 3035-3056, 2004.

Kojima, I.; Kunita, J.; Tanaka, N.; **Experimental study of Local behavior of Reinforced Concrete Plate to Missile Impact.** SMiRT 10. Anaheim, CA. USA, 1989.

Kojima. I. **An experimental study on local behavior of reinforced concrete slabs to missile impact.** Nuclear Engineering and Design 130. pp121-132. 1991.

Kostascki, L. **Aplicaciones del Método de Elementos Discretos en Mecánica de Fractura Estática y Dinámica.** Tese (Maestria) Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del Nordeste, Resistencia, Argentina, 2008.

Kostascki, L; Barrios D'ambra, R; Iturrioz, I. **Determinación de Parámetros Fractomecánicos Estáticos y Dinámicos utilizando el Método de los Elementos Discretos compuestos por barras.** Revista Internacional Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Cimne, v. 24, p. 323-343, 2008.

Kostascki, L.; Barrios D'ambra, R.; Iturrioz, I. **Fractomechanics parameter calculus using the Discrete Element Method.** Latin American Journal of Solids and Structures; v. 6, p. 301-321, 2009.

Kostascki, L.E.; Pinto, O.; Iturrioz, I. **Combinação entre o método dos elementos discretos composto por barras e o método dos elementos finitos no ambiente Abaqus.** Mecánica Computacional, Cilamce-Mecom 2010, v. XXIX, p. 5259-5283. 2010a.

Kostascki, L; Riera J.D.; Iturrioz, I. **Sobre la incertidumbre de modelo en la determinación numérica de la respuesta no-lineal de grandes estructuras.** XXXIV Jornadas Sul-Americanas de Ingeniería Estructural, San Juan, Argentina, 27 de setembro a 1 de outubro de 2010b.

Kostascki, L.E.; Iturrioz ,I.; Batista, R.G.; Cisilino, A.P. **The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics.** Engineering Computations, v. 28, p. 765-787, 2011a.

Kostascki, L.E.; Iturrioz, I.; Riera, J.D. **Consideration of size effect multifractal theory in fracture analysis by means of the truss-like Discrete Element Method (DEM).** In: Third International Symposium on Solid Mechanics - MecSol 2011, Florianópolis, Santa Catarina. Mechanics of Solids in Brazil 2011, p. 249-266. 2011b.

Kosteski, L.E.; Riera, J.D.; Iturrioz, I. **Ultimate load analysis of Barcom test model employing the discrete element method**. In: SMiRT21, 2011, Nueva Delhi. SMiRT21, 2011c.

Kupfer, H.B. e Gerstle, K.H. **Behavior of concrete under biaxial stresses**, Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers, v. 99, No. 4, p. 853-866, 1973.

Liebowitz, H.; Sandhu, J.S.; Lee, J.D.; Menandro, F.C.M. **Computational fracture mechanics: research and application**. Engineering Fracture Mechanics, v. 50, p. 653-670, 1995.

Mandelbrot, B.B. **The Fractal Geometry of Nature**. Freeman, San Francisco, 1982.

Mandelbrot, B.B.; Passoja D.E.; Paullay, A.J. **Fractal character of fracture surfaces of metals**. Nature: 308, 721-722. doi:10.1038/308721a0. 1984

Marzougui, D. **Implementation of a fracture failure model to a 3D non-linear dynamic finite element code (DYNA3D)**. Ph.D. Thesis, The George Washington University, VA, 1998.

Miguel, L.F.F. **Cr terio constitutivo para o deslizamento com atrito ao longo da falha s smica**. Tese (Doutorado) PPGEC, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 2005.

Miguel, L.F.F.; Riera J.D.; Iturrioz, I. **Influence of size on the constitutive equations of concrete or rock dowels**. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v. 32/15, p. 1857-1881, 2008.

Miguel, L.F.F.; Miguel, L.F.F.; Riera, J.D; Kaminski, J.; Menezes, R.C.R. **Model uncertainty in the assessment of EPS wind loads in transmission line design**. International seminar on Modeling and identification of structures subject to dynamic excitation – emphasis on transmission lines. July 12-14, 2009 – Bento Gonçalves, Brasil. ISBN - 978-85-7515-691-9, p. 151-173, 2009.

Miguel, L.F.F.; Iturrioz ,I.; Riera J.D. **Size effects and mesh independence in dynamic fracture analysis of brittle materials**. CMES, v.56, no.1, p. 1-16, 2010.

Monette, L.; Anderson, M.P. **Elastic and fracture properties of the two-dimensional triangular and square lattices**. Madelling Simul. Mater. Sci. Eng. 2 53-66. Printed in the UK. 1994.

Munjiza, A. **Guest editorial From: Engineering Computations**, International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, v. 26/6, 2009. <http://www.emeraldinsight.com/journals.htm?articleid=1806113&show=html>

Nayfeh, A.H.e Hefzy, M.S. **Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures**. AIAA Journal, v. 16(8), p. 779-787, 1978.

Nemat-Nasser, S. e Hori M. **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**. North-Holland, 1999.

Newman, J.C.Jr; James, M.A. **A Review of the CTOA/CTOD Fracture Criterion – Why it Works**. AIAA-2001. 1224, Hampton, VA. 2001

Newman, J.C.Jr; James, M.A.; Zerbst, U. **A review of the CTOA/CTOD fracture criterion**. Eng. Fract. Mech. 70, 371–385. 2003

Przemieniecki, J.S. **Theory of Matrix Structural Analysis**, McGraw-Hill, New York, 1968.

Puglia, V.B; Iturrioz, I; Riera, J.D.; Kostascki, L. **Random field generation of the material properties in the truss-like discrete element method**, Mecánica Computacional, Cilamce-Mecom 2010, v. XXIX, p. 6793-6807, 2010.

Ranjan, R. **Third Annual Progress Review Report on IMPACT ANALYSIS OF RCC STRUCTURE**, PhD Scholar (EX) Roll: 08404706, Under the Guidance of Prof. Pradipta Banerji, IIT Bombay, Prof Sauvik Banerjee, IIT Bombay & Dr. R K Singh, Internal Guide, BARC. 2011.

Riera, J.D. **Local Effects In Impact Problems In Concrete Structures**. In: proceedings, Conf. on Structural Analysis & Design of Nuclear Power Plants, UFRGS, 1984. Porto Alegre, Rs, Brasil. p. 0-0. 1984.

Riera, J.D. e Rocha, M.M. **A note on velocity of crack propagation in tensile fracture**. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas. v. XII/3, p. 217-240, 1991.

Riera, J.D. e Iturrioz, I. **Discrete element dynamic-response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading**. Communications in Numerical Methods in Engineering, Wiley & Sons, U. K, v. 11, p. 417-426, 1995.

Riera, J.D. e Iturrioz, I. **Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading**. Nuclear Engineering and Design, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, v. 179, p. 135-144, 1998.

Rinaldi A. e Lai Y.C. **Statistical damage theory of 2D lattices: Energetics and physical foundations of damage parameter**, International Journal of Plasticity, v. 23, p. 1769-1825, 2007.

Rinaldi A.; Krajcinovic D.; Peralta P.; Lai Y.C. **Lattice models of polycrystalline microstructures: A quantitative approach**, Mechanics of Materials, v. 40, p. 17-36, 2008.

Rios, R.D. **Aplicações do método dos elementos discretos em estruturas de concreto**. Tese (Doutorado), PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 2002.

Rios, R.D e Riera, J.D. **Size effects in the analysis of reinforced concrete structures**. Engineering Structures, Elsevier, v. 26, p. 1115-1125, 2004.

Rocha, M.M. **Ruptura e Efeitos de Escala em Materiais não Homogêneos**. Tese (Maestría), CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 1989.

Rocha, M.M.; Riera, J.D.; Krutzik N.J. **Extension of a model that aptly describes fracture of plain concrete to the impact analysis of reinforced concrete**. Int. Conf. and Structural Mechanics in Reactor Technology, SMiRT 11, Trans. Vol. J., Tokyo, Japan. 1991.

Roelfstra, P.E.; Wittmann, F.H. **Numerical modelling of fracture of concrete**, Transactions of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, SMiRT-9, Vol. H, F.H. Wittmann, editor, A.A. Balkema, Rotterdam/Boston, pp. 41-49. 1987.

Saouma, V.E.; Barton, C.C.; Gamaleldin, N.A. **Fractal characterization of fracture surfaces in concrete**. *Engineering Fracture Mechanics*. V. 35, Issues 1–3, pp. 47–53. Special Issue Fracture and Damage of Concrete and Rock. [http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944\(90\)90182-G](http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944(90)90182-G). 1990

Schlangen E. e Garboczi E.J. **Fracture simulations of concrete using lattice models: computational aspects**, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 57, p. 319-332, 1997.

Schnaid, F.; Spinelli, L.; Iturrioz I.; Rocha M.M. **Fracture mechanics in ground improvement design**. *Ground Improvement*, v. 8/1, p. 7-15, 2004.

Schwalbe, K.H.; Newman, J.C.; Shannon, J.L.Jr. **Fracture mechanics testing on specimens with low constraint – standardization activities within ISO and ASTM**. *Eng. Fract. Mech.* 72, 557–576. 2005

Schwalbe, K.H. Notas do: **Summer Course on Assessment of Light-Weight Structures**. Porto Alegre, Brasil, 8-12 Novembro, 2010.

Shinozuka, M.; Deodatis, G. **Simulation of Multidimensional Gaussian Stochastic Fields by Spectral Representation**, *Apl. Mech. Rev.*, v. 49, no 1, January 1996.

Sigmund O. **Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem**, *International Journal of Solids and Structures*, v. 31, Issue 17, p. 2313-2329, 1994.

Sih, G.C. A three-dimensional strain energy density factor theory of crack propagation, *Mechanics of Fracture*, v. 2 (ed. M.K. Kassir and G.C. Sih), Noordhoff Int. Publ., The Netherlands, pp. XV-LIII, 1975.

Singh, R.K. (ed.) **Pre-test report on international round robin analysis of BARC containment (BARCOM) test model**, Containment Studies Section, Reactor Safety Div., Bhabha Atomic Research Centre, Mumbai (India), ISBN 978-81-8372-046-5, 2009.

Simha, K.R.Y.; Fourney, W.L.; Barker, D.B.; Dick, R.D. **Dynamic photoelastic investigation of two pressurized cracks approaching one another**. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 23, No. 1, p. 237-249, 1986.

Slepyan L.I. **Crack in a material-bond lattice**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v. 53, p. 1295-1313, 2005.

Swenson, D. e Ingraffea, A. **A finite element model of dynamic propagation with an application to intersecting cracks**. Numerical Methods in Fracture Mechanics, Luxmore A.R. et al. (eds). Pineridge Press: Swansea, U.K., p. 191–204, 1987.

Tabiei, A. e Wu J. **Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements**. International Journal for Numerical Methods in Engineering.; 57:000–000 (DOI: 10.1002/nme.742), 2003.

Turcotte, D.L. **Fractal and Chaos in Geology and Geophysics**. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

van Vliet, M.R.A. e van Mier, J.G.M. **Size effects of concrete and sandstone**, Heron, v. 45, No.2, p. 91-108, 2000.

Weibull, W. **A statistical theory for the strength of materials** (Stockholm: Swedish R. Inst. Eng. Res.), 1939.

Zohdi, T.I. e Wriggers, P. **An introduction to computational micromechanics**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

APÊNDICE A – Análise do erro colocando coeficiente de Poisson diferente de 0,25

As deduções que relacionas as constantes elásticas do sólido com as rigidezes equivalentes dos elementos do módulo cúbico do DEM (mostrado na Figura 3.1) foram realizadas por Nayfeh e Hefzy, 1978; e se encontram explicadas em Hayashi, 1982; Iturrioz, 1995 e Kostaski, 2008.

Para um material isotrópico é possível escrever a matriz constitutiva que representa seu comportamento da seguinte forma [Przemieniecki, 1968]:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

sendo possível escrever os termos da matriz em função do módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{44} &= 0,5(C_{11} - C_{12}) = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Com o DEM, a matriz constitutiva que se pode gerar é a apresentada na expressão (A.3) [Hayashi, 1982; Iturrioz, 1995; Kostaski, 2008] que é igual à matriz isotrópica (A.1) somente quando o coeficiente de Poisson vale $\nu=0.25$.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

colocando valores diferentes do coeficiente de Poisson ν , teremos erros nos termos correspondentes às deformações de distorção (termos de cisalhamento), que deveriam ser sempre $0,5(C_{11} - C_{12})$.

Na Figura A.1 se apresenta o erro no termo C_{44} em função do coeficiente de Poisson.

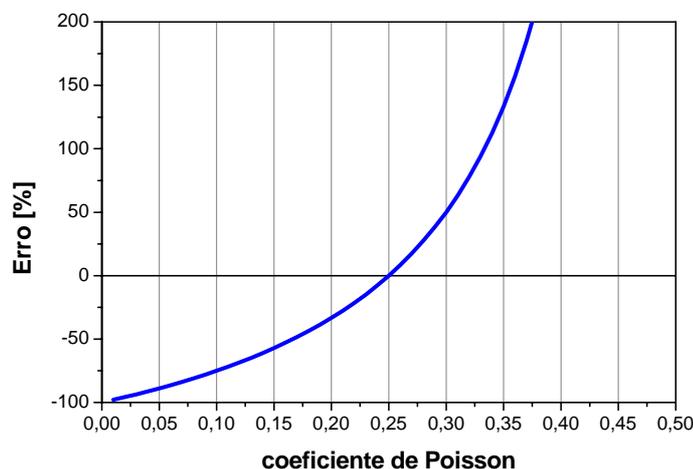


Figura A.1 – Erro porcentual cometido no cálculo de C_{44} com a variação do coeficiente de Poisson.

Para verificar este erro cometido experimentalmente, gerou-se um modelo com um módulo de altura e de espessura por 80 módulos de comprimento (mostrado na Figura A.2). Aplicou-se um deslocamento prescrito horizontal (na direção do comprimento) nos nós superiores, gerando assim uma distorção. Foram colocadas, também, restrições nas outras direções para gerar um correto efeito de cisalhamento. Foi adotado um módulo de elasticidade de 200GPa.

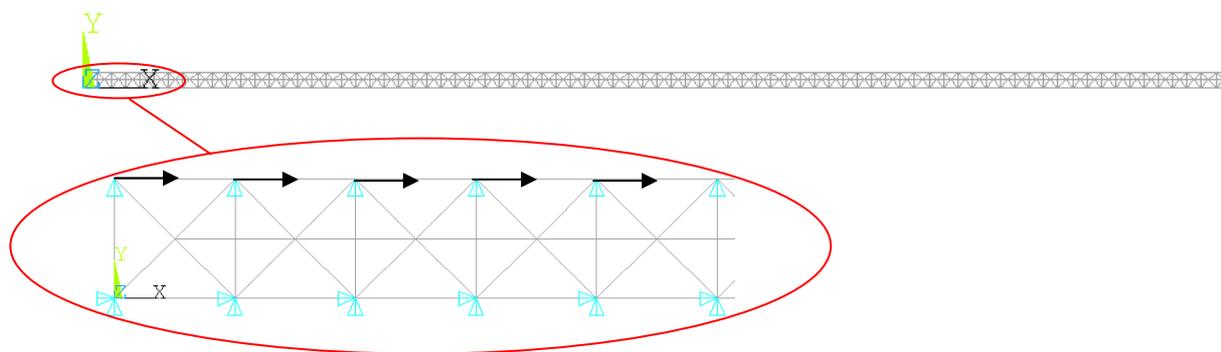


Figura A.2 – Bloco modelado com o DEM para obter cisalhamento puro.

Aplicando uma distorção de $\gamma = 6,00 \times 10^{-4}$, a tensão gerada para um coeficiente de Poisson de 0,25 deveria ser:

$$\tau = \gamma \cdot \mu = \frac{\gamma \cdot E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 4,80 \times 10^7 \text{ N/m}^2 \quad (\text{A.4})$$

Mas a tensão obtida na simulação é $\tau = 4,7463 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, o que representa um erro da ordem do 1%, que é desprezível. Fazendo assim para diferentes valores do coeficiente de Poisson se fez a curva da Figura A.3, na qual está superposto o erro teórico apresentado na Figura A.1. Aprecia-se que os valores simulados têm a mesma tendência que os valores teóricos. A diferença é devida ao fato de que, na simulação, não se tem exatamente cisalhamento puro, senão uma boa aproximação.

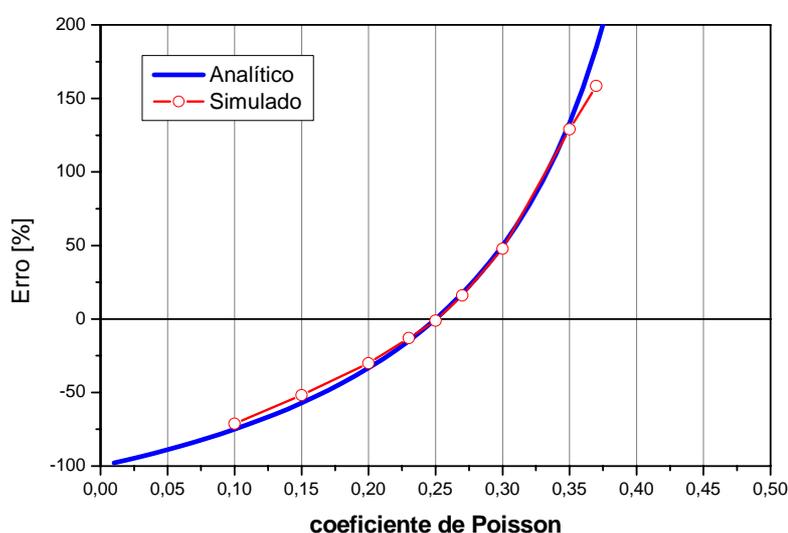


Figura A.3 – Influência do coeficiente de Poisson nos termos de cisalhamento em uma simulação realizada com o DEM comparada com a curva teórica.

Estas diferenças ou erros podem ser desprezíveis no intervalo $0,20 \leq \nu \leq 0,30$. Para valores fora deste intervalo, deveria ser utilizado um módulo básico com um arranjo de elementos diferente [ver Nayfeh e Hefzy, 1978]. Como se está interessado em simular problemas onde acontece dano e fratura, a influência do coeficiente de Poisson passa a ser marginal já que neste instante perde-se a isotropia do material.

Um estudo abrangente sobre o efeito da geometria dos elementos do DEM sobre o valor do coeficiente de Poisson pode ser encontrado em Rinaldi *et al*, 2008. Em Monette e Anderson, 1994, também foi realizado um estudo das propriedades equivalentes elásticas e de fratura de arranjos bidimensionais.

APÊNDICE B – Propagação instável de fissuras

Neste apêndice, apresentam-se várias análises realizadas de propagação instável de trincas com o DEM-*Abq*. A vantagem de colocar o DEM dentro do *Abaqus* fica em evidência nos exemplos aqui apresentados, já que somente a região onde acontece a propagação foi modelada com DEM e o resto com elementos finitos, isto permitiu construir um modelo mais barato em termos computacionais.

B.1 Trincas que emanam de duas cavidades submetidas a uma solicitação explosiva, experimento de Simha *et al.*, 1986

Simha *et al.*, 1986, realizaram o estudo de duas trincas que propagam em forma instável em direção convergente, em ângulos que variam de 180° até 60°. Os ensaios realizados por esses autores foram utilizados para verificar metodologias numéricas como as seguintes, Swenson e Ingraffea, 1987; Tabiei e Wu, 2003; Liebowitz *et al.*, 1995; Marzougui, 1999.

B.1.1 Modelo ensaiado

Simha *et al.*, 1986, utilizaram folhas de acrílico de 50,8 mm para construir os modelos transparentes utilizados no estudo. Os modelos tinham 300 mm x 300 mm de tamanho e continham dois furos circulares de 25,4 mm situados a 100 mm entre eles. Os dois furos foram entalhados para garantir que as duas trincas tenham início no local apropriado e pré-trincas (de 12,5mm) foram colocadas para que a propagação seja na direção desejada. Estes furos foram carregados com pequenas quantidades de Tetranitrato de pentaeritritol ou tetranitrato de eritrina, PETN (500-800 mg), simultaneamente, detonados enquanto o modelo estava contido dentro de um quadro de carga capaz de colocar o modelo em um estado biaxial de compressão de tensões.

A Figura B.1 mostra a geometria dos modelos testados. Os diversos casos analisados são mostrados na Figura B.2, assim como também o resumo das configurações que apresentam os autores (a partir das configurações de ruptura dos casos investigados), do comportamento das duas trincas que se cruzam em ângulos de 180°, 120°, 90° e 60°. Como se aprecia na figura, nos primeiros dois casos houve ejeção do material, como resultado da interação das trincas e nos restantes dois casos, houve apenas curvatura na trinca.

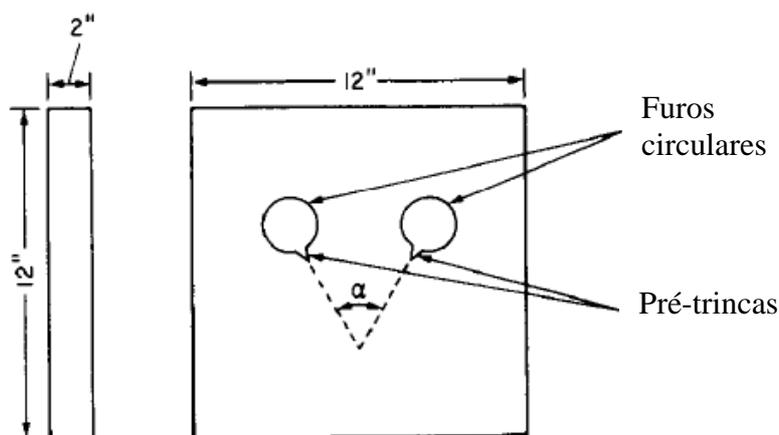


Figura B.1 – Geometria dos modelos testados por Simha *et al.*, 1986.

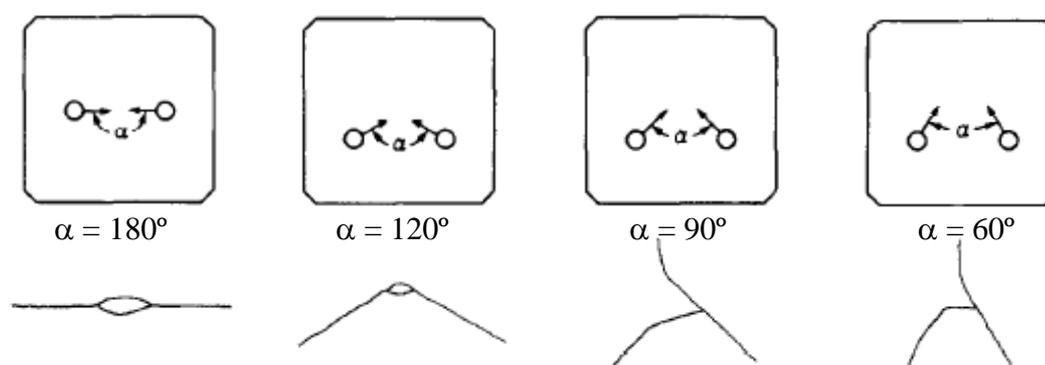


Figura B.2 – Casos analisados e comportamento observado por Simha *et al.*, 1986.

B.1.2 Modelo em DEM-*Abq*

Realizou-se um modelo no DEM-*Abq* sendo a zona onde se espera a ruptura modelada com DEM e o restante com MEF. No MEF, colocou-se um módulo de elasticidade de 3,24 GPa e uma densidade de 1190 kg/m³, no DEM, usou-se tenacidade à fratura (G_f) de 352 N/m, $\varepsilon_p = 2,469\%$, $K_r = 1,2342$, e $L = 1 \times 10^{-4}$ m, além das propriedades elásticas do MEF.

Simha *et al.*, 1986, mostram a distribuição de pressão gerada pelas detonações de PETN no tempo. Em modo de simplificação, no presente trabalho foi considerada esta pressão constante com valor 14MPa colocada nos furos. Também foi considerado estado plano de deformações.

Todos os modelos analisados serão realizados colocando interfase DEM-MEF nos nós externos do módulo externo, como apresentado na Figura B.3. Também seria possível unir a interfase utilizando os nós intermédios do último módulo, mas essa influência será analisada em futuros trabalhos. A malha do MEF é realizada por elementos hexaédricos de oito nós com integração reduzida, C3D8R.

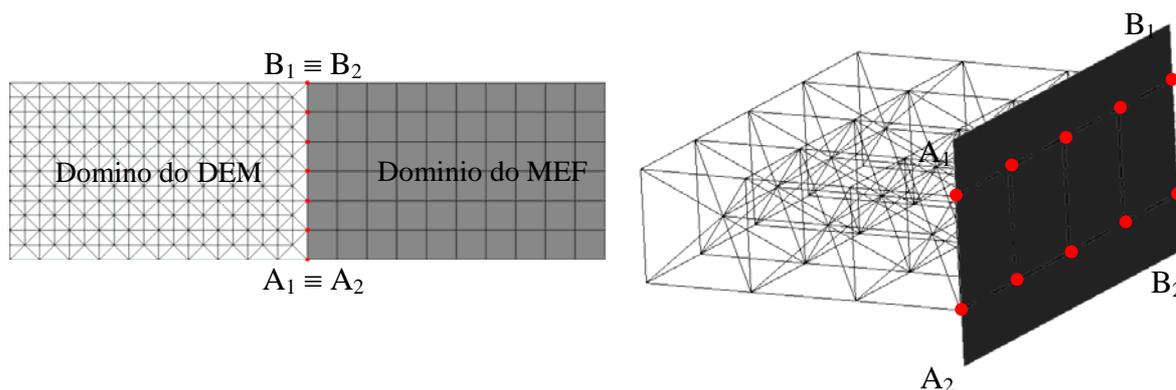


Figura B.3 – Forma da interfase DEM-MEF utilizada.

Encontro das trincas a 180°

Primeiramente, modelou-se o encontro das trincas a 180°. Para isto, como foi mencionado anteriormente, gerou-se um modelo misto de DEM-MEF, colocando DEM na região onde era esperado que a trinca se propagasse. Também, analisou-se o efeito que tem a malha de elementos finitos nos resultados, isto é, como varia o resultado da simulação do encontro entre as trincas variando as condições de borda geradas pelos elementos finitos, ou seja, mudando a simetria desta malha. Para isto, geraram-se três tipos de malha, no Modelo A, uma malha sem simetria, no Modelo B, a malha de MEF com um eixo de simetria e o Modelo C com dois eixos de simetria.

Na Figura B.4, apresentam-se esses modelos, juntamente com um detalhe da configuração de ruptura obtida. É possível observar na Figura B.4 que, modificações na malha de elementos finitos geram perturbações no resultado de propagação das trincas, mas, em geral, o comportamento tende a ser o mesmo. Nos três casos, observou-se a ejeção de um corpo gerado entre as duas trincas.

Quando Simha *et al.*, 1986, descrevem o encontro das trincas a 180° com base nas imagens obtidas durante o experimento, comentam que a trinca propagando da esquerda para a direita se curva e desvia para cima em torno da outra trinca. A trinca propagando da direita para a esquerda, ao mesmo tempo se curva para abaixo e esquiva a ponta da trinca já descrita. Logo após, as duas trincas se cruzam entre elas e se separa um pequeno fragmento de material de forma elíptica que é expulso da região da intersecção.

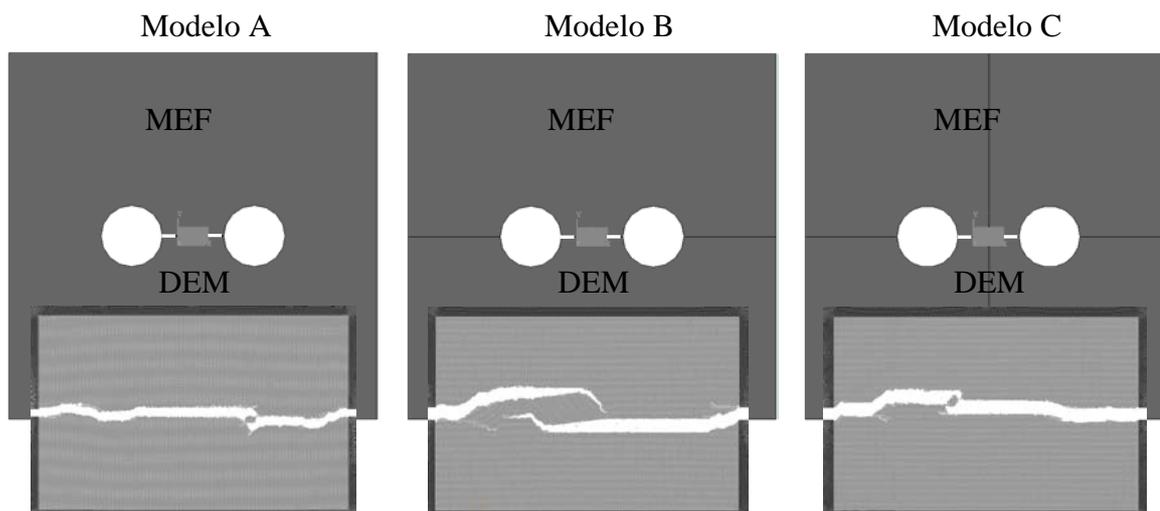


Figura B.4 – Modelos A, B e C com detalhe da configuração de ruptura, sem simetria, com simetria horizontal e com dupla simetria, vertical e horizontal, respectivamente.

No Modelo B da figura anterior, fica claro que o processo de falha encontrado com o DEM segue o mesmo fenômeno encontrado por Simha *et al.*, 1986, antes descrito. Mas, como se estudará mais adiante, nem sempre ocorre isso nas simulações com o DEM. Algumas vezes, quando as trincas se encontram próximas, geram-se bifurcações nas duas que se encontram formando o corpo ejetado, ou somente se bifurca uma delas.

Encontro das trincas a 120°

Como no ponto anterior foi encontrado que a malha de elementos finitos não gera grandes variações, para o estudo do encontro entre as trincas a 120° somente foi verificado se o ponto de encontro da pré-trinca com o DEM interfere nos resultados. Isto foi logrado realizando dois modelos, no primeiro a pré-trinca chega à esquina da malha do DEM e no segundo um pouco mais acima. Isso está mostrado na Figura B.5, juntamente com o detalhe da configuração de ruptura obtida em cada caso. Os resultados obtidos na Figura B.5 comparando com os resultados de Simha *et al.*, 1986, (Figura B.2), encontram-se similares.

Encontro das trincas a 90° e 60°

Pela dificuldade de gerar uma placa demasiada grande com o DEM (motivo pelo qual foi colocado este acoplamento com MEF), nestes dois exemplos foi gerada uma placa pequena (da ordem feita para o encontro a 180°), que foi copiada e acoplada dentro do *Abaqus*, para formar uma placa de DEM maior, regular (encontro a 90°) ou irregular (encontro a 60°).

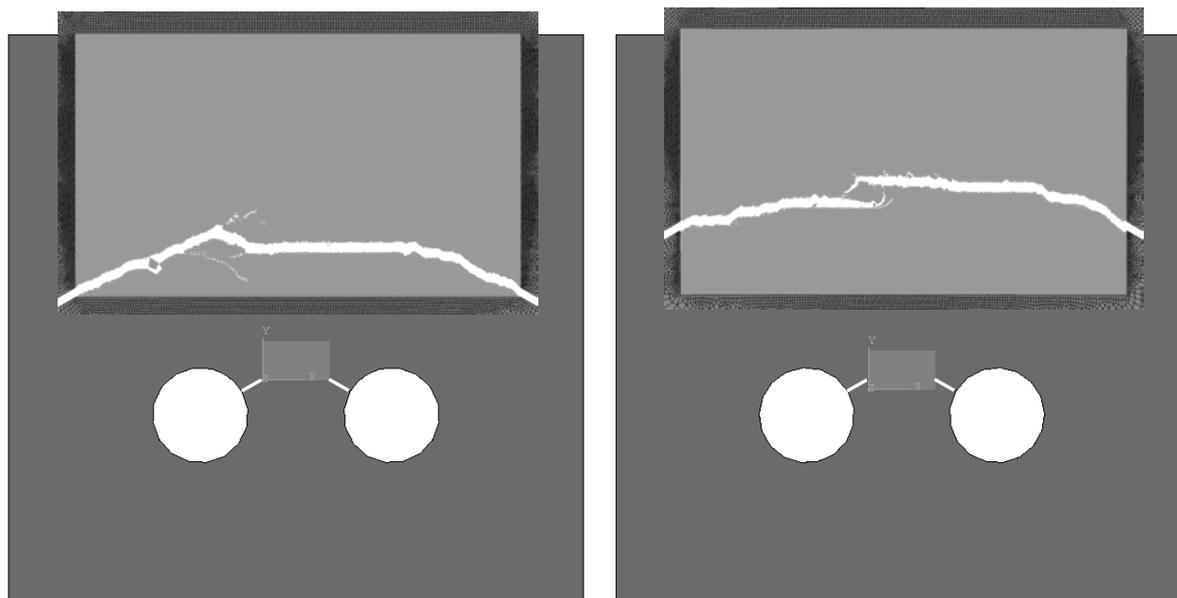


Figura B.5 – Modelos e detalhes da configuração de ruptura para o encontro de duas trincas a 120°. Pré-trinca saindo a) da esquina da malha de DEM, e b) um pouca mais acima.

Na Figura B.6, apresentam-se os dois modelos e as configurações de rupturas obtidas com o DEM. Como pode ser apreciado comparando com os resultados da Figura B.2, os resultados obtidos com o DEM captam o fenômeno observado experimentalmente por Simha *et al.*, 1986.

B.1.3 Vantagem do DEM-*Abq* sobre o DEM tradicional

Na Tabela B.1, apresentam-se os graus de liberdade de cada placa simulada discriminados no método a que pertencem, DEM o MEF. Cabe esclarecer que, caso se queira realizar este exemplo com o DEM tradicional, a quantidade de graus de liberdade necessários que teria o problema, seria da ordem dos 50 milhões, o qual impossibilita seu cômputo com os equipamentos disponíveis. A última coluna da Tabela B.1 coloca a porcentagem de GDL de cada modelo, relativo aos necessários para modelar a placa completamente com o DEM. Além disso, os resultados são bastante similares aos da bibliografia.

Tabela B.1 - Quantidade de graus de liberdade para cada um dos modelos simulados.

Pré-trincas a:	Grau de liberdade			Relativo ao DEM tradicional
	DEM- <i>Abq</i>	MEF	Total	
180°	223.803,0	229.266,0	453.069,0	0,91 %
120°	418.353,0	145.2006,0	563.553,0	1,13 %
90°	112.5393,0	370.992,0	1.496.385,0	2,99 %
60°	1.657.356,0	350.046,0	2.007.402,0	4,01 %

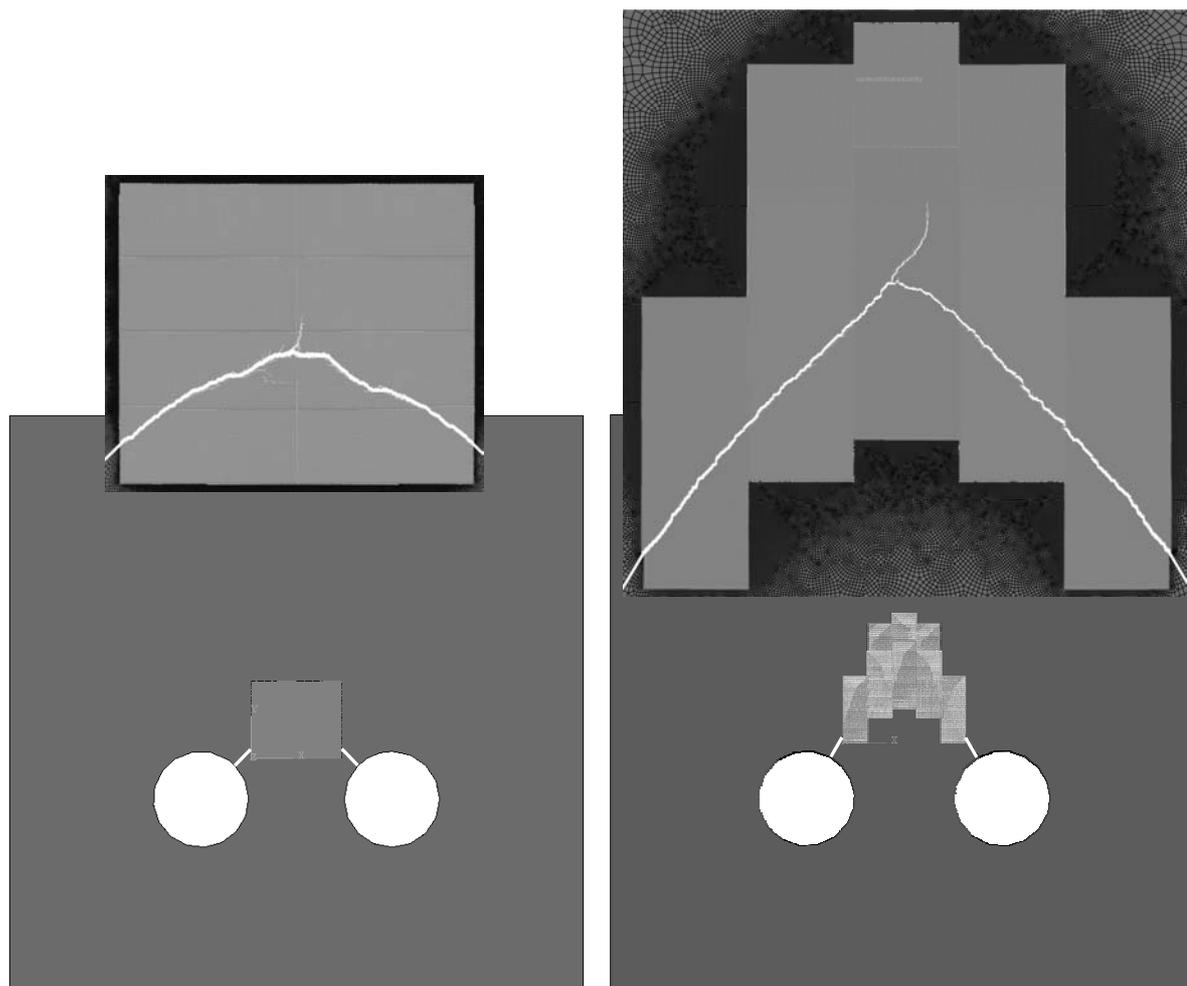


Figura B.6 – Modelos compostos DEM-*Abq* que simulam o encontro a 90° e 60° e detalhes das configurações de ruptura obtidas.

B.2 Encontro entre duas trincas, Swenson e Ingraffea

No trabalho de Swenson e Ingraffea, 1987, utilizando técnicas de re-malhado, procuram captar as observações feitas por Simha *et al.*, 1986, das duas trincas, aproximando-se uma à outra.

Eles simplificam as condições de contorno. Utilizam um corpo quadrado de uma polegada de lado com duas trincas de 0,25 polegadas. Colocaram uma assimetria inicial na análise, fazendo que as trincas esquerda e direita estejam posicionadas 0,015 polegadas por debaixo e por acima do eixo x , respectivamente.

Tanto na borda esquerda como na direita, os deslocamentos em x foram restritos. Foram aplicadas tensões constantes de abertura da trinca de 62 MPa aplicadas sobre um comprimento de 0,0575 polegadas. Foi assumida tensão plana e as propriedades do material Homalite 100.

Eles encontram nas suas simulações que, as trincas se repelem inicialmente e depois se atraem, o mesmo que Simha *et al.*, 1986, encontraram, experimentalmente, como já foi antes comentado (B.1.2).

B.2.1 Modelo em DEM-*Abq*

Como foi mostrado no ponto B.1, com o DEM não é necessário gerar uma assimetria para captar o fenômeno que ocorre no encontro de duas trincas, como fazem Tabiei e Wu, 2003; Liebowitz *et al.*, 1995; Marzougui, 1999; ou mesmo Swenson e Ingraffea, 1987.

As propriedades do Homalite 100 adotadas, assim como os parâmetros utilizados na discretização do DEM são apresentadas na Tabela B.2.

Tabela B.2 - Propriedades da lei constitutiva bilinear utilizada nos elementos do DEM-*Abq*.

Propriedade	Valor
G_f (energia específica de fratura)	87 N/m
ε_p (deformação crítica de falha)	0,01
E (modulo de Elasticidade)	4,65 GPa
ρ (densidade de massa)	2450 kg/m ³
L (tamanho do módulo cúbico do DEM)	0,0001 m

Da mesma forma que foi feito no ponto anterior, modelou-se com DEM somente a região onde se espera que as trincas propagem, modelando o resto do domínio com elementos finitos (elementos hexaédricos de oito nós com integração reduzida, C3D8R). A placa modelada com o DEM é de 125×75×1 módulos, e a interfase com o MEF se faz, como mostrado na Figura B.7, pelos nós interiores do modulo externo do DEM.

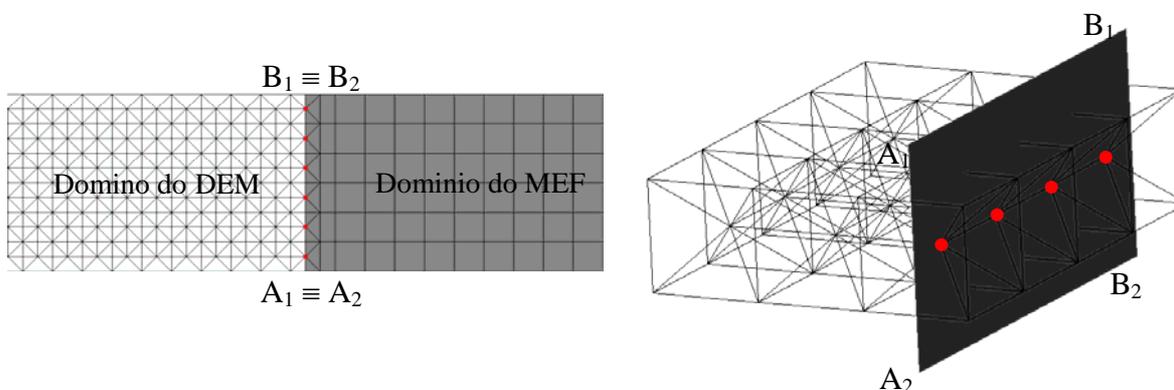


Figura B.7 – Forma da interface DEM-MEF utilizada.

Na Figura B.8, apresenta-se o modelo realizado no DEM-*Abq* que foi utilizado para simular o exemplo analisado por Swenson e Ingraffea, 1987.

Para simular estado plano de deformações foram restritos os deslocamentos na direção transversal à placa (tanto do DEM como do MEF).

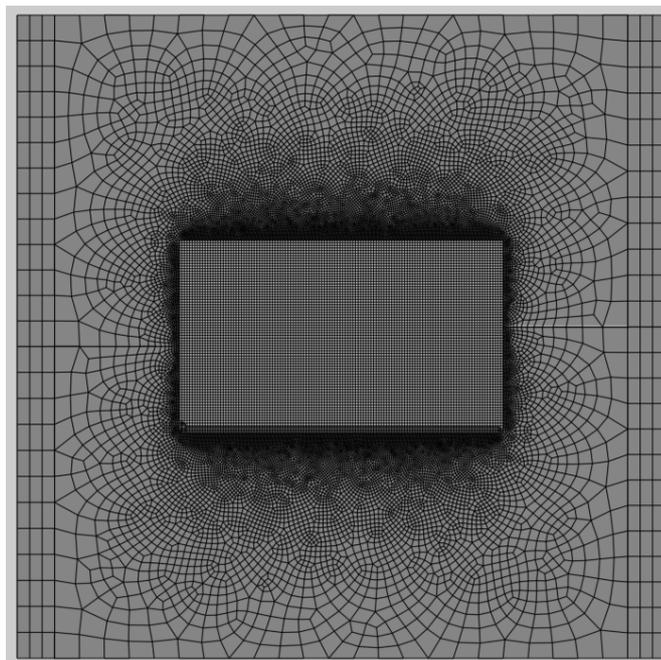


Figura B.8 – Modelo do DEM-*Abq* do exemplo analisado por Swenson e Ingraffea, 1987.

B.2.2 Estudo de sensibilidade

No DEM tradicional, tinha-se um incremento de tempo fixo (ver capítulo 3), mas o *Abaqus Explicit* permite utilizar um incremento de tempo variável, que é calculado automaticamente, sem ser maior ao incremento crítico (similar ao apresentado na expressão 3.4). Outra característica que apresenta o *Abaqus Explicit* é a que coloca por default um amortecimento numérico. Como o modelo se mostrou muito sensível às pequenas modificações realizadas, neste ponto, pretende-se mostrar como variam os resultados variando os parâmetros antes citados.

Na sequência de imagens da Figura B.9, mostram-se os detalhes da configuração de ruptura, para diferentes tempos, analisando com e sem amortecimento numérico, e com incremento de tempo fixo e variável.

Na Figura B.10, apresentam-se as energias obtidas nestes quatro casos analisados.

Pode-se ver que, com pequenas perturbações, a configuração final muda, mas segue o mesmo padrão. Em todos os casos acontece o desprendimento de um fragmento de material

de forma elíptica. Este fragmento se forma, em alguns casos, quando as trincas se repelem, inicialmente, para que depois aconteça uma atração, como ocorre na simulação de Swenson e Ingrassia, 1987, e no estudo experimental de Simha *et al.*, 1986. Mas, em outros casos, ocorre uma bifurcação e um encontro “direto” das trincas.

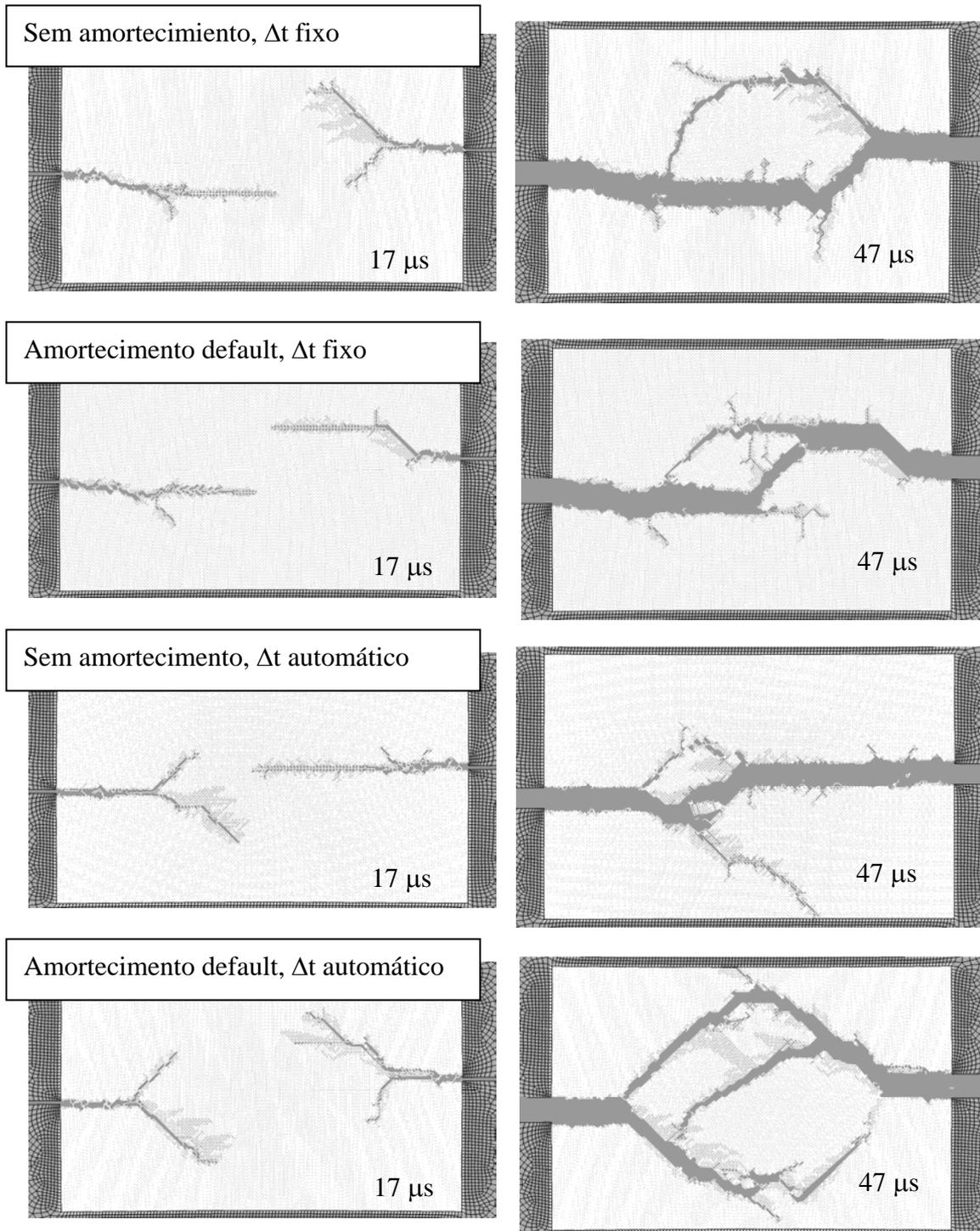


Figura B.9 – Detalhes das configurações de ruptura variando o incremento de tempo e o amortecimento numérico do *Abaqus Explicit*.

Os casos em que as fissuras se repelam-atraem, têm maior energia cinética e elástica, e menor energia dissipada por dano, que em aqueles onde se encontram as trincas bifurcadas. O tempo no qual começa a propagação é o mesmo em todos os casos.

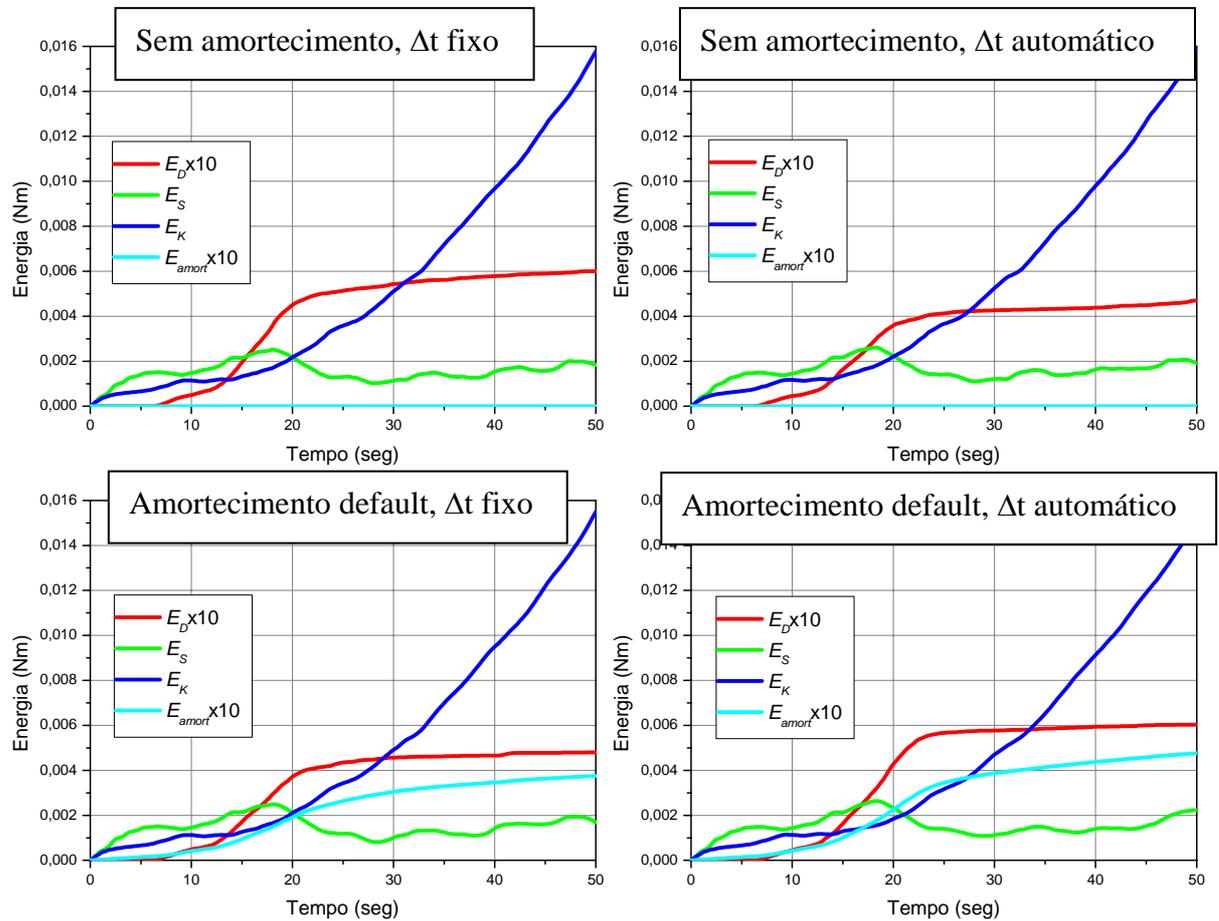


Figura B.10 – Energias durante o processo de ruptura variando o incremento de tempo e o amortecimento numérico do *Abaqus Explicit*.

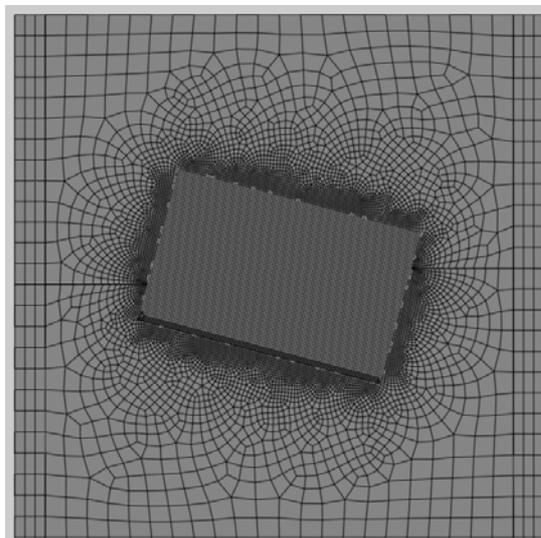


Figura B.11 – Modelo com malha do DEM girado 15° respeito da horizontal.

B.2.3 Estudo da orientação da malha nas previsões do DEM

Para analisar qual é a influência da malha do DEM nos resultados da propagação dinâmica, girou-se a placa gerada 15° respeito da horizontal, como mostrado na Figura B.11.

Na Figura B.12, mostram-se os resultados em termos de configuração final desse modelo, também variando o incremento de tempo e o amortecimento, como no ponto anterior. Pode-se apreciar uma influência da malha, mas em geral os resultados seguem o mesmo padrão de ruptura.

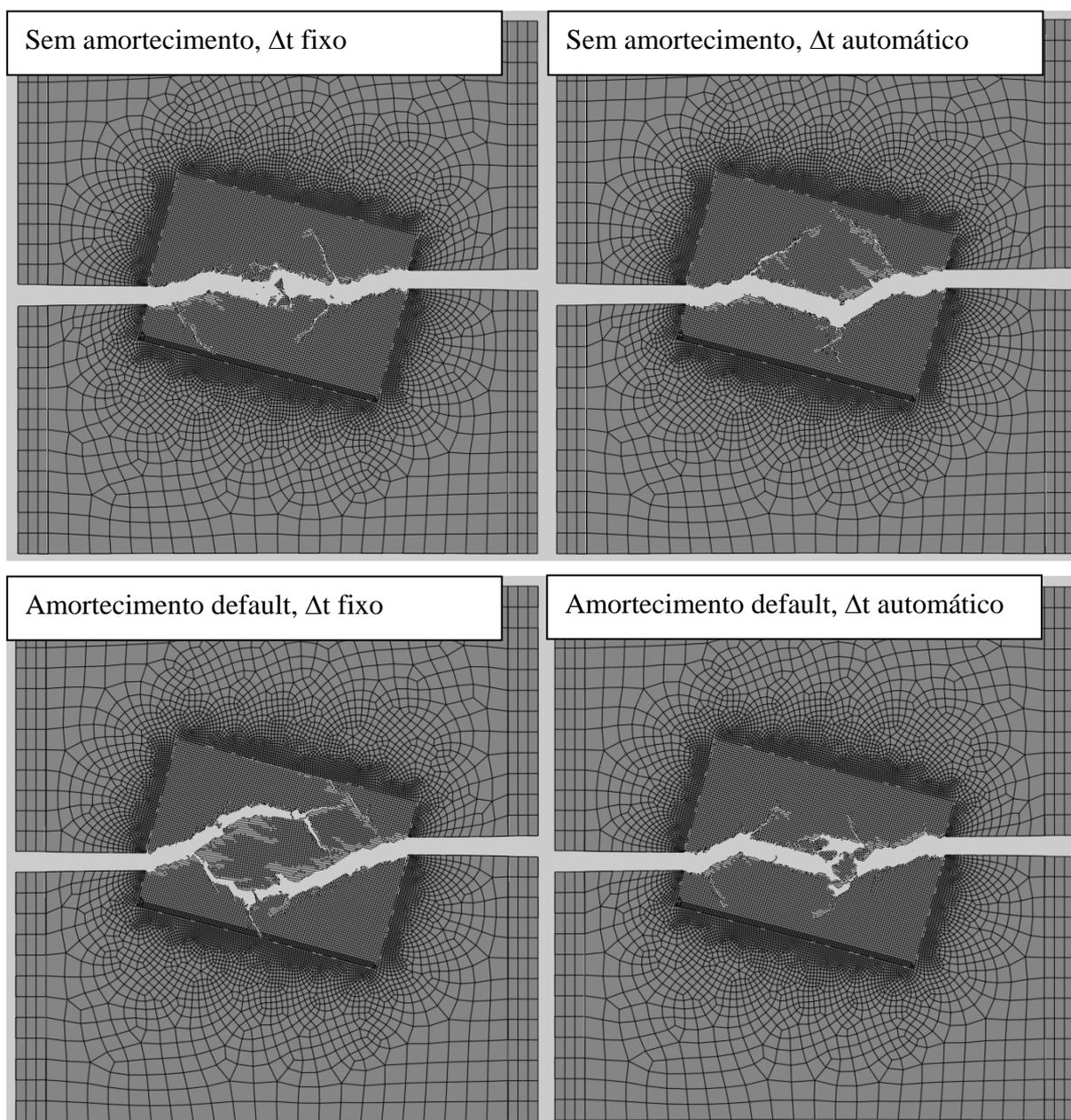


Figura B.12 – Configurações de ruptura variando o incremento de tempo e o amortecimento numérico do *Abaqus Explicit*, para a malha do DEM girada 15°.

Também, girou-se a malha do DEM 30° e 45° respeito da horizontal, como mostrado na Figura B.13, aplicando tensões prescritas. Encontrou-se que as trincas propagam até e pela interfase entre o DEM-MEF, pelo que seria necessário aumentar o domínio modelado com o DEM para evitar este problema.

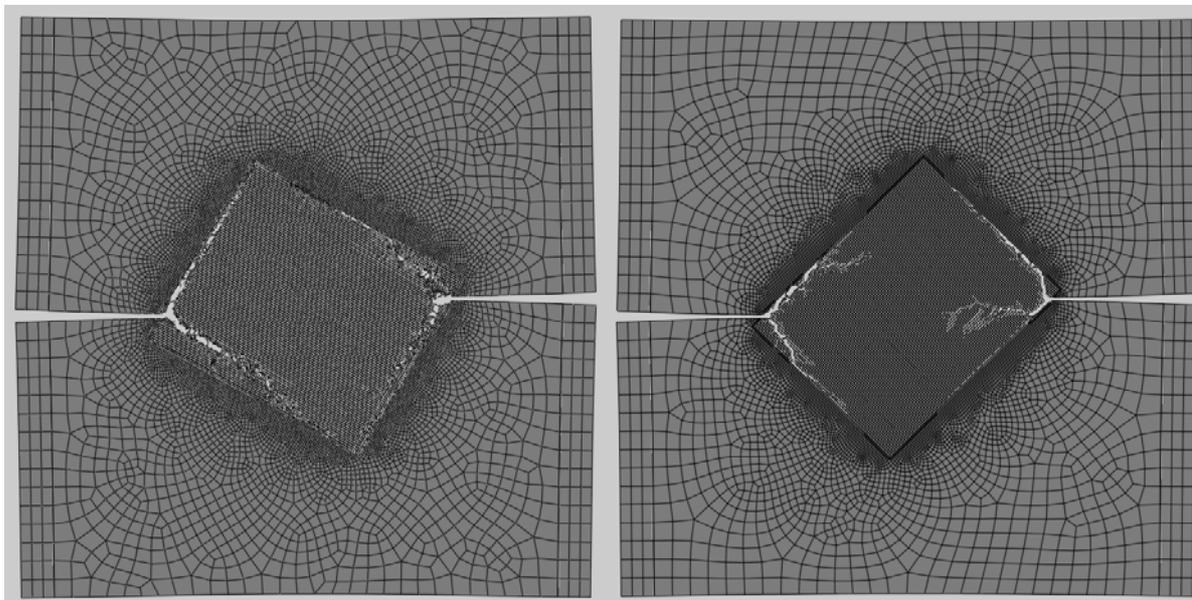


Figura B.13 – Configurações de ruptura variando a inclinação da malha do DEM.

B.3 Conclusões

No presente apêndice, apresentou-se uma vantagem obtida com a implementação do DEM no ambiente *Abaqus Explicit*. Mostram-se dois problemas clássicos, amplamente estudados do encontro de duas trincas que propagam.

Os resultados obtidos se assemelham com os obtidos experimentalmente ou com simulações numéricas encontradas na bibliografia. Pôde-se observar que a malha do DEM apresenta uma leve orientação dos resultados da propagação, mas o comportamento geral segue sendo sempre o mesmo. A implementação mostrada na seção 3.5.2, onde se perturba a malha do DEM, tenderia a diminuir este efeito de orientação da malha nos resultados.

Encontrou-se, também, que o tamanho da região modelada com o DEM tem que ser suficiente como para que toda a propagação ocorra dentro da mesma. A conexão entre os dois modelos tem que ser feita longe dos pontos de propagação para evitar que esta seja induzida.

A inclusão do DEM no ambiente *Abaqus Explicit* viabilizou a simulação destes exemplos que seriam impossíveis de realizar no DEM tradicional.

APÊNDICE C – Fratura em discos de PMMA submetidos a impacto no DEM-*Abq*

C.1 Descrição do ensaio realizado e propriedades do material e dos modelos

O ensaio de impacto por queda de um penetrador consiste em deixar cair, livremente, desde uma altura determinada, uma massa conhecida sobre um corpo de prova. A parte inferior do penetrador é semiesférica com o objetivo de conseguir uma distribuição biaxial do esforço aplicado.

Os registros de carga-tempo e velocidade do penetrador-tempo são obtidos mediante a colocação de transdutores na cabeça do penetrador, que medem a força criada pela resistência do corpo de prova e os deslocamentos que tem o penetrador durante o impacto a alta velocidade.

Fasce, 2002, realizou ensaios sobre corpos de prova circulares, discos, de PMMA de 3,2 mm de espessura, sendo a altura de queda do penetrador de 0,225m e a massa do mesmo de 18,49 Kg. Na Figura C.1, apresenta-se a vista superior e um corte no diâmetro do disco, onde D e t indicam diâmetro e espessura, respectivamente. A zona listrada esquematiza o anel metálico de sujeição de diâmetro externo D e interno S .

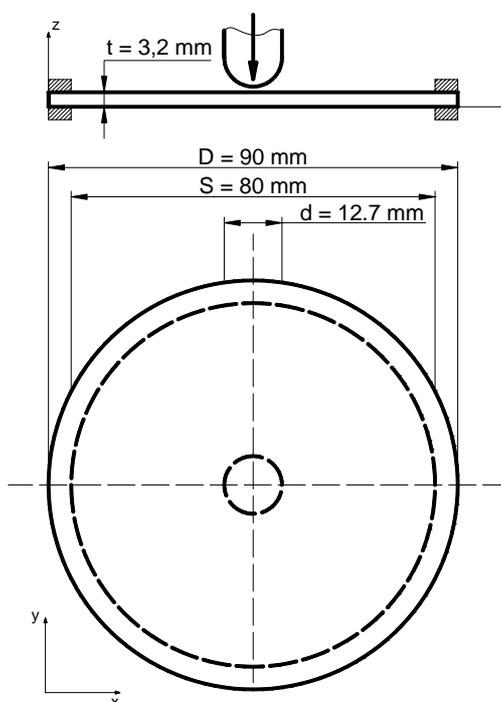


Figura C.1 – Esquema do modelo.

O material dos discos, é PMMA que tem um módulo de Young de 3,3 GPa, densidade de 1190 kg/m^3 , coeficiente de Poisson de 0,35 e tenacidade a fratura, G_f de 1034 J/m^2 .

Na Figura C.2a, mostram-se as configurações finais de quatro discos (Teste 1, Teste 2, Teste 3 e Teste 4), onde é possível detectar uma combinação entre mecanismos de falha por flexão (fissuras radiais) e por perfuração (fissuras concêntricas). Apresentam-se também as curvas força vs tempo (Figura C.2b) e velocidade do penetrador vs tempo (Figura C.2c) para os quatro discos testados.

A partir das imagens das configurações finais obtidas nos ensaios experimentais, pode-se observar que nos quatro testes foi apresentado o mesmo padrão de ruptura.

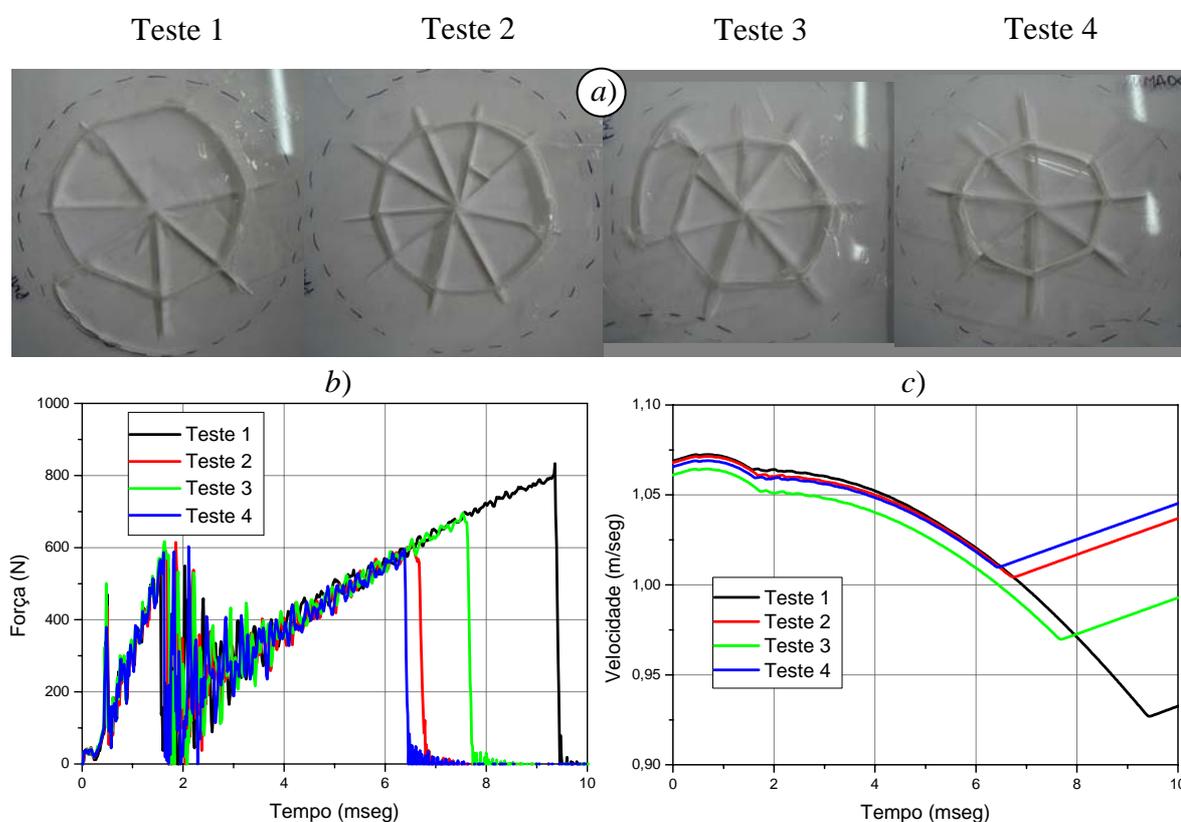
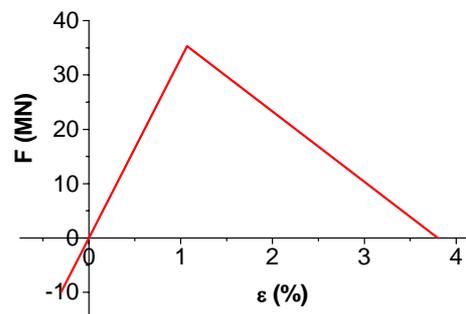


Figura C.2 – a) Configurações de ruptura, b) Curvas força vs tempo, e c) Curvas velocidade do penetrador vs tempo para os quatro corpos de prova testados [Fasce, 2002].

Na Tabela C.1, apresenta-se um resumo com as propriedades do material, PMMA, e também são mostrados os parâmetros do DEM utilizados nas simulações que serão realizadas, tanto no DEM como no DEM-*Abq*. Também é possível ver a RCE das barras normais. É interessante notar que, neste caso não foi considerada a aleatoriedade nas propriedades do material.

Tabela C.1 - Propriedades do material para o exemplo estudado, parâmetros utilizados na simulação e RCE utilizada.

Propriedades do material		Parâmetros do DEM	
E	3,3 GPa	L	$5,33 \times 10^{-4}$ m
ν	0,350	ν	0,25
ρ	1190 kg/m^3	Δt	$0,9 \times 10^{-7}$ seg
G_f	1034 J/m^2	ε_p	1,07 %



C.2 Simulações realizadas

Em Barrios D'ambra *et al.*, 2009, modelou-se com o DEM uma placa quadrada de 154 módulos de lado e 6 de espessura. Para lograr a geometria circular do disco, diminuíram-se as rigidez dos elementos que estivessem fora do raio da placa. Colocaram-se apoios verticais e horizontais nos dois módulos externos da placa circular para simular o engaste gerado pelo anel de sujeição. O impacto foi simulado colocando deslocamentos prescritos que variam no tempo, seguindo uma função da integração das velocidades experimentais (espaço igual velocidade vezes tempo). Também foi levada em conta a forma hemisférica do penetrador.

Com DEM-*Abq* foi modelada a placa com as mesmas dimensões e propriedades da Tabela C.1, também se restringiram os deslocamentos dos nós que ficassem fora do raio da placa, para assim modelar a geometria desta e, ao mesmo tempo, dar as condições de vinculação (denominada com apoios fixos para compará-la com outros modelos). O penetrador foi modelado agora como uma casca esférica rígida. Entre a superfície do penetrador e a placa de DEM foi colocada uma lei de contato sem atrito. Colocou-se, também uma velocidade inicial de 1,065 m/seg (dos dados experimentais) e uma força de 181,2 N, que representa a força gerada pela massa do penetrador (18,49 Kg) aplicado num campo gravitacional ($g=9,8 \text{ m/seg}^2$)

Na Figura C.3, apresentam-se as curvas força vs tempo das simulações realizadas com o DEM [Barrios D'ambra *et al.*, 2009], DEM-*Abq* (reações vs tempo) e a curva experimental do Teste 4. Pode-se observar que, com o DEM-*Abq*, capta-se melhor a dupla inclinação da curva. Isto pode ser devido à interação que ocorre entre o penetrador e a placa. Caso seja modelado o atrito entre as partes em contato, o ajuste poderia ser melhorado.

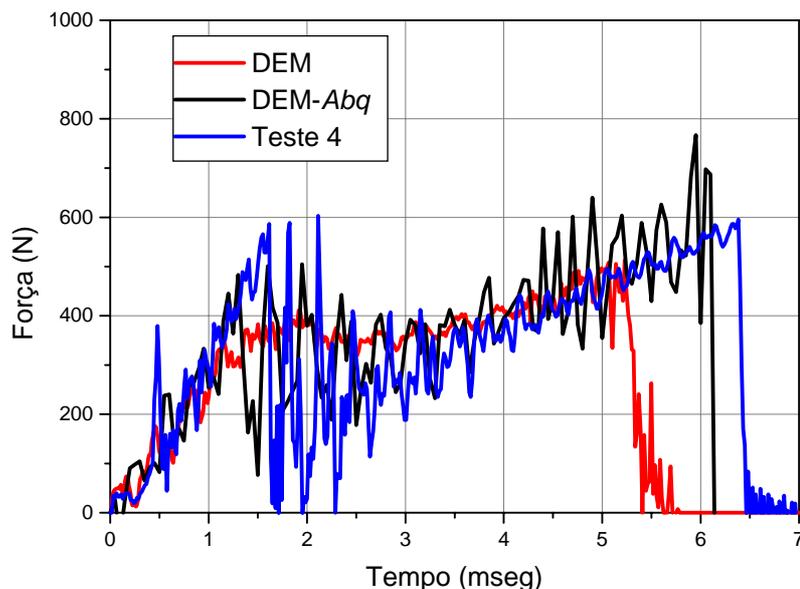


Figura C.3 – Curvas força vs tempo das simulações realizadas com o DEM [Barrios D’ambra *et al.*, 2009], DEM-Abq (reações vs tempo) e a curva experimental do Teste 4.

Na Figura C.4, apresentam-se as curvas velocidade do penetrador vs tempo para a simulação do DEM-Abq e do Teste 4. Observa-se, em geral, uma boa concordância, mas para o tempo 1,66 mseg ocorre um quebre na curva experimental (em todas elas, ver também Figura C.2c) que se relaciona com o ponto no qual a curva força vs tempo tem sua primeira perda de rigidez (aparição de trincas radiais), sendo que esta mudança de inclinação não é capturada na simulação numérica. Pode ser que isto não seja captado porque o penetrador é simulado como uma superfície analítica, tendo em realidade uma série de combinações entre as frequências naturais do penetrador como da placa geradas pelo impacto.

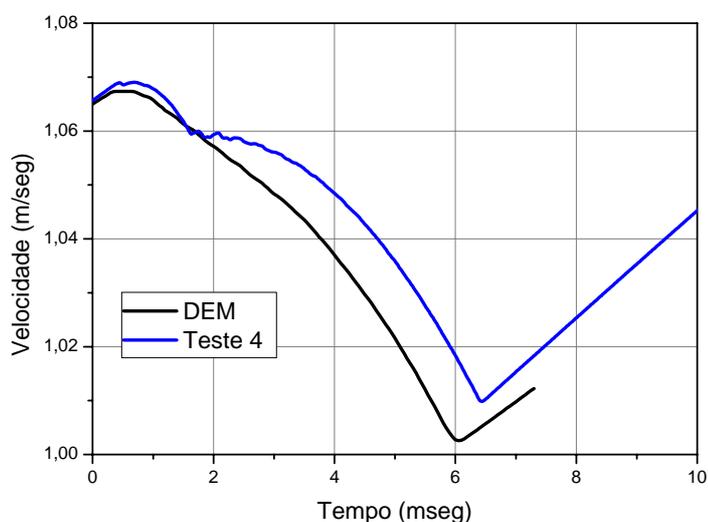


Figura C.4 – Curva velocidade do penetrador vs tempo realizadas com o DEM-Abq e a curva experimental do Teste 4.

Na Figura C.5, apresentam-se algumas vistas das configurações de ruptura onde se podem ver as fissuras radiais e concêntricas.

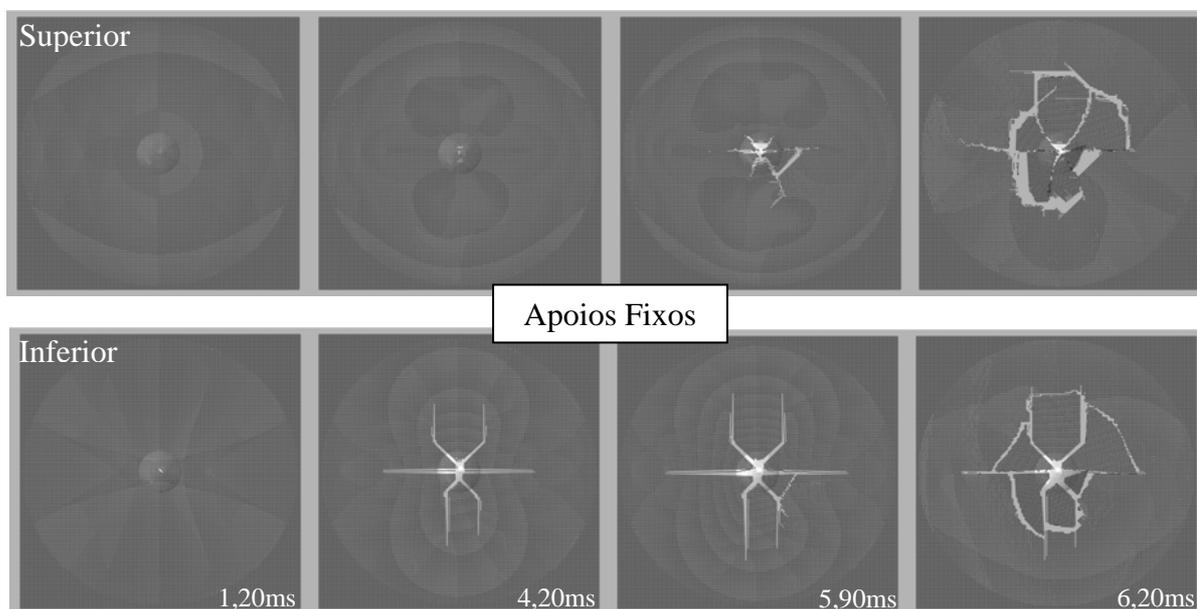


Figura C.5 – Vistas onde se mostram as camadas superior e inferior para o modelo com apoios fixos.

É interessante notar que, rodando mais tempo, obtêm-se fissuras circunferenciais próximas aos apoios como as encontradas nos experimentos (ver Figura C.2a Teste 1 e Teste 3). Isto é mostrado na figura seguinte.

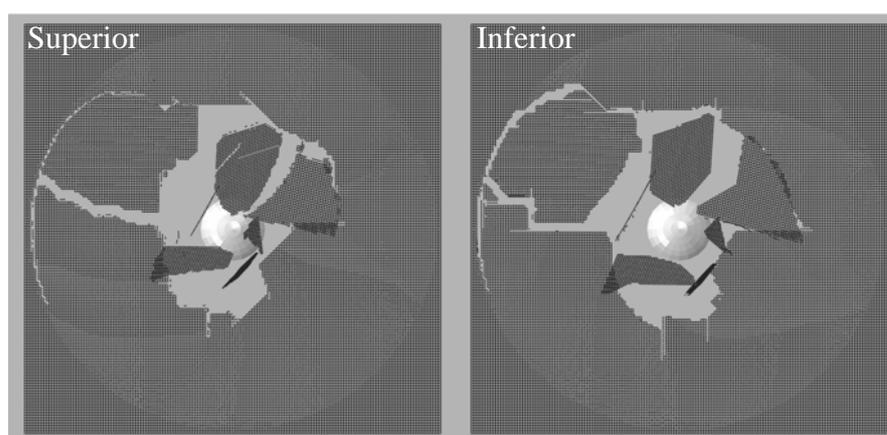


Figura C.6 – Configuração de ruptura final onde se mostram as camadas superior e inferior para o modelo com apoios fixos.

C.3 Análise da variação do apoio

Na simulação anterior, como foi dito, os apoios foram considerados fixos, restringindo os deslocamentos dos nós que estivessem fora do radio do disco (Figura C.7a). Como, acredita-se, que nos experimentos não se logra este tipo de restrição, optou-se por analisar como variam os resultados com a mudança dos apoios.

Optou-se por dois modelos onde se geraram os anéis de fixação como superfícies analíticas na forma de anéis concêntricos. As propriedades restantes dos modelos, L , E , Δt , ε_p , G_f , etc. são as mesmas que no caso anterior (denominado Apoios Fixos). O primeiro modelo, Modelo A, os anéis de fixação foram simulados como apresentados na Figura C.7b (espessura de 5mm), foi considerada uma lei de contacto entre as superfícies sem atrito.

O Modelo B, é quase igual ao Modelo A com a diferença que foi gerada uma folga de 0,3 mm entre a placa e o anel superior. Com esta modificação se pretende estudar a influência do “aperte” dos anéis de sujeição. Este modelo está mostrado na Figura C.7c.

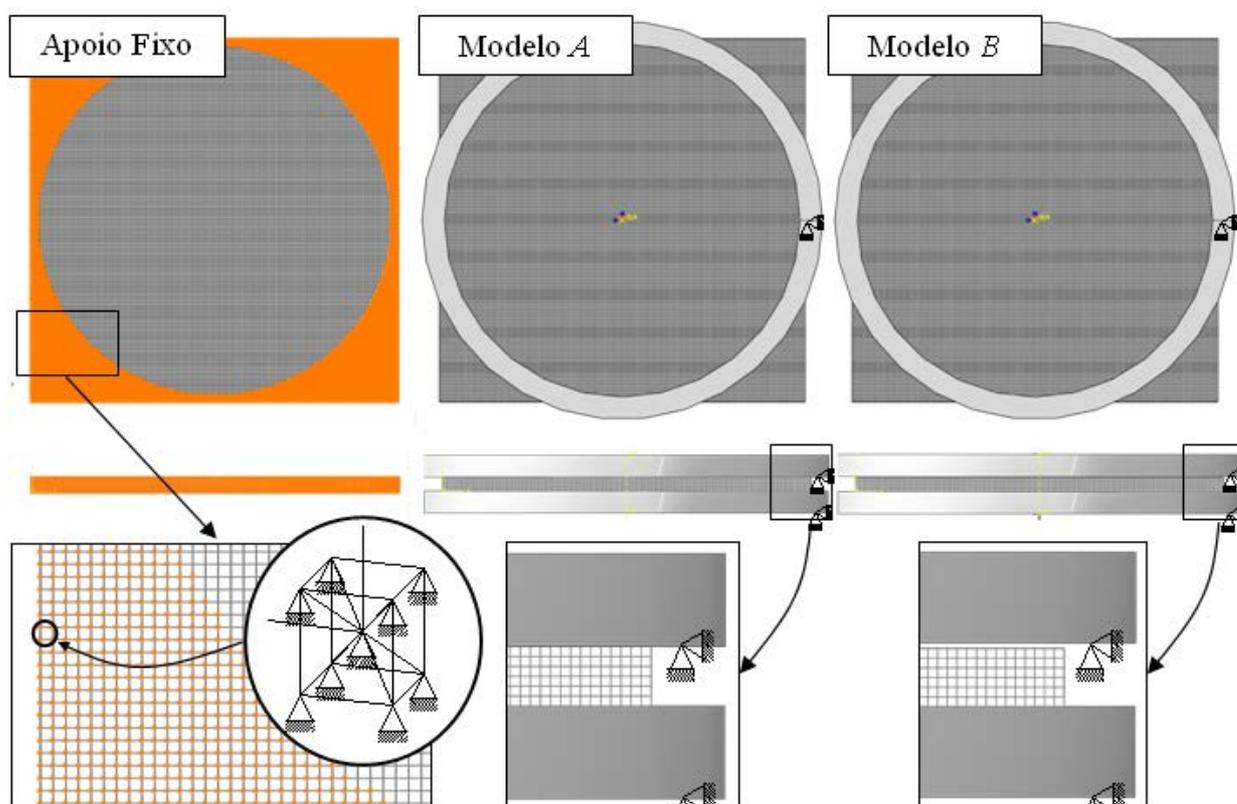


Figura C.7 – a) Modelo com apoio fixo, b) Modelo A e c) Modelo C. Para facilitar a visualização foram tirados os elementos diagonais e interiores do DEM.

Na Figura C.8a e b, são mostrados os resultados das curvas força tempo para os dois casos e a curva experimental do Teste 4, na Figura C.8c, mostram-se as curvas velocidade do penetrador vs tempo, para os mesmos modelos.

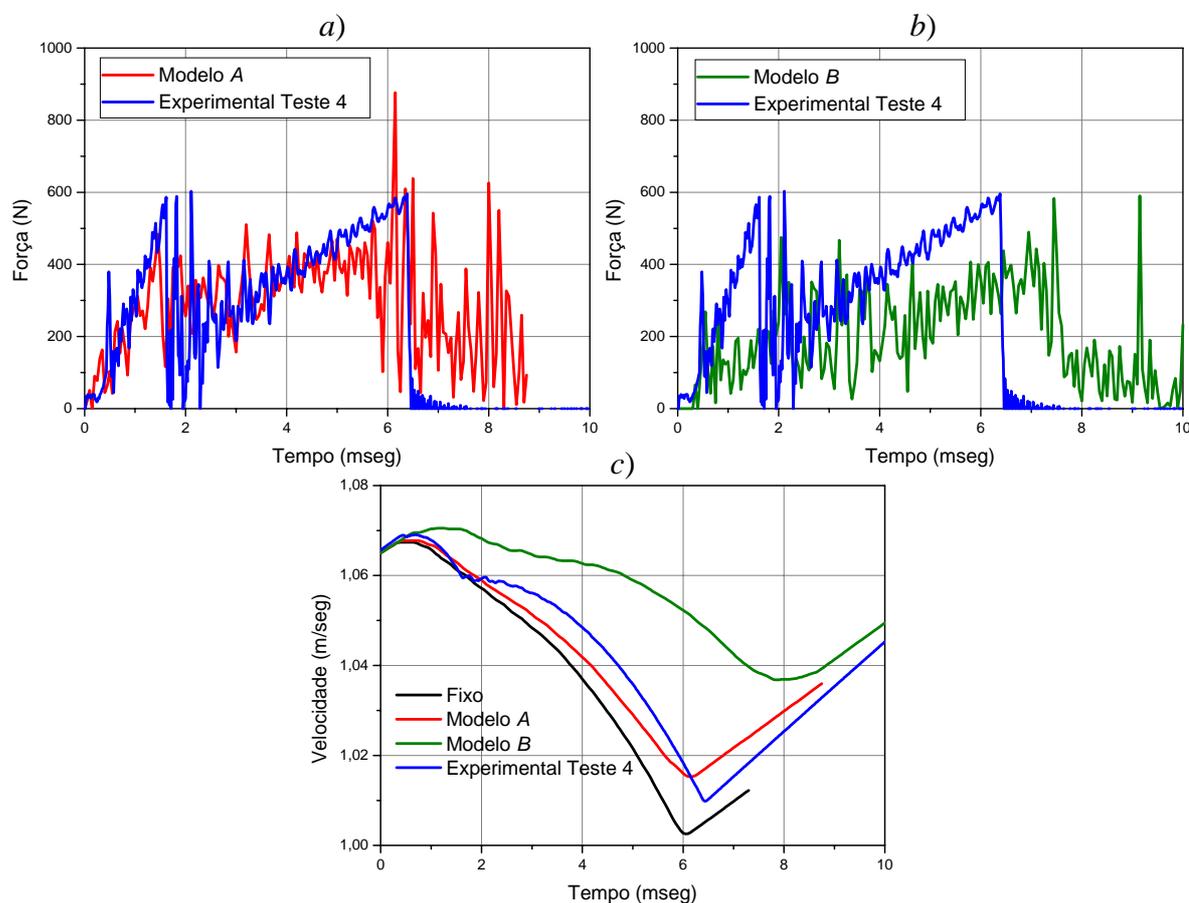


Figura C.8 – Curvas força vs tempo do Teste experimental 4 junto com, a) Modelo A, b) Modelo B e c) Curvas velocidade do penetrador vs tempo para os três modelos mais o modelo com apoio fixo e o modelo experimental Teste 4.

A inclinação da curva de velocidades experimental tem maior concordância com o modelo Apoio Fixo, mas colocando uma folga, aparece o quebra na curva que tem os resultados experimentais.

Na Figura C.9, são vistas as configurações de ruptura. Observa-se, também, que, com uma folga, Modelo B, consegue-se o quebra na curva das velocidades coincidente com a geração das fissuras radiais.

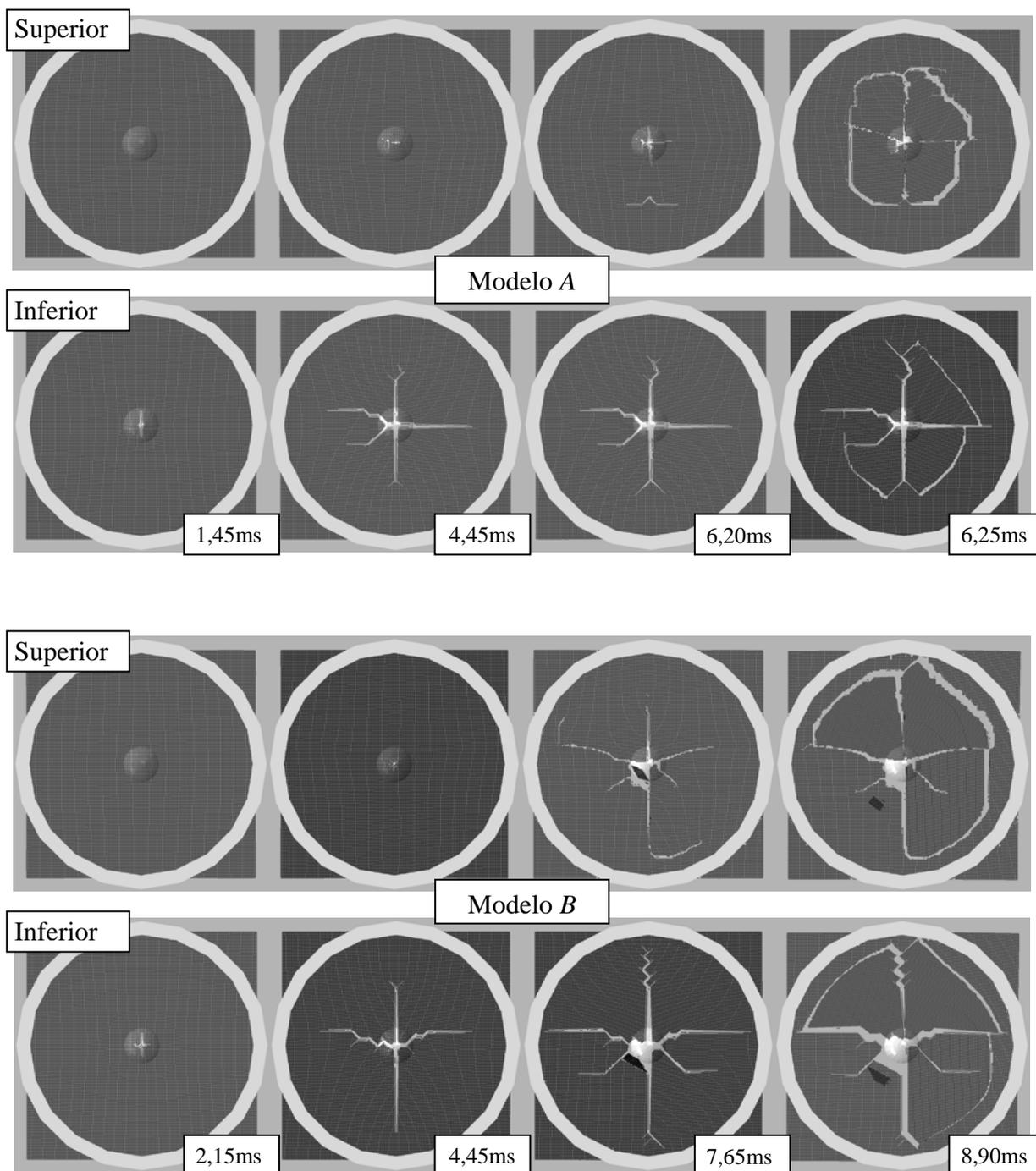


Figura C.9 – Configurações de ruptura para os dois modelos, Modelo A e Modelo C.

Observam-se as camadas superior e inferior.

Nas configurações finais mostradas na Figura C.9 e C.5, observa-se que, na parte inferior da placa, aparecem trincas radiais devido à flexão que logo propagam para a superfície superior. Já na cara superior, aparecem as trincas devido à perfuração, concêntricas, que propagam para a cara inferior gerando a ruptura final do disco. É interessante notar que a espessura suaviza as fissuras, de modo que, fissuras que começam na cara inferior, quando

chegam à cara superior, parecem ser mais reais, isto é, menos direcionadas pela malha do DEM. O mesmo acontece com as trincas que começam na cara superior e propagam para a inferior.

Outra fonte de interferência nos resultados pode ser que o tamanho da placa é levemente inferior que o diâmetro externo das superfícies de sujeição (ver na Figura C.7 que somente as pontas da placa sobressaem). Estas bordas podem gerar predisposição nas trincas, assim como a malha do DEM.

C.4 Impacto excêntrico

Como foi observado nos ensaios experimentais, em nenhum caso o penetrador impacta exatamente no centro da placa (ver Figura C.2a), caso se considere que o ponto de impacto corresponde com o ponto onde as trincas radiais se juntam. Por isso, mediu-se a excentricidade máxima do penetrador e se introduziu esta excentricidade na simulação. Essa excentricidade máxima é de 4,8 mm, o que representa 6% do diâmetro da placa ou quase 40% do diâmetro do penetrador.

Na Figura C.10, apresentam-se as configurações de ruptura onde o penetrador é excêntrico relativo ao centro do disco 4,8 mm. Nesta simulação foram colocados apoios fixos.

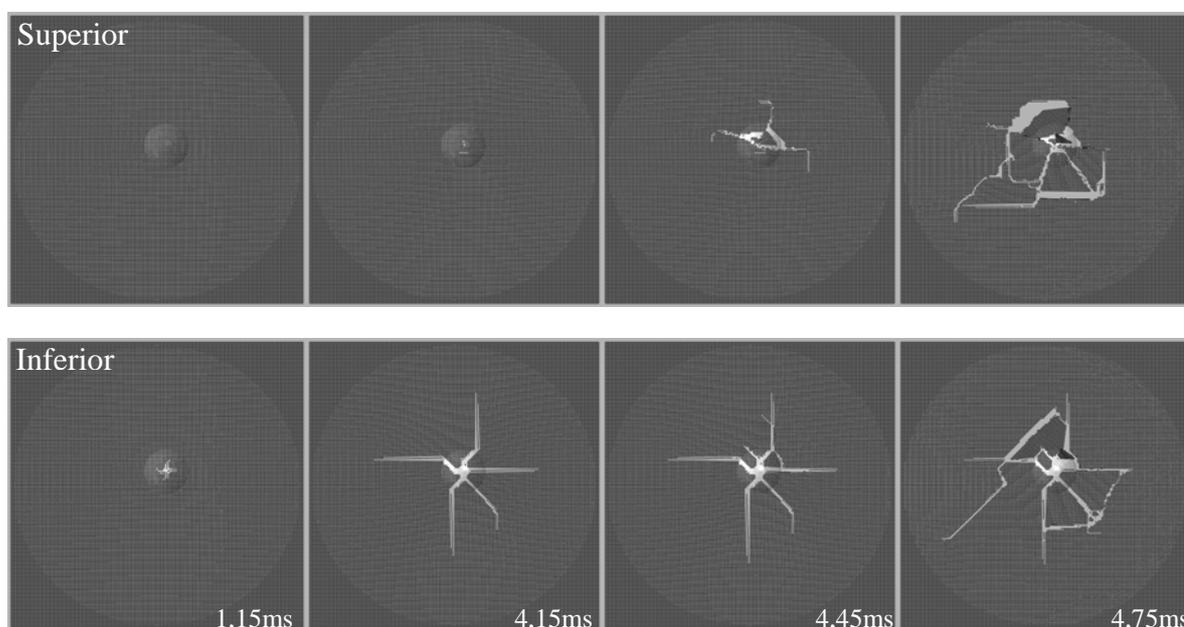


Figura C.10 – Configurações de ruptura para o disco com o penetrador excêntrico. Podem-se ver a camada superior e inferior.

Na Figura C.11, são mostradas as curvas força e velocidade versus tempo para o modelo com o impacto excêntrico.

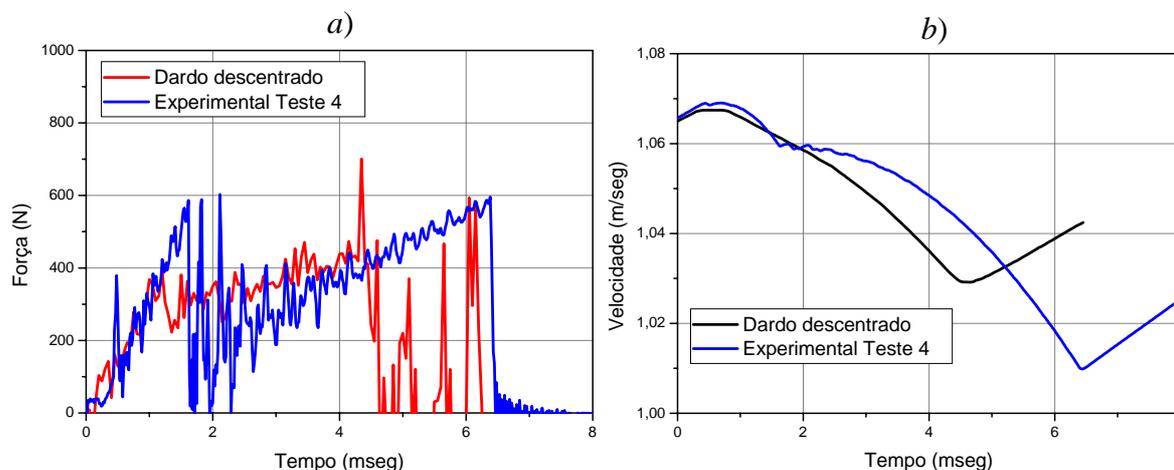


Figura C.11 – a) Curvas força vs tempo e b) curvas velocidade do penetrador vs tempo para o modelo do penetrador excêntrico mais o Teste 4 experimental.

O efeito do penetrador impactando de forma descentrada, aparentemente, não causou o efeito esperado.

C.5 Conclusões

A simulação do ensaio de impacto por queda de um penetrador é apresentado neste apêndice. A implementação do DEM no sistema *Abaqus Explicit* fez possível realizar detalhes na simulação que melhoraram, consideravelmente, os resultados obtidos.

As configurações de ruptura, forças reativas e velocidades resultantes obtidas nas simulações feitas com o DEM *Abaqus* são muito mais próximas dos resultados experimentais.

A interação das ondas de tensão joga um papel muito importante no mecanismo de ruptura da placa. Por isso, o modelado de uma placa um pouco maior, para evitar que esta acabe dentro dos apoios, seria muito interessante, já que este efeito pode estar modificando os resultados.

Como o penetrador não é em realidade um corpo rígido, como simulado, e, no momento do impacto, as próprias vibrações podem interferir nos resultados medidos, seria conveniente, para analisar melhor este ponto, é tentar simular também este efeito.

Esta simulação ajuda no entendimento do processo de ruptura de impacto em discos e mostra ao DEM como uma ferramenta atraente para o estudo deste tipo de problemas.

APÊNDICE D – Análise de impacto em uma placa de concreto reforçado com o Método dos Elementos Discretos formado por barras

O impacto, a altas velocidades, em placas de concreto armado e sua simulação é um problema que vem sendo estudado por diversos pesquisadores, mas a complexidade do problema faz que fiquem inúmeras questões pendentes neste tema. Existem muitas complicações envolvidas nestes problemas como, por exemplo, a resposta dinâmica da placa, se as propriedades do material dependem da taxa de carga, sobre o contato entre diferentes corpos e a simulação da ruptura. Esta última complicação é abordada com elementos finitos utilizando erosão, mas, como foi mencionado por diferentes especialistas nesta área (Conferencia SMiRT 21), essa é uma ferramenta matemática que não está relacionada com nenhuma propriedade do material, e muda conforme as características geométricas e o problema simulado.

Neste contexto, o DEM é apresentado como uma ferramenta simples para simular este problema, no qual cada parâmetro está relacionado às propriedades físicas do material e não é necessário nenhum artifício matemático para simular a penetração.

D.1 Descrição do problema

Foram simulados os testes realizados por Kojima e apresentados em Kojima *et al.*, 1989, e Kojima, 1991. Kojima realizou um total de 12 testes onde, tanto os projéteis de aço como as placas de concreto armado que estes colidem, variam. As placas de concreto são quadradas de 1,2m e suportadas nas suas quinas por rolos pré-tensados, os quais fazem que a distância livre entre apoios seja de 1,0m. Foi simulada, unicamente, a placa com 0,12m de espessura e com uma razão de reforço de 0,6% em cada face em ambas direções. Não foram utilizados reforços de cisalhamento. A tensão de ruptura à compressão do concreto foi de 275,1 kg/cm² e a tensão de ruptura à tração de 22,6 kg/cm². Barras SD35 de 10mm (D10) foram utilizadas nos reforços. Os testes dessas barras mostraram uma tensão de escoamento de 4280 kg/cm² e uma tensão de ruptura de 5810 kg/cm². Dois tipos de projéteis foram utilizados, os projéteis duros e moles, como mostrados na Figura D.2. Cada projétil tem 2,0kg, 6,0cm de diâmetro e cabeças de aço com forma hemisférica. Esses têm diferentes velocidades de impacto.

As placas de concreto armado foram modeladas utilizando o DEM implementado no sistema Abaqus-Explicit versão 6.9, os projéteis foram simulados utilizando MEF e o contato

entre os dois modelos realizado utilizando também as ferramentas do Abaqus-Explicit versão 6.9. A validação desta versão do DEM foi mostrada em Kostaski *et al.*, 2010a, e outros problemas foram estudados com esta versão por Kostaski *et al.*, 2010b, Barrios D'ambra *et al.*, 2010, e Kostaski *et al.*, 2011c.

D.2 Descrição do modelo

Foram simuladas com o DEM quatro placas de 12cm de espessura e com as mesmas propriedades médias, mas com campos aleatórios diferentes da energia específica de fratura.

Três casos com velocidades de impacto distintas foram estudados com os projéteis duros, 215m/s, 164m/s e 95m/s (R-12-X, R-12-Y e R-12-Z) e somente um com o projétil mole, com velocidade de impacto de 199m/s (R-12-S). Os contatos entre os projéteis e os elementos do DEM foram feitos com o método de contato cinemático sem fricção.

A placa realizada no DEM tem os nós restritos nas esquinas para simular a base de suporte feita com rolos de aço pré-tesados que suportam a placa nos experimentos.

D.2.1 Modelo do concreto no DEM

Para levar em conta a variabilidade do campo aleatório que simula as propriedades do material, são considerados 50 tipos de propriedades diferentes para cada tipo de seção (A até D), determinando para as barras um campo aleatório tipo Weibull com uma média e desvio estabelecido, o comprimento de correlação deste campo está relacionado com o tamanho do módulo básico utilizado na discretização. As propriedades do concreto adotadas na análise com DEM são: Módulo de Young $E = 3,354 \times 10^{10}$ Pa, valor médio da energia específica de fratura $G_f = 400$ N/m, $CV(G_f) = 0,40$, densidade $\rho = 2500$ kg/m³, coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$ e deformação crítica $\varepsilon_p = 8,29 \times 10^{-5}$. Este valor de deformação crítica foi obtido considerando uma tensão máxima de tração média da ordem de 30 kg/cm², similar ao valor experimental.

É importante notar que o valor de G_f foi incrementado para levar em conta que quando os elementos quebram aparecem mais de uma fissura em cada elemento. Desta maneira, e para este problema, o valor de G_f está também relacionado com o tamanho da malha.

D.2.2 Reforços de aço

Os reforços de aço foram levados em conta por meio de elementos de viga que unem os nós selecionados do modelo tridimensional de DEM. Estes elementos são caracterizados por uma lei constitutiva elastoplástica que considera uma evolução de dano dúctil. As

armaduras têm módulo de Elasticidade de 210 GPa e tensão de escoamento de 420 MPa. A curva tensão-deformação da armadura é apresentada na Figura D.1.

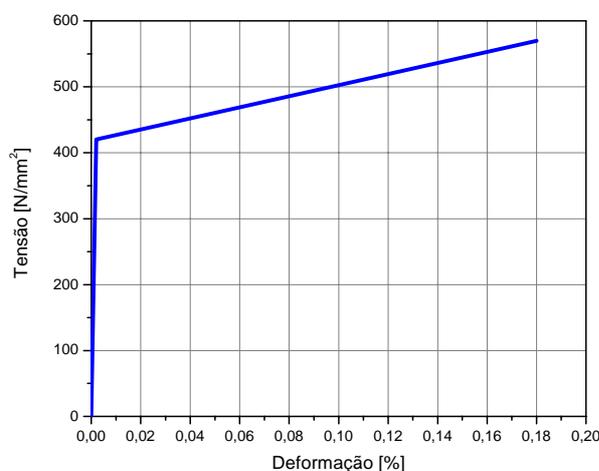


Figura D.1 – Curva tensão-deformação do aço.

A presença da armadura de aço altera as propriedades de fratura ao redor do concreto nas proximidades das barras de aço [Iturrioz, 1995; Riera e Iturrioz, 1998]. Para levar em conta este efeito, os elementos de concreto com a mesma orientação que as barras de aço vizinhas (com distância menor que 4,5cm) têm a energia específica de fratura aumentada com um fator de 20. A armadura de aço está presente nas duas direções em ambas faces da placa.

D.2.3 Projéteis

Como foi mencionado anteriormente, os experimentos feitos por Kojima *et al.*, 1989, utilizaram dois projéteis mostrados na Figura D.2. Os projéteis têm 6cm de diâmetro, peso de 2kg e cabeça hemisférica. Os projéteis duros são sólidos e têm 10cm de comprimento, enquanto os projéteis moles têm 22 cm de comprimento total e nos 14cm logo da cabeça são ocos com uma espessura de 2mm. O único comentário acerca das propriedades dos projéteis de aço nos trabalhos de Kojima *et al.*, 1989, e Kojima, 1991, é que os projéteis moles foram deformados durante os experimentos e que sua carga máxima confirmada por testes de compressão estática chegou a 137,5 kN.

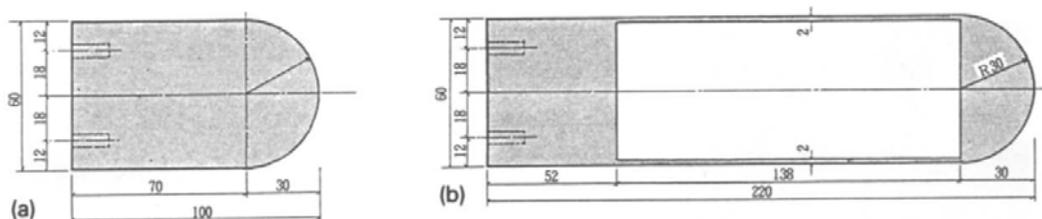


Figura D.2 – Projéteis a) duros e b) moles.

Foi admitido que os projéteis duros têm propriedades elásticas linear e os projéteis moles elastoplásticas, as mesmas que as barras de reforço de aço.

Os projéteis duros não foram estudados com propriedades elástico-lineares porque o contato entre o projétil e a placa de concreto modelada no DEM, devido à discretização das massas, gera concentrações de tensões que levam a deformações locais no projétil, como é mostrado na Figura D.3. Isso não ocorre tão acentuadamente no projétil mole, onde o resultado é aceitável.

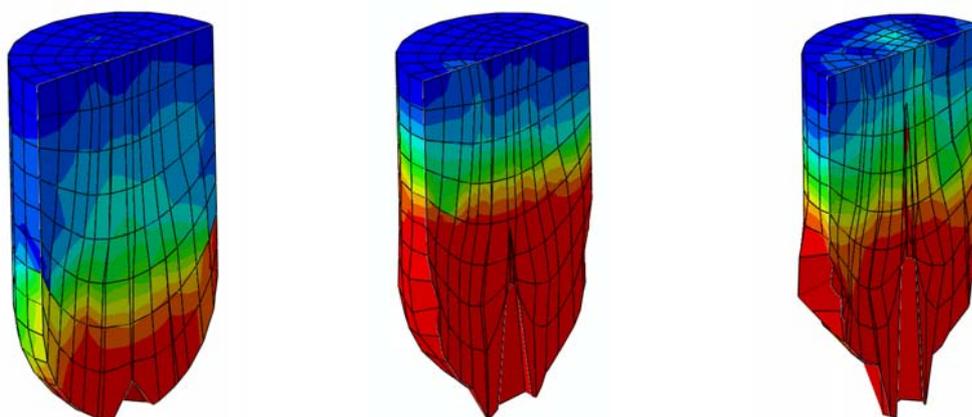


Figura D.3 – Vistas da deformação localizada no projétil duro quando usado propriedade elastoplástica.

Como já foi mencionado, o projétil mole foi simulado somente com propriedades elastoplásticas, as mesmas que as barras de reforço de aço (Figura D.1). Como não se tem muitas características deste projétil, este foi testado simulando um teste de compressão estática. A Figura D.4 mostra a curva força-deslocamento desta simulação e as configurações do projétil em diferentes tempos é apresentada também. Pode-se observar que a máxima carga é da ordem de 155,4 kN, o que representa uma diferença de 13% respeito do reportado nos experimentos. Acha-se que isto não representa uma grande diferença quando todas as propriedades foram adotadas por falta de especificações.

D.3 Validação do modelo

Neste ponto, estuda-se o tamanho da discretização adequada para realizar as simulações, assim como são verificadas e comparadas as frequências da placa modelada com valores teóricos.

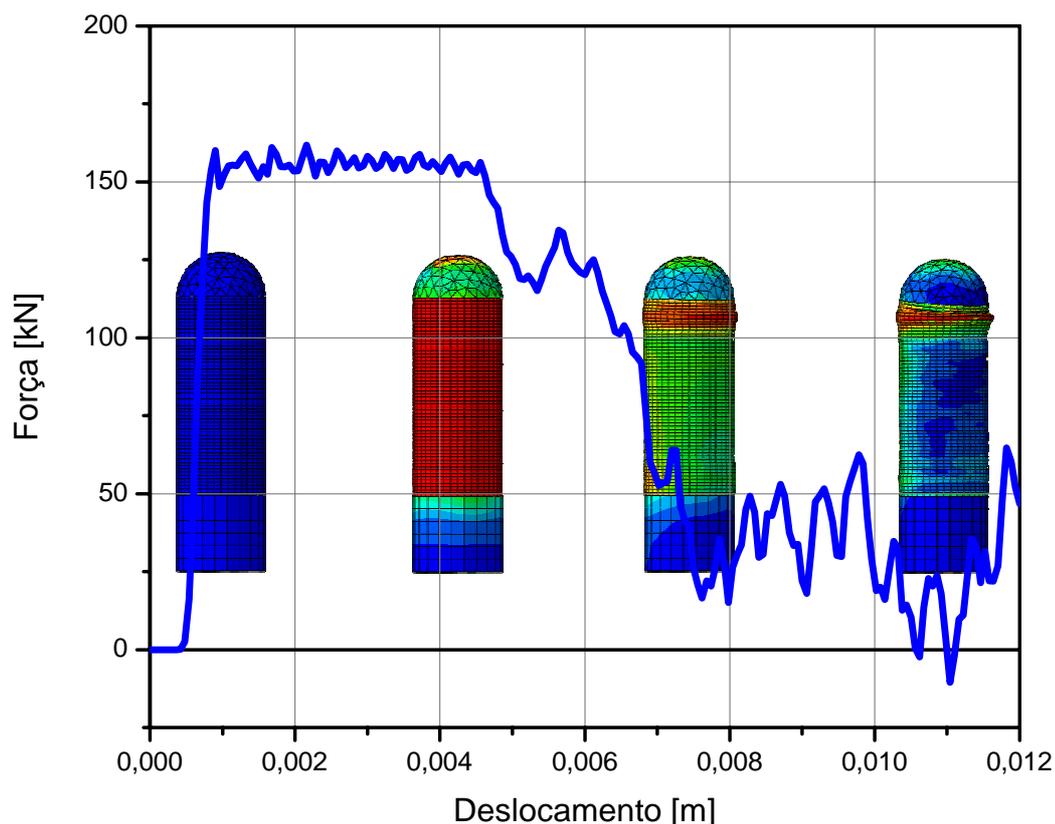


Figura D.4 – Curva força-deslocamento da simulação do teste de compressão estático do projétil mole e configurações deformadas nos diferentes tempos.

D.3.1 Análise de convergência

Para estudar a influência da discretização nos resultados, foi utilizado um modelo simplificado, porque para modelar a placa completa com diferentes tamanhos de malha, a capacidade computacional disponível não é suficiente. Por isso, somente uma secção da placa, considerada em estado plano de deformações, foi modelada. As propriedades do concreto e do aço são as descritas previamente.

Foram realizadas quatro malhas diferentes, a maior com tamanho de módulo básico de DEM de $L=0,03\text{m}$, sendo as outras $L=0,015\text{m}$, $L=0,01\text{m}$ e a malha mais fina com $L=0,0075\text{m}$. Foi assumido que na malha mais fina ($L=0,0075\text{m}$) quando o elemento quebra a energia de fratura dissipada corresponde com a formação de somente uma fissura no elemento, e a energia dissipada é de 100N/m (valor usado nas simulações estáticas, ver exemplo anterior). Quando o tamanho do módulo básico do DEM aumenta, considera-se que esta energia dissipada aumenta também, ou melhor, que a quantidade de fissuras em um único elemento aumenta. Esse incremento se faz linearmente sendo que na malha maior a energia de fratura é de 400N/m . As quatro malhas são mostradas na Figura D.5.

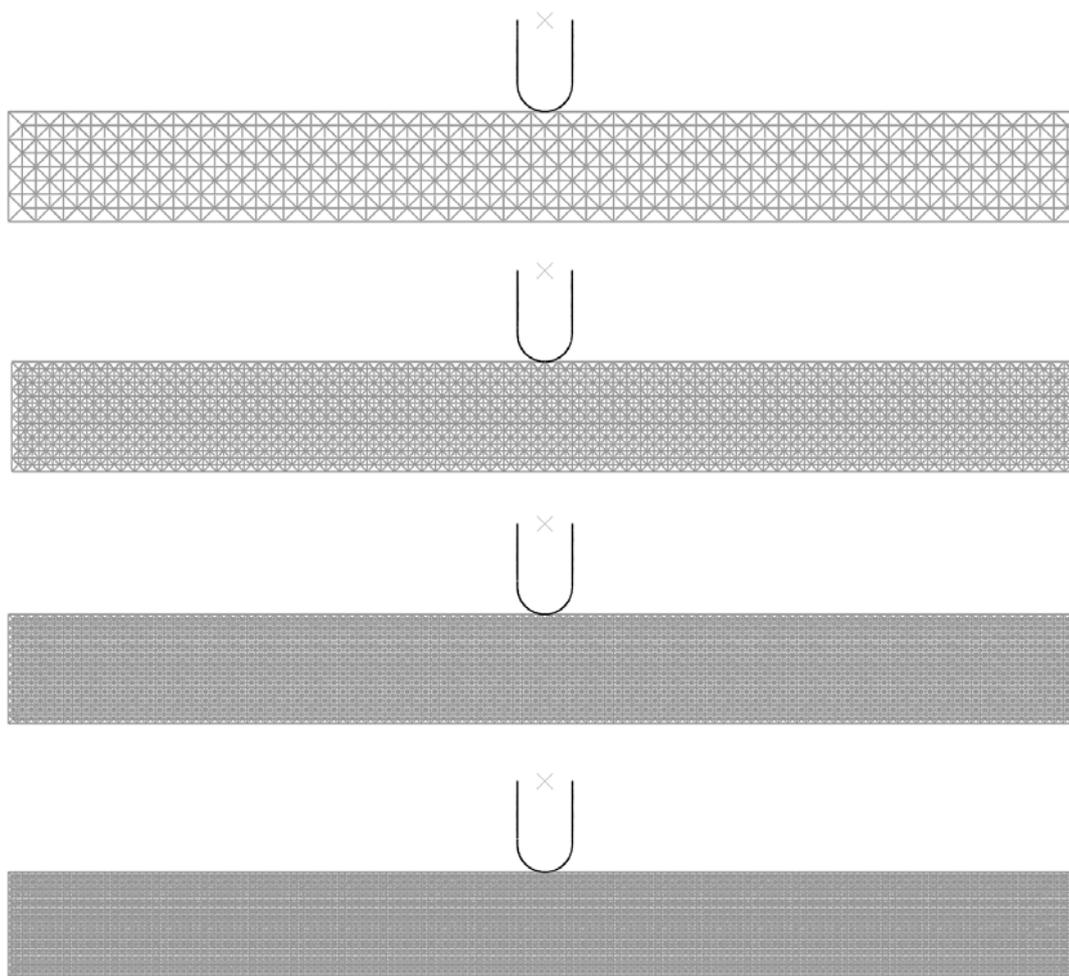


Figura D.5 –Malhas utilizadas na análise de convergência.

Foi estudado um projétil considerado como um corpo rígido com velocidade de impacto de 215m/s. Na Figura D.6, são mostradas as velocidades, acelerações, reações e energias de dissipação por dano e plasticidade para as quatro malhas analisadas.

É interessante notar que, para a malha com $L=0,015\text{m}$, é necessário utilizar um tempo de integração menor ao crítico para obter convergência no balance energético. Ainda assim, os resultados com esta malha são diferentes a respeito das outras.

Um ponto que tem que ser mais profundamente estudado é a convergência nas barras de aço. Observa-se que a dissipação plástica muda com o tamanho da malha. Pode ser que a discretização dos reforços de aço não seja suficiente e necessite ter uma discretização diferente que a do módulo do DEM.

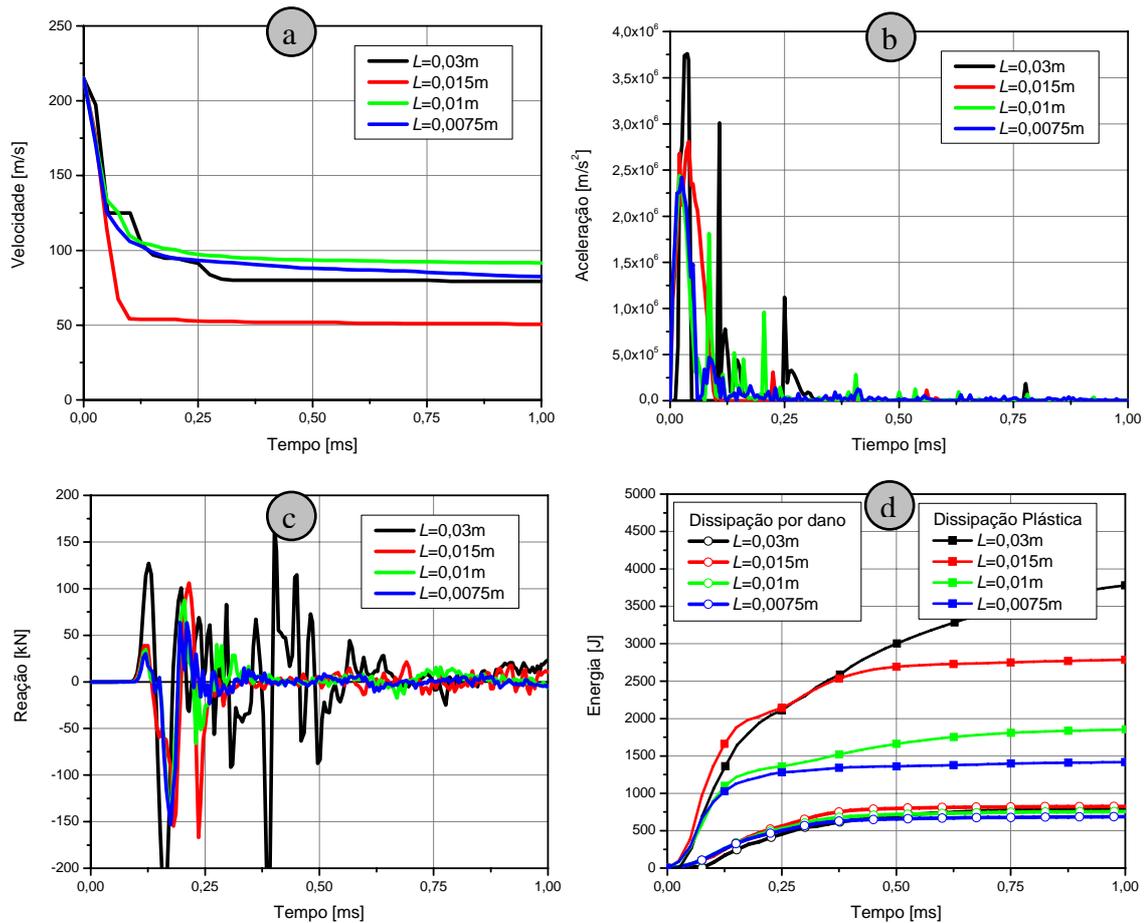


Figura D.6 – Velocidade e aceleração do projétil em todo o processo de falha, reação total e energia de dissipação por dano e plástica.

Com a malha maior, os resultados parecem ser razoáveis e o esforço computacional não é excessivo neste caso. Então, usando $L=0,03m$ foi modelado a placa completa como é mostrada na Figura D.7.

D.3.2 Análise de frequência

Para validar o modelo do DEM realizado, foi colocada na placa uma carga *Heaviside* de 1N e foi medida a frequência natural da placa de concreto armado. A Figura D.8 mostra a curva reação tempo, onde se obtém uma primeira frequência da ordem dos 226 Hz.

A frequência natural para uma placa fina de espessura uniforme é [Harris e Piersol, 2002]:

$$\omega_n = B \sqrt{\frac{Et^2}{\rho a^4 (1-\nu^2)}} \quad [\text{rad/s}] \quad (\text{D.1})$$

Onde E é o módulo de Young, t é a espessura da placa, ρ é a densidade de massa e a é o lado da placa quadrada. A constante B varia com as condições de apoio e tem diferentes valores para cada modo.

A condição de contorno disponível mais similar à da placa simulada é com as quatro bordas livre, e para essa condição $B=4,07$.

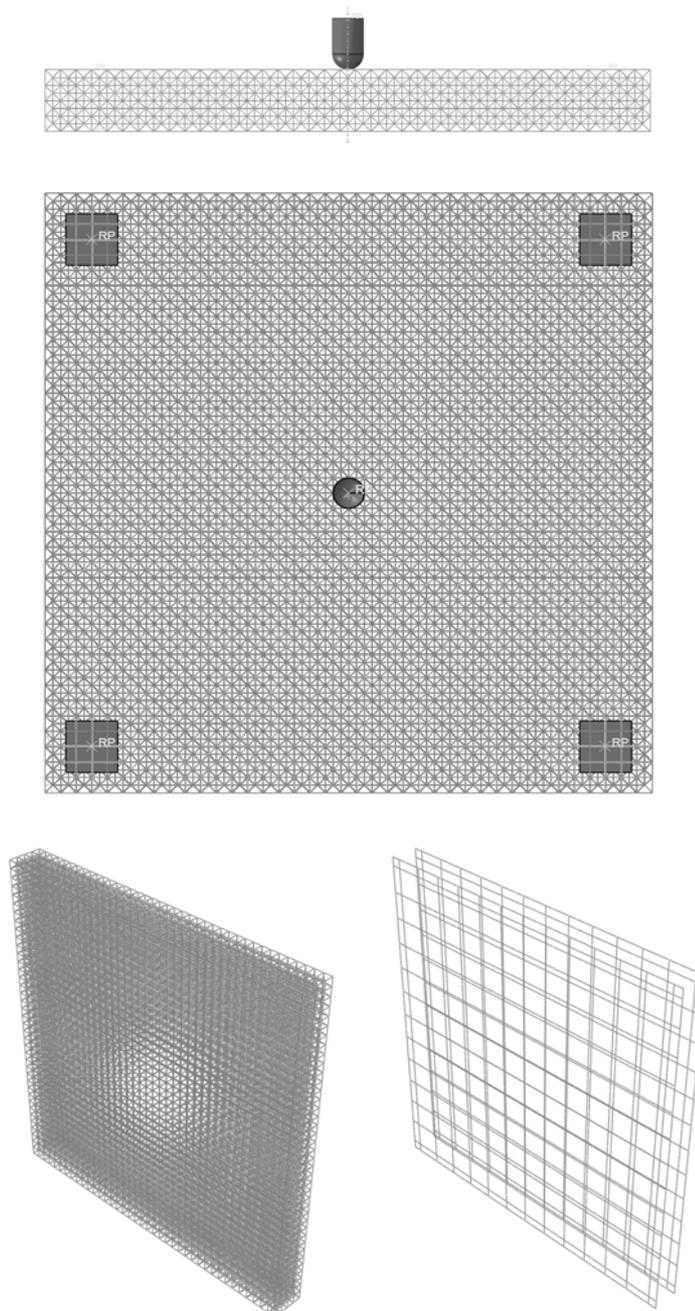


Figura D.7 – Vistas e perspectiva da malha de concreto e estrutura de reforço de aço com $L=0,03\text{m}$

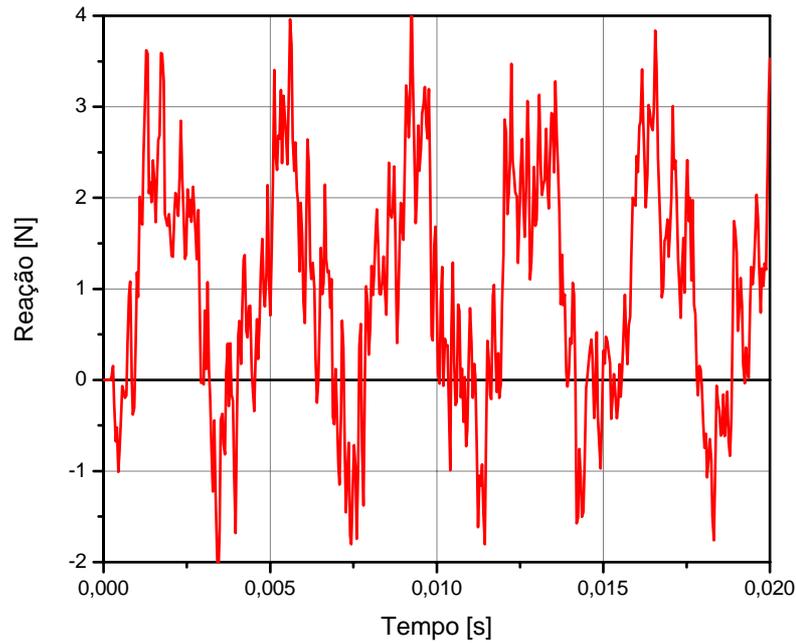


Figura D.8 – Resposta a uma carga *Heaviside* da placa de concreto armado modelada com o DEM.

Considerando $\rho=2500\text{Kg/m}^3$, utilizam-se dois valores extremos para o módulo de Elasticidade, os limites de Voigt e Reuss [Nemat-Nasser e Hori, 1999; Zohdi e Wriggers, 2008]. Sendo c a concentração volumétrica da segunda fase (aço) que para este caso é 0,024 (0,6% de aço em cada direção em cada cara da placa), e usando os módulos de Elasticidade do concreto e do aço resulta:

$$\begin{aligned} E_v &= E_c(1-c) + E_s c = 37,8\text{GPa} \\ E_r &= E_c E_s / (E_s(1-c) + E_c c) = 34,2\text{GPa} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Substituindo na eq. (D.1) se encontra que a primeira frequência natural é:

$$\begin{aligned} \omega_{1v} &= 4,07 \sqrt{\frac{3,78 \times 10^{10} \cdot 0,12^2}{2500 \cdot 1,2^4 (1 - 0,25^2)}} = 1362\text{rad/s} = 216,7\text{ Hz} \\ \omega_{1r} &= 4,07 \sqrt{\frac{3,42 \times 10^{10} \cdot 0,12^2}{2500 \cdot 1,2^4 (1 - 0,25^2)}} = 1296\text{rad/s} = 206,3\text{ Hz} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Pode-se ver que a primeira frequência natural encontrada com o modelo do DEM é próxima a estes valores teóricos.

D.4 Resultados numéricos

D.4.1 R-12-X: placa de 120mm reforçada (0,6%), impacto de projétil duro com velocidade 215m/s

Quando o projétil colide com uma velocidade de 215m/s, perfura sempre (mesmo resultado nas quatro simulações) a placa de concreto armado. A velocidade residual do projétil é em média de 74m/s com um CV=2,4%.

A reação máxima média é de 455,4 kN, e CV =11,6 %. A máxima das reações máximas foi de 518,1 kN e a mínima das máximas de 395,6 kN. Esse máximo ocorre somente aos 2,2 ms.

Existe um primeiro pico nas reações, como pode ser visto na Figura D.14a, que ocorre próximo dos 0,35 ms. O valor médio deste pico é 140,5 kN, CV=1,5%, sendo o máximo individual de 143,0 kN e o mínimo de 138,0 kN.

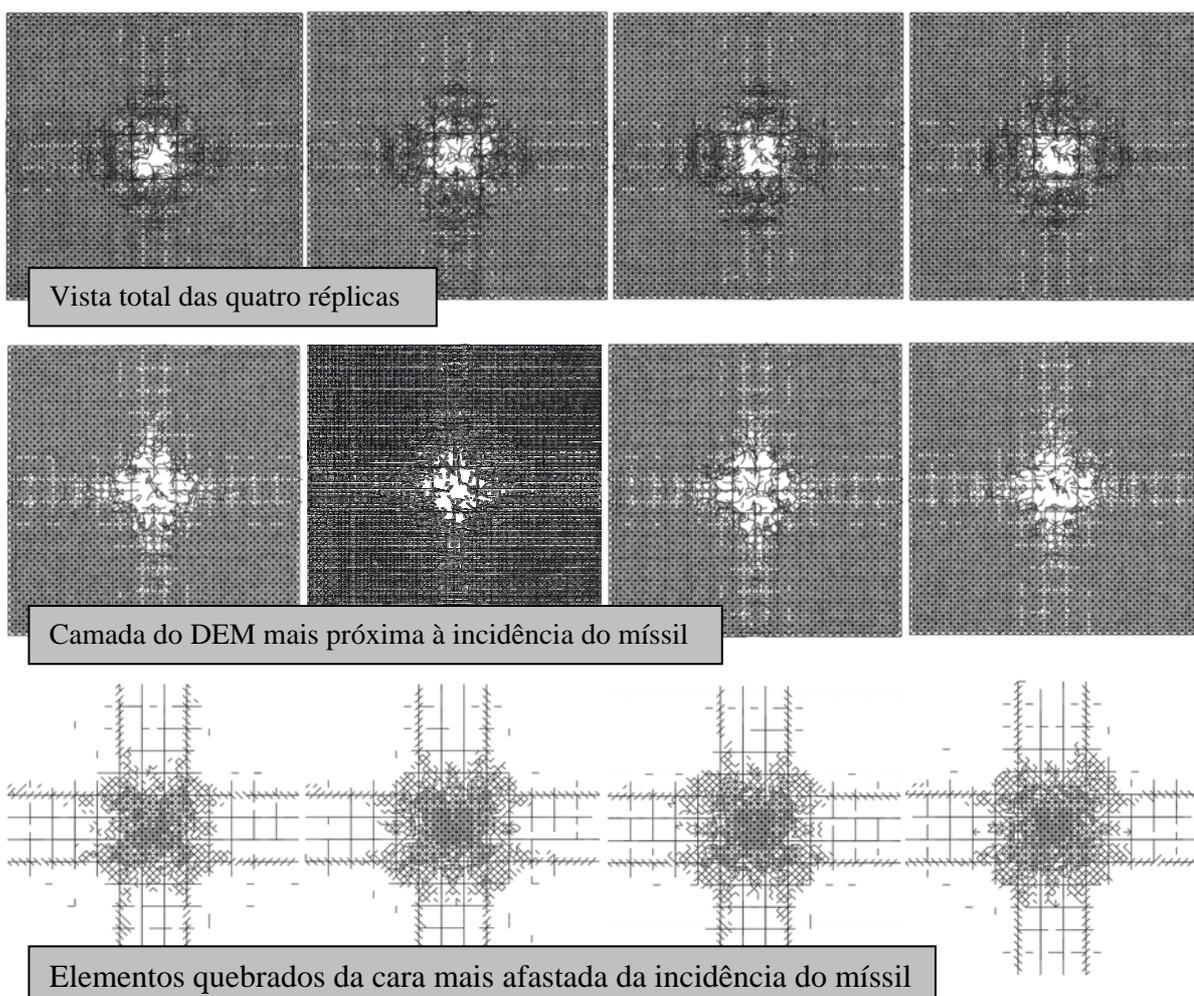


Figura D.9 – Vista total, vista dos módulos mais próximos e vista de elementos quebrados na cara mais afastada à incidência do projétil, para as quatro réplicas da placa.

Por motivos de simplicidade e comparação às curvas de velocidade, aceleração, deslocamento e reações são plotadas conjuntamente com as outras velocidades de incidência do projétil na Figura D.14.

A Figura D.9 mostrou as configurações finais das quatro placas simuladas com o DEM para uma velocidade de incidência do projétil de 215m/s.

D.4.2 R-12-Y: placa de 120mm reforçada (0,6%), impacto de projétil duro com velocidade 164m/s

Quando o projétil colide com uma velocidade de 164m/s, os resultados são muito sensíveis. Pequenas mudanças geram diferentes resultados. Por exemplo, mudanças na malha do projétil: forma, orientação ou tamanho de malha diferente, assim como elementos finitos diferentes; condições de contorno do projétil: permitindo ou não deslocamentos transversais; leve descompasso entre o eixo do projétil e o centro da placa. Em alguns dos casos não é possível finalizar a simulação, já que certos elementos finitos do projétil se deformam, excessivamente, gerando erros nos resultados. Mesmo assim, encontraram-se resultados que perfuram a placa e outros que só penetram a mesma. É interessante notar que nestas simulações o projétil sempre gira e quando perfura a placa, a saída do mesmo é sempre no “oco” da armadura, isto é, nunca ocorre a ruptura da armadura da cara mais afastada do impacto.

A velocidade residual do projétil quando existe perfuração é em média de 15m/s com um CV=45%.

A reação máxima média é de 507,2 kN, e CV =3,9 %. A máxima das máximas reações foi de 532,1 kN e a mínima das máximas de 479,3 kN. Esse máximo ocorre somente aos 2,0 ms. Existe um primeiro pico nas reações, como pode se visto na Figura D.17, que ocorre próximo dos 0,35 ms. O valor médio deste pico é 113,6 kN, CV=5,3%, sendo o máximo individual de 122,8 kN e o mínimo de 105,0 kN.

A Figura D.10 mostra as configurações finais das quatro placas simuladas com o DEM para uma velocidade de incidência do projétil de 164m/s. A última figura é na qual o projétil não perfura a placa.

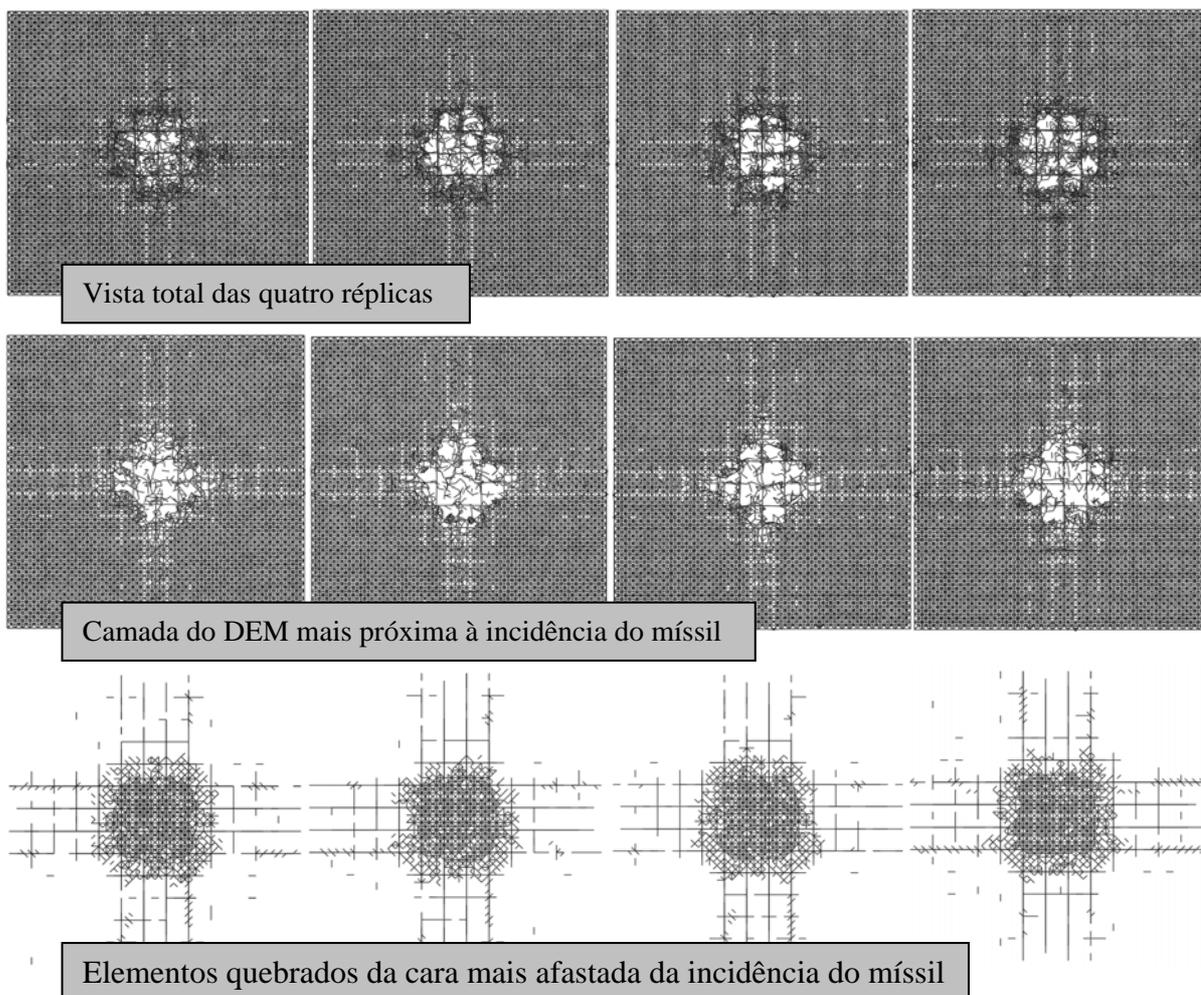


Figura D.10 – Vista total, vista dos módulos mais próximos e vista de elementos quebrados na cara mais afastada à incidência do projétil, para as quatro réplicas da placa.

Na Figura D.11, apresenta-se as curvas de velocidade do projétil para uma velocidade inicial de 164 m/s durante todo o processo do impacto. As cruzeiros na figura indicam que algumas simulações foram simuladas até esse ponto e deram algum tipo de instabilidade nos elementos do projétil.

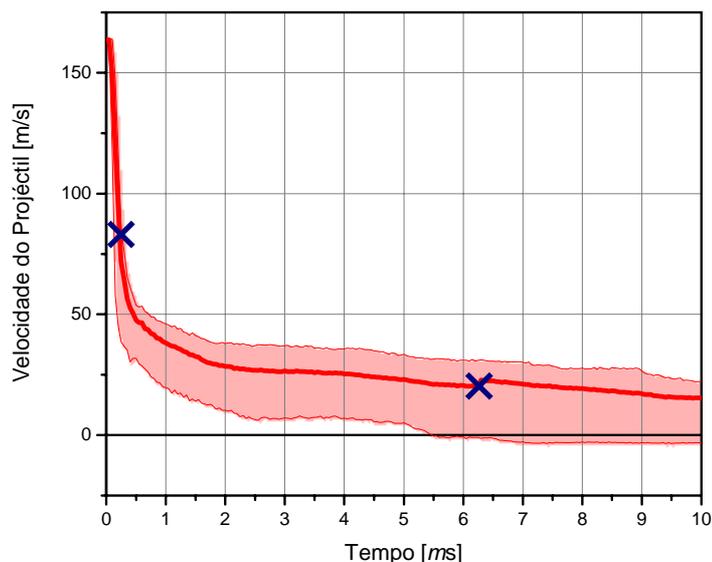


Figura D.11 – Curva média de velocidade do Projétil vs tempo para o caso R-12-Y onde é marcada a variação dos resultados. As cruzes indicam os pontos em que algumas simulações deram algum tipo de instabilidade nos elementos do projétil.

Na Figura D.12, mostra-se um balance energético, assim como as energias cinéticas, elásticas e dissipadas por dano; médias, máxima e mínima para todas as réplicas simuladas com velocidade inicial do projétil de 164m/s. Pode-se observar que depois dos 5ms começa a serem produzidos erros no cálculo e o balance energético já não fecha. É importante esclarecer que isto ocorre somente com o projétil com velocidade inicial de 164 m/s e até simulando o projétil como um rígido indeformável (Figura D.12a). A energia Total tem que ser praticamente constante para que não exista instabilidade numérica na simulação, como é mostrado na Figura D.12a, isto não ocorre sempre.

O problema que é gerado no balance energético para esta velocidade inicial do projétil, faz pensar que esta velocidade inicial é encontrada em uma região de instabilidade, onde a energia proporcionada ao sistema é exatamente a necessária para perfurar a placa, mas, com pequenas mudanças nas características do problema, ter-se-ão diferentes resultados. Então, se o impacto do projétil não é centrado ou a armadura não é perfeitamente reta, ou a velocidade muda levemente, os resultados podem mudar bastante. Até o valor médio da energia de fratura adotado ou sua forma de variação podem influenciar grandemente os resultados do impacto com o projétil com esta velocidade inicial.

Como se mostrará mais adiante, algumas das fórmulas encontradas na bibliografia preveem que, com estas condições ter-se-á perfuração e outras somente penetração.

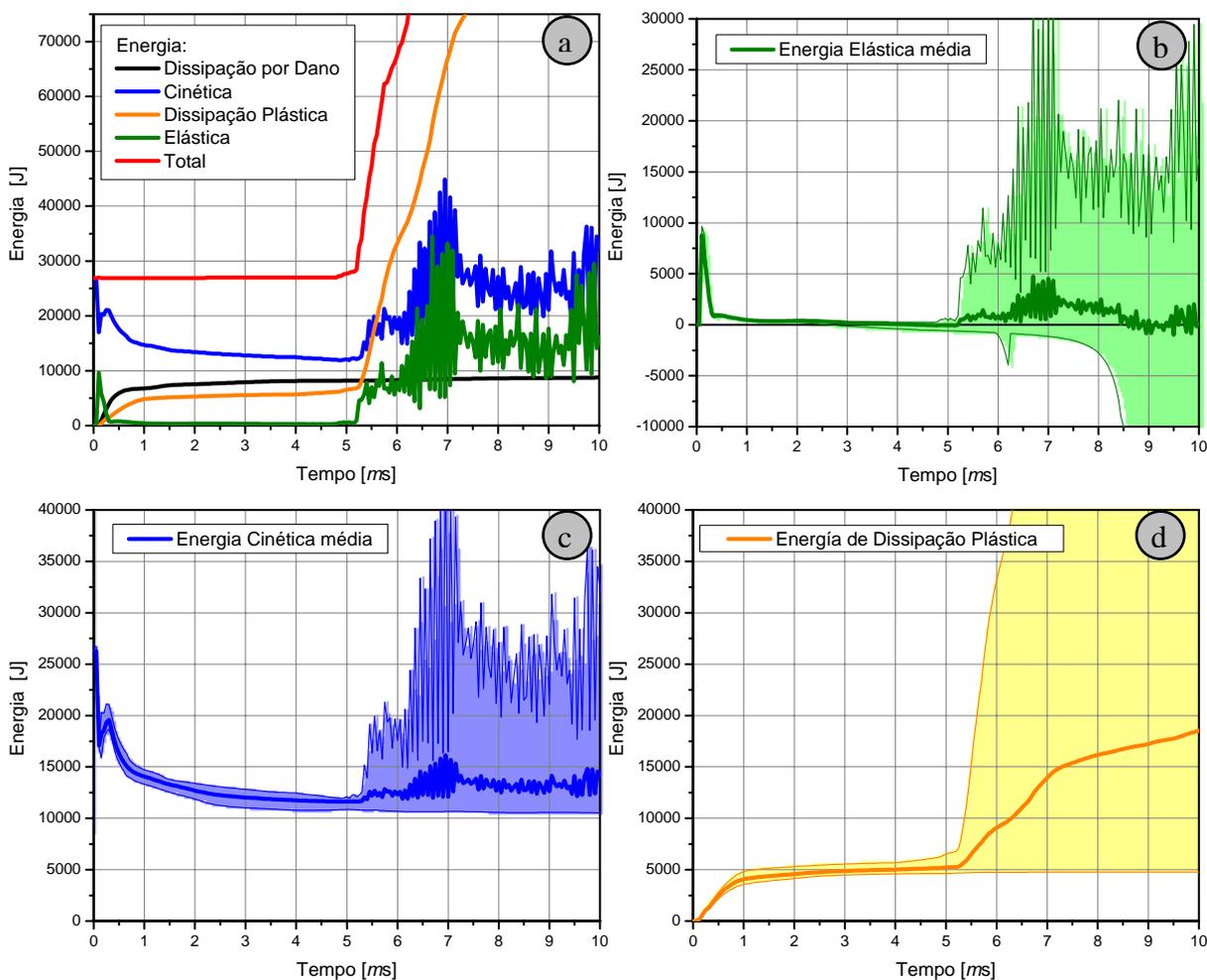


Figura D.12. a) Balance energético considerando projétil como corpo rígido; Energia média, máxima e mínima b) elástica, c) cinética e d) de dissipação plástica, para simulação as quatro de R-12-Y considerando $CV(G_f)=40\%$.

D.4.3 R-12-Z: placa de 120mm reforçada (0,6%), impacto de projétil duro com velocidade 95m/s

Quando o projétil colide com uma velocidade de 95m/s, rebota sempre (mesmo resultado nas quatro simulações) na placa de concreto armado. A velocidade residual do projétil é, em média, de 1,7m/s na direção contrária à inicial com um $CV=11,8\%$. A reação máxima média é de 395,6 kN, e $CV=7,4\%$. A máxima das máximas reações foi de 420,5 kN e a mínima das máximas de 350,7 kN. Esse máximo ocorre somente aos 1,35 ms.

A Figura D.13 mostra as configurações finais das quatro placas simuladas com o DEM para uma velocidade de incidência do projétil de 95m/s.

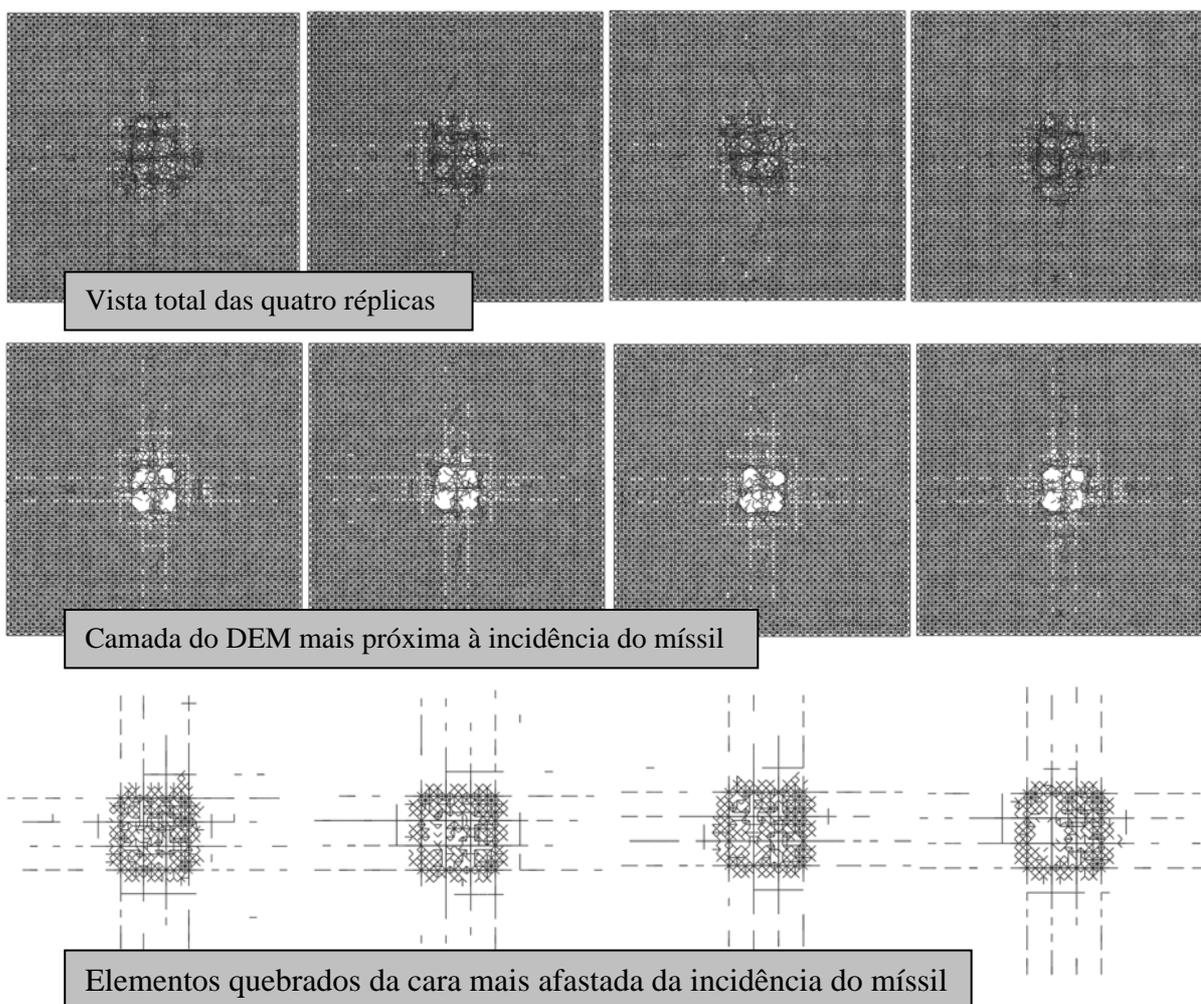


Figura D.13. Vista total, vista dos módulos mais próximos e vista de elementos quebrados na cara mais afastada à incidência do projétil, para as quatro réplicas da placa.

Na Figura D.14a, são apresentadas as reações médias, com sombras que abarcam dos máximos aos mínimos em cada tempo. Mostram-se, também, as velocidades, acelerações e deslocamentos médios do projétil durante todo o processo para as três velocidades iniciais do mesmo, na Figura D.14 b, c e d. As variações dos resultados também são mostradas.

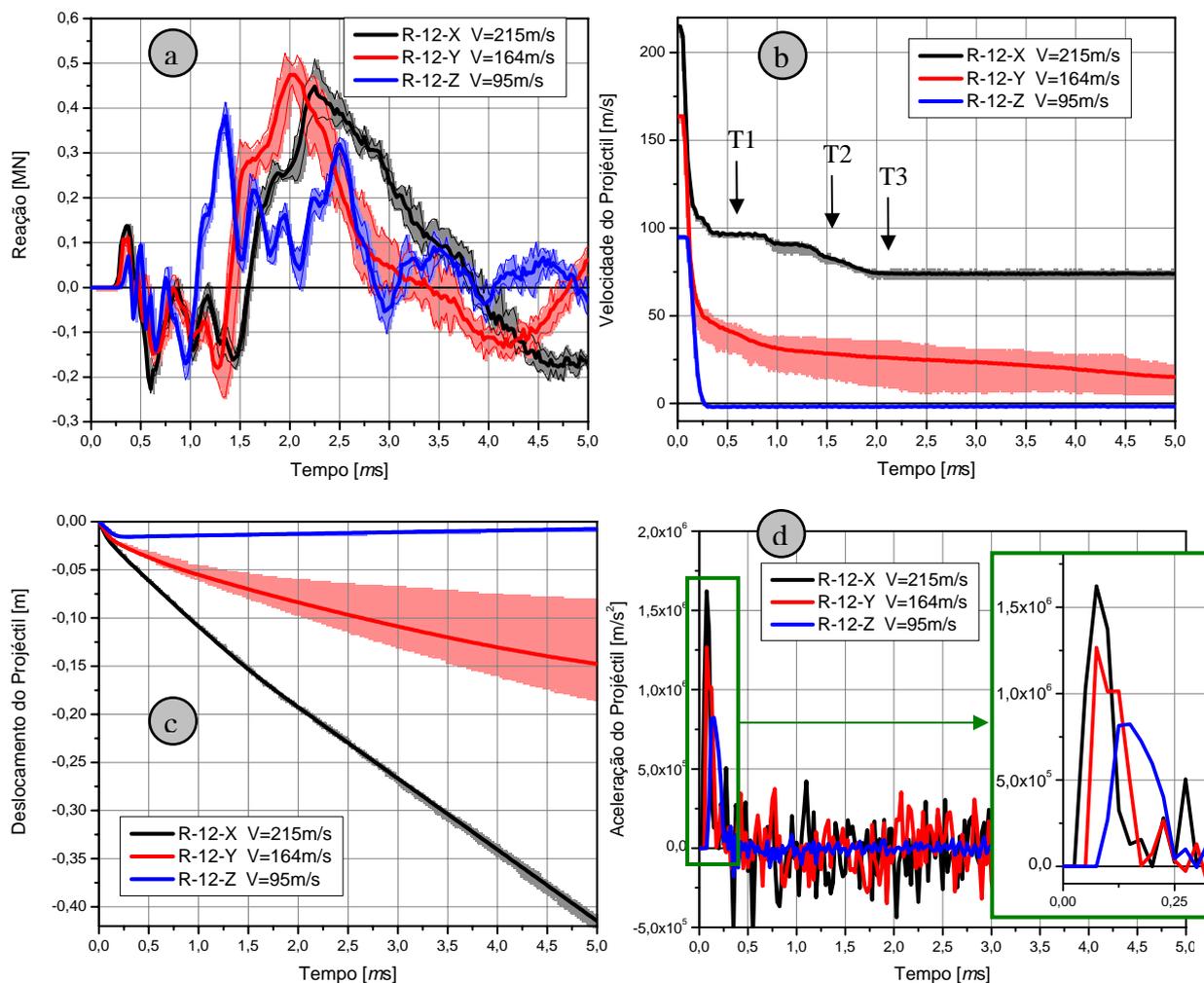


Figura D.14. Reações da placa; velocidade, aceleração e deslocamento médios do Projétil dos casos analisados.

Os quebres na curva velocidade do projétil-tempo para o caso R-12-X ($V=215\text{m/s}$) estão relacionadas com o contato do projétil com o reforço superior de aço, sua deformação e ruptura e, logo, o contato do projétil com o reforço inferior de aço, sua deformação e ruptura.

A Figura D.15 apresenta as energias elástica, cinética (somente da placa), energia de dissipação plástica e por dano dos três casos, médias e variação.

Na Figura D.15, fica claro que tanto a energia por dissipação plástica como por dano aumentam com o aumento da velocidade inicial do projétil. Também se observa que as maiores dispersões ocorrem sempre para o caso R-12-Y.

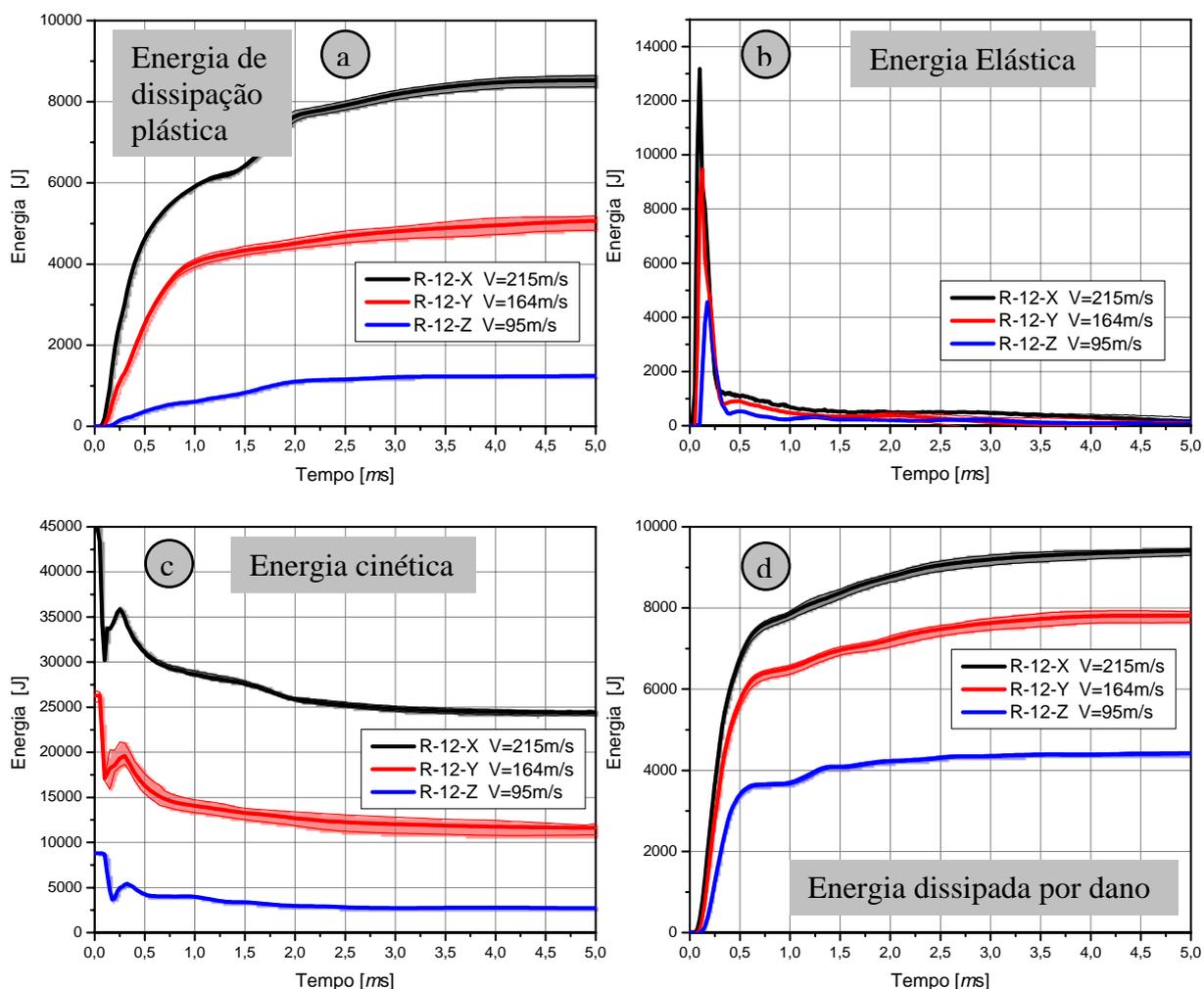


Figura D.15 – Energia média, máxima e mínima para cada caso simulado de dissipação plástica, elástica, cinética e de dissipação por dano.

É interessante notar que a maior dispersão sempre ocorre para uma velocidade intermédia. Isso acontece porque, como foi comentado anteriormente, para esta velocidade inicial do míssil a energia proporcionada ao sistema é justo a necessária para perfurar a placa, mas, com pequenas mudanças nas características do problema, ter-se-ão diferentes resultados.

D.4.4 R-12-S: placa de 120mm reforçada (0,6%), impacto de projétil mole com velocidade 199m/s

As mesmas quatro placas de concreto armado foram submetidas agora ao impacto do projétil mole com uma velocidade inicial de 199 m/s. Esse projétil perfura a placa nas quatro simulações sendo a velocidade média residual do projétil de 33,3m/s. No teste experimental deste caso (R-12-S) não existe perfuração e o projétil flamba sendo seu comprimento final na

ordem dos 13 cm, como pode se intuir nas figuras apresentadas por Kojima *et al.*, 1989, e Kojima, 1991.

A Figura D.16 mostra as configurações finais das quatro placas simuladas com o DEM para uma velocidade de incidência do projétil mole de 199m/s.

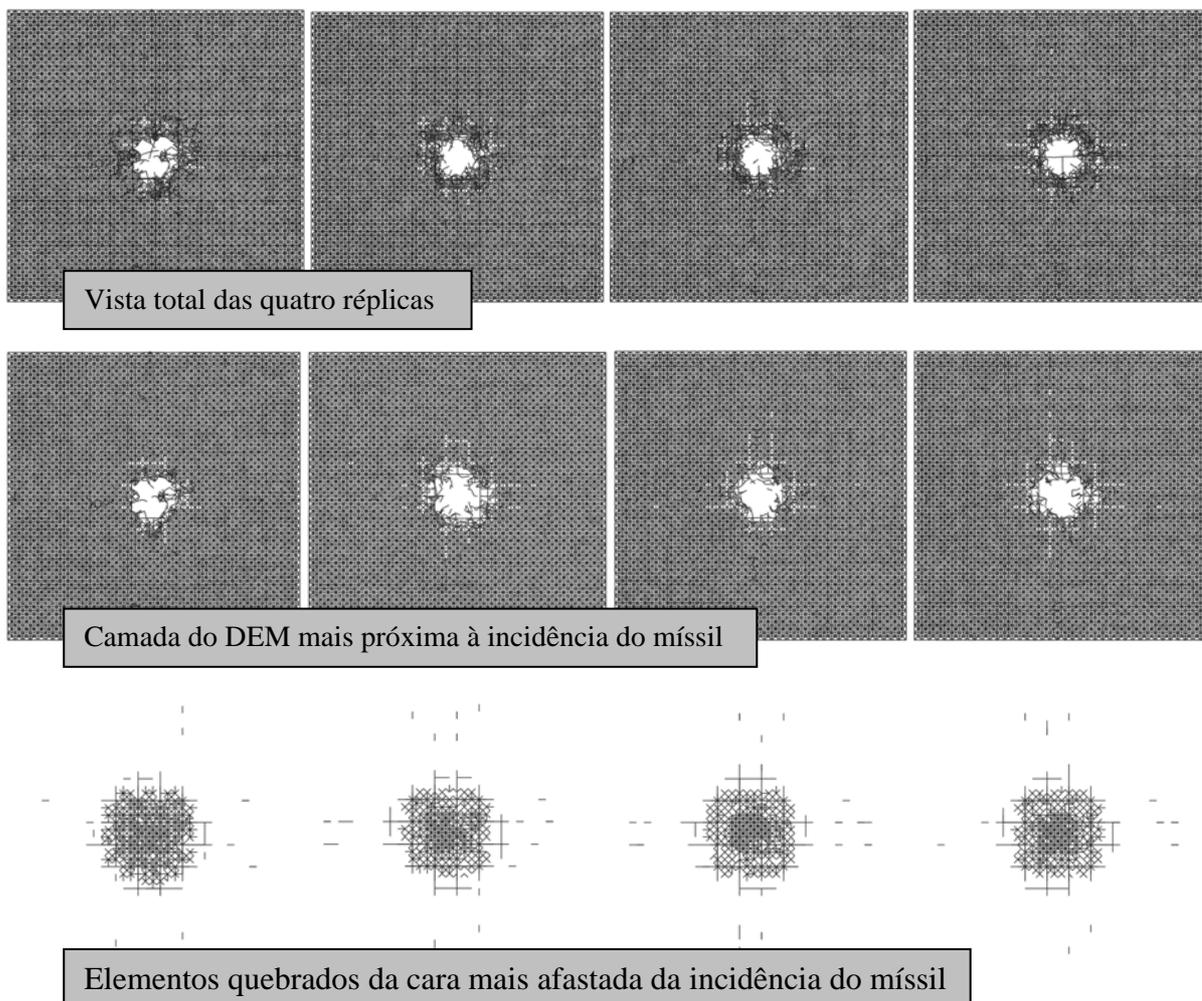


Figura D. 16 – Vista total, vista dos módulos mais próximos e vista de elementos quebrados na cara mais afastada à incidência do projétil, para as quatro réplicas da placa.

A Figura D.17 mostra o resultado do teste experimental do caso R-12-S [Kojima *et al.*, 1989 e Kojima, 1991], assim como as configurações deformadas dos quatro projéteis. Pode-se ver que nas simulações o comprimento final dos projéteis é da ordem dos 10 cm em média.

A Figura D.18 mostra as curvas médias, máximas e mínimas de reações, velocidade, acelerações e deslocamentos do projétil durante todo o processo de impacto com o projétil mole colidindo com uma velocidade de 199 m/s.

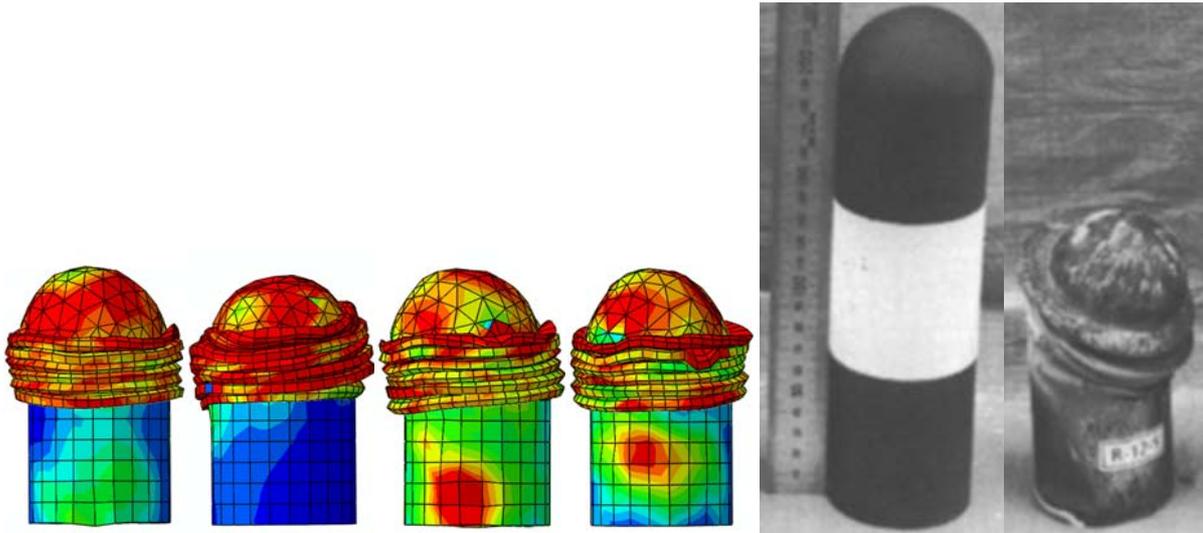


Figura D. 17 – Resultado do teste experimental do caso R-12-S [Kojima *et al.*, 1989 e Kojima, 1991], e configurações deformadas dos quatro projéteis simulados.

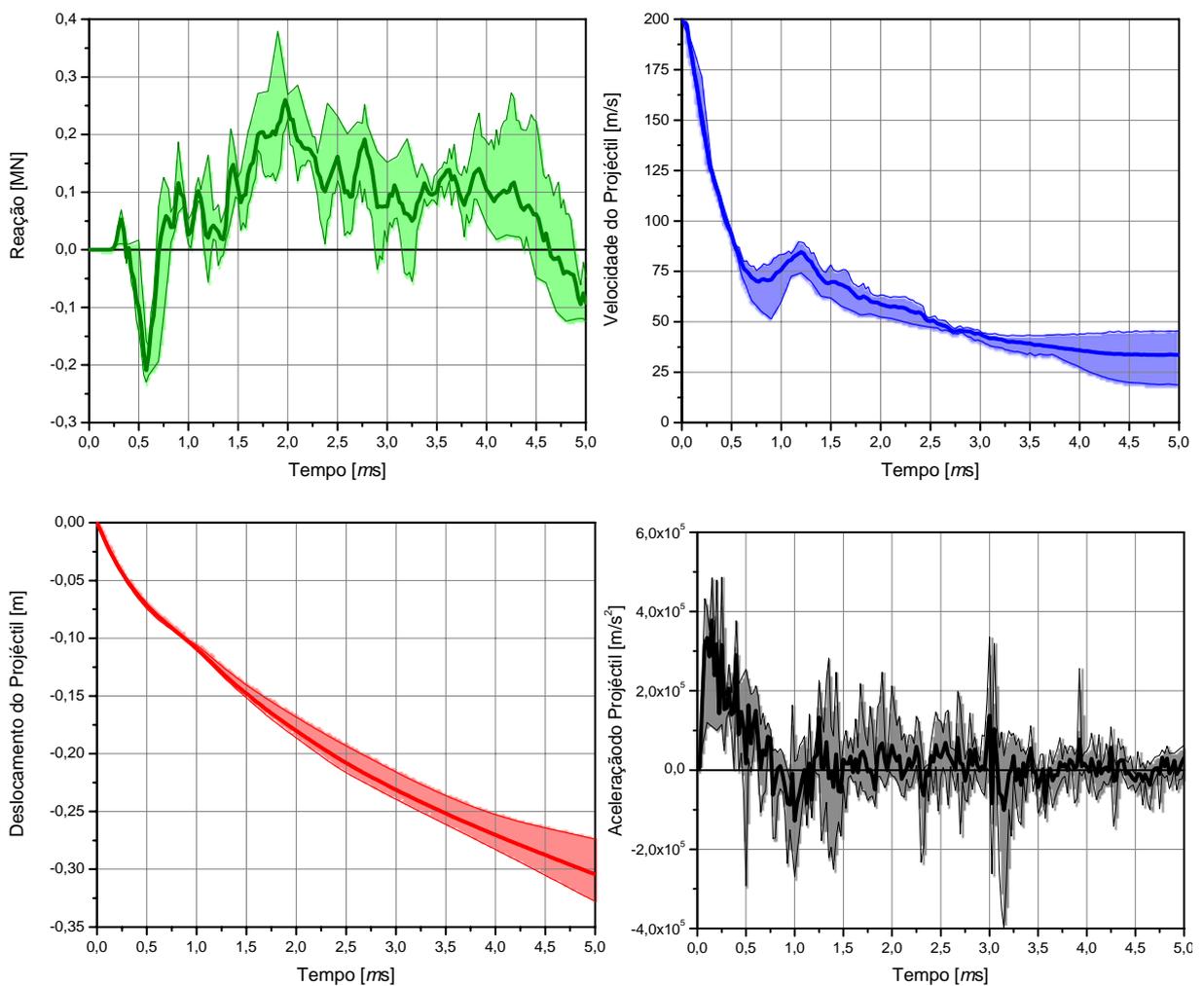


Figura D.18 – Reações da placa; velocidade, aceleração e deslocamento médios do Projétil para o caso R-12-S.

D.5 Comparação e discussão

Nas Figuras D.14 e D.15, foram apresentados de forma comparativa os resultados das simulações com o projétil duro.

Na Tabela D.1 é apresentada a comparação resumida dos testes experimentais reportados por Kojima *et al.*, 1989, e Kojima, 1991, e as simulações realizadas com o DEM. É interessante notar que a abertura na placa de concreto armado gerada pelo projétil, quando isto ocorre, é sempre maior nas simulações que nos resultados experimentais. Isso também ocorre com o tamanho do estilhaçamento que ocorre na cara mais próxima ao impacto do projétil. Já na cara mais afastada do impacto do projétil ocorre descamação, e em todas as simulações esta área é menor que nos experimentos.

Como mostrado na Tabela D.1, nos experimentos reportados por Kojima *et al.*, 1989, e Kojima, 1991, foi visto que a menores velocidades do projétil maior a reação máxima observada. Com o DEM se encontro que as reações máximas aumentam, no começo, com a diminuição da velocidade inicial do projétil, mas logo diminui para a velocidade menor. A força de contato (que tem a mesma forma das acelerações) diminui com a atenuação da velocidade inicial do projétil (ver detalhe da Figura D.14). Isto também foi encontrado por Ranjan, 2011, que fez seu estudo com Elementos Finitos.

Tabela D.1 – Comparação entre os resultados experimentais e as simulações do DEM

Espécime	Penetração mm	Abertura mm × mm	Estilhaçamento mm × mm	Descamação mm × mm	Nº de barras rotas	Velocidade residual m/s	Reação máxima kN
R-12-X	--	80 × 100	205 × 226	720 × 428	3	Não reportada	105,6
DEM 1	--	140 × 145	265 × 294	566 × 513	4	74	408,5
DEM 2	--	144 × 153	287 × 290	549 × 531	4	72,1	483,3
DEM 3	--	137 × 140	301 × 315	524 × 517	4	76,4	440,4
DEM 4	--	128 × 137	297 × 301	545 × 527	4	73,6	518,1
R-12-Y	100	83 × 100	189 × 203	561 × 480	1	Não reportada	117,6
DEM 1	--	113 × 175	280 × 322	517 × 510	2	14,9	510,2
DEM 2	--	269 × 287	340 × 343	499 × 488	2	7,3	480,3
DEM 3	--	241 × 294	326 × 354	488 × 485	2	20,6	516,1
DEM 4	80	304 × 308	336 × 372	467 × 467	0	-3,1	501,2
R-12-Z	44	--	162 × 149	455 × 512	0	Não reportada	144,5
DEM 1	45-60	--	195 × 181	393 × 432	0	-1,6	388,6
DEM 2	45-60	--	181 × 173	418 × 428	0	-1,9	356,7
DEM 3	45-60	--	188 × 184	425 × 428	0	-1,7	414,5
DEM 4	45-60	--	205 × 184	418 × 432	0	-1,4	420,5
R-12-S	35	--	180 × 200	--	0	Não reportada	276,0
DEM 1	--	184 × 195	184 × 195	389 × 393	4	18,1	385,6
DEM 2	--	156 × 163	191 × 227	358 × 386	4	31,9	302,9
DEM 3	--	149 × 170	184 × 205	361 × 386	4	38,6	256,1
DEM 4	--	156 × 177	198 × 202	368 × 379	4	45,0	384,6

D.5.1 Influência da velocidade inicial do projétil

De igual maneira que nos testes experimentais, as simulações dos casos R-12-X, R-12-Y e R-12-Z o único que varia é a velocidade inicial do projétil. Como era esperado, além de observado nas experiências de Kojima, a velocidade inicial do projétil tem uma importante influência na falha de placas de concreto reforçadas. Nos experimentos foi observado também que, quando é aumentada a velocidade inicial do projétil, a profundidade da penetração e o tamanho do estilhaçamento e da descamação aumentam, bem como o volume e velocidade dos pedaços de concreto gerados na descamação. Estes aumentos de dano com a velocidade também foram observados nas simulações realizadas com o DEM.

D.5.2 Influência da dureza do projétil

Na placa simulada com projéteis moles, obtém-se perfuração enquanto nos experimentos é obtido somente penetração. Além disso, Kojima achou que os resultados entre os espécimes R-12-Y e R-12-S apresentavam resultados similares. Nas simulações realizadas no presente trabalho isto não é tão verdadeiro. A dissipação do dano é, significativamente, menor quando se tem projéteis moles, como se pode ver comparando todas as configurações, o dano está mais localizado na região do impacto.

D.6 Conclusões

Neste trabalho é apresentado um problema de aplicação realizado com o DEM introduzido dentro do sistema *Abaqus-Explicit*. É realizada a simulação de um experimento de impacto de projéteis em placas de concreto reforçado. Para validar o modelo, no começo foi feito uma análise da malha e, logo, um estudo de frequências. Para introduzir a aleatoriedade do material foi adotada uma distribuição aleatória da energia específica de fratura e quatro placas foram feitas para cada teste. Foi analisado o impacto de projéteis colidindo na placa com diferentes velocidades, no modelo validado.

Os testes experimentais não têm muitas informações referentes aos resultados. Com a simulação se encontram muita informação respeito às forças de reação, velocidades e energias não disponíveis nos testes experimentais. Comparando alguns resultados se encontra que as simulações das aberturas foram sempre maiores às experimentais. O mesmo ocorre com o tamanho do estilhaçamento. A área de descamado é quase sempre menor que a experimental.

O impacto com projéteis moles reproduz a flambagem do projétil e o dano na placa. A variação nesses resultados são maiores que nos outros casos, excluindo o caso X-12-Y, que apresenta instabilidades.