

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Solução Analítica da Aproximação  $S_N$  da equação de Transporte para  
problemas de valor inicial e de contorno pela Transformada Dupla de Laplace**

por

Tífani Teixeira Gonzalez

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Julho de 2011

**Solução Analítica da Aproximação  $S_N$  da equação de Transporte para problemas de valor inicial e de contorno pela Transformada Dupla de Laplace**

por

Tífani Teixeira Gonzalez

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Marco Túllio Mena Barreto de Vilhena (UFRGS)

Prof. Dr. Antonio Carlos M. Alvim (COPPE-Nuclear/UFRJ)

Prof. Dr. Vilmar Trevisan (PPGMAT/UFRGS)

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 21 de Julho de 2011

À minha mãe Sandra, grande amiga e incentivadora

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, de alguma maneira, e a seu tempo, contribuíram para a elaboração dessa tese.

Agradeço, principalmente à minha amada mãe Sandra Teixeira, que sempre me apoiou e serviu de ponto de apoio nos momentos mais difíceis. Meu grande alicerce.

À minha orientadora, professora Cynthia Feijó Segatto, pela excelente orientação e pelo apoio incondicional, no momento certo.

Ao CNPq pelo suporte financeiro e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS (PROMEC) representado em seu corpo de funcionários e docentes.

15 de Julho de 2012

## Resumo

Solução Analítica da Aproximação  $S_N$  da equação de Transporte para problemas de valor inicial e de contorno pela Transformada Dupla de Laplace

Neste trabalho é apresentada uma solução analítica, expressa na forma integral, para a equação  $S_N$  de transporte unidimensional dependente do tempo em geometria cartesiana, válida para domínios limitado e ilimitado ( $0 < x < \infty$ ), usando a técnica da dupla transformada de Laplace. A principal idéia consiste na aplicação da transformada de Laplace na variável tempo e na solução da equação resultante pelo método  $LTS_N$  usando condições de contorno apropriadas para problemas com domínio limitado e ilimitado. Também é apresentada uma nova solução analítica para o conjunto de equações para o fluxo angular, em um retângulo, usando a técnica da transformada dupla de Laplace. Sua principal idéia engloba os passos seguintes: aplicação da transformada de Laplace em uma variável espacial, solução da equação resultante pelo método  $LTS_N$  e reconstrução do fluxo angular duplamente transformado usando o teorema de inversão da transformada de Laplace. Aqui é assumido que o fluxo angular na fronteira é aproximado por uma função exponencial. Os resultados obtidos por esses métodos, para os problemas considerados, são comparados com os resultados disponíveis na literatura.

## **Abstract**

Analytical solution of Approach  $S_N$  of the equation of Transport for problems of initial value and contour for the Laplace Double Transformed

In this work a general analytical solution is reported, expressed in integral form for the time-dependent, one-dimensional  $S_N$  transport equation in cartesian geometry valid for bounded and unbounded domain ( $0 < x < \infty$ ), using the double Laplace transform technique. The main idea consists in the application of the Laplace transform technique in time variable and solution of the resulting equation by the  $LTS_N$  method, using appropriated boundary conditions for bounded and unbounded domain problems. It is also presented a new analytical solution for the set of  $S_N$  equations for the angular flux, in a rectangle, using the double Laplace transform technique. Its main idea comprehends the following steps: application of the Laplace transform in one space variable, solution of the resulting equation by the  $LTS_N$  method and reconstruction of the double Laplace transformed angular flux using the inversion theorem of the Laplace transform. It is also assumed that the angular flux at boundary is approximated by an exponential function. The results attained by these methods for the problems considered are compared against results available in the literature.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Método <math>LTS_N</math> e <math>TLTS_N</math></b> .....	<b>5</b>
2.1	O Método $LTS_N$ .....	5
2.2	O Método $TLTS_N$ para Domínio Finito .....	10
2.3	O Método $TLTS_N$ para Meio Semi-Infinito .....	13
2.4	Inversões Numéricas da Transformada de Laplace .....	16
2.4.1	Inversão numérica da transformada de Laplace pela fórmula da Quadratura Gaussiana .....	16
2.4.2	Inversão numérica da transformada de Laplace pelo Algoritmo de Gaver .....	17
<b>3</b>	<b>O Método <math>DLTS_N</math></b> .....	<b>20</b>
3.1	Método das Ordenadas Discretas .....	20
3.2	A Solução $DLTS_N$ .....	23
3.3	Solução $DLTS_N$ para o Problema de Multirregião .....	29
<b>4</b>	<b>Resultados Numéricos</b> .....	<b>33</b>
4.1	Resultados Numéricos para o Método $TLTS_N$ .....	33
4.1.1	Problema 1 .....	33
4.1.2	Problema 2 .....	35
4.1.3	Problema 3 .....	37
4.2	Resultados Numéricos para o Método $DLTS_N$ .....	39
4.2.1	Resultados .....	40
<b>5</b>	<b>Conclusão</b> .....	<b>44</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>46</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Esquema do algoritmo de Gaver .....	18
3.1	Conjunto Tridimensional de direções Discretas $\Omega_m$ , para ordem de quadratura $N = 12$ .....	21
3.2	Conjunto de ordenadas $S_6$ para um octante .....	21
3.3	Conjunto bidimensional de Direções Discretas $\Omega_m$ , $m = 1 : 24$ , para ordem de quadratura $N = 4$ .....	22
3.4	Conjunto bidimensional de Direções Discretas $\Omega_m$ , $m = 1 : 24$ , para ordem de quadratura $N = 6$ .....	22
3.5	Conjunto bidimensional de Direções Discretas $\Omega_m$ , $m = 1 : 24$ , para ordem de quadratura $N = 8$ .....	22
3.6	Conjunto bidimensional de Direções Discretas $\Omega_m$ , $m = 1 : 24$ , para ordem de quadratura $N = 12$ .....	23
3.7	Direções Discretas usadas no método $DLTS_N$ .....	29
3.8	Problema Bidimensional pelo método $DLTS_N$ Multirregião .....	30
3.9	Análise das regiões 1 e 2 .....	30
3.10	Análise das regiões 3 e 4 .....	31
3.11	Análise das regiões 1 e 4 .....	31
3.12	Análise das regiões 2 e 3 .....	32
4.1	Domínio da solução: retângulo com uma fonte retangular unitária no canto inferior esquerdo.....	40



## ÍNDICE DE TABELAS

4.1	Comparação do método $TLTS_N$ , com as inversões numéricas GWR e QG com o método $SP_M-LTS_N$ , para $45 \leq x \leq 50$ .....	35
4.2	Fluxo Escalar para $x = 0, 5, 10$ , com $t = 10^{-6}, 10^{-2}, 1, 10, 100s$ , através do método $TLTS_{60}$ usando as inversões numéricas de Gaver Wynn-Rho e Gaver Stehfest .....	36
4.3	Comportamento assintótico do fluxo escalar pelo método $TLTS_N$ obtido através do incremento da placa de 40 para 70 mfp para um tempo variando de $10^{-2}s$ até 40s .....	38
4.4	Comportamento assintótico da solução através do método $TLTS_{60}$ para $t = 10^{-5}$ até 40s e do método $LTS_{60}$ .....	39
4.5	Fluxo escalar para $x = y = 0.9$ mfp .....	41
4.6	Fluxo escalar em $x = y = 0.7$ mfp .....	41
4.7	Fluxo escalar em $x = y = 0.5$ mfp .....	42
4.8	Comparação do método $DLTS_N$ com o método $S_N$ nodal .....	43

## CAPÍTULO 1

### Introdução

O método de  $LTS_N$  resolve de forma analítica o conjunto de equações de ordenadas discretas,  $S_N$ , em geometria cartesiana unidimensional. Nos últimos vinte anos o método  $LTS_N$  tem sido aplicado à uma classe ampla de problemas. Para ilustrar o avanço desse método, vamos citar alguns dos últimos trabalhos importantes no seu desenvolvimento: *The one-dimensional  $LTS_N$  solution in a slab with high degree of quadrature* [Segatto et al., 1999], *The  $LTS_N$  Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature* [Gonçalves et al., 2000]; *An analytical solution for the  $S_N$  radiative transfer equation with polarization in a slab by the  $LTS_N$  method* [Simch e Vilhena, 2006], *The  $LTS_N$  solution of the transport equation for one-dimensional Cartesian geometry with  $c = 1$*  [Marona et al., 2008]; *A Laplace transform method for energy multigroup hybrid discrete ordinates slab lattice calculations* [Segatto et al., 2010a]; *A solution for the non-linear  $S_N$  radiative conductive problem in a grey plane-parallel participating medium* [Segatto et al., 2010b].

Também salientamos que essa metodologia foi aplicada na solução da equação  $S_N$  nodal multidimensional em geometria cartesiana para os fluxos angulares médios. Para mais informações veja os trabalhos: *Solution and Study of Two-Dimensional Nodal Neutron Transport Equation* [Pazos et al., 2002a], *Análise Espectral da Matriz  $LTS_N$  para o Problema de Ordenadas Discretas Bidimensional Cartesiano com Fonte Fixa e Espalhamento Isotrópico* [Hauser et al., 2002a]. A análise matemática do método  $LTS_N$  foi realizada nos trabalhos: *Convergence in Transport Theory* [Pazos e Vilhena, 1999b] e *Convergence of the  $LTS_N$  Method: Approach of  $C_0$  Semi-Groups* [Pazos e Vilhena, 1999a]. De fato, os autores provaram a convergência desse método no âmbito da teoria do semi-grupo  $C_0$ . Mais recentemente Segatto et al. apresentou uma solução analítica para a equação  $S_N$  dependente do tempo para o domínio limitado e ilimitado. Para tal, os autores aplicaram a transformada

de Laplace na variável espacial e na variável tempo. Para mais detalhes veja: *An Analytical Integral Formulation for the Time-Dependent  $S_N$  Transport Equation in a Slab by the Double Laplace Transform Technique* [Segatto et al., 2008], *An analytical solution for the one-dimensional time-dependent  $S_N$  transport equation for bounded and unbounded domain in cartesian geometry* [Segatto et al., 2010c] e *A Closed Form Solution for the One-Group Time-Dependent Transport equation in a Slab by the  $LTS_N$  Method* [Gonzalez et al., 2007].

Nos últimos anos, uma atenção especial tem sido dada a solução da equação unidimensional de transporte de nêutrons dependente do tempo em geometria cartesiana, de forma analítica e semi-analítica. Existe uma razoável literatura sobre esse assunto para problemas definidos em domínio semi-infinito, como por exemplo citam-se os trabalhos de Ganapol et al. [Ganapol e Grossman, 1973] [Ganapol e Peddicord, 1977] [Ganapol, 1982] [Ganapol e Filippone, 1986] [Ganapol, 1986], Henderson e Maynard [Henderson e Maynard, 1989], Olson e Henderson [Olson e Herderson, 2004] e Keller e Lee [Keller e Lee, 1998]. Porém para problemas em domínio finito a literatura é menos frequente, onde podemos citar os trabalhos de El-Wakil et al. [El-Wakil e Sallah, 2004] [El Wakil et al., 2006] e Tureci et al. [Tureci e Tezcan, 2007] [Tureci e Tureci, 2007] [Oliveira et al., 2002a] [Oliveira et al., 2002a].

Atraídos pela tarefa de procurar soluções analíticas, nesta tese apresentamos uma solução para a aproximação  $S_N$  da equação de transporte de nêutrons dependente do tempo em geometria cartesiana considerando domínio limitado e ilimitado, através da aplicação da técnica da transformada de Laplace na variável temporal e o método  $LTS_N$  na variável espacial. Aplicando essa metodologia chegamos à uma solução analítica para o fluxo angular dependente do tempo em forma integral. Por analítica queremos dizer que nenhuma aproximação foi feita ao longo de sua derivação. Nós chamamos essa metodologia de método  $TLTS_N$ . Devido à característica analítica dessa solução em forma matricial no caso de domínio semi-infinito, substituímos a condição de contorno na extremidade mais distante da origem, pela limitação do fluxo angular no infinito. Assim, para este fim, nós zeramos o subvetor das constantes arbitrárias associadas ao conjunto dos autovalores positivos. Dessa forma concluímos a análise da solução da equação  $S_N$  de transporte dependente do tempo em uma placa plana pela técnica da transformada dupla de Laplace.

A seguir, apresentamos a aplicação dessa metodologia na solução de um problema de contorno bidimensional, que consiste na solução da equação  $S_N$  de transporte de nêutrons

estacionária, para o fluxo angular, em um retângulo. A idéia principal compreende três etapas: a aplicação da transformada de Laplace na variável espacial, solução da equação resultante pelo método  $LTS_N$  e a reconstrução do fluxo angular transformado através da aplicação da transformada inversa de Laplace. Nesse momento, enfatizamos que foi realizada a transformada inversa de Laplace na direção  $x$  através do método  $LTS_N$  e a inversa na direção  $y$  realizamos através do cálculo da integral de linha dada pelo método de Stehfest. É sabido que a aplicação da transformada de Laplace a esse tipo de problema gera uma função desconhecida adicional associada à derivada parcial do fluxo angular. Conseqüentemente, baseado nos bons resultados alcançados pelo método nodal de  $LTS_N$  [Hauser, 2010], vamos supor que o fluxo angular na condição de contorno seja aproximado igualmente por uma função exponencial. É sabido que a solução na forma integral é obtida analiticamente, ou seja, significa que nenhuma aproximação está sendo feita ao longo da derivação da solução, ao menos em relação a hipótese exponencial assumida para o fluxo angular no contorno. Propomos, com esse trabalho, a solução  $DLTS_N$ , que significa a solução  $S_N$  através da dupla transformada de Laplace; para problemas de transporte bidimensional.

Cabe ainda salientar que, de acordo com nosso conhecimento, a solução analítica para problemas estacionários  $S_N$  de transporte de nêutrons em um retângulo não existe na literatura, a exceção da solução  $LTS_N$  nodal para o fluxo angular médio nas direções  $x$  e  $y$ . [Hauser et al., 2003][Hauser et al., 2002a][Zabadal et al., 2002][Zabadal et al., 1997][Zabadal et al., 1995].

Para cumprir o objetivo proposto, o conteúdo desse trabalho está organizado em seis capítulos. O capítulo 2 tem caráter didático de informar os procedimentos necessários para obtenção da solução  $LTS_N$ , bem como soluções  $TLTS_N$  para domínios finito e semi-infinito. Ainda nesse capítulo, são apresentadas formas de inversão numérica da transformada de Laplace. No capítulo 3 apresentamos a formulação  $DLTS_N$ ; o qual está subdividido em 3 seções: método das ordenadas discretas, solução  $DLTS_N$  e solução  $DLTS_N$  para o problema multirregião.

Simulações numéricas e comparações com resultados disponíveis na literatura para a aproximação  $S_N$  dependente do tempo são apresentados no capítulo 4, comprovando a eficiência desejada para validação da metodologia desenvolvida. No capítulo 5 apresentamos resultados numéricos para os problemas resolvidos através do método  $DLTS_N$ . Por fim,

no capítulo 6 apresentamos as conclusões obtidas nesse trabalho, bem como os trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### Método $LTS_N$ e $TLTS_N$

Neste capítulo apresentamos o método  $TLTS_N$  que encontra a solução de ordenadas discretas unidimensional dependente do tempo através da aplicação da transformada dupla de Laplace nas variáveis temporal e espacial em uma placa. Esse capítulo é dividido em quatro seções: na primeira, apresentamos a formulação do método  $LTS_N$ ; na segunda, apresentamos o método  $TLTS_N$  para resolver problemas de transporte dependente do tempo em meio finito; na terceira o método  $TLTS_N$  para problemas de transporte em meio semi-infinito. Por fim, na quarta seção apresentamos alguns algoritmos usados para a inversão da transformada de Laplace.

#### 2.1 O Método $LTS_N$

Nessa seção fazemos uma breve descrição do método  $LTS_N$  proposto por Vilhena e Barrichelo [Barichello e Vilhena, 1991] e modificado por [Gonçalves et al., 2000] [Segatto et al., 1999]. Para tanto, vamos considerar a equação de transporte linear unidimensional com um grupo de energia e geometria plana descrita por,

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \int_{-1}^{+1} \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad (2.1)$$

onde  $\psi(x, \mu)$  é o fluxo angular de partículas na direção de  $\mu$ ;  $\sigma_t$  é a seção de choque de espalhamento total,  $\sigma_s(\mu \rightarrow \mu')$  é a seção de choque de espalhamento macroscópica e  $Q(x, \mu)$  é o termo fonte. Vamos considerar que essa equação está sujeita às condições de contorno descritas por

$$\psi(0, \mu) = f(\mu) \quad \mu > 0 \quad (2.2)$$

e

$$\psi(L, \mu) = g(\mu) \quad \mu < 0 \quad (2.3)$$

em que  $f(\mu)$  e  $g(\mu)$  são os fluxos incidentes na fronteira do domínio nas direções positivas e negativas respectivamente e  $L$  é o comprimento da placa. Nesse trabalho consideramos que a seção de choque de espalhamento pode ser expandida em polinômios de Legendre como

$$\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\cos\Theta) \quad (2.4)$$

usando o teorema de adição para os polinômios de Legendre, reescrevemos a seção de choque de espalhamento diferencial como:

$$\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \sum_{m=0}^M \sum_{l=m}^L \frac{\sigma_s}{2} \beta_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \quad (2.5)$$

onde

$$\beta_0 = 1 \quad (2.6)$$

e

$$\beta_l^m = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \beta_l \quad (2.7)$$

Nesse trabalho consideramos que o problema possui simetria azimutal, logo  $M = 0$  na equação (2.5).

A aproximação de ordenadas discretas, ou aproximação  $S_N$ , da equação de transporte é obtida pela discretização da variável espacial. Para isso, primeiramente aproximamos o termo integral da equação (2.1) por quadratura de Gauss-Legendre, isto é:

$$\int_{-1}^1 \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \psi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{k=1}^N \omega_k \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_k) P_l(\mu) \psi(x, \mu_k) \quad (2.8)$$

onde  $\mu_k$  são as raízes do Polinômio de Legendre de grau  $N$ , usualmente ordenados de forma decrescente,

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_2 < \mu_1 < 1 \quad (2.9)$$

e os  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , são os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre definidos por:

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{(u - u_j)}{u_i - u_j} du \quad (2.10)$$

A seguir, aplicamos o método da colocação na variável angular, considerando como função teste a Delta de Dirac, usando como pontos de colocação as raízes do polinômio de Legendre de grau  $N$ . Desta forma:

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_m(x) + \sigma_t \psi_m(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \sum_{k=0}^N \psi_k(x) \omega_k P_l(\mu_k) P_l(\mu_m) + Q_m(x) \quad (2.11)$$

com  $m = 1, 2, \dots, N$ . Aqui por facilidade, notamos o fluxo de partículas na direção discreta  $\mu_m$  por  $\psi_m(x)$ . As condições de contorno são dadas por:

$$\psi_m(0) = f_m \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (2.12)$$

e

$$\psi_m(L) = g_m \quad m = \frac{N}{2} + 1, \dots, N \quad (2.13)$$

O sistema de equações descrito em (2.11) pode ser expresso na forma matricial como

$$\frac{d}{dx} \mathbf{\Psi}(x) - \mathbf{A} \mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{Q}(x) \quad (2.14)$$

onde  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $N$ , definida como:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma_t}{\mu_i} - \frac{\sigma_s \omega_j}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) & i = j \\ -\frac{\sigma_s \omega_j}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) & i \neq j \end{cases} \quad (2.15)$$



Aqui  $\Psi(x)$  e  $Q(x)$  são vetores coluna de ordem  $N$ , que notamos como:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

onde  $\Psi_1(x)$  e  $\Psi_2(x)$  são vetores coluna de ordem  $N/2$  cujos elementos são respectivamente o fluxo angular de partículas nas direções positivas e negativas, e ainda

$$Q(x) = \begin{pmatrix} \frac{Q_1(x)}{\mu_1} \\ \dots \\ \frac{Q_N(x)}{\mu_N} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

com essa notação o problema  $S_N$  descrito pela equação (2.11), (2.12) e (2.13) é escrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \Psi(x) - \mathbf{A} \Psi(x) = \mathbf{Q}(x) \\ \Psi_1(0) = \mathbf{F} \\ \Psi_2(L) = \mathbf{G} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

onde

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_{N/2} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

e

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{N/2+1} \\ \dots \\ g_N \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Para resolver esse problema pelo método  $LTS_N$  aplicamos a transformada de Laplace na variável espacial, isto é,

$$s\bar{\Psi}(s) - \Psi(0) - \mathbf{A}\bar{\Psi}(s) = \bar{\mathbf{Q}}(s) \quad (2.21)$$

que resolvemos para  $\bar{\Psi}(s)$

$$\bar{\Psi}(s) = (sI - A)^{-1}\Psi(0) + (sI - A)^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(s) \quad (2.22)$$

onde  $s$  é um parâmetro complexo. Aplicando a transformada inversa de Laplace em  $s$ , obtemos o fluxo dado por

$$\Psi(x) = \mathbf{B}(x)\Psi(0) + \mathbf{H}(x) \quad (2.23)$$

Levando em consideração que os autovalores da matriz  $LTS_N$  são todos distintos, ou seja, a matriz  $A$  é não degenerada, assim podemos decompô-la como

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz diagonal dos autovalores de  $\mathbf{A}$ , e  $\mathbf{X}$  é a matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes a cada autovalor  $d_j$ . Assim podemos escrever

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{\mathbf{B}}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.25)$$

e  $\mathbf{H}(x)$  o vetor convolução definido por

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{B}(x) * \mathbf{Q}(x) = \int_0^x \mathbf{B}(x - \xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi \quad (2.26)$$

A solução definida em (2.23) possui termos exponenciais e para evitar que ocorra overflow Gonçalves [Gonçalves et al., 2000] observou que, devido à simetria apresentada pelas direções discretas  $\mu_m$ , era possível tratar o fluxo que se desloca da direita para a esquerda ( $\mu_m < 0$ ), igualmente ao fluxo que se desloca da esquerda para a direita ( $\mu_m > 0$ ). Dessa forma, o termo exponencial pode ser escrito como

$$e^{\mathbf{D}x} = \mathbf{E}^+(x) + \mathbf{E}^-(x) \quad (2.27)$$

onde

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{\lambda_i x} & \text{se } \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{se } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

e

$$\mathbf{E}^{-}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda_i > 0 \\ e^{\lambda_i x} & \text{se } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

e usando essa notação

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}\mathbf{E}^{+}(x-L)\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}\mathbf{E}^{-}(\mathbf{x})\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{B}^{+}(x-L) + \mathbf{B}^{-}(x) \quad (2.30)$$

Ainda, levando em conta a propriedade de invariância das direções discretas podemos escrever o vetor  $\mathbf{H}(x)$  como

$$\mathbf{H}(x) = \int_L^x \mathbf{B}^{+}(x-\xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi + \int_0^x \mathbf{B}^{-}(x-\xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi \quad (2.31)$$

Esse procedimento nos proporciona a facilidade de que todos os argumentos das exponenciais da solução  $\text{LTS}_N$  são negativos. Portanto, podemos avaliar a solução para grandes espessuras ou valores grandes de  $N$ . Aqui ainda devemos observar que, na prática, usamos

$$\Psi(x) = \mathbf{X}\mathbf{E}(x)\xi + \mathbf{H}(x) \quad (2.32)$$

onde

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^{+}(x-L) + \mathbf{E}^{-}(x) \quad (2.33)$$

e  $\mathbf{H}(x)$  é descrito pela equação (2.31).

## 2.2 O Método $\text{TLTS}_N$ para Domínio Finito

Nessa seção apresentamos o problema de transporte dependente do tempo utilizando a formulação  $\text{TLTS}_N$ . Essa formulação consiste na aplicação da transformada de Laplace na variável temporal, resolução da equação resultante pelo método  $\text{LTS}_N$ , conforme visto na seção anterior, e reconstrução do fluxo angular na variável tempo pela inversão numérica. Para explicarmos o procedimento, vamos considerar o seguinte problema de transporte unidimensional dependente do tempo em uma placa

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x, \mu) + \sigma_t \psi(t, x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') \psi(t, x, \mu') d\mu' + S(t, x) \quad (2.34)$$

com condição inicial

$$\psi(0, x, \mu) = h(x, \mu) \quad (2.35)$$

e condição de contorno

$$\psi(t, 0, \mu) = f(t, \mu) \quad t > 0, \mu < 0 \quad (2.36)$$

$$\psi(t, L, \mu) = g(t, \mu) \quad t > 0, \mu < 0 \quad (2.37)$$

Aqui,  $v$  é a velocidade dos nêutrons,  $\sigma_t$  e  $\sigma_s$  são, respectivamente, a seção de choque macroscópica total e de espalhamento. Substituindo  $\sigma_s$  em (2.34), aproximando o termo integral na equação (2.34) pela quadratura Gaussiana de ordem  $N$  e aplicando o método da colocação na variável angular, obtemos a aproximação  $S_N$  dada por

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_m(t, x) + \sigma_t^p \psi_m(t, x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_m) c \sum_{n=1}^N P_l(\mu_n) \omega_n \psi_n(t, x) + R_n(t, x) \quad (2.38)$$

e aplicando a técnica da transformada de Laplace na variável temporal obtemos:

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}_m(p, x) + \sigma_t^p \bar{\psi}_m(p, x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_m) c \sum_{n=1}^N P_l(\mu_n) \omega_n \bar{\psi}_n(p, x) + \bar{R}_n(p, x) \quad (2.39)$$

sujeita às seguintes condições de contorno

$$\bar{\psi}_m(p, 0) = \bar{f}_m(p) \quad \mu_m > 0 \quad (2.40)$$

e

$$\bar{\psi}_m(p, L) = \bar{g}_m(p) \quad \mu_m < 0 \quad (2.41)$$

Aqui  $\bar{\psi}(p, x, \mu)$  denota a transformada de Laplace de  $\psi(t, x, \mu)$ ,  $t \rightarrow p$ ,

$$\sigma_t^p = 1 + \frac{p}{v} \quad (2.42)$$

e

$$\bar{R}(p, x, \mu) = \frac{1}{v} \phi(x, \mu) + \bar{S}(p, x) \quad (2.43)$$

Aqui,  $\mu_m$  são as  $N$  raízes do polinômio de Legendre de grau  $N$ , ordenados decrescentemente,

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{N/2+1} < 0 < \mu_{N/2} < \dots < \mu_N < 1 \quad (2.44)$$

e  $\bar{\Psi}_m(p, x)$  é a transformada do fluxo angular na direção discreta  $\mu_m$  e  $\bar{R}(p, x)$  é o termo fonte transformado. A equação (2.39) pode ser reescrita na forma matricial

$$\frac{d}{dx} \bar{\Psi}(p, x) - \mathbf{A}(p) \bar{\Psi}(p, x) = \bar{\mathbf{R}}(p, x) \quad (2.45)$$

onde  $\mathbf{A}(p)$  é uma matriz de ordem  $N$  definida como sendo

$$\mathbf{a}_{ij} = \begin{cases} \frac{w\omega_j}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) - \frac{\sigma_l^p}{\mu_i} & \text{se } i = j \\ \frac{w\omega_j}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.46)$$

A seguir o sistema (2.45) é resolvido pelo método  $LTS_N$ , conforme descrito na seção (2.1) obtendo de forma analítica o fluxo de partículas transformado no tempo como:

$$\bar{\Psi}(p, x) = \mathbf{X}(p) \mathbf{E}(x) \zeta + \bar{\mathbf{H}}(p, x) \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^+(x - L) + \mathbf{E}^-(x)$  que são matrizes diagonais cujas entradas são definidas como

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{\lambda_i x} & \text{se } \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{se } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

e

$$\mathbf{E}^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda_i > 0 \\ e^{\lambda_i x} & \text{se } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Aqui  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  são os autovalores de  $\mathbf{A}(p)$  e  $\mathbf{X}(p)$  é a matriz dos autovetores de  $\mathbf{A}(p)$ . O vetor  $\bar{\mathbf{H}}(p, x)$  é definido como

$$\bar{\mathbf{H}}(p, x) = \int_L^x \bar{\mathbf{B}}^+(p, x - \zeta) \bar{\mathbf{R}}(p, \zeta) d\zeta + \int_0^x \bar{\mathbf{B}}^-(p, x - \zeta) \bar{\mathbf{R}}(p, \zeta) d\zeta \quad (2.50)$$

Para avaliar as componentes desconhecidas do vetor  $\bar{\Psi}(p, 0)$ , aplicamos as condições de contorno (2.40) e (2.41), e resolvemos o sistema linear resultante. Por esse procedimento a solução da transformada de Laplace no tempo do problema (2.45) é determinada pela equação (2.47).

Dessa forma, é possível reconstruir o fluxo angular usando a definição da transformada inversa de Laplace para o fluxo angular transformado

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{\Psi}(p, x) e^{pt} dp \quad (2.51)$$

A equação acima representa a solução em forma analítica da aproximação  $S_N$  da equação de transporte. Frizamos que a solução é analítica no sentido de nenhuma aproximação ser feita ao longo de sua derivação.

### 2.3 O Método TLTS<sub>N</sub> para Meio Semi-Infinito

Para problemas de transporte dependente do tempo em domínio semi-infinito existe uma razoável literatura, como por exemplo citam-se os trabalhos de Ganapol et al. [Ganapol e Grossman, 1973] [Ganapol e Peddicord, 1977] [Ganapol, 1986] [Ganapol, 1982] [Ganapol e Filippone, 1986] [Ganapol, 1986], Henderson e Maynard [Henderson e Maynard, 1989], Olson e Henderson [Olson e Herderson, 2004] e Keller e Lee [Keller e Lee, 1998]. Nessa seção, apresentamos o problema de transporte dependente do tempo utilizando a formulação TLTS<sub>N</sub> para meio semi-infinito. Para tal, vamos considerar o problema de transporte dependente

do tempo dado pela equação (2.34) com as seguintes condições inicial

$$\psi(0, x, \mu) = \phi(x, \mu) \quad (2.52)$$

e de contorno

$$\psi(t, 0, \mu) = f(t, \mu), \quad \text{para } t > 0, \quad \mu > 0, \quad (2.53)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, t, \mu) = 0 \quad (2.54)$$

Procedendo de forma análoga ao domínio finito, podemos aplicar a transformada de Laplace na variável tempo ( $t \rightarrow p$ ) na equação (2.38), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\mu_n \frac{d}{dx} \bar{\psi}_n(p, x) + \sigma_t^p \bar{\psi}_n(p, x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{i=1}^N w_i \bar{\psi}_i(p, x) + \bar{R}_n(p, x), \quad (2.55)$$

com condições de contorno

$$\bar{\psi}_n(p, 0) = \bar{f}_n(p), \quad \text{para } \mu_n > 0, \quad (2.56)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\psi}(p, x) = 0 \quad (2.57)$$

onde  $\bar{\psi}(p, x)$  denota a transformada de Laplace de  $\psi(t, x)$ ;  $t \rightarrow p$ , e

$$\sigma_t^p = 1 + \frac{p}{v} \quad (2.58)$$

$\mu_n$  são as  $N$  raízes do polinômio de Legendre de ordem  $N$ , ordenados de forma decrescente, ou seja

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{N/2+1} < 0 < \mu_{N/2} < \dots < \mu_1 < 1 \quad (2.59)$$

$\bar{\psi}_n(p, x)$  é o fluxo angular transformado na direção discreta  $\mu_n$ , e

$$\bar{R}(p, x) = \frac{1}{v} \phi(x, \mu) + \bar{S}(p, x) \quad (2.60)$$

é o termo fonte transformado. Reescrevendo a equação (2.55) na forma matricial temos:

$$\frac{d}{dx} \bar{\Psi}(p, x) - \mathbf{A} \bar{\Psi}(p, x) = \bar{\mathbf{R}}(p, x) \quad (2.61)$$

onde  $\mathbf{A}(p)$  é uma matriz de ordem  $N$ , cujas entradas são da forma

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} - \frac{\sigma_t^p}{\mu_i} & \text{se } i = j, \\ \frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.62)$$

com condições de contorno

$$\bar{\Psi}_1(p, 0) = \bar{\mathbf{f}}(p) \quad (2.63)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\Psi}_2(p, x) = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

Aqui  $\bar{\Psi}_1(p, x)$  e  $\bar{\Psi}_2(p, x)$  denotam vetores de ordem  $N/2$  para as direções positivas e negativas de  $\mu$ , respectivamente. Usando essa notação a solução do método  $LTS_N$  para o problema (2.61) tem a forma:

$$\bar{\Psi}(p, x) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1(p, x) \\ \bar{\Psi}_2(p, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11}(p, x) & \mathbf{X}_{12}(p, x) \\ \mathbf{X}_{21}(p, x) & \mathbf{X}_{22}(p, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{\mathbf{D}^+ x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{\mathbf{D}^- x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(p) \\ \xi_2(p) \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

onde a matriz diagonal  $\mathbf{D}^\pm$  de ordem  $N/2$  contém, respectivamente, os autovalores positivos e negativos da matriz  $\mathbf{A}(p)$  e  $\mathbf{X}(p)$  é a matriz dos autovetores de  $\mathbf{A}(p)$  que aparece na equação (2.62). A condição dada pela equação (2.54) força que  $N/2$  componentes desconhecidas do vetor  $\xi_1$  na matriz  $\mathbf{D}^+$ , que aparece na equação (2.65), sejam identicamente nulos, assim

$$\bar{\Psi}_1(p, x) = \mathbf{X}_{12}(p, x) \mathbf{e}^{\mathbf{D}^- x} \xi_2 + \bar{\mathbf{H}}_1^-(p, x) \quad \text{se } \mu > 0 \quad (2.66)$$

e

$$\bar{\Psi}_2(p, x) = \mathbf{X}_{22}(p, x) \mathbf{e}^{\mathbf{D}^- x} \xi_2 + \bar{\mathbf{H}}_2^-(p, x) \quad \text{se } \mu < 0 \quad (2.67)$$



Por fim, aplicando a condição de contorno (2.53) em  $x = 0$ , determinamos o subvetor desconhecido  $\xi_2$  para resolver o sistema linear resultante.

Dessa forma, é possível reconstruirmos o fluxo angular nas direções positivas e negativas através da aplicação da transformada inversa de Laplace sobre  $p$ .

## 2.4 Inversões Numéricas da Transformada de Laplace

Nesta seção apresentamos alguns métodos de inversão numérica para a transformada de Laplace com o objetivo de estudar qual é o mais apropriado para resolver problemas transientes supondo grandes e pequenos valores de tempo. Na subseção (2.4.1) apresentamos a fórmula de inversão da Quadratura Gaussiana e na subseção (2.4.2) a inversão pelo algoritmo de Gaver com os aceleradores de convergência Wynn-Rho e Stehfest.

### 2.4.1 Inversão numérica da transformada de Laplace pela fórmula da Quadratura Gaussiana

Essa inversão aproxima a integral de contorno pela Quadratura Gaussiana definida pela equação (2.51). É uma das técnicas existentes para a inversão numérica da transformada de Laplace sendo dada pela seguinte fórmula [Stroud e Secrest, 1966]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p} \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{n=1}^N A_n F(p_n) \quad (2.68)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária,  $c$  é um número positivo arbitrário e  $F(p)$  é uma função analítica no semi-plano direito do plano complexo. As abscissas  $p_n$  e pesos  $A_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  são determinadas de forma que (2.68) seja exata quando a função  $F(p)$  for um polinômio de  $1/s$  com grau menor ou igual a  $2N - 1$ . Segundo [Heydarian et al., 1981], podemos calcular as abscissas  $p_n$  como sendo as raízes do seguinte polinômio

$$(-1)^N \sum_{r=0}^N \frac{(-1)^{N-r} N(N+r-1)!}{r!(N-r)!} p^{N-r} = 0 \quad (2.69)$$

e os pesos  $A_n$  da equação (2.68) podem ser encontrados através da solução de

$$\sum_{r=0}^N A_n p_n^{-r} = \frac{1}{r!}; 0 \leq r \leq N - 1 \quad (2.70)$$

Assim, se desejamos a transformada inversa de Laplace de uma função  $U(s)$ , pela integral de contorno temos que,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} U(s) ds \quad (2.71)$$

Para usarmos a fórmula de quadratura definida pela equação (2.68) fazemos a mudança de variável (2.71)

$$st = p \quad (2.72)$$

e dessa forma temos

$$tu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} U\left(\frac{p}{t}\right) dp \quad (2.73)$$

Podemos reescrever a equação (2.73) como

$$tu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} c^p \frac{F(p)}{p} dp \quad (2.74)$$

onde

$$F(p) = pU(p/t) \quad (2.75)$$

Ou seja, a função  $F(p)$  que aparece na fórmula de quadratura Gaussiana (2.68) está relacionada com a função a ser invertida  $U(s)$  por:

$$F(p) = \frac{p}{t} U\left(\frac{p}{t}\right) \quad (2.76)$$

onde  $t$  é o tempo em que desejamos obter a inversão. Um algoritmo para o cálculo das abscissas e das raízes pode ser encontrado em [Piessens, 1973]. Dessa forma, podemos estimar o valor da integral de linha descrito pela fórmula

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \bar{\Psi}(p, x) dp \quad (2.77)$$

através da quadratura Gaussiana. Assim, o fluxo angular de partículas em  $x$  no instante  $t$  pode ser calculado como

$$\Psi(t, x) = \sum_{n=1}^M a_n \bar{\Psi}\left(\frac{p_n}{t}, x\right) \quad (2.78)$$

onde  $a_n$  são as raízes da quadratura e  $p_n$  são os pesos descritos anteriormente.

## 2.4.2 Inversão numérica da transformada de Laplace pelo Algoritmo de Gaver

A fórmula de inversão de Bromwich não é o único caminho para a reconstrução da transformada inversa de Laplace. Se a imagem da função transformada  $\bar{f}(s)$  é conhecida sobre o eixo real positivo, podemos reconstruir a função  $f(t)$  através da fórmula de Post-Widder [Cohen, 2007] onde

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \bar{f}^n\left(\frac{n}{t}\right) \quad (2.79)$$

para todo  $t > 0$  e toda função  $f(t)$  contínua. Nessa fórmula a função  $f(t)$  é expressa em termos dos valores de  $\bar{f}$  e de suas derivadas sobre o eixo real. Segundo Valkó [Valkó e Abate, 2004] podemos aproximar a fórmula acima através do algoritmo recursivo descrito por:

$$G_0^{(n)} = n \frac{\ln 2}{t} \bar{\Psi} \left( n \frac{\ln 2}{t}, x \right), \quad n \geq 1$$

$$G_k^{(n)} = \left( 1 + \frac{n}{k} \right) G_{k-1}^{(n)} - \left( \frac{n}{k} \right) G_{k-1}^{(n+1)}, \quad k \geq 1, \quad n \geq k \quad (2.80)$$

$$\Psi(t, x) = G_k^{(k)}$$

De forma sucinta podemos representar o algoritmo de Gaver através da figura (2.4.2):

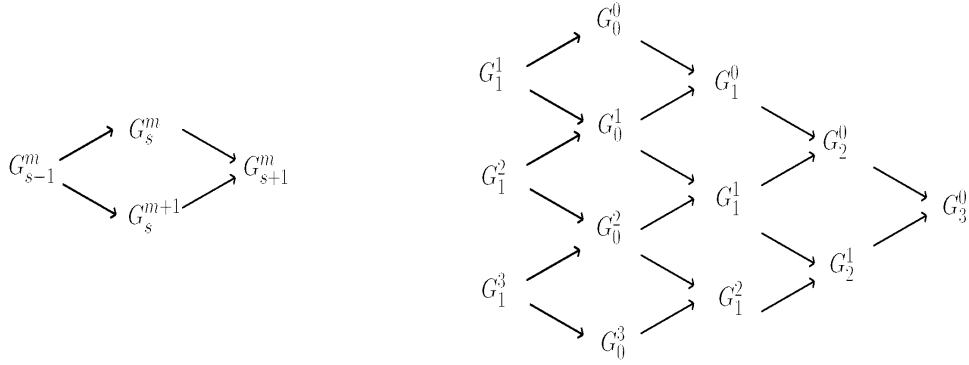


Figura 2.1 – Esquema do algoritmo de Gaver

Infelizmente, a grande desvantagem desse algoritmo é a sua convergência muito lenta, no sentido de que um valor preciso só é atingido para  $N$  grande. Desta forma, para obtermos uma boa aproximação precisamos utilizar um algoritmo para acelerar a convergência. Neste trabalho escolhemos os algoritmos de Wynn-Rho e o de Stehfest.

- Acelerador Wynn-Rho

Segundo Valkó [Valkó e Abate, 2004], o melhor algoritmo de aceleração para o esquema de Gaver é o algoritmo de Wynn-Rho dado pela seguinte fórmula de recursão

$$\rho_{-1}^{(n)} = 0, \quad n \geq 0$$

$$\rho_0^{(n)} = \Psi_n(t, x), \quad n \geq 0 \quad (2.81)$$

$$\rho_k^{(n)} = \rho_{k-2}^{(n+1)} + \frac{k}{\rho_{k-1}^{(n+1)} - \rho_{k-1}^{(n)}}, \quad k \geq 1$$

A aproximação  $f(t)$  é dada por  $f(t, M) = \rho_0^M$ , onde  $M$  é um inteiro par.

- Acelerador Stehfest

O acelerador de Stehfest é relativamente simples e muito usado na literatura. Consideremos uma função real  $f(t)$ , o algoritmo de Gaver-Stehfest produz um valor aproximado para a inversa de  $f(t)$  em  $t$ , chamada de  $\bar{f}(s)$  dada pela seguinte fórmula:

$$f(s) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i f\left(\frac{\ln 2}{t} i\right) \quad (2.82)$$

sendo  $N$  um número par e  $V_i$  é da forma

$$V_i = (-1)^{\frac{N}{2}+i} \sum_{k=(i+1)/2}^{\text{Min}(i,N/2)} \frac{k^{N/2+1}(2k)!}{(N/2 - k)!k!(k-1)!(i-k)!(2k-i)!} \quad (2.83)$$

O parâmetro  $N$  é o número de termos usados no somatório da equação (2.82) e pode ser otimizado para evitar erros de arredondamento. Segundo [Hassanzadeh e Pooladi-Daarvish, 2007] a escolha ideal é  $10 \leq N \leq 14$ . Esse algoritmo apresenta boa convergência quando a função é da forma exponencial decrescente.

## CAPÍTULO 3

### O Método $DLTS_N$

Neste capítulo apresentamos uma solução analítica para o conjunto de equações  $S_N$  em um retângulo para o fluxo angular, usando a transformada dupla de Laplace. A idéia principal compreende três etapas: aplicação da transformada de Laplace em uma variável, solução da equação diferencial resultante pelo método  $LTS_N$  e reconstrução do fluxo bidimensional angular usando inversão numérica. Nesse capítulo inicialmente apresentamos a obtenção do conjunto das direções discretas usadas nesse trabalho e posteriormente apresentamos a derivação da solução do sistema de equações  $S_N$  bidimensional pelo método da dupla transformada de Laplace que chamamos de método  $DTLS_N$ . Essa técnica primeiramente aplica a transformada de Laplace sobre a variável espacial  $y$  ( $y \rightarrow p$ ). As equações resultantes dessa aplicação são então resolvidas pelo método  $LTS_N$ , obtendo dessa forma a solução na variável  $x$ , de forma analítica. Finalmente para obtermos o fluxo angular nas variáveis  $x$  e  $y$  procedemos com a inversão numérica ( $p \rightarrow y$ ).

#### 3.1 Método das Ordenadas Discretas

As soluções da equação de transporte de nêutrons implicam integrações na variável angular  $\Omega$ , que podemos aproximar por quadraturas. Dessa forma, a variável contínua  $\Omega$  é representada por um conjunto de direções discretas ( $\mu_m$ ) e um conjunto de pesos ( $\omega_m$ ). Essas direções são equivalentes a um conjunto de pontos sobre a superfície de uma esfera unitária, conforme figura (3.1):

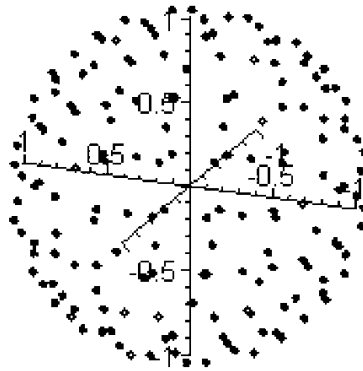


Figura 3.1 – Conjunto Tridimensional de direções Discretas  $\Omega_m$ , para ordem de quadratura  $N = 12$

O primeiro método de transporte baseado em quadraturas angulares é conhecido como método de Ordenadas Discretas de Chandraseckhaer [Duderstadt e Martin, 1979]. Aplicações desse método têm sido usadas geralmente em geometrias simples, onde a componente azimutal de  $\Omega$  pode ser eliminada. Nesses casos, a representação por quadratura é feita usando um conjunto de cossenos diretores  $(\mu_m, \eta_m)$  para as direções discretas  $\Omega_m$  e um conjunto de pesos  $(\omega_m)$  da quadratura. A priori, a variável angular  $\Omega$  da equação de transporte não tem direção preferencial associada à ela. Normalmente  $\Omega$  é representada pelas componentes em um sistema de eixos coordenados na esfera unitária, sujeitas às condições

$$\mu^2 + \eta^2 + \epsilon^2 = 1$$

A integração nas variáveis angulares é aproximada por uma soma em um conjunto de pontos da esfera unitária. No espaço  $\mathcal{R}^3$  restringimos nossa atenção a um octante da esfera unitária, conforme figura (3.2), as outras coordenadas são obtidas pela troca de sinal de uma ou mais direções [Lewis e Miller, 1984].

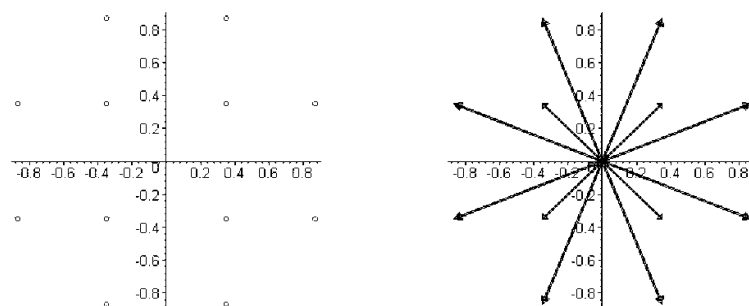


Figura 3.2 – Conjunto de ordenadas  $S_6$  para um octante

A tabela com as direções  $(\mu_m)$ , os pesos  $(\omega_m)$ , para os conjuntos de ordenadas  $S_4$ ,  $S_6$ ,  $S_8$ ,

$S_{12}$  e  $S_{16}$  podem ser obtidos no livro de Lewis e Miller [Lewis e Miller, 1984].

Na sequência ilustramos a representação geométrica de conjuntos de quadratura bidimensional [Lewis e Miller, 1984].

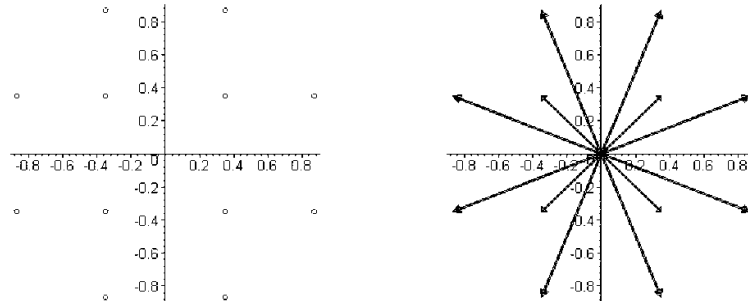


Figura 3.3 – Conjunto bidimensional de Direções Discretas  $\Omega_m$ ,  $m = 1 : 24$ , para ordem de quadratura  $N = 4$

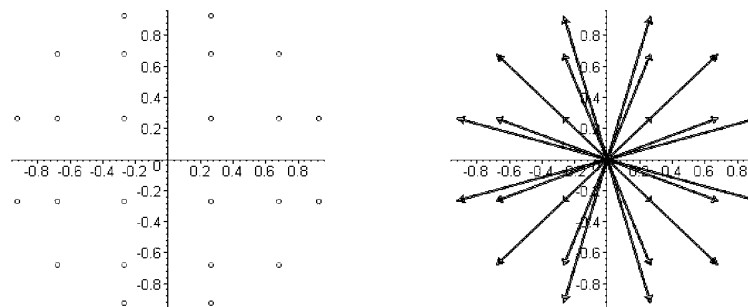


Figura 3.4 – Conjunto bidimensional de Direções Discretas  $\Omega_m$ ,  $m = 1 : 24$ , para ordem de quadratura  $N = 6$

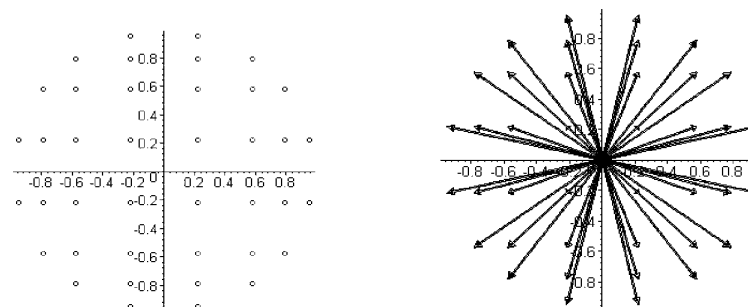


Figura 3.5 – Conjunto bidimensional de Direções Discretas  $\Omega_m$ ,  $m = 1 : 24$ , para ordem de quadratura  $N = 8$

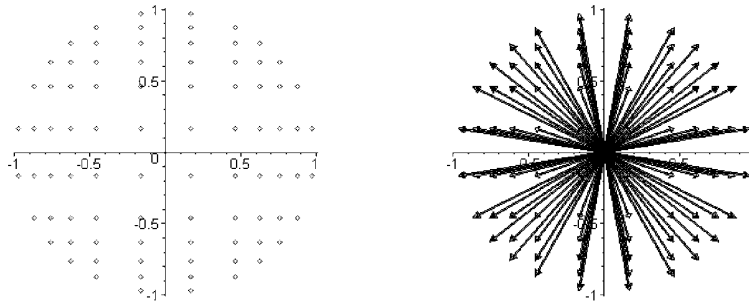


Figura 3.6 – Conjunto bidimensional de Direções Discretas  $\Omega_m$ ,  $m = 1 : 24$ ,  
para ordem de quadratura  $N = 12$

### 3.2 A Solução DLTS<sub>N</sub>

Para construirmos a solução analítica para a aproximação  $S_N$  da equação de transporte de nêutrons em uma região retangular homogênea vamos considerar, sem perda de generalidade, equação monoenergética estacionária  $S_N$  de nêutrons em um retângulo,  $0 \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq b$ , com espalhamento isotrópico:

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_m(x, y) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \psi_m(x, y) + \sigma_t \psi_m(x, y) = \frac{\sigma_s}{4} \sum_{n=1}^M \psi_n(x, y) w_n + Q(x, y) \quad (3.1)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \psi(0, y, \Omega_m(\mu, \eta)) &= \psi(0, y, \Omega_m(-\mu, \eta)) & \text{para } \mu > 0 \\ \psi(x, 0, \Omega_m(\mu, \eta)) &= \psi(x, 0, \Omega_m(\mu, -\eta)) & \text{para } \eta > 0 \\ \psi(a, y, \Omega_m(\mu, \eta)) &= 0 & \text{para } \mu < 0 \\ \psi(x, b, \Omega_m(\mu, \eta)) &= 0 & \text{para } \eta < 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde,

- $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$  são as variáveis espaciais da geometria retangular;
- $N$  é a ordem da quadratura angular;
- $m = 1 : M$  (números inteiros de 1 até  $M$ ),  $M = \frac{N(N+2)}{2}$ ;
- $M$  =cardinalidade do conjunto de ordenadas discretas (número de direções discretas);
- $\sigma_t(x, y)$  é a seção de choque macroscópica total;
- $\sigma_s(x, y)$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento isotrópico;



- $\psi_m(x, y) = \psi(x, y, \Omega_m(\mu, \eta))$  representa o fluxo angular na direção  $\Omega_m(\mu_m, \eta_m)$ ;
- $w_m$  = peso da quadratura angular usada;
- $Q(x, y)$  = fonte isotrópica de nêutrons no ponto  $(x, y)$  do domínio.

As condições de contorno são os fluxos de nêutrons prescritos ou as condições de reflexão. Neste trabalho utilizamos o conjunto de quadratura angular conforme descrito em Lewis et al. [Lewis e Miller, 1984] e que ilustramos nas figuras (3.3), (3.4), (3.1) e (3.6).

A equação (3.1) pode ser escrita na seguinte forma matricial

$$\mathcal{M} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) + \mathcal{N} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y) - \mathbf{A} \Psi(x, y) = \mathbf{Q}(x, y) \quad (3.3)$$

Aqui  $\Psi(x, y)$  é um vetor coluna com  $M$  componentes que subdividimos em quatro subvetores de  $M/4$  componentes cada, isto é:

$$\Psi = \text{col}[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4]$$

cada subvetor representa as direções em cada quadrante, ou seja:

$$\begin{cases} \Psi_1(x, y) = \text{col}[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{M/4}] & , \quad \Omega_m(\mu > 0, \eta > 0) \\ \Psi_2(x, y) = \text{col}[\psi_{M/4+1}, \psi_{M/4+2}, \dots, \psi_{M/2}] & , \quad \Omega_m(\mu < 0, \eta > 0) \\ \Psi_3(x, y) = \text{col}[\psi_{M/2+1}, \psi_{M/2+2}, \dots, \psi_{3M/4}] & , \quad \Omega_m(\mu < 0, \eta < 0) \\ \Psi_4(x, y) = \text{col}[\psi_{3M/4+1}, \psi_{3M/4+2}, \dots, \psi_M] & , \quad \Omega_m(\mu > 0, \eta < 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

Ainda  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  são respectivamente as matrizes diagonais

$$\mathcal{M} = \text{diag}[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M]^T, \quad \mathcal{N} = \text{diag}[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M]^T,$$

$\mathbf{A}$  é uma matriz de ordem  $M$ , cujos elementos são descritos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{4} w_j - \sigma_t & \text{se } i \neq j \\ \frac{\sigma_s}{4} w_j & \text{se } i = j \end{cases}$$

e  $\mathbf{Q}$  é o termo fonte dado na forma de vetor coluna como sendo

$$\mathbf{Q}(x, y) = \text{col}[Q_1(x, y), Q_2(x, y), \dots, Q_M(x, y)].$$

Aplicando a transformada em  $x$  ( $x \rightarrow s$ ) na equação (3.3), temos:

$$\mathcal{M} \left[ s \bar{\Psi}(s, y) - \Psi(0, y) \right] + \mathcal{N} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\Psi}(s, y) - \mathbf{A} \bar{\Psi}(s, y) = \bar{\mathbf{Q}}(s, y) \quad (3.5)$$

aplicando em  $y$  ( $y \rightarrow p$ ) temos:

$$\mathcal{M} \left[ s\bar{\bar{\Psi}}(s, p) - \bar{\Psi}(0, p) \right] + \mathcal{N} \left[ p\bar{\Psi}(s, p) - \bar{\Psi}(p, 0) \right] - \mathbf{A}\bar{\Psi}(s, p) = \bar{\bar{\mathbf{Q}}}(s, p) \quad (3.6)$$

o qual pode ser facilmente reescrito como sendo:

$$\left( s\mathbf{I} + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}p - \mathcal{M}^{-1}\mathbf{A} \right) \bar{\bar{\Psi}}(s, p) = \bar{\Psi}(0, p) + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}\bar{\Psi}(s, 0) + \mathcal{M}^{-1}\bar{\bar{\mathbf{Q}}}(s, p) \quad (3.7)$$

a matriz  $M$  é muito simples de ser invertida. A solução da equação (3.9) para o fluxo angular da dupla transformada tem a seguinte forma

$$\bar{\bar{\Psi}}(s, p) = \bar{\bar{\mathbf{B}}}(s, p)\bar{\Psi}(0, p) + \bar{\bar{\mathbf{B}}}(s, p)\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}\bar{\Psi}(s, 0) + \bar{\bar{\mathbf{B}}}(s, p)\mathcal{M}^{-1}\bar{\bar{\mathbf{Q}}}(s, p) \quad (3.8)$$

onde a matriz  $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$  é expressa como

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}(s, p) = \left( s\mathbf{I} + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}p - \mathcal{M}^{-1}\mathbf{A} \right)^{-1} \left( s\mathbf{I} + \mathbf{U}(p) \right)^{-1} \quad (3.9)$$

A solução transformada é conhecida, é possível agora reconstruir a solução usando a transformada inversa de Laplace. Iniciamos com o procedimento de inversão da variável  $x$  seguindo a idéia do método  $LTS_N$ . A solução  $\bar{\Psi}(x, p)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x, p) = \bar{\mathbf{B}}(x, p)\bar{\Psi}(0, p) &+ \int_0^x \bar{\mathbf{B}}((x - \xi), p)\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}\bar{\Psi}(\xi, 0)d\xi \\ &+ \int_0^x \bar{\mathbf{B}}((x - \xi), p)\mathcal{M}^{-1}\bar{\bar{\mathbf{Q}}}(\xi, p)d\xi \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\bar{\Psi}$  é a inversa de Laplace de  $\bar{\bar{\Psi}}$ , a matriz  $\bar{\mathbf{B}}(x, p)$  é a matriz da transformada inversa de Laplace de  $\mathbf{B}(x, p)$ . Para facilitar a inversão da matriz  $\bar{\bar{\mathbf{B}}}(s, p)$  nós a decomposmos em uma matriz  $\mathbf{U}(p)$  dada por:

$$\mathbf{U}(p) = \mathbf{X}(p)\mathbf{D}(p)\mathbf{X}^{-1}(p) \quad (3.11)$$

onde  $\mathbf{D}(p)$  e  $\mathbf{X}(p)$  são respectivamente os autovalores da matriz diagonal e os autovetores coluna da matriz  $\mathbf{U}(p)$ . Agora aplicamos a transformada inversa de Laplace ( $s \rightarrow x$ ). Para tal, usando os resultados da equação (3.11) temos:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}(x, p) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \left( s\mathbf{I} + \mathbf{U}(p) \right)^{-1} \right) \\ &= \mathbf{X}(p)\mathcal{L}^{-1} \left( (s\mathbf{I} + \mathbf{D}(p))^{-1} \right) \mathbf{X}^{-1}(p) \\ &= \mathbf{X}(p)e^{\mathbf{D}(p)x}\mathbf{X}^{-1}(p) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para um melhor entendimento vamos aplicar as condições de contorno da aproximação DLTS<sub>N</sub> para  $N = 2$ , isto é  $M = \frac{2(2+2)}{2} = 4$ , dessa forma:

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(x, p) \\ \bar{\psi}_2(x, p) \\ \bar{\psi}_3(x, p) \\ \bar{\psi}_4(x, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{ij}(x, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(0, p) \\ \bar{\psi}_2(0, p) \\ \bar{\psi}_3(0, p) \\ \bar{\psi}_4(0, p) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \bar{b}_{ij}(x - \xi, p) \frac{\eta_j}{\mu_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\xi, 0) \\ \psi_2(\xi, 0) \\ \psi_3(\xi, 0) \\ \psi_4(\xi, 0) \end{pmatrix} d\xi + \begin{pmatrix} \bar{h}_1(x, p) \\ \bar{h}_2(x, p) \\ \bar{h}_3(x, p) \\ \bar{h}_4(x, p) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Aqui as entradas  $\bar{b}_j(x, p)$  são os elementos da matriz  $\bar{\mathbf{B}}(x, p)$  e  $\bar{h}_j(x, p)$  são os elementos do vetor convolução,  $\bar{\mathbf{H}}(x, p)$ , que são expressos como:

$$\bar{b}_{ij}(x, p) = \sum_{k=1}^4 \chi_{ik}(p) e^{d_k(p)} z_{kj}(p) \quad (3.14)$$

$$\bar{h}_j(x, p) = \sum_{j=1}^4 \int_0^x \bar{b}_{ij}(x - \xi, p) \frac{\bar{q}_j(\xi, p)}{\mu_j} d\xi \quad (3.15)$$

Transformando a equação de contorno dada pela equação (3.2), aplicando a transformada de Laplace na variável  $y$  ( $y \rightarrow p$ ) obtemos:

$$\psi_1(x, 0) = \psi_4(x, 0) \quad \text{e} \quad \psi_2(x, 0) = \psi_3(x, 0)$$

$$\bar{\psi}_1(0, p) = \bar{\psi}_2(0, p) \quad \text{e} \quad \bar{\psi}_3(0, p) = \bar{\psi}_4(0, p)$$

para a solução da equação (3.13). Acontece que:

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(x, p) \\ \bar{\psi}_2(x, p) \\ \bar{\psi}_3(x, p) \\ \bar{\psi}_4(x, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{ij}(x, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(0, p) \\ \bar{\psi}_1(0, p) \\ \bar{\psi}_3(0, p) \\ \bar{\psi}_3(0, p) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \bar{b}_{ij}(x - \xi, p) \frac{\eta_j}{\mu_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\xi, 0) \\ \psi_2(\xi, 0) \\ \psi_2(\xi, 0) \\ \psi_1(\xi, 0) \end{pmatrix} d\xi + \begin{pmatrix} \bar{h}_1(x, p) \\ \bar{h}_2(x, p) \\ \bar{h}_3(x, p) \\ \bar{h}_4(x, p) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

A fim de tornar possível a determinação do termo integral na equação (3.16), assumimos que o fluxo angular  $\Psi_m(x, 0)$  na fronteira tem a forma conhecida. Nessa tese iremos supor que a forma é exponencial, isto é:

$$\Psi_m(x, 0) = c_m e^{-\lambda_m x}, \text{ onde } \lambda_m = \text{sign}(\mu_m) \sigma_a. \quad (3.17)$$

A justificativa para esse procedimento vem de bons resultados encontrados por [Hauser et al., 2002b][Hauser, 2002], na resolução do problema  $S_N$  bidimensional nodal em um retângulo. Considerando essa aproximação, podemos escrever o vetor  $\Psi(x, 0)$  como:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x, 0) \\ \psi_2(x, 0) \\ \psi_2(x, 0) \\ \psi_1(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_2 x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Então essa integral pode ser calculada como:

$$\int_0^x \begin{pmatrix} \bar{b}_{ij}(x - \xi, p) \frac{\eta_j}{\mu_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\xi, 0) \\ \psi_2(\xi, 0) \\ \psi_2(\xi, 0) \\ \psi_1(\xi, 0) \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} \bar{f}_{ij}(x, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

onde as entradas  $\bar{f}_{ij}(x, p)$  da matriz  $\mathbf{F}(x, p)$  são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ij}(x, p) &= \int_0^x \bar{b}_{ij}(x - \xi, p) e^{\lambda_j \xi} \frac{\eta_j}{\mu_j} d\xi \\ &= \frac{\eta_j}{\mu_j} \sum_{k=1}^4 \chi_{ik}(p) z_{kj}(p) \int_0^x e^{d_k(p)(x-\xi)} e^{\lambda_j \xi} d\xi \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $d(p)$  são os elementos da matriz dos autovalores,  $\chi(p)$  são os elementos da matriz  $\mathbf{X}(p)$  dos autovetores de  $\mathbf{A}$  e  $z(p)$  são os elementos da matriz  $\mathbf{X}^{-1}(p)$ . Então, usando essa notação a equação (3.19) pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1(x, p) \\ \bar{\Psi}_2(x, p) \\ \bar{\Psi}_3(x, p) \\ \bar{\Psi}_4(x, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{ij}(x, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1(0, p) \\ \bar{\Psi}_1(0, p) \\ \bar{\Psi}_3(0, p) \\ \bar{\Psi}_3(0, p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f}_{ij}(x, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{h}_1(x, p) \\ \bar{h}_2(x, p) \\ \bar{h}_3(x, p) \\ \bar{h}_4(x, p) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

onde  $\bar{b}_{ij}(x, p)$ ,  $\bar{f}_{ij}(x, p)$  e  $\bar{h}_j(x, p)$ , para  $1 \leq i, j \leq 4$  são respectivamente dados pelas equações (3.14), (3.15) e (3.20). Nesse momento é possível aplicar a transformada inversa de Laplace ( $p \rightarrow y$ ), usando algoritmos numéricos de inversão, esse procedimento resulta:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(x, y) \\ \Psi_2(x, y) \\ \Psi_3(x, y) \\ \Psi_4(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ b_{ij}(x, y) \\ \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Psi_1(0, y) \\ \Psi_1(0, y) \\ \Psi_3(0, y) \\ \Psi_3(0, y) \end{pmatrix} + \quad (3.22)$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ f_{ij}(x, y) \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(x, y) \\ h_2(x, y) \\ h_3(x, y) \\ h_4(x, y) \end{pmatrix}$$

Novamente, calculando o termo convolução, podemos supor que o fluxo pode ser expresso como

$$\Psi_m(0, y) = k_m e^{-\varsigma_m y}, \text{ onde } \varsigma_m = \text{sign}(\eta_m) \sigma_a. \quad (3.23)$$

e a equação (3.22) pode finalmente ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(x, y) \\ \Psi_2(x, y) \\ \Psi_3(x, y) \\ \Psi_4(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ g_{ij}(x, y) \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_1 \\ K_3 \\ K_3 \end{pmatrix} + \quad (3.24)$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ f_{ij}(x, y) \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(x, y) \\ h_2(x, y) \\ h_3(x, y) \\ h_4(x, y) \end{pmatrix}$$

Aqui podemos observar que a transformada inversa de Laplace  $s \rightarrow x$  é realizada analiticamente, mas a transformada  $p \rightarrow y$  pode ser obtida usando um método numérico. Finalmente, para determinar as quatro constantes  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $C_1$  e  $C_2$  podemos resolver o sistema linear resultante com a aplicação das condições de contorno para  $x = a$  e  $y = b$ .

Cabe ainda salientar que o desenvolvimento feito para  $N = 2$  é geral se pensarmos que o vetor  $\Psi$  de  $M$  elementos pode ser decomposto em quatro subvetores de ordem  $M/4$ , conforme equação (3.4) e dessa forma a única mudança será na reflexão em  $x = a$  e  $y = b$ . Lembrando que numeramos as direções discretas da seguinte forma

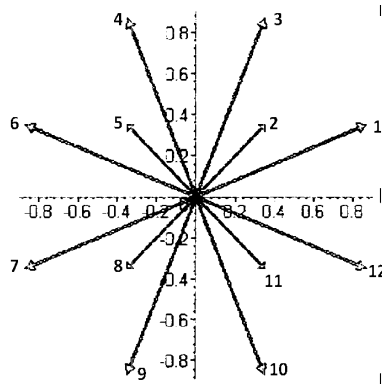


Figura 3.7 – Direções Discretas usadas no método  $DLTS_N$

A reflexão em  $x = 0$  pode ser escrita como:

$$\Psi_1(x) = \mathcal{T}\Psi_2 \quad (3.25)$$

e

$$\Psi_4(x) = \mathcal{T}\Psi_3 \quad (3.26)$$

onde a matriz  $\mathcal{T}$  é dada por:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Além disso quando temos reflexão em  $y = 0$ , temos:

$$\Psi_2(x) = \mathcal{T}\Psi_3 \quad (3.28)$$

e

$$\Psi_1(x) = \mathcal{T}\Psi_4 \quad (3.29)$$

### 3.3 Solução $DLTS_N$ para o Problema de Multirregião

Nesta seção vamos resolver o problema de multirregião. Para tal, vamos considerar quatro regiões, em cada região consideramos a equação

$$\mathcal{M}^i \frac{\partial}{\partial x} \Psi^i(x, y) + \mathcal{N}^i \frac{\partial}{\partial y} \Psi^i(x, y) - \mathbf{A}^i \Psi^i(x, y) = \mathbf{Q}^i(x, y) \quad (3.30)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Para um melhor entendimento da aplicação do método  $TLTS_N$  para multirregiões, apresentamos um problema para  $N = 4$ , o qual é representado através da figura abaixo.

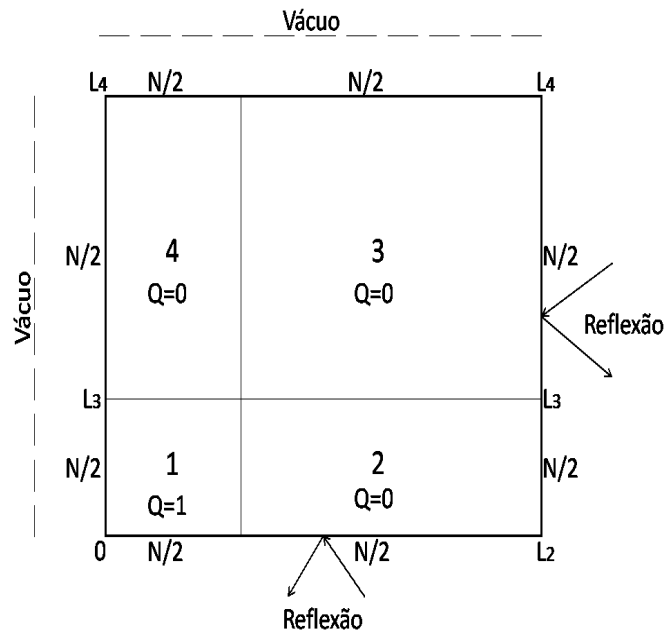


Figura 3.8 – Problema Bidimensional pelo método  $DLTS_N$  Multirregião

Vamos deter nossa atenção nesse momento na análise das condições de contorno e fronteira, para tal faremos uma análise entre as regiões (1-2), (3-4), (1-4) e (2-3). É importante salientar que a forma de resolução desse problema permanece exatamente a mesma. No entanto, temos agora um sistema com mais condições de contorno e fronteira, o que irá, apenas, aumentar a dimensão do sistema a ser resolvido.

- Região 1 e 2: Observe a figura abaixo:

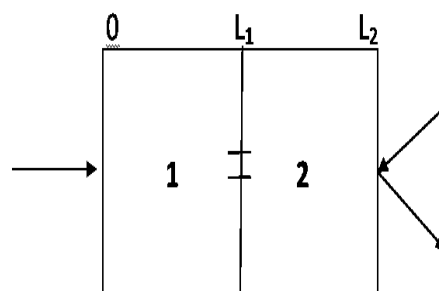


Figura 3.9 – Análise das regiões 1 e 2

Temos que

$$\Psi^1(L_1, y) = \Psi^2(0, y)$$

resultando em  $N$  equações.

- Região 3 e 4: Observe a figura abaixo:

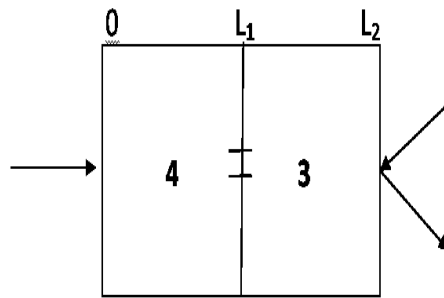


Figura 3.10 – Análise das regiões 3 e 4

Temos que

$$\Psi^3(0, y) = \Psi^4(L_1, y)$$

resultando em  $N$  equações.

- Região 1 e 4: Observe a figura abaixo:

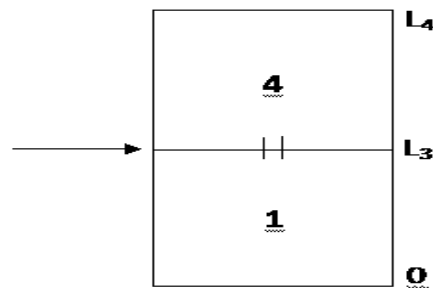


Figura 3.11 – Análise das regiões 1 e 4

Temos que

$$\Psi^1(x, L_3) = \Psi^4(x, 0)$$

resultando em  $N$  equações.

- Região 2 e 3: Observe a figura abaixo:



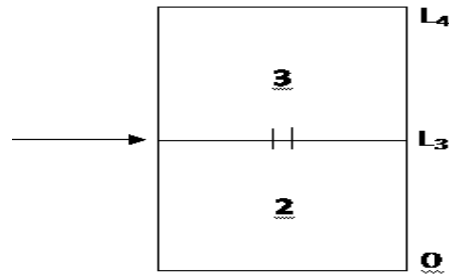


Figura 3.12 – Análise das regiões 2 e 3

Temos que

$$\Psi^2(x, L_3) = \Psi^3(x, 0)$$

resultando em  $N$  equações.

Dessa forma, montamos um sistema de dimensão  $8M$  para encontrarmos as constantes  $K^i$  e  $C^i$  associados à solução do problema dado pela equação (3.30). É importante salientar que a diferença significativa em resolver um problema com uma única região e um problema multirregião está apenas na dimensão do sistema obtido, ou seja, as etapas do método em si não sofrem nenhuma alteração.

## CAPÍTULO 4

### Resultados Numéricos

Neste capítulo, apresentamos os resultados numéricos obtidos pelo métodos propostos e apresentamos a comparação com os resultados da literatura com o objetivo de validação dos programas computacionais associados às soluções analíticas apresentadas.

#### 4.1 Resultados Numéricos para o Método TLTS<sub>N</sub>

Dividimos essa seção em três subseções. Na primeira apresentamos uma comparação numérica dos métodos TLTS<sub>N</sub> e SP<sub>M</sub>-LTS<sub>N</sub>, que é uma combinação dos métodos espectral e LTS<sub>N</sub>. Na segunda subseção apresentamos resultados numéricos do método TLTS<sub>N</sub> para o problema transiente, e mostramos que, quando o tempo cresce nossos resultados convergem para a solução LTS<sub>N</sub> do problema estacionário. Finalmente na terceira subseção apresentamos os resultados numéricos do método TLTS<sub>N</sub> para meio semi-infinito.

##### 4.1.1 Problema 1

Primeiramente vamos resolver o problema apresentado por [Oliveira, 1993] com o objetivo de comparar o método proposto com o método SP<sub>M</sub>-LTS<sub>N</sub>. Para isso vamos considerar uma placa homogênea com espessura  $L = 50cm$ , condições de contorno reflexiva e vácuo em  $x = 0$  e  $x = L$ , respectivamente;  $\sigma_s = 0.999cm^{-1}$ ;  $\sigma_t = 1.0cm^{-1}$  e  $v = 10^{-6}cm/s$ . A condição inicial  $\phi(x, \mu)$  é dada como solução do seguinte problema estacionário

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, \mu) + \phi(x, \mu) = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \phi(x, \mu') d\mu' + Q(x) \quad (4.1)$$

com

$$Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{se } x > 10 \end{cases} \quad (4.2)$$

e sujeita às seguintes condições de contorno

$$\phi(0, \mu) = \phi(0, -\mu), \quad \mu > 0 \quad (4.3)$$

e

$$\phi(L, \mu) = 0, \quad \mu < 0 \quad (4.4)$$

O problema estacionário foi resolvido considerando duas semi-placas, sendo a primeira com termo fonte constante e unitário e a segunda semi-placa sem termo fonte. Também aplicamos a idéia descrita nesse trabalho para resolver o problema estacionário através do método  $LTS_N$ .

Na tabela (4.1), apresentamos os resultados do método  $TLTS_N$  ( $N = 2, 4, 8, 10$ ) para taxa de absorção de nêutrons dada por

$$R_a(vt) = (\sigma_t - \sigma_s) \int_{45}^{50} \left( \int_{-1}^1 \Psi(vt, x, \mu') d\mu' \right) dx \quad (4.5)$$

com  $x$  variando de 45 a 50 cm, para um tempo de  $t = 10^{-5}$  s e comparamos com os resultados obtidos por Oliveira et al. [Oliveira et al., 2002b] [Oliveira et al., 2002a]. Nessa tabela, também analisamos duas formas de inversão numérica da transformada de Laplace, a saber, Gaver com o acelerador Wynn-Rho e a Quadratura Gaussiana. É importante salientar que nesse trabalho adotamos o valor  $M = 8$  para a integral de linha, como sugere a literatura, para a inversão numérica da transformada de Laplace, segundo a Quadratura Gaussiana. Pela análise da tabela (4.1), podemos observar a boa concordância dos resultados apresentados pelo método  $TLTS_N$  em comparação com o método  $SP_M-LTS_N$  para o problema estudado. No entanto, ressaltamos que o método  $SP_M-LTS_N$  apresenta pontos de discrepância com o método  $TLTS_N$ , como por exemplo a sensível dependência do  $SP_M-LTS_N$  em relação ao número de termos da expansão em série ( $M$ ). Dessa forma, afirmamos que o método  $TLTS_N$  é uma aproximação mais robusta computacionalmente para resolver problema de transporte dependente do tempo em uma placa, especialmente para problemas que requerem altos valores de  $N$ , porque à medida que o valor de  $N$  cresce, o valor de  $M$  também cresce e o método  $SP_M-LTS_N$  demanda um aumento de recursividade para resolver o problema steady-state, o que não ocorre com o método  $TLTS_N$ . Também destacamos que a convergência do método  $TLTS_N$  é conhecida [Pazos et al., 2002b][Vilhena e Barichello, 1999], isso significa que à medida que o  $N$  cresce, a solução do método  $TLTS_N$  se aproxima da solução dos problemas de transporte estacionários. É importante justificar aqui o motivo pelo qual resolvemos esse problema com duas inversões numéricas, a saber Gaver Wynn-Rho e Quadratura Gaussiana: isso se deu pela necessidade de obter uma inversão que convirja tanto para valores pequenos do tempo ( $t$ ) quanto para valores grandes. Nos problemas de transporte dependente do tempo resolvidos com o método

TLTS $_N$  e as inversões numéricas de Gaver Wynn-Rho e Quadratura Gaussiana, o método de Gaver Wynn-Rho apresentou melhor comportamento.

$N$	$\sigma_s$	GWR	GQ	SP $_{13}$ -LTS $_N$
2	0.999	1.22699 E-01	1.22676 E-01	1.22699 E-01
	0.9	8.01403 E-09	8.01400 E-09	8.01404 E-09
	0.8	2.19242 E-12	2.19206 E-12	2.19249 E-12
	0.5	2.09249 E-19	2.09211 E-19	2.09249 E-19
4	0.999	1.26076 E-01	1.26018 E-01	1.26077 E-01
	0.9	1.64448 E-08	1.64409 E-08	1.64448 E-08
	0.8	1.74679 E-11	1.74614 E-11	1.74679 E-11
	0.5	5.74653 E-16	5.74605 E-16	5.74652 E-16
8	0.999	1.26573 E-01	1.26535 E-01	1.26574 E-01
	0.9	1.65056 E-08	1.65019 E-08	1.65056 E-08
	0.8	1.81417 E-11	1.81409 E-11	1.81417 E-11
	0.5	1.20701 E-15	1.20697 E-15	1.20701 E-15
10	0.999	1.26574 E-01	1.26538 E-01	1.26574 E-01
	0.9	1.65056 E-08	1.65019 E-08	1.65056 E-08
	0.8	1.81417 E-11	1.81409 E-11	1.81417 E-11
	0.5	1.20701 E-15	1.20697 E-15	1.20701 E-15

Tabela 4.1 – Comparação do método TLTS $_N$ , com as inversões numéricas GWR e QG com o método SP $_M$ -LTS $_N$ , para  $45 \leq x \leq 50$

#### 4.1.2 Problema 2

Neste problema objetivamos analisar o comportamento do método TLTS $_N$  quando  $t$  cresce. Para isso resolvemos o problema de transporte dependente do tempo pelo método TLTS $_N$  para valores de  $t = 10^{-6}, 10^{-2}, 1, 10$  e  $100$ , e resolvemos o problema de transporte estacionário pelo método LTS $_N$ . Mostraremos que quando o  $t$  cresce, a solução da aproximação  $S_N$  dependente do tempo obtida pelo método TLTS $_N$  se aproxima da solução do problema  $S_N$  estacionário obtida pelo método LTS $_N$ . Vamos considerar o seguinte problema de transporte isotrópico unidimensional

dependente do tempo em uma placa

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x}\psi(t, x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu')\psi(t, x, \mu')d\mu' \quad (4.6)$$

com condição inicial

$$\psi(0, x, \mu) = 1 \quad (4.7)$$

e condições de contorno

$$\psi(t, 0, \mu) = 1 \quad t > 0, \mu > 0 \quad (4.8)$$

e

$$\psi(t, L, \mu) = 0 \quad t > 0, \mu < 0 \quad (4.9)$$

Os dados foram gerados para  $x = 0; 5$  e  $10$  para  $N = 60$ . Resolvemos esse problema de transporte usando duas formas de inversões numéricas para a transformada de Laplace: Gaver Wynn-Rho (GWR) e Gaver-Stehfest (GS).

	GS			GWR		
	$\sigma_s = 0.9$					
$t$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$10^{-6}$	1.95145	1.76242	7.77121 E-1	1.96249	1.86374	7.77621 E-1
$10^{-2}$	1.51948	9.60847 E-2	3.20341 E-3	1.55374	9.94772 E-2	3.28525 E-3
1	1.51948	9.60842 E-2	3.20337 E-3	1.52038	9.73881 E-2	3.26047 E-3
10	1.51948	9.60838 E-2	3.20336 E-3	1.5199	9.67232 E-2	3.21093 E-3
100	1.51948	9.60847 E-2	3.20340 E-3	—	—	—
LTS <sub>60</sub>	1.51948	9.60846 E-2	3.20339 E-3	1.51948	9.60846 E-2	3.20339 E-3
	$\sigma_s = 0.1$					
$t$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$	$x = 0$	$x = 5$	$x = 10$
$10^{-6}$	1.44928	7.66723 E-1	4.33150 E-1	1.46039	7.74371 E-1	4.36576 E-1
$10^{-2}$	1.02633	1.24879 E-3	4.96724 E-6	1.08356	1.28813 E-3	4.97356 E-6
1	1.02633	1.24878 E-3	4.96712 E-6	1.04577	1.26385 E-3	4.96984 E-6
10	1.02633	1.24878 E-3	4.96715 E-6	1.02936	1.24933 E-3	4.96853 E-6
100	1.02633	1.24879 E-3	4.96726 E-6	—	—	—
LTS <sub>60</sub>	1.02633	1.24878 E-3	4.96718 E-6	1.02633	1.24878 E-3	4.96718 E-6

Tabela 4.2 – Fluxo Escalar para  $x = 0, 5, 10$ , com  $t = 10^{-6}, 10^{-2}, 1, 10, 100$ s,

através do método TLTS<sub>60</sub> usando as inversões numéricas de Gaver

Wynn-Rho e Gaver Stehfest

Podemos observar, pela tabela (4.2), que conforme o  $t$  cresce a solução do problema  $S_N$  dependente do tempo obtida através do método  $TLTS_N$  se aproxima da solução do problema de transporte estacionário obtida pelo método  $LTS_N$ . Analisando a tabela (4.2), podemos concluir que a inversão dada pelo algoritmo de Gaver Stehfest é mais robusta do que a do algoritmo Gaver Wynn-Rho quando se trata de valores elevados de  $t$ . Os testes foram realizados até  $t = 100$ , sendo que a inversão pelo algoritmo de Gaver Wynn-Rho a partir de  $t = 100$  não apresentou convergência. Observamos que para os valores iniciais utilizados em  $t$ , tanto o algoritmo de Gaver Wynn-Rho quanto o algoritmo de Gaver Stehfest apresentam comportamento análogo. No entanto, conforme aumentamos o tempo, foi observado que o algoritmo de Gaver Stehfest apresentou maior estabilidade dos resultados, enquanto o Gaver Wynn-Rho começou a apresentar erros de arredondamento devido à sua formulação.

### 4.1.3 Problema 3

Neste problema objetivamos analisar o método  $TLTS_N$  em uma placa finita quando  $L$  cresce e comparar com a formulação para domínio semi-infinito. Também vamos mostrar que, conforme o tempo  $t$  cresce, a solução do problema  $S_N$  dependente do tempo obtida pelo método  $TLTS_N$  se aproxima da solução obtida para o problema estacionário através do método  $LTS_N$ . Para isso, vamos considerar o seguinte problema de transporte isotrópico unidimensional dependente do tempo em uma placa

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x}\psi(t, x, \mu) + \psi(t, x, \mu) = \frac{0.9}{2} \int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu' \quad (4.10)$$

com condição inicial

$$\psi(0, x, \mu) = 1 \quad (4.11)$$

e condições de contorno

$$\psi(t, 0, \mu) = 1 \quad t > 0, \mu > 0 \quad (4.12)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(t, x, \mu) = 0 \quad (4.13)$$

Este problema de transporte foi resolvido utilizando a inversão numérica de Gaver-Stehfest.

	$\sigma_s = 0.9$			$\sigma_s = 0.1$		
	$t = 10^{-2}s$					
$L$	$x = 0$	$x = 10$	$x = 30$	$x = 0$	$x = 10$	$x = 30$
40	7.84243 E-1	5.19122 E-2	3.94751 E-3	6.25481 E-1	8.29334 E-2	2.67458 E-4
50	6.15986 E-1	4.19325 E-2	1.76491 E-3	5.92397 E-1	6.16862 E-2	1.15856 E-4
60	5.15742 E-1	3.04988 E-2	9.32641 E-5	5.16348 E-1	5.32641 E-2	8.94355 E-5
70	5.15742 E-1	3.04988 E-2	9.32641 E-5	5.16348 E-1	4.76524 E-2	8.94355 E-5
UDTLTS <sub>60</sub>	5.15742 E-1	3.04988 E-2	9.32641 E-5	5.16348 E-1	4.76524 E-2	8.94355 E-5
	$t = 1s$					
$L$	$x = 0$	$x = 10$	$x = 30$	$x = 0$	$x = 10$	$x = 30$
40	5.88491E-1	3.58642 E-2	4.66821 E-4	4.12186 E-1	3.26898 E-3	2.98766 E-5
50	4.13272 E-1	2.01561 E-2	3.04755 E-4	3.64174 E-1	2.84261 E-3	1.74571 E-6
60	3.09156 E-1	4.23653 E-3	6.25989 E-5	3.00467 E-1	4.11049 E-5	8.19181 E-7
70	3.09156 E-1	4.23653 E-3	6.25989 E-5	3.00467 E-1	4.11049 E-5	8.19181 E-7
UDTLTS <sub>60</sub>	3.09156 E-1	4.23653 E-3	6.25989 E-5	3.00467 E-1	4.11049 E-5	8.19181 E-7
	$t = 40s$					
$L$	$x = 0$	$x = 10$	$x = 30$	$x = 0$	$x = 10$	$x = 30$
40	3.98465 E-1	2.68712 E-3	9.18421 E-5	3.15325 E-1	4.14527 E-3	7.43521 E-5
50	3.12684 E-1	1.00624 E-3	2.45772 E-6	2.89711 E-1	1.02658 E-3	1.11728 E-6
60	2.04653 E-1	6.19042 E-5	3.06485 E-8	2.00386 E-1	5.13156 E-5	2.64287 E-8
70	2.04653 E-1	6.19042 E-5	3.06485 E-8	2.00386 E-1	5.13156 E-5	2.64287 E-8
UDTLTS <sub>60</sub>	2.04653 E-1	6.19042 E-5	3.06485 E-8	2.00386 E-1	5.13156 E-5	2.64287 E-8

Tabela 4.3 – Comportamento assintótico do fluxo escalar pelo método TLTS<sub>N</sub> obtido através do incremento da placa de 40 para 70 mfp para um tempo variando de  $10^{-2}s$  até 40s

	$\sigma_s = 0.9$		
$t$	$x = 0$	$x = 10$	$x = 30$
$10^{-5}$	7.25739 E-1	6.12798 E-2	3.65429 E-4
$10^{-2}$	5.15742 E-1	3.04988 E-2	9.32641 E-5
10	3.98431 E-1	8.97426 E-3	1.16742 E-6
40	2.04655 E-1	6.19046 E-5	3.04686 E-8
LTS <sub>N</sub>	2.04655 E-1	6.19046 E-5	3.04686 E-8
	$\sigma_s = 0.1$		
$t$	$x = 0$	$x = 10$	$x = 30$
$10^{-5}$	6.94375 E-1	5.20579 E-2	3.32674 E-4
$10^{-2}$	5.16348 E-1	4.76524 E-2	8.94355 E-5
10	3.75891 E-1	8.99748 E-3	3.16114 E-6
40	2.00366 E-1	5.13156 E-5	2.64287 E-8
LTS <sub>N</sub>	2.00366 E-1	5.13156 E-5	2.64287 E-8

Tabela 4.4 – Comportamento assintótico da solução através do método TLTS<sub>60</sub> para  $t = 10^{-5}$  até 40s e do método LTS<sub>60</sub>

Analisando as tabelas (4.3) e (4.4), podemos observar que para  $L = 70$ , a solução do problema dependente do tempo em domínio finito coincide com a solução do problema dependente do tempo para domínio semi-infinito em  $t = 10^{-2}$ s, o que comprova que o método TLTS<sub>N</sub> apresenta bons resultados tanto para domínio finito quanto para domínio semi-infinito. Também podemos notar que a solução do problema dependente do tempo obtida pelo método TLTS<sub>N</sub> se aproxima da solução do problema estacionário obtida pelo método LTS<sub>N</sub>. Observe que para  $t = 40$ s ambos os problemas apresentam a mesma solução, o que comprova a eficiência do método TLTS<sub>N</sub>.

## 4.2 Resultados Numéricos para o Método DLTS<sub>N</sub>

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos obtidos pelo método DLTS<sub>N</sub> e comparamos com os resultados da literatura. Com este fim, na sequência apresentamos e comparamos os resultados da literatura, bem como o comportamento assintótico do fluxo angular para grandes valores da variável  $y$ .



### 4.2.1 Resultados

Na sequência, apresentamos na tabela (4.5) uma comparação numérica dos resultados obtidos pela método  $DLTS_N$  para o fluxo angular com o método de TWOTRAN-II, assumindo  $\Delta x = \Delta y = 0.04$  [Loyalka, 1975]. Para tal, consideramos o problema  $S_N$  de transporte de nêutrons em um retângulo homogêneo ( $x = y = 1.0$  mfp), com os seguintes parâmetros:  $\sigma_t = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\sigma_s$  igual a 1.0; 0.5; 0.1;  $0.05 \text{ cm}^{-1}$ , considerando uma fonte unitária no canto inferior esquerdo do retângulo, ou seja  $a_1 = b_1 = 0.52$  mfp, conforme a figura (4.1).

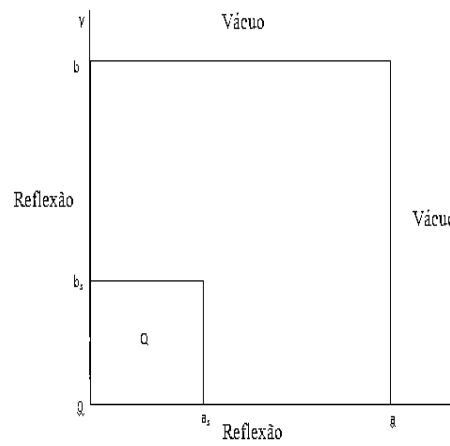


Figura 4.1 – Domínio da solução: retângulo com uma fonte retangular unitária no canto inferior esquerdo

$\sigma_s$	$N$	Int. Transport ( $N + 1$ )	TWOTRAN-II( $N$ )	DLTS $_N$
1.0	4	0.706185	0.679373	0.680451
	8	0.698407	0.668831	0.671583
	16	0.687407	0.668652	0.668984
0.5	4	0.359604	0.337412	0.345820
	8	0.358422	0.337707	0.344893
	16	0.355885	0.339794	0.342630
0.1	4	0.258802	0.239483	0.247332
	8	0.259150	0.241676	0.245891
	16	0.258906	0.244032	0.244377
0.05	4	0.250097	0.231102	0.245862
	8	0.250569	0.233421	0.243970
	16	0.250529	0.235787	0.242216

Tabela 4.5 – Fluxo escalar para  $x = y = 0.9$  mfp

$\sigma_s$	$N$	Int. Transport ( $N + 1$ )	TWOTRAN-II( $N$ )	DLTS $_N$
1.0	4	0.362696	0.370770	0.368941
	8	0.350502	0.347855	0.350117
	16	0.344820	0.340487	0.345266
0.5	4	0.149801	0.157320	0.152374
	8	0.139050	0.139581	0.139869
	16	0.137048	0.133426	0.135218
0.1	4	0.093601	0.100591	0.095472
	8	0.083932	0.085131	0.084521
	16	0.082774	0.078914	0.082994
0.05	4	0.088990	0.095914	0.089453
	8	0.079448	0.080662	0.799012
	16	0.078362	0.074448	0.075317

Tabela 4.6 – Fluxo escalar em  $x = y = 0.7$  mfp

$\sigma_s$	$N$	Int. Transport ( $N + 1$ )	TWOTRAN-II( $N$ )	DLTS $_N$
1.0	4	0.138267	0.122893	0.129751
	8	0.135207	0.123591	0.126423
	16	0.133017	0.122065	0.123710
0.5	4	0.054250	0.045536	0.0526641
	8	0.053812	0.048085	0.0520579
	16	0.053413	0.052366	0.0518156
0.1	4	0.032577	0.025670	0.0317462
	8	0.032669	0.028969	0.0315683
	16	0.032622	0.032432	0.0314870
0.05	4	0.030823	0.023777	0.0294786
	8	0.030952	0.027299	0.0292107
	16	0.030931	0.030798	0.0290565

Tabela 4.7 – Fluxo escalar em  $x = y = 0.5$  mfp

Analisando os resultados das tabelas (4.5),(4.6) e (4.7), sabendo que a solução do método integral tem dependência contínua nas variáveis angulares e que os métodos DLTS $_N$  e TWOTRAN-II apresentam apenas uma dependência discreta, foram realizadas simulações para obter o fluxo escalar. Conseqüentemente de posse dos resultados, podemos afirmar que a hipótese da função exponencial para a existência do fluxo angular em uma das condições de fronteira foram adequadas.

Os resultados obtidos pelo método DLTS $_N$  também foram comparados com os resultados apresentados por Barichello et al. [Barichello e Filho, 2009], onde é apresentada uma solução aproximada para a equação integral derivada da aplicação nodal em problemas de transporte bidimensional. Para tal, vamos considerar um retângulo com dimensão  $20 \times 20$ cm, com termo fonte unitário em uma região retangular no canto inferior esquerdo de dimensão  $a = b = 0.5$  cm. Na tabela (4.8) também é possível observar a boa concordância entre as soluções obtidas pelo método DLTS $_N$  e a solução LTS $_N$  nodal.

$\sigma_s$	$N$	$DLTS_N$	$S_N$ Nodal
0.5	4	0.345820	0.335
	8	0.344893	0.338
	16	0.342630	0.341
0.1	4	0.247332	0.231
	8	0.245891	0.233
	16	0.244377	0.235
0.05	4	0.245862	0.222
	8	0.243970	0.224
	16	0.242216	0.226

Tabela 4.8 – Comparação do método  $DLTS_N$  com o método  $S_N$  nodal

## CAPÍTULO 5

### Conclusão

Concluimos este trabalho apresentando uma análise dos métodos propostos para solução dos problemas  $S_N$  de transporte de nêutrons, tanto para o problema dependente do tempo unidimensional bem como o estacionário bidimensional considerados:

1. Em relação à solução do problema  $S_N$  de transporte unidimensional dependente do tempo em geometria cartesiana, tendo em vista os bons resultados encontrados no capítulo (4), acreditamos que a contribuição desse trabalho consiste na construção de uma solução analítica válida tanto para problemas em domínios limitado e ilimitado, tendo como característica principal a troca da condição de contorno na fronteira  $x = L$ , no domínio limitado e pela condição de limitação do fluxo angular no infinito. Pelo nosso conhecimento, esse tipo de solução não existe na literatura. Para realçar sua relevância devemos ressaltar seu caráter analítico, no sentido de que nenhuma aproximação é feita ao longo da derivação da solução. Além disso, cumpre mencionar que foi mostrada a convergência numérica dos resultados, devendo acrescentar que a solução proposta converge para a solução exata quando  $N$  cresce para o infinito. Em adição, ainda temos que mencionar que a solução do problema de transporte em domínio ilimitado para  $-\infty < x < \infty$  pode ser encontrada através do lema de Placzec. De fato este lema estabelece que a solução do problema de transporte para  $0 < x < \infty$  está relacionado com a solução para  $-\infty < x < \infty$ .
2. Em relação ao problema  $S_N$  de transporte bidimensional homogêneo estacionário, nós atingimos nosso objetivo, pois para nosso conhecimento, essa é uma nova solução para esse tipo de problema para o fluxo angular de nêutrons. O termo analítico significa que nenhuma aproximação foi realizada na obtenção da solução do método  $DLTS_N$ , exceto pelo fato de que assumimos conhecido o fluxo angular que sai da fronteira do domínio. Essa hipótese decorre do fato de que esse tipo de problema é um problema de condição de contorno. De fato, a aplicação da transformada de Laplace para esse tipo de problema introduz função

desconhecida adicional na fronteira. Nossa motivação para a escolha de uma função exponencial decorre dos bons resultados obtidos por Hauser et al. na solução do problema  $LTS_N$  nodal multidimensional [Hauser, 2010]. Além dos bons resultados obtidos e da elegância matemática da solução, acreditamos que a solução proposta é uma técnica promissora para resolver a equação  $S_N$  de transporte de nêutrons em um retângulo. Reforçamos este argumento recordando que esta solução pode ser facilmente generalizada para este tipo de problema, considerando o modelo de multigrupo de energia, espalhamento anisotrópico, domínio heterogêneo e problemas de grandes espessuras. A respeito da hipótese assumida para o fluxo angular na fronteira do domínio, esperamos melhorar os resultados encontrados para o fluxo angular usando o resultado encontrado para o fluxo que sai na fronteira do retângulo pela metodologia proposta. Esse procedimento produz um esquema iterativo que nos permite verificar a suposição considerada para o fluxo angular na fronteira do domínio e ao mesmo tempo obter resultados exatos, assumindo a convergência do esquema iterativo. Nesse trabalho ainda deixamos uma questão para ser resolvida, no que se refere à uma prova matemática da convergência da solução  $DLTS_N$  proposta juntamente com o esquema iterativo discutido para o fluxo angular na fronteira do domínio. Dessa forma, iremos focar nossa atenção no sentido de resolver essas questões ainda pendentes. Assim, com esse trabalho esperamos ter dado o primeiro passo para a construção da solução do problema de valor de contorno para o fluxo angular em um retângulo em regime estacionário.

Como trabalhos futuros, sugerimos a aplicação da metodologia proposta para o problema unidimensional dependente do tempo apresentado na solução de problemas em cinética de reatores. Com relação ao problema  $S_N$  de valor de contorno estudado, sugerimos a generalização dessa solução para a resolução de problemas de física de reatores realísticos, que consideram problemas de multigrupo, espalhamento anisotrópico e multirregião.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barichello, L.B., C. L. and Filho, J., 2009. "An Analytical Discrete ordinates solution for two dimensional problems based on nodal schemes", **International Nuclear Atlantic Conference - INAC**.

Barichello, L. and Vilhena, M., 1991. "A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation", **Kerntechnik**, vol. 56, pp. 334.

Cohen, A., 2007. "Numerical Methods for Laplace Transform Inversion", **London**.

Duderstadt, J. and Martin, W. R., 1979. "**Transport theory**". New York.

El-Wakil, S.A., D. A. and Sallah, M., 2004. "Time-dependent neutron transport in finite media using Pomraning-Eddington approximation", **Annals Nuclear Energy**, vol. 85, pp. 13–24.

El Wakil, S., Degheidy, A., and Sallah, M., 2006. "Time-dependent neutron transport in finite media using Pomraning-Eddington approximation", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 32, pp. 343–353.

Ganapol, B., 1982. "Time-dependence surface angular flux for a semi-infinite medium with specular reflection", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 80, pp. 412–415.

Ganapol, B., 1986. "Solution of the one-group time-dependent neutron-transport equation in an infinite medium by polynomial reconstruction", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 92, pp. 272–279.

Ganapol, B. and Filippone, W., 1986. "Time-dependent emergent intensity from an anisotropically-scattering semi-infinite atmosphere", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transform**, vol. 27, pp. 15–21.

Ganapol, B. and Grossman, L., 1973. "Collided flux expansion method for time-dependent neutron transport", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 52, pp. 454–460.

Ganapol, B.D., M. P. and Peddicord, K., 1977. "The generation of time-dependent neutron transport solutions in infinite media", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 42, pp. 19–26.

Gonçalez, T., Segatto, C., and Vilhena, M., 2007, "A Closed Form Solution for the One-Group Time-Dependent Transport Equation in a Slab by the  $LTS_N$  Method", In *Anais do XV ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, Santos, SP, Brazil.

Gonçalves, G. A., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T., 2000. "The  $LTS_N$  Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 66, pp. 271–276.

Hassanzadeh, H. and Pooladi-Daarvish, M., 2007. "Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications", **Applied Mathematics and Computation**, vol. 189, pp. 1966–1981.

Hauser, E., Pazos, R., Barros, R., and Vilhena, M., 2003, "Solution and Study of Nodal Neutron Transport Equation Applying The  $LTS_N$ -DiagExp Method", In *Annals of 18th International Conference on Transport Theory*, pages 303–307, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

Hauser, E., Vilhena, M., and Barros, R., 2002a. "Análise Espectral da Matriz  $LTS_N$  para o Problema de Ordenadas Discretas Bidimensional Cartesiano com Fonte Fixa e Espalhamento Isotrópico", **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, vol. 3, pp. 131–140.

Hauser, E., Vilhena, M., and Barros, R., 2002b. "Análise Espectral da Matriz  $LTS_N$  para o Problema de Ordenadas Discretas Bidimensional Cartesiano com Fonte Fixa e Espalhamento Isotrópico", **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, vol. 3, pp. 131–140.

Hauser, E. B., 2002. "Estudo de Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Bidimensional pelo Método  $LTS_N$  para Elevadas Ordens de Quadraturas Angulares:  $LTS_N$  2D-Diag e,  $LTS_N$  2D-DiagExp.", PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica-PROMEC Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Hauser, E.B., V. M. e. B. R., 2010. "A Laplace transform exponential method for monoenergetic three-dimensional fixed source discrete ordinates problems in Cartesian geometry", **International Journal of Nuclear Energy**, vol. 5, pp. 80–89.

Henderson, D. and Maynard, C., 1989. "Time-dependent single-collision kernels for integral transport-theory", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 102, pp. 172–182.



Heydarian, M., Mullineux, N., and Reed, J., 1981. "Solution of parabolic partial-differential equations", **Applied Mathematical Modeling**, vol. 5, pp. 448–449.

Keller, P. and Lee, J., 1998. "A time-dependent collision probability method for one-dimensional space-time nuclear reactor kinetics", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 129, pp. 124–148.

Lewis, E. and Miller, W., 1984. "**Computacional methods of neutron transport**". John Wiley & Sons, Inc., New York.

Loyalka, S.K. e Tsai, R., 1975. "A Numerical Method for Solving Integral Equations of Neutron Transport-II", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 58, pp. 193–202.

Marona, D., Segatto, C., and Vilhena, M., 2008, "**On The  $LTS_N$  Solution of The Transport Equation in a Slab for  $c = 1$** ", In *Anais do XV ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, Santos, SP, Brazil.

Oliveira, J., 1993. "**Formulação  $LTS_N$  para problema de ordenada discreta com anisotropia.**", Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Oliveira, J., Cardona, A., and Vilhena, M., 2002a. "Solution of The One-Dimension Time-Dependent Discrete Ordinates Problem in a Slab by The Spectral and  $LTS_N$  Methods", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 29, pp. 13–20.

Oliveira, J., Cardona, A., Vilhena, M., and Barros, R., 2002b. "A Semi-Analytical Numerical Method for Time-Dependent Radiative Transfer Problems in a Slab Geometry with Coherent Isotropic Scattering", **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 73, pp. 55–62.

Olson, K. and Herderson, D., 2004. "Numerical Benchmark solutions for time-dependent neutral particle transport in one-dimensional homogeneous media using integral transport", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 31, pp. 1495–1537.

Pazos, R. and Vilhena, M., 1999a. "Convergence of The  $LTS_N$  Method: Approach of  $C_0$  Semi-Groups", **Progress in nuclear energy**, vol. 30, pp. 77–86.

Pazos, R. P., Vilhena, M., and Hauser, E., 2002a, "**Solution and Study of Two-Dimensional Nodal Neutron Transport Equation**", In *10th International Conference on Nuclear Engineering-Proceedings of ICONE 10*.

Pazos, R. P., Vilhena, M., and Hauser, E., 2002b, "**Solution and Study of Two-Dimensional Nodal Neutron Transport Equation**", In *10th International Conference on Nuclear Engineering-Proceedings of ICONE 10*.

Pazos, R. P. and Vilhena, M. T. M. B., 1999b. "Convergence in Transport Theory", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 30, pp. 79–92.

Piessens, R., 1973. "Gaussian Quadrature Formulas for Bromwich's Integral[D1]", **Communications of the ACM**, vol. 16(8), pp. 486–487.

Segatto, C., Vilhena, M., and Barros, R., 2010a. "A Laplace transform method for energy multigroup hybrid discrete ordinates slab lattice calculations", **II Nuevo Cimento**, vol. 33, pp. 231–238.

Segatto, C., Vilhena, M., and Bodmann, B., 2010b. "A solution for the non-linear  $S_N$  radiative conductive problem in a grey plane-parallel participating medium", **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 49, pp. 1493–1499.

Segatto, C., Vilhena, M., and Gomes, M., 1999. "The One-Dimensional  $LTS_N$  Solution in a Slab With High Degree of Quadrature.", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 26, pp. 925–934.

Segatto, C., Vilhena, M., and Gonzalez, T., 2008. "An Analytical Integral Formulation for Time-Dependent  $S_N$  Transport Equation in a Slab by Double Laplace Transform Technique", **Kerntechnik**, vol. 73, pp. 176–178.

Segatto, C., Vilhena, M., and Gonzalez, T., 2010c. "An Analytical Solution for the one-dimensional Time-Dependent  $S_N$  Transport Equation for bounded and unbounded domains in cartesian geometry", **Kerntechnik**, vol. 75, pp. 53–57.

Simch, M.R.R.; Segatto, C. and Vilhena, M., 2006. "An analytical solution for the  $S_N$  radiative transfer equation with polarization in a slab by the  $LTS_N$  method", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 97, pp. 424–435.

Stroud, A. and Secrest, D., 1966. "**Gaussian Quadrature Formulas**". Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Tureci, G., G. M. and Tezcan, C., 2007. " $H_N$  solutions of the time dependent linear neutron transport equation for a slab and a sphere", **Kerntechnik**, vol. 72, pp. 66–73.

Tureci, R. and Tureci, D., 2007. "Time-dependent albedo problem for quadratic anisotropic scattering", **Kerntechnik**, vol. 72, pp. 59–65.

Valkó, P. and Abate, J., 2004. "Comparison of sequence accelerators for the Gaver method of numerical Laplace transform inversion", **International Journal of Computational Mathematics**, vol. 48, pp. 629–636.

Vilhena, M. and Barichello, L., 1999. "A Closed-form Solution to the One-dimensional Linear and Nonlinear Radiative Transfer Problem", **Hybrid Methods In Engineering**, vol. 1, pp. 1–17.

Zabadal, J., Vilhena, M., and Barichello, L., 1995. "Solution For Three Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the  $LTS_N$  Method", **Annals of nuclear Energy**, vol. 22, pp. 131–134.

Zabadal, J., Vilhena, M., and Barichello, L., 1997. "An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem In a Convex Domain", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 31, pp. 225–228.

Zabadal, J., Vilhena, M., Segatto, C., and Pazos, R., 2002. "Determination of a Closed-Form Solution for The Multidimensional Transport Equation Using Fractional Derivative", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 29, pp. 1141–1150.