Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Co-Módulos Primos e Co-Álgebras Primas

por

Virgínia Silva Rodrigues

Porto Alegre, agosto de 2004.

Tese submetida por Virgínia Silva Rodrigues* como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Banca Examinadora:

Dr. Alveri Alves Sant'Ana

Dr. Antônio Paques

Dr. Flávio Ulhoa Coelho

Dr. Vitor de Oliveira Ferreira

Data da Defesa: 27 de agosto de 2004.

---

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

"Nada podes ensinar a um homem, podes somente ajudá-lo a descobrir as coisas dentro de si."

Galileu

Para Luiz Carlos e Arminda, meus queridos pais.

Agradecimentos

À Deus, pela minha existência.

Ao meu orientador Prof. Miguel Ferrero pela excelente orientação, caracterizada pela segurança, presença e pontualidade. Também quero agradecê-lo pela amizade, paciência e pelo inestimável incentivo durante todo o doutorado que, embora terminado, ainda conto com a sua generosidade ao propor-me mais alguns problemas possibilitando-me continuar pesquisando. Muito obrigada Miguel!

Ao meus pais Luiz Carlos e Arminda que sempre apoiaram as minhas decisões por mais que tivéssemos de estar separados mas que, acima de tudo, acreditaram em mim.

Às minhas irmãs Raquel, Bianca e Viviani tão companheiras e cúmplices minhas, prefiro referir-me a elas como minhas amigas irmãs.

Aos professores Alveri Alves Sant'Ana, Antônio Paques, Flávio Ulhoa Coelho e Vitor de Oliveira Ferreira, membros de minha banca, que disponibilizaram-se a ler meu trabalho apresentando-me críticas construtivas.

Aos amigos e colegas da Pós-graduação: Leonardo Chieppe, Marlon, Magali, Ana Coden, Flávia Branco, Luciano Bedin, Flávia Giordani, Eliane, Milene, Vanessa, Bárbara, Graciela, Cleônis, Giselle, Lineia, Ari, Dirceu Bagio, Carmen, Lisiane, Elismar, Zahn, Cícero, Claus, Rogério, Edite, Ana Paula, Leandro, Cíntia, Bárbara Pogorelski, Josué, Edson Werle, Antônio, Edilson, João Lazzarin, Pedro, Davi, Sânzara, Wagner e Susana, Marnei, Sabrina, Danesi, Joana, Rodriguinho, Rodrigão, Graciela Piacentini, Izabel Giovelli, Simone Cruz, Lisandra, Giovanni, Ivan e a todos os outros que freqüentam ou freqüentaram a "salinha" da pós.

De modo especial refiro-me ao Cleber, pela amizade, pelo carinho e pelas tantas vezes que pedi a ajuda dele com o computador e todas as vezes obtive ajuda de muito boa vontade, devo a ele também a ajuda com o PROSPER que usei em minha defesa. Obrigada Clebinho.

À Rosane, nossa querida secretária do Programa de Pós-Graduação, pelo carinho e dedicação para com todos nós alunos. Quero agradecê-la pela amizade destes 4 anos que eu sei vai durar para sempre.

Às minhas amigas Ângela, Maria e Elis, sei que torceram muito por mim. Valeu meninas!

Aos professores Jaime Ripoll, pelo excelente curso de Geometria Riemanniana, Sílvia Lopes, pela educação que sempre me dispensou, Janice Nery e Ivan Pan, pela amizade e carinho.

Aos funcionários do Instituto de Matemática, em especial ao Leonardo e ao Augusto. Também gostaria de agradecer à Rosane e à Magda responsáveis pela limpeza de nossa sala de estudos.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro, sem o qual eu não poderia ter realizado este trabalho.

Resumo

Seja C uma co-álgebra. Consideremos o anel de convolução C^*, que é a álgebra dual de C. Dado um co-módulo à direita (resp. à esquerda) sobre C é possível definir um C^*-módulo à esquerda (resp. à direita) racional.

Nesta tese, estudamos as noções correspondentes dos conceitos de primos, fortemente primos, semiprimos e fortemente semiprimos, que são encontrados na literatura em [2], [3], [4], [13] e [17], para co-módulos. A noção do conceito de primo é obtida também para co-álgebras. Mostramos que uma co-álgebra C é prima se, e somente se, C é uma co-álgebra simples.

Abstract

Let C be a coalgebra. We consider the convolution ring C^*, which is the dual algebra of C. Given a right C-comodule (resp. a left C-comodule) is possible to show that it is a left (resp. right) rational C^*-module.

In this thesis, we study the correspondent notions of prime, strongly prime, semiprime and strongly semiprime that are given in [2], [3], [4], [13] e [17] to comodules. A notion of prime is given to coalgebras too. We show that a coalgebra C is prime if and only if C is a simple coalgebra.

Índice

Introdução

Módulos primos, fortemente primos, semiprimos e fortemente semiprimos têm sido muito estudados, como podemos encontrar nas referências [2], [3], [4] e [17].

Co-módulos também foram muito considerados ultimamente. Dada uma co-álgebra C e um co-módulo à direita (resp. à esquerda) sobre C, considerando o anel de convolução C^*, que é a álgebra dual de C, definem-se os C^*-módulos à esquerda (resp. à direita) racionais.

Um resultado conhecido e que usamos neste trabalho é o isomorfismo existente entre a categoria dos C^*-módulos à esquerda racionais e a categoria dos co-módulos à direita, ([1], Th. 2.2.5). Aproveitamos para dizer que trabalhamos sempre com co-módulos à direita, quando nada for dito ao contrário.

O objetivo desta tese é estudar noções correspondentes dos conceitos de primos, fortemente primos, semiprimos e fortemente semiprimos para co-módulos, usando o isomorfismo mencionado acima. Também estudamos a noção correspondente do conceito de primo para co-álgebras.

Feito este estudo, percebemos que é possível definir uma categoria na qual os resultados anteriores feitos para co-módulos são obtidos como um caso particular. Este estudo originou o segundo capítulo da tese. No que segue, apresentamos uma noção de cada capítulo.

O Capítulo 1 apresenta os pré-requisitos necessários ao desenvolvimento dos resultados deste trabalho.

No Capítulo 2, dado um anel R, definimos uma subcategoria de R-Mod, que denotamos $\mathcal{D}_R$, onde todo $M \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D}_R)$ possui a propriedade que $R/An_R(M)$ é artiniano à esquerda. Estudamos então módulos primos, fortemente primos, semiprimos e fortemente semiprimos em $\mathcal{D}_R$.

Um dos principais resultados deste capítulo diz que um módulo $M \in \mathcal{D}_R$ é primo se, e somente se, $M = \sum_{i \in \Omega} \bigoplus M_i$, onde os $M_i^{'}s$ são R-submódulos simples de M, isomorfos dois a dois. Provamos também que um módulo em $\mathcal{D}_R$ é primo (resp. semiprimo) se, e somente se, é fortemente primo (resp. fortemente semiprimo).

Obtivemos também uma caracterização para módulos semiprimos em $\mathcal{D}_R$ em termos de módulos primos, isto é, um módulo é semiprimo se, e somente se, é uma soma direta de módulos primos.

Em ([2], Prop. 1.20) Dauns prova que para um anel R e um R-módulo M, se $\bigcap \{N : N$ é um submódulo de M primo em $M\} = (0)$ então M é semiprimo. Em ([3] e [4]), ele questiona a reciprocidade desta proposição. Mostramos neste trabalho que esta recíproca é verdadeira para qualquer módulo semiprimo em $\mathcal{D}_R$.

No Capítulo 3, definimos co-módulos primos, fortemente primos, semiprimos e fortemente semiprimos. Dizemos que um co-módulo à direita M sobre C é primo se M é primo como um C^*-módulo à esquerda racional. De maneira semelhante damos as definições de co-módulos fortemente primos, semiprimos e fortemente semiprimos.

Os resultados referentes à co-módulos primos são obtidos como um caso particular do Capítulo 2, usando além do isomorfismo entre a categoria dos C^*-módulos à esquerda racionais e a categoria dos co-módulos à direita, o fato de que $C^*/An_{C^*}(M)$ é artiniano à esquerda, para todo C^*-módulo à esquerda racional primo M. Conseqüentemente, os resultados obtidos são semelhantes aos do Capítulo 2.

Para os co-módulos semiprimos, os resultados não são obtidos como um caso particular do Capítulo 2, pois em geral, não é verdade que todos os C^*-módulos à esquerda racionais semiprimos estejam em $\mathcal{D}_{C^*}$. Apresentamos um exemplo que mostra este fato. Mesmo assim, conseguimos provas diretas para os resultados correspondentes.

No capítulo 4, considerando o fato que C é um co-módulo à direita e à esquerda sobre si mesma, definimos e caracterizamos as co-álgebras primas. Mostramos que as co-álgebras primas são apenas as co-álgebras simples.

Ao considerarmos C como um co-módulo à direita sobre si mesma, C é primo (isto é, ${}_{C^*}C$ é um módulo primo) se, e somente se, C é uma co-álgebra simples. O mesmo resultado vale se considerarmos C como um co-módulo à esquerda sobre si mesma.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Neste capítulo, R é um anel não necessariamente comutativo com unidade e R-Mod, a categoria dos R-módulos à esquerda. Em todo o texto, estamos trabalhando com módulos à esquerda quando nada for dito ao contrário.

O objetivo deste capítulo é lembrar definições e resultados que são usados nos capítulos posteriores, permitindo assim um melhor entendimento do trabalho.

1.1 Conceitos básicos

Nesta seção, lembramos as definições de anéis primos, semiprimos, primitivos (à esquerda) e semi-simples assim como alguns resultados relativos aos mesmos. Vemos também as definições e algumas propriedades importantes dos módulos semi-simples, primos e semiprimos. Sobre estes temas, a literatura é muito ampla, destacamos [2], [3], [4], [8] e [13].

Um ideal I de R é dito primo se $I \neq R$ e para quaisquer ideais U, V em R tais que $UV \subseteq I$ então $U \subseteq I$ ou $V \subseteq I$.

Um ideal J de R é dito semiprimo se para qualquer ideal U em R tal que $U^2 \subseteq J$ então $U \subseteq J$.

Definição 1.1. *Um anel R é dito primo (resp. semiprimo) se (0) é um ideal primo (resp. semiprimo).*

Segue imediatamente de suas definições que todo anel primo é semiprimo.

Exemplos: Anéis simples são primos e portanto, semiprimos. Anéis reduzidos (isto é, anéis que não possuem elementos nilpotentes não-nulos) são semiprimos.

Definição 1.2. *Um anel R é dito primitivo à esquerda se R possui um R-módulo à esquerda simples e fiel.*

Um R-módulo M é fiel se seu anulador em R é zero, isto é, $An_R(M) = \{r \in R : rm = 0, \text{ para todo}\, m \in M\} = 0$.

Exemplo: Sejam D um anel de divisão e V um D-espaço vetorial à direita. Então o anel $End(V_D)$ operando à esquerda sobre V é um anel primitivo à esquerda.

Definição 1.3. *Um R-módulo M é chamado semi-simples se M é a soma direta de uma família de submódulos simples.*

Exemplo: Os módulos simples são semisimples.

Definição 1.4. *Um anel R é chamado semi-simples à esquerda (à direita) se R visto como um módulo à esquerda (à direita) sobre si mesmo é um módulo semi-simples.*

É bem conhecido que R é um anel semi-simples à esquerda se, e somente se, R é um anel semi-simples à direita, este é um corolário do famoso Teorema de Wedderburn-Artin.

Enunciamos dois resultados que são usados no Capítulo 2.

Proposição 1.5. ([8], Ch. 4, Prop. 11.7) *Seja R um anel artiniano à esquerda. Então:*
(i) *R é semi-simples $\Leftrightarrow$ R é semiprimo.*
(ii) *R é simples $\Leftrightarrow$ R é primitivo à esquerda $\Leftrightarrow$ R é primo.*

Proposição 1.6. ([8], Ch. 1, Th. 3.10) *Seja R um anel simples. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *R é artiniano à esquerda.*
(ii) *R é semi-simples.*
(iii) *R possui um ideal à esquerda minimal.*
(iv) *$R \simeq \mathbb{M}_n(D)$, para algum inteiro positivo n e algum anel de divisão D.*

Por último, recordamos a definição de módulos primos e semiprimos que é de fundamental importância no desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.7. ([2], Def. 1.2) *Seja M um R-módulo. Dizemos que um submódulo N de M é primo em M se $rRm \subseteq N$, para $r \in R$, $m \in M$, implica $rM/N = 0$ (isto é, $r \in An_R(M/N)$).*

O módulo M é dito primo se (0) é um submódulo primo em M.

Vemos que um submódulo N de M é primo em M se o quociente M/N é um módulo primo.

Chamamos a atenção para o fato de que quando o submódulo N de M for primo como um módulo, isto é, (0) é submódulo primo em N, diremos N um módulo primo.

Uma das equivalências imediatas desta definição, diz que um R-módulo M é primo se, e somente se, $An_R(M) = An_R(N)$ para todo submódulo não-nulo N de M, veja ([2], Cor. 1.5).

Definição 1.8. ([3], Def. 1.4) *Seja M um R-módulo. Dizemos que um submódulo N de M é semiprimo se $rRrm \subseteq N$, para $r \in R$, $m \in M$, implica que $rm \in N$.*

O módulo M é dito semiprimo se (0) é um submódulo semiprimo de M.

Observamos que todo módulo primo é semiprimo.

Proposição 1.9. *Seja M um R-módulo semi-simples. Então M é um módulo semiprimo.*

Demonstração: Sejam $m \in M$ e $a \in R$ tais que $aRam = 0$. Podemos escrever $M = \sum_{i\in I} \bigoplus M_i$, onde os $M_i^{'}s$ são simples. Logo, $m = \sum_{i\in F} m_i$, onde $m_i \in M_i$ para um conjunto finito de índices $F \subseteq I$, daí $am = \sum_{i\in F} am_i$.

Se $am_i = 0$ para todo $i \in F$, então $am = 0$ e o resultado segue. Suponha que $am_i \neq 0$ para algum $i \in F$. Como M_i é simples, temos que $Ram_i = M_i$. Sendo que $a \in An_R(Ram)$, segue que $aRam_i = 0$ e então $aM_i = 0$. Logo, $am_i = 0$ o que é uma contradição. $\square$

1.2 A categoria $\sigma[M]$

Nesta seção, apresentamos a categoria $\sigma[M]$ e suas principais propriedades. Esta categoria é bem estudada em [17] e [18].

Primeiramente recordamos as definições de geradores e subgeradores de um R-módulo.

Definição 1.10. ([18], Ch. 3, Sec. 13.3) *Seja R um anel e sejam M e P dois R-módulos à esquerda. Dizemos que P é M-gerado se existem um conjunto de índices ω e um epimorfismo $\psi : M^{(\omega)} \to P$. Dizemos que M é gerador para P.*

Definição 1.11. ([18], Ch. 3, Sec. 15) *Seja R um anel e sejam M e P dois R-módulos à esquerda. Dizemos que P é M-subgerado se existem um conjunto de índices Ω e um epimorfismo $\varphi : M^{(\Omega)} \to P'$, para algum R-módulo $P' \supseteq P$. Dizemos que M é subgerador para P.*

Dado um R-módulo M, a categoria de todos os R-módulos que são M-subgerados é denotada por $\sigma[M]$. Logo, dizer que um R-módulo P é M-subgerado é equivalente a dizer que $P \in \sigma[M]$. É claro que todo módulo M-gerado é também M-subgerado.

A categoria $\sigma[M]$ é a menor subcategoria de R-Mod que contém M e que é fechada para submódulos, módulos quocientes e somas diretas. Além disso, $\sigma[M]$ é uma subcategoria plena de R-Mod, isto é, $Hom_{\sigma[M]}(N, P) = Hom_{R\text{-Mod}}(N, P)$, para quaisquer R-módulos N e P em $\sigma[M]$.

Fazemos um comentário a respeito de envoltória injetiva e para isso, lembremos algumas definições.

Definição 1.12. *Um R-módulo P é dito M-injetivo, ou injetivo em $\sigma[M]$, se para todo submódulo N de M e todo homomorfismo $f : N \to P$, existe um homomorfismo $g : M \to P$ tal que $g|_N = f$, isto é, o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

onde i é a inclusão.

Um módulo P diz-se injetivo se P é M-injetivo para todo R-módulo M.

Definição 1.13. *Seja M um R-módulo. Um submódulo N de M diz-se essencial em M se $N \cap P \neq 0$, para todo submódulo não-nulo P de M.*

Usamos a notação $N \subseteq_e M$ para um submódulo N essencial em M.

Seja N um R-módulo. O Lema de Zorn garante a existência de um R-módulo E que é uma extensão essencial maximal de N, isto é, N é um submódulo essencial de E e se existir um outro R-módulo B tal que N seja um submódulo essencial em B, então a inclusão $N \hookrightarrow E$ estende-se a um monomorfismo $B \to E$. Além disso, E é também um R-módulo injetivo. O R-módulo E é então chamado a *envoltória injetiva* do R-módulo N. Para maiores detalhes, veja ([6], Th. 1.10 e Prop. 1.11). O Teorema 1.10 de [6] mostra que E é uma extensão injetiva minimal de N se, e somente se, E é uma extensão essencial maximal de N e a Proposição 1.11 garante que, a menos de isomorfismo, existe apenas uma envoltória injetiva.

Analogamente, para todo módulo $N \in \sigma[M]$, existe a envoltória M-injetiva de N em $\sigma[M]$ que denotamos por $\widehat{N}$, isto é, $\widehat{N}$ é uma extensão M-injetiva minimal de N em $\sigma[M]$. Para maiores detalhes, veja ([18], Sec. 17.9).

Observação 1.14. Todo módulo M-injetivo P em $\sigma[M]$ é gerado por todo subgerador dele em $\sigma[M]$. De fato, seja $K \in \sigma[M]$ um subgerador de P. Então existem um conjunto de índices Ω e um epimorfismo $\varphi : K^{(\Omega)} \to P'$, para algum $P' \supseteq P$.

Temos que $P' \simeq K^{(\Omega)}/Ker(\varphi) \in \sigma[M]$. A seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{i} P' \longrightarrow P'/P \longrightarrow 0$$

em $\sigma[M]$ cinde, pois P é injetivo em $\sigma[M]$. Então existe $\psi : P' \to P$ tal que $\psi \circ i = id_P$. Assim, a função $\psi \circ \varphi : K^{(\Omega)} \to P$ é um epimorfismo e portanto, P é K-gerado.

1.3 Teoria de torsão em $\sigma[M]$, módulos fortemente primos e fortemente semiprimos

Seja M um R-módulo. A teoria de torsão em $\sigma[M]$ é apresentada de maneira detalhada em ([17], Ch. 3, Sec. 9). Vamos apresentar aqui apenas o essencial ao desenvolvimento de temas posteriores deste trabalho.

Nesta seção também lembramos as definições e principais resultados sobre módulos fortemente primos e fortemente semiprimos, pois ambos estão bem relacionados com a teoria de torsão em $\sigma[M]$.

Uma classe $\mathcal{T}$ de módulos em $\sigma[M]$ é dita:
(i) Uma classe de *pretorsão* se $\mathcal{T}$ é fechada para módulos quocientes e somas diretas.
(ii) Uma classe de *pretorsão hereditária* se $\mathcal{T}$ é fechada para submódulos, módulos quocientes e somas diretas.
(iii) Uma classe de *torsão hereditária* se $\mathcal{T}$ é fechada para submódulos, módulos quocientes, somas diretas e extensões em $\sigma[M]$ (isto é, dada uma seqüência exata curta $0 \to U \to N \to V \to 0$ tal que U, $V \in \mathcal{T}$ então $N \in \mathcal{T}$).

Sejam $\mathcal{T}$ uma classe de pretorsão em $\sigma[M]$ e N um R-módulo. O seguinte conjunto é um submódulo de N:

$$\mathcal{T}(N) := Tr(\mathcal{T}, N) = \sum\{U \subseteq N : U \in \mathcal{T}\},$$

a soma de todos os submódulos de N que pertencem a $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}(N)$ é chamado o submódulo de $\mathcal{T}$-torsão de N. Se $\mathcal{T}(N) = N$, então N é dito um módulo de $\mathcal{T}$-torsão e se $\mathcal{T}(N) = 0$, N é dito um módulo livre de $\mathcal{T}$-torsão.

Seguem algumas propriedades de $\mathcal{T}(N)$.

Proposição 1.15. *Sejam $\mathcal{T}$ uma classe de pretorsão em $\sigma[M]$ e $N \in R$-Mod. Então as seguintes afirmações são válidas:*
(i) $\mathcal{T}(N) \in \mathcal{T}$.
(ii) $\mathcal{T}(N) = \sum\{Imh,\ h \in Hom_R(U, N),\ U \in \mathcal{T}\}$ *é o maior submódulo de N que pertence a $\mathcal{T}$.*
(iii) *Para todo R-homomorfismo $f : N \to L$, onde N e L são R-módulos quaisquer, temos que $f(\mathcal{T}(N)) \subseteq \mathcal{T}(L)$. Além disso, se $\mathcal{T}$ é uma classe de pretorsão hereditária então, para todo submódulo L de N, temos que $\mathcal{T}(L) = L \cap \mathcal{T}(N)$.*

Demonstração: (i) Consideramos $\{U_i\}_i$ a família de todos os submódulos de N que pertencem à $\mathcal{T}$, as inclusões canônicas $\{q_j : U_j \to \bigoplus_i U_i\}$ e as inclusões $\{h_j : U_j \to N\}$, então existe um único R-homomorfismo $g : \bigoplus_i U_i \to N$ tal que

$g \circ q_j = h_j$. É claro que $Img = \sum U_i$ e portanto a aplicação $g : \bigoplus_i U_i \to \sum U_i$ é sobrejetora e isto implica que $\bigoplus_i U_i / Kerg \simeq \sum U_i$. Sendo que $\mathcal{T}$ é fechada para somas diretas e módulos quocientes, segue que $\mathcal{T}(N) = \sum U_i \in \mathcal{T}$.

(ii) A igualdade é clara. Por outro lado, se N' é um submódulo de N tal que $N' \in \mathcal{T}$, então é claro que $N' \subseteq \sum\{U \subseteq N; U \in \mathcal{T}\}$.

(iii) O primeiro fato é evidente. Suponhamos $\mathcal{T}$ uma classe de pretorsão hereditária. É óbvio que $\mathcal{T}(L) \subseteq L \cap \mathcal{T}(N)$, basta tomarmos a inclusão $i : L \hookrightarrow N$. Temos que $L \cap \mathcal{T}(N)$ é um submódulo de $\mathcal{T}(N)$, o qual pertence a $\mathcal{T}$, e como $\mathcal{T}$ é fechada para submódulos, segue que $L \cap \mathcal{T}(N) \in \mathcal{T}$. Logo, $L \cap \mathcal{T}(N) \subseteq \mathcal{T}(L)$. □

Quando $\mathcal{T}$ é gerada por um único R-módulo, digamos U, temos que $\mathcal{T}(U,N) := Tr(U,N) = \{\sum_{i=1}^n f_i(u_i) : u_i \in U, f_i \in Hom_R(U,N), n \in \mathbb{N}\}$ é o maior submódulo de N que é U-gerado. Chamamos $Tr(U,N)$ o traço de U em N. Claramente $Tr(U,N) = N$ se, e somente se, N é U-gerado.

Definição 1.16. ([17], Ch. 3, Sec. 13) *Um R-módulo à esquerda M é dito fortemente primo se $M \in \sigma[N]$ para todo submódulo não-nulo N de M.*

Teorema 1.17. ([17], Ch. 3, Sec. 13.3) *Sejam M um R-módulo e $\widehat{M}$ sua envoltória injetiva em $\sigma[M]$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *M é fortemente primo.*

(ii) *Para quaisquer $0 \neq x, y \in M$, existem $t = t(x,y)$ e $r_1, r_2, \cdots, r_t \in R$ tais que $\bigcap_{i=1}^{t} An_R(r_i x) \subseteq An_R(y)$.*

(iii) *$\widehat{M}$ é fortemente primo.*

(iv) *$\widehat{M}$ é gerado por cada um de seus submódulos não-nulos.*

(v) *$\widehat{M}$ não possui submódulos completamente invariantes não-triviais (isto é, se $N \subseteq \widehat{M}$ é tal que $f(N) \subseteq N$, $\forall f \in End_R(\widehat{M})$, então $N = 0$ ou $N = \widehat{M}$).*

(vi) *Para toda classe de pretorsão (resp. pretorsão hereditária) $\mathcal{T}$ em $\sigma[M]$, $\mathcal{T}(\widehat{M}) = \widehat{M}$ ou $\mathcal{T}(\widehat{M}) = 0$ (resp. $\mathcal{T}(M) = M$ ou $\mathcal{T}(M) = 0$).*

Embora seja bem conhecido na literatura, vamos dar uma breve prova de que módulos fortemente primos são primos.

Proposição 1.18. *Seja M um R-módulo fortemente primo. Então M é primo.*

Demonstração: Sejam N um submódulo não-nulo de M e $0 \neq n \in N$. Então por (ii) do teorema acima, para cada $y \in M$, existem $s = s(n, y)$ e $r_1, \cdots, r_s \in R$ tais que $An_R(r_1 n, \cdots, r_s n) \subseteq An_R(y)$. Mas $An_R(N) \subseteq An_R(r_1 n, \cdots, r_s n) \subseteq An_R(y)$. Logo, $An_R(N) \subseteq An_R(M)$ e daí $An_R(N) = An_R(M)$. Portanto, M é primo. $\square$

Para definir os módulos fortemente semiprimos precisamos de mais alguns fatos da teoria de torsão.

Sejam $M \in R$-Mod, $\widehat{M}$ sua envoltória injetiva em $\sigma[M]$ e $T = End_R(\widehat{M})$. Sejam K um submódulo de $\widehat{M}$ e $L \in \sigma[M]$. Denotamos por $\mathcal{T}^K(L)$ o traço de $\sigma[K]$ em L, dado por

$$\mathcal{T}^K(L) = \sum\{U \subseteq L : U \in \sigma[K]\}.$$

Por $\mathcal{T}_K$ denotamos a classe de torsão hereditária em $\sigma[M]$ determinada por $\widehat{TK} \subseteq \widehat{M}$, isto é, um módulo $U \in \mathcal{T}_K$ se, e somente se, $Hom_R(U, \widehat{TK}) = 0$. Então o correspondente submódulo de $\mathcal{T}_K$-torsão de L, $\mathcal{T}_K(L)$, é dado por

$$\mathcal{T}_K(L) = \sum\{U \subseteq L : Hom_R(U, \widehat{TK}) = 0\}.$$

Apresentamos algumas propriedades relativas a estas noções. A proposição apresentada abaixo, encontra-se em sua totalidade em ([17], Ch. 3, Sec. 11.10), enunciamos apenas as propriedades que nos são úteis.

Proposição 1.19. *Sejam M um R-módulo, K um submódulo de M e $T = End_R(\widehat{M})$. Então, temos que:*
(i) $\mathcal{T}^K(\widehat{M}) = TK$ *(é um módulo K-injetivo).*
(ii) $\mathcal{T}^K(L) \cap \mathcal{T}_K(L) = 0$, *para todo submódulo L de $\widehat{M}$.*

A definição de módulos fortemente semiprimos encontra-se em ([17], Ch. 3, Sec. 14.3), dada por uma série de equivalências. Por objetividade, apresentamos somente as que são usadas no trabalho.

Definição 1.20. *Sejam M um R-módulo e $T = End_R(\widehat{M})$. O módulo M é dito fortemente semiprimo se as condições equivalentes abaixo são satisfeitas para todo submódulo K de M.*
(i) $M/\mathcal{T}_K(M) \in \sigma[K]$.
(ii) $\widehat{M} = TK \oplus \widehat{\mathcal{T}_K(M)}$.

Proposição 1.21. *Seja M um R-módulo fortemente semiprimo. Então $M \in \sigma[N]$ para todo $N \subseteq_e M$.*

Demonstração: Seja N um submódulo essencial em M. Pela Proposição 1.19, $\mathcal{T}^N(M) \cap \mathcal{T}_N(M) = 0$. Como $N \subseteq \mathcal{T}^N(M)$, então $N \cap \mathcal{T}_N(M) = 0$ e isto implica que $\mathcal{T}_N(M) = 0$, pois $N \subseteq_e M$.

Sendo $\mathcal{T}_N$ uma classe de torsão hereditária, segue que $M \cap \mathcal{T}_N(\widehat{M}) = 0$. Portanto $\mathcal{T}_N(\widehat{M}) = 0$, pois $M \subseteq_e \widehat{M}$.

Temos que M é fortemente semiprimo, então $\widehat{M} = TN = Tr(N, \widehat{M})$, por (ii) da definição acima. Logo, $\widehat{M} \in \sigma[N]$ e claramente $M \in \sigma[N]$. $\square$

Usando a proposição acima é fácil ver que módulos fortemente primos são fortemente semiprimos.

Sejam M um R-módulo semi-simples e K um submódulo de M. Então, M é injetivo em $\sigma[M]$ veja ([18], Ch. 4, Sec. 20.3) e portanto, $M = \widehat{M}$. Pela Proposição 1.19, temos que $\mathcal{T}^K(M) = SK$, onde $S = End_R(M)$. Além disso, $\mathcal{T}_K(M) = \sum\{U \subseteq M : Hom_R(U, SK) = 0\}$, pois SK é injetivo em $\sigma[M]$. Usamos isto na prova do resultado abaixo, que embora seja conhecido na literatura, não encontramos sua prova.

Proposição 1.22. *Seja M um R-módulo semi-simples. Então M é fortemente semiprimo.*

Demonstração: Seja $K \subseteq M$. Consideremos o submódulo não-nulo SK de M. Se $M = SK = Tr(K, M)$ então $M \in \sigma[K]$ e obviamente M é fortemente semiprimo. Suponhamos que SK seja um submódulo próprio de M. Como M é semi-simples, temos que SK é um somando direto de M, então existe um submódulo L de M tal que $M = SK \oplus L$.

Mostremos que $L \subseteq \mathcal{T}_K(M)$. Suponhamos o contrário. Então existe um R-homomorfismo não-nulo $f : L \to SK$. Podemos escrever $L = Ker(f) \oplus P$, para algum submódulo P de L, pois L é semi-simples.

Por ser L injetivo em $\sigma[M]$ veja ([18], Ch. 4, Sec. 20.3), existe $h : SK \to L$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f", "\simeq"'] \arrow[d, "\imath_1"'] & f(P) \arrow[r, "\imath_2"] & SK \arrow[dll, dashed, "h"] \\ L & & \end{tikzcd}$$

onde $\imath_1$ e $\imath_2$ são as respectivas inclusões. A função h pode ser estendida a uma $h^{'} \in S$ tal que $h^{'}|_{SK} = h$, pois M é injetivo em $\sigma[M]$.

Sendo SK um submódulo completamente invariante de M, temos que $P = h(f(P)) = h^{'}(f(P)) \subseteq SK$ e isto implica que $P = 0$. Logo, $L = Ker(f)$ e isto é um absurdo, pois f é não-nula. Portanto, $L \subseteq \mathcal{T}_K(M)$ e assim, $M = SK \oplus L \subseteq SK \oplus \mathcal{T}_K(M) \subseteq M$. Logo, $M/\mathcal{T}_K(M) \simeq SK = \mathcal{T}^K(M) \in \sigma[K]$ e M é fortemente semiprimo. $\square$

1.4 Co-álgebras e co-módulos

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [1] e [9]. Consideramos k um corpo e os produtos tensoriais sempre tomados sobre k.

Definição 1.23. *Uma co-álgebra é uma tripla (C, Δ, ε), onde C é um k-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to k$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo comutam:*

a)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id \otimes \Delta"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\ C \otimes k \arrow[ur, "\phi_r"] & & k \otimes C \arrow[ul, "\phi_l"'] \\ & C \otimes C \arrow[ul, "id \otimes \varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon \otimes id"'] & \end{tikzcd}$$

Os morfismos Δ e ε são chamadas co-multiplicação e co-unidade da co-álgebra C, respectivamente. No diagrama b), ϕ_r e ϕ_l são os isomorfismos canônicos.

A comutatividade do diagrama a) expressa pela igualdade $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$, é chamada co-associatividade, enquanto que a comutatividade do diagrama b) é expressa por $id_C = \phi_l \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = \phi_r \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$.

Exemplos: 1) Seja S um conjunto não vazio. O k-espaço vetorial kS com base S é uma co-álgebra com co-multiplicação Δ e co-unidade ε definidas por $\Delta(s) = s \otimes s$ e $\varepsilon(s) = 1$, $\forall s \in S$.

2) O corpo k é uma co-álgebra com co-multiplicação $\Delta : k \to k \otimes k$ o isomorfismo canônico $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1$ para todo $\alpha \in k$, e a co-unidade $\varepsilon : k \to k$ é a

função identidade. Este exemplo é um caso particular do exemplo anterior, onde temos apenas um elemento básico 1.
3) Seja H um k-espaço vetorial com base $\{c_m;\, m \in \mathbb{N}\}$. Então H é uma co-álgebra com co-multiplicação Δ e co-unidade ε definidas por:

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i},\ \varepsilon(c_m) = \delta_{o,m}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ (δ_{ij} é o símbolo de *Kronecker*).
4) Seja $n \geq 1$ um inteiro positivo e $M^c(n,k)$ um k-espaço vetorial de dimensão n^2. Denotamos por $(e_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ a base de $M^c(n,k)$. Definimos sobre $M^c(n,k)$ a co-multiplicação Δ por

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj}$$

para todo i,j e a co-unidade ε por

$$\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}\,.$$

Portanto, $M^c(n,k)$ é uma co-álgebra, chamada Co-álgebra de Matrizes.

Sendo uma co-álgebra C um k-espaço vetorial, diremos que C é finito dimensional quando sua dimensão sobre k é finita.

Apresentamos agora a notação de Sweedler para a co-multiplicação Δ da co-álgebra C. Esta notação é muito eficaz, no sentido de facilitar a escrita quando temos longas composições envolvendo Δ.

A definição recursiva da seqüência de aplicações $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ é definida como $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_n : C \to C \otimes C \otimes \cdots \otimes C$, n+1 vezes, onde $\forall n \geq 2$, temos que $\Delta_n = (\Delta \otimes id^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$.

A notação de Sweedler para Δ se escreve como $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, para todo $c \in C$; evitando assim a escrita $\Delta(c) = \sum_{i,j} c_i \otimes c_j$. Indutivamente, $\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$, $\forall n \geq 2$. Para mais detalhes, veja ([1], pag.4).

Pela definição de Δ_n, quanto maior for o n, mais "carregada" torna-se a escrita de $\Delta_n(c)$, qualquer que seja $c \in C$. Para $n = 2$ temos que

$$\Delta_2(c) = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$$

e

$$c = \sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\varepsilon(c_2).$$

As igualdades acima são exatamente a comutatividade dos diagramas a) e b), respectivamente.

Definição 1.24. *Seja (C, Δ, ε) uma co-álgebra. Um k-subespaço vetorial D de C é chamado uma subco-álgebra de C se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

Uma co-álgebra C é dita simples se suas únicas subco-álgebras são 0 e C.

Definição 1.25. *Seja (C, Δ, ε) uma co-álgebra e I um k-subespaço vetorial de C. Então I é chamado:*
(i) *um co-ideal à esquerda (à direita) se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ (resp. $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$).*
(ii) *um co-ideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.*

Seja V um k-espaço vetorial. O k-espaço vetorial $V^* = Hom_k(V, k)$ é chamado o espaço dual de V.

O espaço V^* é um espaço topológico com a topologia induzida pela topologia de $Y^X = \{f : X \to Y\}$, onde X e Y são conjuntos não-vazios. Esta topologia sobre V^* é chamada topologia finita. Uma base para os abertos nesta topologia é dada por conjuntos da forma:

$$\{g \in V^* : g(x_i) = f(x_i), 1 \leq i \leq n\},$$

onde $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ é um conjunto finito de elementos de V e f é um elemento fixo de V^*. Portanto, todo conjunto aberto é uma união de abertos dessa forma. Introduzimos mais algumas notações.

Se S é um subconjunto de V^*, então denotamos por

$$S^{\perp} = \{v \in V : f(v) = 0, \forall f \in S\}.$$

Analogamente, se W é um subconjunto de V, então o conjunto

$$W^{\perp} = \{f \in V^* : f(W) = 0\}.$$

É fácil ver que os conjuntos $S^{\perp}$ e $W^{\perp}$ são subespaços de V e V^*, respectivamente.

Lembremos algumas definições importantes como, por exemplo, subespaços fechados e subespaços densos em V^*.

Se W é um subespaço de V então $(W^{\perp})^{\perp} = W$. Também, se S é um subespaço de V^*, então $(S^{\perp})^{\perp} = \overline{S}$, onde $\overline{S}$ é o fecho de S na topologia finita. A prova destes fatos encontra-se em ([1], Th. 1.2.6).

Dizemos que um subespaço S de V^* é fechado na topologia finita se $S = \overline{S} = (S^{\perp})^{\perp}$.

Seja S um subespaço de V^*. O subespaço S é denso em V^* se $\overline{S} = V^*$. Equivalentemente, S é denso em V^* se, e somente se, $S^{\perp} = \{0\}$.

Dada uma co-álgebra (C, Δ, ε), o k-espaço vetorial $C^* = Hom(C, k)$ possui uma estrutura de k-álgebra, onde a multiplicação $M : C^* \otimes C^* \to C^*$ é dada por $M = \Delta^* \rho$, sendo $\rho : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ definida por $\rho(f \otimes g)(c \otimes d) = f(c)g(d)$, para $c, d \in C$ e a unidade é $u(1)$, onde $u = \varepsilon^* \phi$ e $\phi : k \to k^*$ é o isomorfismo canônico.

Mais explicitamente, dados $f, g \in C^*$, o produto $f * g = M(f \otimes g)$ é chamado *produto de convolução* e é determinado da seguinte forma:

$$f * g(c) = \Delta^* \rho(f \otimes g)(c) = \rho(f \otimes g)\Delta(c) = \sum f(c_1)g(c_2),$$

onde $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$.

A unidade de C^* é igual a ε. De fato, sejam $f \in C^*$ e $c \in C$. Temos que $(f * \varepsilon)(c) = \sum f(c_1)\varepsilon(c_2) = f(\sum c_1 \varepsilon(c_2)) = f(c)$. Logo, $f * \varepsilon = f$ e analogamente, $\varepsilon * f = f$.

A k-álgebra C^* assim definida é chamada álgebra dual da co-álgebra C.

Oportunamente neste trabalho, falamos da co-álgebra co-oposta de uma co-álgebra C e da álgebra oposta de C^*. Vamos defini-las aqui.

Seja (C, Δ, ε) uma co-álgebra. Consideramos a aplicação k-linear $\Delta^{cop} = T\Delta$, onde $T : C \otimes C \to C \otimes C$ é dada por $T(a \otimes b) = b \otimes a$. É fácil verificar que $(C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ é uma co-álgebra, chamada a co-álgebra co-oposta de C e é denotada por C^{cop}.

A álgebra oposta de C^*, denotada por C^{*op}, é a tripla (C^*, MT, u), onde T é como acima.

Lembremos a definição de um morfismo de co-álgebras.

Definição 1.26. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ co-álgebras. Dizemos que a função k-linear $g : C \to D$ é um morfismo de co-álgebras se os seguintes* *diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g\otimes g"] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "\varepsilon_C"] & \\ & k \\ D \arrow[ur, "\varepsilon_D"'] & \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser escrita como $\Delta_D(g(c)) = \sum g(c)_1 \otimes g(c)_2 = \sum g(c_1) \otimes g(c_2) = (g \otimes g)\Delta_C(c)$.

O próximo resultado relaciona os ideais de C^* e as subco-álgebras de C.

Proposição 1.27. ([1], Prop. 1.5.23) *Sejam C uma co-álgebra e C^* sua álgebra dual. As seguintes propriedades são verificadas:*
(i) *Se I é um ideal de C^* então $I^\perp$ é uma subco-álgebra de C.*
(ii) *Se D é um k-subespaço de C então D é uma subco-álgebra de C se e, somente se, $D^\perp$ é um ideal de C^*. Neste caso, $C^*/D^\perp \simeq D^*$ como álgebras.*

Demonstração: (Esboço) (i) É fácil mostrar que, para todo $c \in I^\perp$, $\Delta(c) \in C \otimes I^\perp$ e $\Delta(c) \in I^\perp \otimes C$ e portanto, $\Delta(c) \in I^\perp \otimes I^\perp$.

(ii) Se $D^\perp$ é um ideal de C^* então, por (i), $D^{\perp\perp} = D$ é uma subco-álgebra de C. Reciprocamente, consideramos D uma subco-álgebra de C e a inclusão $i : D \hookrightarrow C$, que é um morfismo injetor de co-álgebras. É fácil ver que $i^* : C^* \to D^*$ é um morfismo sobrejetor de álgebras, onde $Ker(i^*) = D^\perp$. Logo, $D^\perp$ é um ideal de C^* e as álgebras $C^*/D^\perp$ e D^* são isomorfas. $\square$

Definição 1.28. *Seja C uma co-álgebra. Um co-módulo à direita sobre a co-álgebra C é um par (M, ρ), onde M é um k-espaço vetorial e $\rho : M \to M \otimes C$ é um morfismo de k-espaços vetoriais tal que os diagramas comutam:*

a) $$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes id"] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

b) $$\begin{tikzcd} M \arrow[dd, "\rho"'] \arrow[dr, "\simeq"] & \\ & M \otimes k \\ M \otimes C \arrow[ur, "id\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Para facilitar a escrita, diremos apenas um co-módulo à direita, ficando subentendido que C é a co-álgebra considerada.

A notação de Sweedler estende-se também para a estrutura ρ de um co-módulo da seguinte forma:

Seja M um co-módulo à direita cuja estrutura é dada por $\rho : M \to M \otimes C$. Então para todo $m \in M$, escrevemos $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, onde os ${m_{(0)}}'s$ estão em M e os ${m_{(1)}}'s$ estão em C. Se M é um co-módulo à esquerda com estrutura $\mu : M \to C \otimes M$, escrevemos $\mu(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$, onde os ${m_{(-1)}}'s$ estão em C e os ${m_{(0)}}'s$ estão em M.

Na notação de Sweedler, a comutatividade dos diagramas a) e b) é dada respectivamente por

$$\begin{aligned} \sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} &= \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2 \\ &= \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} \end{aligned}$$

e

$$m = \sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)}$$

Exemplos: 1) A co-álgebra C possui ambas as estruturas de um co-módulo à direita e à esquerda sobre si mesma, dadas pela sua co-multiplicação Δ.
2) Se C é uma co-álgebra e X é um k-espaço vetorial, então $X \otimes C$ torna-se um C-co-módulo à direita cuja estrutura dada por $\rho : X \otimes C \to X \otimes C \otimes C$ é induzida por Δ, isto é, $\rho = id \otimes \Delta$. Logo, $\rho(x \otimes c) = \sum x \otimes c_1 \otimes c_2$.

Definição 1.29. *Seja (M, ρ) um co-módulo à direita. Um k-subespaço vetorial N de M é chamado um subco-módulo à direita se $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.*

Um co-módulo à direita M é dito simples se seus únicos subco-módulos são 0 e M.

Definição 1.30. *Sejam (M, ρ) e (N, ϕ) co-módulos à direita. Uma função k-linear $g : M \to N$ é dita um morfismo de co-módulos se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\ M \otimes C \arrow[r, "g \otimes id"] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

e a comutatividade deste diagrama é dada por

$$\sum (g(m))_{(0)} \otimes (g(m))_{(1)} = \sum g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}.$$

Sejam (M, ρ) um co-módulo à direita e N um subco-módulo de M. Consideramos o k-espaço vetorial M/N e $p : M \to M/N$ a projeção canônica, $p(m) = \overline{m}$. Então é claro que existe uma única estrutura de co-módulo à direita sobre M/N para a qual $M \to M/N$ é um morfismo de co-módulos, veja ([1], Prop. 2.1.14).

O co-módulo $(M/N, \bar{\rho})$, onde $\bar{\rho}(\overline{m}) = \sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}$, para $m \in M$, é dito o co-módulo quociente de M por N.

Denotamos por $\mathcal{M}^C$ a categoria dos co-módulos à direita sobre a co-álgebra C, onde os objetos de $\mathcal{M}^C$ são os co-módulos à direita sobre C e cujos morfismos são os morfismos de co-módulos definidos acima.

Por ${}^C\mathcal{M}$ denotamos a categoria dos co-módulos à esquerda sobre a co-álgebra C, onde os objetos de ${}^C\mathcal{M}$ são os co-módulos à esquerda sobre C e cujos morfismos são os morfismos de co-módulos à esquerda.

1.5 Módulos racionais

Sejam C uma co-álgebra e C^* sua k-álgebra dual. Seja M um C^*-módulo à esquerda cuja estrutura é dada pelo morfismo $\psi_M : C^* \otimes M \to M$ de k-espaços vetoriais. Definimos:

$$\rho_M : M \to Hom(C^*, M), \text{ por } \rho_M(m)(c^*) = c^*m, m \in M, c^* \in C^*.$$

Sejam $j : C \to C^{**}$, $j(c)(c^*) = c^*(c)$ a injeção canônica, e

$$f_M : M \otimes C^{**} \to Hom(C^*, M),\ f_M(m \otimes c^{**})(c^*) = c^{**}(c^*)m$$

que é um morfismo injetor. Segue que

$$\mu_M : M \otimes C \to Hom(C^*, M),\ \mu_M = f_M(id \otimes j)$$

é injetor. É claro da definição que $\mu_M(m \otimes c)(c^*) = c^*(c)m$, para $c \in C$, $c^* \in C^*$ e $m \in M$.

Definição 1.31. ([1], Def. 2.2.2) *O C^*-módulo à esquerda M é dito racional se $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$.*

Observação 1.32. M é um C^*-módulo racional se, e somente se, $\forall\, m \in M$, existem duas famílias finitas de elementos $(m_i)_i \subseteq M$ e $(c_i)_i \subseteq C$ tais que $c^*m = \sum_i c^*(c_i)m_i$, para todo $c^* \in C^*$.

Seja M um C^*-módulo racional e suponhamos que para um $m \in M$ existam dois pares de famílias finitas $(m_i)_i$, $(c_i)_i$ e $(m_j^{'})_j$, $(c_j^{'})_j$ como acima, então $\sum_i m_i \otimes c_i = \sum_j m_j^{'} \otimes c_j^{'}$, pois μ_M é injetivo.

Denotamos por C^*-Mod a categoria dos C^*-módulos à esquerda e por $Rat(C^*\text{-Mod})$ a subcategoria dos C^*-módulos à esquerda racionais.

A categoria $Rat(C^*\text{-Mod})$ é fechada para submódulos, módulos quocientes e somas diretas, sendo também uma subcategoria plena de C^*-Mod.

Vamos detalhar um pouco como as categorias $\mathcal{M}^C$ e $Rat(C^*\text{-Mod})$ estão relacionadas.

Seja (M, ω) um co-módulo à direita onde $\omega : M \to M \otimes C$. Definimos $\psi_\omega : C^* \otimes M \to M$ por $\psi_\omega = \phi(\gamma \otimes id_M)(id_{C^*} \otimes T)(id_{C^*} \otimes \omega)$, onde id_M e id_{C^*} são as identidades, $T : M \otimes C \to C \otimes M$ é dada por $T(m \otimes c) = c \otimes m$, $\gamma : C^* \otimes C \to k$ é definida por $\gamma(c^* \otimes c) = c^*(c)$ e $\phi : k \otimes M \to M$ é o isomorfismo canônico.

Se $\omega(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ então $\psi_\omega(c^* \otimes m) = \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}$ para $m \in M$ e para todo $c^* \in C^*$. Temos que $1_{C^*}m = \varepsilon m = \sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = m$ e facilmente verificamos que $(c^*d^*)m = c^*(d^*m)$ para $c^*, d^* \in C^*$ e $m \in M$. Logo, (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda racional.

Seja (M, ψ) um C^*-módulo à esquerda racional. Sendo a aplicação linear $\mu_M : M \otimes C \to Hom(C^*, M)$ injetora, segue que $\tilde{\mu}_M : M \otimes C \to \mu_M(M \otimes C)$ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais.

Definimos $\omega_\psi : M \to M \otimes C$ por $\omega_\psi(m) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m))$, $m \in M$. Então $\omega_\psi(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, onde os $m_{(0)}{}'s$ e os $m_{(1)}{}'s$ são as duas famílias finitas de elementos em M e C, respectivamente, tais que $c^*m = \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}$, para todo $c^* \in C^*$.

Sendo que $1_{C^*}m = \varepsilon m = m$ segue que $m = \sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)}$ e mostra-se também que $(\omega_\psi \otimes id)\omega_\psi = (id \otimes \Delta)\omega_\psi$. Logo, (M, ω_ψ) é um co-módulo à direita.

Agora, consideramos $f: M \to N$ um morfismo de co-módulos. Sendo que M e N têm a estrutura de C^*-módulos racionais, verifica-se facilmente que f é um morfismo de C^*-módulos racionais.

Da mesma forma, dado um morfismo $f: M \to N$ de C^*-módulos à esquerda racionais, (M, ψ_M) e (N, ψ_N), então f é um morfismo de co-módulos à direita.

Assim, é possível definir os seguintes funtores:

$$T: \mathcal{M}^C \to Rat({}_{C^*}\mathcal{M}) \text{ tal que } T(M, \omega) = (M, \psi_\omega) \text{ e } T(f) = f,$$

para todo co-módulo (M, ω) e para todo morfismo $f: M \to N$ de co-módulos e

$$S: Rat({}_{C^*}\mathcal{M}) \to \mathcal{M}^C \text{ tal que } S(M, \psi) = (M, \omega_\psi) \text{ e } S(f) = f,$$

para todo C^*-módulo racional (M, ψ) e para todo morfismo $f: M \to N$ de C^*-módulos racionais.

Estes funtores são tais que $S \circ T = id_{\mathcal{M}^C}$ e $T \circ S = id_{Rat({}_{C^*}\mathcal{M})}$ e portanto

Teorema 1.33. ([1], Th. 2.2.5) *As categorias $\mathcal{M}^C$ e $Rat(C^*\text{-}Mod)$ são isomorfas.*

Dizemos que um C^*-módulo racional é finito dimensional quando sua dimensão sobre k é finita.

A proposição abaixo diz que C^*-módulos racionais finitamente gerados são finito dimensionais.

Proposição 1.34. *Todo C^*-módulo racional cíclico é finito dimensional.*

Demonstração: Seja M um C^*-módulo à esquerda racional cíclico. Então $M = C^*m$, para algum $0 \neq m \in M$. Sabemos que existem duas famílias finitas $(c_i)_i \subseteq C$ e $(m_i)_i \subseteq M$ para as quais $c^*m = \sum_i c^*(c_i)m_i$, para todo $c^* \in C^*$. Portanto, $M = C^*m$ está contido no espaço vetorial gerado pela família finita $(m_i)_i$. $\square$

Usando este fato, é fácil ver que

Proposição 1.35. ([1], Prop. 2.4.11) *Todo co-módulo não-nulo contém um subco-módulo simples.*

Apresentamos agora a categoria dos bico-módulos. Sejam C e D duas co-álgebras. Um k-espaço vetorial M é dito um bico-módulo à esquerda sobre D e à direita sobre C (ou brevemente, um (D, C)-bico-módulo) se M tem uma estrutura $\rho^- : M \to D \otimes M$ de D co-módulo à esquerda, dada por $\rho^-(m) = \sum m_{[-1]} \otimes m_{[0]}$ e uma estrutura de C co-módulo à direita $\rho^+ : M \to M \otimes C$, dada por $\rho^+(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Além disso, estas estruturas são tais que $(\rho^- \otimes id)\rho^+ = (id \otimes \rho^+)\rho^-$. Esta compatibilidade é expressa pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho^+} & M \otimes C \\ {\scriptstyle \rho^-}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^- \otimes id} \\ D \otimes M & \xrightarrow{id \otimes \rho^+} & D \otimes M \otimes C \end{array}$$

isto é, para todo $m \in M$, temos que

$$\sum (m_{(0)})_{[-1]} \otimes (m_{(0)})_{[0]} \otimes m_{(1)} = \sum m_{[-1]} \otimes (m_{[0]})_{(0)} \otimes (m_{[0]})_{(1)}.$$

Se M e N são dois bico-módulos, então $f : M \to N$ é dito um morfismo de bico-módulos se f é um morfismo de co-módulos à esquerda sobre D e também um morfismo de co-módulos à direita sobre C. Fica assim definida a categoria dos (D, C)-bico-módulos que denotamos por ${}^D\mathcal{M}^C$.

Considerando as álgebras duais D^* e C^* das co-álgebras D e C, respectivamente, denotamos por (C^*, D^*)-Mod a categoria dos (C^*, D^*)-bimódulos. Um objeto nesta categoria é um k-espaço vetorial com as estruturas de C^*-módulo à esquerda e de D^*-módulo à direita, que são compatíveis no sentido que $c^*(md^*) = (c^*m)d^*$, $\forall c^* \in C^*$, $d^* \in D^*$ e $m \in M$. Os morfismos nesta categoria são funções k-lineares que são morfismos de C^*-módulos à esquerda e morfismos de D^*-módulos à direita.

Denotamos por $Rat((C^*, D^*)\text{-Mod})$ a subcategoria plena de (C^*, D^*)-Mod que consiste de todos os objetos que são C^*-módulos à esquerda racionais e também D^*-módulos à direita racionais.

Analogamente ao Teorema 1.33, temos que

Teorema 1.36. ([1], Th. 2.3.3) *Sejam C e D co-álgebras. Então as categorias ${}^D\mathcal{M}^C$ e $Rat((C^*, D^*)\text{-Mod})$ são isomorfas.*

Exemplo: A co-álgebra C é um (C, C)-bico-módulo com ambas as estruturas dadas por Δ. Pelo isomorfismo das categorias, $C \in Rat((C^*, C^*)\text{-Mod})$, isto é, C é um C^*-módulo à esquerda e à direita racional.

Um fato interessante que cabe comentarmos aqui é que as categorias ${}^D\mathcal{M}^C$, $\mathcal{M}^{C\otimes D^{cop}}$, $\mathcal{M}^{D^{cop}\otimes C}$, ${}^{D\otimes C^{cop}}\mathcal{M}$ e ${}^{C^{cop}\otimes D}\mathcal{M}$ são categorias isomorfas, veja ([1], pag. 91).

Sabendo que a co-álgebra $C \in {}^C\mathcal{M}^C$, então pelos isomorfismos acima, concluímos que C é um co-módulo à direita sobre a co-álgebra $C \otimes C^{cop}$ e este fato é usado no Capítulo 4.

1.6 A categoria $\sigma[M]^c$

Nesta seção seremos breve, pois sabendo que $Rat(C^*\text{-Mod})$ e $\mathcal{M}^C$ são isomorfas, podemos aplicar o que foi desenvolvido na Seção 1.2.

Seja $M \in \mathcal{M}^C$. Chamamos $\sigma[M]^c$ a classe de todos os objetos de $\mathcal{M}^C$ que são M-subgerados, isto é, para todo $N \in \sigma[M]^c$ existem um conjunto de índices Ω e um morfismo sobrejetor de co-módulos $\varphi : (M)^{(\Omega)} \to N'$ para algum co-módulo $N' \supseteq N$. Não é difícil ver $\sigma[M]^c$ é uma subcategoria de $\mathcal{M}^C$ que é fechada para subco-módulos, co-módulos quocientes e somas diretas, além de ser a menor subcategoria de $\mathcal{M}^C$ que contém M.

Definição 1.37. *Seja $M \in \mathcal{M}^C$. Então um co-módulo Q é dito M-injetivo, ou injetivo em $\sigma[M]^c$, se para todo subco-módulo M' de M e todo morfismo $f : M' \to Q$ de co-módulos, existe um morfismo de co-módulos $g : M \to Q$ tal que $g|_{M'} = f$.*

Se o co-módulo Q é M-injetivo para todo co-módulo M, então Q é dito injetivo em $\mathcal{M}^C$.

Claramente temos que M é injetivo como co-módulo se, e somente se, M é injetivo como C^*-módulo racional.

Para finalizar esta seção, lembramos que dado um co-módulo à direita M, podemos desenvolver a teoria de torsão em $\sigma[M]^c$ da mesma forma que fizemos na Seção 1.3 e isto é devido ao isomorfismo estabelecido pelo Teorema 1.33.

1.7 Resultados complementares

Nesta seção enunciamos alguns teoremas que são úteis nos Capítulo 3 e 4.

Seja $M \in \mathcal{M}^C$. Tomando $I = An_{C^*}(M)$, obtemos a subco-álgebra $I^\perp$ de C que é chamada *co-álgebra associada* ao co-módulo M. Além disso, $I^\perp$ é a menor subco-álgebra de C tal que M seja um co-módulo à direita sobre a co-álgebra $I^\perp$, veja ([1], Prop. 2.5.3 (iv) e [10], Prop. 4.1).

O teorema seguinte encontra-se em sua totalidade em ([16], Lemma 8.0.1), por objetividade, apresentamos apenas os itens que nos serão úteis.

Teorema 1.38. ([16], Lemma 8.0.1) *Seja C uma co-álgebra.*
(i) *Toda subco-álgebra simples de C é finito dimensional.*
(ii) *Toda subco-álgebra não-nula de C contém uma subco-álgebra simples.*

Seja C uma co-álgebra. O co-radical C_0 de C é a soma de todas as subco-álgebras simples de C.

Uma co-álgebra C é dita co-semi-simples se $C = C_0$, esta é a definição dada em ([9], Def. 2.4.1).

Um co-módulo à direita M é dito co-semi-simples se M é uma soma de subco-módulos à direita simples.

O resultado a seguir é bastante usado em nosso trabalho, vamos demonstrá-lo.

Proposição 1.39. ([1], Sec. 3.1) *Seja C uma co-álgebra. Então C é simples se, e somente se, a álgebra dual C^* é artiniana simples.*

Demonstração: Seja C uma co-álgebra simples. Então, pelo item (i) do Teorema 1.38, C é finito dimensional. Logo, C^* é finito dimensional, em particular, C^* é artiniana.

Seja I um ideal de C^*. Sabemos, pela Proposição 1.27, que $I^\perp$ é uma subco-álgebra de C. Portanto, $I^\perp = 0$ ou $I^\perp = C$. Assim, $I = C^*$ ou $I = 0$. Logo, C^* é simples.

Suponhamos que C^* seja simples. Seja J uma subco-álgebra de C. Novamente pela Proposição 1.27, $J^\perp$ é um ideal de C^*. Assim, $J^\perp = 0$ ou $J^\perp = C^*$ e claramente $J = C$ ou $J = 0$. (Observamos que esta recíproca não usa o fato de que C^* é artiniana, apenas a sua simplicidade.) $\square$

Lembramos que A é uma subálgebra densa em C^* se , e somente se, $A^\perp = 0$. Sob esta condição, vamos definir um A-módulo racional. Primeiramente, notamos que a densidade de A em C^* nos diz que a função $\varphi : C \to A^*$ dada por $\varphi(c)(a) = a(c)$, $\forall c \in C$, $\forall a \in A$ é injetora. Basta notar que $Ker\varphi = A^\perp = \{0\}$.

Seja (M, ψ) um A-módulo à esquerda, onde $\psi : A \otimes M \to M$ é um morfismo de k-espaços vetoriais que dá a estrutura de A-módulo a M.

Definimos $\rho_M : M \to Hom(A, M)$ por $\rho(m)(a) = am$. É fácil ver que o morfismo $f_M : M \otimes A^* \to Hom(A, M)$ dado por $f_M(m \otimes a^*)(a) = a^*(a)m$ é injetor.

Segue que $\mu_M : M \otimes C \to Hom(A, M)$, onde $\mu_M = f_M \circ id \otimes \varphi$ é injetor. Pela definição, $\mu_M(m \otimes c)(a) = a(c)m$, para $m \in M$, $a \in A$, e $c \in C$.

Dizemos que o A-módulo M é racional se $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$. Equivalentemente, se para todo $m \in M$, existem duas famílias finitas de elementos $(c_i)_i \subseteq C$ e $(m_i)_i \subseteq M$ tais que $am = \sum a(c_i)m_i = \mu_M(\sum m_i \otimes c_i)(a)$, $\forall a \in A$.

Além disso, se para $m \in M$, existem dois pares de famílias $(c_i)_i$, $(m_i)_i$ e $(c_j')_j$, $(m_j')_j$ tais que $\mu_M(\sum m_i \otimes c_i)(a) = \mu_M(\sum m_j' \otimes c_j')(a)$, $\forall a \in A$, então $\sum m_i \otimes c_i = \sum m_j' \otimes c_j'$, pois μ_M é injetivo.

A proposição e o teorema seguintes são parte de uma observação feita em ([12], pag. 518). A partir do que notamos acima sobre densidade de álgebras, é possível demonstrá-los.

Proposição 1.40. *Sejam C uma co-álgebra, C^* sua álgebra dual e A uma subálgebra densa em C^*. Então M é um A-módulo racional se, e somente se, M é um C^*-módulo racional.*

Teorema 1.41. *Com a notação da Proposição 1.40, as categorias $Rat(A\text{-}Mod)$ e $Rat(C^*\text{-}Mod)$ são isomorfas.*

Capítulo 2

Módulos Primos e Semiprimos numa Subcategoria de R-Mod

Em todo este capítulo, R é um anel não necessariamente comutativo. Lembramos que estamos trabalhando com módulos à esquerda quando nada for dito ao contrário.

2.1 Considerações iniciais

Nesta seção apresentamos uma subcategoria de R-Mod assim como suas propriedades. Seja

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{D}_R) = \{M \in R\text{-Mod} : R/An_R(M) \text{ é um anel artiniano à esquerda}\}.$$

Temos que $\mathcal{D}_R$ é uma subcategoria de R-Mod cujos morfismos são todos os homomorfismos de R-módulos à esquerda, isto é, $\mathcal{D}_R$ é uma subcategoria plena de R-Mod.

Trivialmente, se R é um anel artiniano à esquerda então a categoria $\mathcal{D}_R = R$-Mod e reciprocamente.

Em todo o capítulo, $\mathrm{Obj}(\mathcal{D}_R)$ é denotado por $\mathcal{D}_R$.

Proposição 2.1. *A categoria $\mathcal{D}_R$ é fechada para submódulos, módulos quocientes e somas diretas finitas.*

Demonstração: Sejam $M \in \mathcal{D}_R$ e $N \subseteq M$. Como $An_R(M) \subseteq An_R(N)$, podemos definir $f : R/An_R(M) \to R/An_R(N)$ por $f(r + An_R(M)) = r +$

$An_R(N)$, que claramente é um homomorfismo sobrejetor de anéis. Sabemos que toda imagem homomórfica de um anel artiniano à esquerda é também um anel artiniano à esquerda. Logo, $R/An_R(N)$ é artiniano à esquerda e portanto, $N \in \mathcal{D}_R$.

Notamos também que, $An_R(M) \subseteq An_R(M/N)$ e como anteriormente concluímos que $R/An_R(M/N)$ é artiniano à esquerda e portanto, $M/N \in \mathcal{D}_R$.

Vejamos que $\mathcal{D}_R$ é fechada para somas diretas finitas. De fato, sejam $M_1, \cdots, M_n \in \mathcal{D}_R$. Sabemos que $An_R(\sum_{i=1}^n \bigoplus M_i) = \bigcap_{i=1}^n An_R(M_i)$ e que o R-homomorfismo

$$\varphi : R/\bigcap_{i=1}^{n} An_R(M_i) \to \sum_{i=1}^{n} \bigoplus R/An_R(M_i)$$

dado por $\varphi(r+\bigcap_{i=1}^n An_R(M_i)) = (r+An_R(M_1), \cdots, r+An_R(M_n))$ é injetor.

Por hipótese, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, o anel $R/An_R(M_i)$ é artiniano à esquerda, então $\sum_{i=1}^n \bigoplus R/An_R(M_i)$ é um R-módulo artiniano à esquerda. Daí segue que, $R/\bigcap_{i=1}^n An_R(M_i)$ é um R-módulo artiniano à esquerda e portanto, um anel artiniano à esquerda. Logo, $\sum_{i=1}^n \bigoplus M_i \in \mathcal{D}_R$. $\square$

Lembramos as definições de categorias preaditivas e abelianas, para mais detalhes veja ([15], pag. 15 e 87). Uma categoria $\mathcal{C}$ é chamada preaditiva se satisfaz as seguintes condições:

(a) $\mathcal{C}$ possui o objeto zero.

(b) Para quaisquer objetos C, C' em $\mathcal{C}$, o conjunto de morfismos de C em C', denotado por $Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$, é um grupo abeliano.

(c) Para quaisquer objetos C, C' e C'' em $\mathcal{C}$, f, f_1 e $f_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ e g, g_1 e $g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(C', C'')$ valem as igualdades: $g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2$ e $(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f$.

A categoria $\mathcal{C}$ é dita abeliana se as condições (a), (b), (c) e (d) abaixo são satisfeitas.

(a) $\mathcal{C}$ é preaditiva.

(b) Toda família finita de objetos em $\mathcal{C}$ possui soma direta.

Seja $\alpha : C \to C'$ um morfismo em $\mathcal{C}$. O kernel de α, $\ker \alpha$, é um monomorfismo $\kappa : K \to C$ em $\mathcal{C}$ tal que $\alpha\kappa = 0$ e para todo morfismo $\varphi : K' \to C$ tal que $\alpha\varphi = 0$, existe um único morfismo $\gamma : K' \to K$ tal que $\varphi = \kappa\gamma$.

O cokernel de α, $\operatorname{coker}\alpha$, é um epimorfismo $c : C^{'} \to Y$ em $\mathcal{C}$ tal que $c\alpha = 0$ e para todo morfismo $\psi : C^{'} \to Y^{'}$ tal que $\psi\alpha = 0$, existe um único morfismo $\xi : Y \to Y^{'}$ tal que $\psi = \xi c$.
(c) Todo morfismo em $\mathcal{C}$ possui kernel e cokernel.
(d) Seja $\alpha : C \to C^{'}$ um morfismo em $\mathcal{C}$ com kernel $\kappa : K \to C$ e cokernel $c : C^{'} \to Y$. Então o morfismo $\bar{\alpha} : \operatorname{coker}(K \to C) \longrightarrow \ker(C^{'} \to Y)$ é um isomorfismo.

Sejam $M, N \in R$-Mod e $\alpha : M \to N$ um R-homomorfismo. Então a inclusão $i : \operatorname{Ker}\alpha \to M$, onde $\operatorname{Ker}\alpha = \{m \in M : \alpha(m) = 0\}$ e a projeção $\pi : N \to N/Im(\alpha)$ são os respectivos $\ker\alpha$ e $\operatorname{coker}\alpha$. O homomorfismo $\bar{\alpha} : \operatorname{coker} i = M/\operatorname{Ker}\alpha \to Im(\alpha) = \ker\pi$ é um isomorfismo. Com isso, é fácil ver que

Proposição 2.2. *A categoria $\mathcal{D}_R$ é abeliana.*

Embora $\mathcal{D}_R$ não seja fechada para somas diretas infinitas, se tivermos uma família qualquer $(M_i)_{i\in I}$ em $\mathcal{D}_R$ de módulos isomorfos, então é claro que $\sum_{i\in I} \bigoplus M_i \in \mathcal{D}_R$, pois $An_R(\sum_{i\in I} \bigoplus M_i) = An_R(M_i)$, para todo $i \in I$.

Proposição 2.3. *Seja $M \in \mathcal{D}_R$. Então a categoria $\sigma[M]$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{D}_R$.*

Demonstração: De fato, seja $N \in \sigma[M]$. Então existem um conjunto de índices I e um epimorfismo $\varphi : M^{(I)} \to N^{'}$, para algum R-módulo $N^{'}$ que contém N.

É claro que $An_R(M^{(I)}) = An_R(M)$. Logo, $R/An_R(M^{(I)}) = R/An_R(M)$ é artiniano à esquerda, pois $M \in \mathcal{D}_R$. Portanto, $M^{(I)} \in \mathcal{D}_R$ e sendo que $\mathcal{D}_R$ é fechada para quocientes, segue que $N^{'} \in \mathcal{D}_R$. Mas $\mathcal{D}_R$ é fechada para submódulos e isto nos dá que $N \in \mathcal{D}_R$. Logo, $\sigma[M] \subseteq \mathcal{D}_R$.

Como $\sigma[M]$ é uma subcategoria plena de R-Mod, podemos concluir que $Hom_{\sigma[M]}(N, P) = Hom_{R\text{-Mod}}(N, P) = Hom_{\mathcal{D}_R}(N, P)$, para quaisquer $N, P \in \sigma[M]$. $\square$

Qualquer resultado provado para módulos em $\mathcal{D}_R$ vale para um módulo qualquer em $\sigma[M]$ desde que $M \in \mathcal{D}_R$.

2.2 Módulos primos e fortemente primos

Apresentamos agora resultados relativos aos módulos primos e fortemente primos tomados em $\mathcal{D}_R$. Primeiramente, mostramos uma proposição que é usada na prova de resultados desta seção.

Proposição 2.4. *Seja A um anel artiniano à esquerda e M um A-módulo à esquerda fiel, isto é, $An_A(M) = 0$. Então M possui um A-submódulo simples.*

Demonstração: Sendo A um anel artiniano à esquerda, então A possui um ideal à esquerda minimal I. Temos que existe $0 \neq x \in M$ tal que $Ix \neq 0$, caso contrário, $I \subseteq An_A(M) = 0$, e isto é absurdo, pois I é minimal.

Afirmamos que Ix é simples. De fato, seja $0 \neq N \subseteq Ix$. Então existe $0 \neq n \in N$ tal que $0 \neq An \subseteq N$. Temos que $n = yx$, para algum $y \in I$ não-nulo e isto implica que $0 \neq Ay \subseteq I$. Logo, $Ay = I$, pois I é minimal. Portanto, $An = Ayx = Ix$ e isto nos diz que $N = Ix$, ou seja, Ix é um submódulo simples de M. $\square$

A proposição acima nos diz que todo módulo não-nulo M em $\mathcal{D}_R$ possui um R-submódulo simples. Isto decorre do fato de que M possui um $R/An_R(M)$-submódulo simples que, obviamente, é simples como um R-módulo.

Proposição 2.5. *Seja $M \in \mathcal{D}_R$ um módulo primo. Então, salvo isomorfismos, M possui apenas um submódulo simples.*

Demonstração: Como $M \in \mathcal{D}_R$, temos que M possui um R-submódulo simples S. Suponhamos que exista outro R-submódulo simples S' de M. Sendo M um módulo primo, segue que $An_R(S) = An_R(M) = An_R(S')$.

Chamamos $I = An_R(M)$. Temos, por hipótese, que R/I é artiniano à esquerda e claramente é um anel primitivo à esquerda. Pela Proposição 1.5, R/I é um anel simples. Logo, R/I é isomorfo ao anel de matrizes $\mathbb{M}_n(D)$, para algum anel de divisão D e algum inteiro $n \geq 1$, pela Proposição 1.6.

O anel $\mathbb{M}_n(D)$ possui, a menos de isomorfismo, um único módulo simples D^n, veja ([8], Ch. 1, Th. 3.3). Portanto, S e S' são R/I-módulos isomorfos e claramente são isomorfos como R-módulos. $\square$

Observação 2.6. Devido ao isomorfismo entre os anéis R/I e $M_n(D)$, podemos enxergar D^n como um módulo sobre R/I. Portanto, os submódulos simples isomorfos de M podem ser vistos como isomorfos a D^n.

O teorema seguinte é uma caracterização dos módulos primos em $\mathcal{D}_R$.

Teorema 2.7. *Seja $M \in \mathcal{D}_R$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *M é um R-módulo primo.*
(ii) *$M = \sum_{i\in\Omega} \bigoplus M_i$, onde os $M_i^{'}s$ são R-submódulos simples de M, isomorfos dois a dois, e Ω é um conjunto de índices.*
(iii) *O anel $R/An_R(M)$ é simples (e artiniano à esquerda).*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Como $M \in \mathcal{D}_R$ segue, pela Proposição 2.4, que M possui um R-submódulo simples S. Além disso, $An_R(M) = An_R(S)$, pois M é um R-módulo primo.

Chamamos $I = An_R(M)$. Temos então que R/I é um anel primitivo à esquerda e por ser também artiniano à esquerda, segue que R/I é um anel simples. Pela Proposição 1.6, R/I é um anel semi-simples. Então M é um R/I-módulo semi-simples e é claro que os R/I-submódulos simples de M são R-submódulos simples de M e reciprocamente. Portanto, M é um R-módulo semi-simples. Logo, M é uma soma direta de submódulos simples que, pela proposição anterior, são isomorfos dois a dois.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como $M = \sum_{i\in\Omega} \bigoplus M_i$, onde os $M_i^{'}s$ são submódulos simples de M, isomorfos dois a dois, segue que $An_R(M) = An_R(M_i)$, para todo $i \in \Omega$. Logo, $R/An_R(M)$ é um anel primitivo à esquerda. Pela Proposição 1.5, $R/An_R(M)$ é um anel simples.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $0 \neq N \subseteq M$. Então $An_R(M) \subseteq An_R(N) \subsetneq R$. Sendo o anel $R/An_R(M)$ simples, segue que $An_R(M)$ é um ideal maximal de R. Logo, $An_R(M) = An_R(N)$ e M é um módulo primo. $\square$

No Capítulo 1, vimos que módulos fortemente primos são primos. Provamos agora que módulos primos em $\mathcal{D}_R$ são fortemente primos, isto é, vale a recíproca. Não encontramos nenhuma prova na literatura do resultado abaixo, embora o mesmo seja conhecido. Então fazemos uma breve prova.

Lema 2.8. *A soma direta qualquer de módulos fortemente primos isomorfos é um módulo fortemente primo.*

Demonstração: Seja $M = \sum_{i\in I} \bigoplus M_i$, onde os $M_i^{'}s$ são módulos fortemente primos isomorfos e I é um conjunto de índices qualquer.

Seja $\mathcal{T}$ uma classe de pretorsão hereditária em $\sigma[M]$. Como os $M_i^{'}s$ são fortemente primos e isomorfos, segue que $\mathcal{T}(M_i) = 0$, $\forall i \in I$ ou $\mathcal{T}(M_i) = M_i$, $\forall i \in I$, pelo item (vi) do Teorema 1.17.

Suponhamos que $\mathcal{T}(M_i) = 0$, $\forall i \in I$. Consideramos as projeções canônicas $\pi_j : \sum_{i \in I} \bigoplus M_i \rightarrow M_j$. Então $\pi_j(\mathcal{T}(\sum_{i \in I} \bigoplus M_i)) \subseteq \mathcal{T}(M_j) = 0$, $\forall j$. Logo, $\mathcal{T}(\sum_{i \in I} \bigoplus M_i) = 0$.

Suponhamos que $\mathcal{T}(M_i) = M_i$, $\forall i \in I$ e tomamos as inclusões $i_j : M_j \rightarrow \sum_{i \in I} \bigoplus M_i$. Então $M_j = \mathcal{T}(M_j) \subseteq \mathcal{T}(\sum_{i \in I} \bigoplus M_i)$, $\forall j \in I$. Logo, $\sum_{i \in I} \bigoplus M_i \subseteq \mathcal{T}(\sum_{i \in I} \bigoplus M_i)$ e portanto, $\sum_{i \in I} \bigoplus M_i = \mathcal{T}(\sum_{i \in I} \bigoplus M_i)$. Concluímos que M é fortemente primo. $\square$

Teorema 2.9. *Seja $M \in \mathcal{D}_R$ um módulo primo. Então M é fortemente primo.*

Demonstração: Pelo item (ii) do Teorema 2.7, M é uma soma direta de submódulos simples isomorfos dois a dois. Sabemos que todo módulo simples é fortemente primo. Logo, pelo lema anterior segue que M é fortemente primo. $\square$

O Teorema 2.7 nos diz que os módulos primos em $\mathcal{D}_R$ são semi-simples, cujos submódulos simples são todos isomorfos. Logo, M é injetivo em $\sigma[M]$ e portanto, $M = \widehat{M}$. Assim, temos a seguinte versão do Teorema 1.17 para módulos em $\mathcal{D}_R$.

Teorema 2.10. *Seja $M \in \mathcal{D}_R$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *M é um R-módulo fortemente primo.*

(ii) *M é um R-módulo primo.*

(iii) *M é gerado por cada um de seus submódulos não-nulos.*

(iv) *M não possui submódulos completamente invariantes não-triviais (isto é, se $N \subseteq M$ é tal que $f(N) \subseteq N$, $\forall f \in End_R(M)$, então $N = 0$ ou $N = M$).*

(v) *Para toda classe de pretorsão $\mathcal{T}$ em $\sigma[M]$, $\mathcal{T}(M) = M$ ou $\mathcal{T}(M) = 0$.*

Demonstração: A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) vale para um módulo qualquer em R-Mod, veja Proposição 1.18. Pelo Teorema 2.9, temos que (ii) $\Rightarrow$ (i). A implicação (iii) $\Rightarrow$ (i) é clara.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Seja N um submódulo não-nulo de M. Por (i), M é N-subgerado. Como M é injetivo em $\sigma[M]$, segue da Observação 1.14 que M é N-gerado.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Seja $L \neq 0$ um submódulo completamente invariante de M. Por hipótese, $M \in \sigma[L]$. Pelo que observamos anteriormente ao teorema, M é injetivo em $\sigma[M]$, então pela Observação 1.14, M é L-gerado, isto é, $M = Tr(L, M)$. Usando a M-injetividade de M e por ser L completamente invariante, temos que $M = Tr(L, M) = End_R(M)L \subseteq L$. Logo, $M = L$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Seja $\mathcal{T}$ uma classe de pretorsão em $\sigma[M]$. É claro que $\mathcal{T}(M)$ é um submódulo completamente invariante de M, isto segue do item (iii) da Proposição 1.15. Por (iv), $\mathcal{T}(M) = M$ ou $\mathcal{T}(M) = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (i) Seja K um submódulo não-nulo de M. Temos que $\mathcal{T} = \sigma[K]$ é uma classe de pretorsão hereditária em $\sigma[M]$ e portanto, uma classe de pretorsão.

Como $K \in \mathcal{T}$, temos que $0 \neq K \subseteq \mathcal{T}(M) = \sum\{U \subseteq M, U \in \mathcal{T}\}$, pois $\mathcal{T}(M)$ é o maior submódulo de M que pertence à $\mathcal{T}$. Por (v), $\mathcal{T}(M) = M$ e isto nos diz que $M \in \sigma[K]$. Logo, M é um R-módulo fortemente primo. $\square$

2.3 Módulos primos sobre anéis perfeitos

Nesta seção mostramos que módulos primos sobre um anel perfeito (à direita) R são módulos em $\mathcal{D}_R$. Apresentamos apenas um resultado sobre anéis perfeitos que é importante nesta seção, para mais detalhes sobre estes anéis, veja ([8], Ch. 8).

Dizemos que um subconjunto A de um anel R é T-nilpotente à direita se, para toda seqüência de elementos $\{a_1, a_2, \cdots\} \subseteq A$, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $a_n \cdots a_2 a_1 = 0$. No que segue, $J(R)$ é o radical de Jacobson de R.

Definição 2.11. *Um anel R é dito perfeito à direita se $R/J(R)$ é artiniano à esquerda (e à direita) e $J(R)$ é T-nilpotente à direita.*

Teorema 2.12. ([8], Th. 23.20) *Para um anel R as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *R é perfeito à direita.*

(ii) *R satisfaz condição de cadeia descendente sobre ideais à esquerda principais.*
(iii) *Todo R-módulo à esquerda satisfaz condição de cadeia descendente sobre R-submódulos cíclicos.*
(iv) *R não contém uma família ortogonal infinita de idempotentes não-nulos, e todo R-módulo à esquerda não-nulo N contém um submódulo simples.*

Proposição 2.13. *Sejam R um anel perfeito à direita e S um R-módulo à esquerda simples. Então $R/An_R(S)$ é artiniano à esquerda.*

Demonstração: Temos que $J(R)$ é a interseção dos anuladores de todos os R-módulos (à esquerda) simples. Logo, para todo R-módulo simples S, podemos definir $f : R/J(R) \to R/An_R(S)$ por $f(r + J(R)) = r + An_R(S)$, que claramente é um homomorfismo sobrejetor de anéis. Sendo R um anel perfeito à direita, segue que $R/J(R)$ é artiniano à esquerda. Logo, $R/An_R(S)$ é artiniano à esquerda. $\square$

Teorema 2.14. *Sejam R um anel perfeito à direita e M um R-módulo à esquerda primo. Então $M \in \mathcal{D}_R$.*

Demonstração: Sendo R um anel perfeito à direita, segue de (iv) do Teorema 2.12 que todo R-módulo possui um submódulo simples. Logo, M possui um R-submódulo simples S. Sendo M um módulo primo, segue que $An_R(M) = An_R(S)$. Pela proposição anterior, temos que $R/An_R(M)$ é artiniano à esquerda. Portanto, $M \in \mathcal{D}_R$. $\square$

Portanto, temos o seguinte resultado para módulos sobre anéis perfeitos à direita.

Teorema 2.15. *Sejam R um anel perfeito à direita e M um R-módulo à esquerda. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *M é um módulo primo.*
(ii) *M é um módulo fortemente primo.*
(iii) *$M = \sum_{i\in\Omega} \oplus M_i$, onde os $M_i^{'}s$ são R-submódulos simples de M, isomorfos dois a dois, e Ω é um conjunto de índices.*
(iv) *O anel $R/An_R(M)$ é simples (e artiniano à esquerda)*
(v) *M é gerado por cada um de seus submódulos não-nulos.*

(vi) *M não possui submódulos completamente invariantes não-triviais.*

(vii) *Para toda classe de pretorsão $\mathcal{T}$ em $\sigma[M]$, $\mathcal{T}(M) = M$ ou $\mathcal{T}(M) = 0$.*

2.4 Módulos semiprimos e fortemente semiprimos

Aqui apresentamos resultados relativos aos módulos semiprimos e fortemente semiprimos em $\mathcal{D}_R$. Como na seção anterior, estabelecemos uma equivalência entre módulos semiprimos e fortemente semiprimos, o que também não ocorre em geral.

Lema 2.16. *Seja A um anel. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) *Se M é um A-módulo semiprimo e fiel, então A é um anel semiprimo.*

(ii) *M é um A-módulo semiprimo se, e somente se, M é um $A/An_A(M)$-módulo semiprimo e fiel.*

Demonstração: (i) Seja $a \in A$ tal que $aAa = 0$. Então, $\forall m \in M$, temos que $aAam = 0$. Sendo M semiprimo, segue que $am = 0, \forall m \in M$. Logo, $a \in An_A(M) = 0$, pois M é fiel. Portanto, A é um anel semiprimo.

A prova de (ii) é óbvia. □

Lembramos que o socle de um módulo M, denotado por $s(M)$, é a soma de todos os seus submódulos simples. Na categoria $\mathcal{D}_R$, todo módulo possui socle essencial. De fato, sejam $M \in \mathcal{D}_R$ e N um submódulo não-nulo de M. Então N possui um R-submódulo simples que é também um R-submódulo simples de M. Logo, $N \cap s(M) \neq 0$ donde segue que $s(M)$ é um submódulo essencial em M.

Teorema 2.17. *Seja $M \in \mathcal{D}_R$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *M é um módulo semi-simples.*

(ii) *M é um módulo fortemente semiprimo.*

(iii) *M é um módulo semiprimo.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Foi mostrado na Proposição 1.22.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos que M seja fortemente semiprimo. Sabemos, pela Proposição 1.21, que M é subgerado por todo submódulo essencial dele. Logo,

M é subgerado pelo seu socle, isto é, $M \in \sigma[s(M)]$. Sendo $s(M)$ um R-módulo semi-simples, segue que M é semi-simples.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Segue da Proposição 1.9.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja M um módulo semiprimo. Como $M \in \mathcal{D}_R$, $R/An_R(M)$ é um anel artiniano à esquerda. Também, M é um $R/An_R(M)$-módulo semiprimo fiel e por (i) do lema anterior, $R/An_R(M)$ é um anel semiprimo. Pela Proposição 1.5, $R/An_R(M)$ é um anel semi-simples. Portanto, M é um $R/An_R(M)$-módulo semi-simples donde segue que M é um R-módulo semi-simples. $\square$

Corolário 2.18. *Seja $M \in \mathcal{D}_R$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *M é um módulo semiprimo.*
(ii) *M é uma soma direta de módulos primos.*
(iii) *M é uma soma de módulos primos.*
(iv) *Todo submódulo N de M, que é semiprimo como R-módulo, é um somando direto de M.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Pelo Teorema 2.17, M é semi-simples. Então $M = \sum \bigoplus S_i$, onde cada S_i é um módulo simples e portanto primo. A implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) é clara.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos que $M = \sum M_i$, onde os $M_i^{'} s$ são módulos primos e portanto semi-simples, pelo Teorema 2.7. Logo, M é um módulo semi-simples e daí semiprimo, pelo teorema anterior.

(i) $\Rightarrow$ (iv) É claro, pois sendo M semiprimo, M é semi-simples. Logo, todo submódulo de M é um somando direto dele.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Seja $\sum_{i \in I} M_i$ a soma de submódulos de M tal que cada M_i é um módulo primo. Pelo Teorema 2.7, M_i é semi-simples para todo $i \in I$. Logo, $\sum_{i \in I} M_i$ é um módulo semi-simples e portanto semiprimo.

Suponhamos que $\sum_{i \in I} M_i$ seja um submódulo próprio de M. Por (iv), existe um submódulo N de M tal que $\sum_{i \in I} M_i \oplus N = M$. Sendo que $N \in \mathcal{D}_R$, então N possui um submódulo simples S. Temos que S é um módulo primo. Portanto, $S \subseteq \sum_{i \in I} M_i \cap N$ e isto é uma contradição. Logo, $M = \sum_{i \in I} M_i$. $\square$

2.5 Uma questão de J. Dauns

Dado um anel R, o radical primo de R, que é denotado por $Nil_*(R)$, é a interseção de todos os ideais primos de R. É bem conhecido que R é um anel semiprimo se, e somente se, $Nil_*(R) = 0$, para mais detalhes veja ([8], Ch. 4).

O resultado a seguir é provado por Dauns em ([2], Prop. 1.20), apresentamos uma rápida prova do mesmo.

Proposição 2.19. ([2], Prop. 1.20) *Sejam R um anel e M um R-módulo. Se $\bigcap\{N : N$ é um submódulo de M primo em $M\} = (0)$ então M é semiprimo.*

Demonstração: Suponhamos que existam $r \in R$ e $m \in M$ tais que $rRrm = 0$, mas $rm \neq 0$. Então existe um submódulo primo K de M tal que $rm \notin K$. Assim, $r \notin An_R(M/K)$, mas $rRrm = (0) \subseteq K$ e isto contradiz o fato de K ser um submódulo primo em M. Logo, M é semiprimo. $\square$

Em seus trabalhos ([3] e [4]), Dauns levanta a questão: vale a recíproca da proposição acima?

Jenkins e Smith, em ([14], pag. 3600), apresentam um contra-exemplo, que segue abaixo, no qual mostram que a recíproca não vale, em geral. Caso seja necessário para entender este exemplo, veja ([14], Th. 11).

Exemplo: Sejam $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros e $R = \mathbb{Z}[X]$ o anel de polinômios sobre $\mathbb{Z}$. Por F, denota-se o R-módulo livre $R \oplus R$ de R, f o elemento $(2, X)$ de F e P o ideal maximal $R2 + RX$ de R. Então $N = Pf$ é um submódulo semiprimo de F que não é uma interseção de submódulos primos em F.

O objetivo desta seção é mostrar que vale a recíproca da Proposição 2.19 para módulos em $\mathcal{D}_R$.

Teorema 2.20. *Seja $M \in \mathcal{D}_R$. Então M é um módulo semiprimo se, e somente se, $\bigcap\{N : N$ é um submódulo de M primo em $M\} = (0)$.*

Demonstração: Se a interseção dos submódulos primos em M é nula então M é um módulo semiprimo, pela Proposição 2.19.

Seja M um módulo semiprimo. Pelo Teorema 2.17, M é semi-simples e portanto, M pode ser escrito na forma $M = \sum_{i \in I} \bigoplus M_i$, onde cada M_i é um módulo simples.

Para cada $j \in I$, tomamos a projeção $\pi_j : \sum_{i\in I} \bigoplus M_i \to M_j$. É fácil ver que $Ker(\pi_j) = \sum_{i\neq j} \bigoplus M_i$. Logo, para todo $j \in I$, temos que o módulo quociente $M/\sum_{i\neq j} \bigoplus M_i$ é isomorfo a M_j, que é um módulo simples e portanto, um módulo primo.

Portanto, $M_j^{'} = \sum_{i\neq j} \bigoplus M_i$ é um submódulo primo em M para todo j, e é claro que $\bigcap\{M_j^{'} : j \in I\} = (0)$. Portanto, a interseção de todos os submódulos primos em M é zero. $\square$

Capítulo 3

Co-módulos Primos e Semiprimos

Em todo este capítulo, C é uma co-álgebra e C^* é a sua álgebra dual. Trabalhamos com co-módulos à direita sobre a co-álgebra C. Para facilitar a escrita, diremos co-módulos à direita ficando subentendido que C é a co-álgebra considerada.

Neste capítulo, definimos e caracterizamos co-módulos à direita primos, fortemente primos, semiprimos e fortemente semiprimos.

Lembremos do Capítulo 2 que

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{D}_{C^*}) = \{M \in C^*\text{-Mod} : C^*/An_{C^*}(M) \text{ é um anel artiniano à esquerda}\}$$

e que denotamos $\mathrm{Obj}(\mathcal{D}_{C^*})$ por $\mathcal{D}_{C^*}$.

Ao considerarmos módulos primos em $Rat(C^*\text{-Mod})$, mostramos que os mesmos são objetos da categoria $\mathcal{D}_{C^*}$ e portanto valem os resultados do Capítulo 2 nexte contexto.

3.1 Co-módulos primos e fortemente primos

Nesta seção, definimos co-módulos primos, fortemente primos e mostramos que estas definições são equivalentes. Além disso, damos alguns resultados que caracterizam os mesmos.

Definição 3.1. *Um co-módulo à direita M é dito fortemente primo se M é fortemente primo como um C^*-módulo à esquerda.*

Definição 3.2. *Um co-módulo à direita M é dito primo se M é primo como um C^*-módulo à esquerda.*

Notamos um fato sobre anuladores de um C^*-módulo à esquerda racional.

Observação 3.3. Seja $M \in Rat(C^*\text{-Mod})$. Então $\forall\, x \in M$, $An_{C^*}(x)$ é um ideal à esquerda de C^* fechado, veja ([1], Th. 2.2.14 (ii)). Como $An_{C^*}(M) = \bigcap_{0 \neq x \in M} An_{C^*}(x)$, então $An_{C^*}(M)$ é um ideal fechado de C^*, pois é uma interseção de fechados.

Chamamos $I = An_{C^*}(M)$. Pela Proposição 1.27, $I^{\perp}$ é uma subco-álgebra de C. Assim, $i^* : C^* \to (I^{\perp})^*$ definida por $i^*(c^*) = c^* \circ i$, para todo $c^* \in C^*$, é um morfismo sobrejetor de álgebras, onde $i : I^{\perp} \hookrightarrow C$ é a inclusão. Observamos que $Ker(i^*) = I^{\perp\perp} = I$, pois I é fechado. Logo, $C^*/I \simeq (I^{\perp})^*$.

Lembremos que dado um anel R, um R-módulo à esquerda M diz-se finitamente anulado se existem elementos $m_1, m_2, \cdots, m_n \in M$ tais que $\bigcap_{i=1}^{n} An_R(m_i) = An_R(M)$.

Proposição 3.4. *Seja M um módulo primo em $Rat(C^*\text{-Mod})$. Então todo C^*-submódulo não-nulo N de M é finitamente anulado e $C^*/An_{C^*}(N)$ é uma k-álgebra finito dimensional.*

Demonstração: Sejam N um C^*-submódulo não-nulo de M e $0 \neq n \in N$. Temos pela Proposição 1.34, que C^*n é finito dimensional e portanto finitamente anulado. Logo, existem $c_i^* \in C^*$, $i = 1, 2, ..., n$ tais que $An_{C^*}(C^*n) = \bigcap_{i=1}^{n} An_{C^*}(c_i^*n)$. Sendo M primo, segue que $\bigcap_{i=1}^{n} An_{C^*}(c_i^*n) = An_{C^*}(C^*n) = An_{C^*}(M) = An_{C^*}(N)$. Logo, N é finitamente anulado.

Mostremos que $C^*/An_{C^*}(M)$ é finito dimensional. De fato, basta observarmos que a função abaixo é injetora,

$$\begin{aligned} C^*/I \quad &\to \quad \bigoplus_{i=1}^{n} C^*/An_{C^*}(m_i) \\ c^* + I \quad &\mapsto \quad (c^* + An_{C^*}(m_1), \cdots, c^* + An_{C^*}(m_n)) \end{aligned}$$

onde $I = An_{C^*}(N) = \bigcap_{i=1}^{n} An_{C^*}(m_i)$ e $m_i = c_i^*n$, para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, a função $f : C^* \to C^*m_i$, dada por $f(c^*) = c^*m_i$ é sobrejetora. Portanto, $C^*/An_{C^*}(m_i) \simeq C^*m_i$ e este é finito dimensional. Logo, C^*/I é finito dimensional. $\square$

Proposição 3.5. *Seja $M \in Rat(C^*\text{-}Mod)$ um módulo finitamente gerado. Então $C^*/An_{C^*}(M)$ é finito dimensional.*

Demonstração: Pela Proposição 1.34, temos que M é finito dimensional, logo finitamente anulado. O restante é semelhante à prova da proposição anterior. $\square$

Segue da Proposição 3.4 que qualquer módulo primo em $Rat(C^*\text{-Mod})$ tem a propriedade que $C^*/An_{C^*}(M)$ é artiniano à esquerda (e à direita) e claramente temos que

Corolário 3.6. *Todo módulo primo em $Rat(C^*\text{-}Mod)$ é um módulo em $\mathcal{D}_{C^*}$.*

Corolário 3.7. *Seja M um co-módulo primo. Então M é fortemente primo.*

Demonstração: Temos que M é um C^*-módulo à esquerda racional primo e pelo corolário acima, $M \in \mathcal{D}_{C^*}$. Do Teorema 2.9, segue que M é um C^*-módulo à esquerda racional fortemente primo. Logo, M é um co-módulo à direita fortemente primo. $\square$

Lembremos alguns resultados existentes na literatura a respeito de co-módulos simples.

Proposição 3.8. ([1], Sec. 2.4) *Um co-módulo à direita S sobre uma co-álgebra C é simples se, e somente se, S é simples como um C^*-módulo à esquerda racional.*

Proposição 3.9. ([1], Sec. 3.1) *Seja C uma co-álgebra. Então todo co-módulo simples sobre C é um co-módulo sobre uma co-álgebra simples.*

Demonstração: Seja S um co-módulo simples. Então S é um C^*-módulo racional simples pela proposição acima. Portanto, S é um $C^*/An_{C^*}(S)$-módulo simples fiel.

Temos que $((An_{C^*}(S))^\perp)^* \simeq C^*/An_{C^*}(S)$ e este último é finito dimensional pela Proposição 3.4, isto é, a álgebra $((An_{C^*}(S))^\perp)^*$ é artiniana simples. Logo, pela Proposição 1.39, a co-álgebra $(An_{C^*}(S))^\perp$ é simples e S é um co-módulo à direita sobre esta co-álgebra. $\square$

Embora já tenhamos dito no Capítulo 1, dado um co-módulo à direita M, a co-álgebra $(An_{C^*}(M))^\perp$ é a co-álgebra associada a M.

Proposição 3.10. ([1], Sec. 3.1) *Seja C uma co-álgebra e sejam M e N dois co-módulos à direita simples sobre C. Então M e N são isomorfos se, e somente se, possuem a mesma co-álgebra associada.*

Devido ao Corolário 3.6 e também ao isomorfismo entre as categorias $\mathcal{M}^C$ e $Rat(C^*\text{-Mod})$, provamos os resultados que seguem.

Teorema 3.11. *Seja $M \in \mathcal{M}^C$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *M é um co-módulo à direita primo.*
(ii) *$M = \sum_{i\in\Omega} \bigoplus M_i$, onde os $M_i^{'}s$ são subco-módulos simples de M, isomorfos dois a dois, e Ω é um conjunto de índices.*
(iii) *A co-álgebra associada ao co-módulo M, $(An_{C^*}(M))^{\perp}$, é simples.*
(iv) *Todo subco-módulo não-nulo de M possui a mesma co-álgebra associada ao co-módulo M.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sendo M um co-módulo à direita primo, segue que M é um C^*-módulo à esquerda racional primo. Então $M \in \mathcal{D}_{C^*}$ e portanto, pelo Teorema 2.7, M é uma soma direta de C^*-submódulos simples M_i para i em um conjunto de índices Ω, que são isomorfos dois a dois.

Pela Proposição 3.8, M é uma soma direta de co-módulos simples e é claro que estes são isomorfos dois a dois.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Novamente considerando M como um C^*-módulo à esquerda racional, segue de (ii) que $An_{C^*}(M) = An_{C^*}(M_i)$, para todo $i \in \Omega$. Logo, $(An_{C^*}(M))^{\perp} = (An_{C^*}(M_i))^{\perp}$ para todo i. Como cada M_i é simples, segue da prova da Proposição 3.9 que $(An_{C^*}(M))^{\perp}$ é simples.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Seja N um subco-módulo não-nulo de M. Considerando-os como C^*-módulos, temos que $An_{C^*}(M) \subseteq An_{C^*}(N)$ e daí, $(An_{C^*}(N))^{\perp} \subseteq (An_{C^*}(M))^{\perp}$. Sendo a co-álgebra $(An_{C^*}(M))^{\perp}$ simples, segue que $(An_{C^*}(M))^{\perp} = (An_{C^*}(N))^{\perp}$, pois se a co-álgebra $(An_{C^*}(N))^{\perp} = 0$, então $N = 0$ e isto é um absurdo.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Seja N um subco-módulo não-nulo de M. Por (iv), temos que $(An_{C^*}(N))^{\perp} = (An_{C^*}(M))^{\perp}$ donde segue que $An_{C^*}(N) = An_{C^*}(M))$, pois os anuladores são ideais fechados em C^*. Logo, M é um C^*-módulo primo e portanto um co-módulo primo. $\square$

Observação 3.12. Seja C uma co-álgebra finito dimensional. Então todo C^*-módulo à esquerda é racional.

De fato, seja M um C^*-módulo à esquerda. Mostremos que $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$, onde $\rho_M : M \to Hom(C^*, M)$, $\rho_M(m)(c^*) = c^*m$, $m \in M$ e $c^* \in C^*$ e $\mu_M = f_M(id \otimes j) : M \otimes C \to Hom(C^*, M)$, $\mu_M(m \otimes c)(c^*) = c^*(c)m$, para $c \in C$, $c^* \in C^*$ e $m \in M$, estas aplicações estão definidas no Capítulo 1, Seção 1.5.

Por hipótese, C é finito dimensional logo, C^* também o é. Portanto, as aplicações k-lineares $f_M : M \otimes C^{**} \to Hom(C^*, M)$ e $id \otimes j : M \otimes C \to M \otimes C^{**}$ são isomorfismos. Logo, $\mu_M(M \otimes C) = Hom(C^*, M)$.

Portanto, $\rho_M(M) \subseteq Hom(C^*, M) = \mu_M(M \otimes C)$, isto é, M é racional.

Corolário 3.13. *Se existe um C^*-módulo racional primo e fiel, então todo C^*-módulo é fiel e portanto primo. Em particular, as categorias C^*-Mod e $Rat(C^*$-Mod$)$ coincidem.*

Demonstração: Suponhamos P um C^*-módulo racional primo e fiel. Temos pelo teorema acima, que $(An_{C^*}(P))^{\perp}$ é simples. Como $An_{C^*}(P) = 0$, segue que $C = (An_{C^*}(P))^{\perp}$ é simples e pela Proposição 1.39 a k-ágebra C^* é simples (e artiniana). Logo, todo C^*-módulo é fiel e portanto primo.

Sendo a co-álgebra C simples, então C é finito dimensional. Pela observação acima, segue que todo C^*-módulo à esquerda é racional, isto é, as categorias C^*-Mod e $Rat(C^*$-Mod$)$ são as mesmas. □

Seja M um co-módulo à direita. Denotamos por $End_C(M)$ ao conjunto de todos os morfismos do co-módulo M.

Definição 3.14. *Seja M um co-módulo à direita. Dizemos que o subco-módulo N de M é completamente invariante se $f(N) \subseteq N$, $\forall f \in End_C(M)$.*

Lema 3.15. *Seja $M \in \mathcal{M}^C$. Então M é subgerado por todo subco-módulo não-nulo dele se, e somente se, M é um C^*-módulo racional fortemente primo.*

Demonstração: Suponhamos que M seja subgerado por todo subco-módulo não-nulo dele. Seja N um C^*-submódulo não-nulo de M. Então N é um subgerador de M como um co-módulo. Portanto, existem um co-módulo M', um conjunto de índices Ω e morfismo sobrejetor $f : N^{(\Omega)} \to M'$ de co-módulos à direita, onde $M \subseteq M'$. É claro que M' é um C^*-módulo racional e f é um epimorfismo de C^*-módulos. Logo, M é N-subgerado como C^*-módulo, isto é, M é um C^*-módulo fortemente primo. A recíproca é semelhante. $\square$

O Teorema 3.11 diz que um módulo à esquerda racional primo M é semi-simples, e portanto injetivo em $\sigma[M]$. Logo, M é um co-módulo injetivo em $\sigma[M]^c$. Temos o seguinte teorema:

Teorema 3.16. *Sejam $M \in \mathcal{M}^C$ e A uma subálgebra densa da álgebra dual C^*. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(i) *M é um co-módulo fortemente primo.*
(ii) *M é um D-co-módulo fortemente primo, onde $D = (An_{C^*}(M))^{\perp}$.*
(iii) *M é gerado por cada um de seus subco-módulos não-nulos.*
(iv) *M não possui subco-módulos completamente invariantes não-triviais.*
(v) *Para toda classe de pretorsão $\mathcal{T}$ em $\sigma[M]^c$, $\mathcal{T}(M) = M$ ou $\mathcal{T}(M) = 0$.*
(vi) *M é um A-módulo à esquerda racional fortemente primo.*
(vii) *Para todo $0 \neq x \in M$, existem $n = n(x)$ e $a_1^*, \cdots, a_n^* \in C^*$ tais que $\bigcap_{j=1}^{n} An_{C^*}(a_j^* x) = An_{C^*}(M)$.*

Demonstração: A equivalência (i)$\Leftrightarrow$(ii) segue do fato de que M é um D^*-módulo à esquerda racional fortemente primo, onde $D^* \simeq C^*/An_{C^*}(M)$ se, e somente se, M é um C^*-módulo à esquerda racional fortemente primo.

(iii) $\Rightarrow$ (i) é claro.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Temos que M é um co-módulo à direita fortemente primo, logo um C^*-módulo à esquerda racional fortemente primo e portanto primo. Pelo Corolário 3.6, $M \in \mathcal{D}_{C^*}$ e portanto, pelo Teorema 2.10, M é gerado pelos seus C^*-submódulos não-nulos. Logo, M é gerado por cada um de seus subco-módulos não-nulos.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Seja $0 \neq N$ um subco-módulo completamente invariante de M. Por (i), M é um C^*-módulo à esquerda racional primo, donde segue que $M \in \mathcal{D}_{C^*}$. Claramente N é um C^*-submódulo de M completamente invariante. Logo, pelo Teorema 2.10, $M = N$ como C^*-módulos à esquerda racionais e portanto, como co-módulos à direita.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Seja $\mathcal{T}$ uma classe de pretorsão em $\sigma[M]^c$. Temos que $\mathcal{T}(M)$ é um subco-módulo completamente invariante de M. Logo, $\mathcal{T}(M) = M$ ou

$\mathcal{T}(M) = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (i) Seja K um subco-módulo não-nulo de M. Então $\mathcal{T} = \sigma[K]^c$ é uma classe de pretorsão hereditária em $\sigma[M]^c$ e portanto, uma classe de pretorsão.

Como $0 \neq K \in \mathcal{T}$, segue que $K \subseteq \mathcal{T}(M)$, pois $\mathcal{T}(M)$ é o maior subco-módulo de M que pertence à $\mathcal{T}$. Por (v), $\mathcal{T}(M) = M$ donde segue que M é subgerado por K. Logo, pelo Lema 3.15, M é um C^*-módulo à esquerda racional fortemente primo e portanto um co-módulo fortemente primo.

(i) $\Rightarrow$ (vi) Seja N um A-submódulo não-nulo de M. Então, pelo Teorema 1.41, N é um C^*-submódulo racional de M. Por (i), M é um C^*-módulo à esquerda racional fortemente primo, isto é, existem um C^*-módulo K, um conjunto de índices Ω e um epimorfismo $f : N^{(\Omega)} \to K$ de C^*-módulos, onde $M \subseteq K$. É claro que K é um A-módulo, que é N-gerado como um A-módulo e f é um epimorfismo de A-módulos racionais. Portanto, M é N-subgerado como um A-módulo, ou seja, $M \in \sigma[{}_A N]$, para todo A-submódulo não-nulo N de M.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Seja N um C^*-submódulo não-nulo de M. Então, pelo Teorema 1.41, N é um A-submódulo racional de M e, pela hipótese, M é N-subgerado como um A-módulo. Portanto, existem um A-módulo M', um conjunto de índices I e um epimorfismo de A-módulos $\varphi : N^{(I)} \to M'$, onde $M \subseteq M'$. Pelo Teorema 1.41, temos que φ é um epimorfismo de C^*-módulos. Portanto, M é N-subgerado como um C^*-módulo, isto é, M é um C^*-módulo à esquerda racional fortemente primo. Logo, M é um co-módulo fortemente primo.

(i) $\Rightarrow$ (vii) Seja $0 \neq x \in M$. Então C^*x é um submódulo não-nulo de M e, pela Proposição 1.34, C^*x é finito dimensional. Logo, finitamente anulado, isto é, existem $c_1^*, \cdots, c_n^* \in C^*$ tais que $\bigcap_{i=1}^n An_{C^*}(c_i^* x) = An_{C^*}(C^*x)$.

Sendo M um co-módulo fortemente primo, segue que M é um C^*-módulo racional fortemente primo e portanto primo. Logo, $An_{C^*}(C^*x) = An_{C^*}(M)$ donde segue que $\bigcap_{i=1}^n An_{C^*}(c_i^* x) = An_{C^*}(M)$.

(vii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $0 \neq x, y \in M$. Então por (vii), existem $n = n(x)$ e $a_1^*, \cdots, a_n^* \in C^*$ tais que $\bigcap_{j=1}^n An_{C^*}(a_j^* x) = An_{C^*}(M) \subseteq An_{C^*}(y)$. Pelo Teorema 1.17, M é um C^*-módulo racional fortemente primo. Logo, um co-módulo fortemente primo. $\square$

3.2 Co-módulos semiprimos e fortemente semiprimos

Definimos e caracterizamos os co-módulos semiprimos e fortemente semiprimos.

Definição 3.17. *Um co-módulo à direita M é dito fortemente semiprimo se M é fortemente semiprimo como um C^*-módulo à esquerda racional.*

Definição 3.18. *Um co-módulo à direita M é dito semiprimo se M é semiprimo como um C^*-módulo à esquerda racional.*

Os módulos à esquerda racionais semiprimos não estão em $\mathcal{D}_{C^*}$, em geral. No final desta seção, apresentamos um exemplo que mostra este fato. Apesar disso, garantimos os resultados que foram obtidos no Capítulo 2 para os mesmos. Isto ocorre, pois todo C^*-módulo à esquerda racional cíclico M é finitamente anulado e portanto, a k-álgebra $C^*/An_{C^*}(M)$ é finito dimensional e em particular, é artiniana à esquerda (e à direita).

Seja M um co-módulo à direita. Considerando M como um C^*-módulo à esquerda racional, podemos tomar o socle de M, $s(M)$, que é a soma dos C^*-submódulos simples de M. Como C^*-submódulos simples de M são subco-módulos simples de M, podemos considerar $s(M)$ como sendo a soma dos subco-módulos simples de M.

Sabemos que todo co-módulo possui um subco-módulo simples, veja Proposição 1.35. Logo, todo C^*-módulo à esquerda racional M possui um C^*-submódulo simples e daí, $s(M)$ é essencial em M.

Lembramos que um co-módulo M é co-semi-simples se M é uma soma de subco-módulos à direita simples.

Teorema 3.19. *Seja $M \in \mathcal{M}^C$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *M é um co-módulo co-semi-simples.*

(ii) *M é um co-módulo fortemente semiprimo.*

(iii) *M é um co-módulo semiprimo.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Por (i), M é um C^*-módulo à esquerda racional semi-simples. Pela Proposição 1.22, M é um módulo fortemente semiprimo, logo um co-módulo fortemente semiprimo.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Temos por (ii) que M é um C^*-módulo à esquerda racional fortemente semiprimo. Pelo que observamos anteriormente ao teorema, $s(M)$ é essencial em M.

Segue da Proposição 1.21 que M é subgerado pelo seu socle. Logo, M é um módulo semi-simples e portanto, um co-módulo co-semi-simples.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Por (i), M é um C^*-módulo à esquerda racional semi-simples e portanto, pela Proposição 1.9 temos que M é um módulo semiprimo. Logo, M é um co-módulo semiprimo.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja M um co-módulo à direita semiprimo. Então M é um C^*-módulo à esquerda racional semiprimo. Podemos escrever $M = \sum_{m \in M} C^*m$, então é suficiente provar que todo C^*-submódulo cíclico é semi-simples. É claro que C^*m é um módulo semiprimo para todo $m \in M$.

Pelo Lema 2.16, $C^*/An_{C^*}(C^*m)$ é um anel semiprimo que é também artiniano à esquerda, pois pela Proposição 3.5, é finito dimensional.

Segue da Proposição 1.5, que $C^*/An_{C^*}(C^*m)$ é semi-simples. Logo, C^*m é um $C^*/An_{C^*}(C^*m)$-módulo à esquerda racional semi-simples e portanto um C^*-módulo semi-simples.

Logo, M é um C^*-módulo semi-simples, então $M = s(M)$ e pelo que observamos acima, M é a soma de seus subco-módulos à direita simples, isto é, um co-módulo à direita co-semi-simples. $\square$

Corolário 3.20. *Seja $M \in \mathcal{M}^C$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *M é um co-módulo semiprimo.*
(ii) *M é uma soma direta de co-módulos primos.*
(iii) *M é uma soma de co-módulos primos.*
(iv) *Todo subco-módulo N de M, que é um co-módulo semiprimo, é um somando direto de M.*

O exemplo abaixo exibe um módulo à esquerda racional semiprimo que não está em $\mathcal{D}_{C^*}$ para uma determinada co-álgebra C.

Exemplo: Seja $(C_i)_{i=1,2,\cdots}$ a família de co-álgebras de matrizes, $C_i = M^c(i,k)$. Podemos tomar a soma direta desta família, pois a categoria das co-álgebras é fechada para somas diretas, veja ([1], Prop. 1.4.19).

Chamamos $C = \sum_{i=1}^{\infty} \bigoplus C_i$. Vemos, por definição, que a co-multiplicação da co-álgebra C, Δ_C, restrita a C_i é igual a Δ_{C_i}, isto é, $\Delta_C(C_i) = \Delta_{C_i}(C_i) \subseteq C_i \otimes C_i \subseteq C_i \otimes C$ para todo i. Logo, cada C_i é um co-módulo à direita sobre a co-álgebra C.

Segue de ([1], Ex. 1.3.15), que cada C_i é isomorfa à $M_i(k)^*$, onde $M_i(k)$ é o anel de matrizes $i \times i$ sobre k. Logo, a co-álgebra C_i é simples, para todo i. Portanto, pelo Teorema 4.5, que veremos no Capítulo 4, cada C_i é um C_i^*-módulo à esquerda racional primo (e fiel, pois C_i^* é simples) e portanto um co-módulo primo sobre si mesmo.

Notamos que $C^* \simeq \prod_{i=1}^{\infty} C_i^*$ como k-álgebras. Para um i fixo, temos que $An_{C^*}(C_i) = \prod_{j \neq i} C_j^*$. Usando este fato e também que C_i como um C_i^*-módulo é primo, segue que C_i é um C^*-módulo primo. Logo, C_i é um co-módulo primo sobre a co-álgebra C.

Sendo i fixo, mas arbitrário temos que C é uma soma direta de co-módulos primos. Logo, pelo corolário acima, C é um co-módulo semiprimo e daí, um C^*-módulo semiprimo.

Temos que $An_{C^*}(C) = \bigcap_i An_{C^*}(C_i) = 0$ e portanto, $C^*/An_{C^*}(C) \simeq C^*$ que não é artiniano à esquerda e isto termina o exemplo.

O Teorema 3.19 prova que todo C^*-módulo à esquerda racional semiprimo é semi-simples e reciprocamente. Neste caso, temos uma resposta afirmativa para a questão de J. Dauns, vista no Capítulo 2.

Teorema 3.21. *Seja $M \in Rat(C^*\text{-}Mod)$. Então M é módulo semiprimo se, e somente se, $\bigcap\{N : N \text{ é um submódulo de } M \text{ primo em } M\} = (0)$.*

Capítulo 4

Co-álgebras Primas

Como dissemos no Capítulo 1, C pode ser visto como um co-módulo à direita sobre a co-álgebra $C \otimes C^{cop}$ devido ao fato de que as categorias ${}^{C}\mathcal{M}^{C}$ e $\mathcal{M}^{C \otimes C^{cop}}$ são isomorfas. Usando este fato, definimos as co-álgebras primas. Estas co-álgebras são completamente determinadas.

Definição 4.1. *Seja C uma co-álgebra. Dizemos que C é prima se C é primo como um $(C \otimes C^{cop})^*$-módulo à esquerda racional.*

O seguinte lema é bem conhecido em álgebra linear.

Lema 4.2. ([1], Lemma 1.3.2) *Sejam V, W, X k-espaços vetoriais e consideramos as aplicações k-lineares: $\phi : V^* \otimes X \to Hom_k(V, X)$, $\phi' : Hom_k(V, W^*) \to (V \otimes W)^*$ e $\rho : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ definidas por:*
$\phi(f \otimes x)(v) = f(v)x$, onde $f \in V^*$, $x \in X$ e $v \in V$.
$\phi'(g)(v \otimes w) = g(v)(w)$, onde $g \in Hom_k(V, W^*), v \in V$ e $w \in W$.
$\rho(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w)$, onde $f \in V^*, g \in W^*, v \in V$ e $w \in W$. Então,
(i) *ϕ é injetora. Se X é finito dimensional, então ϕ é um isomorfismo.*
(ii) *ϕ' é um isomorfismo.*
(iii) *ρ é injetora. Se W é finito dimensional, então ρ é um isomorfismo.*

Proposição 4.3. *Seja C uma co-álgebra. Então $C^* \otimes C^{*op}$ é uma subálgebra densa em $(C \otimes C^{cop})^*$.*

Demonstração: Consideremos a aplicação $\varphi : C^* \otimes C^{*op} \to (C \otimes C^{cop})^*$ k-linear, definida por $\varphi(f \otimes g)(c \otimes d) = f(c)g(d)$. Por (iii) do lema anterior,

φ é injetora. A multiplicação em $C^* \otimes C^{*op}$ é dada por $(f \otimes g)(f' \otimes g') = f * f' \otimes g' * g$, onde $f, f' \in C^*$ e $g, g' \in C^{*op}$. Não é difícil ver que φ é um morfismo de k-álgebras.

Vejamos que $Im\varphi$ é uma subálgebra densa em $(C \otimes C^{cop})^*$. Seja $z \in (Im\varphi)^{\perp}$, então $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in C \otimes C^{cop}$.

Para quaisquer $f \in C^*$ e $g \in C^{*op}$, temos que $\varphi(f \otimes g)(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(y_i) = 0$ e podemos considerar os $y_i{}'s$ linearmente independentes.

Assim, existe $h \in C^{*op}$ tal que $h(y_i) \neq 0$ e $h(y_j) = 0$, para $j \neq i$. Temos que $0 = \varphi(f \otimes h)(z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h(y_i) = f(x_i)$, para todo $f \in C^*$ e isto implica que $x_i = 0$. Como $i \in \{1, \cdots, n\}$ é arbitrário, segue que $z = 0$. Logo, $(Im\varphi)^{\perp} = \{0\}$. □

Corolário 4.4. *Seja C uma co-álgebra. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *C é um $C \otimes C^{cop}$-co-módulo fortemente primo.*

(ii) *C é um $C \otimes C^{cop}$-co-módulo primo.*

(iii) *C é um D-co-módulo fortemente primo, onde $D = (An_{(C \otimes C^{cop})^*}(C))^{\perp}$.*

(iv) *C é gerado por cada um de seus $C \otimes C^{cop}$-subco-módulos não-nulos.*

(v) *C não possui subco-módulos completamente invariantes não-triviais.*

(vi) *Para toda classe de pretorsão $\mathcal{T}$ em $\sigma[C]^{C \otimes C^{cop}}$, $\mathcal{T}(C) = C$ ou $\mathcal{T}(C) = 0$.*

(vii) *C é um $C^* \otimes C^{*op}$-módulo fortemente primo.*

(viii) *Para todo $0 \neq x \in C$, existem $n = n(x)$ e $a_1^*, \cdots, a_n^* \in (C \otimes C^{cop})^*$ tais que $\bigcap_{j=1}^{n} An_{(C \otimes C^{cop})^*}(a_j^* x) = An_{(C \otimes C^{cop})^*}(C)$.*

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 3.16. □

Agora, consideramos a co-álgebra C como um co-módulo à esquerda (e à direita). Observamos que se a co-álgebra C é simples, então todo C^*-módulo é fiel. Em particular, o C^*-módulo à esquerda (à direita) racional C é primo.

Teorema 4.5. *Seja C uma co-álgebra. Então C é simples se, e somente se, C é um C^*-módulo à esquerda (à direita) primo.*

Demonstração: Obviamente, se C é simples, então ${}_{C^*}C$ é primo. Suponhamos que C não seja simples. Mostremos que C não é C^*-módulo à esquerda fortemente primo e isto é equivalente a mostrarmos que C não é um C^*-módulo primo.

Pelo Teorema 1.38, C possui uma subco-álgebra simples D que é própria, pois C não é simples. Sendo D finito dimensional, existe $\mathscr{C} = \{c_t, t \in F\} \subseteq C$, base de D com $F \subseteq \mathbb{N}$ finito.

Completamos $\mathscr{C}$ a uma base de C, digamos $\mathscr{C}' = \{c_l, l \in F \cup \Omega\}$, onde Ω é um conjunto de índices disjunto de F. Podemos escrever $C = D \oplus E$, onde E é o subespaço complementar de D em C gerado pelos elementos $c_l{}'s$ com $l \in \Omega$.

Tomamos $0 \neq x \in D$. Seja $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ uma família finita qualquer de elementos em C^*. Sendo que $\Delta(x) = \sum_{i,j \in F} \alpha_{ij}\, c_i \otimes c_j$, onde os $\alpha_{ij}{}'s$ estão todos em k e os $c_i{}'s$ e $c_j{}'s$ estão em D, segue que $f_q x = \sum_{i,j \in F} \alpha_{ij} f_q(c_j) c_i$, para todo $q \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Agora, tomamos $0 \neq y \in E$, então $0 \neq \Delta(y) \in D \otimes D \oplus D \otimes E \oplus E \otimes D \oplus E \otimes E$.

Se $\Delta(y) \in D \otimes D$ então $\Delta(y) = \sum_{r,s \in F} \beta_{rs}\, c_r \otimes c_s \in D \otimes D$ e pela propriedade da co-unidade $y = \sum_{r,s \in F} \beta_{rs}\, \varepsilon(c_r) c_s = \sum_{r,s \in F} \beta_{rs}\, \varepsilon(c_s) c_r \in D$ e isto é um absurdo.

Com o mesmo raciocínio, utilizando a propriedade da co-unidade, mostramos que $\Delta(y) \notin D \otimes E$, $\Delta(y) \notin E \otimes D$ e se $\Delta(y)$ possui termos onde os elementos de E não aparecem simultaneamente nas duas posições, então $\Delta(y)$ contém necessariamente termos com elementos de E na $1^{\underline{a}}$ posição e termos com elementos de E na $2^{\underline{a}}$ posição.

Consideramos $\Delta(y) = \sum \alpha_{rs}\, c_r \otimes c_s + \sum \alpha_{uv}\, c_u \otimes c_v + \sum \alpha_{tw}\, c_t \otimes c_w + \sum \alpha_{zl}\, c_z \otimes c_l$, onde os índices r, s, u e w estão em um subconjunto I_1 de F (os respectivos c_r, c_s, c_u e c_w estão em D), os índices v, t, z e l estão em um subconjunto finito I_2 de Ω (os respectivos c_v, c_t, c_z e c_l estão em E) e os $\alpha_{\imath\jmath}{}'s$ estão todos em k para quaisquer $\imath, \jmath \in I_1 \cup I_2$.

Pelo que vimos acima (usando a propriedade da co-unidade), segue que existe um índice $\eta_o \in I_2$ tal que $\alpha_{\eta_o p} \neq 0$ ou $\alpha_{p \eta_o} \neq 0$, para algum $p \in I_1 \cup I_2$. Consideramos o caso em que $\alpha_{\eta_o p} \neq 0$, o outro é análogo.

Suponhamos que $p \in I_2$. Então $c_p^* y = \sum \alpha_{up}\, c_u + \sum \alpha_{zp}\, c_z$, onde $c_p^* \in C^*$ é tal que $c_p^*(c_j) = \delta_{p,j}$, para todo $j \in F \cup \Omega$.

Afirmamos que $c_p^* y \neq 0$, pois caso contrário, teremos que $\sum \alpha_{up}\, c_u = 0$ e $\sum \alpha_{zp}\, c_z = 0$. Segue que $\alpha_{zp} = 0$ para todo z, em particular, $\alpha_{\eta_o p} = 0$ e isto é um absurdo.

Para todo $q \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos que

$$c_p^*(f_q x) = \sum_{i,j \in F} \sum \alpha_{ij}\, f_q(c_j)\, c_p^*((c_i)_2)(c_i)_1 = 0,$$

pois $c_p^*((c_i)_2) = 0$, onde $\Delta(c_i) = \sum (c_i)_1 \otimes (c_i)_2$. Logo, $c_p^* \in \bigcap_{q=1}^n An_{C^*}(f_q x)$, mas $c_p^* \notin An_{C^*}(y)$. Portanto, ${}_{C^*}C$ não é fortemente primo.

Suponhamos que $p \in I_1$. Então $\alpha_{\eta_o p}\, c_{\eta_o} \otimes c_p \in E \otimes D$ e vimos acima que é necessário a existência de um elemento não-nulo em $D \otimes E$ ou em $E \otimes E$. Em qualquer um dos dois casos, usando o mesmo raciocínio anterior, se obtém novamente uma contradição.

Logo, o C^*-módulo à esquerda C não é primo. $\square$

Observação 4.6. Seja C uma co-álgebra. Se C é simples então C é prima. De fato, basta observarmos que os $(C \otimes C^{cop})^*$-submódulos racionais de C são exatamente as subco-álgebras de C e vice-versa. Segue então que C é um $(C \otimes C^{cop})^*$-módulo racional simples e portanto primo. Logo, a co-álgebra C é prima.

O teorema seguinte mostra que as co-álgebras primas são apenas as simples.

Teorema 4.7. *Seja C uma co-álgebra. Então C é simples se, e somente se, C é prima.*

Demonstração: Pela observação acima, se C é simples então C é prima. Suponhamos que C não seja simples. Provemos que C não é prima. Sabemos pelo Teorema 1.38, que C contém uma subco-álgebra simples D que é própria, pois C não é simples. Sendo D finito dimensional, existe $\mathscr{B} = \{c_t, t \in F\} \subseteq C$, base de D, com $F \subseteq \mathbb{N}$ finito.

Completamos $\mathscr{B}$ a uma base de C, digamos $\mathscr{B}' = \{c_l, l \in F \cup I\}$, onde I é um conjunto de índices disjunto de F. Podemos escrever $C = D \oplus E$, onde E é o subespaço complementar de D em C gerado pelos elementos $c_l' s$, com $l \in I$.

Tomamos $0 \neq x \in D$. Seja $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ uma família finita qualquer de elementos em $C^* \otimes C^{*op}$. Então $t_q = \sum_{\alpha_q=1}^{n_q} h_{\alpha_q} \otimes g_{\alpha_q}$, $\forall q \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Sendo que $(\Delta \otimes id)\Delta(x) = \sum_{i,j,l \in F} \alpha_{ijl}\, c_i \otimes c_j \otimes c_l$, onde os $\alpha_{ijl}{}'s$ estão todos em k e os $c_i{}'s$, $c_j{}'s$ e $c_l{}'s$ estão em D, segue para todo $q \in \{1, \cdots, n\}$ que $t_q x = \sum_{\alpha_q=1}^{n_q} \sum_{i,j,l \in F} \alpha_{ijl} h_{\alpha_q}(c_l) g_{\alpha_q}(c_i) c_j$. Aqui, enxergamos C como um $C \otimes C^{cop}$-co-módulo à direita.

Tomamos $0 \neq y \in E$, então $0 \neq (\Delta \otimes id)\Delta(y) \in D \otimes D \otimes D \oplus D \otimes D \otimes E \oplus D \otimes E \otimes D \oplus E \otimes D \otimes D \oplus D \otimes E \otimes E \oplus E \otimes D \otimes E \oplus E \otimes E \otimes D \oplus E \otimes E \otimes E$.

Se $(\Delta \otimes id)\Delta(y) \in D \otimes D \otimes D$ então $(\Delta \otimes id)\Delta(y) = \sum_{r,s,t \in F} \beta_{rst}\, c_r \otimes c_s \otimes c_t \in D \otimes D \otimes D$ e pela propriedade da co-unidade $y = \sum_{r,s,t \in F} \beta_{rst}\, \varepsilon(c_r)\varepsilon(c_s) c_t = \sum_{r,s,t \in F} \beta_{rst}\, \varepsilon(c_s)\varepsilon(c_t) c_r = \sum_{r,s,t \in F} \beta_{rst}\, \varepsilon(c_r)\varepsilon(c_t) c_s \in D$ e isto é um absurdo.

Usando novamente a propriedade da co-unidade, temos que $(\Delta \otimes id)\Delta(y)$ decompõe-se em apenas um dos subespaços acima de $C \otimes C \otimes C$ se, e somente se, $(\Delta \otimes id)\Delta(y) \in E \otimes E \otimes E$. Também, se $(\Delta \otimes id)\Delta(y)$ contém termos onde os elementos de E não aparecem simultaneamente nas três posições, então o mesmo contém necessariamente termos com elementos de E na $1^{\underline{a}}$ posição, termos com elementos de E na $2^{\underline{a}}$ posição e termos com elementos de E na $3^{\underline{a}}$ posição.

Consideremos

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(y) &= \sum \alpha_{r_1 s_1 t_1}\, c_{r_1} \otimes c_{s_1} \otimes c_{t_1} + \sum \alpha_{u_1 v_1 w_1}\, c_{u_1} \otimes c_{v_1} \otimes c_{w_1} \\
&= \sum \alpha_{p_1 q_1 z_1}\, c_{p_1} \otimes c_{q_1} \otimes c_{z_1} + \sum \alpha_{l_1 g_1 h_1}\, c_{l_1} \otimes c_{g_1} \otimes c_{h_1} \\
&= \sum \alpha_{r_2 s_2 t_2}\, c_{r_2} \otimes c_{s_2} \otimes c_{t_2} + \sum \alpha_{u_2 v_2 w_2}\, c_{u_2} \otimes c_{v_2} \otimes c_{w_2} \\
&= \sum \alpha_{p_2 q_2 z_2}\, c_{p_2} \otimes c_{q_2} \otimes c_{z_2} + \sum \alpha_{l_2 g_2 h_2}\, c_{l_2} \otimes c_{g_2} \otimes c_{h_2},
\end{aligned}$$

onde os índices $r_1, s_1, t_1, u_1, v_1, p_1, z_1, g_1, h_1, r_2, v_2$ e z_2 estão em subconjunto I_1 de F (os respectivos $c_i{}'s$ indexados por eles estão em D), os índices $w_1, q_1, l_1, s_2, t_2, u_2, w_2, p_2, q_2, l_2, g_2$ e h_2 estão em um subconjunto finito de I_2 (os respectivos $c_i{}'s$ indexados por eles estão em E) e os $\alpha_{ij\ell}{}'s$ estão em k para quaisquer $i, j, \ell \in I_1 \cup I_2$.

Pelo que vimos acima (usando a propriedade da co-unidade), segue que existe um índice $\eta_o \in I_2$ tal que $\alpha_{\eta_o pq} \neq 0$ ou $\alpha_{p\eta_o q} \neq 0$ ou $\alpha_{pq\eta_o} \neq 0$, para alguns p e q em $I_1 \cup I_2$.

Os casos $\alpha_{\eta_o pq} \neq 0$ e $\alpha_{pq\eta_o} \neq 0$ são análogos. Faremos apenas um deles.

Suponhamos que $\alpha_{\eta_o pq} \neq 0$.

Se $p, q \in I_2$. Então tome $c_q^* \otimes c_{\eta_o}^* \in C^* \otimes C^{*op}$, onde $c_q^*(c_i) = \delta_{q,i}$ e $c_{\eta_o}^*(c_i) = \delta_{\eta_o,i}$ para todo $i \in F \cup I$.

Da mesma forma que no teorema anterior, suponhamos que $(c_q^* \otimes c_{\eta_o}^*)y = 0$. Então $(c_q^* \otimes c_{\eta_o}^*)y = \sum \alpha_{\eta_o v_2 q}\, c_{v_2} + \sum \alpha_{\eta_o g_2 q} c_{g_2} = 0$ e isto implica que $\sum \alpha_{\eta_o v_2 q}\, c_{v_2} = 0$ e $\sum \alpha_{\eta_o g_2 q} c_{g_2} = 0$ e portanto, $\alpha_{\eta_o g_2 q} = 0$ para todo g_2, em particular, para $g_2 = p$. Logo, $\alpha_{\eta_o pq} = 0$ e isto é um absurdo.

Também, $(c_q^* \otimes c_{\eta_o}^*)(t_q x) = 0$, pois $(\Delta \otimes id)\Delta(c_j) \in D \otimes D \otimes D$, $\forall j \in F$. Vemos que $c_q^* \otimes c_{\eta_o}^* \in \bigcap_{q=1}^{n} An_{C^* \otimes C^{*op}}(t_q x)$ mas $c_q^* \otimes c_{\eta_o}^* \notin An_{C^* \otimes C^{*op}}(y)$.

Se $p, q \in I_1$, $p \in I_1$ e $q \in I_2$ e $p \in I_2$ e $q \in I_1$ então tome $(c_q^* \otimes c_{\eta_o}^*) \in C^* \otimes C^{*op}$ e exatamente como acima teremos para todos estes casos que $c_q^* \otimes c_{\eta_o}^* \in \bigcap_{q=1}^{n} An_{C^* \otimes C^{*op}}(t_q x)$ mas $c_q^* \otimes c_{\eta_o}^* \notin An_{C^* \otimes C^{*op}}(y)$.

Suponhamos que $\alpha_{p\eta_o q} \neq 0$.

Se $p, q \in I_2$ então tome $c_q^* \otimes c_p^* \in C^* \otimes C^{*op}$, onde $c_q^*(c_i) = \delta_{q,i}$ e $c_p^*(c_i) = \delta_{p,i}$ para todo $i \in F \cup I$.

É fácil ver que $(c_q^* \otimes c_p^*)y \neq 0$ e que $(c_q^* \otimes c_p^*)(t_q x) = 0$ para todo $q \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Se $p, q \in I_1$. Então $\alpha_{p\eta_o q} c_p \otimes D \otimes E \otimes D$. Sabemos pela propriedade da co-unidade que é necessário a existência de um termo não-nulo em $E \otimes E \otimes D$ ou em $E \otimes E \otimes E$ ou em $D \otimes E \otimes E$.

Se existe um termo não-nulo $\alpha_{p' {\eta_o}' q'}\, c_{p'} \otimes c_{{\eta_o}'} \otimes c_{q'}$ em $E \otimes E \otimes D$.

Tome $c_{q'}^* \otimes c_{p'}^* \in C^* \otimes C^{*op}$. É fácil ver que $(c_{q'}^* \otimes c_{p'}^*)y \neq 0$, entretanto $(c_{q'}^* \otimes c_{p'}^*)(t_q x) = 0$ para todo $q \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Os casos em que aparecem termos não-nulos em $E \otimes E \otimes E$ ou em $D \otimes E \otimes E$, assim como os casos em que $p \in I_1$ e $q \in I_2$ e que $p \in I_2$ e $q \in I_1$ são análogos.

Vemos que em todos os casos possíveis, ${}_{C^* \otimes C^{*op}}C$ não é fortemente primo, logo não é primo. $\square$

Como um corolário imediato temos

Corolário 4.8. *Seja C uma co-álgebra. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:*
(i) *C é um $(C \otimes C^{cop})^*$-módulo à esquerda primo.*
(ii) *${}_{C^*}C$ é um módulo primo.*
(iii) *C_{C^*} é um módulo primo.*
(iv) *C é uma co-álgebra simples.*

Segue abaixo um exemplo de uma co-álgebra simples C que, pelo corolário acima, é primo como um C^*-módulo à esquerda (e à direita).

Exemplo: Seja $C = M^c(n,k)$ a co-álgebra de matrizes. De ([1], Ex. 1.3.15), C é isomorfa à $M_n(k)^*$, onde $M_n(k)$ é o anel de matrizes $n \times n$ sobre k. Logo, a co-álgebra C é simples e, pelo corolário acima, ${}_{C^*}C$ é um módulo primo.

Temos que $C^* \simeq M_n(k)$, pois C é simples. Seja $V = {}_{C^*}k^n$, o único C^*-submódulo simples de C^*. Segue que $C^* \simeq V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$, onde $V_i \simeq V$, para todo i.

É fácil ver que $I_j = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \bigoplus V_i$ é um ideal à direita maximal de C^*. Logo, os ${I_j^{\perp}}' s$ são co-ideais à direita de C que são minimais, ou seja, $(I_j{}^{\perp})_j$ é uma família de subco-módulos simples de C, isomorfos dois a dois cuja soma é direta e igual a C.

Pode ser verificado que $I_j{}^{\perp}$ é o subco-módulo à direita de C gerado como um k-espaço pelas co-matrizes $\{e_{js} : s = 1, 2, \cdots, n\}$.

Como um comentário final deste trabalho, relacionamos a definição de co-álgebra prima dada por nós com a definição de co-álgebra co-prima que é dada em [11]. Mais recentemente, no preprint [7] esta definição é muito explorada. Para isso, introduzimos mais uma notação.

Seja C uma co-álgebra. Para quaisquer subespaços X e Y de C, denotamos por $X \wedge Y$ o subespaço

$$X \wedge Y = \Delta^{-1}(X \otimes C + C \otimes Y).$$

O subespaço $X \wedge Y$ é chamado "wedge" dos subespaços X e Y.

As definições e resultados seguintes são encontrados em [11].

Definição 4.9. *Uma subco-álgebra não-nula P da co-álgebra C é chamada co-prima se $P \subseteq X \wedge Y$ então $P \subseteq X$ ou $P \subseteq Y$, para quaisquer subco-*

álgebras X e Y de C. Em particular, uma co-álgebra C é dita co-prima se para quaisquer subco-álgebras X e Y de C tais que $C = X \wedge Y$ implica que $C = X$ ou $C = Y$.

Proposição 4.10. ([11], Prop. 1.2) *Seja C uma co-álgebra. A subco-álgebra P de C é co-prima se, e somente se, $P^{\perp}$ é um ideal primo de C^*.*

Pela Proposição 4.10, a co-álgebra C é co-prima se, e somente se, C^* é uma álgebra prima.

Lema 4.11. ([11], Prop. 1.3) *Toda subco-álgebra simples de uma co-álgebra C é co-prima. Em particular toda co-álgebra simples é co-prima.*

Lema 4.12. ([11], Th. 1.1) *Uma co-álgebra C finito dimensional é co-prima se, e somente se, C é simples.*

Teorema 4.13. *Seja C uma co-álgebra. Então C é prima se, e somente se, C é co-prima e finito dimensional.*

Demonstração: Se a co-álgebra C é prima então, pelo Teorema 4.7, C é simples e portanto, co-prima. Suponhamos C uma co-álgebra co-prima finito dimensional então, pelo Terema 4.12, C é simples e portanto, prima. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Dăscălescu, S., Năstăsescu, C. and Raianu, S., *"Hopf Algebras - An Introduction"*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York - Basel, 2001.

[2] Dauns, J., *"Prime Modules"*, J. Reine Angew. Math., 298, 156-181 (1978).

[3] Dauns, J., *"Semiprime Modules and Rings"*, Lecture Notes in Mathematics, $n^{\underline{o}}$ 1448, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[4] Dauns, J., *"Prime Modules and One-Sided Ideals"*. Ring Theory and Algebra III, Proceedings of the Third Oklahoma Conference, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 55, Marcel Dekker, Inc., New York - Basel, 1980.

[5] Fuller, K.R. and Anderson, F.W., *"Rings and Categories of Modules"*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2nd Edition, New York, 1992.

[6] Goodearl, K.R., *"Ring Theory - Nonsingular Rings and Modules"*, Marcel Dekker, Inc., New York - Basel, 1976.

[7] Jara, P., Merino, L.M., Ruiz, J.F., *"Prime Path Coalgebras"*, Preprint.

[8] Lam, T.Y., *"A First Course in Noncommutative Rings"*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[9] Montgomery, S., *"Hopf Algebras and Their Actions on Rings"*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, $n^{\underline{o}}$ 82, AMS, Providence, RI, 1993.

[10] Năstăsescu, C. and Torrecillas, B., *"Torsion Theories for Coalgebras"*, Journal of Pure and Applied Algebra, 97, 203-220 (1994).

[11] Nekooei, R. and Torkzadeh, L., *"Topology on Coalgebras"*, Bulletin of Iranian Mathematical Society, 27, $n^{\underline{o}}$ 2, 45-63 (2001).

[12] Radford, D.E., *"Coreflexive Coalgebras"*, Journal of Algebra, 26, 512-535 (1973).

[13] Raftery, J.G., *"On Strongly Prime Rings and Modules"*, Durban, 1986.

[14] Smith, P. and Jenkins, J., *"On the Prime Radical of a Module over a Commutative Ring"*, Comm. in Algebra, 20(12), 3593-3602 (1992).

[15] Stenström, Bo, *"Rings of Quotients"*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.

[16] Sweedler, M.E., *"Hopf Algebras"*, Benjamin, New York, 1969.

[17] Wisbauer, R., *"Modules and Algebras - Bimodule Structure and Group Actions on Algebras"*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., 81, Addison-Wesley, Longman, Harlow, 1996.

[18] Wisbauer, R., *"Foundations of Module and Ring Theory"*, Algebra, Logic and Applications Series Vol.3, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia - Reading - Paris - Montreux - Tokyo - Melbourne, 1991.