

VOLNEI TONIN ZANCHIN

**PROJETO DE CONTROLADORES PARA
SISTEMAS DE POTÊNCIA UTILIZANDO LMI'S**

Porto Alegre

2003

VOLNEI TONIN ZANCHIN

**PROJETO DE CONTROLADORES PARA
SISTEMAS DE POTÊNCIA UTILIZANDO LMI'S**

ORIENTADOR: Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica –PPGEE, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Instrumentação Eletro-Eletrônica.

Porto Alegre

2003

VOLNEI TONIN ZANCHIN

**PROJETO DE CONTROLADORES PARA
SISTEMAS DE POTÊNCIA UTILIZANDO LMI'S**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aguinaldo Silveira e Silva

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Prof. Dr. Romeu Reginatto

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Coordenador do PPGEE: _____

Prof. Dr. Carlos Eduardo Pereira

Porto Alegre, fevereiro de 2003.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à Elisandra, minha mulher, amiga, ajudante, companheira e grande incentivadora para a realização desse curso de mestrado. Uma grande mulher que, para minha sorte, está presente em todos os momentos de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir alcançar mais esse objetivo.

Agradeço aos meus pais pelo apoio e carinho durante toda minha vida e a minha sogra pela dedicação em todos os momentos.

Agradeço também ao prof. Alexandre, meu orientador, pela ajuda e paciência; aos meus colegas do mestrado, pela colaboração durante o curso e pelos momentos de descontração; e ao PPGEE pela oportunidade a mim oferecida.

RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo estudar e aprimorar métodos de projetos de controladores para sistemas de potência, sendo que esse trabalho trata da estabilidade dinâmica de sistemas de potência e, portanto, do projeto de controladores amortecedores de oscilações eletromecânicas para esses sistemas.

A escolha dos métodos aqui estudados foi orientada pelos requisitos que um estabilizador de sistemas de potência (ESP) deve ter, que são robustez, descentralização e coordenação. Sendo que alguns deles tiveram suas características aprimoradas para atender a esses requisitos.

A abordagem dos métodos estudados foi restringida à análise no domínio tempo, pois a abordagem temporal facilita a modelagem das incertezas paramétricas, para atender ao requisito da robustez, e também permite a formulação do controle descentralizado de maneira simples. Além disso, a abordagem temporal permite a formulação do problema de projeto utilizando desigualdades matriciais lineares (LMI's), as quais possuem como vantagem o fato do conjunto solução ser sempre convexo e a existência de algoritmos eficientes para o cálculo de sua solução.

De fato, existem diversos pacotes computacionais desenvolvidos no mercado para o cálculo da solução de um problema de inequações matriciais lineares. Por esse motivo, os métodos de projeto para controladores de saída buscam sempre colocar o problema na forma de LMI's, tendo em vista que ela garante a obtenção de solução, caso essa solução exista.

Palavras-chaves: Estabilizador de Sistema de Potência, Técnicas LMI, Controle Robusto, Estabilidade Dinâmica em Sistemas de Potência

ABSTRACT

The current work aims to study and improve the power system controllers design methods. And we are interested in the dynamic stability of power systems, and thus, in the design of electromechanical oscillations damping controllers.

The design methods studied here were chosen to fill the requirements that a power system stabilizer (PSS) must obey, that are robustness, decentralization and coordination. And the characteristics of some of these methods were improved and extended in order to meet these requirements.

The approach of the studied methods is restricted to the time domain analysis because of the easiness to model the parametric uncertainties, to meet the robustness requirement, and because it also simplifies the formulation of the decentralized control problem. Moreover the time domain approach allows one to use linear matrix inequalities (LMI's) to formulate the design problem, which has the advantages that the solution set is always convex, and that there exists efficient algorithms to compute its solution.

There are several software packages developed, in the market, to solve the problem of linear matrix inequality. So that the design methods using output controllers always try to formulate this problem in the form of an LMI, because it guarantees that one can obtain a solution for the problem, in the case that this solution exists.

Keywords: Power System Stabilizer, LMI Techniques, Robust Control, Dinamic Stability in Power Systems

Sumário

Introdução	13
1 Controle Robusto de Sistemas de Potência Utilizando LMI's	17
1.1 Modelagem de Sistemas de Potência	17
1.2 Controle Robusto	24
1.3 Requisitos para o Projeto de Controladores para Sistemas de Potência	25
1.4 Sistemas Exemplo	27
2 Métodos de Estabilidade Quadrática com Sistema Reduzido	37
2.1 Enfoque pela Equação de Riccati	37
2.1.1 Descrição do Problema	37
2.1.2 Restrição Estrutural	38
2.1.3 Formulação pela Equação de Riccati	39
2.1.4 Representação na Forma de LMI	40
2.1.5 Realimentação Dinâmica de Saída	42
2.1.6 Estudo de Caso para o Método da Equação de Riccati	43
2.2 Projeto de Controladores de Saída Descentralizados via Processo de Separação	45
2.2.1 Realimentação Dinâmica de Saída	45
2.2.2 Propriedades de Separação	48
2.2.3 Generalização do Princípio da Separação	49
2.2.4 Algoritmo de Decomposição Cruzada	51
2.2.5 Controle Descentralizado	51
2.2.6 Incertezas Limitadas em Norma	53
2.2.7 Incertezas Politópicas	55
2.2.8 Estudo de Caso para o Método da Separação	56
2.3 Método do Problema W e Problema P	56

2.3.1	Definição do Problema W e Problema P	57
2.3.2	Análise de Suficiência	58
2.3.3	Incertezas Politópicas	59
2.3.4	Incertezas Limitadas em Norma	61
2.3.5	Realimentação Descentralizada de Saída	62
2.3.6	Sistema Aumentado	63
2.3.7	Estudo de Caso para o Método do Problema W e Problema P	64
3	Técnicas LMI para Sistemas Singulares	67
3.1	Definição do Problema	67
3.2	Estabilidade e Estabilizabilidade Quadráticas	69
3.3	Realimentação de Estados	70
3.3.1	Estudo de Caso para Realimentação de Estados	71
3.4	Realimentação Estática de Saída	73
3.4.1	Estudo de Caso para Realimentação de Estática de Saída	74
3.5	Realimentação Dinâmica de Saída	76
3.5.1	Estudo de Caso para Realimentação de Dinâmica de Saída	78
3.6	Problema \mathcal{H}_2 e Realimentação de Estados	81
3.7	Problema \mathcal{H}_∞ e Realimentação de Estados	81
4	Funções de Liapunov Dependentes dos Parâmetros	83
4.1	Considerações Iniciais	83
4.2	Estabilidade Biquadrática	85
4.2.1	Formulação do Problema	85
4.2.2	Estabilidade Q_r e Casos Particulares	87
4.2.3	Estabilidade Q_2	89
4.2.4	Estabilidade Q_0	90
4.3	Projeto de Controladores com Funções de Liapunov Dependentes dos Parâmetros	91
4.3.1	Performance \mathcal{H}_2	92
4.3.2	Projeto de Controle \mathcal{H}_2	93
4.3.3	Estudo de Caso para o Método de Projeto de Controle \mathcal{H}_2 com Funções de Liapunov Dependentes dos Parâmetros	95

5	Análise de Resultados	97
5.1	Análise pelo Lugar das Raízes	97
5.2	Análise dos Resultados Obtidos	101
	Conclusão	107
	Referências	110

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Diagrama unifilar de um sistema MBI	27
Figura 5.1 – Diagrama de LR para o sistema Kundur com realimentação negativa e positiva	98
Figura 5.2 – Diagrama de LR para o sistema Paim com realimentação negativa e positiva .	98
Figura 5.3 – Resposta ao salto do sistema Kundur nominal realimentado	99
Figura 5.4 – Resposta ao salto do sistema Paim nominal realimentado	99
Figura 5.5 – Diagrama de LR para o sistema Kundur incerto	99
Figura 5.6 – Diagrama de LR para o sistema Paim incerto	100
Figura 5.7 – Resposta ao salto do sistema Kundur incerto realimentado	101
Figura 5.8 – Resposta ao salto do sistema Paim incerto realimentado	101

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Performance dos sistemas nominais realimentados	98
Tabela 5.2 – Performance dos sistemas incertos realimentados	100
Tabela 5.3 – Controladores projetados com os métodos estudados	102

Lista de Abreviaturas

CA: corrente alternada

CER: compensador estático reativo

CSC: compensador série chaveado

ESP: estabilizador de sistema de potência

FACTS: flexible AC transmission systems (sistemas de transmissão CA flexíveis)

Fig.: figura

Freq.: frequência

LMI: linear matrix inequality (desigualdade matricial linear)

LPV: linear parameter varying (linear a parâmetro variante)

LR: lugar das raízes

MBI: máquina-barras infinita

T.: tempo

Tab.: tabela

RAT: regulador automático de tensão

Realim.: realimentação

Resp.: resposta

SPD: semi-plano direito

SPE: semi-plano esquerdo

Introdução

A energia elétrica está cada vez mais presente nas diversas faces da vida moderna, tornando imprescindível a sua disponibilização para o consumo, tanto nas residências para manter o padrão de conforto, quanto nas indústrias para a produção de bens, além de muitas outras finalidades.

Para atender a esse fim, a geração, transmissão e distribuição da energia elétrica é provida por grandes sistemas interligados, conhecidos como sistemas de potência, ou sistemas de energia elétrica, os quais são projetados para atender às demandas de consumo.

Os sistemas de potência devem, além de disponibilizar a energia necessária para consumo, garantir a qualidade no fornecimento de energia exigidas pelos consumidores, entre as quais destacam-se a exigência de frequência e amplitude de tensão constantes, bem como a continuidade do fornecimento, sem interrupções.

Para atender a essas exigências, os sistemas de potência devem trabalhar de forma estável em uma ampla faixa de carga de consumo, isto é, com uma gama variada de pontos de operação, além de suportar eventos indesejáveis, tais como curto-circuitos ou quedas de linhas de transmissão. O que leva à necessidade de utilização de diversos tipos de dispositivos de proteção e controle, atuando em diferentes pontos do sistema.

A fim de manter a estabilidade do sistema nas diversas condições de operação, a amplitude da tensão é mantida constante, ou dentro de limites aceitáveis, com a utilização de reguladores automáticos de tensão (RAT's) e foram desenvolvidos os estabilizadores de sistemas de potência (ESP's) que em conjunto com os demais dispositivos de proteção, atuam para manter a continuidade do fornecimento de energia, através da estabilização do sistema com amortecimento de oscilações, ou seja, atuando de forma a manter a estabilidade dinâmica do sistema [1, 28, 26].

A estabilidade dinâmica, ou estabilidade para pequenos sinais, está associada ao surgimento, em sistemas de potência, de oscilações eletromecânicas que sustentam-se por longos períodos e crescem com o tempo [1]. Estas oscilações pouco amortecidas, ou com amortecimento negativo, podem causar problemas como o desgaste prematuro dos equipamentos e são prejudiciais à qualidade do fornecimento de energia elétrica.

A estabilidade dinâmica está, então, relacionada ao comportamento da trajetória do sistema, na vizinhança do ponto de equilíbrio, devido a variações no mesmo. Isto permite o emprego de modelos lineares para a análise e possibilita a utilização dos recursos fornecidos pela teoria dos sistemas lineares para descobrir se as variações de carga ou da topologia do sistema resultam em um ponto de equilíbrio para o qual o sistema apresenta suficiente amortecimento, garantindo a estabilidade do mesmo [12].

Como dito, os controladores utilizados para amortecer as oscilações eletromecânicas são os estabilizadores de sistemas de potência (ESP), que são utilizados amplamente para resolver o problema. O método de ajuste usado é, normalmente, baseado no controle clássico, utilizando uma abordagem seqüencial para o projeto, isto é, o ESP dos geradores são projetados um de cada vez [28].

Entretanto, as restrições impostas aos sistemas de potência modernos, tais como o crescimento da demanda, que sobrecarrega os sistemas, levam à operação com margens de estabilidade reduzidas. Além disso, a expansão e desregulamentação da geração, transmissão e distribuição da energia elétrica torna os sistemas de potência cada vez maiores e mais complexos, o que gera a necessidade do desenvolvimento de técnicas que levem em consideração as incertezas que surgem com a falta do total conhecimento de todos os sistemas envolvidos e com as situações não previstas na operação normal dos mesmos. Para tanto, surge a necessidade da utilização de técnicas que permitam incorporar a questão da robustez no projeto de controladores [5].

Algumas características devem ser sempre consideradas no estudo de sistemas de potência, entre elas está a necessidade de um controlador robusto, devido à variação dos pontos de operação, e também a necessidade de um projeto coordenado de diversos controladores descentralizados, devido à separação física das diversas máquinas síncronas a serem controladas num sistema de potência.

Considerando esse cenário, o objetivo da dissertação é listar e descrever, revisar, comparar e consolidar, aprimorar e testar os métodos de análise de estabilidade e projeto de controladores para sistemas de potência, levando em conta todos os requisitos que um projeto para sistemas desse tipo deve ter, como robustez, descentralização e coordenação. Espera-se poder comparar os métodos compilados num único trabalho de forma mais clara, para que as vantagens e desvantagens da utilização de cada um possam ser identificadas pelo leitor, através das comparações dos métodos e dos resultados obtidos com a aplicação deles para os sistemas utilizados como exemplo nos estudos de caso.

Para limitar o escopo da dissertação, a abordagem foi restringida à análise no domínio tempo, levando-se em conta que a abordagem temporal facilita a modelagem de incertezas paramétricas e permite a formulação do controle descentralizado de maneira simples, tendo em vista que o projeto coordenado e descentralizado e a observância das incertezas paramétricas são requisitos fundamentais no projeto de controladores para sistemas de potência.

Além disso, a abordagem temporal permite formular os problemas de análise e síntese utilizando desigualdades matriciais lineares (LMI's), as quais possuem como vantagem o fato do conjunto solução ser sempre convexo e a existência de algoritmos eficientes para o cálculo desta solução, além de outras propriedades [11, 27].

A variação da dinâmica do sistema é então modelada como incertezas variantes no tempo, em um modelo linear, o qual é obtido pela linearização do sistema de equações que descreve o sistema de energia, em torno do ponto de operação considerado. Utilizando a modelagem temporal, um enfoque largamente utilizado para estabilizar um sistema com parâmetros variantes no tempo é o da estabilidade quadrática, baseado na teoria de Liapunov. Nesta abordagem procura-se um controlador que estabilize os sistemas dentro de um determinado conjunto. Desta forma o controlador encontrado estabiliza robustamente todos os sistemas dentro deste conjunto, não importando quão rápida seja a variação dos parâmetros incertos do sistema, ou seja, leva-se em consideração que esta variação dos parâmetros no tempo pode ser infinitamente rápida.

A presente dissertação está, então, organizada da forma descrita nos parágrafos a seguir.

Inicialmente é apresentado o modelo do sistema de potência, incluindo os geradores síncronos, controladores e outros dispositivos, interligados pela rede de transmissão [1, 2, 22, 23]. Definindo-se, assim, o modelo global do sistema, pois todos os dispositivos a serem controlados são explicitados no modelo, possibilitando o projeto simultâneo de todos os seus controladores.

Em seguida são tratados e descritos os requisitos que o controlador (estabilizador) de sistemas de potência deve apresentar para poder ter sua aplicação prática. Esses requisitos orientaram a escolha dos métodos a serem estudados nesse trabalho, ou seja, buscou-se métodos que atendiam ou poderiam ter suas características estendidas para atender a tais requisitos.

A última sessão desse capítulo apresenta dois sistemas tipo máquina-barras infinita, retirados de [23] e [9] que são utilizados no decorrer do trabalho para o estudo de caso dos métodos de projeto.

No segundo capítulo inicia-se o estudo dos métodos de projeto de estabilizadores para sistemas de potência, apresentando os métodos que trabalham com a formulação reduzida das equações do sistema, isto é, sem a presença das variáveis algébricas. O primeiro método estudado trabalha com a equação de Riccati, originalmente utilizada para o projeto de controle ótimo, através do problema do regulador linear quadrático [21, 36, 38]. Em [5, 10, 9] são feitas modificações na equação de Riccati para atender ao projeto de controladores para sistemas de potência.

Em seguida é apresentado um método que utiliza os conceitos de separação de variáveis para projetar um controlador com custo garantido, por realimentação de saída [33]. Nesse trabalho são acrescentadas características para possibilitar a utilização do método em sistemas de potência. Nesse

caso, o método é estendido para a aplicação com sistemas incertos, tanto com incertezas politópicas quanto com incertezas limitadas em norma.

O último método do segundo capítulo utiliza uma formulação de suficiência para o problema de projeto e propõe a utilização de transformações de similaridade na busca da solução do problema [17]. Suas características são facilmente estendidas para atender aos requisitos necessários [37]. No presente trabalho o método é estendido para aplicações com incertezas limitadas em norma.

O terceiro capítulo trata exclusivamente de métodos que se utilizam do modelo de sistemas de potência tratando de forma explícita as variáveis algébricas do modelo [29, 24]. Várias formulações LMI's são propostas, envolvendo realimentação de estados, realimentação estática e realimentação dinâmica de saída [3]. Nesse trabalho o método é organizado dando enfoque para a realimentação estática e dinâmica de saída para a aplicação em sistemas de potência.

No quarto capítulo os parâmetros variáveis no tempo também são incluídas na formulação do problema de controle, além das variáveis de estado [41, 40, 43, 42]. Objetiva-se, dessa forma, reduzir a conservatividade na busca da solução para o projeto de controle. Embora bastante promissores, os métodos apresentados nesse capítulo não tratam da realimentação de saída, portanto sua aplicação prática é restrita [31, 32]. Entretanto, tratam-se de métodos com formulação recente e cujo aprimoramento pode ocorrer nos próximos anos, por isso a importância de sua compilação nesse trabalho.

No capítulo quinto é mostrado o projeto de controladores para os dois sistemas exemplo utilizando o método do lugar das raízes (LR), para servir de comparação aos demais resultados. Em seguida é feita uma comparação entre os resultados obtidos para os estudos de caso e são apresentadas as características relevantes de cada método, evidenciadas no projeto de ESP's para os sistemas exemplo.

A conclusão apresenta as considerações finais do trabalho e as sugestões de trabalho para estudos futuros.

Finalmente, é importante realçar que, embora nesse trabalho seja dada ênfase para a utilização dos métodos de análise e projeto para sistemas de potência, deve-se ter em mente que os mesmos métodos podem ser aplicados para uma vasta gama de problemas de controle.

Capítulo 1

Controle Robusto de Sistemas de Potência Utilizando LMI's

Nesse capítulo inicial são feitas as considerações necessárias para o projeto de controladores para sistemas de potência [1, 5, 28, 26]. Também é apresentado o modelo do gerador síncrono [2, 22] e o modelo global do sistema de potência [1, 23], os quais serão considerados para análise e projeto no decorrer do trabalho.

São apresentados, ainda, os sistemas utilizados como estudo de caso para testar os métodos estudados no presente trabalho e cujos resultados são mostrados nas respectivas seções que tratam de cada método.

1.1 Modelagem de Sistemas de Potência

Um sistema de potência, ou sistema de energia elétrica, é formado por geradores síncronos, seus controladores e outros dispositivos, que são modelados por equações diferenciais e conectados através de uma rede de transmissão, modelada por equações algébricas [1, 2, 28, 22, 23, 26].

Assim, para determinar o modelo global do sistema é necessário conhecer o modelo de cada componente separadamente, os quais serão posteriormente interconectados pela rede. Com esse objetivo, a seguir são apresentados os modelos dos componentes, começando pelos geradores síncronos, até chegar ao modelo global resultante para o sistema de potência.

Existem vários modelos para a descrição do comportamento dinâmico da máquina síncrona. Os modelos simplificados são constituídos a partir da identificação das características essenciais de funcionamento da máquina nos modelos mais complexos. Ou seja, qualitativamente os modelos simples e os modelos complexos são equivalentes.

O modelo E'_q [1, 2], considerado nesse trabalho, representa a dinâmica mecânica da máquina, que constitui a essência do problema, bem como o efeito do decaimento de fluxo, o qual é essencial para

a utilização do modelo no projeto de controle de excitação. Assim, o modelo E'_q para a máquina síncrona é dado por [22]:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = w \\ \frac{2H}{w_s} \dot{w} = P_m - P_e - Dw \\ T'_{d0} \dot{E}'_q = -E'_q + (X_d - X'_d)I_d + E_f \end{cases} \quad (1.1.1)$$

As variáveis de estado da máquina são:

δ é o ângulo de carga da máquina.

w é o desvio de velocidade do rotor em relação à velocidade síncrona.

E'_q é a tensão interna de eixo em quadratura.

As entradas do modelo são:

P_m é a potência mecânica fornecida ao eixo pela turbina.

E_f é a tensão de campo.

Grandezas definidas pelas ligações externas da máquina:

I_d é a corrente de eixo direto.

P_e é a potência elétrica consumida pelo estator.

E os demais parâmetros são:

w_s é a velocidade angular síncrona (geralmente $w_s = 120\pi \text{ rad/s}$).

H é a constante de inércia.

T'_{d0} é a constante de tempo transitória.

X_d é a reatância síncrona de eixo direto.

X'_d é a reatância transitória de eixo direto.

D é o amortecimento equivalente, que inclui o amortecimento natural da máquina, a contribuição dos enrolamentos amortecedores e o efeito amortecedor da carga.

A região de validade \mathcal{S} desse modelo é dada por:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \delta \in [-\pi, \pi]; E'_q > 0\} \quad (1.1.2)$$

Esse domínio de validade é definido por algumas considerações físicas, quais sejam: a tensão do eixo em quadratura é proporcional à magnitude do campo magnético concatenado do rotor, dessa forma, está restrita a assumir valores positivos; além disso, não é admitido o escorregamento de pólos em operação normal da máquina, pois nesse caso entra em atuação a sua proteção e a máquina é isolada do sistema, portanto, o ângulo de carga só pode assumir valores entre $-\pi$ e π .

Os geradores de um sistema de potência são equipados com reguladores automáticos de tensão (RAT), os quais podem ser representados por uma lei de controle proporcional:

$$E_f = K_a(V_r - V_t) \quad (1.1.3)$$

onde:

K_a é o ganho de realimentação proporcional.

V_r é a tensão de referência.

V_t é a tensão de terminal da máquina.

O RAT atua sobre a excitação do gerador e é utilizado para regular a tensão terminal do mesmo [9]. Porém, para os altos valores de ganho exigidos para uma boa regulação da tensão, em condições normais de operação do sistema, o ponto de equilíbrio fornecido pelo RAT é, muitas vezes, instável, quando então é observada instabilidade oscilatória do sistema.

Assim, para estabilizar o ponto de equilíbrio do sistema é necessário um sinal de controle suplementar. Esse sinal (V_p) é adicionado na entrada de referência do regulador de tensão.

Além disso, o atraso decorrente da dinâmica de excitação do gerador é representada por um sistema de primeira ordem, em que o RAT é descrito pelo seu ganho e uma constante de tempo (T_a). A equação do RAT fica, então, da forma [1, 2]:

$$\dot{E}_f = \frac{1}{T_a}[-E_f + K_a(V_r - V_t + V_p)] \quad (1.1.4)$$

Como foi comentado anteriormente, para a estabilização do ponto de equilíbrio do sistema, gerado pelo RAT, faz-se necessário um controle adicional, por meio de um sinal somado na tensão de referência do RAT. Esse controle é feito, nos geradores do sistema, pelo estabilizador de sistemas de potência (ESP).

A função de transferência usual de um ESP possui a seguinte estrutura [1, 9, 28, 23]:

$$\frac{V_p(s)}{w(s)} = K_c \frac{(1 + sT_1)^2}{(1 + sT_2)^2} \frac{sT_w}{1 + sT_w} \quad (1.1.5)$$

O segundo estágio da função de transferência é o estágio de *wash-out* e T_w é sua constante de tempo. Trata-se de um filtro passa-altas que elimina a ação do controlador em regime permanente, caso contrário a realimentação do ESP, em geral, mudaria o ponto de equilíbrio do sistema, afetando o valor de regime permanente da tensão de terminal, que é a variável regulada pelo RAT.

Desde que o filtro passa-altas tenha frequência de corte muito inferior às frequências de operação do sistema, ele não terá influência sobre o desempenho do mesmo nessa faixa de frequência. Assim, o

filtro tem influência sobre o comportamento do sistema apenas em regime permanente e não precisa ser considerado quando do projeto do ESP [7].

As conexões externas da máquina síncrona são descritas pelas equações de rede e envolvem as variáveis algébricas I_d e P_e da máquina síncrona, V_t do modelo do RAT e outras variáveis algébricas que surgem na formulação das equações de rede. As equações que descrevem o sistema, desprezando as perdas da máquina síncrona (as quais são desprezíveis para os fins desse trabalho),¹ são dadas por [2, 23]:

$$\begin{cases} V_q = E'_q + X'_d I_d \\ V_d = -X_q I_q \\ V_t^2 = V_q^2 + V_d^2 \\ P_e = V_q I_q + V_d I_d \end{cases} \quad (1.1.6)$$

onde:

V_q : tensão de eixo em quadratura

V_d : tensão de eixo direto

X_q : reatância síncrona de eixo em quadratura

I_q : corrente de eixo em quadratura

E, considerando um sistema com n_p geradores, as equações que relacionam as admitâncias da rede são [2]:

$$\begin{bmatrix} I_{r_1} \\ I_{m_1} \\ I_{r_2} \\ I_{m_2} \\ \vdots \\ I_{r_{n_p}} \\ I_{m_{n_p}} \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} V_{r_1} \\ V_{m_1} \\ V_{r_2} \\ V_{m_2} \\ \vdots \\ V_{r_{n_p}} \\ V_{m_{n_p}} \end{bmatrix} \quad (1.1.7)$$

Os subscritos r e m representam respectivamente as partes real e imaginária das grandezas complexas e Y é a matriz de admitâncias da rede, na qual estão incluídas as cargas do sistema, modeladas como impedâncias constantes.

As tensões e correntes dos geradores são, então, levadas a um eixo de referência comum pela transformação de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} I_{r_i} \\ I_{m_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_i) & -\text{sen}(\delta_i) \\ \text{sen}(\delta_i) & \cos(\delta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{q_i} \\ I_{d_i} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} V_{r_i} \\ V_{m_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_i) & -\text{sen}(\delta_i) \\ \text{sen}(\delta_i) & \cos(\delta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{q_i} \\ V_{d_i} \end{bmatrix} \quad (1.1.8)$$

Onde o índice i representa as equações do i -ésimo gerador.

¹De fato, não houve alterações nos pontos de equilíbrio, quando calculou-se os mesmos levando em consideração as perdas da máquina síncrona.

Aplicando essa transformação em (1.1.7), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I_{q_1} \\ I_{d_1} \\ I_{q_2} \\ I_{d_2} \\ \vdots \\ I_{q_{n_p}} \\ I_{d_{n_p}} \end{bmatrix} = T_\delta^{-1} Y T_\delta \begin{bmatrix} V_{q_1} \\ V_{d_1} \\ V_{q_2} \\ V_{d_2} \\ \vdots \\ V_{q_{n_p}} \\ V_{d_{n_p}} \end{bmatrix} \quad (1.1.9)$$

Com:

$$T_\delta = \begin{bmatrix} \cos(\delta_1) & -\text{sen}(\delta_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \text{sen}(\delta_1) & \cos(\delta_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\delta_2) & -\text{sen}(\delta_2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}(\delta_2) & \cos(\delta_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \cos(\delta_{n_p}) & -\text{sen}(\delta_{n_p}) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \text{sen}(\delta_{n_p}) & \cos(\delta_{n_p}) \end{bmatrix} \quad (1.1.10)$$

Tem-se, então, os modelos dos geradores, de seus controladores e da rede que os interconecta. Porém, para efetuar a regulação sobre variáveis do sistema, tais como tensão em barras, fluxo de potência ativa, fluxo de potência reativa, etc., pode-se, ainda, utilizar dispositivos eletrônicos inseridos no sistema de potência. Nesses dispositivos também é possível a inclusão de sinais adicionais de controle para a estabilização dinâmica do sistema, assim como é feito nos RAT.

Os sistemas de potência que incluem esses dispositivos são definidos pelo conceito de sistemas de transmissão CA flexíveis, ou FACTS (flexible AC transmission systems) [26, 23]. Destacam-se, entre outros dispositivos associados ao conceito de FACTS, o capacitor série chaveado (CSC) e o compensador estático reativo (CER).

O CER pode ser modelado por uma função de transferência de primeira ordem, cuja saída é a susceptância em derivação [26, 23]:

$$B_s = \frac{K_s}{1 + sT_s} (V_t - V_r + V_s) \quad (1.1.11)$$

O controle primário do CER regula a tensão na barra no qual ele está conectado (V_t). E o sinal adicional de controle é dado por V_s , sendo V_r o sinal de referência de tensão.

Já o CSC é um elemento série, cuja admitância pode ser variada, usualmente utilizado para controlar o fluxo de potência ativa entre as linhas de transmissão e pode ser modelado como [5, 23]:

$$B_{kj} = \left(\frac{K_I}{s} + K_P \right) (P_r - P_{kj}) + \frac{1}{1 + sT_d} P_s \quad (1.1.12)$$

Onde P_s é o sinal de controle adicional; K_P e K_I são as constantes de ganho proporcional e integral, respectivamente; P_{kj} é a potência que flui entre as barras k e j e P_r é o sinal de referência.

Finalmente, juntando as equações diferenciais com as equações algébricas que descrevem a rede e as conexões externas dos geradores, cargas e outros dispositivos da rede chega-se ao seguinte modelo global do sistema de potência [5, 9, 37]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z, u) \\ 0 = g(x, z) \\ y = h(x, z) \end{cases} \quad (1.1.13)$$

Onde x é o vetor de estados da forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_{G_1} \\ \vdots \\ x_{G_{n_p}} \\ x_{C_1} \\ \vdots \\ x_{C_{n_c}} \\ x_{S_1} \\ \vdots \\ x_{S_{n_s}} \end{bmatrix}; \quad x_{G_i} = \begin{bmatrix} \delta_i \\ w_i \\ E'_{q_i} \\ E_{f_i} \end{bmatrix}; \quad x_{C_q} = \begin{bmatrix} \xi_q \\ B_{kj_q} \end{bmatrix}; \quad x_{S_l} = [B_{s_l}] \quad (1.1.14)$$

O índice G_i representa o vetor de estados da i -ésima máquina síncrona, C_q o vetor de estados do q -ésimo CSC e S_l o vetor de estados do l -ésimo CER. Ainda, n_p é o número de geradores, n_c é o número CSC's e n_s é o número de CER's do sistema, que estão equipados com sinais suplementares.

O vetor de entradas é composto pelas saídas dos ESP's e dos controles suplementares de cada um dos dispositivos FACTS:

$$u = [V_{p_1} \quad \dots \quad V_{p_{n_p}} \quad P_{s_1} \quad \dots \quad P_{s_{n_c}} \quad V_{s_1} \quad \dots \quad V_{s_{n_s}}]^T \quad (1.1.15)$$

E o vetor de variáveis algébricas é dado por:

$$z = \begin{bmatrix} z_{G_1} \\ \vdots \\ z_{G_{n_p}} \\ z_{C_1} \\ \vdots \\ z_{C_{n_c}} \\ z_{S_1} \\ \vdots \\ z_{S_{n_s}} \end{bmatrix}; \quad z_{G_i} = \begin{bmatrix} V_{q_i} \\ V_{d_i} \\ I_{q_i} \\ I_{d_i} \\ V_{t_i} \\ P_{e_i} \end{bmatrix} \quad (1.1.16)$$

Conforme é detalhado no decorrer da dissertação, para a análise da estabilidade dinâmica do sistema de potência trabalha-se com o sistema linearizado em torno de um ponto de operação do mesmo [5, 20, 37].

O ponto de operação é dado pelo ponto de equilíbrio do sistema de equações não-lineares (1.1.13), ou seja, deve-se encontrar a solução (x_0, z_0) , com $u = 0$, para o sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} f(x, z) = 0 \\ g(x, z) = 0 \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Linearizando, então, as equações do sistema (1.1.13) em torno do ponto de equilíbrio (x_0, z_0) , obtém-se [2, 5, 20, 37]:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.1.18)$$

onde:

$$\begin{aligned} J_1 &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, z_0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}; & J_2 &= \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(x_0, z_0)} \in \mathbb{R}^{n \times n_z}; \\ J_3 &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, z_0)} \in \mathbb{R}^{n_z \times n}; & J_4 &= \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{(x_0, z_0)} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}; \\ B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, z_0)} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}; & C_1 &= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x_0, z_0)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}; & C_2 &= \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_{(x_0, z_0)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_z} \end{aligned}$$

E as matrizes J determinadas dessa forma são conhecidas como matrizes *Jacobianas* do sistema (1.1.13) [20].

Para os modelos considerados, a matriz B assume a forma:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n_p+n_c+n_s} \end{bmatrix} \quad (1.1.19)$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{Para os geradores } b_i &= \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{K_{a_i}}{T_{a_i}} \right]^T; \text{ para os CSC's } b_i = \left[\frac{1}{T_{d_i}} \quad 0 \right]^T \text{ e para os} \\ \text{CER's } b_i &= \left[\frac{K_{s_i}}{T_{s_i}} \right]. \end{aligned}$$

E as matrizes C_1 e C_2 dependem de quais saídas se deseja observar ou utilizar na realimentação de controle.

As equações linearizadas do sistema de potência completo (1.1.18) podem ser escritas em sua forma reduzida, eliminando as variáveis algébricas Δz . Dessa forma, desprezando a notação Δ , pode-se reescrever as equações do sistema de potência na forma tradicional [9, 37]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cy \end{cases} \quad (1.1.20)$$

onde:

$$A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n_u} \quad e \quad C = C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3 \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$$

Para utilizar o modelo do sistema de potência na forma (1.1.18) é preciso trabalhar com métodos de análise e projeto voltados a sistemas singulares [3, 24], caso contrário é necessário utilizar a formulação reduzida do modelo (1.1.20). No presente trabalho, ambas as formas de representação são tratadas, com métodos de análise e projeto específicos.

Ressalta-se, ainda, conforme percebe-se em (1.1.18), que as matrizes do sistema linearizado dependem do ponto de equilíbrio, isto é, do ponto de operação do sistema. Sabe-se, também, que um sistema de potência deve trabalhar sob condições de carga muito diversas sem perder a estabilidade.

Para possibilitar, então, o projeto de controladores que estabilizem o sistema para todos os pontos de operação desejados, é preciso linearizar as equações do sistema em cada um desses pontos e considerar os sistemas linearizados como um conjunto de sistemas a ser estabilizado [3, 5, 9, 37].

A descrição desse conjunto pode ser feita considerando-se um único sistema *médio* ou *nominal*, o qual possui parâmetros variantes no tempo, cujos limites de variação são conhecidos [5, 20, 37]. Os sistemas reais a serem estabilizados encontram-se contidos no conjunto descrito dessa forma.

Os métodos de projeto robusto de controladores são capazes de levar em consideração o conjunto de sistemas a ser estabilizado, utilizando a descrição acima. E a formalização da descrição do conjunto de sistemas é mostrada no decorrer deste trabalho.

Outras considerações a respeito das características do projeto de controladores para sistemas de potência são feitas nas seções seguintes.

1.2 Controle Robusto

Os sistemas de potência devem operar de maneira estável suportando amplas variações de configuração de carga e geração e também variações de topologia da rede, como quando da ocorrência de curto-circuito ou queda de linha de transmissão.

Como a estabilidade dinâmica está relacionada ao comportamento da trajetória do sistema nas vizinhança do ponto de equilíbrio, devido a perturbações no mesmo, é possível o emprego de modelos lineares para a análise, o que permite a utilização dos recursos fornecidos pela teoria dos sistemas lineares. O modelo linear é obtido pela linearização do sistema de equações, que descreve o sistema de potência, em torno do ponto de operação considerado [20], como mostrado na seção anterior. Portanto, nos estudos de estabilidade dinâmica o objetivo é saber se as variações de carga ou da topologia do sistema resultam em um ponto de equilíbrio para o qual o sistema apresenta suficiente amortecimento e que garanta a estabilidade do mesmo.

Os problemas de sistemas com variações nos parâmetros são resolvidos pelas teorias de controle robusto. Um controlador é dito robusto com relação a um conjunto de modelos especificados a priori, se ele garante um certo nível mínimo de desempenho para qualquer um dos possíveis modelos pertencentes a tal conjunto. Portanto, robustez é um conceito de conjunto, onde o modelo matemático juntamente com as incertezas que o afetam definem um domínio. Dessa forma, o sistema a ser controlado deve ser visto como um conjunto de modelos definido por este domínio [3, 5, 9, 32, 37].

O objetivo da síntese de um controlador robusto é assegurar a estabilidade assintótica do conjunto de sistemas, além de outros requisitos de desempenho para o mesmo, como a melhoria do amortecimento de oscilações, motivos pelos quais é necessário a aplicação do controlador robusto em sistemas de potência.

1.3 Requisitos para o Projeto de Controladores para Sistemas de Potência

Para os sistemas de potência, o método de projeto dos controladores deve atender a alguns requisitos determinados pela estrutura física dos componentes do sistema, pela distribuição geográfica dos mesmos e pelas condições de operação do sistema global [5, 9, 37]. Esses requisitos são detalhados a seguir:

- Coordenação:

Projetar todos os controladores locais de cada máquina síncrona ao mesmo tempo, de forma que um não afete negativamente o desempenho dos outros, isto é, os diversos controladores no sistema são vistos como um único controlador com estrutura descentralizada.

O projeto dos controladores de forma coordenada trata explicitamente o esquema global de controle, o que faz com que os controladores locais não sejam mutuamente prejudiciais o que é necessário para eliminar os fenômenos interárea.

- Robustez:

Este controlador deve garantir a estabilidade do sistema em diversas condições de operação pré-determinadas, isto é, os controladores devem estabilizar todos os pontos de operação do sistema considerados no projeto.

Os controladores devem suportar imprecisões (variações) nos parâmetros e no ponto de operação, garantindo a estabilidade e o desempenho em qualquer condição pré-estabelecida.

- Realimentação de Saída Local:

É uma *restrição estrutural* que aparece na resolução do problema, pois as variáveis de realimentação de uma dada máquina síncrona devem ser medidas localmente. Assim, os ganhos cruzados que aparecem na matriz de realimentação, quando trabalha-se com o projeto para o modelo global, devem ser anulados.

Para a modelagem dos sistemas pode-se considerar a abordagem no domínio tempo ou no domínio frequência, mas deve-se utilizar o modelo global do sistema para garantir o requisito de coordenação. Neste contexto, a abordagem temporal facilita a modelagem de incertezas paramétricas e permite a formulação do controle descentralizado de maneira simples.

Além disso, esta abordagem permite formular os problemas de análise e síntese utilizando desigualdades matriciais lineares (LMI's), as quais possuem como principais vantagens o fato do conjunto solução ser sempre convexo e a existência de algoritmos eficientes para o cálculo desta solução, além de outras propriedades [11, 27].

As incertezas consideradas em um sistema de potência são devidas às variações de carga, geração e às mudanças topológicas da rede. Para cada uma das condições de operação, a linearização do modelo do sistema leva a diferentes sistemas lineares. A variação da dinâmica do sistema é então modelada como incertezas variantes no tempo, em um modelo linear.

Existem várias formas de considerar essas incertezas no projeto dos controladores. Nos projetos que utilizam técnicas via LMI's, considera-se que as matrizes que descrevem o sistema estão contidas num conjunto, cujo domínio é definido pelas matrizes do sistema determinadas em cada ponto de operação do sistema a ser considerado no projeto.

Além das considerações de robustez no projeto dos controladores, deve-se considerar que as variáveis de realimentação sejam realimentadas apenas localmente, isto é, as variáveis de saída da n -ésima máquina síncrona só podem ser utilizadas para sua própria realimentação. Isto deve ser feito, pois é inviável na prática medir as variáveis de determinado gerador e utilizá-las para a realimentação do controle de outro gerador, o qual pode estar a quilômetros de distância do primeiro.

Descrevendo de outra forma, não pode haver *ganhos cruzados* na matriz de realimentação calculada para o modelo global do sistema, isto é, a síntese deve ser realizada como se fossem calculados \mathbf{n} controladores independentes (um para cada gerador), mas sendo feito de forma coordenada, simultaneamente, levando-se em consideração a dinâmica de todo o sistema interligado.

Infelizmente, a restrição estrutural imposta para atingir-se este objetivo aumenta a conservatividade das LMI's utilizadas no projeto dos controladores, dificultando a obtenção de uma solução satisfatória.

Portanto, conclui-se que os aspectos de robustez, coordenação e realimentação local são relevantes para sistemas de potência e por isso, um método de projeto que os contemple deve ser buscado.

1.4 Sistemas Exemplo

Para a avaliação dos métodos foi utilizado um sistema formado por uma máquina síncrona contra uma barra-infinita (MBI), a qual representa o restante do sistema de potência (fig. 1). A tensão na barra infinita é considerada constante e tomada como referência.



Fig. 1.1 – Diagrama unifilar de um sistema MBI.

O sistema do tipo MBI é bastante utilizado para o estudo do comportamento de sistemas com máquinas síncronas [5, 9].

Modelando, então, o sistema MBI da forma descrita no primeiro capítulo (1.1.15) chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = w \\ \dot{w} = \frac{w_s}{2H}(P_m - P_e - Dw) \\ \dot{E}'_q = \frac{1}{T'_{d0}}[-E'_q + (X_d - X'_d)I_d + E_f] \\ \dot{E}_f = \frac{1}{T_a}[-E_f + K_a(V_r - V_t + V_p)] \end{cases} \quad (1.4.21)$$

$$\begin{cases} 0 = -V_q + E'_q + X'_d I_d \\ 0 = -V_d - X_q I_q \\ 0 = -I_q \cos(\delta) + I_d \sin(\delta) + A_l(V_q \cos(\delta) - V_d \sin(\delta)) - B_l(V_q \sin(\delta) + V_d \cos(\delta)) - A_l V_{br} + B_l V_{bm} \\ 0 = -I_q \sin(\delta) - I_d \cos(\delta) + B_l(V_q \cos(\delta) - V_d \sin(\delta)) + A_l(V_q \sin(\delta) + V_d \cos(\delta)) - B_l V_{br} - A_l V_{bm} \\ 0 = -V_t^2 + V_q^2 + V_d^2 \\ 0 = -P_e + V_q I_q + V_d I_d \end{cases} \quad (1.4.22)$$

Onde (1.4.21) representa as equações diferenciais, $f(x, z, u)$, e (1.4.22) representa as equações algébricas, $g(x, z)$.

Ainda, A_l e B_l representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária que compõem a admitância da linha, ou seja, $Y_l = A_l + jB_l$, com:

$$A_l = \frac{R_l}{R_l^2 + X_l^2} \text{ e } B_l = \frac{-X_l}{R_l^2 + X_l^2}$$

Sendo que R_l é a resistência, que representa as perdas da linha, e X_l é a **reatância indutiva** da linha. Dessa forma a impedância da linha fica: $Z_l = R_l + jX_l$.

Já V_{br} e V_{bm} representam a parte real e imaginária da tensão na barra infinita, respectivamente, sendo que, normalmente, considera-se $V_{bm} = 0$. As demais variáveis são descritas no primeiro capítulo.

A linearização do sistema (1.4.21), (1.4.22), em torno do ponto de operação, como em (1.1.18), leva às seguintes matrizes Jacobianas:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-Dw_s}{2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{T_{d0}'} & \frac{1}{T_a'} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_a} \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-w_s}{2H} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{X_d - X_d'}{T_{d0}'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-K_a}{T_a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_{q0} \text{sen}(\delta_0) + I_{d0} \text{cos}(\delta_0) - A_l(V_{q0} \text{sen}(\delta_0) + V_{d0} \text{cos}(\delta_0)) - B_l(V_{q0} \text{cos}(\delta_0) - V_{d0} \text{sen}(\delta_0)) & 0 & 0 & 0 \\ -I_{q0} \text{cos}(\delta_0) + I_{d0} \text{sen}(\delta_0) - B_l(V_{q0} \text{sen}(\delta_0) + V_{d0} \text{cos}(\delta_0)) + A_l(V_{q0} \text{cos}(\delta_0) - V_{d0} \text{sen}(\delta_0)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{q0} & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & X_d' & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -X_q & 0 & 0 & 0 \\ A_l \text{cos}(\delta_0) - B_l \text{sen}(\delta_0) & -A_l \text{sen}(\delta_0) - B_l \text{cos}(\delta_0) & -\text{cos}(\delta_0) & \text{sen}(\delta_0) & 0 & 0 \\ B_l \text{cos}(\delta_0) + A_l \text{sen}(\delta_0) & -B_l \text{sen}(\delta_0) + A_l \text{cos}(\delta_0) & -\text{sen}(\delta_0) & -\text{cos}(\delta_0) & 0 & 0 \\ 2V_{q0} & 2V_{d0} & 0 & 0 & -2V_{t0} & 0 \\ I_{q0} & I_{d0} & V_{q0} & V_{d0} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Onde o índice **0** representa que a variável foi calculada no ponto de operação.

Verifica-se então que, para o sistema MBI, apenas as matrizes J_3 e J_4 possuem elementos que dependem do ponto de operação do sistema. Nas demais matrizes os elementos dependem apenas dos parâmetros da máquina síncrona.

Como visto em (1.1.19), a matriz de entrada, para o sinal de controle auxiliar V_p , fica na forma:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K_a}{T_a} \end{bmatrix}^T$$

Tomando como saída a velocidade angular da máquina síncrona, a matriz C_2 é nula e C_1 fica:

$$C_1 = C_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Já para a potência elétrica, a matriz C_1 é nula e C_2 fica:

$$C_2 = C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deve-se lembrar também, que a obtenção da forma reduzida do sistema é feita através das seguintes equações, como em (1.1.20):

$$A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 \text{ e } C = C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3$$

Enfim, para realizar os testes dos métodos de projeto de controladores, descritos nesse trabalho foram utilizados os dados de dois sistemas de potência tipo máquina-barra infinita referenciados doravante como *sistema Kundur*, cujos dados são extraídos de [23], e *sistema Paim*, cujos dados são extraídos de [9].

Os dados dos sistemas são apresentados a seguir, com as grandezas já expressas em pu (por unidade):

Sistema	X_d	X'_d	X_q	T'_{d0}	H	X_l	V_{bi}	D	P_m	V_r	K_a	T_a
Kundur	1,81	0,3	1,76	8	3,5	0,65	0,995	0	0,9	1,02	100	0,01
Paim	1,07	0,408	0,66	5,4	6,68	0,415	1	0	1	1,1	25	0,02

Pode-se observar dos dados acima, para ambos os sistemas:

- A tensão na barra infinita é tomada como referência, isto é, seu ângulo de fase é nulo (e $V_{b_m} = 0$).
- As máquinas possuem um regulador automático de tensão (RAT), representado pelos parâmetros K_a e T_a e com tensão de referência regulada em V_r .
- As perdas da linha de transmissão são nulas, o que leva a $A_l = 0$ e $B_l = \frac{-1}{X_l}$.

Considerando, então, os dados dos dois sistemas, pode-se calcular as matrizes que descrevem o sistema linearizado em cada ponto de operação.

Para simular a variação da condição de operação que o sistema de potência deve suportar, as matrizes foram calculadas para uma variação de potência entre 0,5 e 1,0 pu para o *sistema Kundur*, e entre 0,8 e 1,2 pu para o *sistema Paim*.

Assim, para cada valor da potência, dentro desses intervalos, calcula-se o ponto de operação do sistema MBI, através da resolução das equações (1.4.21) e (1.4.22). Com as variáveis calculadas no ponto de operação, obtém-se as matrizes Jacobianas e, a partir destas, as matrizes do sistema reduzido, para esse ponto de operação, como visto anteriormente.

Tomando-se os valores máximos e mínimos dos elementos das matrizes calculadas em cada ponto de operação, é possível montar um conjunto no qual estão contidas as matrizes do sistema linearizado.

Esse conjunto é representado por uma matriz de valores médios dos elementos (*matriz nominal*) e uma matriz de desvio dos valores dos elementos em relação à média.

Observou-se que calculando as matrizes para 10 pontos de operação e para 100 pontos de operação, dentro do intervalo definido para a potência, não houve diferenças significativas nas matrizes média e de desvio para os dois cálculos, em ambos os sistemas tomados como exemplo.

Obtém-se, então, as seguintes matrizes:

1. Sistema Kundur:

Variando a potência entre 0,5 e 1,0 pu.

1.1. Matriz de estados média para o sistema de ordem reduzida:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -39.8480 & 0 & -71.7239 & 0 \\ -0.1803 & 0 & -0.3237 & 0.1250 \\ 790.4719 & 0 & -5086.0561 & -100.0000 \end{bmatrix}$$

1.2. Desvio da matriz de estados média:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.8931 & 0 & 6.8639 & 0 \\ 0.0173 & 0 & 0 & 0 \\ 1160.0493 & 0 & 406.8439 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3. Matriz Jacobiana J_1 média:

$$J_{1_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1250 & 0.1250 \\ 0 & 0 & 0 & -100.0000 \end{bmatrix}$$

1.4. Desvio da matriz Jacobiana J_1 :

$$J_{1_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5. Matriz Jacobiana J_2 média:

$$J_{2_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -53.8559 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1888 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10^4 & 0 \end{bmatrix}$$

1.6. Desvio da matriz Jacobiana J_2 :

$$J_{2_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.7. Matriz Jacobiana J_3 média:

$$J_{3_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5308 & 0 & 0 & 0 \\ 1.9891e-8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3765 & 0 \end{bmatrix}$$

1.8. Desvio da matriz Jacobiana J_3 :

$$J_{3_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0360 & 0 \end{bmatrix}$$

1.9. Matriz Jacobiana J_4 média:

$$J_{4_0} = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0 & 0 & 0.3000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0000 & -1.7600 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4031 & 0.4636 & -0.3013 & 0.9120 & 0 & 0 \\ -0.4636 & 1.4031 & -0.9120 & -0.3013 & 0 & 0 \\ 1.4876 & -1.3254 & 0 & 0 & -2.0004 & 0 \\ 0.3765 & -0.6830 & 0.7438 & -0.6627 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.10. Desvio da matriz Jacobiana J_4 :

$$J_{4_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1343 & 0.4064 & 0.2642 & 0.0873 & 0 & 0 \\ 0.4064 & 0.1343 & 0.0873 & 0.2642 & 0 & 0 \\ 0.1263 & 0.1268 & 0 & 0 & 0.0099 & 0 \\ 0.0360 & 0.3073 & 0.0631 & 0.0634 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.11. Matriz de entrada do sinal de atuação:

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

1.12. Matriz de saída da velocidade angular:

$$C_w = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

1.13. Matriz de saída da potência elétrica:

$$C_p = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

1.14. Matriz de saída da tensão de terminal:

$$C_{vt} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

2. Sistema Paim:

Variando a potência entre 0,8 e 1,2 pu.

2.1. Matriz de estados média para o sistema de ordem reduzida:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -27.0672 & 0 & -46.4881 & 0 \\ -0.1144 & 0 & -0.3341 & 0.1852 \\ 208.7017 & 0 & -558.8390 & -50 \end{bmatrix}$$

2.2. Desvio da matriz de estados média:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7719 & 0 & 6.1604 & 0 \\ 0.0152 & 0 & 0 & 0 \\ 54.2224 & 0 & 20.6920 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3. Matriz Jacobiana J_1 média:

$$J_{1_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1852 & 0.1852 \\ 0 & 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

2.4. Desvio da matriz Jacobiana J_1 :

$$J_{1_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5. Matriz Jacobiana J_2 média:

$$J_{2_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28.2179 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1226 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1250 & 0 \end{bmatrix}$$

2.6. Desvio da matriz Jacobiana J_2 :

$$J_{2_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7. Matriz Jacobiana J_3 média:

$$J_{3_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.4096 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7144 & 0 \end{bmatrix}$$

2.8. Desvio da matriz Jacobiana J_3 :

$$J_{3_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0947 & 0 \end{bmatrix}$$

2.9. Matriz Jacobiana J_4 média:

$$J_{4_0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.4080 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.6600 & 0 & 0 & 0 \\ 1.8505 & 1.4932 & -0.6197 & 0.7679 & 0 & 0 \\ -1.4932 & 1.8505 & -0.7679 & -0.6197 & 0 & 0 \\ 1.8319 & -0.9430 & 0 & 0 & -2.0656 & 0 \\ 0.7144 & -0.7139 & 0.9159 & -0.4715 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.10. Desvio da matriz Jacobiana J_4 :

$$J_{4_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2452 & 0.3039 & 0.1261 & 0.1018 & 0 & 0 \\ 0.3039 & 0.2452 & 0.1018 & 0.1261 & 0 & 0 \\ 0.0806 & 0.1250 & 0 & 0 & 0.0145 & 0 \\ 0.0947 & 0.2067 & 0.0403 & 0.0625 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.11. Matriz de entrada do sinal de atuação:

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1250 \end{bmatrix}$$

2.12. Matriz de saída da velocidade angular:

$$C_w = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

2.13. Matriz de saída da potência elétrica:

$$C_p = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

2.14. Matriz de saída da tensão de terminal:

$$C_{vt} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

As matrizes com índice 0 são formadas pelos valores médios dos elementos e as matrizes com índice n são formadas pelos desvios dos valores dos elementos em relação à média.

A variação percentual de cada elemento das matrizes A , J_3 e J_4 em relação ao valor médio, são apresentadas a seguir, onde os valores dos elementos estão em %:

1. Sistema Kundur:

$$\%A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.8 & 0 & 9.6 & 0 \\ 9.6 & 0 & 0 & 0 \\ 146.8 & 0 & 8.0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \%J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\%J_4 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.69 & 87.7 & 87.7 & 9.6 & 0 & 0 \\ 87.7 & 9.6 & 9.6 & 87.7 & 0 & 0 \\ 8.5 & 9.6 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 9.6 & 45.0 & 8.5 & 9.6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Sistema Paim:

$$\%A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.5 & 0 & 13.3 & 0 \\ 13.3 & 0 & 0 & 0 \\ 26.0 & 0 & 3.7 & 0 \end{bmatrix}; \quad \%J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\%J_4 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13.3 & 20.4 & 20.4 & 13.3 & 0 & 0 \\ 20.4 & 13.3 & 13.3 & 20.4 & 0 & 0 \\ 4.4 & 13.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 13.3 & 29.0 & 4.4 & 13.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em ambos os sistemas verifica-se, para a matriz J_4 , que os maiores desvios em relação à média estão relacionados aos termos que incluem $\cos(\delta_0)$, nos elementos (4, 1), (3, 2), (3, 3) e (4, 4); além do termo (6, 2), que é a corrente de eixo direto I_{d_0} . E o menor desvio está relacionado ao termo (5, 5), da tensão de terminal $-2V_{t_0}$, o que é justificado pela ação do RAT.

Já para a matriz do sistema reduzido A , o maior desvio é do elemento (4, 1), também para ambos os sistemas, sendo que no sistema Kundur o desvio é maior do que o valor nominal desse elemento.

Para o sistema nominal, formado pelas matrizes de valores médios, esses sistemas possuem os seguintes pólos em malha aberta:

Sistema Kundur:	Sistema Paim:
-93.1419	-47.8036
$0.3357 + 6.6487i$	$0.4419 + 5.3960i$
$0.3357 - 6.6487i$	$0.4419 - 5.3960i$
-7.8533	-3.4142

De onde vê-se que ambos os sistemas são instáveis para esse ponto de operação. Deve-se, então, projetar um estabilizador de sistema de potência (ESP) para cada máquina síncrona, de forma a estabilizar o ponto de equilíbrio de cada sistema, considerando o desvio dos elementos das matrizes nominais, modelados como incertezas. Essas características dos sistemas exemplo podem ser melhor identificadas no capítulo 5, onde os mesmos são estudados utilizando o método clássico do lugar das raízes.

É importante observar, ainda, que em ambos os casos estudados, o sistema reduzido possui um número menor de elementos incertos. Isso traz vantagem para essa representação quando se trabalha com métodos de projeto com incertezas politópicas, no que tange ao esforço computacional despendido, o qual será menor do que no caso da descrição algébrico-diferencial do sistema, tendo em vista que o número de equações envolvidas nos cálculos é exponencialmente proporcional ao número de elementos incertos do sistema.

Capítulo 2

Métodos de Estabilidade Quadrática com Sistema Reduzido

Nesse capítulo são apresentados diversos métodos de análise e projeto que buscam a estabilização do sistema através de uma função de Liapunov quadrática: $v(x) = x^T P x$ e utilizam a forma reduzida para a descrição do sistema de potência:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

2.1 Enfoque pela Equação de Riccati

Neste enfoque, a robustez do controle é formulada no contexto de estabilidade quadrática e o problema de projeto é abordado por meio da equação de Riccati. Este método está baseado principalmente nos resultados obtidos em [35] e em [38] e estudados em [5, 8, 9].

No problema do regulador linear quadrático (RLQ), a solução da equação de Riccati fornece uma lei de controle e uma função de Liapunov para o sistema em malha fechada com este controle. A inclusão de termos extras na equação de Riccati, os quais são construídos de forma a compensar o efeito das incertezas na derivada da função de Liapunov resultante, permite aplicar soluções similares para sistemas incertos.

2.1.1 Descrição do Problema

O conjunto de modelos dinâmicos, proveniente da linearização do sistema nas diferentes condições de operação, está contido em um conjunto de modelos descritos pela equação:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

onde:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: vetor de estados do sistema

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: vetor de entradas de controle do sistema

$y(t) \in \mathbb{R}^l$: vetor de saídas do sistema

A matriz A_0 é uma matriz constante de dimensões apropriadas e as matrizes incertas são descritas como:

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^p r_i(t)\Upsilon_i; \quad r_i^2(t) \leq 1 \quad \forall t, \quad \text{ou equivalentemente: } |r_i(t)| \leq 1 \quad i = 1, \dots, p \quad (2.1.2)$$

O vetor $r(t) \in \mathbb{R}^p$ representa as incertezas do sistema, sendo $r_i(t)$ a i -ésima componente desse vetor, e p é o número de parâmetros incertos.

Já as matrizes Υ_i são matrizes constante de posto unitário, que podem ser escritas como:

$$\Upsilon_i = d_i e_i^T; \quad d_i, e_i \in \mathbb{R}^n \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Restrição Estrutural

Para possibilitar a obtenção de um controlador que obedeça ao requisito de descentralização, pode-se associar ao problema uma restrição estrutural genérica da forma [5, 9]:

$$F(K) = 0 \quad (2.1.4)$$

O requisito da descentralização determina que a matriz de ganhos K tenha uma estrutura bloco-diagonal do tipo: $\begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_i \end{bmatrix}$, onde K_i representa o controlador local de cada máquina síncrona.

Uma estrutura de realimentação de saída também pode ser obtida por meio da inclusão de uma restrição estrutural. Considerando assim, a equação de saída do sistema (2.1.1), sendo a matriz C com posto completo por linhas, se a matriz de ganhos K satisfaz a restrição estrutural:

$$F(K) = K(I - C^T(CC^T)^{-1}C) = 0 \quad (2.1.5)$$

então, o controle pode ser escrito como [5]:

$$u = Gy, \text{ onde } G = KC^T(CC^T)^{-1} \quad (2.1.6)$$

Pois, se a restrição estrutural de saída (2.1.5) é satisfeita, então é garantida a condição geométrica para fazer: $u = Kx = GCx = Gy$, ou $K = GC$, chegando assim, na realimentação de saída na forma (2.1.6).

Enfim, se o ganho satisfaz à restrição:

$$K - \begin{bmatrix} K_1 C_1^T (C_1 C_1^T)^{-1} C \\ K_2 C_2^T (C_2 C_2^T)^{-1} C \\ \vdots \\ K_i C_i^T (C_i C_i^T)^{-1} C \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.7)$$

sendo $y_i = C_i x$, $i = 1, \dots, n_{cont}$, as saídas locais a cada dispositivo a ser controlado, então uma estrutura de realimentação descentralizada de saídas é obtida.

2.1.3 Formulação pela Equação de Riccati

Sejam as matrizes:

$$T := \sum_{i=1}^p d_i d_i^T \quad \text{e} \quad U := \sum_{i=1}^p e_i e_i^T \quad (2.1.8)$$

Teorema 2.1.1. [5, 35, 38] *Sejam Q e R matrizes simétricas positivas definidas, com dimensões apropriadas, escolhidas arbitrariamente. Se, para algum $\varepsilon > 0$, a equação de Riccati aumentada:*

$$PA_0 + A_0^T P - P \left[\frac{1}{\varepsilon} (2BR^{-1}B^T) - T \right] P + U + \varepsilon Q = 0 \quad (2.1.9)$$

admite a solução P , simétrica e positiva definida, então:

$$u = Kx(t) \quad \text{com} \quad K = -\frac{1}{\varepsilon} R^{-1} B^T P \quad (2.1.10)$$

é uma lei de controle estabilizante para o sistema incerto (2.1.1).

Note-se que a existência de uma solução $P > 0$ para o teorema acima não é clara como no caso da equação de Riccati no contexto de controle ótimo [5]. Pode ocorrer que a equação (2.1.9) não tenha solução positiva definida para nenhum ε , mesmo que o sistema incerto admita uma lei de controle estabilizante. E, conforme [35], a existência de solução para a equação (2.1.9) não depende da escolha de Q e R , mas depende da escolha de T e U , ou seja, a decomposição das matrizes Υ_i é crítica para a existência de solução para o teorema 2.1.1. É provado, ainda, em [35] que, se existe solução positiva

definida para (2.1.9), para um dado valor de ε , então também existirá solução para qualquer valor de ε menor. Assim, pode-se verificar se a equação (2.1.9) possui solução positiva definida através de um algoritmo que teste sucessivamente valores de ε cada vez menores na equação.

Para que o ganho de realimentação atenda à restrição estrutural e não apresente ganhos cruzados, deve-se acrescentar mais um termo na equação de Riccati, levando ao teorema descrito a seguir.

Teorema 2.1.2. [5] *Sejam $Q = Q^T > 0$ e $R = R^T > 0$ matrizes de dimensões apropriadas, e $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, escolhidas arbitrariamente. Se, para algum $\varepsilon > 0$, a equação matricial:*

$$PA_0 + A_0^T P - P \left[\frac{1}{\varepsilon} (BR^{-1}B^T) - T \right] P + U + \varepsilon(Q + L^T RL) = 0 \quad (2.1.11)$$

admite uma solução simétrica positiva definida P , então o sistema incerto em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(t) + BK)x(t) \quad (2.1.12)$$

é assintoticamente estável para qualquer ΔA admissível, com:

$$K = -\frac{1}{\varepsilon} R^{-1} B^T P + L \quad (2.1.13)$$

Como o teorema é válido para qualquer matriz L , pode-se escolher L de forma que K não apresente ganhos cruzados, fazendo:

$$L = \frac{1}{\varepsilon} [(R^{-1}B^T P) - \text{blocodiagonal}\{R^{-1}B^T P\}] \quad (2.1.14)$$

Como a matriz L depende do próprio ganho K ela não é conhecida a priori, assim, sua solução também deve ser buscada por meio de um algoritmo [5, 10].

Ainda, se $L = F(\frac{1}{\varepsilon}R^{-1}B^T P)$, então a realimentação de estados $K = -\frac{1}{\varepsilon}R^{-1}B^T P + L$ satisfaz a restrição estrutural $F(K) = 0$ (2.1.4) e garante a estabilidade quadrática para qualquer incerteza admissível.

2.1.4 Representação na Forma de LMI

Considerando o sistema incerto (2.1.1) e definindo as matrizes:

$$D := [d_1 \dots d_p]; \quad E := [e_1 \dots e_p]^T \quad e \quad S := \text{diag}(s_1 \dots s_p) \quad (2.1.15)$$

onde:

s_i : escalar positivo

d_i, e_i : decomposição das incertezas

Considerando ainda, o custo quadrático associado ao sistema (2.1.1):

$$J(x_0, u(t), \Delta A(t)) = \int_0^\infty \{x^T(t)Q_0x(t) + u^T(t)R_0u(t)\} dt \quad (2.1.16)$$

Definição 2.1.1. [5, 9] Se existe um controle $\hat{u}(t)$ e um custo $\hat{J}(x_0)$ tais que, para o sistema (2.1.1) com este controle, o custo acima satisfaça para toda $\Delta A(t)$ admissível:

$$J(x_0, \hat{u}(t), \Delta A(t)) \leq \hat{J}(x_0), \quad \forall x_0 \quad (2.1.17)$$

então, $\hat{J}(x_0)$ é dito um custo garantido para um sistema (2.1.1) e $\hat{u}(t)$ é dito um controle a custo garantido.

É possível, então, enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.1.3. [5, 9] *Seja o sistema incerto (2.1.1), o custo associado (2.1.16) e as matrizes D e E definidas conforme (2.1.15), β um escalar positivo pequeno e $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Caso o seguinte problema de otimização tenha um conjunto solução não vazio (M, W, S) :*

$$\begin{aligned} & \min_{M, W, S} \text{Tr}[M] \\ & \text{sujeito a} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} M & I \\ I & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} -WA_0^T - A_0W + BR_0^{-1}B^T - DSD^T & WE^T & W & WL^T \\ & EW & S & 0 & 0 \\ & W & 0 & Q_0^{-1} & 0 \\ & LW & 0 & 0 & R_0^{-1} \end{bmatrix} - \beta I > 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Onde M e W são matrizes simétricas positivas definidas e S é uma matriz diagonal positiva definida.

Então, a minimização do custo garantido $\hat{J}(x_0)$ com $Q_0 < \beta^{-1}I$ e $R_0 < \beta^{-1}I$ é assegurada pelo controle a custo garantido $\hat{u}(t)$.

Sob estas condições o controle a custo garantido é dado por $\hat{u}(t) = \hat{K}x(t)$, com $\hat{K} = -R_0^{-1}B^T\hat{W}^{-1} + L$ e o valor do custo garantido é: $\hat{J}(x_0) = x_0^T\hat{W}^{-1}x_0$

Utilizando a formulação LMI não se faz necessário o conhecimento inicial da melhor decomposição para as incertezas, tendo em vista que a decomposição ótima é dada pelos fatores de escala da matriz S , a qual é variável do problema.

Ainda aqui faz-se necessário a execução de um algoritmo para determinar a matriz de ganho \hat{K} sem ganhos cruzados, isto é, atendendo à restrição estrutural [5, 9]:

1. Escolher um número inteiro positivo l_{max} , as matrizes $Q_0 = Q_0^T > 0$, $R_0 = R_0^T > 0$, um escalar positivo pequeno β , e definir $l = 0$ e $L_0 = 0$.
2. Encontrar a solução (M_l, W_l, S_l) do problema de otimização (2.1.18) para $L = L_l$. Se não houver solução, abortar o algoritmo.
3. Definir $L_{(l+1)} = F(-R_0^{-1}B^TW_l^{-1})$ e:

$$\Lambda = \beta I - \begin{bmatrix} 0 & W_l(L_{(l+1)} - L_l)^T \\ (L_{(l+1)} - L_l)W_l & 0 \end{bmatrix}$$

4. Se $\Lambda > 0$, ir para o passo 6.
5. Se, $l < l_{max}$, então definir $l = l + 1$ e ir para o passo 2, caso contrário, abortar o algoritmo.
6. O algoritmo teve sucesso, com a solução $\hat{W} = W_l$ e $\hat{K} = -R_0^{-1}B_0^T\hat{W}^{-1} + L_{(l+1)}$.

Como explanado anteriormente, esse algoritmo se presta para o projeto de um controlador de saída com estrutura descentralizada, como é desejado no projeto de estabilizadores de sistemas de potência. Para tanto, deve-se utilizar, no passo 3, uma restrição estrutural da forma (2.1.7).

A principal vantagem do enfoque pela equação de Riccati para a busca de um controlador robusto descentralizado, vem do fato de se utilizar a formulação do problema incerto com a utilização de incertezas limitadas em norma, como é definido em (2.1.2). Dessa forma, não é necessário resolver 2^p (p é o número de parâmetros incertos) equações de Liapunov como nos outros métodos que utilizam LMI's com modelagem politópica para o sistema incerto. Isso simplifica a descrição das equações e reduz significativamente o esforço computacional, o que ficará claro no decorrer desse trabalho.

2.1.5 Realimentação Dinâmica de Saída

Nessa seção é estudado o problema de realimentação dinâmica de saída, utilizando o método da equação de Riccati.

Para utilizar o método proposto, é necessário transformar o problema de realimentação dinâmica de saídas num problema de realimentação estática de saídas de um sistema aumentado, ao qual é possível, então, aplicar o teorema 2.1.3.

Considerando uma realimentação da forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases} \quad (2.1.19)$$

A função de transferência do controlador resulta em:

$$H_c(s) = C_c(sI - A_c^{-1})B_c + D_c$$

Combinando-se as equações do sistema (2.1.1) e do controlador (2.1.19), chega-se a:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BD_cC + \Delta A)x + BC_c x_c \\ \dot{x}_c = B_c C x + A_c x_c \end{cases} \quad (2.1.20)$$

Um novo sistema pode, então, ser descrito, incorporando a dinâmica dos controladores no sistema original [9]:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = (A_a + \Delta A_a)x_a + B_a u_a \\ y_a = C_a x_a \end{cases} \quad (2.1.21)$$

onde:

$x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$ é o vetor de estados do sistema aumentado.

E as matrizes desse sistema aumentado são dadas por:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_a = \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad e \quad C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o problema de realimentação dinâmica resulta num problema de realimentação estática de saída para o sistema aumentado, com o controlador resultante:

$$u_a = K_a x_a = G_a C_a x_a = G_a y_a, \text{ onde } G_a = K_a C_a^T (C_a C_a^T)^{-1}$$

desde que a matriz de ganhos K_a satisfaça a restrição estrutural:

$$F(K_a) = K_a (I - C_a^T (C_a C_a^T)^{-1} C_a) = 0$$

de onde tem-se que $u_a = G_a y_a$ corresponde à realimentação estática de saídas do sistema aumentado, com $G_a = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$.

E, para o caso onde o controlador possui uma estrutura pré-definida, deve-se colocá-lo na forma canônica observável e as matrizes do sistema aumentado e a matriz do ganho de realimentação, que define o controlador, são definidas como:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_a = [C \quad 0] \quad e \quad G_a = \begin{bmatrix} D_c \\ B_c \end{bmatrix}$$

Assim, é possível projetar um controlador dinâmico utilizando o método da equação de Riccati.

2.1.6 Estudo de Caso para o Método da Equação de Riccati

Nessa seção utilizou-se o método da equação de Riccati para projetar os ESP's para os sistemas exemplo descritos no capítulo 1.

Dessa forma, utilizou-se o problema (2.1.18), proposto no teorema (2.1.3), juntamente com o algoritmo iterativo proposto, o que possibilitou a obtenção de controladores utilizando realimentação de saída.

Tomou-se as matrizes que descrevem o sistema reduzido incerto: A_0 e A_n , para os dois sistemas estudados, os quais são mostrados na seção 1.4. E os resultados obtidos são descritos a seguir.

1. Realimentação estática de velocidade

(a) Sistema Kundur:

A realimentação proporcional $K = 0,11733$ estabiliza o sistema incerto.

(b) Sistema Paim:

Não converge com realimentação estática de saída, mesmo para o sistema sem incertezas. Assim, o resultado obtido foi para realimentação de estados do sistema incerto:

$$K = [-0.2429 \quad 0.1486 \quad -0.5478 \quad -0.0019]$$

2. Realimentação dinâmica de velocidade

(a) Sistema Kundur:

Utilizando a estrutura do controlador fixa e definindo suas matrizes $A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $C_c = [.1 \quad .2]$, obteve-se um controlador estático (devido ao cancelamento de pólos e zeros) que estabiliza o sistema incerto:

$$H_c(s) = \frac{0.116(s+12)(s+7.999)}{(s+8)(s+12)}$$

Modificando a matriz C_c do controlador para $C_c = [10 \quad 20]$ obteve-se um controlador dinâmico que estabiliza o sistema incerto, cuja função de transferência é:

$$H_c(s) = \frac{0.18677(s+10.54)(s+6.388)}{(s+8)(s+12)}$$

(b) Sistema Paim:

Utilizando a estrutura do controlador fixa e definindo suas matrizes $A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $C_c = [.1 \quad .2]$, o método não convergiu para o sistema incerto, assim, obteve-se um controlador estático (devido ao cancelamento de pólos e zeros) que estabiliza apenas o sistema nominal:

$$H_c(s) = \frac{0.1226(s+12)(s+7.998)}{(s+8)(s+12)}$$

Modificando a matriz C_c do controlador para $C_c = [10 \quad 20]$ obteve-se um controlador dinâmico que estabiliza o sistema incerto, cuja função de transferência é:

$$H_c(s) = \frac{0.13259(s+11.42)(s+4.207)}{(s+8)(s+12)}$$

Desses resultados, nota-se que é possível estabilizar o sistema Kundur com uma realimentação proporcional de velocidade, o que não é muito comum em sistemas de potência. Essa tendência se comprova, pois mesmo com o projeto de realimentação dinâmica os zeros e pólos da função de transferência tendem a se cancelar, resultando um controlador estático.

No cálculo da realimentação de saída, observa-se a influência dos valores dos elementos da matriz C_c na obtenção de resultado para o sistema Paim incerto. Também observa-se que, no cálculo da *realimentação estática*, não foi possível a obtenção de resultado para o sistema Paim nominal, entretanto,

o cálculo da *realimentação dinâmica* resultou num *controlador estático* para esse sistema. Esses fatos caracterizam a influência numérica existente na obtenção desses resultados com o método da equação de Riccati.

2.2 Projeto de Controladores de Saída Descentralizados via Processo de Separação

Este enfoque trabalha com as propriedades de separação, as quais são verdadeiras para o projeto de controladores de saída sem restrições e tenta generalizar o método para trabalhar com o projeto de controladores de saída descentralizados e com restrições estruturais, baseado em [33].

O método original é aqui aprimorado com a formulação das LMI's para sistemas com incertezas politópicas e com incertezas limitadas em norma.

2.2.1 Realimentação Dinâmica de Saída

Seja o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_u u \\ y = C_y x + D_w w \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Onde:

$x \in \mathbb{R}^n$: vetor de estados do sistema

$u \in \mathbb{R}^m$: vetor de entradas de controle

$y \in \mathbb{R}^r$: vetor de saídas medidas

$z \in \mathbb{R}^p$: vetor de saídas controladas

$w \in \mathbb{R}^q$: vetor de perturbações de entrada

O problema de interesse é encontrar um controlador da forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Onde:

$x_c \in \mathbb{R}^n$: vetor de estados do controlador

O controlador deve estabilizar o sistema (2.2.1) e minimizar a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência matricial $H_{zw}(s)$, que é a função de transferência do sistema de w para z .

Assume-se, para a solução do problema, que a estrutura do controlador atende a duas restrições:

- Sua função de transferência $H_c(s)$ é estritamente própria.
- Sua dimensão é a mesma do sistema a ser controlado.

Então, sistema realimentado pode ser descrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a w \\ z = C_a x_a \end{cases} \quad (2.2.3)$$

onde:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B_w \\ B_c D_w \end{bmatrix}, \quad C_a = [C_z \quad D_w C_c] \text{ e } A_a \text{ é Hurwitz.}$$

O quadrado da norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $H_{zw}(s)$ pode ser expresso em termos da solução de uma equação de Liapunov simétrica e positiva definida (o gramiano de observabilidade), de forma que a minimização da norma com respeito às variáveis A_c , B_c e C_c é dada por [33]:

$$\min_{A_c, B_c, C_c, P} \{Tr[B_a^T P B_a] : A_a^T P + P A_a + C_a^T C_a = 0\} \quad (2.2.4)$$

A restrição de igualdade pode ser substituída por uma de desigualdade, usando a propriedade não-decrescente da solução da equação de Liapunov e, usando o complemento de Schur [3, 11, 31], o problema (2.2.4) pode ser reescrito:

$$\begin{aligned} & \min_{A_c, B_c, C_c, P, W} Tr[W] \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} \begin{bmatrix} P & P B_a \\ B_a^T P & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_a^T P + P A_a & C_a \\ C_a^T & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Uma condição necessária e suficiente para a existência de um controlador estabilizante para (2.2.1), é dada pelos primeiros termos das desigualdades em (2.2.5): $A_a^T P + P A_a < 0$ e $P > 0$ [33]. A factibilidade dessa condição é equivalente a existência de um controlador que gere uma norma \mathcal{H}_2 finita no problema (2.2.5).

O teorema a seguir provê uma formulação para o problema (2.2.5) como uma desigualdade matricial não-linear.

Teorema 2.2.1. [33] *O sistema (2.2.1) pode ser estabilizado por uma realimentação dinâmica de saída da forma (2.2.2), se e somente se, existem as matrizes simétricas X e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{q \times q}$, e as matrizes $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{n \times r}$, tais que as seguintes desigualdades não-lineares sejam factíveis:*

$$\begin{bmatrix} Y & I & B_w \\ I & X & X B_w + F D_w \\ B_w^T & B_w^T X + D_w^T F^T & W \end{bmatrix} > 0 \quad (2.2.6)$$

$$\begin{bmatrix} H & Z + M & YC_z^T + L^T D_u \\ Z^T + M^T & G & C_z^T \\ C_z Y + D_u L & C_z & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.7)$$

O controlador que minimiza a norma \mathcal{H}_2 de $H_{zw}(s)$ é, então, dado por:

$$\min\{Tr[W] : (2.2.6), (2.2.7)\} \quad (2.2.8)$$

onde

$$H(Y, L) = AY + YA^T + B_u L + L^T B_u^T \quad (2.2.9)$$

$$G(X, F) = A^T X + X A + F C_y + C_y^T F^T \quad (2.2.10)$$

$$Z(X, Y, F, L) = A + [Y \quad L^T] \begin{bmatrix} A & B_u \\ C_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ F^T \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

Prova: A prova do teorema acima é a equivalência entre as duas desigualdades de (2.2.5) e as desigualdades (2.2.6) e (2.2.7). Assim, sendo $P = P^T > 0$ e P^{-1} , de dimensões $2n \times 2n$, particionadas em blocos de dimensão $n \times n$ da seguinte forma:

$$P := \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \tilde{X} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} := \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \tilde{Y} \end{bmatrix}$$

e definindo, ainda, a matriz $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ como:

$$T := \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}$$

Assume-se que T é uma matriz regular, pois P é positiva definida e sempre pode-se considerar uma pequena perturbação na matriz V para conseguir a regularidade.

Acrescentando a seguinte mudança de variáveis:

$$L := C_c V^T, \quad F := U B_c, \quad M := V A_c^T U^T$$

e multiplicando as desigualdades de (2.2.5) pela direita por:

$$\tilde{T} := \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e pela esquerda por \tilde{T}^T chega-se a (2.2.6) e (2.2.7). \diamond

Tendo as matrizes X, Y, M, F e L , que satisfazem o teorema 2.2.1, pode-se encontrar as matrizes do controlador A_c, B_c e C_c da seguinte forma:

- Escolher uma matriz regular V de onde $C_c = L(V^T)^{-1}$.
- Calcular a matriz U tal que $UV^T = I - XY$ e daí $B_c = U^{-1}F$.

- A matriz A_c é dada por $A_c = U^{-1}M^T(V^T)^{-1}$.
- A função de transferência do controlador fica na forma:

$$H_c(s) = L[s(I - XY) - M^T]^{-1}F \quad (2.2.12)$$

Note-se que controladores de ordem menor que n são definidos quando $(I - XY)$ apresenta posto por linhas incompleto e, se $XY = I$, tem-se um controlador de saída estático.

2.2.2 Propriedades de Separação

Com respeito à existência de um controlador de saída factível, a única condição é a existência de uma matriz $P = P^T$ tal que [33]:

$$A_a^T P + P A_a < 0, \quad P > 0 \quad (2.2.13)$$

Esta condição é expressa pelos seguintes blocos de (2.2.6) e (2.2.7):

$$\begin{bmatrix} H & Z + M \\ Z^T + M^T & G \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0$$

Caso não haja restrições na matriz A_c a ser determinada, é possível eliminar o termo não linear $Z + M$, fazendo $M = -Z$ [33]. Isso reduz as desigualdades a:

$$G < 0, \quad H < 0, \quad \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0$$

De fato, não é necessário considerar a última desigualdade acima, pois dadas as matrizes $X > 0$ e $Y > 0$, tais que $G < 0$ e $H < 0$, e um escalar $\alpha > 0$, a desigualdade $G(\alpha X, \alpha F) < 0$ ainda é verdadeira e é sempre possível encontrar α tal que $\begin{bmatrix} Y & I \\ I & \alpha X \end{bmatrix} > 0$ [33].

Assim o problema torna-se completamente separável, pois as determinações de:

$$\{(X, F) : G < 0, X > 0\} \text{ e } \{(Y, L) : H < 0, Y > 0\}$$

são completamente independentes. Estas desigualdades são as bem conhecidas condições de detectabilidade e estabilizabilidade por realimentação de estados, que são encontradas no projeto de realimentação de saídas baseado no estimador de estados[12]. De fato, (Y, L) geram o ganho de realimentação de estados $K_f = LY^{-1}$ e (X, F) geram o ganho do estimador de estados $K_e = X^{-1}F$ e, é claro, a determinação destes ganhos é completamente independente.

Nos casos em que não existem restrições na estrutura do controlador, tanto para o caso da determinação de uma norma \mathcal{H}_2 finita, quanto para o caso de sua otimização, é possível reescrever

as desigualdades (2.2.6) e (2.2.7) de forma a transformá-las em LMI's com separação de variáveis, calculando-se a realimentação de estados e, posteriormente, a realimentação de saída.

Entretanto, na presença de restrições adicionais não é mais possível eliminar o termo não linear $Z + M$ e separar o conjunto factível em termos somente de funções convexas de (Y, L) e (X, F) , isto é, sempre que a matriz M tiver que satisfazer restrições adicionais, a separação não é mais válida [33].

2.2.3 Generalização do Princípio da Separação

Esta generalização deve ser capaz de lidar com problemas de realimentação de saída definidos como *problemas de controle a custo garantido*, pois a matriz P em (2.2.4), que é usada para calcular a norma \mathcal{H}_2 , estará sujeita a restrições adicionais, tais como descentralização. Desta forma, o problema (2.2.4) torna-se [33]:

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \{Tr[B_a^T P B_a] : A_a^T P + P A_a + C_a^T C_a \leq 0\} \quad (2.2.14)$$

cuja solução fornece um limite superior, conseqüentemente um custo garantido:

$$\|H_{zw}\|_2^2 \leq Tr[B_a^T P B_a] \quad (2.2.15)$$

sendo \mathcal{P} qualquer subconjunto do conjunto de todas as matrizes positivas definidas.

Teorema 2.2.2. [33] *Dada a matriz $C_c = C_{ck}$ fixa, o sistema (2.2.1) pode ser estabilizado por uma realimentação dinâmica de saída, da forma (2.2.2), se e somente se existirem as matrizes simétricas $X, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{q \times q}$ e matrizes $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{n \times r}$, tais que as desigualdades lineares a seguir sejam factíveis:*

$$\begin{bmatrix} P & P & P B_w \\ P & X & X B_w + F D_w \\ B_w^T P & B_w^T X + D_w^T F^T & W \end{bmatrix} > 0 \quad (2.2.16)$$

$$\begin{bmatrix} A_k^T P + P A_k & P A + A_k^T X + C_y^T F^T + S & C_k^T \\ A^T P + X A_k + F C_y + S^T & G & C_z^T \\ C_k & C_z & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.17)$$

Onde:

$$A_k = A + B_u C_{ck}, \quad C_k = C_z + D_u C_{ck}, \quad G = A^T X + X A + F C_y + C_y^T F^T$$

E, se as desigualdades acima são factíveis, o controlador que minimiza a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $H_{zw}(s)$ é obtido do problema de otimização convexo:

$$\min\{Tr[W] : (2.2.16), (2.2.17)\} \quad (2.2.18)$$

Prova: As desigualdades matriciais lineares (2.2.16) e (2.2.17) são obtidas multiplicando (2.2.6) e (2.2.7), pela esquerda e pela direita, pela matriz simétrica e positiva definida $\text{diag}(Y^{-1}, I, I)$ e fazendo a mudança de variáveis $P = Y^{-1}$ e $S = Y^{-1}M$. \diamond

Procedimento de Separação para o Problema Genérico de Realimentação de Saída

1. Determinar a solução para o problema de realimentação de estados:

$$\begin{aligned} & \min_{L, Y, W_Y} \text{Tr}[W_Y] \\ & \text{sujeito a} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} Y & B_w \\ B_w^T & W_Y \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} H & YC_z^T + L^T D_u \\ C_z Y + D_u L & -I \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

E, sendo (Y^*, L^*) a solução de (2.2.19), definir $C_{ck} = L^*(Y^*)^{-1}$.

2. Tentar encontrar uma realimentação de saída subótima resolvendo (2.2.18). Se esse passo tiver solução, então, o controlador por realimentação de saída é dado por:

$$H_c(s) = L[s(I - XY) - M^T]^{-1}F, \quad Y = P^{-1}, \quad M = SY, \quad L = L^*(Y^*)^{-1}P^{-1}$$

O próximo teorema 2.2.3, em conjunto com o teorema 2.2.2, provê a possibilidade de montar um algoritmo para melhorar a solução acima com respeito ao objetivo.

Teorema 2.2.3. [33] *Dada a matriz $B_c = B_{ck}$ fixa, o sistema (2.2.1) pode ser estabilizado por realimentação dinâmica de saída da forma (2.2.2) se e somente se existirem as matrizes simétricas $Y, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{q \times q}$ e as matrizes $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tais que as desigualdades lineares a seguir sejam factíveis:*

$$\begin{bmatrix} Y & Q & B_w \\ Q & Q & B_k \\ B_w^T & B_k^T & W \end{bmatrix} > 0 \quad (2.2.20)$$

$$\begin{bmatrix} H & AQ + YA_k^T + L^T B_u^T + S & YC_z^T + L^T D_u^T \\ QA^T + A_k Y + B_u L + S^T & A_k Q + QA_k^T & QC_z^T \\ C_z Y + D_u L & C_z Q & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.21)$$

Onde:

$$A_k = A + B_{ck}C_y, \quad B_k = B_w + B_{ck}D_w, \quad H = AY + YA^T + B_u L + L^T B_u^T$$

E se as desigualdades acima são factíveis, o controlador que minimiza a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $H_{zw}(s)$ é obtido do problema de otimização convexo:

$$\min\{\text{Tr}[W] : (2.2.20), (2.2.21)\} \quad (2.2.22)$$

Prova: Como na prova do teorema 2.2.2, as desigualdades matriciais lineares (2.2.20) e (2.2.21) são obtidas multiplicando (2.2.6) e (2.2.7), pela esquerda e pela direita, pela matriz simétrica e positiva definida $diag(I, X^{-1}, I)$ e fazendo a mudança de variáveis $Q = X^{-1}$ e $S = MX^{-1}$. \diamond

2.2.4 Algoritmo de Decomposição Cruzada

Dos teoremas 2.2.2 e 2.2.3, supondo que em $k = 0$, a matriz $C_{c0} = L_0 Y_0^{-1}$, obtida da resolução de (2.2.19), seja capaz de gerar as matrizes P_0, X_0, F_0, S_0, W_0 factíveis para as LMI's (2.2.16) e (2.2.17), então estas matrizes também são factíveis para as desigualdades (2.2.6), (2.2.7). Então, o seguinte algoritmo gera uma solução ótima local para o problema de custo garantido \mathcal{H}_2 [33]:

1. Fazer $B_{ck} = X_k^{-1} F_k$, resolver (2.2.22) e determinar $\alpha_k = Tr[W_k]$. Gera-se as matrizes L_k e Y_k a serem usadas no passo dois.
2. Fazer $C_{ck} = L_k Y_k^{-1}$, resolver (2.2.18) e determinar $\beta_k = Tr[W_k]$. Determina-se as matrizes F_k e X_k a serem usadas no passo um.
3. Se $\alpha_k - \beta_k < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro suficiente pequeno, parar. Senão fazer $k \leftarrow k + 1$ e ir para o passo um.

Nota-se que uma solução factível para (2.2.18) resulta em:

$$Y = P^{-1}, \quad L = L_k (P Y_k)^{-1}, \quad M = P^{-1} S, \quad X, \quad F, \quad W$$

que definem uma solução factível para (2.2.8).

E uma solução factível para (2.2.22) resulta em:

$$X = Q^{-1}, \quad F = (X_k Q)^{-1} F_k, \quad M = S Q^{-1}, \quad Y, \quad L, \quad W$$

que definem uma solução factível para (2.2.8).

2.2.5 Controle Descentralizado

Seja o sistema dinâmico definido pela interconexão de N subsistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w D w + B_u D u \\ z = C_z D x + D_u D u \\ y = C_y D x + D_w D w \end{cases} \quad (2.2.23)$$

Onde o índice 'D' nas matrizes indica que ela tem uma estrutura bloco-diagonal de N blocos com dimensões de acordo com os estados, controles e saídas de cada subsistema tais que:

$$n = \sum_{i=1}^N n_i, \quad m = \sum_{i=1}^N m_i, \quad r = \sum_{i=1}^N r_i, \quad p = \sum_{i=1}^N p_i$$

O problema de realimentação dinâmica de saída descentralizada consiste em encontrar controladores dinâmicos de saída da forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_{cD}x_c + B_{cD}y \\ u = C_{cD}x_c \end{cases} \quad (2.2.24)$$

Que estabilizem o sistema interconectado (2.2.23) e minimizem a norma \mathcal{H}_2 associada. Este problema pode ser escrito:

$$\min\{\|H_{zw}(s)\|_2^2 : A_c = A_{cD}, B_c = B_{cD}, C_c = C_{cD}\} \quad (2.2.25)$$

Definição 2.2.1. [33] O sistema interconectado (2.2.23) é quadraticamente estabilizável descentralizadamente (DQS) por uma realimentação de saída dinâmica, se existe uma matriz simétrica e positiva definida P_D , bloco-diagonal, e matrizes A_{cD}, B_{cD}, C_{cD} , tais que a derivada no tempo da função de Liapunov $v(x_a) = x_a^T P x_a$ seja negativa ao longo de toda a trajetória do sistema em malha fechada.

Particionando a matriz de Liapunov usada para testar a estabilidade do sistema controlado:

$$P_D = \begin{bmatrix} X_D & U_D \\ U_D^T & \hat{X}_D \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

O desenvolvimento feito anteriormente pode ser estendido de forma que as inequações (2.2.6) e (2.2.7) expressem as condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador de saída estabilizante descentralizado [33].

Tratando-se de uma matriz com a estrutura de (2.2.26), cuja inversa apresenta a mesma estrutura, é possível concluir, a partir da função de transferência do controlador (2.2.12), que um controlador de realimentação de saída descentralizado é obtido impondo-se as restrições lineares:

$$Y = Y_D, \quad X = X_D, \quad L = L_D, \quad F = F_D, \quad M = M_D$$

Como previsto não é possível eliminar os termos não lineares em (2.2.7) com uma escolha apropriada da matriz M_D . De fato, a função matricial $Z(\cdot)$, definida em (2.2.11) só exibirá estrutura descentralizada se $A = A_D$.

O procedimento de separação e o algoritmo de decomposição cruzada podem ser aplicados, pois a linearidade das restrições adicionais preservam as propriedades dos teoremas (2.2.2) e (2.2.3).

Neste enfoque está-se preocupado com o projeto de controle \mathcal{H}_2 ótimo, logo o problema (2.2.8) representa o problema a ser resolvido. Este problema se torna um problema a custo garantido, pois foram acrescentadas restrições adicionais de forma a prover-se uma solução [33].

2.2.6 Incertezas Limitadas em Norma

Nessa seção o método é estendido para o caso de sistemas incertos modelados através de incertezas limitadas em norma. Nesse caso deve-se considerar o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(t))x(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_u u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_w w(t) \end{cases} \quad (2.2.27)$$

A matriz A_0 é uma matriz constante e as matrizes incertas são descritas como:

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^p r_i(t) \Upsilon_i; \quad r_i^2(t) \leq 1 \quad \forall t, \quad \text{ou equivalentemente: } |r_i(t)| \leq 1 \quad i = 1, \dots, p \quad (2.2.28)$$

O vetor $r(t) \in \mathbb{R}^p$ representa as incertezas do sistema e p é o número de parâmetros incertos. E Υ_i é uma matriz constante de posto unitário, que pode ser escrita como:

$$\Upsilon_i = d_i e_i^T; \quad d_i \text{ e } e_i \in \mathbb{R}^n \quad (2.2.29)$$

Considerando o controlador da forma (2.2.2) e o sistema incerto (2.2.27), o sistema realimentado pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = (A_{0a} + \Delta A_a)x_a + B_a w \\ z = C_a x_a \end{cases} \quad (2.2.30)$$

onde:

$$A_{0a} = \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}, \quad \Delta A_a = \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B_w \\ B_c D_w \end{bmatrix}, \quad C_a = [C_z \quad D_w C_c]$$

Reescrevendo, então, o segundo termo do problema de minimização (2.2.5), considerando o sistema (2.2.30), tem-se:

$$A_{0a}^T P + P A_{0a} + \Delta A_a^T P + P \Delta A_a + C_a^T C_a < 0 \quad (2.2.31)$$

Definindo agora as matrizes:

$$D := [d_1 \dots d_p]; \quad E := [e_1 \dots e_p]^T; \quad S_p := \text{diag}(s_1, \dots, s_p), \quad \text{com } s_i > 0 \in \mathbb{R}$$

$$D_a = [D^T \quad 0_{p \times n}^T]^T \text{ e } E_a = [E \quad 0_{p \times n}]$$

e considerando, conforme [5, 10, 35, 38]:

$$\Delta A_a^T P + P \Delta A_a \leq P D_a S_p D_a^T P + E_a^T S_p^{-1} E_a \quad (2.2.32)$$

pode-se substituir (2.2.32) em (2.2.31), obtendo:

$$A_{0a}^T P + P A_{0a} + P D_a S_p D_a^T P + E_a^T S_p^{-1} E_a + C_a^T C_a < 0 \quad (2.2.33)$$

Aplicando o complemento de Schur [11] em (2.2.33), chega-se ao equivalente do segundo termo do problema (2.2.5), com a inclusão dos parâmetros incertos:

$$\begin{bmatrix} A_{0a}^T P + P A_{0a} + P D_a S_p D_a^T P + E_a^T S_p^{-1} E_a & C_a^T \\ & C_a \\ & & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.34)$$

Ainda, se a desigualdade (2.2.34) for satisfeita, então a desigualdade (2.2.31) também será.

Tomando agora a inequação (2.2.34) e aplicando o mesmo procedimento de transformações de similaridade e mudanças de variáveis, que levaram (2.2.5) a (2.2.7), chega-se ao seguinte problema equivalente a (2.2.7):

$$\begin{bmatrix} H + D S_p D^T + Y E^T S_p^{-1} E Y & Z + M + D S_p D^T X + Y E^T S_p^{-1} E & Y C_z^T + L^T D_u \\ Z^T + M^T + X D S_p D^T + E^T S_p^{-1} E Y & G + X D S_p D^T X + E^T S_p^{-1} E & C_z^T \\ C_z Y + D_u L & C_z & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.35)$$

Da mesma forma que em (2.2.19), tomando de (2.2.35) somente a parte equivalente à realimentação de estados e aplicando o complemento de Schur, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} H + D S_p D^T & Y C_z^T + L^T D_u & Y E^T \\ C_z Y + D_u L & -I & 0 \\ E Y & 0 & -S_p \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.36)$$

Partindo agora da inequação (2.2.35), aplicando o mesmo procedimento de transformações de similaridade e mudanças de variáveis, que levaram (2.2.7) a (2.2.17), e aplicando o complemento de Schur, chega-se ao seguinte inequação matricial equivalente a (2.2.17):

$$\begin{bmatrix} A_k^T P + P A_k + E^T S_p^{-1} E & P A + A_k^T X + C_y^T F^T + S + E^T S_p^{-1} E & C_k^T & P D \\ A^T P + X A_k + F C_y + S^T + E^T S_p^{-1} E & G + E^T S_p^{-1} E & C_z^T & X D \\ C_k & C_z & -I & 0 \\ D^T P & D^T X & 0 & -S_p^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.37)$$

Finalmente, tomando a inequação (2.2.35), aplicando o mesmo procedimento de transformações de similaridade e mudanças de variáveis, que levaram (2.2.7) a (2.2.21), e aplicando o complemento de Schur, chega-se ao seguinte inequação matricial equivalente a (2.2.21):

$$\begin{bmatrix} H + D S_p D^T & A Q + Y A_k^T + L^T B_u^T + S + D S_p D^T & Y C_z^T + L^T D_u^T & Y E^T \\ Q A^T + A_k Y + B_u L + S^T + D S_p D^T & A_k Q + Q A_k^T + D S_p D^T & Q C_z^T & Q E^T \\ C_z Y + D_u L & C_z Q & -I & 0 \\ E Y & E Q & 0 & -S_p \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.38)$$

Portanto, para projetar um controlador que estabiliza o sistema incerto (2.2.27), utilizando o método da separação e considerando as incertezas limitadas em norma, deve-se utilizar as LMI's (2.2.36), (2.2.37) e (2.2.38) em lugar das LMI's (2.2.19), (2.2.17) e (2.2.21), respectivamente, e seguir o mesmo procedimento abordado anteriormente, na seção 2.2.4.

2.2.7 Incertezas Politópicas

Nessa seção, o método é estendido para o caso de sistemas incertos modelados com incertezas politópicas.

No caso de incertezas politópicas, considera-se que a matriz A pertence a um conjunto de matrizes, isto é, $A \in \Psi$, onde:

$$\Psi = \left\{ A : A = \sum_{i=1}^p \tau_i A_i, \tau_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \tau_i = 1, i = 1, \dots, p \right\} \quad (2.2.39)$$

Percebe-se que Ψ descreve um politopo com p vértices determinados pelas matrizes A_i .

Considerando $A \in \Psi$ e definindo:

$$H_i(Y, L) = A_i Y + Y A_i^T + B_u L + L^T B_u^T \quad \text{e} \quad G_i(X, F) = A_i^T X + X A_i + F C_y + C_y^T F^T$$

O problema (2.2.19) pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} H_i & Y C_z^T + L^T D_u \\ C_z Y + D_u L & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.2.40)$$

Da mesma forma, a inequação (2.2.17) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} A_{k_i}^T P + P A_{k_i} & P A_i + A_{k_i}^T X + C_y^T F^T + S & C_k^T \\ A_i^T P + X A_{k_i} + F C_y + S^T & G_i & C_z^T \\ C_k & C_z & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.2.41)$$

Onde : $A_{k_i} = A_i + B_u C_{ck}$

Também da mesma forma, a inequação (2.2.21) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} H_i & A_i Q + Y A_{k_i}^T + L^T B_u^T + S & Y C_z^T + L^T D_u^T \\ Q A_i^T + A_{k_i} Y + B_u L + S^T & A_{k_i} Q + Q A_{k_i}^T & Q C_z^T \\ C_z Y + D_u L & C_z Q & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.2.42)$$

Onde: $A_{k_i} = A_i + B_{ck} C_y$

Finalmente, para projetar um controlador que estabiliza o sistema incerto com incertezas politópicas, utilizando o método da separação, deve-se utilizar as LMI's (2.2.40), (2.2.41) e (2.2.42) em lugar das LMI's (2.2.19), (2.2.17) e (2.2.21), respectivamente, e seguir o mesmo procedimento abordado anteriormente, na seção 2.2.4.

2.2.8 Estudo de Caso para o Método da Separação

Nessa seção, o método da separação foi utilizado para projetar os ESP's para os sistemas exemplo descritos no capítulo 1.

Utilizaram-se as matrizes que descrevem o sistema reduzido (A_0 e A_n) para obter os resultados abaixo, as matrizes que definem as entradas de perturbação B_w e D_w e as saídas de performance C_z e D_u foram consideradas nulas.

1. Realimentação dinâmica de velocidade

(a) Sistema Kundur:

Obteve-se um controlador de ordem 4 que estabiliza o sistema incerto e cuja função de transferência é:

$$H_c(s) = \frac{227.3275(s+92.19)(s+8.137)(s+0.2082)}{(s+1005)(s+0.4088)(s^2+76.37s+2175)}$$

(b) Sistema Paim:

Obteve-se um controlador de ordem 4 que estabiliza o sistema incerto e cuja função de transferência é:

$$H_c(s) = \frac{38.4745(s+49.3)(s+6.986)(s+1.715)}{(s+36.46)(s+1.778)(s^2+17.1s+1255)}$$

Os cálculos foram feitos com as LMI's para as incertezas limitadas em norma, conforme a seção 2.2.6, e o esforço para obtenção dos resultados resultados foi pequeno.

Conforme determinado pelo método, os controladores aqui obtidos são da mesma dimensão que o sistema de potência a ser controlado, ou seja, quarta ordem.

2.3 Método do Problema W e Problema P

Nessa abordagem é proposto um método para a solução do problema de controle por realimentação de saída, utilizando LMI's [17]. Os resultados são baseados em condições suficientes, pois dependem da representação de estados particular usada para representar o sistema. Ao método são acrescentados os requisitos necessários para o projeto de ESP's [37].

Nesse trabalho o método é estendido para a utilização com sistemas incertos modelados com incertezas limitadas em norma.

2.3.1 Definição do Problema W e Problema P

Considerando o sistema contínuo e invariante no tempo representado pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

onde:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: vetor de estados do sistema

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: vetor de entradas de controle do sistema

$y(t) \in \mathbb{R}^l$: vetor de saídas do sistema

É bem conhecido que o sistema (2.3.1) é estabilizável via realimentação de estados, se e somente se, existem as matrizes $P > 0$ e K tais que [17, 37]:

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P < 0 \quad (2.3.2)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.3.2) por $W = P^{-1}$, tem-se:

$$(A + BK)W + W(A + BK)^T < 0 \quad (2.3.3)$$

E definindo $L = KW$, chega-se a:

$$AW + WA^T + BL + B^T L^T < 0 \quad (2.3.4)$$

A inequação dada por (2.3.4) é factível nas variáveis (W, L) , se e somente se, o par (A, B) for estabilizável [17, 37] e, nesse caso, o ganho de realimentação que estabiliza o sistema em malha fechada é dado por $K = LW^{-1}$. Como esse problema é linear em W e L , é convexo, logo pode ser resolvido por algoritmos eficientes.

Considerando o caso de realimentação estática de saída, a lei de controle tem a estrutura $u = Gy$ e usando $y = Cx$, pode-se definir $K = GC$ e substituir na inequação (2.3.3), obtendo:

$$(A + BGC)W + W(A + BGC)^T < 0 \quad (2.3.5)$$

A inequação dada por (2.3.5) em geral não é convexa, isto é, não é linear, sendo o problema de resolução numérica da inequação para (W, G) um problema de difícil solução. Porém, é possível definir um problema auxiliar convexo a partir do problema não convexo (2.3.5).

Definição 2.3.1. Problema W [17]: Dadas as matrizes A, B e C , sendo C com posto completo por linhas, o problema W consiste em encontrar, se possível, as matrizes W, X e L tais que

$$\begin{cases} AW + WA^T + BLC + C^T L^T B^T < 0 \\ W > 0 \\ XC = CW \end{cases} \quad (2.3.6)$$

O problema W é convexo, logo pode ser resolvido por algoritmos eficientes [11], além disso, se ele for factível, então o problema original de estabilização por realimentação de saída (2.3.5), também é factível.

Teorema 2.3.1. [17] *Sejam W, X e L as soluções do problema W , então a realimentação de saída:*

$$u = LX^{-1}y = Gy$$

estabiliza o sistema (2.3.1).

Prova: Se C tem posto completo por linhas, então segue-se de $XC = CW$, que X também tem posto completo e é, portanto, inversível, levando a $C = X^{-1}CW$. Usando esse fato, definindo $G = LX^{-1}$ e substituindo em (2.3.6) chega-se a (2.3.5) completando a prova. \diamond

Tomando agora como ponto de partida a inequação (2.3.2), tem-se os seguintes resultados adicionais.

Definição 2.3.2. Problema P [17]: Dadas as matrizes A, B e C , sendo B com posto completo por colunas, o problema P consiste em encontrar, se possível, as matrizes P, Y e F tais que:

$$\begin{cases} PA + A^T P + BFC + C^T F^T B^T < 0 \\ P > 0 \\ BY = PB \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Corolário 2.3.2. [17] *Sejam P, Y, F as soluções do problema P, então a realimentação de saída:*

$$u = Y^{-1}Fy$$

estabiliza o sistema (2.3.1).

A factibilidade do problema W ou do problema P são condições suficientes para o problema de realimentação estática de saída, as quais têm a vantagem de serem convexas e, dessa forma, passíveis de serem testadas com algoritmos eficientes e confiáveis [11, 17, 37].

2.3.2 Análise de Suficiência

A seguir é mostrado que a factibilidade do problema W e do problema P dependem da representação de estados escolhida para representar o sistema e que existem transformações de similaridade que tornam o problema P e Problema W factíveis para o sistema transformado, se e somente se, o problema original é estabilizável via realimentação estática de saída.

Seja x o vetor de estados do sistema (2.3.1) e $x_0 = T_0^{-1}x$ o vetor de estados do sistema transformado. Definindo $T = T_0 T_0^T$ e substituindo A, B, C, P e W por $T_0^{-1}AT_0, T_0^{-1}B, CT_0, T_0^T P T$ e $T_0^{-1}W T_0^{-1T}$, respectivamente, pode-se reescrever as inequações (2.3.6) e (2.3.7):

$$\begin{cases} AW + WA^T + BLCT + TC^T L^T B^T < 0 \\ W > 0, T > 0 \\ XCT = CW \end{cases} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{cases} PA + A^T P + T^{-1} B F C + C^T F^T B^T T^{-1} < 0 \\ P > 0, T^{-1} > 0 \\ T^{-1} B Y = P B \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Observando as desigualdades matriciais (2.3.8) e (2.3.9) fica claro que o problema P e o problema W são dependentes da representação de estados particular adotada para o sistema, ou seja, eles podem não ser factíveis para uma dada representação de estados e factíveis para outra [17].

Infelizmente as inequações (2.3.8) não são convexas nas variáveis W, L, X e T e as inequações (2.3.9) não são convexas nas variáveis P, F, Y e T^{-1} . Por isso, a questão de encontrar uma transformação do espaço de estados que leve à factibilidade do problema W e problema P e se isso é possível, ainda está sendo pesquisada.

Entretanto, é possível obter candidatas naturais para as matrizes de transformação a partir de duas condições que são necessárias para a estabilização via realimentação estática de saída. Essas condições são a estabilizabilidade e a detectabilidade e podem ser testadas através do seguinte problema de otimização [37]:

$$\begin{aligned} & \min_{W, P, L, F} \text{Tr}[W + P] \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} AW + W A^T + B L + L^T B^T < 0 \\ W - I > 0 \\ A^T P + P A + F C + C^T F^T < 0 \\ P - I > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

A factibilidade da LMI em (W, L) é equivalente à estabilizabilidade do par (A, B) e a factibilidade da LMI em (P, F) é equivalente à detectabilidade do par (A, C) . A minimização da função objetiva é para evitar que as matrizes solução W e P tenham números de condicionamento elevados. Quando essas LMI's são factíveis pode-se tomar W e P^{-1} como candidatas naturais à transformação de similaridade.

2.3.3 Incertezas Politópicas

Nessa seção é feita a extensão do teorema 2.3.1 e do corolário 2.3.2 para o caso de um sistema incerto, com incertezas modeladas de forma politópica.

Considerando o problema P e o sistema (2.3.1) e supondo que $(A, C) \in \Omega$, onde:

$$\Omega = \left\{ (A, C) : (A, C) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (A_i, C_i), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \quad i = 1, \dots, p \right\} \quad (2.3.11)$$

Como pode-se ver, Ω descreve um politopo, agora com p vértices determinados pelos pares (A_i, C_i) .

Corolário 2.3.3. [17] Considere o sistema (2.3.1), sendo B uma matriz com posto completo por colunas. Se o seguinte problema for factível em P , Y e F , então o sistema (2.3.1), com o par $(A, C) \in \Omega$, é quadraticamente estabilizável via realimentação estática de saída:

$$\begin{cases} A_i^T P + P A_i + B F C_i + C_i^T F^T B^T < 0, & i = 1, \dots, p \\ P > 0 \\ B Y = P B \end{cases} \quad (2.3.12)$$

E o ganho estabilizante é dado por $G = Y^{-1} F$.

Considerando agora o problema W e o sistema (2.3.1) e supondo que $(A, B) \in \Pi$, onde:

$$\Pi = \left\{ (A, B) : (A, B) = \sum_{i=1}^p \beta_i (A_i, B_i), \quad \beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^p \beta_i = 1, \quad i = 1, \dots, p \right\} \quad (2.3.13)$$

Como pode-se ver, Π também descreve um politopo com p vértices determinados pelos pares (A_i, B_i) .

Corolário 2.3.4. Considere o sistema (2.3.1), sendo C uma matriz com posto completo por linhas. Se o seguinte problema for factível em W , X e L , então o sistema (2.3.1) com o par $(A, B) \in \Pi$ é quadraticamente estabilizável via realimentação estática de saída:

$$\begin{cases} A_i W + W A_i^T + B_i L C + C^T L^T B_i^T < 0, & i = 1, \dots, p \\ W > 0 \\ X C = C W \end{cases} \quad (2.3.14)$$

E o ganho estabilizante é dado por $G = L X^{-1}$.

De maneira semelhante, considerando $A \in \Theta$, onde Θ é um politopo convexo com p vértices conhecidos, é possível redefinir o problema de determinação da transformação de similaridade para o sistema incerto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min_{W, P, L, F} \text{Tr}[W + P] \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} A_i W + W A_i^T + B L + L^T B^T < 0, & i = 1, \dots, p \\ W - I > 0 \\ A_i^T P + P A_i + F C + C^T F^T < 0 \\ P - I > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Assim, se o problema (2.3.15) for factível, pode-se tomar as matrizes W e P^{-1} como candidatas à transformação de similaridade para o sistema incerto, modelado com incertezas politópicas.

2.3.4 Incertezas Limitadas em Norma

Nessa seção, o método é estendido para o caso de sistemas incertos modelados através de incertezas limitadas em norma. Nesse caso deve-se considerar o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.3.16)$$

A matriz A_0 é uma matriz constante e as matrizes incertas são descritas como:

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^p r_i(t)\Upsilon_i; \quad r_i^2(t) \leq 1 \quad \forall t \quad \text{ou equivalentemente: } |r_i(t)| \leq 1 \quad i = 1, \dots, p \quad (2.3.17)$$

O vetor $r(t) \in \mathbb{R}^p$ representa as incertezas do sistema e p é o número de parâmetros incertos.

E Υ_i é uma matriz constante de posto unitário, que pode ser escrita como:

$$\Upsilon_i = d_i e_i^T; \quad d_i \text{ e } e_i \in \mathbb{R}^n \quad (2.3.18)$$

Reescrevendo, então, a inequação (2.3.2), considerando agora o sistema (2.3.16), tem-se:

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P + \Delta A^T P + P \Delta A < 0 \quad (2.3.19)$$

E considerando o caso de realimentação estática de saída, a lei de controle tem a estrutura $u = Gy$ e usando $y = Cx$, pode-se definir $K = GC$ e substituir na inequação (2.3.19), obtendo:

$$P(A + BGC) + (A + BGC)^T P + \Delta A^T P + P \Delta A < 0 \quad (2.3.20)$$

Definindo agora as matrizes:

$$D := [d_1 \dots d_p]; \quad E := [e_1 \dots e_p]^T \text{ e } S := \text{diag}(s_1, \dots, s_p), \text{ com } s_i > 0 \in \mathbb{R}$$

E considerando, conforme [5, 10, 35, 38]:

$$\Delta A^T P + P \Delta A \leq P D S D^T P + E^T S^{-1} E \quad (2.3.21)$$

Pode-se substituir (2.3.21) em (2.3.20), resultando em:

$$P(A + BGC) + (A + BGC)^T P + P D S D^T P + E^T S^{-1} E < 0 \quad (2.3.22)$$

Assim, se a desigualdade (2.3.22) for verdadeira, então também será verdadeira a desigualdade (2.3.20).

Finalmente, pode-se associar a solução da desigualdade (2.3.22) com a solução do seguinte problema convexo, considerando a matriz B com posto completo por colunas:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} PA + A^T P + BFC + C^T F^T B^T + E^T S^{-1} E & PD \\ D^T P & -S^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ P > 0 \\ BY = PB \end{cases} \quad (2.3.23)$$

A LMI (2.3.23) é, então, a versão do problema P (2.3.7), incluindo as incertezas limitadas em norma.

Similarmente, para o problema W pode-se fazer o mesmo desenvolvimento feito acima. Multiplicando ambos os lados de (2.3.22) por $W = P^{-1}$ tem-se:

$$(A + BGC)W + W(A + BGC)^T + DSD^T + WE^T S^{-1}EW < 0 \quad (2.3.24)$$

E pode-se associar a solução da desigualdade (2.3.24) com a solução do seguinte problema convexo, considerando a matriz C com posto completo por linhas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} AW + WA^T + BLC + C^T L^T B^T + DSD^T & WE^T \\ EW & -S \end{array} \right] < 0 \\ W > 0 \\ XC = CW \end{array} \right. \quad (2.3.25)$$

A LMI (2.3.25) é, então, a versão do problema W (2.3.6), incluindo as incertezas limitadas em norma.

2.3.5 Realimentação Descentralizada de Saída

O problema de projeto com leis de controle com realimentação de saída descentralizada é equivalente a um problema padrão de controle com realimentação de saída, incluindo restrições estruturais adicionais nos ganhos de controle.

Quando resolve-se o problema P ou o problema W, é possível escolher uma estrutura desejada para a matriz de ganhos G , impondo a mesma estrutura na matriz F ou L e uma estrutura bloco-diagonal correspondente na matriz Y ou X , respectivamente [17].

Por exemplo, supondo que se deseje que o ganho G tenha a seguinte estrutura:

$$G = \begin{bmatrix} \square & 0 \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

Onde \square significa que o elemento da matriz não tem restrição. Então se forem adicionadas as restrições convexas:

$$F = \begin{bmatrix} \square & 0 \\ \square & \square \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{bmatrix} \text{ ou } L = \begin{bmatrix} \square & 0 \\ \square & \square \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{bmatrix}$$

Obtém-se a estrutura desejada em $G = Y^{-1}F$, para o problema P, ou em $G = LX^{-1}$, para o problema W, respectivamente.

2.3.6 Sistema Aumentado

O modelo convencional dos estabilizadores de sistemas de potência (ESP) é um único bloco de atraso de fase para o caso do sinal derivado da potência elétrica, ou um bloco duplo de avanço de fase para o caso do sinal de velocidade angular [1, 28, 37]. Assim, no caso do projeto de ESP, é necessário projetar um controlador de saída dinâmico.

Para utilizar o método proposto é necessário transformar o problema de realimentação dinâmica de saídas num problema de realimentação estática de saídas de um sistema aumentado. Para tanto, é conveniente representar o controlador na forma canônica observável:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c x_c(t) + D_c u(t) \end{cases} \quad (2.3.26)$$

A função de transferência do controlador representada por (2.3.26) é dada por:

$$H_c(s) = C_c(sI - A_c^{-1})B_c + D_c$$

Combinando-se as equações do sistema (2.3.1) e do controlador (2.3.26), chega-se a:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BD_c C)x + BC_c x_c \\ \dot{x}_c = B_c C x + A_c x_c \end{cases} \quad (2.3.27)$$

Um novo sistema pode, então, ser descrito, incorporando a dinâmica dos controladores no sistema original [37]:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a u_a \\ y_a = C_a x_a \end{cases} \quad (2.3.28)$$

Onde:

$x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$ é o vetor de estados do sistema aumentado.

$u_a = G_a y_a$ corresponde à realimentação estática de saídas do sistema aumentado.

E, para o caso onde o controlador possui uma estrutura pré-definida, as matrizes do sistema aumentado e a matriz do ganho de realimentação, que define o controlador, são definidas como:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_a = [C \quad 0] \quad e \quad G_a = \begin{bmatrix} D_c \\ B_c \end{bmatrix}$$

Já quando deseja-se projetar um controlador sem definir previamente sua estrutura deve-se considerar as seguintes matrizes para o sistema aumentado e para o ganho de realimentação:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad e \quad G_a = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$$

Assim, dependendo do tipo de controlador que se deseja projetar, deve-se utilizar as matrizes do sistema aumentado adequadas nas LMI's do método proposto, além de separar as matrizes que definem o controlador, dentro da matriz de ganho aumentada resultante.

2.3.7 Estudo de Caso para o Método do Problema W e Problema P

Nessa seção utilizou-se o método do problema W e problema P para projetar os ESP's para os sistemas exemplo descritos no capítulo 1.

Todos os resultados mostrados foram obtidos com a utilização de incertezas politópicas para representar o sistema incerto, resolvendo, então, os problemas (2.3.15), (2.3.14) e (2.3.12).

Uma discussão mais detalhada a respeito dos resultados do método com incertezas politópicas e com incertezas limitadas em norma é apresentada no capítulo 5.

Utilizando as matrizes que descrevem o sistema reduzido (A_0 e A_n), foram obtidos os resultados descritos a seguir.

1. Realimentação estática de velocidade

(a) Sistema Kundur:

Obteve-se uma realimentação proporcional que estabiliza o sistema incerto com o ganho $K = 0,0682$, utilizando a transformação de similaridade:

$$T = \begin{bmatrix} 1.9525 & 0.8166 & 0.5890 & 0.7191 \\ 0.3491 & 1.6991 & 0.9300 & 0.7790 \\ 0.6778 & 0.9901 & 1.1408 & 0.1829 \\ 0.0231 & 0.4822 & 0.1441 & 1.7854 \end{bmatrix}$$

Essa transformação foi gerada aleatoriamente.

(b) Sistema Paim:

Esse método não apresentou solução para o sistema Paim incerto, assim o resultado obtido é para o sistema nominal, sem incertezas, e a realimentação proporcional que estabiliza o sistema é o ganho $K = 0,1704$, utilizando a transformação de similaridade:

$$T = \begin{bmatrix} 1.4175 & 0.6447 & 0.1447 & 0.0804 \\ 0.8355 & 1.1124 & 0.2075 & 0.8187 \\ 0.8047 & 0.2157 & 1.8506 & 0.3490 \\ 0.0092 & 0.9093 & 0.7131 & 1.1625 \end{bmatrix}$$

Essa transformação foi gerada aleatoriamente.

2. Realimentação dinâmica de velocidade

(a) Sistema Kundur:

a.1) Utilizando a estrutura do controlador fixa e definindo suas matrizes $A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $C_c = [.1 \quad .2]$, obteve-se um controlador que estabiliza o sistema incerto, cuja função de transferência é:

$$H_c(s) = \frac{0.10176(s+9.723)(s+3.826)}{(s+8)(s+12)}$$

Foi utilizada a transformação de similaridade obtida entre as candidatas naturais:

$$T = \begin{bmatrix} 23.2548 & 0.8991 & -8.9233 & 2.9774 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8991 & 160.1438 & 1.4761 & 25.3644 & 1.0000 & 1.0000 \\ -8.9233 & 1.4761 & 6.6345 & 0.1421 & 1.0000 & 1.0000 \\ 2.9774 & 25.3644 & 0.1421 & 6.0124 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0704 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0704 \end{bmatrix}$$

a.2) Sem fixar a estrutura o controlador, apenas sua ordem em dois, obteve-se o seguinte resultado para o sistema incerto:

$$H_c(s) = \frac{0.057731(s+0.3691)(s+3.266)}{(s+0.3691)(s+3.356)}$$

Foi utilizada a transformação de similaridade obtida entre as candidatas naturais:

$$T = \begin{bmatrix} 23.2141 & 0.9235 & -8.9027 & 2.9508 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.9235 & 160.0533 & 1.4635 & 25.3701 & 1.0000 & 1.0000 \\ -8.9027 & 1.4635 & 6.6239 & 0.1551 & 1.0000 & 1.0000 \\ 2.9508 & 25.3701 & 0.1551 & 5.9624 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0228 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0228 \end{bmatrix}$$

(b) Sistema Paim:

b.1) Utilizando uma estrutura do controlador fixa e definindo suas matrizes $A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $C_c = [.1 \quad .2]$, obteve-se um controlador que estabiliza o sistema incerto:

$$H_c(s) = \frac{0.29524(s+11.04)(s-0.2677)}{(s+8)(s+12)}$$

Foi utilizada a transformação de similaridade obtida entre as candidatas naturais:

$$T = \begin{bmatrix} 15.0563 & 0.2766 & -5.6869 & 0.1318 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.2766 & 92.8420 & 1.7603 & 20.4433 & 1.0000 & 1.0000 \\ -5.6869 & 1.7603 & 5.4265 & 1.5277 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.1318 & 20.4433 & 1.5277 & 6.2120 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0110 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0110 \end{bmatrix}$$

b.1) Sem fixar a estrutura o controlador, apenas sua ordem em dois, obteve-se o seguinte controlador que estabiliza o sistema incerto:

$$H_c(s) = \frac{0.17112(s+0.1509)(s+3.58)}{(s+12.25)(s+0.1509)}$$

Foi utilizada a transformação de similaridade obtida entre as candidatas naturais:

$$T = \begin{bmatrix} 15.0513 & 0.2795 & -5.6840 & 0.1315 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.2795 & 92.8326 & 1.7586 & 20.4440 & 1.0000 & 1.0000 \\ -5.6840 & 1.7586 & 5.4249 & 1.5279 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.1315 & 20.4440 & 1.5279 & 6.2075 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0059 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.0059 \end{bmatrix}$$

Os resultados confirmam que o sistema Paim incerto não pode ser estabilizado com realimentação de saída proporcional e, que um controlador de primeira ordem, obtido no cálculo de realimentação dinâmica sem fixar estrutura, pode estabilizar o sistema incerto. Ressalta-se que o controlador resultou em primeira ordem devido ao cancelamento de um pólo e um zero na função de transferência projetada pelo método.

Para o sistema Kundur incerto verifica-se que, com o cálculo através de realimentação dinâmica sem fixar estrutura, obtém-se um controlador de realimentação proporcional. Nesse caso houve o cancelamento de ambos os pólos com os zeros na função de transferência projetada.

Assim, verifica-se que, para os dois sistemas exemplo, obtém-se o controlador de menor ordem capaz de estabilizar os sistemas incertos.

Finalmente, observa-se, na realimentação estática, que a solução é possibilitada por uma transformação de similaridade gerada aleatoriamente e que não possui simetria ($T \neq T^T$).

Capítulo 3

Técnicas LMI para Sistemas Singulares

Nesse capítulo são apresentados métodos de análise e projeto que trabalham com o modelo do sistema de potência sem a necessidade de eliminação das variáveis algébricas do mesmo [3, 4, 29, 24].

A estabilização também é buscada através de uma função de Liapunov quadrática, do tipo $v(x) = x^T P x$, e o modelo utilizado para o sistema de potência é da forma (1.1.18).

3.1 Definição do Problema

Os sistemas singulares também são conhecidos na literatura como sistemas descritores, ou sistemas com restrições algébricas [24]. As restrições algébricas são provenientes da interligação de um ou mais sistemas dinâmicos e essa modelagem pode ser aplicada a diversos sistemas físicos [3, 29].

Os sistemas singulares têm a representação geral da seguinte forma [24]:

$$\begin{cases} E\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Onde:

$\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_s}$: vetor de estados

$\tilde{u} \in \mathbb{R}^{m_s}$: vetor de entradas

$\tilde{y} \in \mathbb{R}^{p_s}$: vetor de saídas

E: $A \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$, $B \in \mathbb{R}^{n_s \times m_s}$, $C \in \mathbb{R}^{p_s \times n_s}$ e $E \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$

E ainda, o posto da matriz E é menor que a dimensão do vetor de estados, n_s , para caracterizar a singularidade do sistema.

Comportamentos indesejáveis podem ocorrer nesse tipo de sistema e algumas condições devem ser satisfeitas para que o sistema seja regular, isto é, para que a solução do sistema seja única e livre de impulsões, ou seja, não existam modos impulsivos na solução [3, 4, 29, 24].

O modelo de um sistema de potência é tratado na forma algébrico-diferencial desacoplada. Essa forma é obtida de (3.1.1) fazendo as substituições:

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; C = [C_1 \quad C_2] \text{ e } \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

O sistema de potência pode, então, ser descrito por um conjunto de equações diferenciais mais um conjunto de equações algébricas e pode ser representado genericamente da seguinte forma [3]:

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_1u \\ 0 = J_3x + J_4z + B_2u \\ y = C_1x + C_2z \end{cases} \quad (3.1.2)$$

onde:

$x \in \mathbb{R}^n$: vetor de variáveis de estado

$z \in \mathbb{R}^l$: vetor de variáveis algébricas

$u \in \mathbb{R}^m$: vetor de variáveis de entrada

$y \in \mathbb{R}^p$: vetor de variáveis de saída

Considera-se, ainda, que o sistema (3.1.2) pode ser incerto, com:

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & B_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q; \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1_i} & J_{2_i} & B_{1_i} \\ J_{3_i} & J_{4_i} & B_{2_i} \end{bmatrix}$$

Onde $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ é um politopo convexo de vértices Ψ_i conhecidos.

Para que o sistema seja regular e não possua resposta impulsiva, a matriz J_4 deve ser inversível [3]. Neste caso, pode-se reescrever o sistema eliminando as restrições algébricas através da eliminação da variável z , resultando na forma conhecida, chamada de sistema de ordem reduzida:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Onde:

$$A = J_1 - J_2J_4^{-1}J_3 \quad B = B_1 - J_2J_4^{-1}B_2 \quad C = C_1 - C_2J_4^{-1}J_3$$

Esta abordagem de eliminação das variáveis algébricas é bastante usual na estabilização de sistemas de potência, devido à sua simplicidade, porém, ela possui alguns inconvenientes:

- Algumas das variáveis eliminadas, quando da eliminação das variáveis algébricas, podem ser de interesse para fins de controle [3].

- Se as matrizes J_i apresentam apenas alguns elementos incertos, estas incertezas **podem** se espalhar por quase todos elementos do sistema de ordem reduzida, complicando o problema de análise e projeto de controladores [3].

A abordagem apresentada a seguir propõe alternativas para tratar o sistema sem eliminação das variáveis algébricas.

3.2 Estabilidade e Estabilizabilidade Quadráticas

Nessa seção são apresentadas as noções de estabilidade e estabilizabilidade quadráticas, explorando a estrutura algébrico-diferencial do sistema (3.1.2).

Definição 3.2.1. Estabilidade Quadrática [3]: Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z \\ 0 = J_3x + J_4z \end{cases} \quad (3.2.4)$$

E suponha que $\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q$, $\Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}$. Então, o sistema (3.2.4) é quadraticamente estável se existe uma função $v(x) = x^T P x > 0, \forall x$ tal que sua derivada temporal para as trajetórias do sistema satisfaça:

$$\begin{cases} \dot{v}(x) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J_1^T P + P J_1 & P J_2 \\ J_2^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0 \\ \forall \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

A partir da definição 3.2.1, é possível enunciar o teorema a seguir, que testa a estabilidade quadrática de um sistema incerto.

Teorema 3.2.1. [3] *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto (3.2.4) e suponha que $\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q$, $\Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}$.*

Então, o sistema (3.2.4) é quadraticamente estável se existem matrizes $P > 0$ e L tais que a seguinte LMI seja satisfeita:

$$\begin{bmatrix} J_{1i}^T P + P J_{1i} & P J_{2i} \\ J_{2i}^T P & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}^T L^T < 0, \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (3.2.6)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x^T P x$ é uma função de Liapunov para o sistema.

E a noção de estabilizabilidade quadrática é definida a seguir.

Definição 3.2.2. Estabilizabilidade Quadrática [3]: Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_1u \\ 0 = J_3x + J_4z + B_2u \end{cases} \quad (3.2.7)$$

E suponha que $\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & B_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q$, $\Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{1i} \\ J_{3i} & J_{4i} & B_{2i} \end{bmatrix}$.

Então, o sistema (3.2.7) é quadraticamente estabilizável pela lei de controle do tipo $u = K_1x + K_2z$ se existem K_1, K_2 e uma função $v(x) = x^T Px > 0, \forall x$ tal que sua derivada temporal para as trajetórias do sistema em malha fechada satisfaça:

$$\begin{cases} \dot{v}(x) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J_1^T P + PJ_1 + PB_1K_1 + K_1^T B_1^T P & PJ_2 + PB_1K_2 \\ J_2^T P + K_2^T B_1^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0 \\ \forall \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & B_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \forall \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J_3 + B_2K_1 & J_4 + B_2K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Para o caso de realimentação de saída, basta considerar-se $u = Ky$ e $y = Cx$.

A noção de sistema dual pode ser interessante no caso de síntese. Onde problemas de estabilização com o sistema primal falham, pode ser que se consiga solução com o sistema dual [3]:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = J_1^T x_d + J_3^T z_d \\ 0 = J_2^T x_d + J_4^T z_d \end{cases} \quad (3.2.9)$$

O sistema dual é obtido a partir do transposto do sistema original e se $v(x) = x^T Px$ é uma função de Liapunov para o sistema primal, então $v_d(x_d) = x_d^T P^{-1} x_d$ é uma função de Liapunov para o sistema dual e vice-versa.

3.3 Realimentação de Estados

Os teoremas apresentados a seguir fornecem condições suficientes para estabilizar o sistema algébrico-diferencial através de realimentação de estados, sem a eliminação de variáveis e consideram o sistema incerto.

Teorema 3.3.1. [3] *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_1u \\ 0 = J_3x + J_4z \end{cases} \quad (3.3.10)$$

E suponha que $\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & 0 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q$, $\Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{1i} \\ J_{3i} & J_{4i} & 0 \end{bmatrix}$. Então, o sistema (3.3.10) é quadraticamente estabilizável pela lei de controle $u = K_1x + K_2z$ se existem matrizes W e R positivas definidas e as matrizes N, M, F_1 e F_2 tais que as seguintes LMI's sejam factíveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} WJ_{1i}^T + J_{1i}W + B_{1i}F_1 + F_1^T B_{1i}^T & J_{2i}R + B_{1i}F_2 \\ R J_{2i}^T + F_2^T B_{1i}^T & 0 \end{array} \right] + N \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}^T N^T < 0 \\ M \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{3i}W & J_{4i}R \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, q \end{array} \right. \quad (3.3.11)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x^T W^{-1}x$ é uma função de Liapunov para o sistema em malha fechada e $K_1 = F_1 W^{-1}$ e $K_2 = F_2 R^{-1}$ são os ganhos estabilizantes.

Corolário 3.3.2. [3] Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um polítopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema (3.2.7) e suponha que $\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & B_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ $\Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{1i} \\ J_{3i} & J_{4i} & B_{2i} \end{bmatrix}$.

Então, o sistema (3.2.7) é quadraticamente estabilizável pela lei de controle $u = Kx$ se existe a matriz W positiva definida e as matrizes L, F tais que as seguintes LMI's sejam factíveis para $\forall i = 1, \dots, q$:

$$\left[\begin{array}{cc} WJ_{1i}^T + J_{1i}W + B_{1i}F + F^T B_{1i}^T & WJ_{3i}^T + F^T B_{2i}^T \\ J_{3i}W + B_{2i}F & 0 \end{array} \right] + L \begin{bmatrix} J_{2i}^T & J_{4i}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{2i}^T & J_{4i}^T \end{bmatrix}^T L^T < 0 \quad (3.3.12)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x^T W^{-1}x$ é uma função de Liapunov para o sistema realimentado e $K = FW^{-1}$ é o ganho estabilizante.

Quando o sistema não apresenta parâmetros incertos ($q = 1$), as condições do teorema 3.2.1 e do corolário 3.3.2 são necessárias e suficientes [3].

3.3.1 Estudo de Caso para Realimentação de Estados

Nessa seção utilizou-se as LMI's (3.3.11) e (3.3.12) para buscar as realimentações de estado que estabilizam os sistemas exemplo, descritos no capítulo 1.

Para tanto utilizou-se as matrizes que descrevem o sistema MBI na forma algébrico-diferencial incerta $(J_{1_0}, J_{1_n}, J_{2_0}, J_{2_n}, J_{3_0}, J_{3_n}, J_{4_0}, J_{4_n})$.

1. Sistema Kundur:

- (a) Utilizando uma realimentação do tipo $u = K_1x + K_2z$ e as LMI's (3.3.11), não se obteve resultados para o sistema incerto, pois quando as incertezas eram incluídas ocorria um problema numérico durante a montagem do sistema de LMI's. Dessa forma, obteve-se a seguinte realimentação para o sistema nominal:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.2004 & 0.0015 & -0.3218 & 0.0100 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

- (b) Para uma realimentação do tipo $u = Kx$, com as LMI's (3.3.12), obteve-se resultados para o sistema incluindo até quatro incertezas. O limitante foi o esforço computacional demandado quando aumenta-se o número de elementos incertos. Entretanto, obteve-se a seguinte realimentação para o sistema nominal:

$$K = [-2.1984 \quad 0.0313 \quad -3.7578 \quad -0.7724]$$

2. Sistema Paim:

- (a) Utilizando-se uma realimentação do tipo $u = K_1x + K_2z$ e as LMI's (3.3.11), não se obteve resultados para o sistema incerto, pois quando as incertezas eram incluídas ocorria um problema numérico durante a montagem do sistema de LMI's. Dessa forma, obteve-se a seguinte realimentação para o sistema nominal:

$$K1 = [-0.2572 \quad 0.0030 \quad -0.4450 \quad 0.0397]$$

$$K2 = [0.0001 \quad 0.0000 \quad -0.0001 \quad 0.0000 \quad 1.0000 \quad -0.0000]$$

- (b) Para uma realimentação do tipo $u = Kx$, com as LMI's (3.3.12), obteve-se resultados para o sistema incluindo até quatro incertezas. O limitante foi o esforço computacional demandado quando aumenta-se o número de elementos incertos. Entretanto, obteve-se a seguinte realimentação para o sistema nominal:

$$K = [-1.0346 \quad 0.0425 \quad -1.0571 \quad -0.1577]$$

Como pode-se observar, para ambos os sistemas a montagem das LMI's do teorema 3.3.1, levando em consideração as incertezas, gerou erros numéricos, impossibilitando a obtenção de resultados.

Já para as LMI's do corolário 3.3.2, o esforço computacional impediu a obtenção de resultados para o sistema incerto, para os dois sistemas exemplo.

Dessa forma, os resultados obtidos com realimentação de estados, para a formulação algébrico-diferencial dos sistemas exemplo, tratam somente dos sistemas nominais, como mostrado acima.

Verifica-se, também, que para o vetor de variáveis algébricas, a única variável com realimentação significativa é a tensão de terminal, pois o ganho de realimentação projetado é muito pequeno para as demais variáveis algébricas. Já para as variáveis de estado, a realimentação de velocidade é menos significativa frente às demais.

3.4 Realimentação Estática de Saída

A estabilização de sistemas por realimentação de saídas é mais utilizada na prática, pois dificilmente se tem acesso a todas as variáveis de estado.

Como feito na seção anterior, essa seção trata da estabilização do sistema algébrico-diferencial incerto, sem a eliminação das variáveis algébricas, agora com ênfase na realimentação de saída.

Teorema 3.4.1. [3] *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + Bu \\ 0 = J_3x + J_4z \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.4.13)$$

$$E \text{ suponha que } \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \\ C_{1i} & 0 \\ 0 & C_{2i} \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema (3.4.13) é quadraticamente estabilizável pela realimentação de saída $u = [K_1 \ K_2]y$ se existem P, L, F_1, F_2 e M tais que as seguintes LMI's sejam factíveis para $\forall i = 1, \dots, q$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} PJ_{1i} + J_{1i}^T P + BF_1 C_{1i} + C_{1i}^T F_1^T B^T & PJ_{2i}^T + BF_2 C_{2i} \\ J_{2i}^T P + C_{2i}^T F_2^T B^T & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_{3i}^T & J_{4i}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{3i}^T & J_{4i}^T \end{bmatrix}^T L^T < 0 \\ PB = BM \quad e \quad P > 0 \end{cases} \quad (3.4.14)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x^T P x$ é uma função de Liapunov para o sistema realimentado e os ganhos de realimentação são dados por $K_1 = M^{-1} F_1$ e $K_2 = M^{-1} F_2$.

A abordagem do teorema 3.4.1 é caracterizada pela independência entre as variáveis algébricas e as variáveis diferenciais, devido à estrutura desacoplada da saída em (3.4.13).

O corolário a seguir utiliza a abordagem do sistema dual na formulação das LMI's.

Corolário 3.4.2. [3] *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + Bu \\ 0 = J_3x + J_4z \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.4.15)$$

$$E \text{ suponha que } \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B \\ J_3 & J_4 & 0 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_i \\ J_{3i} & J_{4i} & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema (3.4.15) é quadraticamente estabilizável pela realimentação de saída $u = Ky$ se existe a matriz W positiva definida e as matrizes L, F e M tais que as seguintes LMI's sejam factíveis para $\forall i = 1, \dots, q$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} WJ_{1i}^T + J_{1i}W + B_i F C + C^T F^T B_i^T & WJ_{3i}^T \\ J_{3i}W & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_{2i}^T & J_{4i}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{2i}^T & J_{4i}^T \end{bmatrix}^T L^T < 0 \\ CW = MC \end{cases} \quad (3.4.16)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x^T W^{-1} x$ é uma função de Liapunov para o sistema realimentado e o ganho de realimentação é dado por $K = FM^{-1}$.

De forma complementar, quando considera-se a saída sem desacoplamento $y = C_1 x + C_2 z$ e a realimentação $u = Ky$ obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} PJ_1 + J_1^T P + BFC_1 + C_1^T F^T B^T & PJ_2 + BFC_2 \\ J_2^T P + F^T B^T & 0 \end{array} \right] + L \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}^T L^T < 0 \\ PB = BM \quad e \quad P > 0 \end{array} \right.$$

Se as LMI's acima forem factíveis a realimentação que estabiliza o sistema é dada por $K = M^{-1}F$.

Ainda observa-se que as LMI's acima são semelhantes às do corolário 3.5.1, mostrado na próxima seção.

3.4.1 Estudo de Caso para Realimentação de Estática de Saída

Nessa seção foram aplicados os métodos de projeto por realimentação estática de saída (3.4.14) e (3.4.16) para os sistemas exemplo descritos no capítulo 1.

Utilizou-se, então, as matrizes que descrevem o sistema MBI na forma algébrico-diferencial incerta $(J_{1_0}, J_{1_n}, J_{2_0}, J_{2_n}, J_{3_0}, J_{3_n}, J_{4_0}, J_{4_n})$.

1. Sistema Kundur

- (a) Utilizando a realimentação estática de saída desacoplada $u = K_1 C_1 x + K_2 C_2 z$, com os sinais de velocidade ($C_1 = C_w$) e tensão de terminal ($C_2 = C_{v_t}$). E aplicando as LMI's (3.4.14) obteve-se resultados com o sistema com até duas incertezas.

Observou-se que, conforme são acrescentadas incertezas, o ganho K_2 tende ao valor unitário até que o programa falha em convergir.

Assim, obteve-se o seguinte resultado que estabiliza o sistema nominal com os ganhos:

$$K_1 = -1,2271 \cdot 10^{-6} \text{ e } K_2 = 0,9958.$$

- (b) Utilizando como realimentação os sinais de velocidade ($C_1 = C_w$) e potência elétrica ($C_2 = C_p$). E aplicando as LMI's (3.4.14) obteve-se resultados para o sistema incluindo até quatro incertezas. O limitante para a obtenção de resultados foi o esforço computacional demandado quando aumenta-se o número de elementos incertos.

Entretanto, obteve-se uma realimentação que estabiliza o sistema nominal com os ganhos:

$$K_1 = 0,0039 \text{ e } K_2 = -0,4455.$$

- (c) Utilizando-se a realimentação estática de velocidade com $u = Ky$ e $y = Cx$, com $C = C_w$. E aplicando as LMI's (3.4.16) obteve-se uma realimentação proporcional de saída que estabiliza o sistema nominal com o ganho: $K = 0,0212$.

2. Sistema Paim

- (a) Utilizando-se a realimentação estática de saída desacoplada $u = K_1C_1x + K_2C_2z$, com os sinais de velocidade ($C_1 = C_w$) e tensão de terminal ($C_2 = C_{vt}$). Aplicando as LMI's (3.4.14), obteve-se resultados com o sistema com até duas incertezas. Observou-se que, conforme são acrescentadas incertezas, o ganho K_2 tende ao valor unitário até que o programa falha em convergir.

Assim, obteve-se o seguinte resultado que estabiliza o sistema nominal com os ganhos: $K_1 = 1,8003 \cdot 10^{-4}$ e $K_2 = 0,9950$

- (b) Utilizando-se como realimentação os sinais de velocidade ($C_1 = C_w$) e potência elétrica ($C_2 = C_p$). Aplicando as LMI's (3.4.14), obteve-se resultados para o sistema incluindo até três incertezas.

O limitante para a obtenção dos resultados foi o esforço computacional demandado quando aumenta-se o número de elementos incertos.

Entretanto, obteve-se uma realimentação que estabiliza o sistema nominal com os ganhos: $K_1 = 0,0052$ e $K_2 = -0,7590$

- (c) Utilizando a realimentação estática de velocidade com $u = Ky$ e $y = Cx$, com $C = C_w$. Aplicando as LMI's (3.4.16) obteve-se uma realimentação proporcional de saída que estabiliza o sistema nominal com o ganho: $K = 0,1202$.

Verifica-se, para ambos os sistemas, que quando é incluída a realimentação do sinal de tensão de terminal (V_t), o ganho de realimentação tende a um e a realimentação de velocidade angular não traz influência, pois seu ganho é anulado. Entretanto, embora de interesse teórico, essa realimentação não possui aplicação prática, pois a mesma causaria a desregulação da tensão de terminal, que é controlada pelo RAT para a manutenção de sua amplitude constante. Já quando utiliza-se o sinal de potência elétrica, também percebe-se que o sinal de velocidade possui pouca influência, pois seu ganho de realimentação projetado é baixo.

Infelizmente, também não se consegue projetar um controlador para o sistema incerto, devido ao grande esforço computacional demandado e sem condições de atendimento pelo computador utilizado. Entretanto, verifica-se que esse esforço torna difícil a aplicação desse método em sistemas com dimensões e número de variáveis ainda maiores, mesmo utilizando-se computadores de grande porte.

Para o caso de realimentação exclusiva de velocidade, ambos os casos geram soluções somente para os sistemas nominais, diferentemente dos métodos com a representação reduzida, onde obtém-se solução para o sistema Kundur incerto.

Ou seja, assim como na realimentação de estados, estes métodos são mais restritivos que os métodos que tratam o sistema na forma reduzida e apresentam mais problemas numéricos na resolução das LMI's, pois em todos os casos, embora apresentem solução, as LMI's geraram problemas numéricos durante a resolução das desigualdades.

3.5 Realimentação Dinâmica de Saída

Como visto anteriormente, o modelo de ESP comumente utilizado para a estabilização de sistemas de potência é dado por um bloco de duplo avanço de fase [1]. Assim, faz-es necessário o projeto de controladores com realimentação dinâmica de saída para atender a esse requisito.

Da mesma forma que nos métodos que trabalham com o sistema reduzido, pode-se incorporar a dinâmica do controlador ao sistema que se deseja controlar, transformando o problema de realimentação dinâmica de saída num problema de realimentação estática com dimensão aumentada. Essa abordagem é apresentada a seguir.

Dado o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + Bu \\ 0 = J_3x + J_4z \\ y = C_1x + C_2z \end{cases} \quad (3.5.17)$$

E a lei de controle:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases} \quad (3.5.18)$$

Em malha fechada, obtém-se o seguinte sistema aumentado:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = J_{1a}x_a + B_a G_a C_{1a}x_a + J_{2a}z + B_a G_a C_{2a}z \\ 0 = J_{3a}x_a + J_4z \end{cases} \quad (3.5.19)$$

Onde:

$x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$: vetor de estados do sistema aumentado

E:

$$J_{1a} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_{2a} = \begin{bmatrix} J_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad J_{3a} = [J_3 \quad 0];$$

Fixando a estrutura do controlador com $A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $C_c = [.1 \ .2]$, obtém-se resultados para o sistema com até quatro incertezas, sendo o esforço computacional o limitante para a quantidade de elementos incertos.

Assim, obtém-se o seguinte controlador estático que estabiliza o sistema nominal:

$$H_c(s) = \frac{-0.64273(s+11.98)(s+7.993)}{(s+8)(s+12)}$$

- (b) Já quando se considera a realimentação de saída desacoplada do tipo $y = \begin{bmatrix} C_1x \\ C_2z \end{bmatrix}$ e as LMI's do problema (3.5.23), o programa não converge quando se utiliza a realimentação do sinal de velocidade ($C_1 = C_w$) isoladamente, entretanto, quando utilizado em conjunto com o sinal de potência elétrica ($C_2 = C_p$), não é necessário anular a matriz C_1 para o programa convergir, como no caso anterior.

Porém, como pode-se observar pelos resultados, o ganho de realimentação calculado para o sinal de velocidade é muito pequeno, o que sugere que a realimentação desse sinal não é necessária para a estabilização do sistema, quando se utiliza o sinal de potência elétrica para tal fim.

Para esse caso, fixando a estrutura do controlador com $A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $C_c = [.1 \ .2]$, obtém-se resultados para o sistema com até quatro incertezas, sendo o esforço computacional o limitante para a quantidade de elementos incertos.

Assim, obtém-se os seguintes controladores que estabilizam o sistema nominal para a realimentação de velocidade angular e de potência elétrica, respectivamente:

$$H_{c1}(s) = \frac{0.0052773(s+11.05)(s+7.749)}{(s+8)(s+12)} \text{ e } H_{c2}(s) = \frac{-0.63619(s+11.97)(s+7.99)}{(s+8)(s+12)}$$

Pode-se notar, ainda, que o ganho do segundo controlador, que realimenta o sinal de potência elétrica, é muito próximo ao obtido anteriormente sem saída desacoplada.

2. Sistema Paim

- (a) Considerando a realimentação de saída do tipo $y = C_1x + C_2z$, as LMI's do problema (3.5.21) não são factíveis quando se utiliza a realimentação do sinal de velocidade ($C_1 = C_w$) isoladamente ou em conjunto com o sinal de potência elétrica ($C_2 = C_p$), dessa forma, para esse tipo de realimentação foi usado somente o sinal de potência elétrica, fazendo $C_1 = 0$. Fixando a estrutura do controlador com $A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $C_c = [.1 \ .2]$, obtém-se resultados para o sistema com até três incertezas, sendo o esforço computacional o limitante para a quantidade de elementos incertos.

Assim, obtém-se o seguinte controlador estático que estabiliza o sistema nominal:

$$H_c(s) = \frac{-1.0499(s+11.29)(s+7.862)}{(s+8)(s+12)}$$

- (b) Já quando se considera a realimentação de saída desacoplada do tipo $y = \begin{bmatrix} C_1 x \\ C_2 z \end{bmatrix}$ e as LMI's do problema (3.5.23), o programa não converge quando se utiliza a realimentação do sinal de velocidade ($C_1 = C_w$) isoladamente, entretanto, quando utilizado em conjunto com o sinal de potência elétrica ($C_2 = C_w$), não é necessário anular a matriz C_1 para o programa convergir, como no item *a*.

Porém, como pode-se observar pelos resultados, o ganho de realimentação calculado para o sinal de velocidade é muito pequeno, o que sugere que a realimentação desse sinal não é necessária para a estabilização do sistema, quando se utiliza o sinal de potência elétrica para tal fim.

Para esse caso, fixando a estrutura do controlador com $A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $C_c = \begin{bmatrix} .1 & .2 \end{bmatrix}$, obtém-se resultados para o sistema com até três incertezas, sendo o esforço computacional o limitante para a quantidade de elementos incertos. Assim, obtém-se os seguintes controladores que estabilizam o sistema nominal, para a realimentação de velocidade angular e de potência elétrica, respectivamente:

$$H_{c1}(s) = \frac{0.0095465(s+11.43)(s+7.879)}{(s+8)(s+12)} \text{ e } H_{c2}(s) = \frac{-1.0046(s+11.25)(s+7.854)}{(s+8)(s+12)}$$

Pode-se notar, ainda, que o ganho do segundo controlador, que realimenta o sinal de potência elétrica, é muito próximo ao obtido anteriormente sem saída desacoplada.

Desses resultados, é possível observar que, ao contrário do que acontece nos casos que tratam o sistema reduzido, não é possível obter factibilidade dos problemas de realimentação de saída apenas com o sinal de velocidade angular da máquina. Verifica-se, ainda, que os dois métodos geram resultados muito próximos e que, embora fixando-se a estrutura, os pólos e zeros dos controladores projetados praticamente se anulam, resultando em controladores proporcionais.

Infelizmente não foi possível a obtenção de resultados para os problemas incertos, devido ao esforço computacional demandado para tal fim. Entretanto, pôde-se verificar que ambos os problemas não são factíveis quando considera-se incerto o elemento (1,4) de J_4 , que corresponde ao termo $-\cos(\delta_0)/X_l$, ou o elemento (4,4) de J_4 , que corresponde ao termo $-\cos(\delta_0)$. Isso leva à conclusão que os problemas não teriam factibilidade mesmo que se conseguisse chegar ao final dos cálculos.

3.6 Problema \mathcal{H}_2 e Realimentação de Estados

O problema de otimização em \mathcal{H}_2 consiste em encontrar uma realimentação de estados, tal que a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência do sistema, da entrada de perturbação para a saída de performance, em malha fechada seja minimizada.

E o teorema a seguir possibilita a minimização dessa norma para um sinal de perturbação num sistema com a descrição algébrico-diferencial, através da realimentação de estados.

Teorema 3.6.1. [3] *Considere o sistema algébrico-diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_uu + B_w w \\ 0 = J_3x + J_4z \\ r = C_r x + D_r u \end{cases} \quad (3.6.24)$$

A minimização de $\|G_{wr}\|_2$ por realimentação de estados é dada pelo seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} & \|G_{wr}\|_2^2 = \min \operatorname{Tr}\{N\} \\ & \text{sujeito a} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} N & C_r W + D_r F \\ (C_r W + D_r F)^T & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} J_1 W + W J_1^T + B F + F^T B^T + B_w B_w^T & W J_3^T \\ J_3 W & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_2^T & J_4^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_2^T & J_4^T \end{bmatrix}^T L^T \leq 0 \\ W > 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

Onde $K = F W^{-1}$ é o ganho de realimentação que minimiza a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $G_{wr}(s)$ em malha fechada com $u = Kx$.

Para problemas incertos com $\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_u & B_w \\ J_3 & J_4 & 0 & 0 \\ C_r & 0 & D_r & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Co}[\Psi_i]_{i=1}^q$, pode-se mostrar que o traço de N torna-se um limitante superior para $\|G_{wr}\|_2^2$, isto é $\|G_{wr}\|_2^2 \leq \operatorname{Tr}(N)$ [3]. Com esta ressalva, as LMI's do teorema 3.6.1 se aplicam ao caso incerto desde que elas sejam resolvidas para os vértices do politopo $\operatorname{Co}[\Psi_i]_{i=1}^q$.

3.7 Problema \mathcal{H}_∞ e Realimentação de Estados

O problema subótimo \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar um controlador tal que o sistema seja estável e a norma $\mathcal{H}_\infty \leq \gamma$, onde o valor de γ é previamente especificado. O problema ótimo \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar um controlador que minimize esta norma.

A solução do problema subótimo \mathcal{H}_∞ para o sistema algébrico-diferencial é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.7.1. [3] *Seja γ um escalar positivo e G_{wr} a função de transferência de w para r em malha fechada no sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_uu + B_w w \\ 0 = J_3x + J_4z \\ r = C_r x + D_r u + D_w w \end{cases} \quad (3.7.26)$$

Então existe uma realimentação de estados $u = Kx$ tal que $\|G_{wr}\|_\infty \leq \gamma$, se e somente se, a seguinte LMI for factível em W , F e L :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Gamma & \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (C_r W + D_r F)^T \\ 0 \\ D_w^T \\ -I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_w^T & 0 \\ C_r W + D_r F & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\gamma^2 I \\ D_w \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \leq 0 \\ W > 0 \end{cases} \quad (3.7.27)$$

Onde: $\Gamma = \begin{bmatrix} J_1 W + W J_1^T + B_u F + F^T B_u^T & W J_3^T \\ J_3 W & 0 \end{bmatrix} + L[J_2^T \ J_4^T] + [J_2^T \ J_4^T]^T L^T$ e $K = F W^{-1}$ é o ganho de realimentação.

Vê-se que ambos os métodos de otimização dados pelos teoremas 3.6.1 e 3.7.1 tratam apenas do caso de realimentação de estados, o que limita seu uso para projetos envolvendo sistemas de potência.

Capítulo 4

Funções de Liapunov Dependentes dos Parâmetros

Nos capítulos anteriores estudaram-se métodos de projeto que utilizam LMI's formuladas com o uso de uma função de Liapunov com dependência quadrática dos estados do sistema, tipo $v(x) = x^T P x$. Já nesse capítulo trata-se de métodos de análise e projeto que consideram em sua formulação a taxa de variação dos parâmetros incertos do sistema. Para tanto, é utilizada uma função de Liapunov que depende tanto dos estados do sistema, quanto de seus parâmetros incertos, essa função é do tipo $v(x) = x^T \mathcal{P}(\delta)x$ [40]. Esse enfoque visa à redução da conservatividade em relação aos métodos baseados na estabilidade quadrática [40, 42], o que ficará claro no decorrer da explanação.

4.1 Considerações Iniciais

Nessa seção são apresentadas algumas considerações a respeito dos métodos que tratam de sistemas com parâmetros variáveis no tempo. Também é apresentada, novamente, noção de estabilidade quadrática para o sistema invariante e para o sistema incerto, o que é feito para possibilitar a comparação entre esses métodos e os métodos tratados no decorrer do capítulo.

A noção de estabilidade quadrática é obtida diretamente da teoria de Liapunov aplicada ao sistema invariante no tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Dessa forma, o sistema (4.1.1) é dito quadraticamente estável se existe uma função $v(x) = x^T P x$, positiva definida para qualquer x , tal que a sua derivada temporal para as trajetórias do sistema seja negativa, ou seja, $\dot{v}(x) < 0$. Isso é equivalente a existir uma matriz constante P que satisfaça as LMI's [20]:

$$\begin{cases} A^T P + P A < 0 \\ P > 0 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Para o caso de um sistema incerto, a matriz A possui elementos que variam com o tempo, $A(\delta(t))$ e, conhecendo-se os limites do intervalo no qual os parâmetros $\delta(t)$ variam, pode-se descrever estes parâmetros como incertezas politópicas e considerar que a matriz A do sistema, para um dado instante de tempo, encontra-se dentro de um conjunto limitado pela superfície politópica \mathcal{B} , definida pelos valores limite dos parâmetros $\delta(t)$.

Neste contexto, para provar a estabilidade quadrática de qualquer matriz A contida no politopo \mathcal{B} e, conseqüentemente, do sistema para qualquer valor de $A(\delta(t))$ dentro dos limites especificados, basta provar a estabilidade de $A(\delta(t))$ nos limites que definem a superfície do politopo para o sistema [11]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Ou seja, considerando as matrizes A_i calculadas nos vértices do politopo \mathcal{B} , definido pelos valores máximos e mínimos dos parâmetros incertos δ_i , com $i = 1, \dots, 2^p$, onde p é o número de parâmetros incertos, o sistema (4.1.3) é dito quadraticamente estável, para $\forall t$, se [20]:

$$\begin{cases} v(x) = x^T P x > 0 \\ \dot{v}(x) = x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0, \quad i = 1, \dots, 2^p \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Assim, deve-se encontrar uma única matriz P , simétrica positiva definida, que satisfaça a restrição $\dot{v}(x) < 0$ para todos os 2^p pontos que definem o politopo \mathcal{B} , no qual estão contidas todas as matrizes A do sistema. Isto implica a solução de 2^p LMI's simultâneas. O número de pontos 2^p vem do fato de tomar-se todas as combinações possíveis das p incertezas com seus valores mínimo e máximo. Daí obtém-se 2^p matrizes A_i que definem os vértices do politopo \mathcal{B} .

Este enfoque de tratar um sistema variante no tempo como um sistema invariante com parâmetros incertos (LPV) é aplicado quando não se conhece a função que descreve $\delta(t)$, ou quando esta função é muito complexa e deseja-se aplicar os conceitos de sistemas lineares ao sistema estudado, cujas propriedades e tratamentos matemáticos são amplamente conhecidas. Outro ponto importante a se observar neste enfoque é que está-se considerando que as incertezas $\delta(t)$ podem variar arbitrariamente rápido entre um valor e outro, dentro dos limites dados, e também, que estes parâmetros incertos podem assumir qualquer combinação de valores dentro do politopo. Em sistemas reais essas características não são, normalmente, verificadas, pois, por características de propagação de energia, os parâmetros demoram um certo tempo finito para variarem entre um valor e outro. Também em sistemas reais, geralmente, estes parâmetros não podem assumir qualquer combinação de valores entre seus limites. Esses itens fazem com que se esteja aplicando grandes restrições na determinação da estabilidade de sistemas com parâmetros variantes no tempo utilizando o enfoque dado em (4.1.4).

Uma forma de diminuir as restrições do enfoque da estabilidade quadrática é, então, levar-se em consideração a velocidade de variação dos parâmetros incertos nas LMI's utilizadas para calcular a função de Liapunov. Isso pode ser feito baseando-se em estruturas particulares da matriz do sistema $A(\delta(t))$ e da *matriz de Liapunov* $\mathcal{P}(\delta(t))$ e, assim, deve-se considerar que a matriz \mathcal{P} agora não é mais constante, mas sim função dos parâmetros incertos.

Considerando, dessa forma, uma função de Liapunov do tipo $v(x, \delta) = x^T \mathcal{P}(\delta)x$, o sistema (4.1.3) é assintoticamente estável, se as seguintes condições forem satisfeitas [40]:

$$\begin{cases} P(\delta) > 0 \\ \dot{P}(\delta) + A(\delta)^T P(\delta) + P(\delta)A(\delta) < 0, \forall (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

onde \mathcal{D} é a região na qual $(\delta, \dot{\delta})$ podem assumir valores.

Pretende-se desta maneira, com o aumento da complexidade da descrição da função de Liapunov, diminuir a conservatividade do cálculo da função que prova a estabilidade do sistema (4.1.3), e é claro que isto implica aumento do esforço computacional para o cálculo. Além disso, continua-se utilizando a descrição dos parâmetros incertos como pertencentes a um politopo, assim, o esforço computacional será também proporcional ao número de vértices. A partir dessas considerações, as próximas seções tratam dos problemas de análise e projeto utilizando funções de Liapunov dependentes dos parâmetros para sistemas representados na forma reduzida.

4.2 Estabilidade Biquadrática

Nessa seção é apresentada a formulação do problema de estabilidade biquadrática para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo, utilizando uma função de Liapunov quadraticamente dependente dos parâmetros incertos e dos estados do sistema [13, 15, 41, 40, 43, 42]. São mostrados, além disso, os conceitos de estabilidade quadrática e afim-quadrática como casos particulares da estabilidade biquadrática. Todos esses conceitos são demonstrados para sistemas na forma reduzida:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

4.2.1 Formulação do Problema

Considerando a seguinte representação do sistema incerto:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\delta)x = \sum_{i=0}^q A_i \pi_i \\ \pi_{i+1} = \Theta_i(\delta) \pi_i, \quad i = 0, \dots, (r-1) \\ \pi_0 = x, \quad r \leq q \\ \Omega(\delta) \pi = 0 \end{cases} \quad (4.2.6)$$

onde:

$x \in \mathbb{R}^n$: vetor de estados

$\delta \in \mathbb{R}^{n_s}$: vetor de parâmetros incertos

$\pi = [\pi_0^T \dots \pi_q^T]^T \in \mathbb{R}^m$: função auxiliar de (x, δ)

A_i para $i = 1, \dots, q$: matrizes constantes

$\Omega(\delta)$ e $\Theta_i(\delta)$ para $i = 1, \dots, r$: funções matriciais, afins em δ

Para simplificar a notação, utiliza-se π_i , Θ_i e Ω sem explicitar sua dependência em x , δ e no tempo.

A representação do sistema em termos da variável auxiliar π é equivalente à representação $\dot{x} = A(\delta)x$, isto é, assume-se que a variável π pode ser eliminada das expressões recuperando-se a representação original do sistema [13, 15, 40].

Além disso, esta representação equivalente pode ser utilizada para representar vários tipos de sistemas lineares incertos do tipo $\dot{x} = A(\delta)x$, tais como:

1. Sistema afim na incerteza [42]:

$$\dot{x} = \left(A_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i \mathcal{A}_i \right) x \quad (4.2.7)$$

onde:

$$A(\delta) = A_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i \mathcal{A}_i, \quad \delta_i \in \mathbb{R}$$

$x \in \mathbb{R}^n$: vetor de estados

$\mathcal{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrizes constantes conhecidas

δ_i : parâmetros variantes no tempo, com amplitudes e taxas de variação limitadas

Reescrevendo (4.2.7) como:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + A_1 \pi_1 \\ \pi_1 = \Theta_0 x, \quad q = 1 \\ \Omega = 0 \end{cases} \quad (4.2.8)$$

$$\text{Onde: } A_1 = [\mathcal{A}_1 \quad \mathcal{A}_2 \quad \dots \quad \mathcal{A}_N] \text{ e } \Theta_0 = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n \\ \delta_2 I_n \\ \vdots \\ \delta_N I_n \end{bmatrix}$$

E a descrição (4.2.8) é equivalente a:

$$\dot{x} = (A_0 + A_1\Theta_0)x$$

2. Sistema com restrições algébricas [40]:

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1(\delta)x + J_2(\delta)z \\ 0 = J_3(\delta)x + J_4(\delta)z \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Considerando as matrizes J_i como funções afim do vetor de parâmetros incertos δ , pode-se reescrever (4.2.9) como:

$$\begin{cases} \dot{x} = \pi_1 + \pi_2 \\ \Omega\pi = 0 \end{cases} \quad (4.2.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= J_1(\delta)x \\ \pi_2 &= J_2(\delta)z, \\ \Theta_0 &= J_1(\delta) \end{aligned} \quad \pi = \begin{bmatrix} x \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ z \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega = \begin{bmatrix} J_3(\delta) & 0 & 0 & J_4(\delta) \\ 0 & 0 & -I & J_2(\delta) \end{bmatrix}$$

Para que o sistema seja regular, a matriz $J_4(\delta)$ deve ser inversível para todas as incertezas permitidas.

Com a representação formalizada, para o problema de análise da estabilidade do sistema incerto (4.2.6), são feitas as definições mostradas nas seções seguintes.

4.2.2 Estabilidade Q_r e Casos Particulares

A seguir é apresentada a noção de estabilidade Q_r , a qual será, posteriormente, particularizada nos casos de estabilidade biquadrática, quadrática e afim.

Definição 4.2.1. [40] Seja \mathcal{B} um dado politopo de δ e $\dot{\delta}$ admissíveis. O sistema $\dot{x} = A(\delta)x$ é dito Q_r estável, se existe uma função matricial polinomial $\mathcal{P}(\delta)$, de grau r em δ , tal que as condições a seguir sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\delta) > 0 \\ \dot{\mathcal{P}}(\delta) + A(\delta)^T\mathcal{P}(\delta) + \mathcal{P}(\delta)A(\delta) < 0; \forall(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B} \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Nota-se que o sistema é Q_r estável, se e somente se, é possível demonstrar sua estabilidade com uma função de Liapunov do tipo $v(x, \delta) = x^T \mathcal{P}(\delta)x$ [40], onde $\mathcal{P}(\delta)$ é uma função polinomial de grau r , ou seja, a função $v(x, \delta)$ é quadrática em x e de grau r em δ . A definição 4.2.1 é motivada pelo conceito bem conhecido de estabilidade quadrática, algumas vezes chamado de estabilidade Q.

Para o caso de estabilidade biquadrática, ou estabilidade Q_2 , a matriz $\mathcal{P}(\delta)$ tem a forma genérica [32, 40, 43, 42]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\delta) &:= P_0 + P_1 \Theta(\delta) + \Theta(\delta)^T P_1^T + \Theta(\delta)^T P_2 \Theta(\delta) \\ \mathcal{P}(\delta) &= \begin{bmatrix} I \\ \Theta(\delta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1^T & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Theta(\delta) \end{bmatrix} \\ P &= \begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1^T & P_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

onde:

P é uma matriz constante.

$\Theta(\delta)$ é uma função matricial afim em δ .

P_1 tem a mesma dimensão de $\Theta(\delta)^T$.

Pode-se, ainda, reduzir o caso genérico de estabilidade Q_2 em dois casos particulares:

- Estabilidade Q_1 :

Este é um enfoque bastante estudado na literatura [40, 43, 42], que é a função de Liapunov com dependência afim nos parâmetros. Chega-se a esta função aplicando a restrição $P_2 = 0$ e a função de Liapunov fica na forma: $v(x, \delta) = x^T (P_0 + P_1 \Theta(\delta) + \Theta(\delta)^T P_1^T)x$.

- Estabilidade quadrática (Q_0):

A estabilidade quadrática é obtida fazendo-se as restrições $P_1 = 0$ e $P_2 = 0$. Neste caso a matriz $\mathcal{P}(\delta)$ é constante, ou seja, é uma função de grau zero em δ e a função de Liapunov fica na forma tradicional: $v(x) = x^T P x$.

É importante lembrar que quando o sistema é quadraticamente estável, ele é estável não importa o quão rápido os parâmetros incertos possam variar num dado intervalo de tempo, pois a função de Liapunov não é sensível a estes parâmetros. Por outro lado, a noção de estabilidade Q_r , para $r \geq 1$, está associada a uma função de Liapunov dependente dos parâmetros, assim, o teste de estabilidade depende dos parâmetros incertos e de suas respectivas taxas de variação, nos intervalos permitidos. Note-se que $\dot{\mathcal{P}}(\delta)$ é função de δ e $\dot{\delta}$ e que o fato de $\mathcal{P}(\delta) > 0$ não implica, necessariamente, $P > 0$.

Para o caso do sistema com dependência afim na incerteza (4.2.7), é possível, ainda, reescrever a definição 4.2.1, a qual fica na forma mostrada a seguir.

Definição 4.2.2. [42] Dado um domínio \mathcal{B} de δ e $\dot{\delta}$ admissíveis, o sistema (4.2.7) é dito biquadraticamente estável, se existe uma matriz simétrica $\mathcal{P}(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ da forma:

$$\mathcal{P}(\delta) := P_0 + P_1\Theta(\delta) + \Theta(\delta)^T P_1^T + \Theta(\delta)^T P_2\Theta(\delta)$$

Tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\delta) > 0; \quad \forall(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B} \\ \dot{\mathcal{P}}(\delta) + (A_0 + A_1\Theta_0)^T \mathcal{P}(\delta) + \mathcal{P}(\delta)(A_0 + A_1\Theta_0) < 0; \quad \forall(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B} \end{cases}$$

Nota-se que a estabilidade biquadrática implica que o sistema (4.2.7) é assintoticamente estável para todo $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}$ [42]. De fato, a estabilidade biquadrática implica que a função de Liapunov $v(x, \delta) = x^T \mathcal{P}(\delta)x$ é positiva para todo x diferente de zero e que sua derivada temporal é menor que zero para qualquer trajetória de estados, de $\dot{x} = A(\delta)x$, não nula [32].

4.2.3 Estabilidade Q_2

As condições de estabilidade para o sistema (4.2.6), dependem da noção específica usada no problema de estabilidade. Nessa seção considera-se a noção de estabilidade Q_2 e são apresentadas condições suficientes para a sua verificação.

Teorema 4.2.1. [40] Considere o sistema (4.2.6), supondo $\pi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ e definindo:

$$A_{a1} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ \dot{\Theta}_0 + \Theta_0 A_0 & \Theta_0 A_1 \end{bmatrix} \quad A_{a2} = \begin{bmatrix} A_2 & \dots & A_q \\ \Theta_0 A_2 & \dots & \Theta_0 A_q \end{bmatrix} \quad C_{a1} = [\Theta_0 \quad -I_{m_1}]$$

$$C_{a2} = \begin{bmatrix} \Omega & & & & & \\ \Theta_0 & -I_{m_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & -I_{m_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Theta_{r-2} & -I_{m(r-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Theta_{r-1} & -I_{m_r} \end{bmatrix}$$

Seja \mathcal{B} um dado politopo convexo e supondo $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}$. Então, o sistema (4.2.6) é Q_2 estável se existem matrizes P , L_1 e L_2 , com as mesmas dimensões de A_{a1} , C_{a1}^T e C_{a2}^T , respectivamente, tais que as seguintes LMI's sejam satisfeitas para $(\delta, \dot{\delta})$ nos vértices do politopo \mathcal{B} :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_{a1}^T P + P A_{a1} & P A_{a2} \\ A_{a2}^T P & 0 \end{bmatrix} + L_2 C_{a2} + C_{a2}^T L_2^T < 0 \\ P + L_1 C_{a1} + C_{a1}^T L_1^T > 0 \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Em caso afirmativo, a função $v(x, \Theta_0) = x^T \begin{bmatrix} I_n \\ \Theta_0 \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} I_n \\ \Theta_0 \end{bmatrix} x$ é uma função de Liapunov para o sistema (4.2.6).

Novamente aqui, pode-se reescrever as condições de estabilidade para o sistema com dependência afim nas incertezas (4.2.7), obtendo o teorema a seguir.

Teorema 4.2.2. [42] *Seja \mathcal{B} um politopo convexo e supondo $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}$. Então, o sistema (4.2.7) é biquadraticamente estável, se existe uma matriz simétrica P e as matrizes L e M , com dimensões compatíveis, tais que as seguintes LMI's sejam satisfeitas para $(\delta, \dot{\delta})$ em todos os vértices do politopo \mathcal{B} :*

$$\begin{cases} A_a^T P + P A_a + L C_a + C_a^T L^T < 0 \\ P + M C_a + C_a^T M^T > 0 \end{cases}$$

$$\text{onde: } A_a = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ \dot{\Theta}_0 + \Theta_0 A_0 & \Theta_0 A_1 \end{bmatrix} \text{ e } C_a = [\Theta_0 \quad -I]$$

Deve-se considerar neste enfoque, que as matrizes A_i , Θ_i e os vetores π_i podem ser definidos de diferentes maneiras. A dimensão do vetor $\pi \in \mathbb{R}^m$ é importante, pois o número de variáveis de decisão é proporcional a m . Se m é reduzido, as condições do teorema podem ser testadas mais rapidamente, mas isto pode levar a um resultado mais conservativo.

Deve-se ter atenção, também, com a escolha de $\Theta_0(\delta)$, pois ela é parte da função de Liapunov candidata. Se $\Theta_0(\delta)$ não depende de algum parâmetro, a taxa de variação deste parâmetro não aparecerá nas condições de estabilidade, assim, se as condições são satisfeitas, elas são válidas não importa o quão rápido este parâmetro varie com o tempo.

4.2.4 Estabilidade Q_0

Nessa seção são apresentadas as condições suficientes para a estabilidade quadrática do sistema incerto, baseado na representação genérica (4.2.6). Diferentemente da seção anterior, aqui se assume que os parâmetros incertos são limitados em amplitude, mas não há restrições quanto a sua taxa de variação.

Teorema 4.2.3. [40] *Considere o sistema (4.2.6) e a notação auxiliar:*

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_0^T P_0 + P_0 A_0 & P_0 A_1 & \dots & P_0 A_q \\ A_1^T P_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_q^T P_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{a2} = \begin{bmatrix} & & & \Omega & & & \\ \Theta_0 & -Im_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & -Im_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \Theta_{r-2} & -I_{m(r-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \Theta_{r-1} & -I_{m_r} \end{bmatrix}$$

Seja \mathcal{B} um polítopo convexo e supondo $\delta \in \mathcal{B}$. Então, o sistema (4.2.6) é quadraticamente estável se existem as matrizes P_0 e L , com as mesmas dimensões de A_0 e C_{a2}^T , respectivamente, tais que as seguintes LMI's sejam satisfeitas para δ nos vértices do polítopo \mathcal{B} :

$$\begin{cases} \Psi + LC_{a2} + C_{a2}^T L < 0 \\ P_0 > 0 \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x^T P_0 x$ é uma função de Liapunov para o sistema (4.2.6).

Se as LMI's do teorema 4.2.3 são satisfeitas, então, as LMI's do teorema 4.2.1 também são satisfeitas para:

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon I \end{bmatrix} \quad e \quad L_2 = L$$

onde ϵ é um número positivo e suficientemente pequeno [40].

E esse resultado mostra que o teorema 4.2.3 é de fato um caso particular do teorema 4.2.1.

4.3 Projeto de Controladores com Funções de Liapunov Dependentes dos Parâmetros

Após serem feitas as definições de estabilidade com funções de Liapunov dependentes dos parâmetros, nas seções anteriores, é possível definir métodos de projeto de controladores baseando-se nesse enfoque.

Para tanto, é feita primeiramente, a apresentação da análise de performance \mathcal{H}_2 e, em seguida, do método de projeto de controladores com realimentação de estados, baseando-se na performance \mathcal{H}_2 , ambos aplicados ao sistema representado na forma reduzida.

4.3.1 Performance \mathcal{H}_2

Essa seção trata do problema de análise de estabilidade e norma \mathcal{H}_2 para sistemas com dependência afim nos parâmetros incertos [32].

Considerando o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\delta)x(t) + B_d(\delta)d(t) \\ y(t) = C_d(\delta)x(t) \end{cases} \quad (4.3.15)$$

Onde:

$$A(\delta) = A_0 + A_1\Theta_0; \quad B_d(\delta) = B_1\Theta_d; \quad C_d = C_1\Theta_a$$

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n \\ \delta_2 I_n \\ \vdots \\ \delta_N I_n \end{bmatrix}; \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_n \\ \Theta_0 \end{bmatrix}; \quad \Theta_d = \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ \delta_1 I_{n_d} \\ \vdots \\ \delta_N I_{n_d} \end{bmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^n$: vetor de estados

$d \in \mathbb{R}^{n_d}$: perturbação de entrada

$y \in \mathbb{R}^{n_y}$: saída de performance

A_1, B_1, C_1 : matrizes dadas de dimensões compatíveis

$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p) \in \mathbb{R}^p$: parâmetros reais variantes no tempo

Supondo que os parâmetros e suas respectivas taxas de variação possam tomar quaisquer valores dentro de um dado intervalo definido pelo politopo \mathcal{B} cujos vértices são conhecidos, isto é:

$$(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B} \quad (4.3.16)$$

Tome-se a média da norma \mathcal{L}_2 da resposta impulsiva do sistema sobre todas as possíveis direções de entrada; a norma \mathcal{H}_2 do sistema é definida como o pior caso desta media sobre todas as incertezas admissíveis.

A estabilidade do sistema (4.2.6) será, então, estudada considerando a noção de estabilidade bi-quadrática dada pelo teorema 4.2.2.

Teorema 4.3.1. [32] *Considere o sistema (4.3.15) e a notação:*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ \dot{\Theta}_0 + \Theta_0 A_0 & \Theta_0 A_1 \end{bmatrix}; \quad C_a = [\Theta_0 \quad -I_{np}]$$

$$C_b = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n(p+1)} & 0 & \Theta_a \\ \Theta_d & 0 & -I_{n_d(p+1)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} N(\delta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & P\Theta_a B_1 & 0 \\ 0 & B_1^T \Theta_a^T P & 0_{n_d(p+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_n \end{bmatrix}$$

Seja \mathcal{B} um dado politopo, representando os valores admissíveis de $(\delta, \dot{\delta})$. E supondo que existam as matrizes $P \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times n(p+1)}$, simétrica, $L \in \mathbb{R}^{n_d+n(p+2) \times n}$ e $N \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times np}$; uma função matricial simétrica $N(\delta) \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$, afim em δ , e um escalar l que resolvam o seguinte problema de otimização, onde as LMI's são satisfeitas para $(\delta, \dot{\delta})$ nos vértices do politopo \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} & \min \{l\} \\ & \text{sujeito a} \\ & \left\{ \begin{array}{l} l - \text{Tr}\{N(\delta)\} \geq 0 \\ \Lambda + LC_b + C_b^T L^T > 0 \\ \left[\begin{array}{cc} A_a^T P + P A_a + M C_a + C_a^T M^T & C_1^T \\ C_1 & -I_{n_y} \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Então o sistema $\dot{x} = A(\delta)x$ é biquadraticamente estável, com a função de Liapunov $v(x, \delta) = x^T \mathcal{P}(\delta)x$, com $\mathcal{P}(\delta) = P_0 + P_1 \Theta_0 + \Theta_0 P_1^T + \Theta_0^T P_2 \Theta_0$, e a norma \mathcal{H}_2 do sistema satisfaz:

$$\|G_{dy}\|_2^2 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr}\{B_d(\delta)^T \mathcal{P}(\delta) B_d(\delta)\} \leq l$$

A noção apresentada no teorema 4.3.1 é aprofundada na próxima seção, visando ao projeto de controladores.

4.3.2 Projeto de Controle \mathcal{H}_2

Essa seção trata do projeto de controladores por realimentação de estados com custo \mathcal{H}_2 garantido. São estudadas leis de controle constantes e dependentes dos parâmetros incertos, aplicadas ao sistema com representação reduzida e dependência afim nos parâmetros.

Seja o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\delta)x + B_d(\delta)d + Bu \\ y = C(\delta)x + D(\delta)u \end{cases} \quad (4.3.18)$$

Com:

$$\begin{aligned} A(\delta) &= A_0 + A_1 \Theta_0; & B_d(\delta) &= B_1 \Theta_d; & C(\delta) &= C_1 \Theta_a; & D(\delta) &= D_1 \Theta_u \\ \Theta_0 &= \begin{bmatrix} \delta_1 I_n \\ \delta_2 I_n \\ \vdots \\ \delta_N I_n \end{bmatrix}; & \Theta_a &= \begin{bmatrix} I_n \\ \Theta_0 \end{bmatrix}; & \Theta_d &= \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ \delta_1 I_{n_d} \\ \vdots \\ \delta_N I_{n_d} \end{bmatrix}; & \Theta_u &= \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ \delta_1 I_{n_u} \\ \vdots \\ \delta_N I_{n_u} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Onde:

$x \in \mathbb{R}^n$: vetor de estados

$u \in \mathbb{R}^{n_u}$: entrada de controle

$d \in \mathbb{R}^{n_d}$: perturbação de entrada

$y \in \mathbb{R}^{n_y}$: saída de performance

$\delta := (\delta_1, \dots, \delta_p)$: é um vetor de parâmetros reais variantes no tempo, com taxas de variação limitadas. E se assume que $(\delta(t), \dot{\delta}(t))$ está contido em um dado domínio poliédrico \mathcal{B} , com vértices conhecidos, para qualquer $t \geq 0$.

Deseja-se projetar uma lei de controle para o sistema (4.3.18), que garanta a estabilidade exponencial e um limite superior para a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada, para todo $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}$. Neste enfoque, tanto o custo \mathcal{H}_2 para o sistema em malha fechada, quanto a estabilidade são baseadas numa função quadrática dependente dos parâmetros. O sistema (4.3.18) é considerado como um sistema linear a parâmetros variantes (LPV), onde assume-se que os parâmetros $\delta_i(t), i = 1, \dots, p$ estão disponíveis em tempo real, embora suas trajetórias não sejam conhecidas *a priori* [32].

Pode-se, então, sintetizar o teorema apresentado a seguir.

Teorema 4.3.2. [32] *Considere o sistema (4.3.18) e a notação:*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ \dot{\Theta}_0 + \Theta_0 A_0 & \Theta_0 A_1 \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} I \\ \Theta_0 \end{bmatrix} B$$

$$C_a = [\Theta_0 \quad -I]; \quad C_b = [0_{n \times n_d} \quad \Theta_a^T \quad -I_n]$$

$$\Lambda_c = W A_a^T + A_a W + F_a^T B_a^T + B_a F_a + M C_a + C_a^T M^T$$

Seja \mathcal{B} um dado politopo representando os valores admissíveis de $(\delta, \dot{\delta})$. Suponha que existam as matrizes $W \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times n(p+1)}$, simétrica, $F_a \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u(p+1)}$, $M \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times n_p}$, $L \in \mathbb{R}^{(n_d+n(p+2)) \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n_p}$; uma função matricial $N(\delta) \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$, simétrica afim em δ , e um escalar l que resolvam o seguinte problema de otimização, onde as LMI's devem ser satisfeitas para $(\delta, \dot{\delta})$ nos vértices do politopo \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} & \min \{l\} \\ & \text{sujeito a} \\ & \left\{ \begin{array}{l} l - \text{Tr}\{N(\delta)\} \geq 0; \quad Q C_a = C_a W \\ \begin{bmatrix} N(\delta) & 0 & B_d(\delta)^T \\ 0 & W & 0 \\ B_d(\delta) & 0 & 0_n \end{bmatrix} + L C_b + C_b^T L^T > 0 \\ \begin{bmatrix} \Lambda_c & W C_1^T + F_a^T D(\delta)^T \\ C_1 W + D(\delta) F_a & -I_{n_y} \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Em caso afirmativo, o sistema (4.3.18) é exponencialmente estável, em malha fechada, com a lei de controle:

$u = K(\delta)x = K_0x + \sum_{i=1}^p \delta_i K_i x$; onde: $[K_0 \ K_1 \ \dots \ K_p] = F_a W^{-1}$
e a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada satisfaz $\|G_{dy}\|_2 < \sqrt{l}$. E ainda, $v(x, \delta) = x^T \mathcal{P}(\delta)x$,
com $\mathcal{P}(\delta) = \Theta_a^T W^{-1} \Theta_a$, é uma função de Liapunov para o sistema em malha fechada.

Se qualquer dos parâmetros não estiver disponível em tempo real, ele não pode aparecer na lei de controle, assim, o bloco K_i correspondente da matriz de realimentação deve ser nulo. Isto é feito anulando-se o bloco correspondente da matriz F_a e restringindo a matriz W a uma estrutura bloco-diagonal. Estas restrições são convexas e podem ser incorporadas ao problema.

Nota-se que, mesmo que o parâmetro seja removido da lei de controle, ele não é removido da função de Liapunov, o que é uma característica desejada do ponto de vista da robustez.

É possível, ainda, diminuir a conservatividade causada pela restrição de igualdade $QC_a = C_a W$ [32] através de sua substituição por uma nova restrição $Q\tilde{C}_a = C_a W$, onde \tilde{C}_a é uma função afim de δ , com as mesmas dimensões de C_a . Neste caso, a matriz C_a deve ser substituída por \tilde{C}_a em Λ_c , na última LMI de (4.3.19).

Também é possível considerar \tilde{C}_a como uma matriz fixa dada e permitir que Q seja uma função afim de δ . A melhor escolha para \tilde{C}_a , que leve a resultados menos conservativos, é um problema que ainda deve ser estudado [32].

4.3.3 Estudo de Caso para o Método de Projeto de Controle \mathcal{H}_2 com Funções de Liapunov Dependentes dos Parâmetros

Nessa seção utilizou-se o método de projeto de controle \mathcal{H}_2 , dado por (4.3.19), para projetar os ESP's para os sistemas exemplo descritos no capítulo 1.

Foram utilizadas as matrizes que descrevem o sistema reduzido (A_0 e A_n) e, conforme definido em (4.3.18), as incertezas foram representadas da forma $A_n = A_1 \Theta_0$, com:

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} a_{n_{21}} I_4 \\ a_{n_{31}} I_4 \\ a_{n_{41}} I_4 \\ a_{n_{23}} I_4 \\ a_{n_{43}} I_4 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $a_{n_{ij}}$ é o respectivo elemento variável da matriz A_n .

Já as matrizes de entrada e saída de performance foram consideradas nulas: $B_d(\delta) = 0$, $C(\delta) = 0$ e $D(\delta) = 0$.

1. Realimentação de estados

(a) Sistema Kundur:

Não foi possível a obtenção de resultados para o sistema, quando levou-se em consideração mais de um elemento incerto. Essa limitação foi motivada pelo esforço computacional despendido para o cálculo. Assim, o resultado obtido foi apenas para a realimentação de estados do sistema nominal:

$$K = [-0.0800 \quad -0.0001 \quad 0.5067 \quad 0.0099]$$

(b) Sistema Paim:

Não foi possível a obtenção de resultados para o sistema, quando levou-se em consideração mais de um elemento incerto. Essa limitação ocorreu devido ao esforço computacional despendido para o cálculo. Assim, o resultado obtido foi apenas para a realimentação de estados do sistema nominal:

$$K = [-0.1724 \quad -0.004 \quad 0.4375 \quad 0.0395]$$

Como pode-se observar dos resultados, não foi possível obter uma realimentação de estados para ambos os sistemas exemplo, quando considera-se mais de um elemento incerto. Isso caracteriza o grande esforço computacional demandado por esse método.

Capítulo 5

Análise de Resultados

Nesse capítulo é feita uma análise comparativa dos resultados obtidos em cada método estudado e apresentados nas respectivas seções e, para possibilitar um melhor entendimento do problema, o método clássico de projeto de controladores também é tratado através do estudo do lugar das raízes (LR) para os sistemas exemplo.

5.1 Análise pelo Lugar das Raízes

Nessa seção, os sistemas exemplo, definidos na seção 1.4, são analisados pelo método do lugar das raízes (LR), objetivando o estudo do comportamento dos sistemas à luz da teoria clássica de controle [30], além de servir para a comparação dos resultados obtidos com os métodos estudados nesse trabalho.

Para tanto, foram calculadas as funções de transferência dos sistemas exemplo, tomando como saída a velocidade angular da máquina síncrona e utilizando as matrizes que descrevem o sistema reduzido. Assim, chegou-se às seguintes funções de transferência para os sistemas nominais:

- Sistema Kundur:

$$G_K(s) = \frac{-89654.8884s}{(s+93.14)(s+7.853)(s^2-0.6714s+44.32)}$$

- Sistema Paim:

$$G_P(s) = \frac{-10761.1357s}{(s+47.8)(s+3.414)(s^2-0.8837s+29.31)}$$

Como observado na seção 1.4, ambos os sistemas são instáveis, possuindo cada um, um par de pólos complexos no semi-plano direito (SPD). Para a estabilização do sistema, então, o par de pólos complexos deve ser levado para o semi-plano esquerdo (SPE), através da realimentação de velocidade.

Assim, desenhando o diagrama de lugar das raízes para os dois sistemas exemplo (fig. 5.1 e 5.2), percebe-se que é necessária uma realimentação **positiva** de velocidade para estabilizá-los.

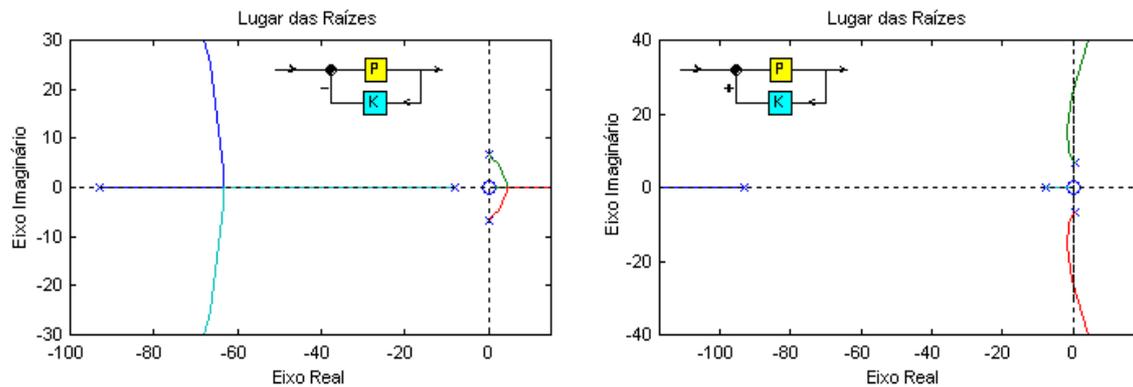


Fig. 5.1 – Diagrama de LR para o sistema Kundur com realimentação negativa e positiva.

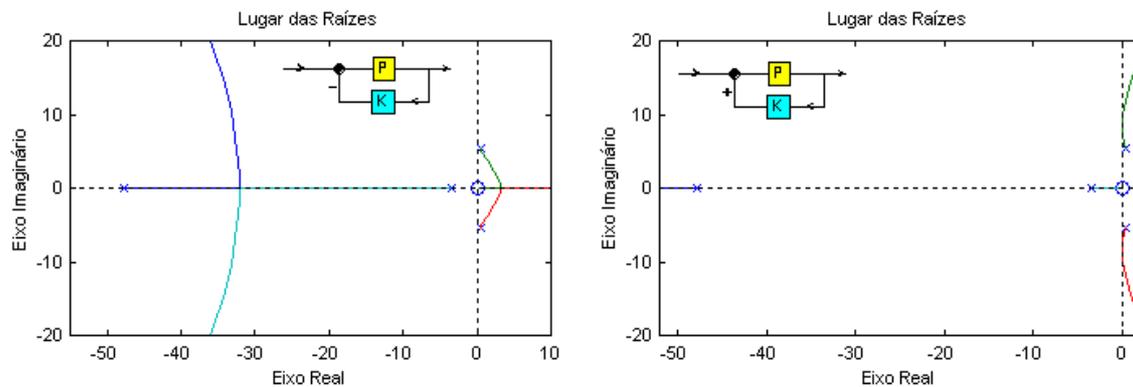


Fig. 5.2 – Diagrama de LR para o sistema Paim com realimentação negativa e positiva.

Dessa forma, para o caso nominal basta projetar uma realimentação proporcional positiva, buscando a melhor relação possível entre resposta de pico (overshoot) e o tempo de acomodação (settling time), ou o melhor amortecimento, para as oscilações causadas pela resposta do sistema ao salto, por exemplo.

A tabela 5.1 mostra os ganhos de realimentação projetados e os valores de resposta de pico e o tempo de acomodação dos dois sistemas para a resposta ao salto:

Tab. 5.1 – Performance dos sistemas nominais realimentados

Sistema	Ganho Realim.	Amortecimento	Freq. Natural	Resp. Pico	T. Acomodação
Kundur	0,1023	0,149	11,3 rad/s	-8,68	2,58 s
Paim	0,1817	0,0108	8,11 rad/s	-5,08	47,7 s

E nas figuras 5.3 e 5.4, são apresentadas as respostas ao salto de velocidade angular para o sistema Kundur e o sistema Paim, respectivamente, com a realimentação proporcional de velocidade projetada.



Fig. 5.3 – Resposta ao salto do sistema Kundur nominal realimentado.

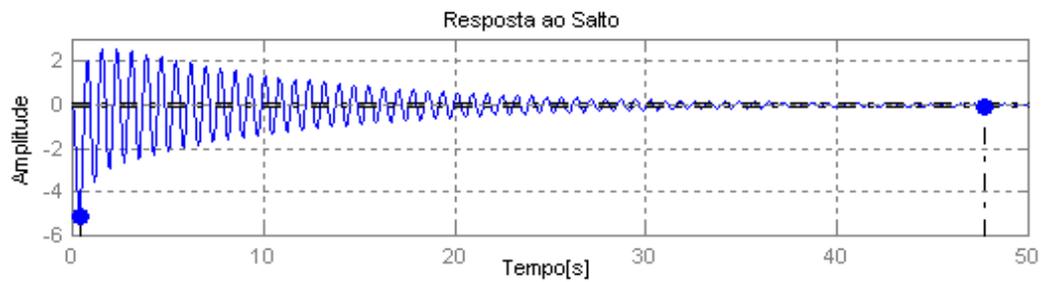


Fig. 5.4 – Resposta ao salto do sistema Paim nominal realimentado.

Dessa forma, chega-se ao resultado de um controlador de realimentação proporcional de saída para cada sistema, conseguindo-se a estabilização dos mesmos.

Entretanto, esses controladores não serão eficazes em toda a faixa de variação das condições de operação propostas na seção 1.4. Para projetar estabilizadores que atendam a essas condições, será necessário considerar as variações dos parâmetros dos sistemas, o que é feito a seguir.

Para verificar a estabilização dos sistemas levando em consideração as incertezas, desenhou-se o diagrama de lugar das raízes para cada função de transferência associada com as matrizes dos sistemas, determinadas nos vértices do politopo que define o conjunto de sistemas a ser estabilizado.

Assim, como ambos os sistemas possuem 5 elementos incertos, é necessário analisar o lugar das raízes de 32 funções de transferência simultaneamente, como mostram as figuras 5.5 e 5.6 para cada sistema.

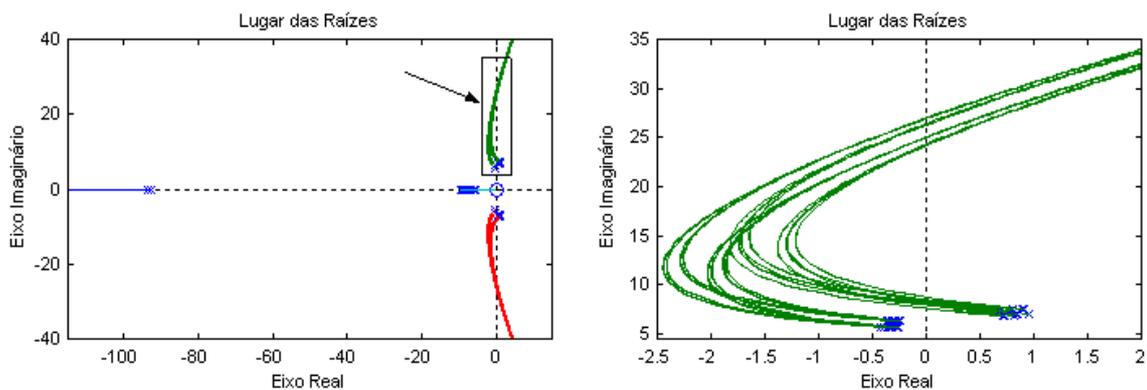


Fig. 5.5 – Diagrama de LR para o sistema Kundur incerto.

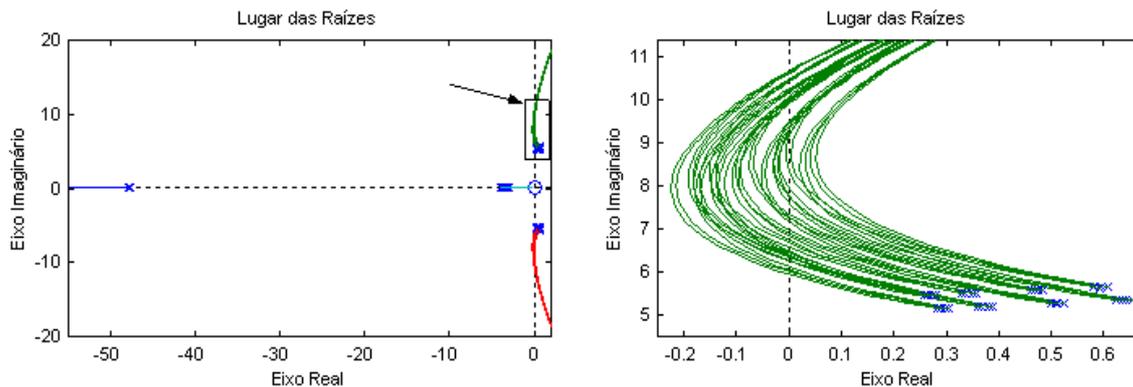


Fig. 5.6 – Diagrama de LR para o sistema Paim incerto.

Aplicando essa análise ao sistema incerto, é possível determinar que o sistema Kundur pode ser estabilizado utilizando realimentação de velocidade com controle proporcional, para todas as funções de transferência que definem o conjunto incerto.

Já para o sistema Paim, verifica-se que o lugar das raízes não passa para o SPE para algumas funções de transferência que definem o polítopo incerto. Portanto, faz-se necessária uma realimentação dinâmica, com o posicionamento de novos pólos e zeros no diagrama de lugar das raízes, e posterior determinação do ganho de realimentação para o controlador.

Posicionou-se, então, um pólo em $-47,5$ e um zero em $-3,5$ e determinou-se o ganho $1,3$ que estabiliza todas as funções de transferência. Finalmente, o controlador projetado para o sistema Paim incerto ficou na seguinte forma:

$$H_{c_P}(s) = 1.3 \frac{s+3.5}{s+47.5}$$

Embora o sistema Kundur incerto seja estabilizável por uma realimentação proporcional de velocidade, pode-se melhorar a relação entre a resposta de pico e o tempo de acomodação com a utilização de uma realimentação dinâmica, pois, dessa forma, a trajetória dos pólos complexos pode ser afastada do eixo $j\omega$. Assim, posicionou-se um pólo em -92 e um zero em -9 e determinou-se o ganho $1,2$ que estabiliza todas as funções de transferência do sistema Kundur, obtendo-se o seguinte controlador:

$$H_{c_K}(s) = 1.2 \frac{s+9}{s+92}$$

E a tabela 5.2 mostra as respostas de pico e tempo de acomodação para os sistemas incertos realimentados com os controladores dinâmicos, no pior caso entre os sistemas dados nos vértices do polítopo. E as respostas ao salto são mostradas nas figuras 5.7 e 5.8.

Tab. 5.2 – Performance dos sistemas incertos realimentados

Sistema	Amortecimento	Freq. Natural	Resp. Pico	T. Acomodação
Kundur	0,723	10,63 rad/s	-8,68	2,58 s
Paim	0,4161	6,56 rad/s	-4,64	2,09 s

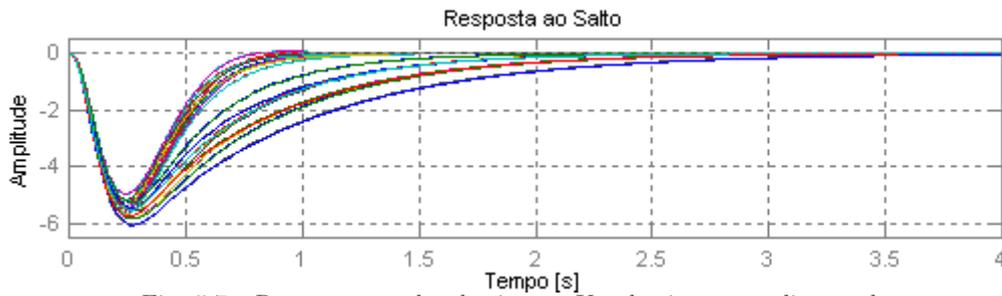


Fig. 5.7 – Resposta ao salto do sistema Kundur incerto realimentado.

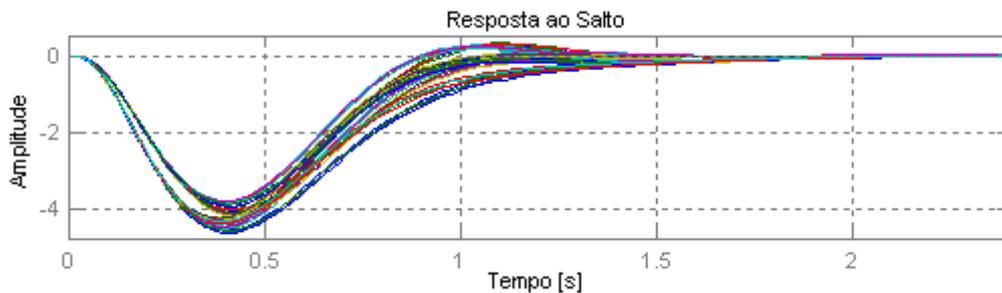


Fig. 5.8 – Resposta ao salto do sistema Paim incerto realimentado.

A eficácia para os sistemas incertos, dos controladores projetados acima, foi comprovada testando a estabilidade quadrática dos sistemas Kundur e Paim incertos e realimentados com os respectivos controladores projetados.

Pelos resultados obtidos nessa seção, é possível perceber que a dificuldade para a análise e projeto, utilizando o diagrama de lugar das raízes, aumentaria consideravelmente se o número de elementos incertos fosse maior. Além disso, essa análise não seria possível no projeto de controladores coordenados para um sistema global, com diversas máquinas síncronas sendo consideradas simultaneamente. Dessa análise, é possível notar também, as limitações da utilização da teoria clássica de controle para a análise e projeto com sistemas de potência.

Convém ressaltar, no entanto, que apesar dessas limitações, os ESP's projetados com o método clássico têm sido efetivos no controle de oscilações eletromecânicas de sistemas de potência, porém, não está claro se isso continuará acontecendo, à medida que os sistemas de potência passem a trabalhar com margens de estabilidade reduzidas, devido aos fatos destacados no primeiro capítulo.

5.2 Análise dos Resultados Obtidos

Nessa seção é feita uma análise dos resultados obtidos com cada método estudado no decorrer do presente trabalho, quando aplicados no projeto de estabilizadores para os sistemas tipo máquina-barras infinita Kundur [23] e Paim [9], definidos para o estudo de caso e descritos na seção 1.4.

Tab. 5.3 – Controladores projetados com os métodos estudados

Método	Tipo de Realim.	Controlador	Observações	Sistema	Resultado Obtido	
Equação de Riccati Eqs. (2.1.18) e (2.1.5)	Realim. de Estados	$u = Kx$		Paim incerto	$K = [-0.2429 \ 0.1486 \ -0.5478 \ -0.0019]$	
	Estática de Saída	$u = Ky$ $y = w$	$C = C_w$	Kundur incerto	$K = 0.11733$	
	Dinâmica de Saída	$U(s) = H_c(s)Y(s)$ $y = w$ $C = C_w$	$A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ $C_c = \begin{bmatrix} .1 & .2 \end{bmatrix}$	Kundur incerto	$H_c(s) = \frac{0.116(s+12)(s+7.999)}{(s+8)(s+12)}$	
				Paim nominal	$H_c(s) = \frac{0.1226(s+12)(s+7.998)}{(s+8)(s+12)}$	
				Kundur incerto	$H_c(s) = \frac{0.18677(s+10.54)(s+6.388)}{(s+8)(s+12)}$	
Paim incerto	$H_c(s) = \frac{0.13259(s+11.42)(s+4.207)}{(s+8)(s+12)}$					
Método da Separação Eqs. (2.2.36) e (2.2.37)	Dinâmica de Saída	$U(s) = H_c(s)Y(s)$ $y = w \ C = C_w$	$B_w = 0 \ D_w = 0$ $C_z = 0 \ D_u = 0$	Kundur incerto	$H_c(s) = \frac{227.3275(s+92.19)(s+8.137)(s+0.2082)}{(s+1005)(s+0.4088)(s^2+76.37s+2175)}$	
Paim incerto	$H_c(s) = \frac{38.4745(s+49.3)(s+6.986)(s+1.715)}{(s+36.46)(s+1.778)(s^2+17.1s+1225)}$					
Problema W e Problema P Eqs. (2.3.10), (2.3.8) e (2.3.9)	Estática de Saída	$u = Ky$ $y = w$	$C = C_w$	Kundur incerto	$K = 0.0682$	
	Paim nominal	$K = 0.1704$				
	Dinâmica de Saída	$U(s) = H_c(s)Y(s)$ $y = w$ $C = C_w$	$A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ $C_c = \begin{bmatrix} .1 & .2 \end{bmatrix}$	Kundur incerto	$H_c(s) = \frac{0.10176(s+9.723)(s+3.826)}{(s+8)(s+12)}$	
				Paim incerto	$H_c(s) = \frac{0.29524(s+11.04)(s-0.2677)}{(s+8)(s+12)}$	
				Kundur incerto	$H_c(s) = \frac{0.057731(s+0.3691)(s+3.266)}{(s+0.3691)(s+3.356)}$	
Paim incerto	$H_c(s) = \frac{0.17112(s+0.1509)(s+3.58)}{(s+12.25)(s+0.1509)}$					
Lugar das Raízes	Estática de Saída	$u = Ky$ $y = w$		Kundur nominal	$K = 0.1023$	
	Paim nominal	$K = 0.1817$				
	Dinâmica de Saída	$U(s) = H_c(s)Y(s)$ $y = w$	$C = C_w$	Kundur incerto	$H_c(s) = \frac{1.2(s+9)}{(s+92)}$	
Paim incerto	$H_c(s) = \frac{1.3(s+3.5)}{(s+47.5)}$					
Técnicas LMI para Sistemas Singulares	Realim. de Estados	$u = K_1x + K_2z$ Eq. (3.3.11)		Kundur nominal	$K_1 = [-0.2004 \ 0.0015 \ -0.3218 \ 0.01]$ $K_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$	
		Paim nominal	$K_1 = [-0.2572 \ 0.003 \ -0.445 \ 0.0397]$ $K_2 = [0.0001 \ 0 \ -0.0001 \ 0 \ 1 \ 0]$			
		$u = Kx$ Eq. (3.3.12)		Kundur nominal	$K = [-2.1984 \ 0.0313 \ -3.7578 \ -0.7724]$	
		Paim nominal	$K = [-1.0346 \ 0.0425 \ -1.0571 \ -0.1577]$			
	Estática de Saída	$u = K_1C_1x + K_2C_2z$ $y = \begin{bmatrix} C_1x \\ C_2z \end{bmatrix}$ Eq. (3.4.14)	$C_1 = C_w \ C_2 = C_{vt}$	$y = \begin{bmatrix} w \\ V_t \end{bmatrix}$	Kundur nominal	$K_1 = -1.2271 \cdot 10^{-6} \ K_2 = 0.9958$
			Paim nominal	$K_1 = 1.8003 \cdot 10^{-4} \ K_2 = 0.995$		
		Eq. (3.4.16)	$C_1 = C_w \ C_2 = C_p$	$y = \begin{bmatrix} w \\ P_e \end{bmatrix}$	Kundur nominal	$K_1 = 0.0039 \ K_2 = -0.4455$
			Paim nominal	$K_1 = 0.0052 \ K_2 = -0.759$		
	Dinâmica de Saída	$U(s) = H_c(s)Y(s)$ $y = P_e$ Eq. (3.5.21)	$A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ $C_c = \begin{bmatrix} .1 & .2 \end{bmatrix}$ $C_1 = 0 \ C_2 = C_p$	Kundur nominal	$H_c(s) = \frac{-0.64273(s+11.98)(s+7.993)}{(s+8)(s+12)}$	
				Paim nominal	$H_c(s) = \frac{-1.0499(s+11.29)(s+7.862)}{(s+8)(s+12)}$	
		$U(s) = H_{c1}(s)w(s) + H_{c2}(s)P_e(s)$ $y = \begin{bmatrix} w \\ P_e \end{bmatrix}$ Eq. (3.5.23)	$A_c = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ $C_c = \begin{bmatrix} .1 & .2 \end{bmatrix}$ $C_1 = C_w \ C_2 = C_p$	Kundur nominal	$H_{c1}(s) = \frac{0.0052773(s+11.05)(s+7.749)}{(s+8)(s+12)}$ $H_{c2}(s) = \frac{-0.63169(s+11.97)(s+7.99)}{(s+8)(s+12)}$	
				Paim nominal	$H_{c1}(s) = \frac{0.0095465(s+11.43)(s+7.879)}{(s+8)(s+12)}$ $H_{c2}(s) = \frac{-1.0046(s+11.25)(s+7.854)}{(s+8)(s+12)}$	
	Funções de Liapunov Dependentes dos Parâm.	Realim. de Estados	$u = K_0x$ Eq. (4.3.19)	$K_i = 0, i=1,\dots,5$	Kundur nominal	$K = [-0.08 \ -0.0001 \ 0.5067 \ 0]$
					Paim nominal	$K = [-0.1724 \ 0.004 \ 0.4375 \ 0.0395]$

E, para facilitar o acompanhamento do desenvolvimento feito nessa seção, a tabela 5.3 apresenta os controladores projetados, para os sistemas Kundur e Paim, utilizando os métodos de projeto apresentados ao longo desse trabalho. Nessa tabela são apresentados os controladores que foi possível obter

com esses métodos para os sistemas do estudo de caso. O resultado é considerado satisfatório quando chega-se a um controlador de saída para o sistema incerto.

Buscou-se, então, fazer uma descrição das características relevantes de cada método, destacando os pontos positivos e negativos e ainda fazendo a comparação com ênfase na obtenção de resultados satisfatórios.

Inicialmente pode-se destacar que todos os métodos baseados na descrição politópica das incertezas demandaram um grande esforço computacional para o cálculo dos resultados. Esse esforço fica evidenciado pelo fato de o número de equações aumentar exponencialmente em função do aumento do número de incertezas consideradas. Vale lembrar que o número de equações é proporcional ao número de vértices que definem o politopo incerto. Para cada incerteza adicional considerada dobra-se o número de vértices que definem o politopo, o qual representa o conjunto de sistemas a ser estabilizado.

Considerando essa visão, a definição do conjunto incerto através de incertezas limitadas em norma, ao invés de politópicas, traz uma grande melhora no esforço computacional. Isso fica claro quando se verifica que ao acrescentar um novo elemento incerto, o número de variáveis a determinar nas LMI's tem um aumento linear ao invés de exponencial. Entretanto, deve-se considerar que, definindo-se dessa forma, o conjunto a ser estabilizado é maior do que na definição politópica, tendo em vista que a limitação por norma gera um subespaço elipsóide, no qual está contido o conjunto (hipercubo) definido pelo politopo.

Essa característica pode ser observada nos resultados do método Problema W e Problema P, onde os resultados obtidos com incertezas limitadas em norma são mais restritos do que os obtidos com incertezas politópicas, pois quando utilizou-se incertezas limitadas em norma, os problemas (2.3.23) e (2.3.25) somente foram factíveis, para a realimentação dinâmica de velocidade, quando fixou-se a estrutura do controlador, através das matrizes A_c e C_c .

Ainda considerando o enfoque de tratamento das incertezas e esforço computacional, pode-se dizer que a representação reduzida do sistema MBI trouxe vantagens em relação à representação algébrico-diferencial do mesmo, pois esta última possui um número maior de elementos incertos (possui 16 elementos incertos, enquanto o sistema reduzido possui 5). Vê-se, então, que o *espalhamento* dos elementos incertos das matrizes Jacobianas para quase todos os elementos das matrizes do sistema reduzido, inconveniente ressaltado no capítulo 3, não ocorreu no caso de sistemas tipo MBI.

O sistema na forma algébrico-diferencial também possui um número maior de variáveis, o que leva a um aumento do número de inequações e, conseqüentemente, do número de variáveis a serem determinadas na resolução do problema. Além disso, os métodos que tratam o modelo reduzido do

sistema possibilitam a utilização de incertezas limitadas em norma, levando a uma grande redução do número de variáveis a serem determinadas em relação à representação algébrico-diferencial.

Para fazer uma análise comparativa do comportamento do sistema usou-se o método do lugar das raízes, desenhando as trajetórias dos pólos do sistema para todos os pontos que definem o politopo. Nota-se que tanto do sistema Kundur, quanto do sistema Paim possuem dois pólos complexos no SPD e dois pólos reais no SPE e, tomando como saída a velocidade angular, apresentam ainda um zero na origem.

Assim, verifica-se no sistema nominal, para ambos os casos, que é possível levar os pólos instáveis para o SPE através de uma realimentação positiva e estática de velocidade. Ainda, para o sistema Kundur é possível fazer isso para o sistema em todos os pontos que definem o politopo incerto. Já para o sistema Paim, verifica-se que não é possível levar os pólos do SPD para o SPE, com realimentação estática de saída, para todos os pontos que definem o politopo, sendo assim, a estabilização do sistema Paim para todo o conjunto incerto só pode ser feita utilizando uma realimentação de velocidade, se ela for dinâmica. Essas conclusões são comprovadas pelos resultados obtidos na análise dos métodos de projeto, onde métodos que resultam em realimentação estática de velocidade não conseguem gerar controladores que estabilizam o sistema Paim, quando considera-se suas incertezas, como pode ser visto nos resultados dos métodos da equação de Riccati e do problema W e problema P.

Os projetos de controladores com a utilização de funções de custo tendem a levar a solução das LMI's para o limite da região de factibilidade, dessa forma, os controladores resultantes podem ser pouco tolerantes a variações de seus parâmetros. Por esse motivo não foi dado ênfase na análise de controladores com minimização de funções de custo, embora os métodos estudados apresentem essa possibilidade.

Observa-se uma tendência nos métodos com realimentação dinâmica de saída, de convergirem para controladores estáticos, nos quais os elementos das matrizes B_c , C_c , ou de ambas, possuem valores muito pequenos, fazendo com que na função de transferência os pólos e zeros tenham valores idênticos ou muito próximos. Essa tendência é caracterizada nos métodos da equação de Riccati, do problema W e problema P e dos métodos para sistemas singulares, sendo que no método do problema W e problema P a tendência é influenciada pela transformação de similaridade utilizada. Esse comportamento é mais claro para o sistema Kundur, nominal e incerto, e para o sistema Paim nominal, pois todos podem ser estabilizados com realimentação proporcional. Porém, a tendência de cancelamento pode ser vista com o sistema Paim incerto nos métodos da equação de Riccati e do problema W e problema P, pois mesmo fixando a estrutura do controlador com dois pólos, um dos zeros projetados pelas LMI's

resulta num valor muito próximo de um dos pólos fixados. A exceção a essa tendência é o método da separação, no qual assume-se um controlador com a mesma ordem que o sistema a ser estabilizado e cuja dinâmica é incorporada no problema inicial, que passa por diversas manipulações algébricas e transformações de similaridade até chegar nas LMI's utilizadas no projeto do controlador, assim de acordo com sua premissa, o método da separação sempre gerou controladores de ordem 4, a mesma do sistema reduzido.

No método da equação de Riccati, percebe-se também, que essa tendência é influenciada pelos valores dos elementos da matriz C_c , quando a mesma é fixada, num controlador com estrutura pré-definida. Já no método do problema W e problema P essa tendência é, *aparentemente*, influenciada pela presença das transformações de similaridade e está mais presente nos resultados com o sistema Kundur do que com o sistema Paim, o que concorda com o fato de o sistema Kundur poder ser estabilizado com realimentação estática de saída, quando considera-se suas incertezas.

Na análise pelo método da equação de Riccati, o critério de parada do algoritmo iterativo proposto não foi satisfeito em nenhum resultado. Esse algoritmo é utilizado para o cálculo de um controlador de saída com estrutura descentralizada, através da satisfação de uma restrição estrutural. Entretanto, mesmo sem satisfazer esse critério, as LMI's do problema (2.1.18) apresentaram factibilidade e o algoritmo resultou num controlador adequado, tanto para a realimentação estática, quanto para a realimentação dinâmica de saída, como pode ser visto nos resultados apresentados. Esses controladores foram testados verificando-se a estabilidade quadrática para os sistemas incertos em malha fechada com os ESP's projetados.

Uma característica interessante dos resultados com sistemas singulares é que não foi obtida convergência com realimentação dinâmica de velocidade, embora se consiga esses resultados para todos os métodos que utilizam os sistemas de ordem reduzida. Além disso, não foi percebida nenhuma facilidade maior na obtenção de resultados com sistemas singulares, em relação aos métodos com o sistema reduzido. Pelo contrário, houve dificuldade em tratar o número maior de de variáveis e de elementos incertos, utilizados na formulação LMI para os métodos de projeto com sistemas singulares, fato que é resultante da representação *expandida* do sistema de potência, na forma algébrico-diferencial.

Todos os métodos estudados podem incorporar a restrição de descentralização, necessária para tratar o sistema global. Na maioria deles essa restrição deve ser incorporada nas matrizes variáveis a serem determinadas nas LMI's. Entretanto, no método da equação de Riccati, a restrição estrutural é incorporada através de um elemento somado na equação, elemento esse que também é utilizado para calcular a realimentação de saída a partir da realimentação de estados, utilizando um algoritmo

iterativo. Como os exemplos utilizados para obtenção de resultados nos métodos estudados tratam de um único gerador conectado a uma barra infinita, não foi possível verificar o comportamento dos mesmos com a inclusão da restrição de descentralização dos controladores.

Os métodos que utilizam funções de Liapunov dependentes dos parâmetros não apresentaram resultados de projeto significativos, tendo em vista que o único resultado de projeto é para a realimentação de estados, que é facilmente tratado pelos demais métodos com função quadrática e de pouca aplicação prática. Porém, a discussão desses métodos proporcionou o aprofundamento da análise das restrições impostas nos métodos de projeto com funções quadráticas e pretende estimular a continuação dos trabalhos para a obtenção de métodos de projeto menos conservativos, aumentando as possibilidades de obtenção de resultados satisfatórios.

Considerando como objetivo o projeto de ESP de saída capazes de estabilizar os sistemas em todos os pontos de operação, os métodos de projeto com os sistemas na representação reduzida, tratados no capítulo 2, apresentaram resultados satisfatórios para os sistemas utilizados no estudo de caso. Esses resultados são satisfatórios do ponto de vista que todos possibilitaram a obtenção de um ESP para cada sistema MBI incerto do estudo de caso, garantindo dessa forma que com a utilização dos ESP projetados os sistemas Kundur e Paim serão assintoticamente estáveis para todos os pontos de operação dentro do intervalo de 0,5 a 1,0 pu e de 0,8 a 1,2 pu na potência demandada do gerador síncrono para o sistema Kundur e para o sistema Paim, respectivamente.

Todavia, os métodos descritos no capítulo 3, que tratam do sistema na representação algébrico-diferencial, não possibilitaram a obtenção de ESP's para os sistemas MBI incertos utilizados no estudo de caso, sendo assim, não foi possível atender de forma plena o projeto de estabilizadores de sistemas de potência. Os limitantes desses métodos forma o esforço computacional, que esgotou os recursos do computador utilizado para o estudo de caso, assim como as dificuldades numéricas para a montagem e tratamento das LMI's. Isso é comprovado pelo fato de ter-se conseguido factibilidade até um determinado número de elementos incertos considerados, ou até a inclusão de determinados elementos incertos, como visto nas seções 3.4.1 e 3.5.1. Considerando essas observações, para tratar de forma satisfatória do projeto de estabilizadores para sistemas de potência, os métodos derivados de sistemas singulares devem ser aprimorados de forma a superar as dificuldades apresentadas nesse estudo. Algumas sugestões para esse fim são discutidas na Conclusão.

Conclusão

Nessa dissertação foram estudados diversos métodos de análise de sistemas com vistas a aplicação no projeto de estabilizadores para sistemas de potência, também conhecidos como sistemas de energia elétrica. Sendo que o escopo do trabalho foi limitado ao enfoque no domínio tempo.

Para tanto, o modelo global do sistema de potência foi formalizado e verificou-se que a análise de estabilidade pode ser feita através da linearização das equações do sistema em torno do ponto de operação, ou ponto de equilíbrio, o que possibilitou o emprego das técnicas aplicáveis a sistemas lineares.

Contudo, devido à necessidade de operação do sistema em diversas condições de operação e também devido à necessidade de manutenção da estabilidade em condições de operação adversas, utilizou-se o enfoque de estabilização simultânea dos sistemas linearizados em todos os pontos de operação a serem considerados. Isso levou à introdução do conceito de robustez, o qual foi incorporado nos requisitos de projeto. Além da robustez, os métodos estudados foram selecionados, ou estendidos para atender aos outros requisitos essenciais para o projeto de estabilizadores de sistemas de potência, que são a coordenação e a descentralização, cujos conceitos também foram descritos nesse trabalho.

O estudo de métodos de projeto foi então separado em métodos que utilizam o modelo reduzido do sistema, métodos que utilizam a formulação algébrico-diferencial para o mesmo, ou derivados de sistemas singulares, ambos os quais utilizam o conceito de estabilidade quadrática, da teoria de Liapunov, e por último os métodos que utilizam a formulação reduzida com função de Liapunov dependente dos parâmetros.

Foram apresentados dois sistemas tipo máquina-barras infinita que foram utilizados para o estudo de caso, através aplicação dos métodos estudados para o projeto de estabilizadores para esses sistemas, considerando uma ampla faixa de operação. Através dos resultados obtidos com a aplicação aos sistemas utilizados para exemplo, os quais foram apresentados juntamente a cada método estudado, foi possível efetuar uma melhor descrição e comparação das características desses métodos. E a fim de evidenciar essas características em comparação com a teoria clássica de controle, foi efetuado uma análise através do método do Lugar das Raízes.

Verificou-se, então, para os sistemas exemplo que os métodos que tratam a formulação do sistema reduzido apresentaram resultados satisfatórios, pois resultaram em controladores capazes de estabilizar os sistemas para toda a faixa de operação considerada. Entretanto, com os métodos derivados de sistemas singulares houve dificuldades numéricas para a montagem das desigualdades matriciais lineares, bem como para a obtenção de factibilidade das mesmas. Dessa forma, os estabilizadores resultantes são aplicáveis apenas aos sistemas nominais, não podendo garantir a estabilidade em toda a faixa de operação considerada. Por fim, os métodos que consideram a equação de Liapunov dependente dos parâmetros não apresentaram resultados com muita aplicação prática, tendo em vista que a teoria desenvolvida até o momento trata apenas da realimentação de estados do sistema. Porém, o estudo desses métodos possibilitou a análise das restrições impostas no projeto de controladores através da estabilidade quadrática.

Apesar de todo o estudo realizado, não foi possível determinar inequivocamente que um dos métodos seja mais adequado para a utilização no projeto de estabilizadores de sistemas de potência. Contudo, acredita-se que com a formalização num único trabalho, com a análise apresentada, incluindo os estudos de caso e com o detalhamento das características de cada método, será mais fácil para o leitor identificar qual método pode se adequar melhor às suas necessidades de projeto.

Além disso, com a formalização de maneira adequada para sistemas de potência, também ficará mais fácil para o projetista implementar os diversos métodos e verificar qual deles rende a solução mais adequada, principalmente levando em conta que nenhum método estudado garante a obtenção de solução para o problema de projeto, caso ela exista.

Como sugestões de estudos futuros, pode-se indicar a busca do aprimoramento dos métodos derivados de sistemas singulares, que tratam o sistema de potência na forma algébrico diferencial, tais como: a utilização de incertezas limitadas em norma, de forma a diminuir o esforço computacional demandado; utilização de transformações de similaridade, da mesma forma que é feito no método do problema W e problema P, para a busca de uma solução factível; e a realização de estudos para a redução do número de elementos incertos nas matrizes do sistema de potência linearizado, através da junção de dois ou mais elementos incertos num único parâmetro incerto, ou através da substituição de variáveis algébricas.

É necessário aplicar os métodos que tratam a formulação do sistema reduzido no projeto de sistemas multi-máquina, para verificar a aplicabilidade das restrições de descentralização no projeto de controladores, bem como o comportamento desses métodos em sistemas com grande número de variáveis .

Também deve-se fazer um estudo com comparação da performance dos ESP's projetados dessa forma, através da simulação da recuperação do sistema multi-máquinas à condições adversas, tais como um curto-circuito em algum ponto do sistema, que leve à mudança do ponto de operação, de forma a verificar as características de amortecimento de oscilações para os ESP's projetados.

Referências

- [1] ANDERSON, P. M.; FOUAD, A. A. *Power System Control and Stability*. New York, IEEE, 1995. (Power Systems Engineering Series).
- [2] ARRILAGA, J.; ARNOLD, C. P.; HARKER, B. J. *Computer Modeling of Electrical Power Systems*. New York, John Wiley, 1983.
- [3] BARBOSA, K. A. *Técnicas LMI para Sistemas com Restrições Algébricas no Estado*. Florianópolis, 1999. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
- [4] BARBOSA, K. A.; TROFINO, A. Técnicas LMI para análise de sistemas com restrições algébricas no estado. *Revista Controle & Automação*, v. 13, n. 1, p. 34–41, maio/ago 2002.
- [5] BAZANELLA, A. S. *Métodos Analíticos para a Síntese de Controladores em Sistemas de Potência*. Florianópolis, 1997. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
- [6] BAZANELLA, A. S. Electromechanical oscillations in power systems. In: IFAC WORLD CONGRESS, 14., 2002, Barcelona. *Proceedings...* Barcelona, [s.n.], 2002.
- [7] BAZANELLA, A. S.; KOKOTOVIC, P.; SILVA, A. S. e. On the control of dynamic systems with unknown operating point. *International Journal of Control*, v. 63, n. 7, p. 600–605, 2000.
- [8] BAZANELLA, A. S.; MANZONI, A.; SILVA, A. S. e. Stability in power systems with small security margins. In: BULK POWER DYNAMICS CONTROL, 4. *Proceedings...* Santorini, [s.n.], [s.d.].
- [9] BAZANELLA, A. S.; PAIM, C. C. Robust design of damping controllers in power systems. In: IEEE POWER TECH CONFERENCE, 1999, Budapest. *Proceedings...* Budapest, IEEE, 1999.

- [10] BAZANELLA, A. S.; SILVA, A. S. e. Coordinated design of damping controllers for robustness of power systems stability. *International Journal of Electric Power and Energy Systems*, v. 23, n. 1, p. 69–79, 2001.
- [11] BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [12] CHEN, C.-T. *Linear Systems Theory and Design*. 3. ed. New York, Oxford University Press, 1999.
- [13] COUTINHO, D. F. *Análise de Sistemas Não-Lineares Incertos - Uma Abordagem LMI*. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2000. Exame de qualificação não publicado.
- [14] COUTINHO, D. F.; BAZANELLA, A. S.; SILVA, A. S. e; TROFINO, A. Numerical lyapunov functions for a class of differential-algebraic nonlinear systems. In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA, 2002, Natal. *Anais...* Natal, [s.n.], 2002.
- [15] COUTINHO, D. F.; TROFINO, A. *Robust Stability and Performance for a Class of Uncertain Nonlinear Systems: A LMI Approach*. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Sistemas e Automação, 2000. (Relatório Técnico)
- [16] COUTINHO, D. F.; TROFINO, A. Análise de sistemas não-lineares incertos: Uma abordagem LMI. *Revista Controle & Automação*, v. 13, n. 2, p. 94–104, maio/ago 2002.
- [17] CRUSIUS, C. A. R.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, 1999.
- [18] DORATO, P.; ABDALLAH, C. T.; CERONE, V. *Linear Quadratic Control: An Introduction*. Malabar, Krieger Publishing Company, 2000.
- [19] FISCHMAN, A.; BAZANELLA, A. S.; SILVA, A. S. e; DION, J. M.; DUGARD, L. Application of linear matrix inequalities techniques to the design of robust coordinated controllers in power systems. In: IFAC SSC-CONFERENCE ON SYSTEM STRUCTURE AND CONTROL, 3., 1997, Bucarest. *Proceedings...* Bucarest, [s.n.], 1997.
- [20] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. New York, Prentice Hall, 1996.

- [21] KHARGONEKAR, P. P.; PETERSEN, I. R.; ZHOU, K. Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H^∞ Control Theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 35, n. 3, p. 356–361, Mar. 1990.
- [22] KRAUSE, P. C. *Analysis of Electrical Machinery*. New York, McGraw Hill, 1986.
- [23] KUNDUR, P. *Power System Stability and Control*. New York, McGraw-Hill, 1994.
- [24] LEWIS, F. L. A Survey of Linear Singular Systems. *Circuits Systems Signal Process*, v. 5, n. 1, p. 3–36, 1986.
- [25] MACIEJOWSKI, J. M. *Multivariable Feedback Design*. Workingham, Addison-Wesley, 1991. (Electronic Systems Engineering Series).
- [26] MARTINS, N.; PINTO, H. J. C.; BIANCO, A.; MACEDO, H. J. P. TCSC Control Structures for Line Power Scheduling and Methods to Determine Their Locations and Tuning to Damp System Oscillations. In: SEPOPE-SYMPOSIUM OF SPECIALISTS IN ELECTRIC OPERATIONAL AND EXPANSION PLANNING, 4., 1994, Foz do Iguaçu. *Anais...* Foz do Iguaçu, [s.n.], 1994.
- [27] MATLAB®. *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, The MathWorks, 1999.
- [28] MELLO, F. P. de; CONCORDIA, C. Concepts of synchronous machines as affected by excitation control. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 88, p. 316–329, 1969.
- [29] MENDONÇA, R. A. M. de. *Estabilização em Duas Etapas de Sistemas Descritores*. Florianópolis, 1998. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
- [30] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 3. ed. Rio de Janeiro, Prentice Hall, 1998.
- [31] OLIVEIRA, J. de. *Controle Robusto de Sistemas Lineares com Parâmetros Variantes no Tempo: Técnicas de Análise e Síntese*. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 1998. Exame de qualificação não publicado.
- [32] OLIVEIRA, J. de; TROFINO, A.; SOUZA, C. E. de. Robust H_2 Performance of LPV Systems via Parameter Dependent Lyapunov Function. In: IFAC SYMP. ROBUST CONTROL DESIGN, 3., 2000, Prague. *Proceedings...* Prague, [s.n.], 2000.

- [33] OLIVEIRA, M. C. de; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Design of dynamic output feedback decentralized controllers via a separation procedure. *International Journal of Control*, v. 73, n. 5, p. 371–381, 2000.
- [34] PAIM, C. C. *Controle a Custo Garantido com Restrições Estruturais: Formulação via LMI e Estudo de Casos*. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 1999. (Relatório Técnico)
- [35] PETERSEN, I.; HOLLOT, C. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, v. 22, p. 397–411, 1986.
- [36] PETERSEN, I. R. A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 30, n. 9, p. 904–907, 1985.
- [37] SCAVONE, F.; SILVA, A. S. e; TROFINO, A.; CAMPAGNOLO, J. M. Projeto Robusto de Controladores para Sistemas de Potência Usando Técnicas L.M.I. In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA, 12., 1998, Uberlândia. *Anais...* Uberlândia, [s.n.], 1998. v. 4, p. 1536–1541.
- [38] SCHMITENDORF, W. E. Designing stabilizing controllers for uncertain systems using Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, p. 376–379, 1988.
- [39] SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIOGORIADIS, K. Static Output Feedback – A Survey. *Automatica*, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997.
- [40] TROFINO, A. Parameter Dependent Lyapunov Functions for a Class of Uncertain Linear Systems: an LMI Approach. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION & CONTROL, 38., 1999, Phoenix. *Proceedings...* Phoenix, IEEE, 1999. p. 2341–2346.
- [41] TROFINO, A. *Bi-Quadratic Stability for Nonlinear Systems*. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Sistemas e Automação, 2000. (Relatório Técnico)
- [42] TROFINO, A.; SOUZA, C. E. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 8, p. 1303–1307, Aug 2001.
- [43] TROFINO, A.; SOUZA, C. E. de. Biquadratic stability of uncertain linear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION & CONTROL, 38., 1999, Phoenix. *Proceedings...* Phoenix, IEEE, 1999. p. 2341–2346.