

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

VERIFICAÇÃO DAS CONSTANTES CONSTITUTIVAS TRANSVERSALMENTE
ISOTRÓPICAS PARA CABOS DE ANCORAGEM

por

Franco Tedesco da Silva

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Julho de 2012.

VERIFICAÇÃO DAS CONSTANTES CONSTITUTIVAS TRANSVERSALMENTE
ISOTRÓPICAS PARA CABOS DE ANCORAGEM

por

Franco Tedesco da Silva

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Arnaldo Ruben Gonzalez
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Porto Alegre, 2, Julho de 2012.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família que sempre me apoiou, foi meu chão e fez um esforço imensurável para eu chegar até aqui.

Mãe muito obrigada por me ensinar tudo na vida e pelo amor incondicional. Devo tudo a você.

Pai tua garra, determinação, persistência e luta, trouxeram-me aqui, obrigado.

Fran te amo demais!

Queria agradecer a todos meus tios, tias, primos, primas e minha afillhada por estarem sempre presentes nos momentos mais difíceis que passei e dessa maneira contribuíram para meu sucesso.

Um agradecimento especial para meu grande amigo Henrique Tormen Haan de Oliveira que foi um grande professor durante toda essa jornada.

Quero agradecer meus amigos, Arthur Fiedler, Daniel Pinto, Jardel Plachi, Ricciano Liberali, Mateus Marchioro e todos que fizeram e continuarão a fazer parte das minhas histórias.

Agradeço ao Grande Amigo Norberto Jorge Antunes Hass pelas clarificantes elucidacões a cerca do tema que desencadearam em importantes contribuicões ao trabalho.

Um agradecimento a *FIRMA* e todos seus colaboradores, Eduardo Basso, Igor Fernandes Rodrigues, Gabriel Birck, Leonel Echer, Mateus Canuto, Diego Alba e todos outros.

*“The bars could not hold me
Force could not control me now
They tried to keep me down
But jah put i around!”*

Robert Nesta Marley

DA SILVA, F.T., **Verificação de constantes constitutivas transversalmente isotrópicas para cabos de ancoragem**. 2012. 16f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RESUMO

Com o intuito de realizar a simulação em elementos finitos das grandes deformações ocorridas em cabos de ancoragem de embarcações para águas profundas, realizou-se um estudo visando encontrar as propriedades de homogeneização para o material deste tipo de cabo. A homogeneização é necessária devido à utilização de fios de poliéster na fabricação do cabo, resultando em uma fração de volume típica de 30%. Para a obtenção das propriedades efetivas é utilizada uma teoria constitutiva para cabos de fibras curtas onde as constantes do material são derivadas das propriedades do fio base e do ângulo de hélice do cabo. Após a obtenção das propriedades efetivas, verificou-se que diversas das restrições matemáticas previstas pela Teoria da Elasticidade não eram satisfeitas. Este trabalho apresenta uma análise das faixas de valores que devem ser respeitadas pelas constantes a fim de obter-se um modelo constitutivo consistente. As propriedades corrigidas foram empregadas na modelagem numérica de um caso de estudo de cabo/roldana. Além de validar a metodologia aqui desenvolvida, os resultados mostram que soluções completamente distintas são obtidas quando a teoria de homogeneização não é empregada.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria constitutiva para cabos, Restrição constantes elásticas, Cabos de ancoragem, Esforços, Roldanas, Método dos elementos finitos.

SILVA, F.T., **Verification of constants constitutive transversely isotropic to moorage rope. 2012.** 16p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ABSTRACT

In order to simulate with finite element the large deformations occurring in moorage ropes of vessels to deep water, a study was done with a purpose to obtain the properties of homogeneous material for this type of cable. This type of cable is made of polyester and has a volume fraction of 30% of fibers in the section. To obtain effective properties was used the constitutive theory for short fiber yarns where the properties are obtained according to the properties of the base wire and the helix angle. After obtaining the effective properties, it was verified that many of the mathematical constraints provided by the theory of elasticity were not satisfied. This work presents an analysis of ranges of values that must be respected by the constants in order to obtain a consistent constitutive model. The corrected properties were employed in numerical modeling of a case study of cable/sheave. In addition to validating the methodology developed here, the results show that completely different solutions are obtained when the theory of homogenization is not used.

KEYWORDS: Rope theory constitutive, Constant elastic restriction, Moorage ropes, Sheaves, Finite element method.

LISTA DE SIMBOLOS

$[S_{ij}]$	Componentes da matriz flexibilidade	-
$[\varepsilon_{ij}]$	Tensor de deformações	[mm]
$[\sigma_{ij}]$	Tensor de tensões	[MPa]
$[C_{ij}]$	Componentes da matriz rigidez	-
E_T	Modulo de elasticidade transversal	[GPa]
E_L	Modulo de elasticidade longitudinal	[GPa]
G_{TT}	Modulo de cisalhamento no plano transversal	[GPa]
G_{TL}	Modulo de cisalhamento no plano longitudinal - transversal	[GPa]
ν_{TL}	Coefficiente Poisson no plano transversal - longitudinal	-
ν_{LT}	Coefficiente Poisson no plano longitudinal - transversal	-
ν_{TT}	Coefficiente Poisson para o plano transversal	-
V_f	Fração fibra-volume do cabo	-
η_l	Fator de eficiência do comprimento	-
q	Ângulo de hélice na superfície do cabo	[Rad]
E_f	Módulo de elasticidade da fibra base	[GPa]
T_y	Fator de enrolamento do cabo	[Rad]
ρ_f	Densidade específica da fibra base	[kg/m ³]
a_q	Fator de correção de cabos de filamentos contínuos	-

Índices

i, j	Direções ortogonais – $i, j = 1..3$
L	Direção longitudinal – $i, j = 3$
T	Direção transversal – $i, j = 1, 2$

INDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
3.1. Teoria constitutiva para cabos de fibras curtas.....	3
3.2. Restrições das constantes elásticas para materiais ortotrópicos	4
4. METODOLOGIA.....	6
4.1. Determinação das propriedades efetivas para cabos	6
4.2. Verificação das restrições e adequação das constantes elásticas para teoria constitutivas de cabos torcidos	8
5. CASO DE ESTUDO	11
6. CONCLUSÃO.....	15
7. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	15
APENDICE.....	16

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
FIGURA 1.1 – Apresentação do problema, cabo deformado.....	1
FIGURA 3.1 – Índices L , longitudinal e T , transversal na secção do cabo.....	3
FIGURA 4.1 – Razão entre os módulos de elasticidade efetivos pelo módulo de elasticidade do fio base.	6
FIGURA 4.2 - Razão entre os módulos de cisalhamento efetivos pelo módulo de elasticidade do fio base.....	7
FIGURA 4.3 – Coeficientes de poisson x nível de torção das fibras do cabo.....	7
FIGURA 4.4 – Valores de C_{11} , C_{22} e C_{33} com variação do nível de enrolamento das fibras do cabo.	10
FIGURA 4.5 – Região que relaciona os valores válidos de ν e ν_{TT} a fim de satisfazer as restrições.....	10
FIGURA 5.1 – Modelo de elementos finitos.....	11
FIGURA 5.2 – Dimensões dos componentes em estudo - [mm]. (a) Elemento de desvio – roldana. (b) Cabo.	12
FIGURA 5.3 – Padrão de deformação obtido através do método dos elementos finitos para o cabo utilizando as propriedades homogeneizadas – deslocamento [m].	13
FIGURA 5.4 - Padrão de deformação obtido através do método dos elementos finitos para o cabo com as propriedades do fio base – deslocamento [m].	13
FIGURA 5.5 – Esforços sofridos pela roldana – tensões equivalentes de von mises [Pa]. (a) Cabo com propriedades homogeneizadas. (b) Cabo com propriedades do fio base.	14
FIGURA 5.6 – Padrão de deformação, vista posterior – deslocamento [m]. (a) Cabo com propriedades homogeneizadas. (b) Cabo com propriedades do fio base.	14

INDICE DE TABELAS

	Pág.
TABELA 4.1 – Propriedades do material base da fibra.....	6
TABELA 4.2 – Propriedades efetivas para o cabo.....	8
TABELA 4.3 – Resultados da avaliação das restrições das constantes elásticas para as propriedades efetivas encontradas.....	9
TABELA 5.1 – Propriedades do material de fabricação da roldana (Fukuhara e Sanpei, 1993).	12
TABELA A.1 – Verificação das restrições para os Módulos de Poisson utilizados na análise numérica.	16

1. INTRODUÇÃO

Foi observado um padrão de deformação bastante acentuado em cabos de ancoragem de embarcações ao serem suportados por elementos de desvio ou sob aplicação de carga e com tempo de uso sobre roldanas e cabeços, conforme apresentado na Figura 1.1. O cabo em questão é uma nova geração de cabos de ancoragem de plataformas em águas profundas e ultra profundas, produzidos com fibras sintéticas de poliéster. Esta tecnologia foi desenvolvida no Brasil nos anos 90 pela Petrobras que até então utilizava correntes e cabos de aço para ancorar suas embarcações. Com a exploração de petróleo se movendo para águas cada vez mais profundas, tornou-se inviável a utilização de cabos de ancoragem em aço, graças ao seu comprimento e peso. Estes novos cabos são fabricados com fios de alta tenacidade e acabamento especial para aplicação em água do mar, reduzindo a abrasão entre as fibras e prolongando tanto sua vida útil quanto sua resistência à fadiga.



Figura 1.1 – Apresentação do problema, cabo deformado.

No caso específico da roldana foi observado que as cordas que compõem o cabo sofrem uma acomodação bastante intensa, modificando completamente o padrão de carregamento exercido sobre a roldana e eventualmente levando à falha da mesma por sobrecarga não prevista em projeto.

O objetivo deste trabalho é simular o comportamento de cabos navais utilizados para ancoragem de embarcações, sob carga, quando estes são passados através de uma roldana. O trabalho irá mostrar a possibilidade de simular a acomodação das cordas sobre a roldana, para posteriormente recuperar as cargas atuantes sobre este elemento de desvio. Deve-se destacar que a análise do processo de deformação em cabos navais deste tipo não obedece às teorias estruturais usuais, requerendo um modelo específico que capture os efeitos observados no equipamento real.

Trata-se de uma análise raramente bem executada no país. A maior parte das consultorias nesta área comete o erro de considerar as propriedades do material do fio base em modelos sólidos, quando o correto seria realizar o cálculo de homogeneização.

Segundo Buroni, 2006 realizar o cálculo de homogeneização é um problema essencial em muitas aplicações de engenharia e ciência. No cálculo de homogeneização buscam-se as relações entre fenômenos micro estruturais e o comportamento macroscópico de materiais tal que o comportamento macroscópico resultante se ajuste com as características desejadas. A simulação numérica de estruturas compostas por materiais micro heterogêneos, incorporando todos os detalhes da microestrutura, resulta em um custo computacional muito alto. Sendo assim, são utilizados modelos de materiais homogeneizados onde o material é tratado como se fosse homogêneo na macro escala com propriedades efetivas.

Contudo, as constantes elásticas devem respeitar as restrições matemáticas previstas pela teoria da elasticidade. Uma verificação das propriedades efetivas a partir de restrições matemáticas encontradas na literatura para o modelo elástico utilizado deve ser realizada a fim de obter-se um modelo constitutivo consistente.

A geração de uma metodologia de análise capaz de reproduzir todos os aspectos apresentados pode representar significativa economia de recursos e tempo no projeto e especificação de cabos deste tipo, auxiliando na seleção dos mesmos, e ainda, permitir o projeto de componentes mecânicos associados como roldanas, cabeços, cruzetas e buzinas com previsões de carregamento e comportamento realistas.

Neste trabalho foi criado um modelo em elementos finitos incluindo considerações de contato, atrito e propriedades efetivas, sendo estas obtidas através de correlações propostas na literatura. O presente trabalho seguiu o proposto por Pan, 1992, que permite a obtenção das propriedades efetivas em função das propriedades do fio-base (poliéster) e do ângulo de hélice do cabo. A partir deste modelo serão retirados os esforços que a acomodação do cabo causa na roldana e soluções completamente distintas quando a teoria de homogeneização não é empregada.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Houve um grande desenvolvimento e melhoria na análise do comportamento mecânico de cabos a partir de 1940. Desde então propriedades, tensões, comportamentos e resistência foram estudados extensivamente e há um volume considerável de literaturas pertinentes. Dentre as diversas literaturas os trabalhos mais significantes são os desenvolvidos por Pan numa sequencia de artigos.

Pan, 1992, desenvolveu uma teoria constitutiva que rege o comportamento mecânico de estruturas com fibras torcidas, começando com um caso de alta torção, de modo que o efeito de deslizamento da fibra durante a extensão do cabo pode ser ignorado. Também neste trabalho fora estabelecido uma relação constitutiva para os sistemas de cabos, considerando o material do cabo como transversalmente isotrópico, através dos quais todas as constantes do material, como módulos de elasticidade, módulos de cisalhamento e os coeficientes de Poisson são obtidos baseados nas propriedades das fibras, nível de enrolamento do cabo e na fração fibra-volume.

Pan, 1993, incluiu o efeito de deslizamento de fibras durante a extensão do cabo, de modo a desenvolver um modelo razoavelmente realista, tratável matematicamente. A tensão de tração média de uma fibra pode ser derivada, incorporando o efeito deslizamento da fibra em um fator, modificando todos os resultados e equações apresentados no primeiro estudo, a fim de estabelecer uma nova equação constitutiva com um mecanismo de deslizamento de fibra.

Pan, 1995, investiga o efeito do caminho da fibra no cabo propondo diversas funções densidades diferentes para descrever a distribuição estatística da orientação das fibras. Também é incluso o mecanismo de flexão da fibra, na análise. Fora também abordado o efeito de combinações de fibras no comportamento do cabo e problemas relacionados com a natureza estocástica de fratura dos cabos e forças devido irregularidades estruturais.

Pan e Brookstein, 2002, afirmam que os cabos marítimos são compostos de milhares de fibras individuais torcidas e combinadas em diferentes graus da sua estrutura. As principais vantagens da utilização de estruturas fibrosas torcidas são sua resistência, peso, flexibilidade e comportamento elástico. Quando as fibras são torcidas para formar um cordão exibem rigidez axial máxima e mínima de flexão. As fibras são torcidas em diferentes graus para manter sua integridade estrutural entre outras propriedades. Segundo Hearl, 1969, os cabos tem em seu arranjo estrutural uma secção transversal circular, composta de uma série de cilindros concêntricos em diferentes raios. Cada fibra segue um caminho helicoidal uniforme em torno dos cilindros concêntricos, de modo que a sua distância a partir do eixo axial do cabo permanece constante. Uma fibra no centro vai seguir em linha reta o eixo axial do cabo, mas distanciando-se do centro do cabo o ângulo de hélice aumenta gradualmente para cada camada de fibra.

Segundo Jones, 1975, deve-se estudar com rigor as restrições das constantes elásticas para materiais ortotrópicos para evitar erros de uma intuição construída sobre os princípios básicos de trabalhar com materiais isotrópicos. As constantes elásticas obtidas na homogeneização por diferentes teorias devem respeitar a estrutura matemática da teoria elástica. As restrições das constantes elásticas vêm da termodinâmica onde o produto da

componente da tensão com a correspondente componente da deformação representa o trabalho realizado pela tensão. O somatório do trabalho realizado por todas as componentes da tensão deve ser positivo para não ocorrer geração de energia.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1. Teoria constitutiva para cabos de fibras curtas

Pan, 1992, trata a estrutura do cabo como sendo transversalmente isotrópico, caso particular de ortotropia, uma vez que os fios-base se alinham longitudinalmente ao longo do cabo. A matriz flexibilidade, $[S_{ij}]$, para este tipo de estrutura é apresentada na Equação 3.1, onde a relação deformação tensão é expressa como $[\varepsilon_{ij}] = [S_{ij}][\sigma_{ij}]$,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{LL} \\ \gamma_{TT} \\ \gamma_{TL} \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{TT}}{E_T} & 1 & \frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & \frac{1}{G_{TT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{TT} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{LL} \\ \tau_{TT} \\ \tau_{TL} \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

e a matriz rigidez, $[C_{ij}]$, onde a relação tensão deformação é expressa como $[\sigma_{ij}] = [C_{ij}][\varepsilon_{ij}]$, é apresentada na equação,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{TT} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{LL} \\ \tau_{TT} \\ \tau_{TL} \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{TL}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} & \frac{\nu_{TT}-\nu_{TL}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} & \frac{\nu_{LT}+\nu_{TT}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{TT}-\nu_{TL}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} & \frac{1-\nu_{TL}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} & \frac{\nu_{LT}+\nu_{TT}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{TT}+\nu_{TL}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} & \frac{\nu_{TL}(1+\nu_{TL})}{E_T^2 \Delta} & \frac{1-\nu_{TT}^2}{E_T^2 \Delta} & G_{TT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{TL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{TL} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{TL} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{LL} \\ \gamma_{TT} \\ \gamma_{TL} \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde Δ é definido como a equação,

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{TT}^2 - \nu_{TL}\nu_{LT} - \nu_{LT}\nu_{TL} - 2\nu_{TT}\nu_{LT}\nu_{TL}}{E_T^2 E_L} \quad (3.3)$$

onde os subscritos T e L indicam as direções transversal e longitudinal do cabo, respectivamente, conforme é apresentado na Figura 3.1.

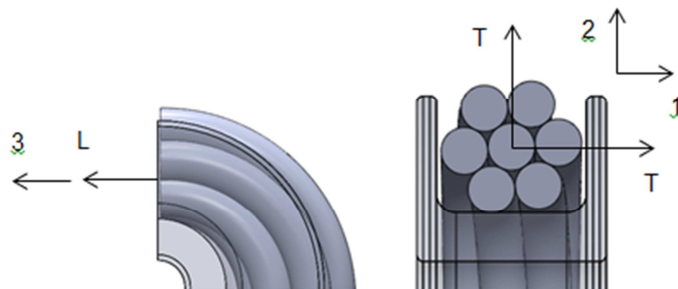


Figura 3.1 – Índices L , Longitudinal e T , Transversal na secção do cabo.

Segundo Pan, 1992, para a obtenção das constantes das matrizes flexibilidade e rigidez, Equações 3.1e 3.2, em função das propriedades do fio base e do ângulo de hélice do cabo são utilizadas as Equações 3.4 a 3.11:

- Módulo de elasticidade longitudinal:

$$E_L = \frac{3V_f E_f \eta_l (1 + \cos q)^2}{4(1 + \cos q + \cos^2 q)} \quad (3.4)$$

- Módulo de elasticidade transversal:

$$E_T = \frac{8V_f E_f \eta_l \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{4} \sin 2q\right)^2}{\pi^2 \left(\frac{2}{3} - \cos q + \frac{1}{3} \cos^3 q\right) (1 - \cos q)} \quad (3.5)$$

- Coeficientes de Poisson:

$$\nu_{LT} = \frac{\sin^5 q}{2(1 - \cos^3 q) \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{4} \sin 2q\right)} \quad (3.6)$$

$$\nu_{TL} = \frac{16 \sin q \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{4} \sin 2q\right)}{3\pi \left(\frac{2}{3} - \cos q + \frac{1}{3} \cos^3 q\right)} \quad (3.7)$$

$$\nu_{TT} = \frac{2}{\pi} \quad (3.8)$$

- Módulos de cisalhamento:

$$G_{TT} = \frac{4V_f E_f \eta_l \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{4} \sin q\right)}{\pi(2 + \pi) \left(\frac{2}{3} - \cos q + \frac{1}{3} \cos^3 q\right) (1 - \cos q)} \quad (3.9)$$

$$G_{TL} = \frac{V_f E_f \eta_l}{S(T, L)} \quad (3.10)$$

onde,

$$S(T, L) = \frac{\pi(1 - \cos q) \sin^3 q}{6 \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{4} \sin 2q\right)^2} + \frac{8 \sin^3 q}{3\pi(1 - \cos q)(1 + \cos q)^2} + \frac{\pi(4 - 3 \cos q - \cos^3 q)}{6 \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{4} \sin 2q\right)(1 + \cos q)} \quad (3.11)$$

O Ângulo de Hélice, q , para todas as equações é obtido pela Equação 3.12.

$$q = \arctan \left[a_q 10^{-3} T_y \left(\frac{40\pi}{\rho_f V_f} \right) \right] \quad (3.12)$$

Neste estudo $a_q = 2.5$, para filamentos contínuos, e $\eta_l = 1$, para fibras longas, conforme Pan, 1992.

3.2. Restrições das constantes elásticas para materiais ortotrópicos

As restrições da teoria da elasticidade para materiais transversalmente isotrópicos, caso particular de ortotropia, que serão utilizadas para validação das constantes elásticas obtidas na homogeneização são apresentadas por Jones, 1975, onde as matrizes relacionando tensões e deformações devem ser definidas positivas, ter os valores das diagonais principais

positivos, assim em termos de engenharia, as constantes elásticas, Equação 3.13, devem ser todas positivas.

$$E_T, E_L, G_{TT}, G_{TL} > 0 \quad (3.13)$$

Da mesma forma os elementos da diagonal principal da matriz rigidez devem ser positivos como indicado nas Equações 3.14 a 3.17.

$$C_{11} = C_{22} = \frac{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} > 0 \quad (3.14)$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{TT}^2}{E_T^2 \Delta} > 0 \quad (3.15)$$

$$C_{44} = G_{TT} > 0 \quad (3.16)$$

$$C_{55} = C_{66} = G_{TL} > 0 \quad (3.17)$$

Têm-se ainda as restrições quanto aos coeficientes de Poisson apresentadas nas Equações 3.18 e 3.19.

$$(1 - \nu_{TL}\nu_{LT}), (1 - \nu_{TT}^2) > 0 \quad (3.18)$$

$$\Delta' = 1 - \nu_{TT}^2 - \nu_{TL}\nu_{LT} - \nu_{LT}\nu_{TL} - 2\nu_{TT}\nu_{LT}\nu_{TL} > 0 \quad (3.19)$$

Também para a matriz flexibilidade ser definida positiva devem-se atender as restrições apresentadas na Equação 3.20,

$$|S_{23}| < (S_{22}S_{33})^{1/2} \quad |S_{12}| < (S_{11}S_{22})^{1/2} \quad (3.20)$$

onde os elementos das equações acima são os elementos da matriz flexibilidade e correspondem as Equações 3.21 e 3.22.

$$S_{11} = \frac{1}{E_T} \quad S_{22} = \frac{1}{E_L} \quad S_{33} = \frac{1}{E_L} \quad (3.21)$$

$$S_{23} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L} \quad S_{13} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{TT}}{E_T} \quad (3.22)$$

As condições da Equação 3.18 podem ser escritas como mostram as Equações 3.23.

$$|\nu_{TT}| < \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}} \quad |\nu_{LT}| < \left(\frac{E_L}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}} \quad |\nu_{TL}| < \left(\frac{E_T}{E_L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

A Equação 3.19 ainda pode ser expressa conforme a Equação 3.24.

$$\nu_{TT}\nu_{LT}\nu_{TL} < \frac{1 - \nu_{TT}^2 \left(\frac{E_T}{E_T}\right) - \nu_{LT}^2 \left(\frac{E_T}{E_L}\right) - \nu_{TL}^2 \left(\frac{E_L}{E_T}\right)}{2} < \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

E reagrupando a Equação 3.24 chegamos à restrição.

$$\left[1 - \nu_{LT}^2 \left(\frac{E_T}{E_L}\right)\right] \left[1 - \nu_{TL}^2 \left(\frac{E_L}{E_T}\right)\right] - \left[\nu_{TT} \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}} + \nu_{LT}\nu_{TL} \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 > 0 \quad (3.25)$$

Os procedimentos de restrição das constantes de engenharia para materiais ortotrópicos são utilizados para verificar se as constantes são fisicamente consistentes com a

estrutura matemática do modelo elástico proposto. No presente caso serão utilizadas as Equações 3.13 a 3.25 para a verificação.

4. METODOLOGIA

O trabalho será dividido em três etapas. Primeiro serão calculadas as propriedades efetivas do material do cabo naval, buscando a homogeneização. Na segunda etapa serão realizadas verificações das restrições das constantes elásticas obtidas para o material, buscando-se adequar as propriedades com a estrutura matemática do modelo elástico proposto. Em seguida será realizado um estudo de caso utilizando um modelo de elementos finitos, FEA, com as propriedades obtidas na homogeneização e também utilizando as propriedades do fio base visando verificar as diferenças de esforços que a acomodação do cabo gera em uma roldana quando o cabo é submetido a cargas axiais com as diferentes propriedades.

4.1. Determinação das propriedades efetivas para cabos

A partir das propriedades da fibra base apresentadas na Tabela 4.1 e da teoria proposta por Pan, 1992, apresentada nas Equações 3.1 a 3.12 foram obtidas as propriedades homogeneizadas para cabos de ancoragem.

Tabela 4.1 – Propriedades do material base da fibra.

Propriedades da fibra de poliéster	
Proporcionalidade Fração Volume (V_f)	0.3
Módulo de Elasticidade (E_f)	15 [GPa]
Densidade (ρ_f)	1380 [kg/m ³]

Inicialmente fixaram-se os dados apresentados na Tabela 4.1 e variou-se o ângulo de hélice com o objetivo de avaliar as propriedades efetivas conforme o grau de enrolamento e também as diferenças entre estas propriedades e as propriedades do fio base para o tipo de cabo em estudo. As razões entre os módulos de elasticidades transversal (E_T) e longitudinal (E_L), pelo módulo de elasticidade da fibra base (E_f) são apresentadas na Figura 4.1 e foram obtidos a partir das Equações 3.4 e 3.5.

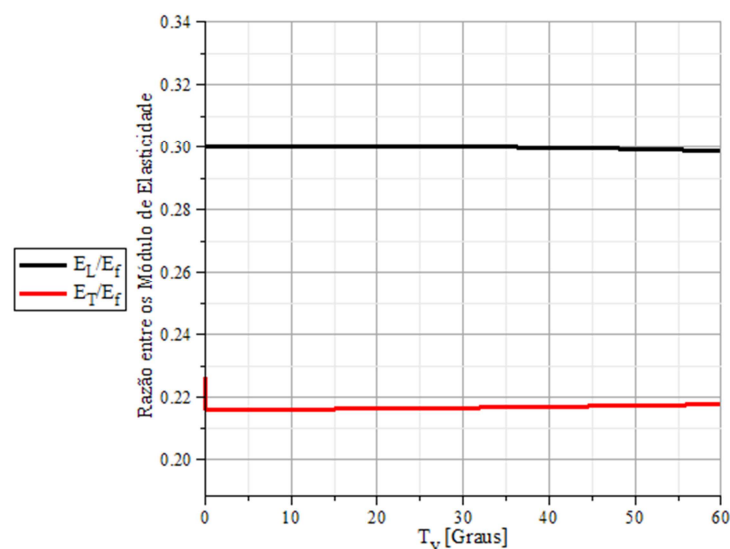


Figura 4.1 – Razão entre os módulos de elasticidade efetivos pelo módulo de elasticidade do fio base.

O módulo de elasticidade longitudinal, E_L , é aproximadamente 30% do valor do módulo de elasticidade da fibra base e o módulo de elasticidade transversal, E_T , é aproximadamente 22% do valor do módulo da fibra base. Tal diferença entre a propriedade efetiva e a

propriedade base mostra a necessidade de homogeneização das propriedades do material para alcançar os comportamentos realistas na simulação numérica. Na Figura 4.2 são apresentadas as razões entre os Módulos de Cisalhamento, obtidos a partir das Equações 3.9, 3.10 e 3.11, e os Módulos de Elasticidade da fibra base.

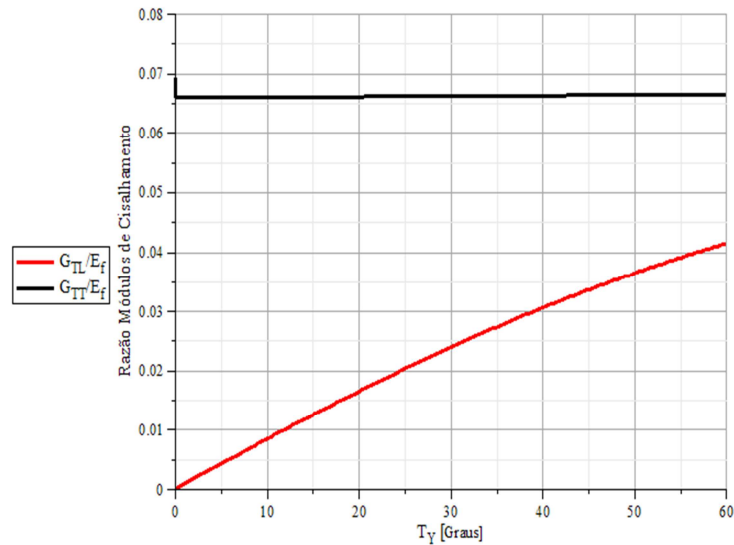


Figura 4.2 - Razão entre os módulos de cisalhamento efetivos pelo módulo de elasticidade do fio base.

Neste caso obtêm-se valores ainda menores entre as propriedades. Os valores do módulo de elasticidade transversal, G_{TL} , ficam em torno de 6.5%, enquanto para G_{TT} , em níveis de enrolamento menores de 10°, os valores ficam abaixo de 1%. Nota-se, entretanto um significativo aumento de G_{TT} conforme se aumenta o enrolamento, tornando o cabo mais resistente a esforços de cisalhamento no plano transversal. Tal efeito não é encontrado para E_L , E_T e G_{TL} , onde um maior nível de enrolamento não causa grandes mudanças nos valores das propriedades efetivas. Na Figura 4.3 são apresentados os coeficientes de Poisson obtidos a partir das Equações 3.6, 3.7 e 3.8, variando o nível de torção do cabo.

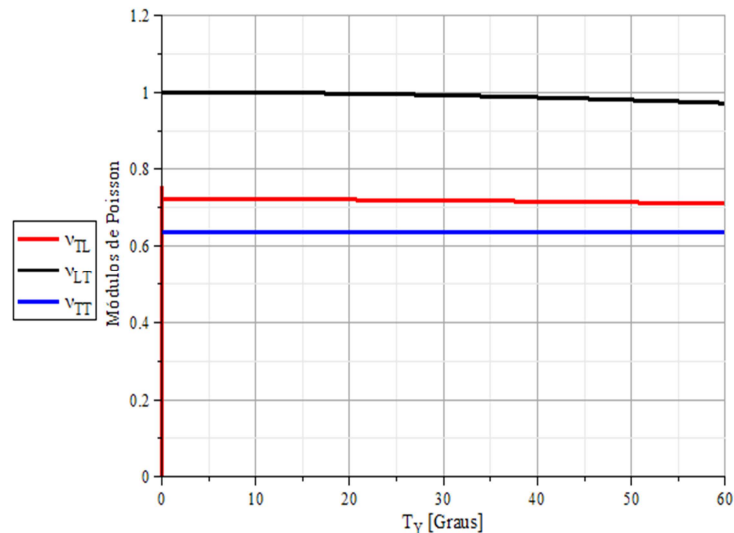


Figura 4.3 – Coeficientes de Poisson x Nível de torção das fibras do cabo.

Observam-se valores maiores de 0.5 para os coeficientes de Poisson. No caso de materiais isotrópicos esses valores desrespeitariam as restrições para este tipo de material, que admitem valores de Poisson entre -1 e 0.5. Mas tratando-se de materiais transversalmente isotrópicos as restrições são diferentes, como já fora apresentado no Capítulo 3.2. Tais restrições serão verificadas a seguir para validar a teoria constitutiva proposta.

Os resultados obtidos nas figuras Figura 4.1, Figura 4.2 e Figura 4.3 mostram quanto diferentes podem ser os resultados devido à utilização de propriedades que não resultariam no comportamento mais realístico na análise numérica. O cabo na sua microestrutura tem as propriedades de seu fio base. Entretanto seu comportamento na sua macroestrutura deve ser tratado diferente, já que em seu volume este tipo de cabo apresenta apenas 30% da sua secção preenchida com fibras. Os outros 70% são preenchidos com ar, o que faz o cabo ter um comportamento diferenciado do da sua fibra base.

Tendo o cabo um nível de enrolamento de 25° entre suas fibras, conforme informações do fabricante, os valores das propriedades efetivas são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Propriedades efetivas para o cabo.

Propriedades de homogeneização para o cabo	
E_T	3.25 [GPa]
E_L	4.50 [GPa]
G_{TT}	0.99 [GPa]
G_{TL}	0.30 [GPa]
ν_{TL}	0.72
ν_{LT}	0.99
ν_{TT}	0.64

Com os dados da Tabela 4.2 foram realizadas as verificações das constantes elásticas a fim de verificar a se estas respeitam o modelo elástico, tal verificação é apresentada na seção 4.2.

4.2. Verificação das restrições e adequação das constantes elásticas para teoria constitutivas de cabos torcidos

Para validação da teoria constitutiva para cabos, são verificadas as restrições das constantes elásticas, obtidas no seção 4.1, para materiais ortotrópicos segundo as restrições apresentadas por Jones, 1975. A teoria proposta por Pan, 1992, considera o cabo como transversalmente isotrópico, que é um caso particular de ortotropia, onde algumas propriedades são iguais para um plano de simetria. A avaliação das restrições é apresentada na Tabela 4.3, os resultados foram obtidos utilizando as propriedades calculadas anteriormente e apresentadas na Tabela 4.2.

Na Tabela 4.3 é mostrado que as constantes obtidas na homogeneização não respeitam a teoria elástica para materiais ortotrópicos. Os elementos da matriz rigidez, C_{11} , C_{22} e C_{33} , deveriam ser todos positivos, assim como o resultado obtido para a Equação 3.25, dessa maneira a matriz rigidez seria definida positiva. O coeficiente de Poisson, ν_{LT} , também está violando a restrição apresentada nas Equações 3.19 e 3.23, mostrando a necessidade de uma verificação dos resultados obtidos com a teoria constitutiva para cabos proposta por Pan, 1992.

Tabela 4.3 – Resultados da avaliação das restrições das constantes elásticas para as propriedades efetivas encontradas.

RESTRIÇÕES	EQ.	RESULTADOS	
$C_{11} = C_{22} = \frac{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} > 0$	(3.14)	$-5.33 \times 10^8 < 0$ [Pa]	✘
$C_{33} = \frac{1 - \nu_{TT}^2}{E_T^2 \Delta} > 0$	(3.15)	$-1.535 \times 10^9 < 0$ [Pa]	✘
$C_{44} = G_{TT} > 0$	(3.16)	$9.92 \times 10^8 > 0$ [Pa]	✔
$C_{55} = C_{66} = G_{TL} > 0$	(3.17)	$3.03 \times 10^8 > 0$ [Pa]	✔
$(1 - \nu_{TL}\nu_{LT}), (1 - \nu_{TT}^2) > 0$	(3.18)	$0.29 > 0 / 0.59 > 0$	✔
$\Delta' = 1 - \nu_{TT}^2 - \nu_{TL}\nu_{LT} - \nu_{LT}\nu_{TL} - 2\nu_{TT}\nu_{LT}\nu_{TL} > 0$	(3.19)	$-1.74 < 0$	✘
$ S_{23} < (S_{22}S_{33})^{1/2}$	(3.20)	$1.60 \times 10^{-10} < 2.6 \times 10^{-10}$ [Pa]	✔
$ S_{12} < (S_{11}S_{22})^{1/2}$	(3.20)	$1.96 \times 10^{-10} < 3.08 \times 10^{-10}$ [Pa]	✔
$ \nu_{TT} < \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}}$	(3.23)	$0.64 < 1$	✔
$ \nu_{LT} < \left(\frac{E_L}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}}$	(3.23)	$0.99 > 0.85$	✘
$ \nu_{TL} < \left(\frac{E_T}{E_L}\right)^{\frac{1}{2}}$	(3.23)	$0.71 < 1.18$	✔
$\left[1 - \nu_{LT}^2 \left(\frac{E_T}{E_L}\right)\right] \left[1 - \nu_{TL}^2 \left(\frac{E_L}{E_T}\right)\right] - \left[\nu_{TT} \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}} + \nu_{LT}\nu_{TL} \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 > 0$	(3.25)	$-3.10 < 0$	✘

Na Figura 4.4 é verificado se para algum nível de enrolamento diferente de 25°, os elementos da diagonal principal tem valor positivo. Como se pode observar na Figura 4.4, para nenhum nível de enrolamento, de 0° a 60°, as restrições são respeitadas. Os valores negativos encontrados devem-se aos elevados valores obtidos para os coeficientes de Poisson para todas as direções. Estes elevados valores tornam o numerador dos elementos da diagonal principal, Equações 3.14 e 3.15, negativos e também acabam por fazer Δ , Equação 3.3, menor do que zero e assim desrespeitam as restrições matemáticas da teoria elástica.

Sendo assim, para a utilização da teoria proposta por Pan, 1992, é necessário encontrar um intervalo onde os valores de Poisson façam a teoria constitutiva utilizada respeitar as restrições das constantes elásticas, ou seja, encontrar valores de Poisson onde o numerador dos elementos da matriz rigidez, C_{11} , C_{22} e C_{33} , sejam positivos e onde Δ é maior que zero. Para determinar estes valores são assumidas as premissas apresentadas abaixo:

- $\nu_{LT} = \nu_{TL} = \nu$;
- $\nu_{TT} < 1$;
- $\nu_{LT} = \nu_{TL} = \nu < 0.85$.

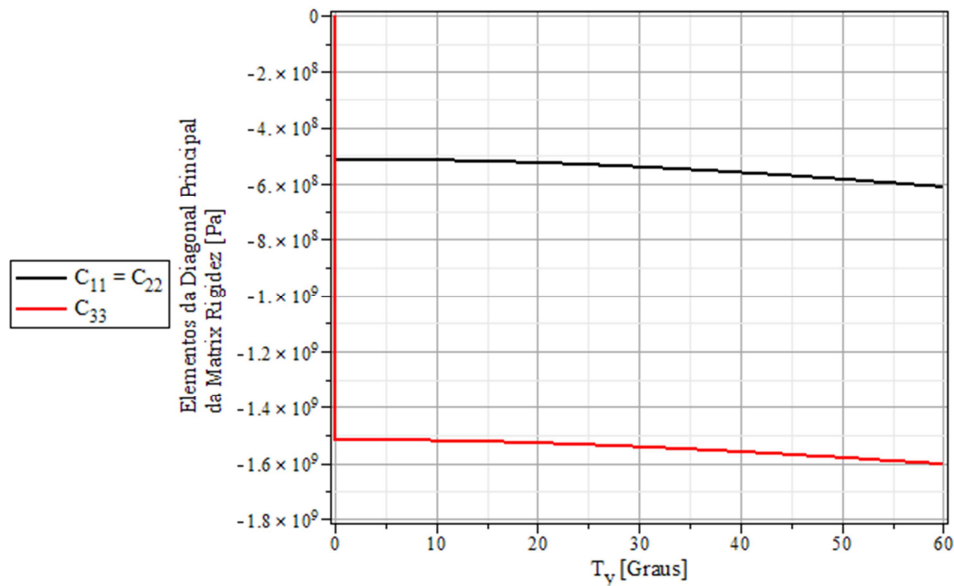


Figura 4.4 – Valores de C_{11} , C_{22} e C_{33} com variação do nível de enrolamento das fibras do cabo.

A primeira premissa deve-se ao fato de o cabo ter simetria radial na secção e estes módulos, ν_{LT} e ν_{TL} , caracterizarem o comportamento do material na sua secção transversal. As duas premissas seguintes são retiradas das restrições apresentadas na Tabela 4.3 para as Equações 3.23. Além dessas premissas são considerados os valores dos módulos de elasticidades, E_L e E_T os calculados para um cabo com T_y , igual a 25° . Utilizando essas premissas e as restrições das equações 3.14 e 3.15, gerou-se uma superfície onde foi cortado um plano onde os valores dessa superfície eram maiores que zero para as restrições e então se encontrou a região apresentada na Figura 4.5 que relaciona os valores válidos de ν e ν_{TT} a fim de satisfazer as restrições.

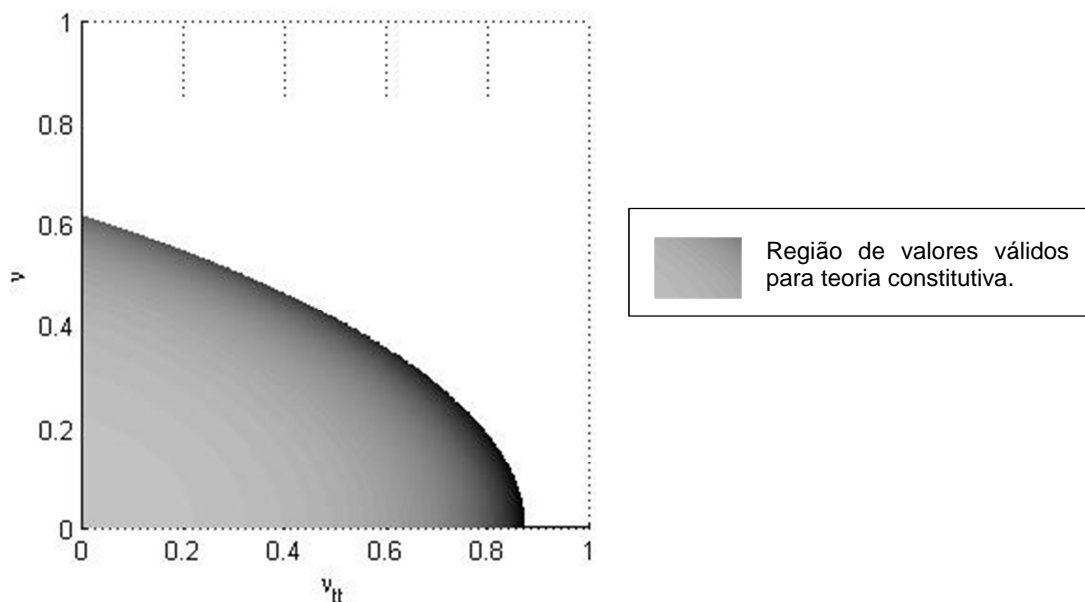


Figura 4.5 – Região que relaciona os valores válidos de ν e ν_{TT} a fim de satisfazer as restrições.

Na região escura apresentada na Figura 4.5, encontram-se os valores onde os coeficientes de Poisson irão gerar valores dos elementos da diagonal principal da matriz rigidez positivos. Nesta região os numeradores da Equação 3.14 e 3.15 são positivos ou $1 - \nu^2 > 0$, $1 - \nu_{TT}^2 > 0$. Também nessa região os valores de Δ são maiores do que zero. Esta região é representada pelos intervalos apresentados nas Equações 4.1 e 4.2, apresentadas abaixo.

$$\nu_{TT} < -2.4325\nu^2 + 0.1143\nu + 0.866 \quad (4.1)$$

$$0 < \nu < 0.617 \quad (4.2)$$

De conhecimento da região onde a teoria constitutiva para cabos é matematicamente válida são selecionados valores para os módulos de Poisson para utilização na modelagem numérica. A escolha dos coeficientes de Poisson, apresentados abaixo, deve-se a acentuada incompressibilidade observada no cabo em operação (extremamente maleável no plano transversal). No Apêndice é apresentada a verificação das restrições para os coeficientes de Poisson utilizados na simulação numérica de maneira a validar a região apresentada na Figura 4.5.

- $\nu_{TT} = 0.49$;
- $\nu_{LT} = \nu_{TL} = \nu = 0.45$.

5. CASO DE ESTUDO

Para obtenção dos esforços causados pela acentuada deformação do cabo em elementos de desvio, foi construído um modelo de elementos finitos utilizando as propriedades efetivas já calculadas e utilizando informações de dimensões obtidas com o fabricante do cabo de ancoragem. Um modelo utilizando as propriedades do material do fio base também foi construído visando comparar os resultados entre os dois modelos. O modelo geométrico de elementos finitos é apresentado na Figura 5.1

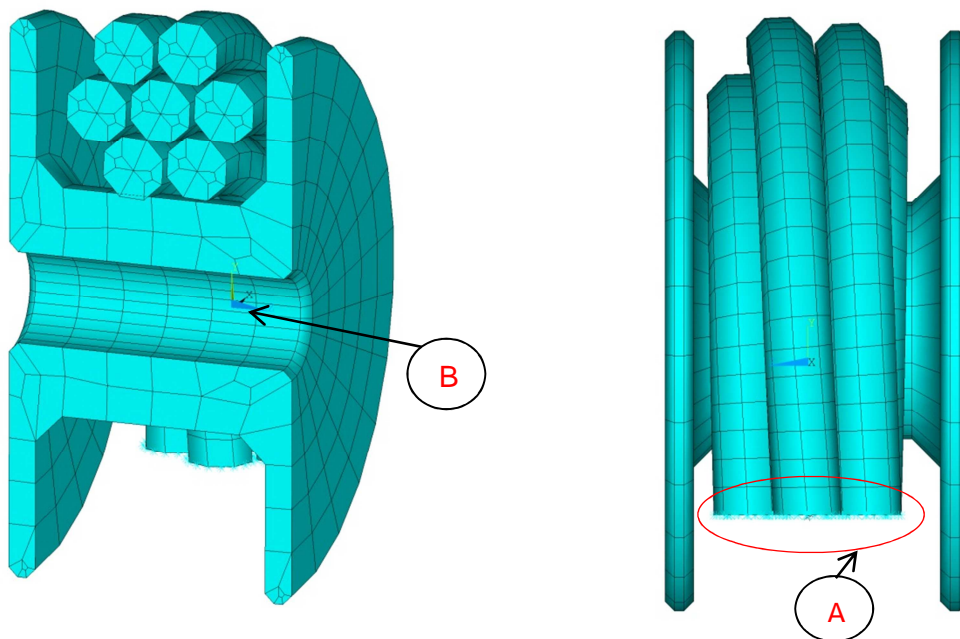


Figura 5.1 – Modelo de elementos finitos.

O modelo de elementos finitos foi construído com elementos hexaédricos de 20 nós devido à complexa geometria dos componentes envolvidos. Cada nó tem 6 graus de liberdade. O modelo apresenta elementos de contato entre todas as superfícies das fibras e entre as superfícies das fibras e a superfície da roldana. Foram utilizados coeficientes de atrito de 0.3 para o atrito entre as fibras e 0.5 para o atrito entre as fibras e a roldana. Na Figura 5.2 são apresentadas as dimensões dos componentes em estudo.

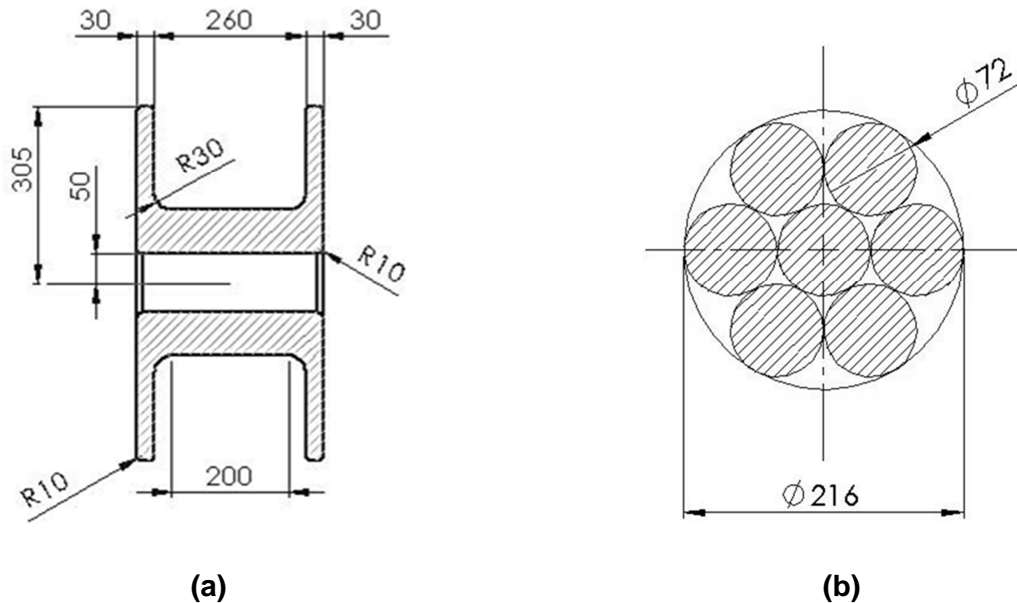


Figura 5.2 – Dimensões dos componentes em estudo - [mm]. (a) Elemento de desvio – Roldana. (b) Cabo.

Foram usadas condições de contorno de simetria para a roldana e o cabo devido ao elevado custo computacional do modelo devido as não linearidades incluídas e o grande número de superfícies de contato. Além das restrições de simetria a roldana tem os nós da superfície *B*, Figura 5.1, os seus 6 graus de liberdade restringidos. Para aplicação da força no cabo foi utilizado *Multipoint Constraint* onde todos os nós da superfície *A*, Figura 5.1, foram unidos a um nó onde foram aplicados cem toneladas de força. A roldana, segundo informações do fabricante do cabo, é normalmente fabrica de aço ASTM 4140 e suas propriedades são apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades do material de fabricação da roldana (Fukuhara e Sanpei, 1993).

Propriedades do aço 4140	
Módulo de Elasticidade	221.73 [GPa]
Densidade	748.97 [kg/m ³]
Poisson	0.30
Tensão de Escoamento	585 [MPa]
Tensão de Ruptura	725 [MPa]

Na Figura 5.3 é apresentado o efeito de deformação obtido através do método dos elementos finitos. Observa-se um padrão de deformação semelhante ao esperado. Deve-se lembrar que no caso em estudo o cabo é sujeito a um esforço direto que não varia com o tempo e nem é cíclico como ocorre com estes componentes quando no ambiente natural de trabalho. Como esperado a acomodação do cabo gera esforços na aba lateral da roldana.

Na Figura 5.4 apresenta a mesma simulação, entretanto utilizando no cabo as propriedades do material do fio base. Verifica-se uma deformação bem menos acentuada neste caso, já que as propriedades efetivas chegam a ser 30% do valor da propriedade base como no caso de E_L .

Algumas dificuldades relevantes encontradas na análise devem ser citadas. O alto valor de carregamento ao qual são submetidos estes tipos de componentes deve ser aplicado em pequenas partes durante a simulação. Grandes passos na aplicação da força geram distorções excessivas nos elementos que impedem a convergência. Outra dificuldade encontrada devido à geometria complexa dos componentes deve-se aos gaps entre os elementos alvo e origem no contato das superfícies. As diferenças de tolerância entre o software de modelagem 3D e o software de FEA, acabam por deixar o contato aberto entre as superfícies. Com as superfícies não estando em contato faltam restrições no cabo que não tem

restrições no eixo vertical e depende do contato com a roldana para ter o número de restrições corretos para conseguir a convergência da análise. A Figura 5.5 e apresenta os valores dos esforços sofridos pela roldana após a deformação do cabo para o cabo.

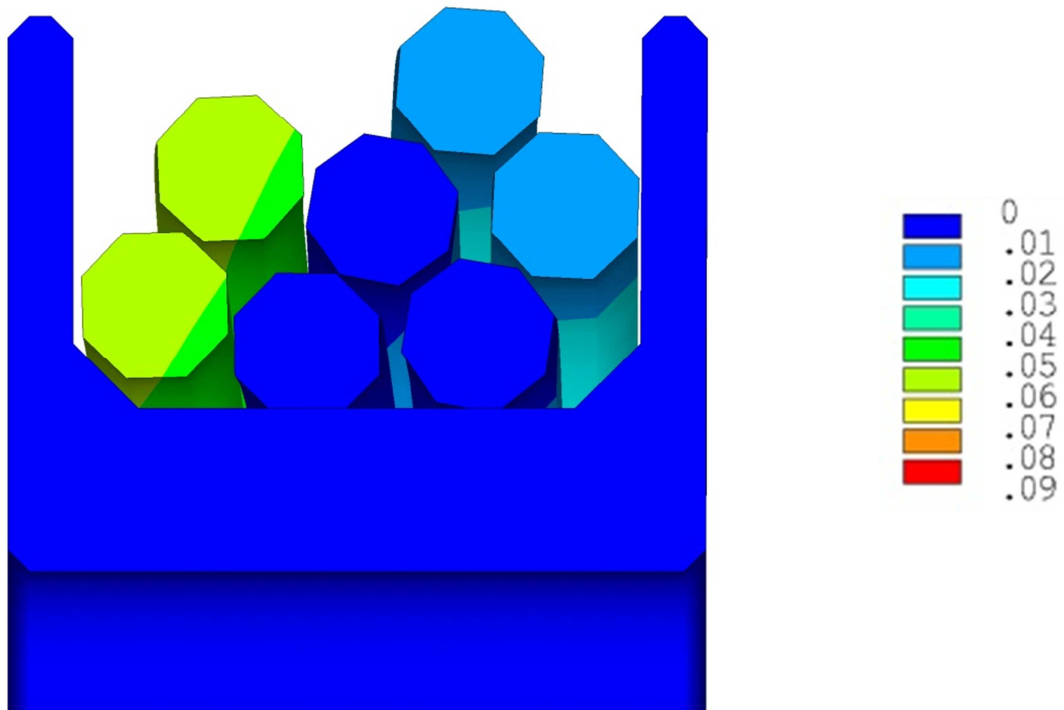


Figura 5.3 – Deslocamentos obtidos através do método dos elementos finitos para o cabo utilizando as propriedades homogeneizadas – Deslocamento [m].

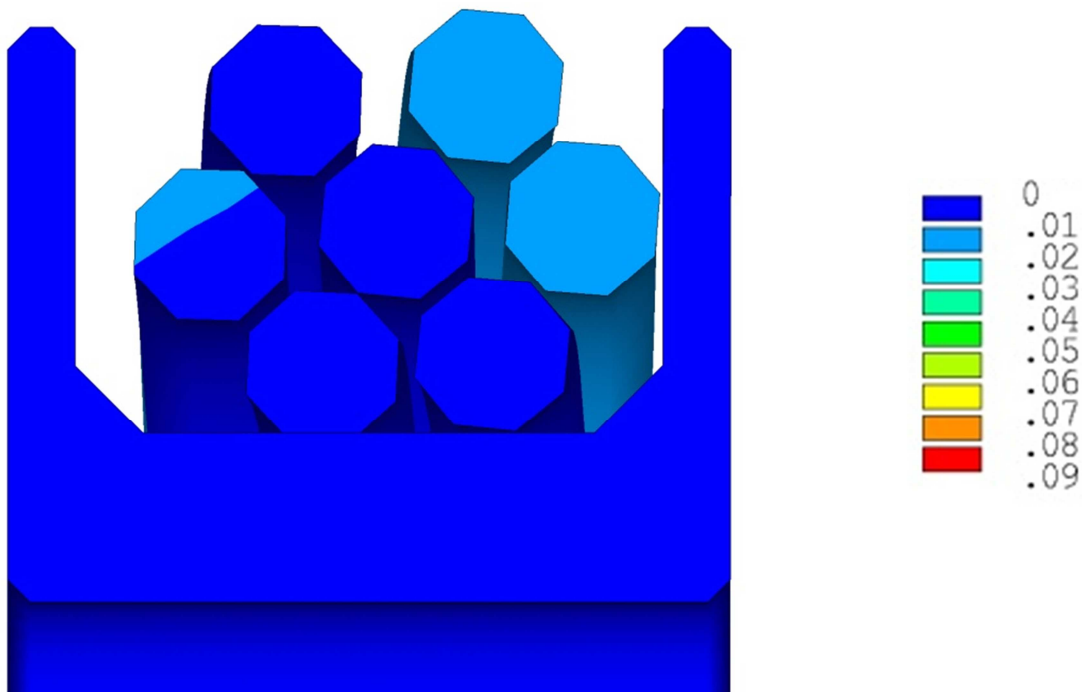


Figura 5.4 – Deslocamentos obtidos através do método dos elementos finitos para o cabo com as propriedades do fio base – Deslocamento [m].

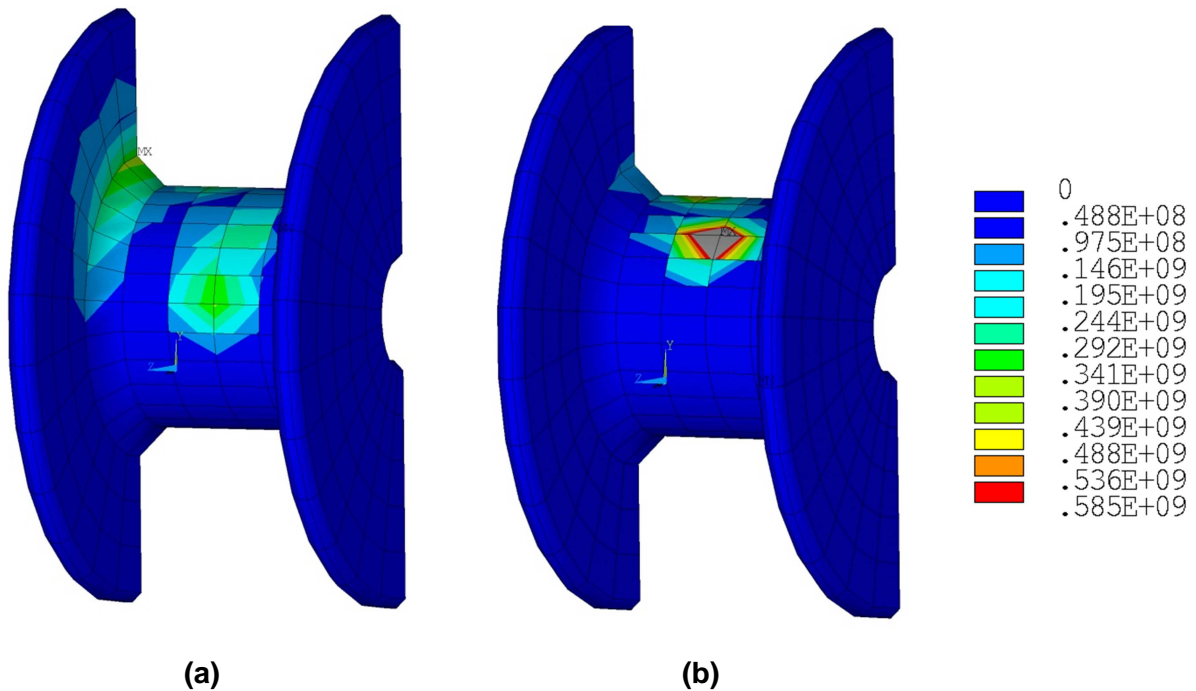


Figura 5.5 – Esforços sofridos pela roldana – Tensões equivalentes de von Mises [Pa]. (a) Cabo com propriedades homogeneizadas. (b) Cabo com propriedades do fio base.

A roldana Figura 5.5 (a) está submetida a esforços de aproximadamente 250 [MPa], segundo a tensão equivalente de von Mises. Algumas regiões apresentam tensões acima desta e devem-se a condições de contorno do modelo, do tamanho de malha e da distorção da malha além de regiões onde ocorrem concentradores de tensões, cantos vivos onde as tensões tendem a infinito. A tensão de escoamento para o aço AISI 4140, apresentada na Tabela 5.1, é maior que as tensões a qual a roldana é submetida. Na Figura 5.5 (b), verificam-se tensões equivalentes de von Mises, no corpo da roldana, acima da tensão de escoamento do material. Devido às propriedades do fio base tornarem o cabo mais rígido e menos deformável, estas acabam por gerar esforços maiores no elemento de desvio. No caso da Figura 5.5 (b) verificam-se menores esforços nas abas da roldana devido a menor deformação sofrida pelo do cabo. Na Figura 5.6 são verificados os deslocamentos das fibras do cabo pela vista posterior.

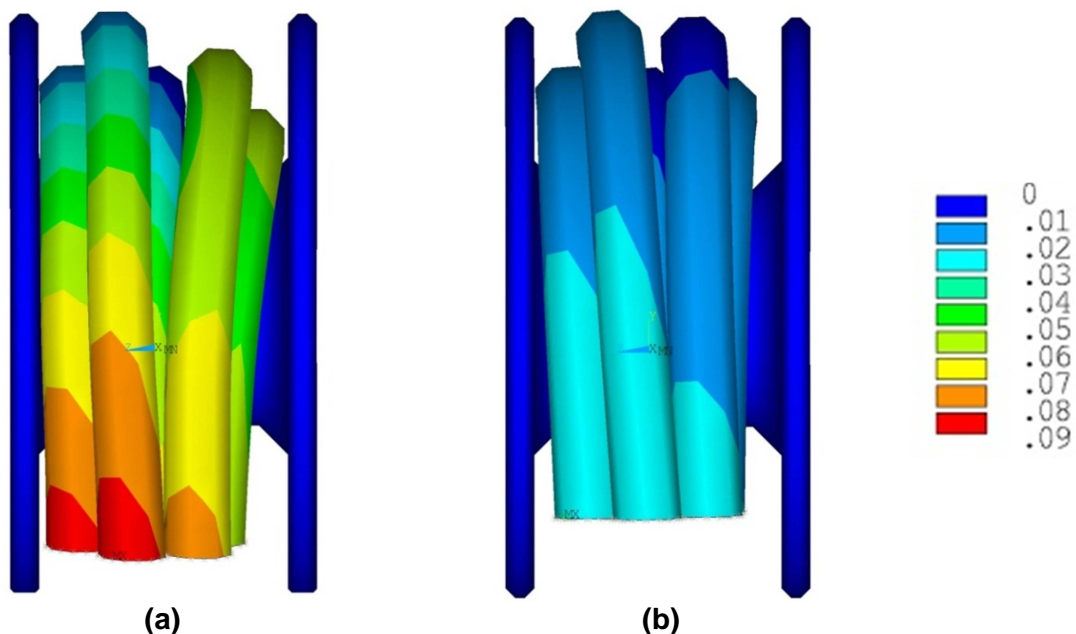


Figura 5.6 – Deslocamentos, vista posterior – Deslocamento [m]. (a) Cabo com propriedades homogeneizadas. (b) Cabo com propriedades do fio base.

6. CONCLUSÃO

Após a obtenção das propriedades de homogeneização segundo a teoria constitutiva para cabos proposta por Pan, 1992, verificou-se que diversas das restrições matemáticas previstas pela Teoria da Elasticidade não eram satisfeitas. Foi apresentada uma análise das faixas de valores que devem ser respeitadas pelas constantes a fim de obter-se um modelo constitutivo consistente. Após as propriedades efetivas serem corrigidas, estas foram empregadas na modelagem numérica de um caso de estudo de cabo/roldana, onde além de validar a metodologia desenvolvida neste trabalho apresenta-se quanto diferente são os resultados obtidos quando a teoria de homogeneização não é empregada.

Como continuidade deste estudo sugere-se os seguintes aspectos:

- Testar outras formulações constitutivas;
- Incluir efeitos de envelhecimento;
- Incluir comportamento viscoelástico do fio-base;
- Estudar coeficientes de atrito e abrasão;
- Trabalho de refino de malha no modelo estudado.

7. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Buroni, F.C.; **“Modelagem e Projeto Computacional de Materiais Micro Porosos com Distribuição Aleatória utilizando uma Formulação de Elementos de Contorno”**, Dissertação de Mestrado – UFRGS, pp.1-8, 1996.

Fukuhara M.; Sanpei A.; **Elastic-mouli and internal-friction of low-carbon and stainless-steel as a function of temperature**”, ISIJ International, Vol. 33(4), 1993.

Hearle, J. W. S.; Grosberg, P.; Backer, S.; **“Structural Mechanics of Yarns and Fabrics”**; Wiley-Interscience: New York, Vol. 1, 1969.

Jones, R.; **“Mechanics of Composite Materials”**, Scripta Book Company, Vol. 1, pp 99-103, 1975.

Pan, N.; Brookstein, D., **“Physical Properties of Twisted Structures. II. Industrial Yarns, Cords, and Ropes”**, Journal of Applied Polymer Science, Vol.83, pp.610-630, 2002.

Pan, N.; **“Development of a Constitutive Theory for Short Fiber Yarns: Mechanics of Stable Yarn Without slippage Effect”**, Textile Res. Journal, Vol.62, pp.749-765, 1992.

Pan, N.; **“Development of a Constitutive Theory for Short Fiber Yarns Part II: Mechanics of Staple Yarn With Slippage Effect”**, Textile Res. Journal, Vol.63, pp.504-514, 1993.

Pan, N.; **“Development of a Constitutive Theory for Short Fiber Yarns Part IV: Mechanics of Blended Fibrous Structures”**, J.Text. Inst., Vol.87, pp.467-483, 1996.

A. APENDICE

Na Tabela A.1 são apresentadas as verificações das restrições para as constantes elásticas utilizadas na modelagem numérica.

Tabela A.1 – Verificação das restrições para os Módulos de Poisson utilizados na análise numérica.

RESTRIÇÕES	EQ.	RESULTADOS	
$C_{11} = C_{22} = \frac{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}}{E_T E_L \Delta} > 0$	(3.14)	$1.58 \times 10^{10} > 0$ [Pa]	✓
$C_{33} = \frac{1 - \nu_{TT}^2}{E_T^2 \Delta} > 0$	(3.15)	$2.19 \times 10^{10} > 0$ [Pa]	✓
$C_{44} = G_{TT} > 0$	(3.16)	$9.92 \times 10^8 > 0$ [Pa]	✓
$C_{55} = C_{66} = G_{TL} > 0$	(3.17)	$3.03 \times 10^8 > 0$ [Pa]	✓
$(1 - \nu_{TL}\nu_{LT}), (1 - \nu_{TT}^2) > 0$	(3.18)	$0.80 > 0 / 0.76 > 0$	✓
$\Delta' = 1 - \nu_{TT}^2 - \nu_{TL}\nu_{LT} - \nu_{LT}\nu_{TL} - 2\nu_{TT}\nu_{LT}\nu_{TL} > 0$	(3.19)	$0.14 > 0$	✓
$ S_{23} < (S_{22}S_{33})^{1/2}$	(3.20)	$1.00 \times 10^{-10} < 2.22 \times 10^{-10}$ [Pa]	✓
$ S_{12} < (S_{11}S_{22})^{1/2}$	(3.20)	$1.51 \times 10^{-10} < 2.615 \times 10^{-10}$ [Pa]	✓
$ \nu_{TT} < \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}}$	(3.23)	$0.49 < 1$	✓
$ \nu_{LT} < \left(\frac{E_L}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}}$	(3.23)	$0.45 < 0.85$	✓
$ \nu_{TL} < \left(\frac{E_T}{E_L}\right)^{\frac{1}{2}}$	(3.23)	$0.45 < 1.18$	✓
$\left[1 - \nu_{LT}^2 \left(\frac{E_T}{E_L}\right)\right] \left[1 - \nu_{TL}^2 \left(\frac{E_L}{E_T}\right)\right] - \left[\nu_{TT} \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}} + \nu_{LT}\nu_{TL} \left(\frac{E_T}{E_T}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 > 0$	(3.25)	$0.13 > 0$	✓

Pela Tabela A.1 verifica-se que se obteve um modelo constitutivo consistente.