

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Marcelo Porto de Figueiredo**

**UM MODELO MULTIFÁSICO PARA ESTRUTURAS EM  
CONCRETO ARMADO**

Porto Alegre  
Dezembro 2011

**MARCELO PORTO DE FIGUEIREDO**

**UM MODELO MULTIFÁSICO PARA ESTRUTURAS EM  
CONCRETO ARMADO**

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de  
Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como  
parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia

**Orientadores: Samir Maghous  
Américo Campos Filho**

Porto Alegre  
Dezembro 2011

FIGUEIREDO, Marcelo Porto de  
Um modelo multifásico para estruturas em  
concreto armado / Marcelo Porto de Figueiredo. --  
2011

153 f.

Orientadores: Samir Maghous e Américo Campos  
Filho.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2011.

1. Modelagem multifásica. 2. Concreto Armado.  
3. Método dos Elementos Finitos. 4.  
Elastoplasticidade. 5. Lei de interação. I.  
Maghous, Samir, orient. II. Campos Filho, Américo,  
orient. III. Título

**MARCELO PORTO DE FIGUEIREDO**

**UM MODELO MULTIFÁSICO PARA ESTRUTURAS EM  
CONCRETO ARMADO**

Porto Alegre, 16 de dezembro de 2011

**Prof. Américo Campos Filho**  
Doutor pela Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo  
Orientador

**Prof. Samir Maghous**  
Docteur de L'École Nationale des Ponts et  
Chaussées  
Orientador

**Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho**  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho (UFRGS)**  
Ph.D. pela Leeds University – Inglaterra

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Osvaldo Luís Manzoli (UNESP)**  
Dr. pela Universidad Politécnica de Cataluña – Espanha



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aqui a todas as pessoas que colaboraram de alguma forma para o desenvolvimento e concretização deste trabalho. Em primeiro lugar, aos professores e orientadores Samir Maghous e Américo Campos Filho, pela dedicação e apoio despendidos ao longo dos últimos anos. À Paulinha, por todo o amor e carinho. Ao Eng. Cesar Olinto, por toda amizade e companheirismo. Aos meus pais Marco Aurélio e Marila Terezinha, por tudo. A todos os colegas que passaram pelo laboratório e que de alguma forma contribuíram para o avanço desta tese. Por fim, ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio concedido ao desenvolvimento da pesquisa.

“Never confuse movement with action”

*Ernest Hemingway*

## RESUMO

FIGUEIREDO, M.P. **Um modelo multifásico para estruturas em concreto armado**. 2011. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, UFRGS, Porto Alegre.

Determinar o comportamento de materiais reforçados a partir do conhecimento das propriedades individuais de seus componentes é assunto de uma quantidade considerável de pesquisas experimentais e teóricas nas últimas décadas. Nesse trabalho, um modelo multifásico para determinação do comportamento macroscópico de estruturas de concreto armado no contexto da elastoplasticidade e considerando a interação entre o concreto e as armaduras é apresentado e incorporado em um código numérico em elementos finitos. Em uma escala macroscópica o meio multifásico é tomado como a superposição geométrica de meios contínuos em interação mútua, chamados de fase matriz e fase reforço. Cada fase possui cinemáticas distintas oferecendo, desta forma, um arcabouço adequado para levar em conta o deslizamento das barras de aço em relação à matriz de concreto. As equações de movimento são desenvolvidas com a aplicação do método dos trabalhos virtuais. A evolução elastoplástica é obtida a partir da avaliação de um critério próprio para cada constituinte e para interação, computando as tensões parciais correspondentes e obtendo um comportamento desacoplado por fase. A resistência do concreto em um estado de tensões multiaxial é estimada a partir do critério de falha de Ottosen e a fissuração do concreto é representada utilizando um modelo de fissuras distribuídas. Utilizando uma implementação tridimensional em elementos finitos, a ferramenta numérica desenvolvida é aplicada para analisar vigas e lajes sob carregamento prescrito e uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais é obtida. Ao final é apresentado uma análise de ensaio de arrancamento onde o principal objetivo é a investigação dos parâmetros relevantes que controlam a lei de interação entre o concreto e as barras de aço.

Palavras-chave: concreto armado; método dos elementos finitos; modelo multifásico; elastoplasticidade.

## ABSTRACT

FIGUEIREDO, M.P. **A multiphase model for reinforced concrete structures**. 2011. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Predicting the behavior of reinforced materials from the knowledge of the individual properties of its components has been a subject of several experimental and theoretical works in recent years. In this work, a multiphase model for assessing the macroscopic behavior of reinforced concrete structures in the context of elastoplasticity and accounting for the interaction between the reinforcing bars and the surrounding concrete is presented and implemented in a finite element numerical code. Considering a macroscopic scale, the multiphase model is regarded as superposition of several continua in mutual interaction, namely matrix phase and reinforcement phase. For each phase different kinematics are attributed providing a suitable framework to consider the slippage between the matrix and the reinforcement. The general equations of motion are derived by means of the virtual work method. The elastoplastic evolution is carried out considering each phase and the interaction separately, computing the corresponding partial stresses and projecting onto the yield domain of the multiphase medium. The strength of concrete under multiaxial states of stress is estimated from the so-called Ottosen failure criterion and the concrete cracking issue is accounted with a smeared crack model. Using a three-dimensional finite element implementation, the numerical tool developed is applied to analyze reinforced concrete beams and slabs under prescribed loading and a good agreement between numerical and experimental results is obtained. Finally, the investigation of the main parameters that govern the interaction law of concrete and reinforcing bars has been the central purpose of the pull-out tests simulations.

Key-words: reinforced concrete; finite element method; multiphase model; elastoplasticity.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial (Kupfer et al, 1969).	6
Figura 2.2 – Curva tensão-deformação para o concreto sob tração uniaxial (Peterson, 1981).	6
Figura 2.3 – Diagrama tensão-deformação para o aço com patamar de escoamento (Kwon, 2000).	7
Figura 2.4 – Diagrama tensão-deformação do aço (a) aproximação elastoplástica perfeita e (b) aproximação elástica com endurecimento linear.	8
Figura 2.5 – Modelos empregados para a simulação de fissuras. (a) Modelo discreto e (b) Modelo distribuído (Hinton, 1988).	10
Figura 2.6 – Modelo discreto para armaduras.	11
Figura 2.7 – Modelo distribuído para armadura.	11
Figura 2.8 – Modelo incorporado para armadura.	12
Figura 2.9 – Propagação de ondas longitudinais em um compósito estratificado (Bedford e Stern, 1972).	18
Figura 3.1 – Descrição geométrica do material reforçado (escala microscópica). Neste trabalho o concreto será representado pela fase matriz e as barras de armadura pelas inclusões de reforço. Bennis (2002).	22
Figura 3.2 – Descrição do meio multifásico (escala macroscópica) com uma fase de reforço. Bennis (2002).	23
Figura 3.3 – Terminologia empregada neste trabalho.	24
Figura 3.4 – Esforços internos à fase matriz (por razão de clareza os domínios ocupados pelas duas fases são representados distintamente nas figuras desta seção ainda que sejam coincidentes geometricamente).	25
Figura 3.5 – Esforços internos à fase reforço.	26

Figura 3.6 – Esforços externos à fase matriz.....	28
Figura 3.7 – Esforços externos à fase reforço.....	29
Figura 3.8 – Esforços externos à um sistema bifásico.....	29
Figura 3.9 – Interpretação da tensão $\sigma'$ na fase de reforço.....	33
Figura 3.10 – Interpretação da força volumétrica de interação $I$ .....	34
Figura 3.11 – Cinemática de um meio bifásico.....	36
Figura 3.12 – Espaçamento entre duas inclusões.....	37
Figura 4.1 – Malha exata (a) e malha aproximada (b). ....	52
Figura 4.2 – Hexaedro linear de 8 nós.....	53
Figura 4.3 – Hexaedro quadrático de 20 nós.....	54
Figura 4.4 – Direções de reforço.....	59
Figura 4.5 – Discretização de problemas mistos (graus de liberdade nodais).....	74
Figura 4.6 – Compressão simples de um corpo de prova reforçado.....	75
Figura 4.7 – Reforço longitudinal.....	76
Figura 4.8 – Comportamento elastoplástico do modelo multifásico com reforço longitudinal “fraco”.....	81
Figura 4.9 – Comportamento elastoplástico do modelo multifásico com reforço longitudinal “forte”.....	82
Figura 4.10 – Reforço Transversal.....	82
Figura 4.11 – Comportamento elastoplástico do modelo multifásico com reforço transversal.....	87
Figura 4.12 – Compressão de um corpo de prova reforçado.....	88
Figura 4.13 – Deslocamentos horizontais.....	90
Figura 4.14 – Tensões na fase reforço ( $N/m^2$ ) e esforços de interação ( $N/m^3$ ).....	90
Figura 4.15 – Tensão na fase reforço variando o coeficiente de interação. Linhas contínuas, Bennis (2002); símbolos, resultados numéricos.....	91

Figura 4.16 – Ensaio de arrancamento da fase reforço. ....	92
Figura 4.17 – Ensaio de arrancamento com engastamento: comparação entre resultados analíticos e numéricos – deslocamentos das fases matriz e reforço. ....	94
Figura 4.18 – Ensaio de arrancamento com engastamento: comparação entre resultados analíticos e numéricos – Tensões parciais na fase matriz e reforço. ....	95
Figura 4.19 – Ensaio de arrancamento com engastamento – Carga-deslocamento (a) variando a rigidez do reforço (b) variando o coeficiente de interação ....	97
Figura 5.1 – Superfície de plastificação e ruptura .....	100
Figura 5.2 – Diagrama tensão-deformação para compressão uniaxial.....	101
Figura 5.3 – Curva tensão deformação para o concreto tracionado (Martinelli, 2003)....	103
Figura 5.4 – Diagrama tensão-deformação para compressão uniaxial.....	104
Figura 5.5 – Viga simplesmente apoiada .....	105
Figura 5.6 – Detalhamento das vigas de Bresler-Scordelis (1963) .....	107
Figura 5.7 – Malha em elementos finitos e fases de reforço .....	107
Figura 5.8 – Curvas carga-deslocamento – Bresler-Scordelis – Série 1 .....	108
Figura 5.9 – Curvas carga-deslocamento – Bresler-Scordelis – Série 2 .....	108
Figura 5.10 – Curvas carga-deslocamento – Bresler-Scordelis – Série 3 .....	109
Figura 5.11 – Geometria das lajes reforçadas de Jofriet e McNeice (1971) .....	110
Figura 5.12 – Geometria das lajes reforçadas de Duddeck et al (1978).....	111
Figura 5.13 – Distribuição de reforço de Jofriet e McNeice (1971): as regiões hachuradas indicam a extensão da zona multifásica. ....	112
Figura 5.14 – Distribuição de reforço de Duddeck et al (1978): taxas de aço diferentes na zona superior e na zona inferior. ....	112
Figura 5.15 – Curvas carga x deslocamento para lajes submetidas a carregamento centralizado. (a) Jofriet e McNeice; (b) Duddeck .....	113
Figura 5.16 – Carga x espessura da zona multifásica para um deslocamento fixo de: (a) 5mm no nó 2 para Jofriet e McNeice e (b) 8mm no centro da placa para Duddeck et al.	114

Figura 5.17 – Ensaio de arrancamento .....	115
Figura 5.18 – Malha utilizada no ensaio de arrancamento.....	115
Figura 5.19 – Sensibilidade do modelo ao parâmetro coeficiente de interação.....	117
Figura 5.20 – Corpo de prova de 20,3cm. (a) Distribuição da tensão na barra de aço (b) esforços de aderência.....	117
Figura 5.21 – Corpo de prova de 30,4cm. (a) Distribuição das tensões na barra de aço e (b) tensões de aderência.....	118
Figura 5.22 – Corpo de prova de 30,4cm com elastoplasticidade perfeita da lei de interação. (a) Distribuição da tensão na barra de aço (b) esforços de aderência.....	119
Figura 5.23 – Diagrama tensão de aderência x deslizamento .....	119

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1– Coordenadas e pesos dos pontos de integração.....	<b>62</b>
Tabela 4.2 – Parâmetros de Cálculo .....	<b>81</b>
Tabela 4.3 – Parâmetros de cálculo para Ensaio de Compressão Transversal.....	<b>86</b>
Tabela 4.4 – Parâmetros de cálculo para o ensaio de compressão simples.....	<b>89</b>
Tabela 4.5 – Parâmetros de cálculo para o ensaio de arrancamento com engastamento.....	<b>94</b>
Tabela 5.1 – Propriedades das vigas (Bresler-Scordelis, 1963).....	<b>106</b>
Tabela 5.2 – Propriedades dos materiais dos ensaios das lajes de Jofriet e McNeice (1971) e Duddeck et al (1978).....	<b>110</b>
Tabela 5.3 – Propriedades mecânicas – Ensaios de arrancamento de Watstein (1947) .....	<b>116</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras romanas maiúsculas

$A'$	Trabalho virtual das quantidades de aceleração
$\underline{\underline{A}}$	Tensor dos módulos elásticos totais da fase matriz
$\underline{\underline{\tilde{A}}}^m$	Tensor dos módulos elásticos totais da fase matriz à escala microscópica
$\mathbf{B}_e$	Matriz contendo as deformações em função dos deslocamentos nodais
$\mathbf{C}(S_{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\xi}}^d)$	Espaço dos campos de deslocamento cinematicamente admissíveis
$\underline{\underline{C}}^I$	Tensor de interação em elasticidade
$C^J$	Domínio de elasticidade
$\mathbf{C}_n$	Espaço de minimização de energia
$\mathbf{d}^m, \mathbf{d}^f, \mathbf{D}$	Matriz dos módulos elásticos associada à fase matriz, reforço, total
$E^m, E^r, E^f$	Módulo de elasticidade da fase matriz, da fase reforço ( $= a^r$ ), da inclusão
$\tilde{E}^r$	Módulo de elasticidade do reforço a escala microscópica
$\underline{F}$	Vetor de forças globais
$F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)$	Critério de plasticidade
$G_c$	Módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado
$G_0$	Módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado
$I, \underline{I}^j$	Densidade volumétrica dos esforços de interação
$I_e$	Esforço de interação em fase elástica
$I_1$	Primeiro invariante do tensor de tensões
$J_2$	Segundo invariante do tensor desviador de tensões
$J_3$	Terceiro invariante do tensor desviador de tensões

<b>K</b>	Matriz de rigidez global
<b>L</b>	Matriz simbólica de diferenciação
$\underline{\underline{L}}^m, \underline{\underline{L}}^r$	Operadores de localização de tensões
$N$	Número de direções de reforço
$N_i$	Funções de forma
$N_{c,l}$	Número de condições de contorno em deslocamentos
$\mathbf{N}_e$	Matriz das funções de forma de um elemento finito
$P'_{(i)}$	trabalhos virtuais dos esforços internos
$P'_{(e)}$	trabalhos virtuais dos esforços externos
$S, S'$	Sistema em Análise
$S_t$	Área da seção transversal
$S^I$	Interface de contato entre o concreto e o aço
$S_{T_i}, S_{T_i^j}$	Domínio no qual a componente de esforço $T_i$ é dada
$S_{\xi_i}, S_{\xi_i^j}$	Domínio no qual a componente de deslocamento $\xi_i$ é dada
$\underline{\underline{T}}^I$	Tensões de aderência
$T^j$	Densidade superficial dos esforços externos
$\hat{U}$	Movimento virtual
$\hat{U}^j$	Campo de velocidade virtual
$\hat{U}_0$	Campo de velocidade virtual de translação
$\hat{U}$	Vetor global dos deslocamentos globais
$W'_{def}$	Trabalho de deformação do movimento real

### Letras romanas minúsculas

$( )^m, ( )^r$	Índices relativos a fase matriz e fase reforço, respectivamente
$\underline{\underline{a}}^m, \underline{\underline{c}}^m$	Tensor dos módulos elásticos da fase matriz

$a^r$	Rigidez escalar da fase reforço
$c^I$	Parâmetro de interação no caso uniaxial
$\underline{e}_r$	vetor que define a direção de reforço
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	vetores unitários que definem o espaço euclidiano tridimensional
$f_c$	resistência à compressão uniaxial do concreto
$f_{cm}$	resistência à compressão uniaxial média do concreto
$f_t$	resistência à tração uniaxial do concreto
$f_{tm}$	resistência à tração uniaxial média do concreto
$f_{su}$	tensão última do aço
$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m), f^r(\underline{\underline{\sigma}}^r),$ $f^I(I)$	Critério de plasticidade da fase matriz, da fase reforço, da interação
$\underline{f}_e^{an}, \underline{f}_e^\sigma, \underline{f}_e^\Omega, \underline{f}_e^{S_T}$	Vetores de forças elementares
$g^m$	Potencial plástico
$\mathbf{k}_e$	Matriz de rigidez do elemento
$l_c$	Comprimento característico
$m(x), r(x)$	Deslocamentos na fase matriz e reforço
$p_{(i)}^{m}, p_{(i)}^{r}, p_{(i)}^{I}$	Densidade do trabalho virtual dos esforços internos associados à fase matriz, à fase reforço e à interação
$q_e$	Esforço superficial
$\underline{\underline{s}}^m$	Desviador do tensor de tensões
$s_{inc}$	Seção de uma inclusão
$s^r$	Abscissa ao longo de $\underline{e}_r$
$U$	Espaço vetorial dos movimentos virtuais
$\underline{u}_e$	Vetor de deslocamentos nodais de um elemento finito
$w_j, w_k, w_l$	Pesos associados aos pontos de Gauss

### Letras gregas minúsculas

$\alpha, \beta, c_1, c_2$	Parâmetros de Ottosen
$\varepsilon_s$	deformação específica do aço
$\varepsilon_y$	deformação específica correspondente à tensão de escoamento do aço
$\varepsilon_{sh}$	deformação específica que marca o início do endurecimento do aço
$\varepsilon_{su}$	deformação específica correspondente à tensão última do aço
$\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon^r$	Tensor de deformações da fase matriz, deformação axial do reforço
$\tilde{\varepsilon}^r$	Deformação axial sofrida pela fase reforço a escala microscópica
$\underline{\underline{\varepsilon}}_e, \underline{\underline{\varepsilon}}_{an}, \underline{\underline{\varepsilon}}_p$	Deformação elástica, anelástica, plástica
$\varepsilon(\xi)$	Energia potencial
$\varepsilon_n(\underline{U})$	Energia potencial discretizada
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tensor de deformações totais
$\delta$	Deslocamento imposto
$\eta$	Fração volumétrica
$\underline{\underline{\gamma}}^j(\underline{x})$	Aceleração da partícula da fase $j$ no ponto $\underline{x}$
$\lambda, \mu, \lambda^m, \mu^m$	Coefficientes de Lamé
$\dot{\lambda}^m, \dot{\lambda}^r$	Multiplicador plástico
$\rho^j F^j$	Densidade volumétrica dos esforços externos
$\nu, \nu^j$	Coefficiente de Poisson
$\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma^r$	Tensões parciais nas fases matriz e reforço
$\underline{\underline{\sigma}}^{trial,m}$	Previsor elástico da fase matriz
$\sigma^{trial,r}$	Previsor elástico da fase reforço
$\sigma_o^j$	Tensão limite para a fase $j$

$\sigma_l$	Tensão principal de tração
$\sigma_c$	Parâmetro de endurecimento do concreto
$\sigma_{ef}$	Tensão efetiva
$\tau^l$	Tensão de cisalhamento na interface matriz / reforço
$\underline{\xi}, \underline{\xi}^j$	Campo de deslocamento
$\underline{\xi}^d, \underline{\xi}^{d,j}$	Condições de contorno em deslocamentos
$\xi_j, \eta_k, \zeta_l$	Coordenadas dos pontos de Gauss
$\Psi, \psi^m, \psi^r, \psi^{l,r}$	Densidade de energia livre

### Letras gregas maiúsculas

$\underline{\Delta}$	Vetor de deslocamentos relativos à fase reforço em relação à fase matriz
$\Delta$	Deslocamento relativo na direção do reforço
$\underline{\Delta F}_p$	Vetor de forças plásticas
$\Delta Q_n$	Incremento de carga aplicado
$\Omega, \Omega'$	volume de um sistema, subsistema
$\Omega^m, \Omega^r$	Partícula de matriz/reforço, respectivamente
$\partial \Omega, \partial \Omega'$	Fronteira do sistema $\Omega$ , subsistema $\Omega'$
$\hat{\underline{\Omega}}^j$	Campo de rotação virtual
$\hat{\underline{\Omega}}_0, \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0$	Campo de rotação virtual constante, tensor antissimétrico associado
$\underline{\underline{\Sigma}}$	Tensor de tensões total
$\Sigma^{el}$	Limite elástico em compressão simples

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	1
1.2	MOTIVAÇÃO .....	2
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	4
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>5</b>
2.1	CONCRETO ARMADO .....	5
2.1.1	Concreto .....	5
2.1.2	Aço .....	6
2.1.3	Aderência .....	8
2.1.4	Concreto fissurado .....	9
2.1.5	Modelagem da armadura em elementos finitos .....	10
2.2	MODELOS DE MATERIAL EQUIVALENTE .....	12
2.2.1	Modelos elásticos .....	13
2.2.1.1	Terra armada .....	13
2.2.1.2	Túneis reforçados com tirantes .....	14
2.2.1.3	Fundações profundas .....	14
2.2.2	Critério de ruptura .....	15
2.2.3	Modelos elastoplásticos .....	15
2.2.3.1	Homogeneização .....	15
2.2.3.2	Modelos reológicos .....	16
2.2.4	Materiais compósitos industriais .....	17
2.2.5	Modelos multifásicos .....	18
2.2.6	Concreto armado .....	20

### 3 CONSTRUÇÃO DO MODELO MULTIFÁSICO DE MATERIAL

<b>REFORÇADO .....</b>	<b>21</b>
3.1 MÉTODO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	21
3.2 DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA DO MEIO MULTIFÁSICO .....	22
3.3 MOVIMENTOS VIRTUAIS .....	24
3.4 EXPRESSÕES DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS. ....	25
3.4.1 Esforços internos .....	25
3.4.1.1 Fase matriz.....	25
3.4.1.2 Fase reforço .....	26
3.4.1.3 Interação .....	26
3.4.1.4 Expressão global dos Esforços Internos .....	27
3.4.2 Esforços externos.....	27
3.4.3 Quantidades de Aceleração .....	30
3.5 APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	30
3.5.1 Primeiro enunciado.....	30
3.5.2 Segundo enunciado.....	31
3.6 INTERPRETAÇÃO MECÂNICA DO MODELO (BENNIS, 2002).....	33
3.7 EQUAÇÕES GLOBAIS DE EQUILÍBRIO .....	35
3.8 NECESSIDADE DE LEIS DE COMPORTAMENTO PARA O MATERIAL	
REFORÇADO .....	35
3.9 HIPÓTESE DE PEQUENAS PERTURBAÇÕES.....	36
3.10 COMPORTAMENTO ELÁSTICO-LINEAR .....	38
3.10.1 Elasticidade linear.....	38
Fase matriz.....	38
Fase reforço .....	38
Interação entre as fases .....	39
3.10.2 Identificação dos parâmetros de comportamento macroscópicos .....	39
3.10.2.1 Fase matriz.....	39
3.10.2.2 Fase reforço .....	39

3.10.2.3	Comportamento de interação.....	40
3.10.3	Comportamento Elástico Aderente.....	41
3.10.3.1	Aderência perfeita e sem escorregamento.....	41
3.10.3.2	Condição de compatibilidade de deformação.....	42
3.10.3.3	Equações de comportamento global: estado inicial natural .....	42
3.11	COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO .....	43
3.11.1	Elastoplasticidade de cada uma das fases.....	44
3.11.1.1	Matriz.....	44
3.11.1.2	Reforço .....	45
3.11.1.3	Interação .....	46
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS E VALIDAÇÃO DO PROCEDIMENTO NUMÉRICO .....</b>	<b>49</b>
4.1	MÉTODO VARIACIONAL EM DESLOCAMENTOS PARA O MEIO MULTIFÁSICO GERAL ELÁSTICO.....	49
4.1.1	Introdução.....	49
4.1.2	Princípio do mínimo de energia potencial.....	49
4.1.2.1	Posicionamento do problema de elasticidade multifásica .....	49
4.1.2.2	Princípio do mínimo em deslocamentos.....	50
4.1.3	A técnica de elementos finitos.....	52
4.1.3.1	Malha da geometria .....	52
4.1.3.2	Elementos Finitos utilizados para o modelo.....	52
4.1.3.3	Princípio do mínimo discretizado.....	54
4.1.3.4	Densidades de energia livre expressas matricialmente .....	56
4.1.3.5	Formas integrais elementares .....	61
4.1.3.6	Integração numérica .....	61
4.1.3.7	Montagem.....	62
4.2	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO MULTIFÁSICO EM ELASTOPLASTICIDADE .....	63
4.2.1	Equações do problema de evolução elastoplástica do meio multifásico .....	63
4.2.2	Discretização temporal da evolução do carregamento .....	63
4.2.3	Algoritmo de resolução global .....	64

4.2.4	Algoritmo de integração local .....	65
4.3	IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO MULTIFÁSICO ADERENTE .....	68
4.3.1	Introdução.....	68
4.3.2	Tratamento em elasticidade.....	68
4.3.2.1	Princípio da mínima energia potencial .....	68
4.3.2.2	Discretização do princípio do mínimo .....	69
4.3.3	Tratamento da plasticidade.....	71
4.3.3.1	Posicionamento do problema .....	71
4.3.3.2	Algoritmo de plasticidade modificado .....	72
4.4	PROBLEMAS MISTOS .....	73
4.5	VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO .....	74
4.5.1	Modelo com aderência perfeita .....	75
4.5.1.1	Ensaio de compressão.....	75
4.5.2	Validação do modelo com aderência imperfeita .....	87
4.5.2.1	Ensaio de compressão em deformação plana .....	87
4.5.2.2	Ensaio de arrancamento da fase reforço com engastamento .....	91
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO A ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO.....</b>	<b>98</b>
5.1	INTRODUÇÃO.....	98
5.2	MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO ...	98
5.2.1	Modelo para o concreto comprimido .....	98
5.2.1.1	Critério de ruptura .....	99
5.2.1.2	Critério de plastificação.....	99
5.2.1.3	Regra de endurecimento .....	100
5.2.2	Modelo para o concreto tracionado .....	101
5.2.2.1	O modelo de fissuras distribuídas.....	101
5.2.2.2	Critério de fissuração.....	102
5.2.2.3	Contribuição do concreto entre as fissuras ( <i>tension stiffening</i> ).....	102
5.2.2.4	Transferência das tensões de corte .....	103
5.3	MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO .....	104
5.4	VALIDAÇÃO DA MODELAGEM NUMÉRICA .....	104

5.4.1 Vigas de Bresler-Scordelis .....	105
5.4.2 Lajes de concreto armado .....	109
5.4.3 Ensaio de arrancamento.....	114
<b>6 CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....</b>	<b>120</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>123</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O século XX foi marcado pela consolidação do concreto armado como um dos mais importantes materiais da engenharia estrutural. O desenvolvimento da tecnologia do concreto e suas respectivas técnicas construtivas, em conjunto com a implementação de ferramentas sofisticadas, capazes de reproduzir com grande precisão o comportamento do concreto e do aço, permitiram explorar plenamente suas propriedades (Beber, 2003).

Entre todos os materiais utilizados na construção civil, o concreto armado ocupa um lugar de destaque. É um material formado por uma matriz cimentícia com inclusões de agregado reforçada por barras de aço dispostas de forma a absorver os esforços de tração que eventualmente se desenvolvam na estrutura.

Entre as vantagens que levaram o concreto a um domínio do mercado mundial, pode-se citar: o baixo custo, o concreto armado se revela mais econômico que as estruturas metálicas em praticamente todos os casos de aplicação, a facilidade de moldagem (que permite liberdade de concepção arquitetônica), manutenção e conservação reduzida, a grande durabilidade e a resistência a efeitos térmicos, atmosféricos e desgaste mecânico.

A ampla utilização deste material e a crescente demanda por arrojados projetos de estruturas de concreto armado têm exigido a utilização de métodos computacionais de dimensionamento cada vez mais sofisticados. O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta que tem sido alvo de muitos estudos nos últimos anos. Este método tem alcançado um alto grau de desenvolvimento na simulação do comportamento das estruturas, estabelecendo uma analogia direta entre o sistema físico real – a estrutura em análise – e o modelo idealizado, representado pela malha em elementos finitos. Os modelos numéricos, que utilizam o método dos elementos finitos, são constituídos pela união de vários modelos reológicos individuais para reproduzir o real comportamento do concreto armado: modelos constitutivos para

representar o comportamento do concreto e do aço; modelos para simular a aderência entre os dois materiais e modelos para representar os mecanismos de transferência de esforços através das fissuras.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

A capacidade de prever as características essenciais, que governam o comportamento de materiais reforçados por inclusões a partir das propriedades dos seus componentes individuais, ainda é uma das principais preocupações dos engenheiros envolvidos nos projetos de estruturas feitas a partir de materiais compósitos. Um significativo número de trabalhos, tanto teóricos como experimentais, foi dedicado a este assunto nas últimas décadas, como será explicitado no decorrer deste trabalho.

Quando o material em estudo é o concreto armado, uma das principais metodologias de simulação e análise empregada é o Método dos Elementos Finitos. Através deste método, as armaduras podem ser introduzidas nos modelos basicamente de três formas: a) através do modelo contínuo equivalente, muito utilizado no caso de placas e cascas, com densa distribuição de armaduras, empregando uma discretização em camadas; b) através do modelo discreto, em que a armadura é representada por elementos unidimensionais do tipo treliça, em geral, acoplados a elementos especiais de aderência; e c) através do modelo incorporado, onde cada barra de armadura é considerada como uma linha de material mais rígido no interior de um elemento de concreto e a matriz de rigidez total é obtida pela soma das matrizes de rigidez da armadura e do concreto. No entanto estas técnicas podem trazer dificuldades quando o número de barras a considerar é grande, tanto do ponto de vista de elaboração da malha (tridimensional), quanto do custo computacional, em especial quando é levada em consideração a não linearidade do comportamento dos materiais.

Uma modelagem chamada de multifásica foi recentemente desenvolvida (Sudret, 1999) e objetiva analisar o comportamento de estruturas em materiais reforçados por inclusões lineares contínuas, como será detalhado no decorrer deste trabalho. Salienta-se que os tempos de cálculo com esta modelagem são consideravelmente reduzidos em relação aos habitualmente envolvidos em uma simulação numérica direta com discretização das armaduras, do concreto e da aderência entre armaduras e concreto.

Conforme esta modelagem, o material compósito reforçado é tratado como a superposição geométrica de dois meios contínuos heterogêneos, denominados de *fases*:

- Uma fase *matriz* que representa o material não reforçado (solo ou concreto);
- Uma fase *reforço* que é o equivalente contínuo 3D da família de inclusões de reforço.

Devido à reduzida fração volumétrica dos reforços (para o concreto armado e estruturas geotécnicas), as propriedades da fase matriz são simplesmente as do material não reforçado, enquanto os esforços internos (tensões), relativos à fase reforço, podem ser interpretados como densidades, por unidade de superfície transversal, dos esforços desenvolvidos nas inclusões, consideradas individualmente como vigas. Exceto no caso de inclusões de grande diâmetro, tais como aquelas empregadas em certas técnicas de reforço de estruturas geotécnicas, onde é necessário levar em conta os esforços de cisalhamento e de flexão, um modelo simplificado, incorporando apenas os esforços uniaxiais de tração e compressão, é mais do que suficiente para as aplicações visadas.

Este modelo vem sendo objeto, há vários anos, de desenvolvimentos numéricos, empregando o método dos elementos finitos em elastoplasticidade. Os trabalhos realizados anteriormente deram origem a uma ferramenta de cálculo que permite tratar os problemas bidimensionais (situações planas ou sólidos axissimétricos), no caso onde apenas os esforços tração-compressão nos reforços são levados em conta, com a hipótese de aderência perfeita entre os reforços e a matriz. As aplicações realizadas até o presente momento são relativas ao domínio da geotecnia.

A proposta central deste trabalho de doutorado consiste em adaptar este tipo de modelagem, realizar as simplificações, considerações e ajustes em termos de tratamento numérico, com o objetivo de aplicar o método a estruturas de concreto armado. Tal adaptação necessita levar em consideração um certo número de especificidades em relação ao caso dos solos reforçados:

- a) A existência de ao menos duas direções de reforço associadas às armaduras frequentemente colocadas na forma de malha ortogonal. É então necessário elaborar um modelo *trifásico*, no qual a fase matriz representa o concreto, enquanto cada família de armadura está representada por uma fase.
- b) O desenvolvimento de um modelo que considere o deslizamento relativo entre as armaduras e o concreto (aderência imperfeita). Tal característica se traduz pela

introdução de cinemáticas diferentes para cada uma das três fases e de uma lei de interação do tipo elastoplástica entre a fase matriz e as diferentes fases de reforço.

- c) A implementação de um modelo constitutivo adequado para o concreto armado, considerando o comportamento do material submetido à compressão e à tração.

Considerando estas diferentes peculiaridades, o modelo será aplicado às configurações tridimensionais para o cálculo de vigas e lajes de concreto armado sob solicitações de flexão e em um ensaio de arrancamento (pull-out test).

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este texto está organizado em seis capítulos. No Capítulo 2 é feita uma breve revisão sobre as características básicas do concreto armado, uma descrição ao longo do tempo do desenvolvimento dos métodos de homogeneização e suas aplicações no ramo da geotecnia.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação da Modelagem Multifásica a partir do princípio dos trabalhos virtuais, as leis de comportamento elástico e elastoplástico e o caso particular da aderência perfeita.

No Capítulo 4 é apresentada a implementação da modelagem proposta em um código numérico baseado no método dos elementos finitos, considerando a não-linearidade dos materiais. Neste capítulo ainda é realizada uma validação do procedimento numérico a partir do comparativo com problemas cuja solução analítica é conhecida. Estas comparações levam em conta tanto o modelo com aderência perfeita quanto o modelo que permite o deslizamento entre as barras de aço e a matriz de concreto.

No Capítulo 5 é apresentado o comportamento constitutivo do concreto armado, sendo descrito o modelo adotado para o concreto íntegro e o modelo para o concreto fissurado, utilizando um modelo de fissuras distribuídas. São apresentados comparativos do modelo numérico desenvolvido com estudos experimentais envolvendo estruturas reais de concreto armado.

O Capítulo 6 é dedicado às conclusões e sugestões para desenvolvimentos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 CONCRETO ARMADO

#### 2.1.1 Concreto

O concreto é um material formado pela mistura de cimento, água e agregados, que apresenta um comportamento complexo, com elevada não-linearidade decorrente da fissuração, o que dificulta uma simulação numérica que reproduza o desempenho do mesmo ao longo de todo o processo de carregamento. Mesmo antes da aplicação de cargas à estrutura, o material já apresenta microfissuras que tendem a aumentar de tamanho e quantidade à medida que a estrutura vai sendo colocada em carga. Esta tendência contribui para o comportamento não-linear do concreto. Até um limite de cerca de 30% ( $0,3 f_c$ ) de sua resistência à compressão uniaxial, observa-se um comportamento elástico-linear. A partir deste limite, as microfissuras começam a aumentar e o comportamento não-linear torna-se mais evidente. Após alcançar o nível de tensão de  $0,75 f_c$ , o comportamento do concreto torna-se marcadamente não-linear, até que se atinja a tensão de ruptura, onde o material perde a capacidade de resistir a incrementos de tensão (Bono, 2008). A Figura 2.1 representa este comportamento do material submetido à compressão.

O comportamento do concreto armado em ensaios de tração uniaxial apresenta diferenças importantes em relação ao comportamento sob compressão uniaxial. Na resposta à tração, um comportamento frágil é observado. O limite de elasticidade linear geralmente fica entre 60 e 80% da resistência à tração,  $f_t$ . Da mesma forma que a compressão, a partir deste limite ocorre uma perda progressiva de capacidade de carga que dependerá de uma série de fatores como as propriedades do concreto e as dimensões do corpo de prova ensaiado (vide Figura 2.2).

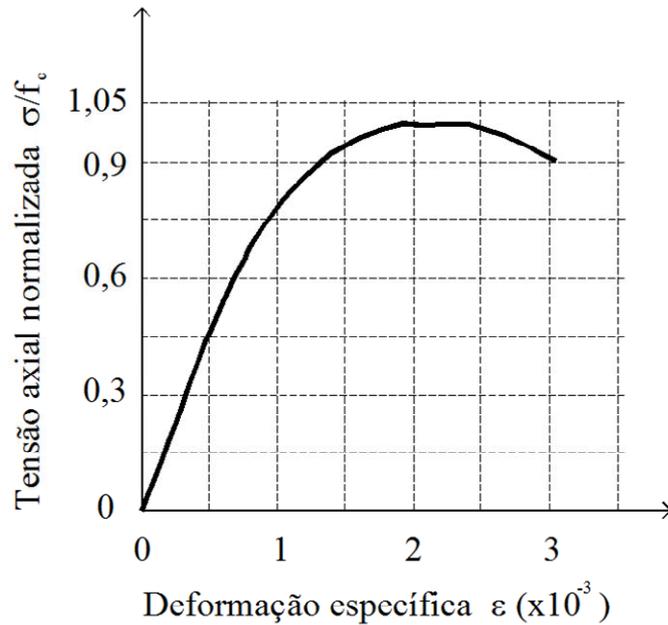


Figura 2.1 – Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial (Kupfer et al, 1969).

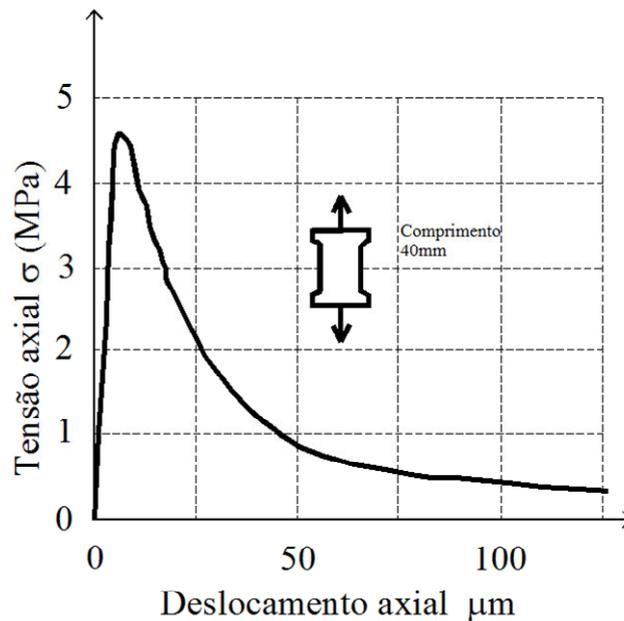


Figura 2.2 – Curva tensão-deformação para o concreto sob tração uniaxial (Peterson, 1981).

### 2.1.2 Aço

De uma forma geral, as barras de aço suportam esforços em suas direções axiais, ou seja, as solicitações perpendiculares ao eixo das armaduras são desprezadas. Assim é suficiente o conhecimento das propriedades das barras relativas a um estado de tensão uniaxial. As

características das barras de aço solicitadas por cargas axiais podem ser obtidas a partir de ensaios experimentais, sendo que a forma do diagrama tensão-deformação é influenciada pelos processos de obtenção e tratamento dos aços. Cita-se a ductilidade, o limite de escoamento e o limite de resistência como algumas das propriedades importantes em aços para concreto armado.

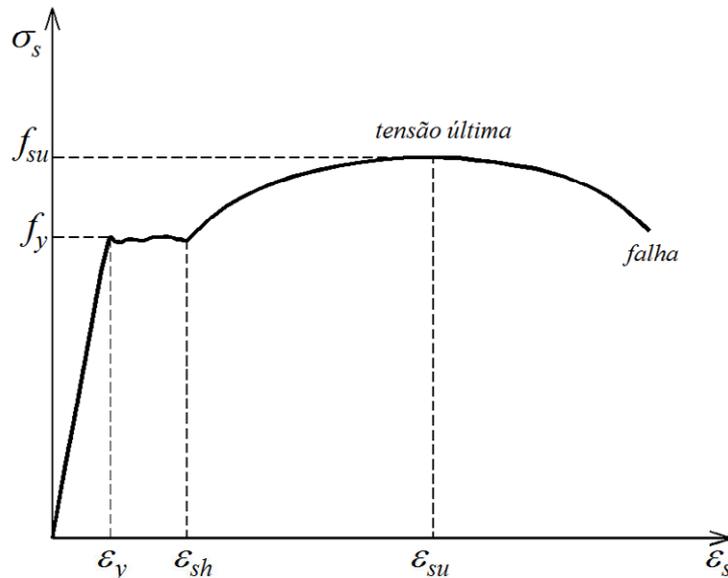


Figura 2.3 – Diagrama tensão-deformação para o aço com patamar de escoamento (Kwon, 2000)

Na Figura 2.3, mostra-se uma típica curva tensão-deformação do aço solicitado por cargas monotônicas. Este comportamento pode ser representado por quatro regiões bem determinadas:

1. Região elástica, definida por  $0 < \epsilon_s < \epsilon_y$ , onde  $\epsilon_y$  representa a deformação específica proporcional correspondente à tensão de escoamento do aço  $f_y$ .
2. Um patamar de escoamento definido por  $\epsilon_y < \epsilon_s < \epsilon_{sh}$ , onde  $\epsilon_{sh}$  marca o começo da região de endurecimento. O patamar de escoamento, mostrado na Figura 2.3 é basicamente admitido como horizontal apesar de serem observadas pequenas flutuações das tensões. A tensão  $f_y$  é calculada como um valor médio destas flutuações.
3. Uma região de endurecimento, definida por  $\epsilon_{sh} < \epsilon_s < \epsilon_{su}$ , onde  $\epsilon_{su}$  é a deformação específica correspondente à tensão última  $f_{su}$ ;

4. Uma região de amolecimento depois que foi atingida a tensão última do material, definida por  $\varepsilon_s > \varepsilon_{su}$ . Nesta região ocorre uma perda da capacidade resistente até ocorrer a falha do material.

Em geral, devido a simplificações, para cargas monotônicas de tração, normalmente o aço é representado como um material *elastoplástico perfeito*, ou com *endurecimento linear*, conforme mostrado na Figura 2.4a e na Figura 2.4b, respectivamente. Apesar de, em geral, serem observadas diferenças entre o comportamento à tração e à compressão do aço, é comum serem adotadas curvas idênticas para ambas as situações.

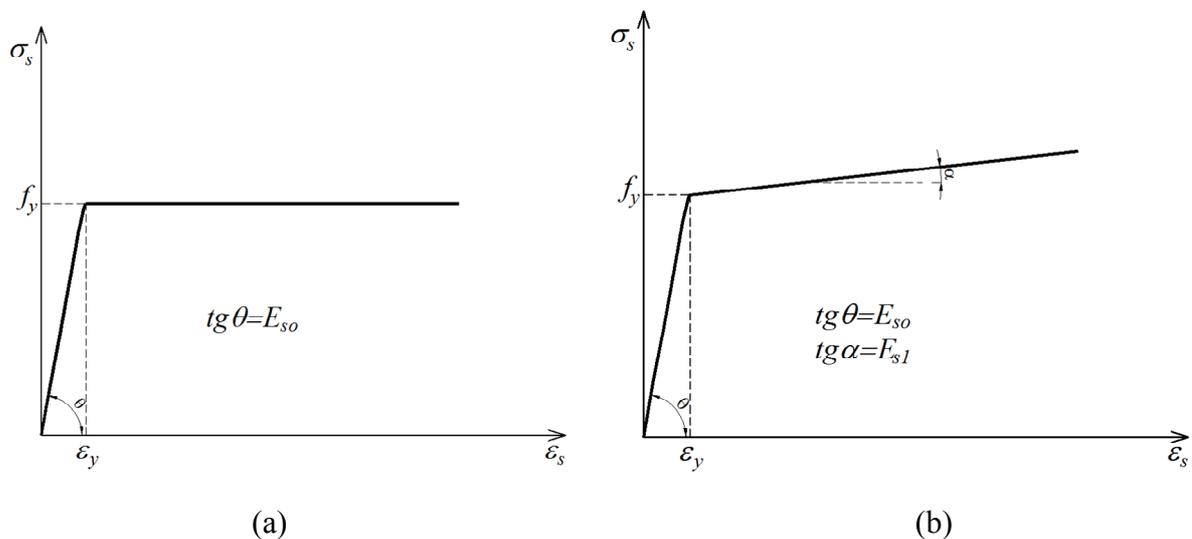


Figura 2.4 – Diagrama tensão-deformação do aço (a) aproximação elastoplástica perfeita e (b) aproximação elástica com endurecimento linear.

### 2.1.3 Aderência

O comportamento das estruturas de concreto armado é bastante influenciado pela interação entre o concreto e o aço. Entre estes dois materiais ocorre a transmissão de esforços na direção longitudinal das barras pelo mecanismo de aderência. A aderência torna-se mais evidente quando ocorre fissuração no concreto. Quando a resistência à tração do concreto é excedida em uma estrutura de concreto armado, considera-se que a peça fissurou e que apenas a armadura contribui para a resistência aos esforços de tração. No entanto, em uma região entre duas fissuras, a aderência entre o concreto e o aço restringe o alongamento da armadura e, conseqüentemente, parte do esforço de tração normal ao plano da fissura é transferido ao concreto. Este mecanismo de contribuição do concreto para a rigidez do elemento, possível

quando existem armaduras aderentes, é chamado de enrijecimento à tração (*tension stiffening*).

A incorporação da aderência no cálculo por elementos finitos depende da maneira como os elementos de armadura são conectados aos elementos de concreto. Existem duas maneiras principais para modelar a aderência entre o concreto e o aço: através do uso de *elementos especiais de aderência* para conectar os elementos de aço aos elementos de concreto e através da *hipótese de aderência perfeita* entre as barras de aço e o concreto, onde os elementos são conectados diretamente. Na primeira alternativa, as propriedades de aderência são modeladas na relação tensão-deslocamento dos elementos de aderência. Geralmente, o uso destes elementos especiais envolve esforço computacional adicional e, desta maneira, são normalmente usados para análise de problemas específicos. Na segunda alternativa é possível considerar o mecanismo de acoplamento entre os materiais através da modificação das leis constitutivas dos materiais (concreto ou do aço), incluindo assim o efeito de enrijecimento à tração.

#### 2.1.4 Concreto fissurado

A propriedade mais marcante do concreto, para definição do seu comportamento estrutural é a sua reduzida resistência à tração frente à sua resistência à compressão. O processo de evolução da fissuração em estruturas de concreto, após a aplicação da carga, é caracterizado pelo crescimento das microfissuras através da pasta de cimento, com eventual convergência destas em macrofissuras. Estas macrofissuras permanecem descontínuas durante um período, permitindo a transferência de esforços. Este processo de evolução da fissuração faz com que o concreto não rompa quando a tensão máxima é alcançada, mas sim que sofra um decréscimo gradual de tensão com o aumento da deformação, chamado amolecimento. As fissuras reduzem consideravelmente a rigidez da estrutura; quando elas se formam, a distribuição interna das tensões é enormemente modificada e o concreto começa a apresentar comportamento não-linear.

Qualquer estudo para a determinação das tensões e deformações específicas em uma peça deve, necessariamente, ser capaz de modelar de forma adequada a transferência de esforços através das fissuras. Esta transmissão de esforços é um fenômeno complexo que envolve o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de armadura.

No contexto do Método dos Elementos Finitos, os dois procedimentos de modelagem mais utilizados na literatura para representar a fissuração são: modelo de fissuras discretas e modelo de fissuras distribuídas, ilustrado pela Figura 2.5 (Claure, 1994).

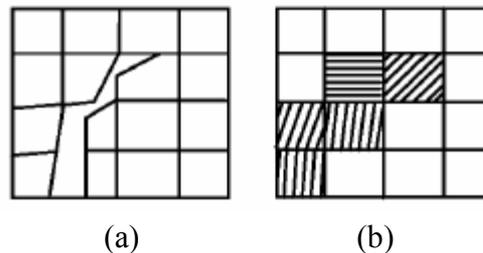


Figura 2.5 – Modelos empregados para a simulação de fissuras.  
(a) Modelo discreto e (b) Modelo distribuído (Hinton, 1988)

O modelo de fissuras discretas representa cada fissura individualmente, como uma descontinuidade real da malha de elementos finitos. Esta aproximação foi primeiramente usada por Ngo e Scordelis (1967) para analisar vigas de concreto armado. Em tal estudo, as fissuras foram modeladas por separação dos nós que inicialmente ocupavam a mesma posição no espaço. Uma restrição deste modelo é que as fissuras devem se formar apenas ao longo da borda dos elementos finitos e, desta forma, a resposta se torna muito dependente da malha. Nesta modelagem, após a formação da fissura, a topologia da malha varia, exigindo procedimentos para a sua atualização, demandando um enorme esforço computacional.

Já o modelo de fissuras distribuídas não leva em conta a descontinuidade real da malha. Supõe-se que o concreto fissurado se mantém contínuo e as propriedades do material são modificadas de maneira a considerar o dano devido à fissuração. Este tipo de modelo é usado na maioria das aplicações da engenharia estrutural. Esta aproximação é atrativa computacionalmente, uma vez que a topologia da malha não muda durante a análise e somente é necessário atualizar a relação tensão-deformação quando ocorrer a fissuração. No entanto, é importante salientar que alguns parâmetros deste modelo também dependem da geometria da malha utilizada.

### 2.1.5 Modelagem da armadura em elementos finitos

Para a análise não-linear de estruturas de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos é necessária uma representação simples e precisa da armadura. Existem, basicamente, três métodos para a inclusão das barras de armadura em um modelo de elementos finitos: *modelo discreto*, *modelo distribuído* e *modelo incorporado*. (citações)

No *modelo discreto* utilizam-se elementos de barra para representar a armadura, com os seus nós das extremidades coincidindo com os da malha de elementos finitos de concreto. Esta forma de representação tem a desvantagem de limitar a disposição das barras de armadura com a malha de elementos de concreto. Além do mais, como os elementos de barra apresentam um campo de deslocamentos linear, para que haja a compatibilidade de deslocamentos, os elementos finitos que representam o concreto ficam limitados a elementos lineares (Bono, 2008). Este modelo está ilustrado na Figura 2.6.

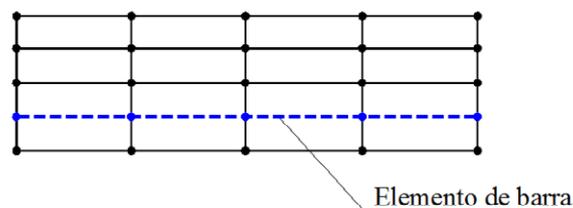


Figura 2.6 – Modelo discreto para armaduras.

No *modelo distribuído* considera-se o aço uniformemente distribuído no elemento de concreto. Cada conjunto de barras de armadura é substituído por uma camada bidimensional com espessura e áreas equivalentes. Para este tipo de representação, admite-se aderência perfeita entre aço e concreto, sendo apropriada para o caso onde a armadura está densamente distribuída, como no caso de placas e cascas, conforme ilustrado pela Figura 2.7.

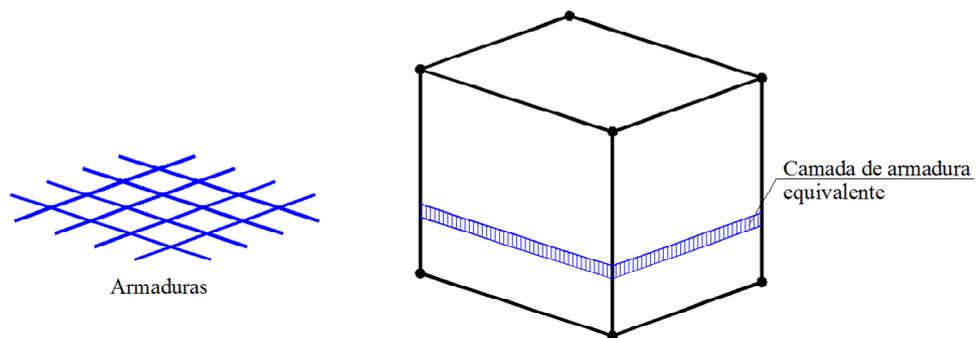


Figura 2.7 – Modelo distribuído para armadura.

Já no *modelo incorporado* (Elwi and Hrudehy, 1989) as barras de armadura são consideradas como linhas de um material mais rígido no interior do elemento de concreto. Os deslocamentos do elemento da armadura são iguais aos deslocamentos do elemento isoparamétrico de concreto em que se encontra disposta, resultando em um campo de deslocamentos único no domínio do elemento. Sendo assim, pode-se colocar a barra de armadura em uma posição arbitrária dentro do elemento de concreto, sem precisar introduzir incógnitas adicionais no sistema de equações de equilíbrio da estrutura, Figura 2.8.

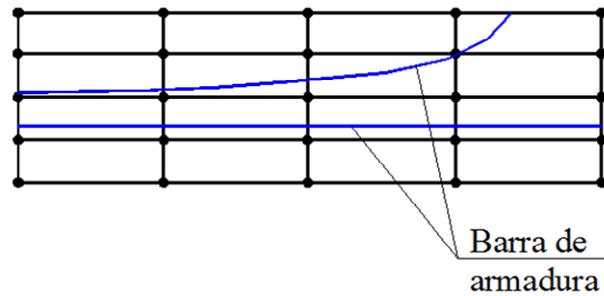


Figura 2.8 – Modelo incorporado para armadura.

## 2.2 MODELOS DE MATERIAL EQUIVALENTE

Genericamente, considera-se compósito todo o material multifásico, artificialmente construído, que apresente uma significativa parcela das propriedades de todos os materiais que o integram, de forma que a melhor combinação destas propriedades seja alcançada. Entretanto, não existe uma definição universalmente aceita para materiais compósitos. Segundo Beber (2003), muitos compósitos são formados pela combinação de apenas dois componentes; um denominado matriz, que é contínua e envolve completamente o outro componente, chamado comumente de *disperso*. Neste trabalho, serão utilizados os termos *matriz* e *inclusões*. As propriedades dos compósitos são função da natureza destes componentes, de suas proporções relativas e da geometria das inclusões. A interação entre matriz e partícula, nos compósitos reforçados com partículas, pode ou não ocorrer em nível atômico ou molecular. A natureza desta interação é que determina o mecanismo de reforço. De uma maneira geral, o concreto é um compósito que consiste de partículas (agregados miúdo e graúdo) que são unidas através de uma matriz (pasta de cimento). Esta interação não ocorre em nível atômico ou molecular e como as partículas apresentam maior rigidez, seu efeito principal é restringir o movimento da matriz nas zonas adjacentes a cada uma destas partículas (Callister, 1997 apud Beber, 2003). O concreto armado também se caracteriza como um compósito, que combina a resistência à compressão do concreto com a elevada resistência à tração do aço, produzindo estruturas de grande eficiência.

Subsidiando o trabalho, descrevem-se, nesta seção, trabalhos que consideraram material reforçado como um compósito homogêneo na escala da estrutura (escala macroscópica). Em Sudret (1999) é apresentada uma revisão onde são abordados sucessivamente trabalhos dedicados ao comportamento elástico, ao estabelecimento e utilização de um critério de

ruptura e à apresentação de modelos não-lineares. Conforme será visto nos itens a seguir, uma importante limitação é que os trabalhos se limitam quase que exclusivamente ao campo da geotecnia.

## 2.2.1 Modelos elásticos

### 2.2.1.1 Terra armada

Historicamente, considera-se um modelo geotécnico de *terra-armada* como a primeira modelagem do tipo material equivalente. Harrison e Gerrard (1972) investigaram um material multicamada no qual as armaduras são rígidas enquanto o solo é deformável. A partir do método de homogeneização foram obtidos os módulos elásticos do material.

Romstad et al. (1976), inspirando-se nos trabalhos de Pagano (1969, 1970) sobre a representação numérica de materiais compósitos, propõem um método de homogeneização sobre uma célula base contendo uma armadura. A partir de hipóteses heurísticas simples sobre as deformações e tensões em cada fase constituinte, os autores obtiveram um comportamento elástico isotrópico transversal na direção do reforço. Fica evidente neste trabalho que a simples consideração do esforço normal no reforço é suficiente para reproduzir o comportamento da terra armada.

Herrman e Al-Yassin (1978) estenderam a modelagem descrita acima para levar em conta o deslizamento potencial das armaduras com relação ao solo. Para tanto, introduziram, em um modelo em elementos finitos, um grau de liberdade suplementar para cada nó. Este grau de liberdade correspondia ao movimento relativo, na direção de reforço, das inclusões em relação ao solo. Este movimento é acoplado ao do solo por intermédio de saltos não-lineares, do tipo elástico perfeitamente-plástico, com o limite elástico correspondendo ao máximo atrito mobilizável na interface matriz-inclusão.

Nestes modelos, a não linearidade do solo é levada em conta por meio da consideração de uma elasticidade não-linear e os cálculos são feitos de forma incremental. Modificando o modelo de Harrison e Gerrard (1972), em Gerrard (1982) foram reencontrados os resultados de Romstad et al.(1976), estendendo-os ao reforço multidirecional.

Mais recentemente, Jommi et al. (1995) trataram, com a teoria da homogeneização, um modelo multicamada solo/geotêxtil. Negligenciando os escorregamentos da interface matriz/inclusões, estabeleceram, em deformações planas, as relações de continuidade entre as duas camadas para certos componentes do tensor de tensões e de deformações. Identificando

o trabalho de deformação macroscópica, obtiveram o comportamento elástico do meio equivalente. Para Jommi et al. (1995) a homogeneização corresponde à diluição do reforço em todo o volume de solo, obtendo-se, desta forma, em cada ponto, duas partículas que interagem pelas equações de equilíbrio e continuidade.

Esse conjunto de modelos pode ser questionado pela forma discutível em que é levada em conta a não-linearidade do solo. Com frequência os autores fazem referência à necessidade de introduzir um comportamento elastoplástico.

#### 2.2.1.2 Túneis reforçados com tirantes

Para emprego na análise de túneis, Wullschläger e Natau (1983) determinaram, por via experimental, o comportamento elástico do material *rocha reforçada com tirantes*. Essas características foram introduzidas em um código de cálculo por elementos finitos em elastoplasticidade. A análise destes resultados por Greuell (1993) evidencia que os resultados são completamente concordantes, no domínio elástico, com os modelos de terra armada.

De maneira independente, modelos reológicos propostos para maciços fraturados (Gerrard e Pande, 1985) foram estendidos para levar em conta os tirantes de reforço (Sharma e Pande, 1988; Chen e Egger, 1999). O *material rocha + juntas + tirantes* foi modelado por um conjunto de saltos, vínculos e amortecedores. O tensor de tensões foi decomposto aditivamente entre a rocha fraturada e os cabos, na proporção das frações volumétricas de cada componente.

Mais recentemente, um modelo elastoplástico mais completo para solos e rochas reforçadas foi formulado e implementado numericamente para a análise de túneis por Bernaud et al. (1995, 2009).

#### 2.2.1.3 Fundações profundas

Os trabalhos que utilizam uma abordagem do tipo *material compósito* para modelar a zona de implantação das estacas são bastante limitados. O conceito de estaca equivalente para a montagem do grupo de estacas é, contudo, de certa forma antigo (Poulos e Davis, 1980). O módulo de elasticidade equivalente é simplesmente dado pela lei das misturas.

Dois tipos de aplicações são então possíveis. Em primeiro lugar, pode-se utilizar simplesmente os resultados analíticos devidos a uma estaca isolada com propriedades equivalentes (Randolph, 1994), obtendo apenas uma estimativa do deslocamento médio do grupo de estacas. Em outro momento, este raciocínio foi utilizado para substituir um grande

grupo de estacas por um número bem menor de estacas equivalentes frente à aplicação de um método híbrido (Clancy e Randolph, 1996).

### 2.2.2 Critério de ruptura

Com vistas à homogeneização de meios periódicos, de Buhan (1986) estabeleceu um critério de ruptura para “materiais multicamada” e aplicou o mesmo ao cálculo da estabilidade de um talude reforçado e no cálculo da capacidade portante de uma fundação sobre uma região reforçada. Estes trabalhos tiveram continuidade, sob um ponto de vista analítico, nos trabalhos de Siad (1987) e de Buhan e Salençon (1987) e, sob um ponto de vista numérico, no estudo de Abdi (1992). Verzura (1993) estendeu o cálculo do critério a duas direções de reforços ortogonais.

Nestes trabalhos foram feitas comparações com dados experimentais obtidos para o material *terra armada* e provenientes da ruptura de modelos reduzidos de estruturas. Foi observada boa concordância, sendo que os valores calculados apresentaram diferenças inferiores a 10%, em relação aos resultados experimentais.

Sob o mesmo enfoque, de Buhan e Talercio (1991) determinaram um critério de ruptura para compósitos com fibras longas. Seus resultados são semelhantes aos obtidos no quadro da análise limite em tensões planas por McLaughlin e Batterman (1970) e por Majumdar e McLaughlin (1975). Os autores propuseram uma decomposição aditiva do tensor de tensões macroscópicas em um termo associado à matriz e um termo uniaxial associado às fibras.

A formulação do critério de ruptura destacou *as componentes uniaxiais* de tração nas inclusões. Levando em conta as diversas validações, este ponto aparece como central em toda modelagem de material reforçado.

### 2.2.3 Modelos elastoplásticos

#### 2.2.3.1 Homogeneização

No começo dos anos 80, Sawicki (1981, 1983a) propôs um modelo multicamada para um material elastoplástico. A partir da decomposição do tensor de tensões macroscópicas nas tensões microscópicas associadas a cada constituinte, ponderados pela fração volumétrica respectiva, foi possível determinar o domínio elástico inicial e descrever, a seguir, o endurecimento do comportamento macroscópico.

Sawicki (1983b) se interessou, em particular, pelo tensor de tensões associado a uma contribuição uniaxial do reforço. A partir de um modelo plástico, o mesmo efetua uma avaliação da capacidade portante de um reforço maciço. Extensões deste modelo e numerosas aplicações foram feitas pelo autor nos anos seguintes. Uma revisão destes trabalhos pode ser encontrada em Sawicki (1998). É necessário notar que os resultados reeditam, em muitos casos, àqueles obtidos por meio de homogeneização com cálculo à ruptura, mencionados acima.

Seguindo a linha de trabalho de Le Nizerhy (1976), os modelos elastoplásticos obtidos por homogeneização periódica de um material multicamada são igualmente feitos por El Omri e Sidorff (1991); El Omri (1992); Pruchnicki (1991), Pruchnicki e Shahrour (1994).

Os modelos multicamadas não traduzem corretamente o aspecto uniaxial das inclusões de reforço. Além disso a formulação completa é possível apenas pelos critérios de plasticidade simples (Von Mises ou Drucker-Prager). Levar em conta uma lei de escoamento plástico não associado para o solo (geotecnia) é complicado. Além disso, a extensão a várias direções de reforço é quase impossível.

No domínio dos túneis, Greuell (1993) utiliza um critério de ruptura para rochas reforçadas que tem como base as características das rochas e do reforço (cabos), como estabelecido por de Buhan (1986) e Siad (1987). É construída assim uma lei de comportamento elastoplástico utilizando a elasticidade formulada por Gerrard (1982) e o critério de ruptura precedente aplicado como um critério de plasticidade perfeita com regra de escoamento associada. Utilizando este modelo, Greuell aplica o método de convergência-confinamento analiticamente e efetua um estudo paramétrico sobre a influência do reforço. Bernaud et al (1995) introduz o critério de plasticidade homogeneizado em um código de cálculo em elementos finitos e corrobora os resultados obtidos por Greuell. Cálculo axissimétricos com ativação/desativação de elementos são igualmente efetuados para simular o processo de escavação.

#### 2.2.3.2 Modelos reológicos

É interessante mencionar uma abordagem do tipo material equivalente completamente independente baseada nos modelos reológicos. É notada sua utilização para a modelagem de rochas fraturadas reforçadas por tirantes. A modelagem do solo reforçado por estacas de rocha (colonne balastées) foi igualmente abordada por Gerrard et al. (1984) e por Lee e Pande (1998).

Estes modelos mecanicamente coerentes permitem incorporar todas as características essenciais que faltam às abordagens por homogeneização citadas anteriormente. Não foi observada nenhuma restrição sobre as leis de comportamento associadas a cada constituinte. Contudo apenas a validação por experimentos garantiria a aplicabilidade dos modelos e os exemplos de aplicação são raros.

Uma análise dos métodos de cálculo disponíveis mostrou que ou não são adequados (métodos semi-empíricos) ou são impraticáveis devido ao elevado custo computacional (elementos finitos) no caso de estruturas reforçadas por um grande número de inclusões. Neste contexto, as abordagens do tipo material equivalente apresentam resultados promissores com a ressalva de que estão aplicadas de maneira muito fragmentada e em diferentes domínios.

#### 2.2.4 Materiais compósitos industriais

O emprego da perspectiva de material equivalente é naturalmente atraente no estudo de trabalhos que abordam o comportamento de compósitos industriais formados por uma matriz reforçada por fibras. Este assunto é brevemente abordado aqui.

A determinação das propriedades elásticas dos materiais compósitos de fibras longas a partir das propriedades de seus constituintes é objeto de numerosos trabalhos de pesquisa desde o começo dos anos 60, quando o emprego destes se desenvolveu fortemente na indústria. Desde esta época surgiram três tipos de aproximação:

- Uma aproximação variacional (Hashin e Shtrikman, 1963; Hill, 1964) fornecendo um enquadramento das propriedades equivalentes do compósito (limites);
- Modelos simplificados chamados de *estimativas* das propriedades, como o modelo CCA – *Composite Cylinder Assemblage* (Hashin e Rosen, 1964). Neste modelo, supõe-se que as fibras possuem dimensão variável, mas ocupam uma fração volumétrica constante em todo o volume elementar representativo, isto permite admitir que as propriedades equivalentes são aquelas de um único cilindro compósito, que possui uma solução analítica.
- Métodos de estimativas em micromecânica (Zaoui, 1998). O esquema autoconsistente foi aplicado primeiro por Hill (1965) (inclusão de fibra em um meio equivalente) seguida de uma versão enriquecida por Hermans (1967); Christensen e Lo (1979) (cilindro compósito incluso no meio equivalente). Pode-se citar igualmente os trabalhos de Tandon e Weng (1984).

Estas abordagens, ainda que inspiradas em considerações mecânicas muito diferentes, fornecem resultados muito próximos, como assinala Hashin (1983) em uma revisão da literatura. Tem-se, por exemplo, uma igualdade nas expressões dos módulos obtidos para o modelo CCA com os limites inferiores de Hashin-Shtrikman.

### 2.2.5 Modelos multifásicos

Chama-se classicamente de *teoria das misturas* as modelagens de meios contínuos com várias fases. Esta teoria associa em cada ponto as partículas de cada material que constitui as misturas. O primeiro modelo geral foi proposto por Truesdell e Toupin (1960). A questão das leis de comportamento suscitou numerosos trabalhos nos anos 60. Além disso, os autores enriqueceram a modelagem levando em conta os modelos microestruturais para os diferentes tipos de partículas. Bedford e Drumheller (1983) fizeram uma notável revisão histórica das diferentes teorias e os seus domínios de aplicação. Encontraram um grande número de trabalhos, que conduzem a equações constitutivas extremamente complexas (e que requerem, em particular, a determinação de um número significativo de parâmetros) e que permaneceram sem aplicações.

Contudo, a última parte de sua revisão é dedicada à elaboração de um modelo bifásico para materiais compósitos (Bedford e Stern, 1971). As aplicações visadas são a propagação das ondas nos compósitos estratificados ou fibrosos, que é muito mal modelada por um meio contínuo que tem as propriedades estáticas equivalentes. Os autores atribuem a Postma o primeiro modelo de material compósito bifásico, modelo que utiliza uma cinemática única para as duas fases.

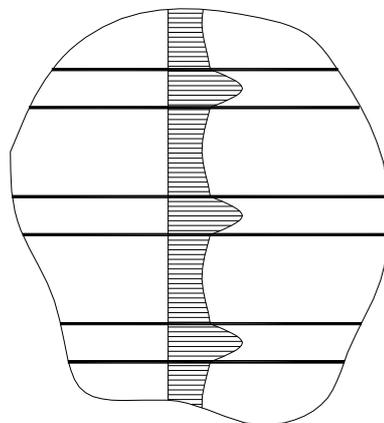


Figura 2.9 – Propagação de ondas longitudinais em um compósito estratificado (Bedford e Stern, 1972).

Observando um compósito estratificado no qual se propaga uma onda longitudinal, Bedford e Stern (1972) constataram que, se o deslocamento longitudinal é contínuo, o valor médio em cada fase pode ser muito contrastante. Eles introduzem, então, um modelo bifásico em que as cinemáticas são distintas. As equações de equilíbrio são obtidas de forma clássica com os autores utilizando o quadro termodinâmico para construir as leis de comportamento. As hipóteses principais, que distinguem este modelo da teoria clássica das misturas, são as seguintes:

- A interação entre as duas fases é limitada a partículas congruentes, ou seja, ocupando a mesma posição geométrica na posição inicial (na teoria clássica das misturas, a interação liga as partículas que possuem a mesma posição na configuração atual). Esta questão é ditada pela *hipótese de aderência perfeita* entre as camadas do compósito estratificado;
- A energia interna em cada fase depende apenas das variáveis de deformação desta fase e da temperatura. Esta hipótese se deve ao fato dos constituintes não serem misturados aleatoriamente como é o caso das misturas de fluidos imiscíveis.

Os resultados para propagação de onda, comparado à resposta exata, são notáveis. Quanto mais contrastantes forem as características elásticas dos constituintes, melhores os resultados. O modelo inicial foi concebido pelos autores nos anos 70, mas sempre tomando uma ótica de aplicação à propagação de ondas.

A mecânica dos meios porosos apresentada por Coussy (1991) é baseada nos trabalhos precursores de Biot (1941, 1955) e se apoia igualmente na teoria das misturas. Trata-se de uma abordagem meramente macroscópica que supõe a superposição em cada ponto material de duas partículas, respectivamente do esqueleto e do fluido. As duas partículas possuem cinemáticas distintas e é adotada, de forma natural, uma descrição lagrangeana para os movimentos do esqueleto e euleriana para os movimentos do fluido.

Um modelo multifásico chamado de *material multicamada* foi proposto por Caron (1993) e Chabot (1997) para os compósitos estratificados. O número de camadas do compósito estratificado define o número de partículas superpostas em cada ponto. Várias alternativas de modelagem existem, de acordo com a precisão da descrição dos esforços internos em cada camada.

Sudret (1999) apresenta um código em elementos finitos para a modelagem multifásica de estruturas reforçadas por inclusões. A validação do modelo é feita para estruturas geotécnicas

como túneis reforçados com cabos e redes de estacas de fundação. É levada em conta uma aderência perfeita entre o solo e os reforços. Bennis (2002) desenvolveu um modelo multifásico para o cálculo de estruturas reforçadas por inclusões levando em conta a interação matriz / inclusão. Hassen (2006) implementou um modelo considerando inclusões rígidas, ou seja, com a capacidade de absorver esforços de cisalhamento e flexão.

### 2.2.6 Concreto armado

Neste contexto, Oliver *et al* (2008) e Manzoli *et al* (2008) propõem uma modelagem para análise bidimensional e tridimensional de elementos em concreto armado, a partir de uma descrição baseada nos conceitos da teoria das misturas. Para modelar a falha material os autores empregam a teoria conhecida como Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (*Continuous Strong Discontinuity Approach – CSDA*). A modelagem adotada assume que todos os constituintes estão submetidos ao mesmo campo de deformações, diferenciando-se da modelagem empregada neste trabalho, que assume cinemáticas diferentes para cada fase, tornando possível incorporar de forma consistente a interação matriz/reforço.

### 3 CONSTRUÇÃO DO MODELO MULTIFÁSICO DE MATERIAL REFORÇADO

#### 3.1 MÉTODO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

As equações de movimento de um sistema mecânico são obtidas de forma clássica a partir do princípio fundamental da dinâmica. O *método dos trabalhos virtuais* é uma abordagem que apela para a intuição ao nível da cinemática do sistema estudado. Encontra-se uma apresentação geral e sua aplicação a modelagem do meio contínuo em Germain (1986) e Salençon (1996a). Articula-se em três etapas o que será apresentado.

- Define-se, em primeiro lugar, o sistema mecânico estudado  $S$  e seus subsistemas  $S'$ .
- Define-se o espaço vetorial  $u$  dos movimentos virtuais (m.v) denotados  $\hat{U}$  e o dos movimentos virtuais rígidos (m.v.r.). Os movimentos reais do sistema devem estar contidos em  $u$ .
- Postula-se as expressões dos trabalhos virtuais dos esforços internos  $P'_{(i)}$  e externos  $P'_{(e)}$ , assim como a das quantidades de aceleração  $A'$  para todos os sub-sistemas  $S'$ .

O princípio dos trabalhos virtuais se enuncia, então, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \forall S' \subset S, \quad \forall \hat{U} \text{ m.v.r.}, \quad P'_{(i)}(\hat{U}) &= 0 \\ \text{Em referencial galileano, } \forall \hat{U} \text{ m.v.}, \quad P'_{(i)}(\hat{U}) + P'_{(e)}(\hat{U}) &= A'(\hat{U}) \quad 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

A aplicação sucessiva dos dois enunciados permite expressar a forma dos esforços internos que conduz às equações do movimento e às condições de contorno.

---

<sup>1</sup> *Referencial galileano* é um referencial no qual o princípio de inércia proposto por Newton é válido: um corpo isolado em repouso ou em translação uniforme. Um referencial galileano é um referencial em translação uniforme em relação ao referencial de Copérnico.

### 3.2 DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA DO MEIO MULTIFÁSICO

Seja um material reforçado por uma série de inclusões arranjadas periodicamente de forma paralela a uma certa direção dada pelo vetor  $\underline{e}_r$ . O tamanho típico da estrutura deve ser significativamente maior que o diâmetro da inclusão e que o espaçamento entre cada uma dessas inclusões, se tornando adequado, desta forma, para adotar uma descrição em escala macroscópica e para considerar o material reforçado como um *meio homogêneo*.

Assim, o assunto de interesse é um material compósito, concreto armado, constituído de um meio contínuo, o concreto, que dispõe de inclusões lineares de reforço orientadas segundo  $N$  direções diferentes, as barras de armadura. Considera-se um sistema  $S$  de volume  $\Omega$  constituído deste material. Este sistema está inserido no espaço euclidiano tridimensional, munido de um sistema ortonormal direto  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ . Cada direção de reforço é orientada por um vetor unitário  $\underline{e}_r, r = 1, \dots, N$ . A Figura 3.1 resume esta notação:

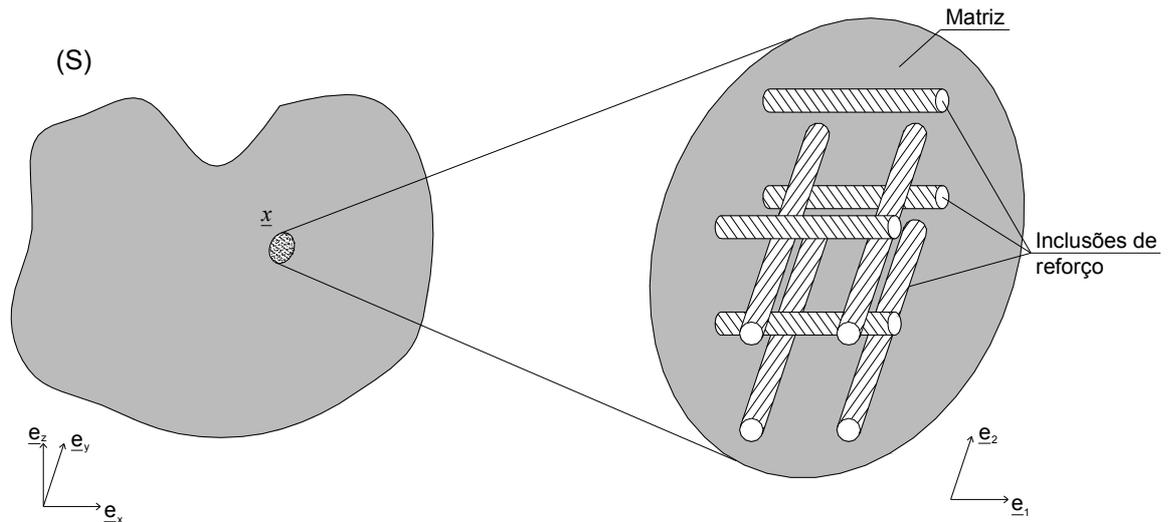


Figura 3.1 – Descrição geométrica do material reforçado (escala microscópica). Neste trabalho o concreto será representado pela fase matriz e as barras de armadura pelas inclusões de reforço. Bennis (2002).

A modelagem multifásica se formula então da seguinte forma: para todo ponto material de  $\Omega$ , se associa uma partícula de matriz ( $\Omega^m$ ) e  $N$  partículas de reforço ( $\Omega^r$ ) caracterizadas pela posição geométrica comum  $x$  (

Figura 3.2). Estas  $N+1$  partículas superpostas formam o meio multifásico.

$$d\Omega(\underline{x}) = d\Omega^m(\underline{x}) \bigcup_{r=1, \dots, N} d\Omega^r(\underline{x}) \quad (3.2)$$

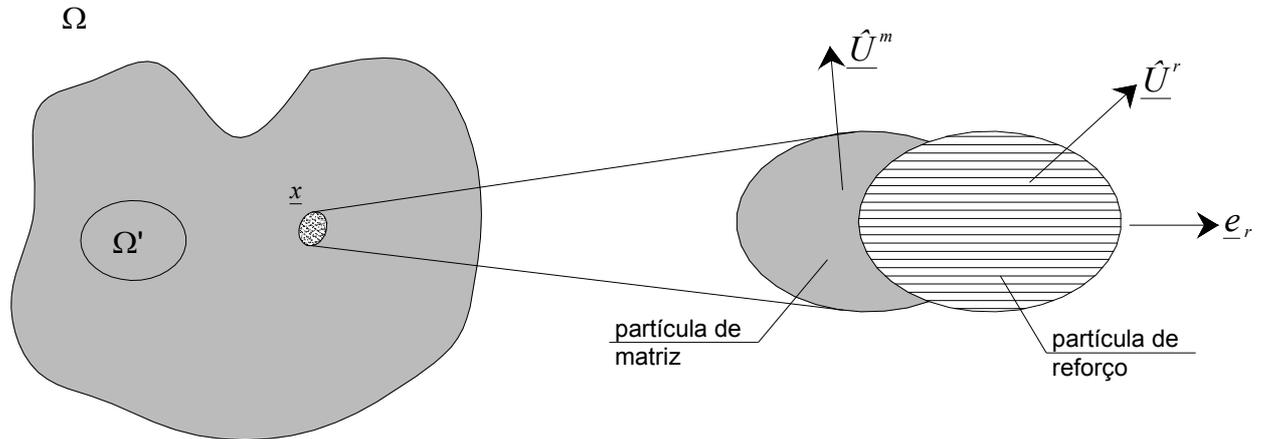


Figura 3.2 – Descrição do meio multifásico (escala macroscópica) com uma fase de reforço. Bennis (2002).

Segundo o método clássico de homogeneização, o único campo de deslocamento macroscópico corresponde à média sobre um volume elementar representativo (VER) do campo de deslocamento microscópico. Já no modelo multifásico geral cada fase possui uma cinemática própria.

Ajustando a terminologia que será utilizada: a expressão *material reforçado* designa o material heterogêneo à escala microscópica, constituído de uma matriz e de inclusões de reforço ocupando domínios geométricos distintos. A expressão *meio multifásico* corresponde ao modelo de meio equivalente, em escala macroscópica, devendo reproduzir o comportamento mecânico do material real. A fim de designar as componentes, utilizam-se os termos *partículas de matriz* e *partículas de reforço*. Adotam-se ainda as seguintes definições:

- Chama-se *fase* o conjunto de partículas de um mesmo tipo. Serão utilizadas, por conseguinte, as expressões *fase matriz* e *fase reforço*. Todas as quantidades relativas a uma fase serão designadas por uma letra minúscula ao expoente  $m$  ou  $r$  dependendo do caso.
- Um sub-sistema  $S^j$  que ocupa um volume  $\Omega'$  é dito monofásico se for constituído de uma única fase  $j$ ,  $j \in \{m; r = 1, \dots, N\}$  contida em  $\Omega'$ .

- Um sub-sistema  $S'$  é dito multifásico se é constituído de partículas de todas as fases contidas em  $\Omega'$ .

No desenvolvimento que segue, considera-se a configuração atual do sistema no instante  $t$ . Por razão de simplicidade, omite-se a dependência de tempos de diferentes grandezas.

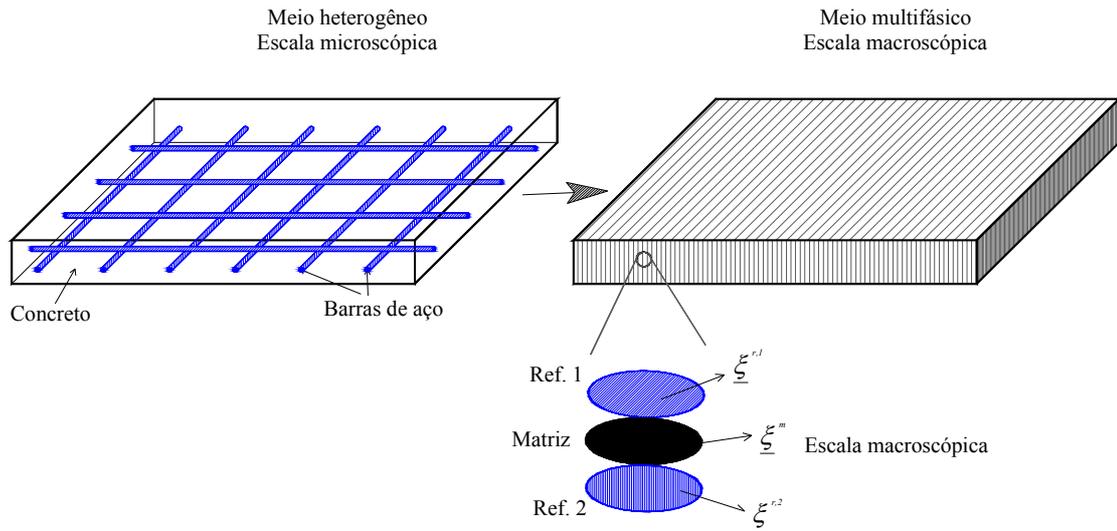


Figura 3.3 – Terminologia empregada neste trabalho.

### 3.3 MOVIMENTOS VIRTUAIS

Para um meio multifásico, um movimento virtual é definido por  $(N+1)$  campos de velocidades  $\hat{U}^m$  e  $\hat{U}^r$   $\{r = 1, \dots, N\}$ , associados respectivamente a cada fase. Supondo estes como independentes, contínuos e continuamente diferenciáveis em  $\Omega$ , escreve-se:

$$\hat{U}(\underline{x}) = \left\{ \hat{U}^m(\underline{x}); \hat{U}^r(\underline{x}), r = 1, \dots, N \right\} \quad (3.3)$$

O conjunto destes movimentos virtuais forma o espaço vetorial  $\mathcal{U}$ , que contém os movimentos reais do sistema.

Os movimentos virtuais de corpo rígido de um subsistema monofásico  $S^j$  são dados por:

$$\hat{U}(\underline{x}) = \left\{ \underline{0}, \dots, \hat{U}^j(\underline{x}), \underline{0}, \dots \right\} \quad (3.4)$$

onde  $\hat{U}^j$  é um campo de velocidades de translação ou rotação.

Os movimentos virtuais de corpo rígido de um subsistema multifásico  $S'$  são dados por:

$$\hat{\mathbf{U}}(\underline{x}) = \{ \underline{\hat{U}}(\underline{x}), \dots, \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \} \quad (3.5)$$

onde  $\underline{\hat{U}}(\underline{x})$  é um campo de velocidades de translação ou rotação.

### 3.4 EXPRESSÕES DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.

A construção de um modelo pelo método dos trabalhos virtuais passa pela escolha de diferentes variáveis intervindo nas expressões do PTV. As escolhas são ditadas pelas características mecânicas que se deseja levar em conta. O modelo será tão mais rico quanto as expressões forem mais complexas e dependentes de um maior número de parâmetros.

A descrição dos esforços internos é, sob certo ponto de vista, central e serão detalhadas, para cada fase do meio multifásico, as hipóteses usadas e as expressões correspondentes.

#### 3.4.1 Esforços internos

Será utilizada a hipótese de que o trabalho virtual dos esforços internos é obtido pela integração de uma densidade volumétrica sobre todo o subsistema ocupante de um volume  $\Omega'$ . Esta densidade compreende os termos associados a cada uma das fases (matriz e reforço), assim como os termos de interação entre a fase reforço e a matriz.

##### 3.4.1.1 Fase matriz

No caso de materiais reforçados como o concreto armado, as inclusões de reforço possuem proporções muito pequenas, ou seja, a fração volumétrica desta fase não deve exceder uma pequena fração.

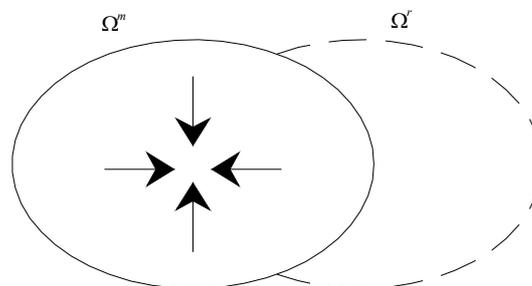


Figura 3.4 – Esforços internos à fase matriz (por razão de clareza os domínios ocupados pelas duas fases são representados distintamente nas figuras desta seção ainda que sejam coincidentes geometricamente).

Assim, a matriz do material reforçado é claramente um meio contínuo e a modelagem da fase matriz deverá ser a de um meio contínuo de Cauchy. Postula-se classicamente que a densidade do trabalho virtual dos esforços internos depende linearmente do campo de velocidades e de suas derivadas primeiras com relação a  $x$ , assim.

$$p_{(i)}^{*m}(\hat{\mathbf{U}}(\underline{x})) = -\left(\underline{A}^m(\underline{x}) \cdot \underline{\hat{U}}^m(\underline{x}) + \underline{B}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{grad}} \hat{\mathbf{U}}^m(\underline{x})\right) \quad (3.6)$$

#### 3.4.1.2 Fase reforço

As inclusões utilizadas em estruturas de concreto armado (as barras de aço) são lineares e compridas e costumam exprimir sua capacidade de reforço essencialmente nas direções longitudinais. Por conseguinte, são levados em conta os esforços de tração e compressão, supostamente preponderantes. Negligenciam-se os efeitos de flexão e cisalhamento.

Neste trabalho, os esforços de tração e compressão que levam a uma deformação axial são postulados pela densidade de trabalho virtual dos esforços internos, uma forma linear do campo de velocidades e de sua derivada, ao longo da direção de reforço  $\underline{e}_r$ , representada por  $s^r$ .

$$p_{(i)}^{*r}(\hat{\mathbf{U}}(\underline{x})) = -\left(\underline{A}^r(\underline{x}) \cdot \underline{\hat{U}}^r(\underline{x}) + \underline{B}^r(\underline{x}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{U}}^r(\underline{x})}{ds^r}\right) \quad (3.7)$$

Salienta-se que o segundo termo de (3.7) pode-se escrever  $(\underline{e}^r \otimes \underline{B}^r(\underline{x})) : \underline{\underline{grad}} \hat{\mathbf{U}}^r(\underline{x})$ , o que permite obter uma expressão para fase reforço análoga à fase matriz.

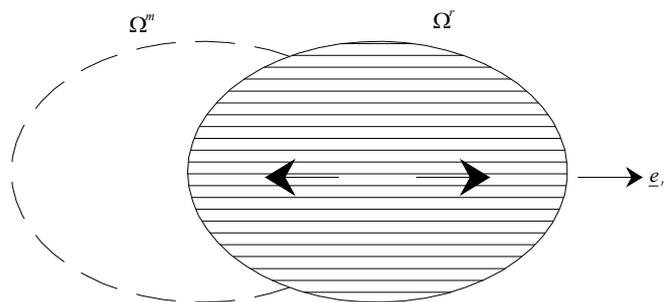


Figura 3.5 – Esforços internos à fase reforço.

#### 3.4.1.3 Interação

Supondo, enfim, que a interação entre cada fase de reforço e a fase matriz seja pontual, ou seja, que provém simplesmente da superposição de várias partículas ao mesmo ponto  $\underline{x}$ , postula-se a seguinte expressão:

$$P'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = - \left( \underline{I}^m(\mathbf{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\mathbf{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\mathbf{x}) \right) \quad (3.8)$$

onde  $\underline{I}^m$  representa a densidade volumétrica dos esforços exercidos pela fase reforço e  $\underline{I}^r$  representa a densidade volumétrica dos esforços exercidos pela fase matriz, (vide Figura 3.6 e Figura 3.7). É desprezada toda interação entre duas fases de reforço distintas.

#### 3.4.1.4 Expressão global dos Esforços Internos

A expressão do trabalho virtual dos esforços internos para um subsistema  $S'$  vai depender de seu caráter mono ou multifásico. No primeiro caso, para um subsistema  $S^j$  ocupando um volume geométrico  $\Omega'$ , se integra simplesmente a densidade do trabalho virtual correspondente, assim:

$$P'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega'} p'_{(i)}(\hat{U}) d\Omega' \quad (3.9)$$

Para o caso multifásico, somam-se as contribuições de cada fase e os termos de interação para obter de forma geral:

$$\begin{aligned} P'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = & - \int_{\Omega'} \left( \underline{A}^m(\mathbf{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\mathbf{x}) + \underline{B}^m(\mathbf{x}) : \underline{\underline{grad}} \hat{U}^m(\mathbf{x}) \right) d\Omega' \\ & - \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \left( \underline{A}^r(\mathbf{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\mathbf{x}) + (\underline{e}^r \otimes \underline{B}^r(\mathbf{x})) : \underline{\underline{grad}} \hat{U}^r(\mathbf{x}) \right) d\Omega' \\ & - \int_{\Omega'} \left( \underline{I}^m(\mathbf{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\mathbf{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\mathbf{x}) \right) d\Omega' \end{aligned} \quad (3.10)$$

#### 3.4.2 Esforços externos

Para todo sistema monofásico  $S^j$  ocupando um domínio geométrico  $\Omega'$ , os esforços externos levados em conta no modelo são de três tipos.

- Forças de volume caracterizadas por uma densidade volumétrica  $\rho^j(\mathbf{x}) \underline{F}^j(\mathbf{x})$ , independente do subsistema considerado.
- Esforços de contato exercidos sobre o contorno  $\partial\Omega'$  por uma densidade superficial de esforços  $\underline{T}_{\Omega'}^j(\mathbf{x})$ .
- Esforços de interação aplicados pelas outras fases  $\underline{I}^j(\mathbf{x})$

No que concerne à fase matriz, notada  $\Omega'$ , adota-se a expressão seguinte para o trabalho virtual dos esforços externos

$$P_{(e)}^m(\hat{U}) = \int_{\Omega^m} \rho^m(\underline{x}) \underline{F}^m(\underline{x}) \cdot \hat{U}^m(\underline{x}) d\Omega^m + \int_{\partial\Omega^m} \underline{T}^m(\underline{x}) \cdot \hat{U}^m(\underline{x}) dS^m + \int_{\Omega'} \underline{I}^m(\underline{x}) \cdot \hat{U}^m(\underline{x}) d\Omega^m \quad (3.11)$$

onde as duas primeiras integrais representam o trabalho dos esforços externos ao sistema multifásico: densidade volumétrica dos esforços externos  $\rho^m(\underline{x})\underline{F}^m(\underline{x})$ , densidade superficial dos esforços externos  $\underline{T}^m(\underline{x})$  sobre o contorno. A terceira integral corresponde ao trabalho dos esforços exercidos pela fase reforço sobre a fase matriz, fazendo aparecer uma densidade volumétrica notada  $\underline{I}^m(\underline{x})$ , representando a densidade volumétrica dos esforços de interação exercidos pela fase reforço (Figura 3.6).

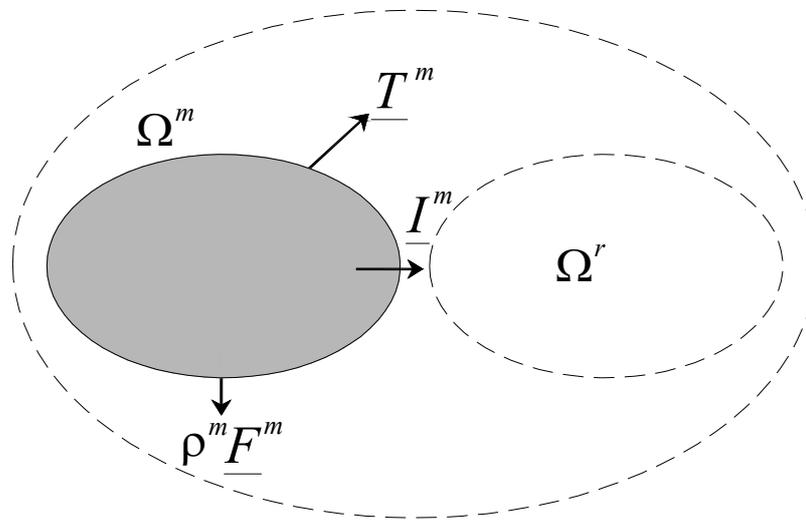


Figura 3.6 – Esforços externos à fase matriz.

No que cabe à fase reforço, notada  $\Omega^r$ , adota-se a expressão seguinte para os trabalhos virtuais dos esforços externos:

$$P_{(e)}^r(\hat{U}) = \int_{\Omega^r} \rho^r(\underline{x}) \underline{F}^r(\underline{x}) \cdot \hat{U}^r(\underline{x}) d\Omega^r + \int_{\partial\Omega^m} \underline{T}^r(\underline{x}) \cdot \hat{U}^r(\underline{x}) dS^r + \int_{\Omega'} \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot \hat{U}^r(\underline{x}) d\Omega^r \quad (3.12)$$

onde  $\rho^r(\underline{x})\underline{F}^r(\underline{x})$  e  $\underline{T}^r(\underline{x})$  designam respectivamente as densidades volumétricas e superficiais dos esforços externos ao sistema multifásico exercidos sobre a fase reforço, enquanto que  $\underline{I}^r(\underline{x})$  representa a densidade volumétrica dos esforços de interação exercidos pela fase matriz (Figura 3.7).

No caso de um subsistema multifásico, os esforços de interação mencionados acima assumem o status de esforços internos na forma da expressão de trabalhos virtuais dada por (3.8). De forma a ser coerente com esta equação, deve-se fazer a seguinte identificação:

$$\underline{I}^j(\underline{x}) = \begin{cases} -\underline{I}^r(\underline{x}), & \text{se } j = r \\ -\underline{I}^m(\underline{x}), & \text{se } j = m \end{cases} \quad (3.13)$$

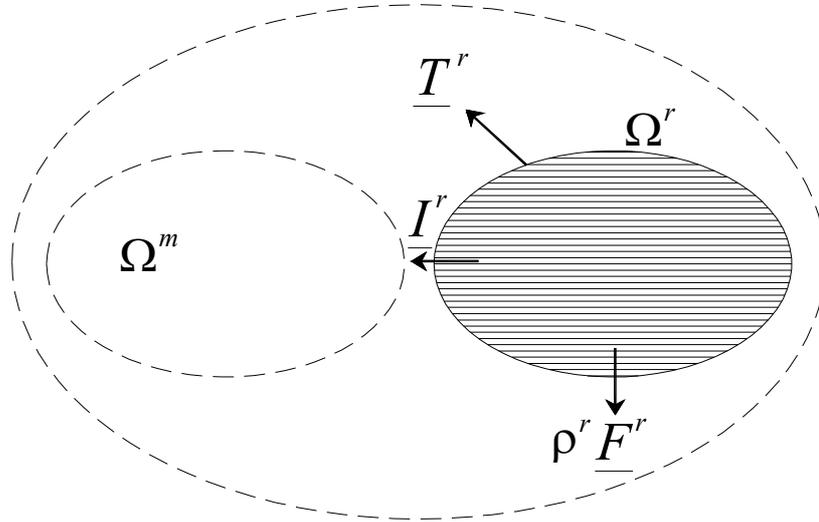


Figura 3.7 – Esforços externos à fase reforço.

O trabalho virtual dos esforços externos a todo subsistema multifásico se reduz à:

$$P'_{(e)}(\hat{U}) = \int_{\Omega} \left( \rho^m(\underline{x}) \underline{F}^m(\underline{x}) \cdot \hat{U}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \rho^r(\underline{x}) \underline{F}^r(\underline{x}) \cdot \hat{U}^r(\underline{x}) \right) d\Omega' \quad (3.14)$$

$$\int_{\partial\Omega'} \left( \underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) \cdot \hat{U}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) \cdot \hat{U}^r(\underline{x}) \right) dS'$$

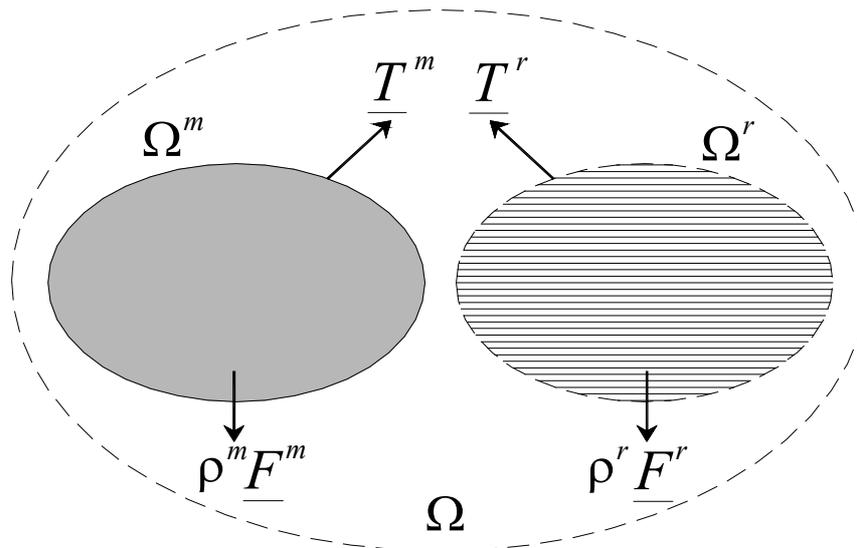


Figura 3.8 – Esforços externos à um sistema bifásico.

### 3.4.3 Quantidades de Aceleração

Falta enfim definir o trabalho virtual das quantidades de aceleração (produto entre a massa e a aceleração) sobre todos subsistemas. Exprime-se classicamente como a integral seguinte:

$$\mathbf{A}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega'} \left( \rho^m(\underline{x}) \underline{\gamma}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \rho^r(\underline{x}) \underline{\gamma}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^r(\underline{x}) \right) d\Omega' \quad (3.15)$$

onde  $\underline{\gamma}^m(\underline{x})$  designa a aceleração da partícula da fase  $j$  situada no ponto  $\underline{x}$ .

## 3.5 APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

### 3.5.1 Primeiro enunciado

O primeiro enunciado do princípio dos trabalhos virtuais exprime a nulidade do trabalho virtual dos esforços internos em todo movimento virtual de corpo rígido de um sistema ou subsistema qualquer. Considerando um subsistema monofásico  $S^j$  animado de um movimento de translação:

$$\hat{\mathbf{U}}(\underline{x}) = \left\{ \underline{0}, \dots, \hat{\mathbf{U}}^j(\underline{x}) = \underline{\hat{U}}_0, \underline{0}, \dots \right\} \quad (3.16)$$

Obtém-se, levando em conta (3.6) e (3.7):

$$\forall \Omega' \subset \Omega, \quad \forall \underline{\hat{U}}_0 \quad \int_{\Omega'} \underline{A}^m(\underline{x}) \cdot \underline{\hat{U}}_0 d\Omega' = \int_{\Omega'} \underline{A}^r(\underline{x}) \cdot \underline{\hat{U}}_0 d\Omega' = 0 \quad (3.17)$$

Por um argumento clássico de continuidade, isto resulta que:

$$\underline{A}^m(\underline{x}) = \underline{0}, \quad \underline{A}^r(\underline{x}) = \underline{0}, \quad r = 1 \dots N \quad (3.18)$$

Considerando agora um movimento virtual de rotação definido por:

$$\hat{\mathbf{U}}(\underline{x}) = \left\{ \underline{0}, \dots, \hat{\mathbf{U}}^j(\underline{x}) = \underline{\hat{\Omega}}_0 \wedge \underline{x}, \underline{0}, \dots \right\} \quad (3.19)$$

para o qual  $\underline{\underline{grad}} \hat{\mathbf{U}} = \underline{\underline{\hat{\Omega}}}_0$  é um tensor antissimétrico de segunda ordem, obtém-se utilizando (3.6) e (3.7):

$$\forall \Omega' \subset \Omega \quad \forall \underline{\underline{\hat{\Omega}}}_0 \quad \int_{\Omega'} \underline{\underline{B}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\hat{\Omega}}}_0 d\Omega' = \int_{\Omega'} (\underline{e}^r \otimes \underline{B}^r(\underline{x})) : \underline{\underline{\hat{\Omega}}}_0 d\Omega' = 0 \quad (3.20)$$

Resulta por um lado a simetria do tensor  $\underline{\underline{B}}^m$ , que é renomeado  $\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x})$ , e também de  $(\underline{e}^r \otimes \underline{B}^r(\underline{x}))$ . Esta condição permite escrever:

$$\underline{B}^r(\underline{x}) = \sigma^r(\underline{x})\underline{e}_r, \quad r = 1, \dots, N \quad (3.21)$$

Considerando finalmente um subsistema multifásico animado de um movimento virtual de translação:

$$\hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \{\hat{\underline{U}}_0, \dots, \hat{\underline{U}}_0\} \quad (3.22)$$

resulta:

$$\forall \Omega' \subset \Omega \quad \forall \hat{\underline{U}}_0 \quad \int_{\Omega'} \left\{ \underline{I}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \right\} \cdot \hat{\underline{U}}_0 d\Omega' = 0 \quad (3.23)$$

que permite reescrever (3.8) sob a forma:

$$p'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = - \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot (\hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) - \hat{\underline{U}}^m(\underline{x})) \quad (3.24)$$

onde é possível observar as velocidades relativas das fases reforço em relação à fase matriz. Tendo em conta as equações (3.18), (3.21), (3.24), a expressão (3.10) se simplifica finalmente em:

$$\begin{aligned} P'_i(\hat{\underline{U}}) = & - \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\sigma}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{grad}} \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \left( \sum_{r=1}^N \sigma^r(\underline{x})\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \right) : \underline{\underline{grad}} \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\ & - \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot (\hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) - \hat{\underline{U}}^m(\underline{x})) d\Omega' \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.5.2 Segundo enunciado

Aplicando agora o segundo enunciado do princípio dos trabalhos virtuais aos movimentos virtuais quaisquer, utilizando as equações anteriores e reagrupando os cofatores de diferentes campos de velocidades virtuais:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\sigma}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{grad}} \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \left[ \rho^m(\underline{x})(F^m(\underline{x}) - \gamma^m(\underline{x})) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \right] \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\ & + \sum_{r=1}^N \int_{\Omega'} \left\{ \left[ -\sigma^r(\underline{x})\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \right] : \underline{\underline{grad}} \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) + \left[ \rho^r(\underline{x})(F^r(\underline{x}) - \gamma^r(\underline{x})) - \underline{I}^r(\underline{x}) \right] \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\ & + \int_{\partial\Omega'} T_{\Omega'}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) dS' + \sum_{r=1}^N \int_{\partial\Omega'} T_{\Omega'}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) dS' = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Introduzindo nesta equação a identidade:

$$-\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{grad}}\hat{U}(\underline{x}) = \hat{U}(\underline{x}) \cdot \text{div}' \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) - \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \hat{U}(\underline{x})) \quad (3.27)$$

e aplicando o teorema da divergência ( $\underline{n}(\underline{x})$  designa a normal a  $d\Omega'$  no ponto  $\underline{x}$ ).

$$\int_{\Omega'} \text{div} \underline{\underline{\mathfrak{Z}}}(\underline{x}) d\Omega' = \int_{\partial\Omega'} \underline{\underline{\mathfrak{Z}}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) dS' \quad (3.28)$$

chega-se,  $\forall S' \subset S, \forall \hat{U} \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \left\{ \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x}) (\underline{F}^m(\underline{x}) - \underline{\gamma}^m(\underline{x})) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \right\} \cdot \hat{U}^m(\underline{x}) d\Omega' \\ & + \sum_{r=1}^N \int_{\Omega'} \left\{ \text{div}(\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x}) (\underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{\gamma}^r(\underline{x})) - \underline{I}^r(\underline{x}) \right\} \cdot \hat{U}^r(\underline{x}) d\Omega' \\ & + \int_{\partial\Omega'} [\underline{T}^m(\underline{x}) - \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x})] \cdot \hat{U}^m(\underline{x}) dS' \\ & + \sum_{r=1}^N \int_{\partial\Omega'} [\underline{T}^r(\underline{x}) - \sigma^r(\underline{x}) (\underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r] \cdot \hat{U}^r(\underline{x}) dS' = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

O raciocínio que permite obter as equações de movimento e as condições de contorno é então clássico. Levando em conta a independência dos campos de velocidade que constituem um movimento virtual  $\hat{U}$ , pode-se anular separadamente os termos associados a cada fase. Para uma fase denominada  $j$ , considerando em primeiro lugar os campos de velocidade nulos na fronteira  $d\Omega'$ , obtém-se a nulidade para todo ponto do integrando associado à integral volumétrica, o que dá a equação do movimento da fase  $j$ . A nulidade da integral de superfície para um campo qualquer fornece as condições de contorno.

São obtidas então as *equações do movimento* por fase para o modelo multifásico de material reforçado. Observa-se que elas são acopladas por meio dos esforços volumétricos de interação,  $\underline{I}^r$ .

$$\begin{cases} \forall \Omega' \subset \Omega; \quad \forall \underline{x} \in \Omega' \\ \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x}) (\underline{F}^m(\underline{x}) - \underline{\gamma}^m(\underline{x})) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) = 0 \\ \text{div}(\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x}) (\underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{\gamma}^r(\underline{x})) - \underline{I}^r(\underline{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

assim como as condições de contorno:

$$\begin{cases} \forall \Omega' \subset \Omega; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega' \\ \underline{T}^m(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \\ \underline{T}^r(\underline{x}) = \sigma^r(\underline{x}) (\underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r, \quad r = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.31)$$

### 3.6 INTERPRETAÇÃO MECÂNICA DO MODELO (BENNIS, 2002)

As diferentes variáveis que descrevem os esforços internos do sistema multifásico são de natureza macroscópica. É conveniente agora fazer uma interpretação se referindo à escala de descrição microscópica do material reforçado por inclusões lineares.

A interpretação da tensão em cada ponto da fase reforço é fornecida através das condições de contorno (3.31). Considerando uma área elementar  $dS^r$  de normal unitária  $\underline{n}$ , com inclinação definida por um ângulo  $\alpha$  em relação a direção de reforço (Figura 3.9a). O esforço elementar exercido sobre esta faceta será:

$$d\underline{f}^r = \underline{T}^r dS^r = \sigma^r (\underline{n} \cdot \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_r dS^r = \sigma^r \underline{e}_r dS_t \quad (3.32)$$

onde  $dS_t = dS^r \cos \alpha$  designa a projeção da área elementar sobre o plano perpendicular à direção de reforço. Surge imediatamente que  $\sigma^r \underline{e}_r$  se interpreta como o *esforço axial nas inclusões de reforço em relação à unidade de superfície transversal*, assim:

$$\sigma^r = \frac{dN^r}{dS_t} \text{ com } d\underline{f}^r = dN^r \underline{e}_r \quad (3.33)$$

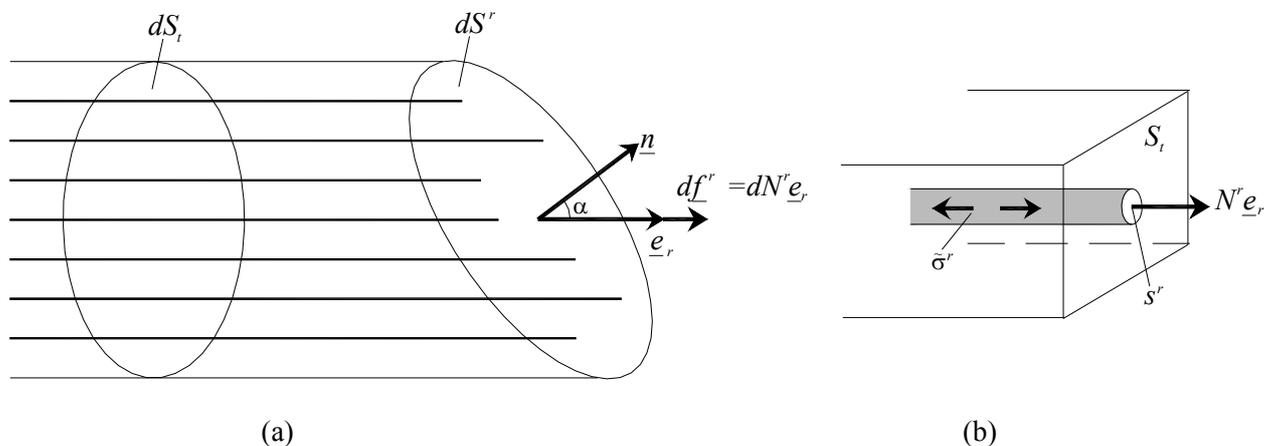


Figura 3.9 – Interpretação da tensão  $\sigma^r$  na fase de reforço

Supondo que as inclusões de reforço são repetidas periodicamente no espaço, um volume representativo de material reforço é constituído de uma inclusão individual de seção  $s^r$  cercada de um volume de matriz, de seção retangular  $S_t$ . O esforço axial para tal inclusão é:

$$N^r = s^r \tilde{\sigma}^r \quad (3.34)$$

onde  $\tilde{\sigma}^r$  representa a tensão uniaxial média no material de reforço à escala microscópica. Comparando as equações anteriores, chega-se a igualdade:

$$s^r \tilde{\sigma}^r = S_t \sigma^r, \text{ então } \sigma^r = \frac{S^r}{S_t} \tilde{\sigma}^r = \eta \tilde{\sigma}^r \quad (3.35)$$

onde  $\eta$  representa a fração volumétrica do material que constitui as inclusões de reforço. A equação anterior permite interpretar a tensão uniaxial  $\sigma^r$  na fase de reforço (escala macroscópica) como sendo igual à tensão  $\tilde{\sigma}^r$  no material de reforço (escala microscópica) *ponderado por sua fração volumétrica*. Salienta-se o fato de que para as aplicações visadas a fração volumétrica será, em geral, muito pequena ( $\eta = 10^{-3}$  até  $10^{-2}$ ).

Uma interpretação da densidade volumétrica de forças de interação  $\underline{I}$  é igualmente possível se referindo à escala microscópica. Considerando duas partículas elementares  $d\Omega^m$  e  $d\Omega^r$  de mesmo volume  $d\Omega_t$ , pertencendo respectivamente às fases matriz e reforço. A força elementar de interação exercida por  $d\Omega^r$  sobre  $d\Omega^m$  será (Figura 3.10a).

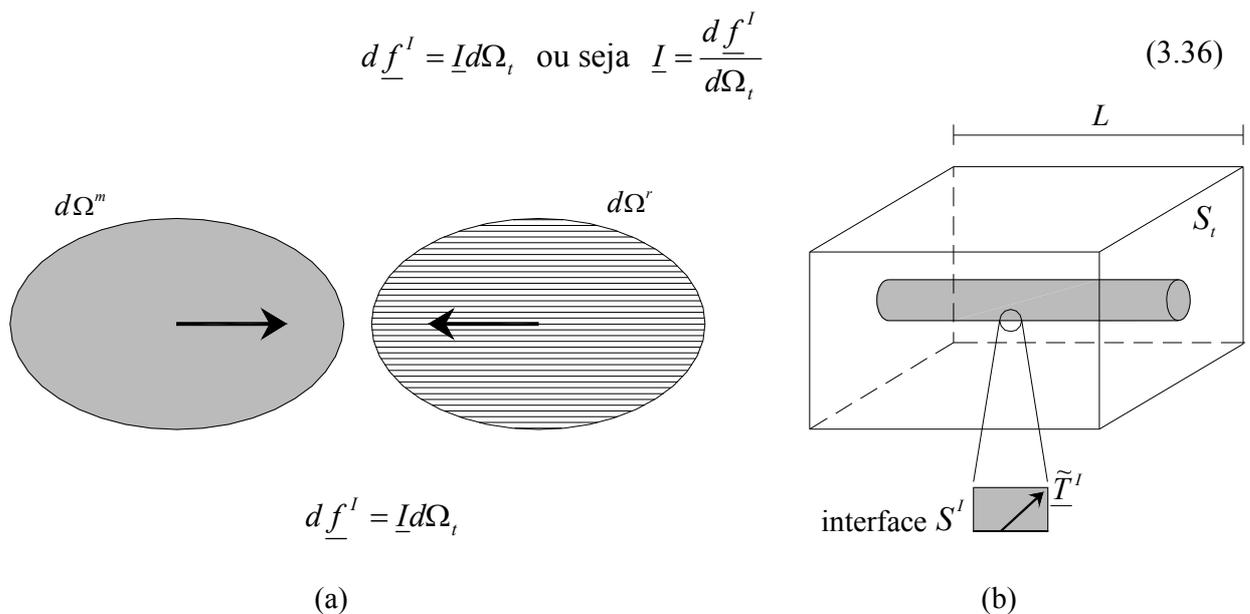


Figura 3.10 – Interpretação da força volumétrica de interação  $\underline{I}$ .

Se referindo a um volume representativo de material reforçado de seção  $S_t$  de comprimento  $L$ , (Figura 3.10b), é então claro, levando em conta (3.36), que o esforço de interação  $\underline{I}$  pode ser calculado, em certa escala, como a *resultante por unidade de volume das tensões exercidas pela inclusão sobre a matriz na interface de contato  $S^I$  entre os dois materiais*.

$$\underline{I} = \frac{1}{S_t L} \int_{S^I} \tilde{\underline{T}}^I dS^I \quad (3.37)$$

### 3.7 EQUAÇÕES GLOBAIS DE EQUILÍBRIO

As equações (3.30) e (3.31) descrevem separadamente o movimento de cada uma das fases do meio considerado. É possível obter um sistema de equações globais pela soma, termo a termo, das precedentes. Definindo para todo ponto  $\underline{x}$ .

$$\rho \underline{F} = \sum_j \rho^j \underline{F}^j ; \underline{T} = \sum_j \underline{T}^j ; \rho \underline{\gamma} = \sum_j \rho^j \underline{\gamma}^j \quad (3.38)$$

e

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{r=1}^N \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (3.39)$$

obtem-se para  $\forall \Omega' \subset \Omega$  :

$$\begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) + \rho(\underline{x})(\underline{F}(\underline{x}) - \underline{\gamma}(\underline{x})) = \underline{0}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega' \\ \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega' \end{cases} \quad (3.40)$$

Reconhece-se em (3.40) as equações de movimento e condições de contorno obtidas para o meio contínuo de Cauchy clássico. O tensor  $\underline{\underline{\Sigma}}$  representa, para o meio multifásico, o tensor de tensões totais enquanto  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  e  $\sigma^r$  designam as tensões parciais respectivamente na matriz e em cada fase de reforço. Observa-se que os termos de interação não aparecem nestas equações.

O interesse de agregar as equações de equilíbrio reside, de momento, apenas no fato de poder reencontrar, ao menos formalmente, as equações regentes de um meio contínuo de Cauchy. A utilidade desta aproximação aparecerá mais claramente na formulação do comportamento, tratado adiante.

### 3.8 NECESSIDADE DE LEIS DE COMPORTAMENTO PARA O MATERIAL REFORÇADO

A aplicação do método dos trabalhos virtuais permitiu determinar as equações do movimento do meio multifásico assim como as condições de contorno, distinguindo a abordagem por fases da abordagem global.

Da mesma forma que no caso do meio contínuo de Cauchy, somente as equações do movimento não permitem resolver os problemas. É então necessário associar as *leis de comportamento* unindo as variáveis de esforço às variáveis de deformação.

Adota-se, a seguir, o *framework* das transformações infinitesimais.

### 3.9 HIPÓTESE DE PEQUENAS PERTURBAÇÕES

Considerando duas partículas do meio multifásico, representadas por  $d\Omega_0^m$  e  $d\Omega_0^r$  nas suas configurações iniciais, de tal forma que elas coincidam geometricamente. Quando submetidas aos deslocamentos  $\underline{\xi}^m$  e  $\underline{\xi}^r$  as partículas atingem a configuração atual, onde são representadas por  $d\Omega_i^m$  e  $d\Omega_i^r$ .

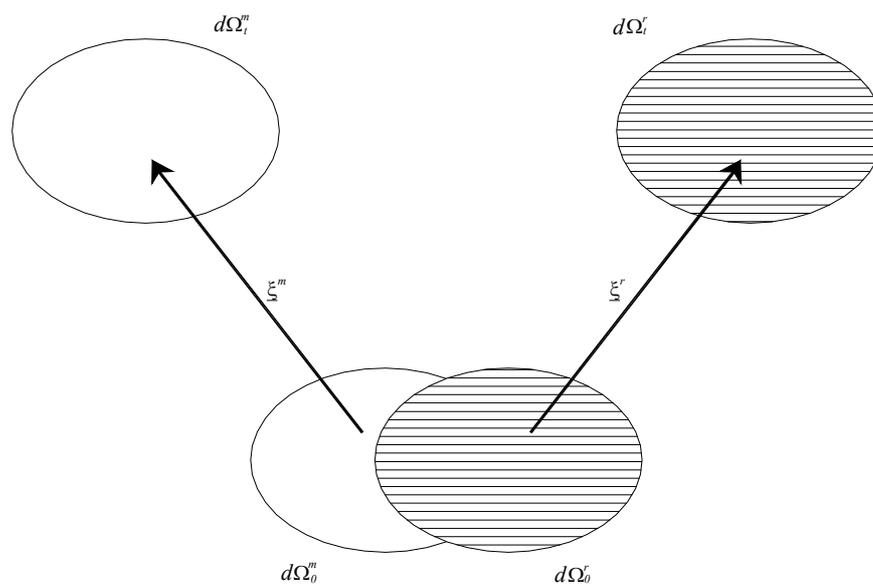


Figura 3.11 – Cinemática de um meio bifásico.

Os problemas aos quais se deseja aplicar o modelo multifásico de material reforçado podem ser tratados convenientemente no quadro da *Hipótese de pequenas perturbações* (HPP), onde é possível identificar as configurações iniciais e atuais do sistema, permitindo formular as diferentes equações de equilíbrio sobre a geometria inicial. Implicam, em cada fase  $j$  ( $m, r = 1 \dots N$ ), as seguintes condições:

- As transformações são infinitesimais (Salençon, 1994), assim:

$$\|\underline{\underline{grad}} \xi^j(x)\| \ll 1 \quad (3.41)$$

onde  $\underline{\underline{grad}} \xi^j$  designa o gradiente com relação as coordenadas iniciais dos campos.

- Os deslocamentos relativos à fase matriz  $\underline{\Delta} = (\underline{\xi}^r(x) - \underline{\xi}^m(x))$  são pequenos devido a uma dimensão característica longa da escala microscópica de descrição, por exemplo, uma dimensão do volume elementar representativo, no caso de um reforço periódico:  $|\underline{\Delta}| \ll L$ .

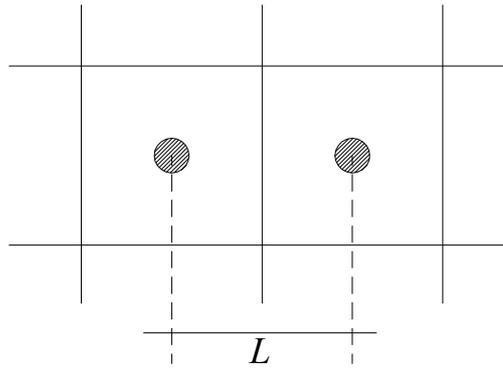


Figura 3.12 – Espaçamento entre duas inclusões.

Estas condições vão permitir raciocinar, na sequência, sobre a configuração inicial do meio multifásico e, assim, sobre uma geometria fixa conhecida. Desta forma, escreve-se o princípio dos trabalhos virtuais internos, onde se escolhem os campos de deslocamento como campos de velocidades virtuais, a partir de (3.25).

$$\begin{aligned} W'_{def}(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) = & \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{grad}} \xi^m + \left( \sum_{r=1}^N \sigma^r(x) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \right) : \underline{\underline{grad}} \xi^r \right\} d\Omega' + \\ & + \int_{\Omega'} \left\{ \sum_{r=1}^N \underline{I}^r \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) \right\} d\Omega' \end{aligned} \quad (3.42)$$

Onde  $W'_{def}$  é o trabalho de deformação. Tem-se, por definição que:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{grad}} \xi^m + {}^t \underline{\underline{grad}} \xi^m \right) \quad (3.43)$$

$$\varepsilon^r = (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{grad}} \xi^r = \frac{\partial (\xi^r \cdot \underline{e}_r)}{\partial s^r} \quad (3.44)$$

Levando em conta a simetria do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}^m$ , vem:

$$W'_{def}(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \underline{\underline{\varepsilon}}^r) = \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m d\Omega' + \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \sigma^r : \varepsilon^r d\Omega' + \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \underline{\underline{I}}^r \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}}^r - \underline{\underline{\varepsilon}}^m) d\Omega' \quad (3.45)$$

As variáveis de deformação do modelo são, conseqüentemente, o tensor de deformações da fase matriz,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^m$ , a deformação axial de cada fase de reforço,  $\varepsilon^r$ , e o deslocamento relativo  $\underline{\underline{\Delta}} = (\underline{\underline{\varepsilon}}^r - \underline{\underline{\varepsilon}}^m)$  para a interação de cada fase de reforço com a matriz.

### 3.10 COMPORTAMENTO ELÁSTICO-LINEAR

A solução de problemas de contorno necessita que as equações precedentes sejam complementadas pelas chamadas *leis de comportamento*. No caso de um meio contínuo monofásico, estas leis se exprimem sob a forma de relações entre os esforços internos e as deformações associadas a estes esforços. Nesta seção limita-se à discussão do caso de elasticidade linear. É conveniente definir previamente as variáveis de deformação no quadro da *hipótese de pequenas perturbações*.

#### 3.10.1 Elasticidade linear

É de interesse, nesta primeira etapa, caracterizar o comportamento elástico linear das fases matriz e reforço e a interação entre as fases. No caso isotérmico e na ausência de tensões iniciais (estado inicial natural), as leis de comportamento são obtidas pela derivação dos potenciais elásticos quadráticos relativos às variáveis de deformação:

##### Fase matriz

$$\psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{A}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad (3.46)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^m} = \underline{\underline{A}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad (3.47)$$

##### Fase reforço

$$\psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} a^r (\varepsilon^r)^2 \quad (3.48)$$

$$\sigma^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r} = a^r \varepsilon^r, \quad r = 1, \dots, N \quad (3.49)$$

### Interação entre as fases

$$\psi^I(\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = \frac{1}{2}(\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) \cdot \underline{\underline{C}}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) \quad (3.50)$$

$$\underline{I}^r = \frac{\partial \psi^{I,r}}{\partial (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m)} = \underline{\underline{C}}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) \quad (3.51)$$

As relações de comportamento acima fazem aparecer um tensor de quarta ordem  $\underline{\underline{A}}^m$ , um escalar  $a^r$  e um tensor de segunda ordem  $\underline{\underline{C}}^I$ , que caracterizam respectivamente as propriedades elásticas das fases matriz e reforço, assim como sua interação.

### 3.10.2 Identificação dos parâmetros de comportamento macroscópicos

#### 3.10.2.1 Fase matriz

Levando em conta a pequena proporção volumétrica do material de reforço e, por consequência, o fato que o material constitutivo da matriz ocupa quase a totalidade do espaço, é natural admitir, ao menos em uma primeira aproximação, que as propriedades da fase matriz à escala macroscópica são idênticas àquelas que governam o comportamento do material à escala microscópica.

$$\underline{\underline{A}}^m \cong \underline{\underline{\tilde{A}}}^m \quad (3.52)$$

No caso isotrópico, a relação (3.47) se reduz classicamente à:

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda^m (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^m) \underline{\underline{1}} + 2\mu^m \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad (3.53)$$

onde  $\lambda^m$  e  $\mu^m$  são as constantes de Lamé.

#### 3.10.2.2 Fase reforço

Chamando de  $\tilde{E}^r$  o módulo de Young do material que constitui as inclusões de reforço:

$$\tilde{\sigma}^r = \tilde{E}^r \tilde{\varepsilon}^r \quad (3.54)$$

onde  $\tilde{\sigma}^r$  e  $\tilde{\varepsilon}^r$  representam respectivamente a tensão uniaxial sofrida pelo material à escala microscópica e a deformação axial correspondente. Vem então, levando em conta a relação entre as tensões microscópicas e macroscópicas:

$$\sigma^r = \eta \tilde{\sigma}^r = \eta \tilde{E}^r \tilde{\varepsilon}^r = \eta \tilde{E}^r \varepsilon^r \quad (3.55)$$

Podendo-se admitir:

$$a^r = \eta \tilde{E}^r \quad (3.56)$$

O coeficiente  $a^r$  se interpreta como o *módulo de elasticidade do material reforçado ponderado pela fração volumétrica deste último*. Exemplificando, no caso do uso de um reforço com  $\tilde{E}^r = 2.10^5$  MPa e  $\eta=0,1\%$ , obtém-se um valor de  $a^r = 200$ MPa.

### 3.10.2.3 Comportamento de interação

No caso elástico linear, o comportamento de interação é caracterizado pelo tensor  $\underline{\underline{C}}^I$  observado na lei de comportamento (3.51), que será simplificada. Pode-se observar que a massa da fase reforço definida por  $\rho^r = \eta \tilde{\rho}^r$ ,  $\tilde{\rho}^r$  sendo a massa do material de reforço, pode ser desprezada em razão da baixa proporção volumétrica. Desta forma a equação de equilíbrio da fase reforço (3.30) se torna:

$$\text{div}(\sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) - \underline{I}^r = 0 \quad (3.57)$$

Então:

$$\underline{I}^r = I \underline{e}_r \quad \text{com} \quad I = \frac{\partial \sigma^r}{\partial s} \quad (\text{s sendo a abscissa na direção } \underline{e}_r) \quad (3.58)$$

o que mostra que a densidade volumétrica das forças de interação é paralela a direção de reforço. Admitindo agora:

$$\underline{\underline{C}}^I = C_1^I \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + C_2^I \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + C_3^I \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (3.59)$$

( $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ) sendo uma base ortonormal ligada às inclusões. Assim, a relação (3.51) se escreve:

$$\underline{I} = C_1^I \Delta_1 \underline{e}_1 + C_2^I \Delta_2 \underline{e}_2 + C_3^I \Delta_3 \underline{e}_3 \quad (3.60)$$

Considerando que há reforço apenas na direção 1 (Figura 3.13) e comparando com (3.58).

$$I = C_1^I \Delta_1 \quad \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \quad (3.61)$$

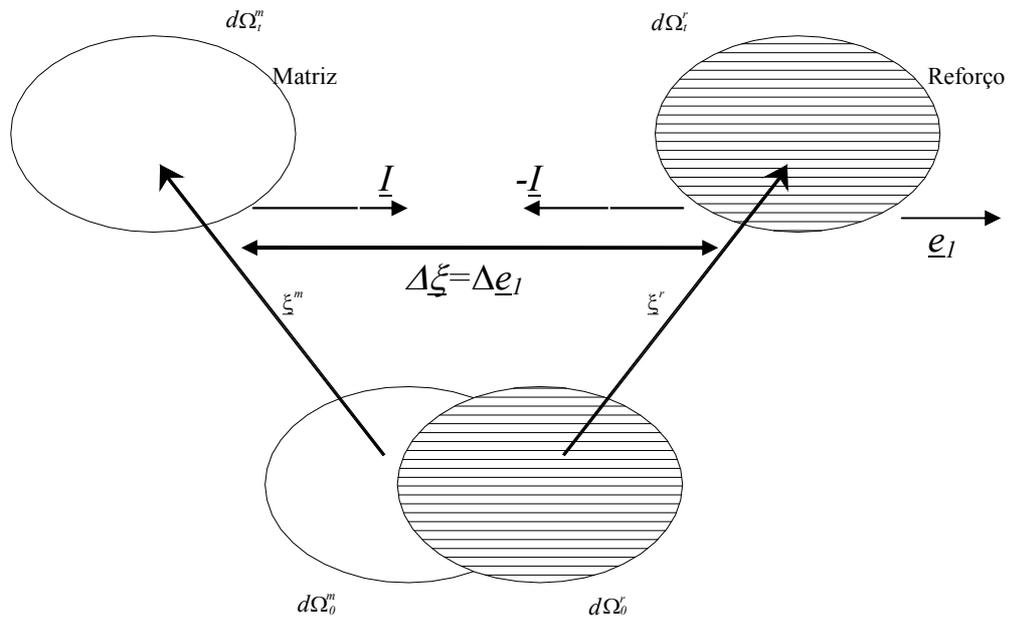


Figura 3.13 – Cinemática de um meio bifásico e força de interação.

Então, em definitivo:

$$\underline{I}^r = I \underline{e}_1, \quad \underline{\Delta} = \Delta \underline{e}_1, \quad I = c^l \Delta \quad (3.62)$$

onde:  $\Delta_1 = \Delta$  e  $C_{11}^l = c^l$ .

A extensão para outras direções de reforço é análoga.

### 3.10.3 Comportamento Elástico Aderente

#### 3.10.3.1 Aderência perfeita e sem escorregamento

Em grande parte dos problemas envolvendo estruturas de concreto armado, o deslizamento das armaduras em relação ao concreto não desempenha um papel fundamental. Desta forma, nesta seção é introduzida uma hipótese cinemática chamada de *hipótese de aderência perfeita*. Ela se traduz pela igualdade dos campos de deslocamento de todas as fases do meio. Assim:

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \quad \forall j \in \{m; r = 1, \dots, N\}, \quad \underline{\xi}^j(\underline{x}) = \underline{\xi}(\underline{x}) \quad (3.63)$$

Desta forma, uma vez que  $\underline{\xi}^r(\underline{x}) - \underline{\xi}^m(\underline{x}) = 0$ , a contribuição do último termo de (3.45) passa a ser nula desprezando o valor dos esforços de interação.

O modelo aderente, assim formulado, vai permitir tratar de problemas de material reforçado pelo qual se supõe que não há escorregamento na interface entre a matriz e as inclusões.

### 3.10.3.2 Condição de compatibilidade de deformação

Levando em conta a hipótese de aderência perfeita, se introduz, sem ambiguidade, o tensor de deformações totais:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{grad}} \xi + {}^t \underline{\underline{grad}} \xi \right) \quad (3.64)$$

As variáveis de deformação associadas a cada fase são agora:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^m = \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.65)$$

e

$$\epsilon^r = \frac{\partial(\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{e}}_r)}{\partial s^r} = \underline{\underline{\epsilon}} : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) \equiv \epsilon_{rr} \quad (3.66)$$

A hipótese de aderência perfeita se traduz, conseqüentemente, pelas relações de dependência entre as  $N + 6$  componentes da deformação generalizada do meio reforçado e, corresponde, neste sentido, à existência de ligações internas do material multifásico. A equação (3.66), que explica em termos de deformação esta ligação cinemática, é chamada de condição de compatibilidade de deformações de diferentes fases.

### 3.10.3.3 Equações de comportamento global: estado inicial natural

A hipótese de aderência perfeita implica na nulidade de deslocamentos relativos entre reforço e matriz. A equação (3.51) implica então, de forma dúbia, que o tensor de interação  $\underline{\underline{C}}^I$ , tome um valor infinito, os valores dos esforços de interação restam indeterminados. É então conveniente escrever o movimento do sistema para as equações de equilíbrio global que fazem alterar o tensor de tensões total  $\underline{\underline{\Sigma}}$ . Para poder resolver o problema formulado em tensões totais, vamos procurar exprimir o comportamento do meio multifásico aderente sob forma de uma relação  $\underline{\underline{\Sigma}}$  e  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , como apresentado na seção 3.7.

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{A}}^m : \underline{\underline{\epsilon}}^m = \underline{\underline{A}}^m : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.67)$$

$$\sigma^r = a^r \epsilon^r = (a^r \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) : \underline{\underline{\epsilon}}, \quad r = 1, \dots, N \quad (3.68)$$

Introduzindo estas relações em (3.39):

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.69)$$

Com

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^m + \sum_{r=1}^N a^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (3.70)$$

Onde  $\underline{\underline{A}}$  designa o tensor dos módulos elásticos totais do meio multifásico. Este tensor se decompõe aditivamente em uma contribuição da fase matriz e de cada fase reforço. Aparece claramente que as direções  $\underline{e}_r$  são privilegiadas, o que se traduz na característica anisotrópica do comportamento.

Conhecendo o estado de tensões totais  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , pode-se calcular diretamente as tensões parciais a partir da aplicação dos *operadores de localização*.

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.71)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{L}}^r : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.72)$$

As expressões destes operadores são obtidas introduzindo o seguinte tensor:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad , \quad \underline{\underline{C}} = \left( \underline{\underline{A}} \right)^{-1} \quad (3.73)$$

Com efeito:

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{A}}^m : \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} \right) \Rightarrow \underline{\underline{L}}^m = \underline{\underline{A}}^m : \underline{\underline{C}} \quad (3.74)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = (a^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} \right) \Rightarrow \underline{\underline{L}}^r = (a^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{C}} \quad (3.75)$$

### 3.11 COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO

A abordagem termodinâmica permite desacoplar a expressão do comportamento elástico de um meio multifásico aos dados de comportamento da fase matriz e das fases de reforço, assim como das interações.

Sendo de interesse agora a modelagem de um comportamento não-linear para o meio multifásico, a mesma abordagem vai conduzir ao mesmo desacoplamento dos comportamentos não-lineares para cada uma das fases.

### 3.11.1 Elastoplasticidade de cada uma das fases

O comportamento elástico apresentado na seção precedente é intimamente ligado à noção de reversibilidade dos processos mecânicos. O esquema elastoplástico permite levar em conta as evoluções irreversíveis, quando estas são independentes do parâmetro temporal.

Será apresentada, em primeiro lugar, a teoria tridimensional em um item dedicado a fase matriz, seguido do caso unidimensional para as fases de reforço e enfim o caso da interação matriz/reforço.

#### 3.11.1.1 Matriz

Define-se em primeiro lugar o domínio de elasticidade  $C^m$  como o conjunto de estados de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  para o qual as evoluções são reversíveis. Introduce-se para este efeito uma função  $f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m)$ , que se supõe convexa, não apresentando pontos singulares, tal que:

$$\begin{cases} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ no interior de } C^m \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^m \in \partial C^m \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ no exterior de } C^m \end{cases} \quad (3.76)$$

Chama-se de critério de plastificação a condição  $f^m = 0$ . O domínio elástico é suposto fixo e dito independente da história do carregamento do material.

Após determinar em que momento é deixado o domínio elástico, é conveniente definir a evolução das deformações irreversíveis. Decompõe-se classicamente o tensor de deformações em uma parte elástica e uma parte plástica.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^m = \underline{\underline{\varepsilon}}_e^m + \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m \quad (3.77)$$

As deformações elásticas são relacionadas às tensões por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_e^m = \underline{\underline{c}}^m : \underline{\underline{\sigma}}^m \quad (3.78)$$

As deformações plásticas são calculadas de forma incremental. A partir de um estado de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  situado na fronteira de  $C^m$  e por uma taxa de acréscimo  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m$ , duas situações podem se apresentar.

- Descarga, se:

$$\frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m < 0 \quad (3.79)$$

no caso em que a taxa de deformação associada a  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m$  é puramente elástica e por conseguinte  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = 0$ .

- Carga, se:

$$\frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m \geq 0 \quad (3.80)$$

no caso de plasticidade perfeita haverá igualdade na equação devido a invariância do domínio elástico. Esta igualdade recebe o nome de condição de consistência. A deformação plástica se escreve no caso de plasticidade associada (3.81a) e no caso de plasticidade não-associada a partir do potencial plástico  $g^m$  (3.81b)

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \quad (3.81a)$$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \quad (3.81b)$$

Esta condição é dita regra de normalidade ou regra de escoamento associada ao sentido onde a direção de deformação plástica é normal ao domínio de elasticidade  $C^m$ . O multiplicador plástico  $\dot{\lambda}^m$  deve ser positivo ou nulo.

Inserese ainda as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda}^m \geq 0 \quad , \quad f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}^m f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \quad (3.82)$$

### 3.11.1.2 Reforço

Os esforços internos para uma fase de reforço  $r$  são representados por uma tensão escalar  $\sigma^r$ . No caso em que o comportamento dos reforços é perfeitamente plástico, o domínio de elasticidade  $C^r$  corresponde a:

$$\sigma^r \in C^r \Leftrightarrow -\sigma_-^r \leq \sigma^r \leq \sigma_+^r \quad (3.83)$$

Onde  $\sigma_+^r$  designa a resistência à tração do reforço e  $-\sigma_-^r$  representa a resistência à compressão. Pode-se definir uma função de carga associada a  $C^r$  por:

$$f^r(\sigma^r) = \max(-\sigma_-^r - \sigma^r, \sigma^r - \sigma_+^r) \quad (3.84)$$

A deformação total é decomposta aditivamente em uma parte elástica e uma parte plástica.

$$\varepsilon^r = \varepsilon_e^r + \varepsilon_p^r \quad (3.85)$$

onde, de forma equivalente:

$$\varepsilon^r = c^r \sigma^r, \quad \sigma^r = a^r (\varepsilon^r - \varepsilon_p^r) \quad (3.86)$$

A evolução das deformações se escreve agora de forma muito simples. Para um estado de tensões que verifica o critério de plasticidade,  $\sigma^r = -\sigma_-^r$  ou  $\sigma^r = \sigma_+^r$ , a derivada do critério  $f^r$  vale então  $\pm 1$ , assim:

$$\dot{\sigma}^r = 0, \quad \dot{\varepsilon}_p^r = \dot{\varepsilon}^r \quad (3.87)$$

### 3.11.1.3 Interação

Introduz-se, neste momento, a função de carga  $f^I(\underline{I})$ , relativa à interação, definindo o domínio elástico no interior do qual a evolução do deslocamento relativo  $\underline{\Delta}$  é reversível.  $f^I$  é supostamente convexa e o critério de plasticidade é expresso por  $f^I \leq 0$ . Decompondo o deslocamento relativo em uma parcela reversível  $\underline{\Delta}_e$  e outra irreversível  $\underline{\Delta}_p$ , é possível escrever:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\Delta}}_p = 0 & \text{se } f^I < 0 \text{ ou } f^I = 0 \text{ e } \frac{\partial f^I}{\partial \underline{I}} \cdot \underline{I} < 0, \\ \dot{\underline{\Delta}}_p \neq 0 & \text{se } f^I = 0 \text{ e } \frac{\partial f^I}{\partial \underline{I}} \cdot \underline{I} \geq 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

O deslocamento relativo elástico  $\underline{\Delta}_e$  é definido através da inversa da lei de comportamento de interação, visto anteriormente.

$$\underline{\Delta}_e = (\underline{C}^I)^{-1} \cdot \underline{I} \quad (3.89)$$

A avaliação de  $\dot{\underline{\Delta}}_p$  é dada pela regra de escoamento plástico supostamente associada onde o vetor de deslocamentos relativos plástico é normal a superfície de carregamento definida por  $f^I = 0$ :

$$\dot{\underline{\Delta}}_p = \lambda^I \frac{\partial f^I}{\partial \underline{I}}, \quad \lambda^I \geq 0 \quad (3.90)$$

Onde  $\dot{\lambda}^I$  designa o multiplicador plástico da lei de interação. Enfim, a condição de consistência é dada pela equação:

$$\dot{f}^I = \frac{\partial f^I}{\partial \underline{I}} \cdot \underline{\dot{I}} = 0 \quad (3.91)$$

### 3.11.1.3.1 Plasticidade longitudinal da interação

Na seção 3.10.2.3 foi demonstrado que a força de interação  $\underline{I}$  assim como o vetor de deslocamento relativo elástico  $\underline{\Delta}_e$  são paralelos à direção de reforço  $\underline{e}_1$ .

$$\underline{I} = I \underline{e}_1, \quad \underline{\Delta}_e = \frac{1}{c^I} I \underline{e}_1 = \Delta_e \underline{e}_1, \quad \text{de onde} \quad \Delta_e = \frac{1}{c^I} I \quad (3.92)$$

É possível então supor que a superfície definida por  $f^I = 0$  é simétrica sobre o eixo  $I_1$  (componente de  $\underline{I}$  sobre  $\underline{e}_1$ ), assim desde que  $\underline{I} = I \underline{e}_1$ :

$$\frac{\partial f^I}{\partial I_2}(I, 0, 0) = \frac{\partial f^I}{\partial I_3}(I, 0, 0) = 0 \quad (3.93)$$

E então:

$$\frac{\partial f^I}{\partial \underline{I}}(I, 0, 0) = \frac{\partial f^I}{\partial I_1}(I, 0, 0) \underline{e}_1 \quad (3.94)$$

A regra de escoamento plástico se escreve então:

$$\underline{\dot{\Delta}}_p = \dot{\lambda}^I \frac{\partial f^I}{\partial I_1}(I, 0, 0) \underline{e}_1, \quad \dot{\lambda}^I \geq 0 \quad (3.95)$$

Isto é:

$$\underline{\dot{\Delta}}_p = \dot{\Delta}_p \underline{e}_1 \quad \text{com} \quad \dot{\Delta}_p = \dot{\lambda}^I \frac{\partial f^I}{\partial I_1}(I, 0, 0), \quad \dot{\lambda}^I \geq 0 \quad (3.96)$$

### 3.11.1.3.2 Plasticidade perfeita da lei de interação

Considerando agora um comportamento elastoplástico perfeito da interação, isto é, que o domínio de elasticidade, definido pela superfície  $f^I = 0$  não evolui ao curso do escoamento plástico. A função de carga depende desta forma exclusivamente do esforço de interação. É possível então adotar a função de carregamento da lei de interação seguinte:

$$f^I(I) = |I| - I_{\max} \leq 0 \quad (3.97)$$

O domínio de elasticidade é definido sobre o eixo orientado por  $\underline{e}_1$  para o intervalo  $[-I_{\max}, I_{\max}]$ .  $I_{\max}$  designa o valor absoluto do **limite do esforço de interação**. Em uma escala

microscópica, é descrito como *o limite da resultante por unidade de volume das tensões de cisalhamento exercidas pelas inclusões sobre a matriz na interface de contato entre os dois materiais*.

A condição de coerência se reduz à:

$$\frac{\partial f^I}{\partial \underline{I}}(I)\underline{\dot{I}} = \text{sign}(I)\dot{I} = 0 \Rightarrow \dot{I} = 0 \quad (3.98)$$

E considerando a lei de comportamento

$$\dot{I} = c^I(\dot{\Delta} - \dot{\Delta}_p) \quad (3.99)$$

Deduz-se ainda a igualdade das taxas de deslocamentos relativos total e plástico em um carregamento plástico.

$$\dot{\Delta} = \dot{\Delta}_p \quad (3.100)$$

Finalmente, as equações que regem a plasticidade perfeita de interação longitudinal, podem ser vistas na Figura 3.14:

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_p = 0 & \text{se } |I| < I_{\max} \quad \text{ou } |I| = I_{\max} \quad \text{e } \text{sign}(I)\dot{I} < 0, \\ \dot{\Delta}_p > 0 & \text{se } I = I_{\max} \quad \text{e } \dot{I} = 0 \\ \dot{\Delta}_p < 0 & \text{se } I = -I_{\max} \quad \text{e } \dot{I} = 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

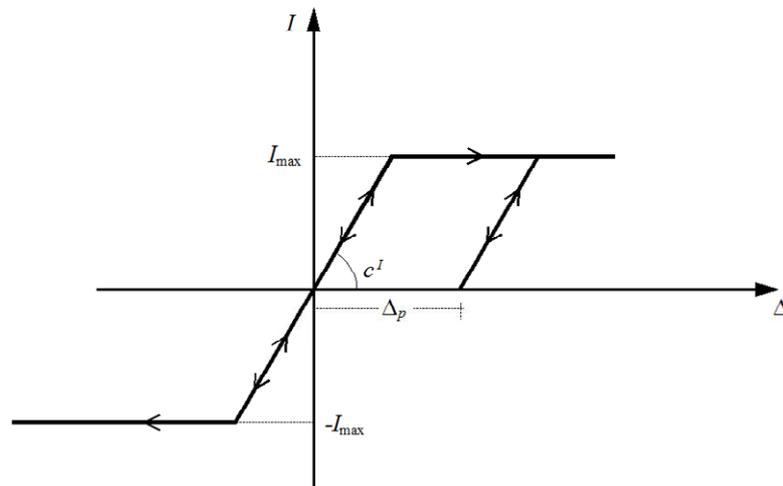


Figura 3.14 – Plasticidade perfeita da lei de interação entre as fases.

## 4 IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS E VALIDAÇÃO DO PROCEDIMENTO NUMÉRICO

### 4.1 MÉTODO VARIACIONAL EM DESLOCAMENTOS PARA O MEIO MULTIFÁSICO GERAL ELÁSTICO

#### 4.1.1 Introdução

A construção do modelo multifásico geral se baseia na existência de uma cinemática própria para cada uma das fases. Em uma formulação por elementos finitos em deslocamentos, as incógnitas principais serão os (N+1) campos de deslocamentos associados respectivamente à fase matriz e às N fases reforço.

Para resolver o problema, inicia-se por enunciar, em elasticidade, um princípio de mínimo de energia potencial sobre o espaço dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis (definição na seção 4.1.2.1). Procede-se à discretização da geometria com a introdução de uma família de elementos finitos multifásicos onde o número de graus de liberdade para cada nó é proporcional ao número de fases. Decompondo a energia potencial sobre os elementos surgem as expressões das matrizes de rigidez e os vetores de forças elementares.

#### 4.1.2 Princípio do mínimo de energia potencial

##### 4.1.2.1 Posicionamento do problema de elasticidade multifásica

Seja  $S$  um sistema bifásico ocupando um volume geométrico  $\Omega$ , submetido à um conjunto de solicitações como as que seguem:

- Forças volumétricas  $\rho^j(\underline{x})\underline{F}^j(\underline{x})$  que surgem nas equações de equilíbrio da seguinte forma:

$$\forall \underline{x} \in \Omega' \begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x}) \underline{F}^m(\underline{x}) + \underline{I}(\underline{x}) = 0 \\ \text{div}(\underline{\sigma}^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x}) \underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{I}(\underline{x}) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

- Forças superficiais verificando as condições de contorno

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \cdot \underline{n} &= \underline{T}^{d,m}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{T^m} \\ \underline{\sigma}^r(\underline{x})(\underline{n} \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r &= \underline{T}^{d,r}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{T^r} \end{aligned} \quad (4.2)$$

- Condições de contorno em deslocamentos

$$\underline{\xi}^j(\underline{x}) = \underline{\xi}^{d,j}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi^j} \quad j = \{m, r\} \quad (4.3)$$

Retomando as seguintes definições:

- O espaço dos campos dos esforços internos estaticamente admissíveis é o conjunto  $(\underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\sigma}^r, \underline{I})$  verificando (4.1).
- O espaço de campos de deslocamentos *cinematicamente admissíveis*, notado  $\mathbf{C}(S_{\xi}, \underline{\xi}^d)$ , é o conjunto dos  $(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r)$  contínuos, continuamente diferenciáveis e que verificam (4.3);

Retomando ainda o campo de deslocamentos relativos:

$$\underline{\Delta}(\underline{x}) = \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m \quad (4.4)$$

#### 4.1.2.2 Princípio do mínimo em deslocamentos

Seja  $\{\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \underline{\underline{\varepsilon}}^m, \underline{\underline{\varepsilon}}^r, \underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\underline{\sigma}}^r, \underline{I}\}$  o conjunto dos campos que definem a solução do problema elástico, a partir do raciocínio de Salençon (1996b). O princípio dos trabalhos virtuais aplicado a cada elemento de  $\mathbf{C}(S_{\xi}, \underline{\xi}^d)$  escreve-se:

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \in \mathbf{C}(S_{\xi}, \underline{\xi}^d) \quad & \int_{\Omega} [\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \underline{\underline{\sigma}}^r : \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{I} \cdot \underline{\Delta}] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} [\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\xi}^r] d\Omega + \\ & - \int_{S_{T^m}} \underline{T}^{d,m} \cdot \underline{\xi}^m dS - \int_{S_{T^r}} \underline{T}^{d,r} \cdot \underline{\xi}^r dS \\ & - \int_{S_{T^m}} \underline{\xi}^{d,m} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^m \cdot \underline{n} dS - \int_{S_{T^m}} \underline{\sigma}^r(\underline{n} \cdot \underline{e}_r) \underline{\xi}^{d,r} \cdot \underline{e}_r dS = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aplicando a equação anterior aos campos de solução  $(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r)$  e subtraindo membro a membro, temos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\underline{\tilde{\sigma}}^m : (\underline{\varepsilon}^m - \underline{\tilde{\varepsilon}}^m) + \tilde{\sigma}^r (\varepsilon^r - \tilde{\varepsilon}^r) + \tilde{I} \cdot (\underline{\Delta} - \tilde{\Delta})] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} [\rho^m \underline{F}^m \cdot (\underline{\xi}^m - \tilde{\xi}^m) + \rho^r \underline{F}^r \cdot (\underline{\xi}^r - \tilde{\xi}^r)] d\Omega + \\ & - \int_{S_{T^m}} \underline{T}^{d,m} \cdot (\underline{\xi}^m - \tilde{\xi}^m) dS - \int_{S_{T^r}} \underline{T}^{d,r} \cdot (\underline{\xi}^r - \tilde{\xi}^r) dS = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

As densidades de energia livre associadas à cada uma das fases e à interação, verificam:

$$\underline{\tilde{\sigma}}^m = \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\varepsilon}^m}(\underline{\tilde{\varepsilon}}^m) \quad (4.7)$$

$$\tilde{\sigma}^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r}(\tilde{\varepsilon}^r) \quad (4.8)$$

$$\tilde{I} = \frac{\partial \psi^I}{\partial \underline{\Delta}}(\tilde{\Delta}) \quad (4.9)$$

A estabilidade termodinâmica dos materiais requer a convexidade destas densidades, o que se escreve:

$$\begin{aligned} \psi^m(\underline{\varepsilon}^m) - \psi^m(\underline{\tilde{\varepsilon}}^m) & \geq \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\varepsilon}^m}(\underline{\tilde{\varepsilon}}^m) : (\underline{\varepsilon}^m - \underline{\tilde{\varepsilon}}^m) \\ \psi^r(\varepsilon^r) - \psi^r(\tilde{\varepsilon}^r) & \geq \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r}(\tilde{\varepsilon}^r) (\varepsilon^r - \tilde{\varepsilon}^r) \\ \psi^I(\underline{\Delta}) - \psi^I(\tilde{\Delta}) & \geq \frac{\partial \psi^I}{\partial \underline{\Delta}}(\tilde{\Delta}) \cdot (\underline{\Delta} - \tilde{\Delta}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) e referindo-se à (4.6) mostra-se que os campos solução  $(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r)$  minimizam sobre  $\mathbf{C}(S_{\xi}, \underline{\xi}^d)$  o funcional energia potencial definido por  $\mathbf{\varepsilon}_n = \frac{1}{2} {}^T \underline{U} \underline{K} \underline{U} - {}^T \underline{U} \underline{F}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{\varepsilon}_n(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) & = W(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) - \phi(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) \\ W(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) & = \int_{\Omega} [\psi^m(\underline{\varepsilon}^m) + \psi^r(\varepsilon^r) + \psi^I(\underline{\Delta})] d\Omega \\ \phi(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) & = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\xi}^r) d\Omega + \int_{S_{T^m}} \underline{T}^{d,m} \cdot \underline{\xi}^m dS + \int_{S_{T^r}} \underline{T}^{d,r} \cdot \underline{\xi}^r dS \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $S_{T^m}$  (resp.  $S_{T^r}$ ) designa a porção do contorno da fase matriz (resp. do reforço) sobre a qual está prescrita a componente segundo a vetor  $i$  do vetor  $T^m$  (resp.  $T^r$ ). Salienta-se que

em (4.11), implicitamente foram utilizadas as equações cinemáticas (3.43), (3.44) e ainda  $\underline{\Delta} = (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m)$ .

No que segue, supõe-se um comportamento elástico linear para cada fase. Explicitam-se as densidades de energia conforme apresentado em (3.46), (3.48) e (3.50).

### 4.1.3 A técnica de elementos finitos

#### 4.1.3.1 Malha da geometria

A construção do espaço  $C_n$  apropriado se apóia na discretização da geometria do sistema. Chama-se de malha a cobertura do volume  $\Omega$  por  $N_e$  elementos poliédricos, notados  $v_e$ , que verificam a seguinte propriedade: a intersecção de dois elementos adjacentes é um vértice, uma aresta ou uma face inteira. Se  $\Omega$  não é poliédrico, a cobertura será aproximada (Figura 4.1).

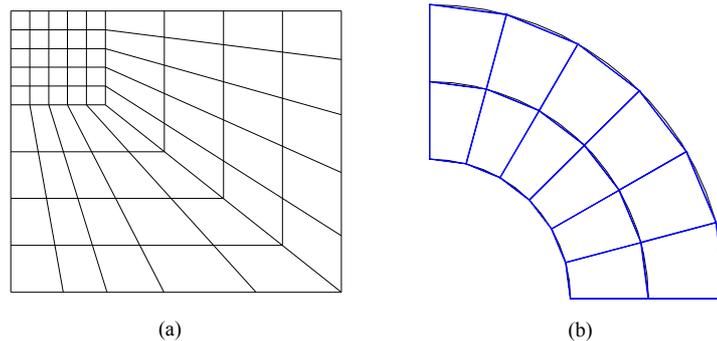


Figura 4.1 – Malha exata (a) e malha aproximada (b).

#### 4.1.3.2 Elementos Finitos utilizados para o modelo

Para representar o modelo multifásico foram utilizados elementos finitos isoparamétricos tridimensionais da família Serendipity. Elementos isoparamétricos são aqueles que utilizam as funções de interpolação para definir tanto as incógnitas do problema, quanto a geometria, a partir dos respectivos valores nodais. Elementos da família Serendipity são os que possuem nós apenas no seu contorno como explica Jost (2006).

Neste trabalho optou-se pelo uso dos elementos hexaédricos de 8 e 20 nós. Para o modelo com aderência imperfeita, com duas direções de reforço, são necessários dois graus de liberdade adicionais, totalizando cinco para cada nó. Assim, os deslocamentos podem ser escritos sob a forma de um vetor  $\underline{\xi}$  chamado de vetor de deslocamentos generalizado.

$$\underline{\xi}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \xi_x^m \\ \xi_y^m \\ \xi_z^m \\ \xi_1^r \\ \xi_2^r \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

onde  $\xi_x^m$ ,  $\xi_y^m$  e  $\xi_z^m$  designam as três componentes de deslocamentos ( $x, y$  e  $z$ ) da fase matriz no ponto  $\underline{x}$ . Já  $\xi_1^r$  e  $\xi_2^r$  definem os deslocamento da fase reforço nas direções 1 e 2, respectivamente.

Para cada elemento com  $n_e$  nós, define-se o vetor de deslocamentos nodais  $\underline{u}_e$  a seguir:

$${}^i \underline{u}_e = \{ \xi_{x,1}^m, \xi_{y,1}^m, \xi_{z,1}^m, \xi_{1,1}^r, \xi_{2,1}^r \cdots \xi_{x,n_e}^m, \xi_{y,n_e}^m, \xi_{z,n_e}^m, \xi_{1,n_e}^r, \xi_{2,n_e}^r \} \quad (4.13)$$

Para o elemento hexaédrico de 8 nós, ilustrado na Figura 4.2, são utilizadas funções de interpolação lineares. Desta forma, o campo de deslocamento possui variação linear e os campos de tensões são constantes ao longo das bordas do elemento.

As funções de forma, que tem como variáveis independentes as coordenadas naturais  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , são, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000):

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (4.14)$$

onde  $\xi_0 = \xi \xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta \eta_i$ ,  $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$ .

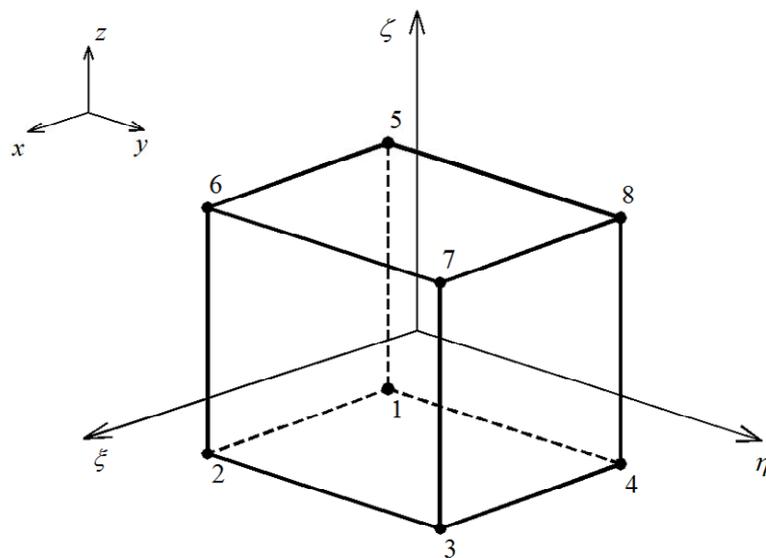


Figura 4.2 – Hexaedro linear de 8 nós.

Para o elemento hexaédrico de 20 nós (Figura 4.3), as funções de forma são do tipo quadrático. Assim, o campo de deslocamentos possui variação quadrática e o campo de tensões tem variação linear ao longo das bordas do elemento.

As funções de interpolação para este elemento com as numerações apresentadas na Figura 4.3, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), são:

a) Nós de canto:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad , \quad i = 1,2,3,4,5,6,7,8 \quad (4.15)$$

b) Nós intermediários

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad , \quad i = 9,11,13,15 \quad (4.16)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0) \quad , \quad i = 10,12,14,16 \quad (4.17)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad , \quad i = 17,18,19,20 \quad (4.18)$$

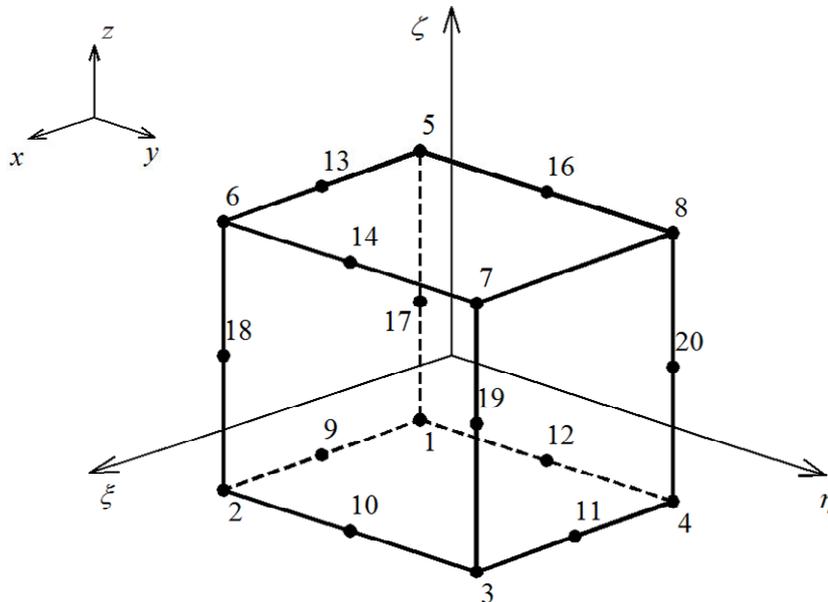


Figura 4.3 – Hexaedro quadrático de 20 nós.

#### 4.1.3.3 Princípio do mínimo discretizado

Define-se os campos de deslocamento  $\underline{\xi}_n$  a partir do valor dos deslocamentos nos nós da malha. Os nós são os vértices dos elementos ainda que eventualmente existam pontos suplementares localizados nas arestas e no interior.

Representa-se por  $\underline{u}_e$  (4.13) o vetor de deslocamentos nodais do elemento  $e$ . A aproximação do campo  $\underline{\xi}_n$  ao elemento se escreve como a interpolação seguinte:

$$\forall x \in \nu_e, \quad \underline{\xi}_n(\underline{x}) = \mathbf{N}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{N}_e$  designa a matriz de funções de interpolação polinomiais em  $\underline{x}$ . É definida por  $n_e$  blocos sob a seguinte forma (considerando 5 graus de liberdade por nós).

$$\forall x \in \nu_e, \quad \mathbf{N}_e(x, y, z) = \begin{bmatrix} N_i(x, y, z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i(x, y, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & N_i(x, y, z) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & N_i(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Todo o campo de deslocamento  $\underline{\xi}_n$  é então completamente definido pelo conjunto de componentes de deslocamento de todos os nós da malha. Seja  $\underline{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$  este vetor. O carácter cinematicamente admissível de  $\underline{\xi}_n$  impõe que as componentes associadas aos nós situados em  $S_\xi$  tenham valores fixos (por exemplo dados por  $\underline{\xi}^d$ ). Designando por  $I(k)$  o número do  $k$ -ésimo grau de liberdade bloqueado ( $k = 1, \dots, N_{cl}$ ) e por  $u_{I(k)}$  seu valor imposto, se explicita o espaço  $\mathbf{C}_n$  sob a forma:

$$\mathbf{C}_n = \left\{ \underline{U} \in \mathfrak{R}^n, \quad u_{I(k)} = u_{I(k)}^d, \quad k = 1, \dots, N_{cl} \right\} \quad (4.21)$$

A melhor abordagem da solução do problema elástico em  $\mathbf{C}_n$  é a solução do problema de discretização minimizado seguinte:

$$(P) : \text{encontrar } \underline{\tilde{U}} \equiv \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n\} \text{ tal que } \begin{cases} \underline{\tilde{U}} \in \mathbf{C}_n \\ \varepsilon_n(\underline{\tilde{U}}) = \min \varepsilon_n(\underline{U}) \end{cases} \quad (4.22)$$

Na prática, se é escolhida uma densidade de energia livre quadrática, a função  $\varepsilon_n$  (energia potencial) é igualmente quadrática e ainda estritamente convexa. A minimização de tal função conduz então a um sistema de equações lineares que admite uma única solução sobre  $\mathbf{C}_n$ .

Decompondo as integrais sobre os elementos da malha, a energia potencial discretizada  $\varepsilon_n(\underline{U})$  se exprime por:

$$\varepsilon_n(\underline{U}) \equiv \mathbf{W}_{|C_n}(\underline{U}) - \Phi_{|C_n}(\underline{U}) \quad (4.23)$$

$$\mathbf{W}_{C_n}(\underline{U}) = \sum_{e=1}^{N_e} \left[ \psi^m(\underline{\varepsilon}^m) + \psi^r(\varepsilon^r) + \psi^l(\Delta^l) \right] d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} w_e(\underline{u}_e) \quad (4.24)$$

$$\Phi_{C_n}(\underline{U}) = \int_{v_e} \left( \rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\xi}^r \right) d\Omega + \sum_i \int_{v_e \cap S_{T_i^m}} \left( T_i^{m,d} \xi_i^m \right) dS + \sum_i \int_{v_e \cap S_{T_i^r}} \left( T_i^{r,d} \xi_i^r \right) dS = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_e(\underline{u}_e) \quad (4.25)$$

O termo  $w_e(\underline{u}_e)$  da equação (4.24) é a integral sobre o elemento  $v_e$  de uma soma de termos relativos às fases matriz e reforço e ao esforço de interação, respectivamente. Assim.

$$w_e(\underline{u}_e) = w_e^m(\underline{u}_e) + w_e^r(\underline{u}_e) + w_e^l(\underline{u}_e) \quad (4.26)$$

A fim de representar matricialmente as densidades de energia livre e  $\phi_e$ , escreve-se a energia potencial discretizada ( $w_e - \phi_e$ ) sob a forma elemental seguinte:

$$w_e(\underline{u}_e) - \phi_e(\underline{u}_e) = \frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot \mathbf{k}_e \cdot \underline{u}_e - {}^t \underline{u}_e \cdot \underline{f}_e \quad (4.27)$$

O objetivo das seções seguintes é o de exibir as expressões de  $\mathbf{k}_e$  e  $\underline{f}_e$ , chamados respectivamente de matriz de rigidez elemental e vetor de forças elemental.

#### 4.1.3.4 Densidades de energia livre expressas matricialmente

Devido à representação matricial, os tensores simétricos de segunda ordem (tensão e deformação) são substituídos por suas componentes em uma base ortonormal, enquanto que os tensores de quarta ordem são substituídos por matrizes quadradas.

##### 4.1.3.4.1 Energia da fase matriz

Para a representação tridimensional no espaço  $Oxyz$ , utilizado a representação vetorial, obtemos as seguintes simplificações:

$$\underline{\underline{\sigma}} \leftrightarrow {}^t \underline{\sigma} = \left\{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz} \right\} \quad (4.28)$$

Similarmente o tensor de deformações pode ser representado por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \leftrightarrow {}^t \underline{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xz} \right\} \quad (4.29)$$

Chamando de  $\mathbf{D}^m$  a matriz de elasticidade associada aos tensor dos módulos elásticos da fase matriz e  $\underline{\sigma}_0$  a tensão inicial da fase matriz, a densidade de energia livre se escreve:

$$\psi^m(\underline{\varepsilon}^m) = \frac{1}{2} {}^t \underline{\varepsilon}^m \cdot \mathbf{D}^m \cdot \underline{\varepsilon}^m + {}^t \underline{\varepsilon}^m \cdot (\underline{\sigma}_0 - \mathbf{D}^m \cdot \underline{\varepsilon}_{an}) \quad (4.30)$$

onde  $\underline{\varepsilon}_{an}$  é o vetor de deformações anelásticas. A lei de comportamento fica:

$$\underline{\sigma}^m = \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\varepsilon}^m} = \mathbf{D}^m \cdot (\underline{\varepsilon}^m - \underline{\varepsilon}_{an}^m) + \underline{\sigma}_0^m \quad (4.31)$$

#### 4.1.3.4.2 Energia da fase reforço

Para a densidade de energia livre da fase reforço, temos a seguinte expressão:

$$\psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} a^r (\varepsilon^r)^2 + \varepsilon^r (\sigma_0^r - a^r \varepsilon_{an}^r) \quad (4.32)$$

Onde  $a^r$  representa a rigidez escalar da fase reforço,  $\sigma_0^r$  a tensão inicial na fase reforço e  $\varepsilon_{an}^r$  as tensões anelásticas na fase reforço.

#### 4.1.3.4.3 Soma das densidades de energia das duas fases

Buscando simplificar o termo correspondente às densidades de energia das fases matriz e reforço, introduz-se neste momento os vetores de tensão e deformação generalizados, apresentados a seguir.

A implementação do modelo será realizada com a utilização de elementos tridimensionais com cinco graus de liberdade por nó. O tensor de tensões será representado por um vetor com oito componentes, onde as seis primeiras componentes referem-se à fase matriz e as duas últimas às duas direções de reforço.

$$\underline{\underline{\sigma}} \leftrightarrow {}^t \underline{\sigma} = \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{r1}, \sigma_{r2} \} \quad (4.33)$$

Similarmente o tensor de deformações pode ser representado por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \leftrightarrow {}^t \underline{\varepsilon} = \{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2} \} \quad (4.34)$$

Desta forma se torna possível escrever a lei de comportamento, matricialmente, de forma simplificada.

Enfim, representando por  $\mathbf{D}$ , a matriz de elasticidade generalizada, com dimensão 8x8.

$$\mathbf{D} = \left[ \begin{array}{cccccc|cc} & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2^r \end{array} \right] \quad (4.35)$$

Onde  $\mathbf{D}^m$  é a matriz dos módulos elásticos da fase matriz, com dimensão 6x6,  $a_1^r$  e  $a_2^r$  representam a rigidez do reforço nas direções 1 e 2, respectivamente.

Assim, a densidade de energia livre se torna:

$$\psi^m(\underline{\varepsilon}^m) + \psi^r(\underline{\varepsilon}^r) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} \cdot (\underline{\sigma}_0 - \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}_{an}) \quad (4.36)$$

de onde vem a lei de comportamento:

$$\underline{\sigma} = \mathbf{D} \cdot (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_{an}) + \underline{\sigma}_0 \quad (4.37)$$

onde  $\underline{\varepsilon}_{an}$ , representa as deformações anelásticas impostas

Exprimindo agora esta densidade de energia livre relativa às duas fases em função do vetor de deslocamento nodais  $\underline{u}_e$ . Notando  $\mathbf{L}$  a matriz simbólica de diferenciação associada à parte simétrica do operador gradiente, pode-se escrever:

$$\underline{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \underline{\xi}_n \quad (4.38)$$

Substituindo (4.19) exprime-se  $\underline{\varepsilon}$  sobre cada elemento em função dos deslocamentos nodais por:

$$\forall x \in v_e, \quad \underline{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e = \mathbf{B}_e \cdot \underline{u}_e \quad (4.39)$$

A matriz  $\mathbf{B}$ , que aparece em (4.39), terá a forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial N_i}{\partial y} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Onde  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial z}$  são as derivadas das funções de forma em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e correspondentes ao nó  $i$ .  $\theta$  é o ângulo entre a direção de reforço 1 e o eixo  $x$ , conforme pode ser visto na Figura 4.4.

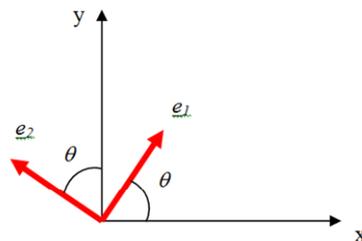


Figura 4.4 – Direções de reforço

De onde vem que:

$$\underline{e}_1 = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y \quad (4.41)$$

Finalmente, a expressão da densidade de energia livre associada às duas fases é obtida substituindo (4.39) em (4.36).

$$\psi^m(\underline{\varepsilon}^m) + \psi^r(\underline{\varepsilon}^r) = \frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e \cdot \underline{u}_e + {}^t \underline{u}_e \cdot ({}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\sigma}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e \cdot \underline{u}_{eam}) \quad (4.42)$$

#### 4.1.3.4.4 Densidade de energia relativa à interação entre as fases

O esforço volumétrico de interação se escreve em função das variáveis de deslocamentos sob a forma:

$$\underline{I}^i = c^I \left( \xi_i^r - \underline{\xi}^m \cdot \underline{e}_i \right) \cdot \underline{e}_i \quad (4.43)$$

Onde  $i$  define a direção de reforço. Considerando agora apenas uma direção de reforço, temos o seguinte desenvolvimento:

$$\underline{I}^1 = c^I (\underline{\xi}_1^r - \underline{\xi}_1^m \cdot \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1, \quad \underline{I}^1 = c^I \underline{\Delta}_1 \quad \text{com} \quad \underline{\Delta}_1 = (\underline{\xi}_1^r - \underline{\xi}_1^m \cdot \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 \quad (4.44)$$

Utilizando a definição do vetor  $\underline{e}_1$ .

$$\underline{I}^1 = c^I \left( \underline{\xi}_1^r - (\underline{\xi}_x^m \cos \theta - \underline{\xi}_y^m \sin \theta) \cdot \underline{e}_1 \right) \quad (4.45)$$

O que resulta, vetorialmente em:

$$\underline{I}^1 = c^I \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\xi} = c^I \left( {}^t \underline{P}_1 \cdot \underline{\xi} \right) = c^I \left( {}^t \underline{P}_1 \cdot \mathbf{N}_e \cdot \underline{u}_e \right) \quad (4.46)$$

E desta forma, a densidade de energia livre do esforço de interação se torna:

$$\psi^I(\underline{\Delta}) = \frac{1}{2} c^I (\underline{\Delta}_1)^2 = \frac{1}{2} c^I \left( \underline{\xi}_1^r - \underline{\xi}_x^m \cos \theta - \underline{\xi}_y^m \sin \theta \right)^2 \quad (4.47)$$

Introduzindo a matriz  $\mathbf{T}$ :

$$\psi^I(\underline{\Delta}) = \frac{1}{2} \left( {}^t \underline{\xi} \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \underline{\xi} \right) \quad (4.48)$$

Onde  $\mathbf{T}_1$  é definido por:

$$\mathbf{T}_1 = c^I \left( \underline{P}_1 \cdot {}^t \underline{P}_1 \right) \quad (4.49)$$

Finalmente temos:

$$\psi^I(\underline{\Delta}) = \frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{N}_e \cdot \underline{u}_e \quad (4.50)$$

Considerando as direções de reforço definidas na Figura 4.4, temos as seguintes matrizes  $\mathbf{T}$ .

$$\mathbf{T}_1 = c^I \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{T}_2 = c^I \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 & \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

#### 4.1.3.5 Formas integrais elementares

**Matriz de rigidez elementar:** para exprimir a forma integral da energia elástica, utilizamos (4.42) e (4.50) em (4.24). Assim:

$$w_e(\underline{u}_e) = \frac{1}{2} \underline{u}_e \cdot \left[ \int_{ve} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e + \sum_i {}^t \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{B}_e d\Omega \right] \cdot \underline{u}_e - \int_{ve} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \varepsilon_{an} - {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\sigma}_o d\Omega \quad (4.53)$$

Para identificação, a matriz de rigidez elementar é:

$$\mathbf{k}_e = \int_{ve} \left( {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e + \sum_i {}^t \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{N}_e \right) d\Omega \quad (4.54)$$

#### Vetor de forças elementar:

O vetor de forças elementar, associado às tensões iniciais é:

$$\underline{f}_e^o = \int_{ve} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\sigma}_o d\Omega \quad (4.55)$$

O vetor de forças elementar, associado às deformações anelásticas:

$$\underline{f}_e^{an} = \int_{ve} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \varepsilon_{an} d\Omega \quad (4.56)$$

No que concerne aos esforços externos, associa-se às densidades volumétricas e superficiais (4.25) os vetores seguintes:

$$\begin{aligned} {}^t \underline{\rho F} &= \left\{ \rho^m \underline{F}_x^m, \rho^m \underline{F}_y^m, \rho^m \underline{F}_z^m, 0, 0 \right\} \\ {}^t \underline{T}^m &= \left\{ \underline{T}_x^{m,d}, \underline{T}_y^{m,d}, \underline{T}_z^{m,d}, 0, 0 \right\} \\ {}^t \underline{T}^r &= \left\{ 0, 0, 0, \underline{T}_1^{r,d}, \underline{T}_2^{r,d} \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

A contribuição elementar  $\phi_e(\underline{u}_e)$  à energia potencial fica:

$$\phi_e(\underline{u}_e) = \underline{u}_e \cdot \left[ \int_{ve} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \underline{\rho F} d\Omega + \int_{ve \cap S_{Tm}} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \underline{T}^m dS + \int_{ve \cap S_{Tr}} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \underline{T}^r dS \right] \quad (4.58)$$

#### 4.1.3.6 Integração numérica

Neste trabalho, as integrais envolvidas na formulação são obtidas numericamente. Para isso foi utilizada a técnica de integração completa de Gauss-Legendre. As integrais envolvendo regiões prismáticas são definidas por:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i w_j w_k w_l f(\xi_j, \eta_k, \zeta_l) \quad (4.59)$$

Onde  $i$  é o número do ponto de integração,  $\xi_j, \eta_k, \zeta_l$  são as coordenadas dos pontos  $i$ ,  $w_j, w_k, w_l$  são os pesos associados ao ponto  $i$ .

Para o elemento linear de 8 nós, é necessário o emprego da regra 2x2x2 pontos de Gauss para representar o volume do elemento, totalizando 8 pontos de integração. De forma análoga, para o elemento quadrático de 20 nós é necessário a utilização da regra de 3x3x3 pontos de Gauss, alcançando um total de 27 pontos. A Tabela 4.1 apresenta as coordenadas e os pesos dos pontos de integração.

Tabela 4.1– Coordenadas e pesos dos pontos de integração

Regra	Coordenadas $\xi_j, \eta_k, \zeta_l$	Pesos $w_j, w_k, w_l$
2x2x2	- 0,57735	1,00000
	+ 0,57735	1,00000
3x3x3	- 0,77459	0,55555
	0	0,88888
	+ 0,77459	0,55555

#### 4.1.3.7 Montagem

O vetor global de deslocamentos  $\underline{U}$  se define como o conjunto de componentes dos deslocamentos elementares. Escolheu-se, assim, uma numeração global dos graus de liberdade do sistema. Para cada elemento, a correspondência entre a numeração local e global dos graus de liberdade é definida por uma tabela de localização.

Tendo calculado as quantidades elementares, realiza-se, na sequência, a montagem das matrizes e dos vetores de força. Estes processos consistem no posicionamento, em cada elemento, do vetor  $\underline{f}_e$  (respectivamente da matriz  $\mathbf{k}_e$ ) em um vetor de força global  $\underline{F}$  (respectivamente da matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ ), utilizando a mesma correspondência de numeração que foi empregada para ordenar os  $\underline{u}_e$  em  $\underline{U}$ .

## 4.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO MULTIFÁSICO EM ELASTOPLASTICIDADE

Após haver estabelecido na seção 3.11 a formulação elastoplástica do meio multifásico, apresenta-se aqui a implementação numérica em elementos finitos para a resolução de problemas elastoplásticos.

### 4.2.1 Equações do problema de evolução elastoplástica do meio multifásico

Seja um sistema multifásico ocupando um volume  $\nu$ , regido pelas equações de equilíbrio das fases matriz e reforço seguintes:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \rho^m \underline{\underline{F}}^m + \underline{\underline{I}} &= \underline{\underline{0}} \\ \operatorname{div}(\sigma^r e_1 \otimes e_1) - \underline{\underline{I}} &= \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

com as condições de contorno em tensões e deslocamentos já apresentadas.

Para ligar as variáveis de deformação  $(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon^r, \Delta, \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m, \varepsilon_p^r, \Delta_p)$  aos esforços internos  $(\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma^r, I)$ , iremos juntar às equações de equilíbrio e às condições de contorno, as leis de comportamento.

#### Fase matriz

$$\begin{aligned} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) &\leq 0 \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^m &= \underline{\underline{A}}^m : (\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^m - \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p^m), \quad \text{com} \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m}, \quad \dot{\lambda}^m \geq 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

#### Fase reforço

$$\begin{aligned} f^r(\sigma^r) &= |\sigma^r| - \sigma_0 \leq 0 \\ \dot{\sigma}^r &= a^r (\dot{\varepsilon}^r - \dot{\varepsilon}_p^r), \quad \text{com} \quad \dot{\varepsilon}_p^r = \dot{\lambda}^r \operatorname{sign}(\sigma^r), \quad \dot{\lambda}^r \geq 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

#### Interação matriz/reforço

$$\begin{aligned} f^r(I) &= |I| - I_{\max} \leq 0 \\ \dot{I}^r &= c^l (\dot{\Delta} - \dot{\Delta}_p), \quad \text{com} \quad \dot{\Delta}_p = \dot{\lambda}^l \operatorname{sign}(I), \quad \dot{\lambda}^l \geq 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

### 4.2.2 Discretização temporal da evolução do carregamento

No quadro da plasticidade clássica considerado aqui (e ao contrário da viscoplasticidade), os tempos são fictícios e intervêm apenas como um parâmetro do processo de carregamento.

Levando em conta estas observações, escreve-se ( $t_0 = 0, \dots, t_N = T$ ) os diferentes instantes de aplicação do carregamento, e ( $Q_0, \dots, Q_N$ ) os valores correspondentes. Representa-se por  $\Delta Q_n$  o incremento de carga aplicado entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ .

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m = \underline{\underline{A}}^m : \left( \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^m - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \right), \quad \text{com} \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}^m, \quad \dot{\lambda}^m \geq 0 \quad (4.64)$$

$$\Delta Q_n = Q_{n+1} - Q_n \quad (4.65)$$

O problema de evolução é, então, resumido a uma sucessão de problemas incrementais. Supõe-se, no instante  $t_n$ , os campos  $\left\{ \underline{\underline{\sigma}}_n^m, \sigma_n^r, I_n, \underline{\underline{\varepsilon}}_n^m, \varepsilon_n^r, \Delta_n, \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{m,p}, \varepsilon_n^{r,p}, \Delta_n^p \right\}$  equilibrando  $Q_n$  e verificando localmente a lei de comportamento. Procura-se encontrar o estado de equilíbrio  $\left\{ \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m, \sigma_{n+1}^r, I_{n+1}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^m, \varepsilon_{n+1}^r, \Delta_{n+1}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{m,p}, \varepsilon_{n+1}^{r,p}, \Delta_{n+1}^p \right\}$  resultante da aplicação de  $\Delta Q_n$ .

Sob o ponto de vista de elementos finitos, representa-se por  $\underline{U}_n$  o campo de deslocamentos nodais no instante  $t_n$  e por  $Q_n$  o vetor de forças associadas aos esforços externos. A variação de cada uma destas quantidades entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  é:

$$\Delta \chi_n = \chi_{n+1} - \chi_n, \quad \chi \in \left\{ \underline{U}, Q, \underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma^r, I, \underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon^r, \Delta, \underline{\underline{\varepsilon}}^{m,p}, \varepsilon^{r,p}, \Delta^p \right\} \quad (4.66)$$

Em toda a seqüência do capítulo serão utilizadas as notações matriciais de elementos finitos para escrever o equilíbrio. Por motivos de clareza, a notação tensorial continuará sendo empregada quando estiverem em questão quantidades avaliadas localmente.

### 4.2.3 Algoritmo de resolução global

Entende-se por *algoritmo de resolução global* ao processo que permite obter o vetor de deslocamentos nodais à cada iteração. Apresenta-se nesta seção o *método da tensões iniciais* (Zienkiewicz et al, 1969; Nguyen, 1977).

Para compreender o princípio, supõe-se, em primeiro lugar, conhecidos os campo de deformações plásticas  $\left( \underline{\underline{\varepsilon}}^{m,p}, \varepsilon^{r,p}, \Delta^p \right)$  gerados na estrutura pela aplicação de  $\Delta Q_n$ . Interpretando-as como *deformações anelásticas impostas* sobre cada elemento, pode-se associar por (4.56) um vetor de forças elementares. A montagem destas contribuições fornece o vetor de forças plásticas  $\underline{\underline{\Delta F}}_n^p$ . Obtém-se a solução em deslocamento resolvendo a equação de equilíbrio incremental:

$$\mathbf{K} \cdot \underline{\Delta U}_n = \underline{\Delta Q}_n + \underline{\Delta F}_n^p \quad (4.67)$$

Certamente, os campos  $(\underline{\varepsilon}^{m,p}, \varepsilon^{r,p}, \Delta^p)$  e por consequência  $\underline{\Delta F}_n^p$  são inicialmente desconhecidos. Com o uso de aproximações sucessivas, obtém-se, com uma série de *cálculos elásticos com deformações impostas*, as aproximações de  $\underline{\Delta U}_n$ . Mais precisamente:

- Inicializa-se o processo de posse de  $\underline{\Delta F}_n^{p,0} = 0$  (iteração 1)
- Ao início da iteração  $i$ , supõe-se conhecido os campos  $(\underline{\varepsilon}^{m,p}, \varepsilon^{r,p}, \Delta^p)$  e por consequência o vetor de forças plásticas  $\underline{\Delta F}_n^{p,i-1}$ . Resolve-se então:

$$\mathbf{K} \cdot \underline{\Delta U}_n^i = \underline{\Delta Q}_n + \underline{\Delta F}_n^{p,i-1} \quad (4.68)$$

- A partir da solução  $\underline{\Delta U}_n^i$ , pode-se deduzir os campos de deformação  $(\underline{\varepsilon}^{m,p}, \varepsilon^{r,p}, \Delta^p)$ , estes que são os campos que governam localmente a evolução elastoplástica, aplica-se o algoritmo de integração local de plasticidade para cada fase (ver seção seguinte). Obtém-se assim uma nova avaliação  $(\underline{\varepsilon}^{m,p}, \varepsilon^{r,p}, \Delta^p)$  da deformação plástica além de  $\underline{\Delta F}_n^{p,i}$
- Se o critério de convergência foi atingido  $\underline{\Delta U}_n^i$  é a solução procurada, caso contrário retorna-se à (4.68).

#### 4.2.4 Algoritmo de integração local

Referindo-se a etapa correspondente ao fim da iteração  $i$  do problema, relativo ao estado de carregamento  $Q_{n+1}$ . Os três critérios de plasticidade devem ser testados sucessivamente sobre os esforços internos  $\underline{\sigma}_{n+1,i}^m$ ,  $\sigma_{n+1,i}^r$  e  $I_{n+1,i}$ . Como não temos os valores incrementais das variáveis de deformação plásticas à iteração atual  $i$ , utilizam-se, então, para calcular os esforços internos, os mesmos incrementos obtidos à iteração precedente ( $i-1$ ).

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{n+1,i}^{trial,m} &= \underline{\sigma}_n^m + \underline{A}^m : (\underline{\varepsilon}_{n,i}^m - \underline{\varepsilon}_{n,i-1}^{m,p}) \\ \sigma_{n+1,i}^{trial,r} &= \sigma_n^r + a^r : (\varepsilon_{n,i}^r - \varepsilon_{n,i-1}^{r,p}) \\ I_{n+1,i}^{trial} &= I_n + a^r : (\Delta_{n,i} - \Delta_{n,i-1}^p) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Estas quantidades vão servir como um *previsor* sobre a violação dos critérios de plasticidade. A seguir é apresentado o *algoritmo de retorno sobre os critérios de plasticidade* para cada fase separadamente.

### Fase matriz:

Inicia-se avaliando o *previsor* (*trial*).

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,m} = \underline{\underline{\sigma}}_n^m + \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^m \quad (4.70)$$

Distinguem-se, então, dois casos a partir do sinal de  $f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,m})$ .

- Se é negativo, a evolução é puramente elástica sobre o intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  e:

$$\Delta\lambda_{n+1}^m = 0, \quad \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_{p,n}^m = 0, \quad \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_{p,n+1}^m = \underline{\underline{\varepsilon}}_{p,n}^m, \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,m} \quad (4.71)$$

- Se é positivo, projeta-se o *previsor* sobre o critério da fase matriz conforme a norma elástica  $\underline{\underline{a}}^m$  e resolve-se:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,m} - \Delta\lambda_{n+1}^m \underline{\underline{a}}^m : \left( \frac{\partial \underline{\underline{g}}^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m}, \quad f^m(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m) = 0 \quad (4.72)$$

Para a fase matriz, obtém-se formalmente o mesmo processo que para o meio contínuo de Cauchy. Consequentemente a mesma zona de cálculo do código será utilizada nas duas situações.

### Fase reforço:

Procede-se da mesma forma que para a fase matriz, contudo para a variável de deformação  $\underline{\underline{\varepsilon}}^r$ , de onde vem o *previsor*:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,r} = \underline{\underline{\sigma}}_n^r + \underline{\underline{a}}^r \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^r \quad (4.73)$$

Distinguem-se, então, os dois casos seguintes:

- Se  $f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,r}) < 0$ , a evolução é puramente elástica, então:

$$\Delta\lambda_{n+1}^r = 0, \quad \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_{p,n}^r = 0, \quad \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_{p,n+1}^r = \underline{\underline{\varepsilon}}_{p,n}^r, \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^r = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,r} \quad (4.74)$$

- Se  $f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,r}) \geq 0$ , projeta-se o *previsor* sobre o critério. O domínio de elasticidade  $C^r$  da fase reforço é definido por um intervalo da forma:

$$\mathbf{C}^r = ]-\sigma_-^r, \sigma_+^r[ \quad (4.75)$$

O que leva a operação de projeção imediata:

$$\sigma_{n+1}^r = \begin{cases} \sigma_+^r & \text{se } \sigma_{n+1}^{trial,r} \geq \sigma_+^r \\ -\sigma_-^r & \text{se } \sigma_{n+1}^{trial,r} \leq -\sigma_-^r \end{cases} \quad (4.76)$$

O incremento de deformação plástica correspondente se escreve

$$\Delta \varepsilon_{p,n+1}^r = \frac{\sigma_{n+1}^{trial,r} - \sigma_{n+1}^r}{a^r} \quad (4.77)$$

### Interação:

Conhecida a variável de deformação  $\Delta$ , é possível escrever:

$$I_{n+1}^{trial} = I_n + c^I \Delta_n \quad (4.78)$$

Distinguem-se, então, os dois casos seguintes:

- Se  $f(I_{n+1}^{trial}) < 0$ , a evolução é puramente elástica, então:

$$\Delta \lambda_{n+1}^I = 0, \quad \Delta_{p,n} = 0, \quad \Delta_{p,n+1} = \Delta_{p,n}, \quad I_{n+1} = I_{n+1}^{trial} \quad (4.79)$$

- Se  $f(I_{n+1}^{trial}) \geq 0$ , projeta-se o *previsor* sobre o critério. O domínio de elasticidade  $\mathbf{C}^I$  da interação é definido por um intervalo da forma:

$$\mathbf{C}^I = ]-I_{\max-}, I_{\max}[ \quad (4.80)$$

O que leva a operação de projeção imediata:

$$I_{n+1} = \begin{cases} I_{\max} & \text{se } I_{n+1}^{trial} \geq I_{\max} \\ -I_{\max} & \text{se } I_{n+1}^{trial} \leq -I_{\max} \end{cases} \quad (4.81)$$

O incremento de deformação plástica correspondente se escreve:

$$\Delta_{p,n+1} = \frac{I_{n+1}^{trial} - I_{n+1}^I}{c^I} \quad (4.82)$$

Os vetores de forças plásticas elementares são, para cada elemento, somados sobre todas as fases, e então montados em um vetor global  $\underline{\Delta F}_{p,n+1}$  que serão utilizados no cálculo dos deslocamentos da iteração seguinte.

### 4.3 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO MULTIFÁSICO ADERENTE

#### 4.3.1 Introdução

Sob a hipótese de aderência perfeita, o modelo multifásico é formulado a partir de um campo de deslocamento  $\underline{\xi}$  único para todas as fases. Assim, sua implementação em um código de elementos finitos, formulado em deslocamentos, é uma extensão da formulação associada ao meio contínuo clássico.

Inicia-se estabelecendo o princípio do mínimo de energia potencial elástica. A discretização aqui faz aparecer os termos ligados à fase matriz e a cada fase de reforço.

Para tratar o comportamento elastoplástico, apoia-se na definição do critério de plasticidade. Este se obtém a partir dos valores parciais das tensões. O algoritmo local de integração da plasticidade pode ser aplicado independentemente sobre cada fase, enquanto o algoritmo global permanece inalterado.

#### 4.3.2 Tratamento em elasticidade

##### 4.3.2.1 Princípio da mínima energia potencial

Seja  $S$  um sistema mecânico constituído de um meio multifásico aderente com  $N$  fases de reforço. Utilizando a notação já aplicada, representando por  $\mathbf{C}(S_\xi, \xi^d)$  o espaço dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis e por  $(\tilde{\underline{\xi}}, \tilde{\underline{\varepsilon}}, \tilde{\underline{\Sigma}})$  os campos de solução do problema de elasticidade multifásico aderente, o princípio dos trabalhos virtuais se escreve sob a forma:

$$\forall \underline{\xi} \in \mathbf{C}(S_\xi, \xi^d), \quad \int_{\Omega} \underline{\Sigma} : \underline{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{\xi} d\Omega - \int_S \underline{T}^d \cdot \underline{\xi} dS - \int_{S_\xi} \underline{\xi}^d \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (4.83)$$

O campo de tensões totais, solução do problema elástico, se escreve:

$$\tilde{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}}(\tilde{\underline{\varepsilon}}) \quad (4.84)$$

onde a densidade de energia livre do meio multifásico se simplifica, neste caso, em:

$$\Psi(\underline{\varepsilon}) = \psi^m(\underline{\varepsilon}) + \sum_{r=1}^N \psi^r(\varepsilon^r = \underline{\varepsilon} : \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \quad (4.85)$$

A estabilidade dos materiais, que constituem cada fase, implica que cada função  $\psi^j(\underline{\varepsilon})$  é estritamente convexa. Por consequência, sua soma  $\Psi(\underline{\varepsilon})$  também é.

#### 4.3.2.2 Discretização do princípio do mínimo

O campo de deslocamento  $\underline{\xi}$  é único para todas as fases, e procede-se uma única discretização geométrica de toda a estrutura o que leva a escolher os mesmos graus de liberdade e interpolação para cada fase.

$$\begin{aligned} \forall x \in v_e, \quad \underline{\xi}_n(\underline{x})|_{v_e} &= \mathbf{N}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e \\ \underline{\varepsilon} &= \mathbf{B}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e \end{aligned} \quad (4.86)$$

Sobre cada elemento  $e = 1 \dots N_e$ , o termo  $\phi_e(\underline{u}_e)$  permanece inalterado desde que sejam utilizados os esforços externos globais no seu cálculo. No entanto, o termo  $w_e(\underline{u}_e)$  é a integral de uma soma de termos relativos respectivamente à fase matriz e às diferentes fases de reforço. Escreve-se sem ambiguidade:

$$w_e(\underline{u}_e) = w_e^m(\underline{u}_e) + \sum_{r=1}^N w_e^r(\underline{u}_e) \quad (4.87)$$

Para a fase matriz, retoma-se a expressão (4.30), substituindo simplesmente  $\mathbf{D}$  por  $\mathbf{d}^m$ , matriz de elasticidade da fase matriz. Para a fase reforço é necessário introduzir notações suplementares.

Será representado por  $\underline{\mathbf{e}}_r$  o vetor das seis componentes de  $\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$ . A equação de compatibilidade pode ser reescrita como  $\varepsilon^r = {}^t \underline{\mathbf{e}}_r \cdot \underline{\varepsilon} = {}^t \varepsilon \cdot \underline{\mathbf{e}}_r$ .

Assim, a densidade de energia livre para a fase de reforço fica:

$$\psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} a^r (\varepsilon^r)^2 + \varepsilon^r (\sigma_o^r - a^r \varepsilon_{an}^r) \quad (4.88)$$

Nesta equação  $a^r$  designa a rigidez escalar,  $\varepsilon_{an}^r$  a deformação de origem anelástica e  $\sigma_o^r$  a tensão inicial. Mostra-se, então, que:

$$\begin{aligned} w_e^r(\underline{u}_e) &= \int_{v_e} \psi^r(\varepsilon^r) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot \left[ \int_{v_e} a^r {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\mathbf{e}}_r \cdot {}^t \underline{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{B}_e d\Omega \right] \cdot \underline{u}_e - {}^t \underline{u}_e \int_{v_e} (a^r \varepsilon_{an}^r - \sigma_o^r) {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\mathbf{e}}_r d\Omega \end{aligned} \quad (4.89)$$

Identifica-se, assim, para cada fase de reforço:

- a matriz de rigidez elementar:

$$\mathbf{k}_e^r = \int_{V_e} a^r \mathbf{t} \mathbf{B}_e \cdot \underline{\mathbf{e}}_r \cdot \underline{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{B}_e d\Omega \quad (4.90)$$

- o vetor de forças elementares associado às deformações anelásticas

$$\mathbf{f}_e^{r,an} = \int_{V_e} a^r \varepsilon_{an}^r \mathbf{t} \mathbf{B}_e \cdot \underline{\mathbf{e}}_r d\Omega \quad (4.91)$$

- o vetor de forças elementares associado às tensões iniciais

$$\mathbf{f}_e^{r,\sigma} = \int_{V_e} -\sigma_o^r \mathbf{t} \mathbf{B}_e \cdot \underline{\mathbf{e}}_r d\Omega \quad (4.92)$$

Para o processo de montagem das matrizes de rigidez elementares, assim como dos vetores de forças, adicionam-se para cada elemento as contribuições de cada fase a fim introduzir a soma na matriz de rigidez global.

Como já apresentado, o tensor dos módulos elásticos totais pode ser decomposto em  $N+1$  parcelas referentes à fase matriz e a  $N$  fases de reforço.

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{d}}^m + \underline{\underline{d}}^r = \underline{\underline{d}}^m + \sum_{r=1}^N a^r \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \quad (4.93)$$

Chama-se, neste item, de  $\underline{\underline{d}}^r$  ao tensor dos módulos elásticos referentes às parcelas da fase reforço, assim:

$$\underline{\underline{d}}^r = \sum_{r=1}^N a^r \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \quad (4.94)$$

O vetor que define a direção do reforço pode ser definido por:

$$\underline{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \underline{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \underline{\mathbf{e}}_2 \quad (4.95)$$

Realizando a operação  $\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r$ , obtém-se:

$$\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r = \left[ \cos^2 \theta \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 + \sin^2 \theta \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \sin \theta (\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) \right] \quad (4.96)$$

Realizando  $(\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r) \otimes (\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r)$  e nomeando  $\cos \theta = c$  e  $\sin \theta = s$ :

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r) \otimes (\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r) = & c^4 e_{1111} + s^4 e_{2222} + c^2 s^2 (e_{1122} + e_{2211}) + c^2 s^2 (e_{1212} + e_{1221} + e_{2112} + e_{2121}) + \\ & cs^3 (e_{1222} + e_{2122} + e_{2212} + e_{2221}) + c^3 s (e_{1112} + e_{1121} + e_{1211} + e_{2111}) \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde  $\underline{e}_{1111}$  é o produto  $\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ . Utilizando as premissas clássicas, que levam um tensor de quarta ordem a ser simplificado por um tensor de segunda ordem, as contribuições da matriz dos módulos elásticos das fases reforço, considerando que não há reforço na direção 3, ficam:

$$\underline{\underline{d}}^r = \underline{\underline{a}}^r \begin{bmatrix} c^4 & c^2 s^2 & 0 & c^3 s & 0 & 0 \\ c^2 s^2 & s^4 & 0 & c s^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^3 s & c s^3 & 0 & c^2 s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

### 4.3.3 Tratamento da plasticidade

#### 4.3.3.1 Posicionamento do problema

Seja  $S$  um sistema mecânico de volume  $\Omega$  modelado como um meio bifásico aderente, submetido a um carregamento  $Q(t)$  (descrito pelos esforços globais volumétricos e superficiais e as condições de contorno em deslocamentos) sobre o intervalo de tempo  $[0, T]$ . O objetivo é determinar a resposta do sistema sob a forma dos campos seguintes definidos sobre  $\Omega \times [0, T]$ .

$$\{ \underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\sigma}^r, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\varepsilon}_p^m, \underline{\varepsilon}_p^r \} \quad (4.99)$$

Estes campos verificam o sistema de equações:

$$\text{div} \underline{\underline{\Sigma}} + \rho \underline{F} = \underline{0} \quad , \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\sigma}^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (4.100)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{a}}^m : (\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}_p^m) \quad , \quad \underline{\sigma}^r = \underline{a}^r (\underline{\dot{\varepsilon}}^r - \underline{\dot{\varepsilon}}_p^r) \quad (4.101)$$

$$\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial \underline{g}^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \quad , \quad \underline{\dot{\varepsilon}}_p^r = \dot{\lambda}^r \frac{\partial \underline{g}^r}{\partial \underline{\sigma}^r} = \pm \dot{\lambda}^r \quad (4.102)$$

$$\dot{\lambda}^j \geq 0 \quad , \quad f^j(\underline{\underline{\sigma}}^j) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}^j f^j(\underline{\underline{\sigma}}^j) = 0 \quad , \quad j=m,r \quad (4.103)$$

A discretização no domínio do tempo é realizada conforme apresentado anteriormente. Para todas as variáveis notadas com índice  $n$  são valores supostamente conhecidos no instante  $t_n$  e  $\Delta(\ )_n$ , o incremento a determinar como resposta a  $\Delta Q_n$ .

#### 4.3.3.2 Algoritmo de plasticidade modificado

O esquema geral de solução alternando a escrita do equilíbrio global e a integração das leis de comportamento segue inalterado. No quadro do método das tensões iniciais, a *matriz de rigidez do sistema* é obtida pela soma de todas as fases e pela montagem de suas contribuições elementares. As avaliações sucessivas do vetor de incremento dos deslocamentos nodais  $\underline{\Delta U}_n^i$  são obtidas utilizando (4.67).

A expressão do critério de plasticidade global se obtém a partir da avaliação de um critério próprio a cada fase sobre as tensões parciais correspondentes. Além disso, as leis de evolução (4.101) e (4.102) são igualmente expressas por fase. Assim, a evolução elastoplástica pilotada por um incremento de deformação  $\underline{\Delta \varepsilon}_n$  imposta, é *desacoplada por fase*.

O tratamento numérico vai então se apoiar sobre esta observação importante. A partir de um incremento de deslocamento  $\underline{\Delta U}_n$  calculado na iteração  $i$ , calcula-se, em todo ponto de Gauss, o incremento de deformação  $\underline{\Delta \varepsilon}_n = \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_n^m$ . Considera-se separadamente cada fase.

##### Fase matriz:

Inicia-se avaliando o previsor (trial):

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,m} = \underline{\underline{\sigma}}_n^m + \underline{\underline{a}}_n^m : \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_n \quad (4.104)$$

Distinguem-se, então, dois casos a partir do sinal de  $f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,m})$ .

- Se é negativo, a evolução é puramente elástica sobre o intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  e:

$$\Delta \lambda_{n+1}^m = 0, \quad \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_{p,n}^m = 0, \quad \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_{p,n+1}^m = \underline{\underline{\varepsilon}}_{p,n}^m, \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,m} \quad (4.105)$$

- Se é positivo, projeta-se o *previsor* sobre o critério da fase matriz, conforme a norma elástica  $\underline{\underline{a}}_n^m$ , e resolve-se:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{trial,m} - \Delta \lambda_{n+1}^m \underline{\underline{a}}_n^m : \left( \frac{\partial \underline{\underline{g}}^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m}, \quad f^m(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m) = 0 \quad (4.106)$$

##### Fase reforço:

Procede-se da mesma forma que para a fase matriz. Contudo, os cálculos são simples. A partir do incremento de deformação  $\underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_n$ , obtém-se pela condição de aderência perfeita:

$$\Delta \underline{\varepsilon}_n^r = \underline{\underline{\varepsilon}}_n : \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (4.107)$$

de onde vem o previsor:

$$\sigma_{n+1}^{trial,r} = \sigma_n^r + a^r \Delta \underline{\varepsilon}_n^r \quad (4.108)$$

Distinguem-se, então, os dois casos seguintes:

- Se  $f(\sigma_{n+1}^{trial,r}) < 0$ , a evolução é puramente elástica, então:

$$\Delta \lambda_{n+1}^r = 0, \quad \Delta \varepsilon_{p,n}^r = 0, \quad \Delta \varepsilon_{p,n+1}^r = \varepsilon_{p,n}^r, \quad \underline{\sigma}_{n+1}^r = \underline{\sigma}_{n+1}^{trial,r} \quad (4.109)$$

- Se  $f(\sigma_{n+1}^{trial,r}) \geq 0$ , projeta-se o *previsor* sobre o critério. O domínio de elasticidade  $C^r$  da fase reforço é definido pelo seguinte intervalo:

$$C^r = ]-\sigma_-, \sigma_+[ \quad (4.110)$$

O que leva a operação de projeção imediata:

$$\sigma_{n+1}^r = \begin{cases} \sigma_+^r & \text{se } \sigma_{n+1}^{trial,r} \geq \sigma_+^r \\ -\sigma_-^r & \text{se } \sigma_{n+1}^{trial,r} \leq -\sigma_-^r \end{cases} \quad (4.111)$$

O incremento de deformação plástica correspondente se escreve:

$$\Delta \varepsilon_{p,n+1}^r = \frac{\sigma_{n+1}^{trial,r} - \sigma_{n+1}^r}{a^r} \quad (4.112)$$

Os vetores de forças plásticas elementares são, para cada elemento, somados sobre todas as fases, e então montados em um vetor global  $\underline{\Delta F}_{p,n+1}$  que serão utilizados no cálculo dos *deslocamentos* da iteração seguinte.

#### 4.4 PROBLEMAS MISTOS

Diante da natureza das estruturas de concreto armado que podem ser estudadas com a modelagem propostas, é importante perceber que muitas vezes serão encontrados os chamados *problemas mistos*. Estes são problemas onde podem ser definidas uma zona reforçada (meio multifásico) e uma zona não reforçada (meio monofásico), como pode ser visto na Figura 4.5.

Numericamente, é possível distinguir as zonas de duas formas distintas. A primeira considera que todos os elementos do problema em estudo sejam do tipo multifásico, ou seja com (N+3)

graus de liberdade, mas admite a existência de dois materiais com propriedades diferentes: para zona monofásica, o reforço possui rigidez igual a da matriz e o coeficiente de interação é muito grande, de forma a simular a aderência perfeita; para a zona multifásica são aplicadas as propriedades convenientes para cada material e para o coeficiente de interação. A segunda possibilidade considera cada zona com graus de liberdade diferentes, mas é preciso salientar uma dificuldade adicional para elementos na fronteira entre as zonas. Seria necessária a implementação destes elementos e ainda a indicação dos nós de fronteira no arquivo de entrada de dados. Esta segunda hipótese, apesar de exigir um maior esforço de programação, apresenta boa vantagem sob o ponto de vista do custo computacional para simulação dos problemas, uma vez que elimina os graus de liberdade desnecessários. Neste trabalho optou-se por utilizar a primeira abordagem.

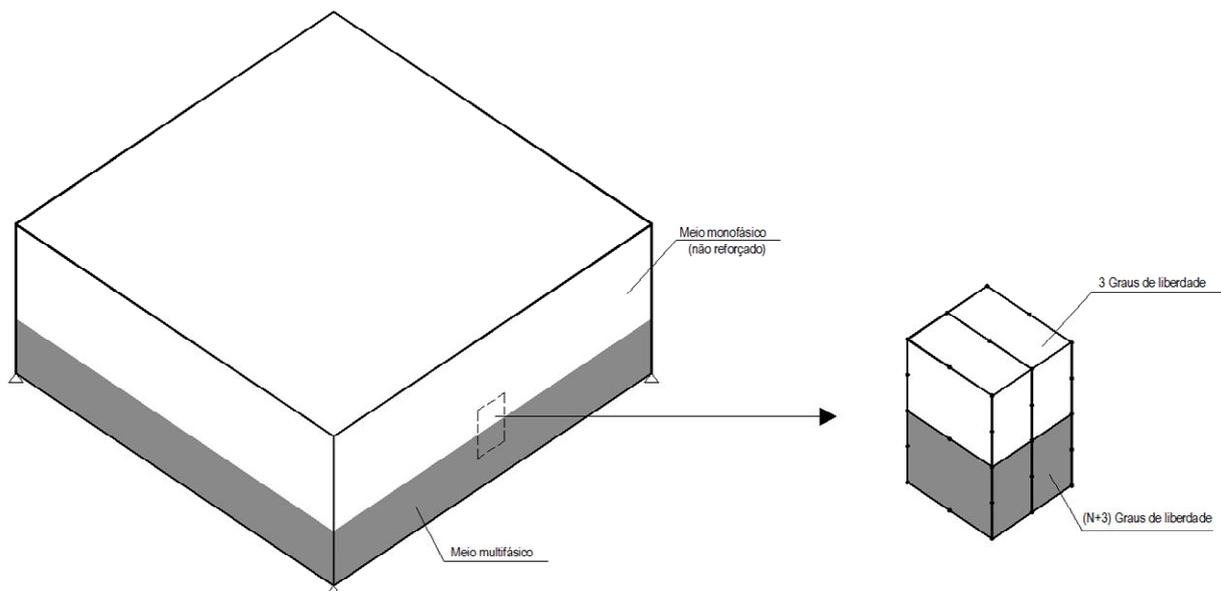


Figura 4.5 – Discretização de problemas mistos (graus de liberdade nodais).

## 4.5 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

Nesta seção são apresentados estudos comparativos dos resultados obtidos com o modelo numérico implementado com soluções analíticas disponíveis na bibliografia. Divide-se esta seção em duas partes: validação do modelo com aderência perfeita e validação do modelo com aderência imperfeita. Os modelos elastoplásticos utilizados se referem ao comportamento

de estruturas hipotéticas. O desenvolvimento analítico das soluções segue o que foi apresentado em Sudret (1999). No Capítulo 5 são apresentados os modelos constitutivos específicos para o concreto armado.

#### 4.5.1 Modelo com aderência perfeita

##### 4.5.1.1 Ensaio de compressão

Como primeira aplicação do modelo multifásico será apresentado, nesta seção, um problema intitulado “*Comportamento elastoplástico em compressão simples de um corpo de prova reforçado*”.

Considera-se um corpo de prova cilíndrico, *homogêneo*, de altura  $H$ , repousando sem atrito sobre o plano  $y = 0$  (superfície  $S_0$ ). Sua superfície superior possui uma placa rígida, também sem atrito, impondo um deslocamento vertical  $-\delta(t)$  (Figura 4.6).

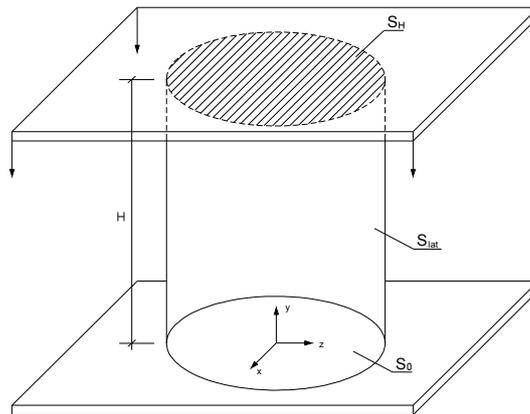


Figura 4.6 – Compressão simples de um corpo de prova reforçado.

O material constitutivo do corpo de prova é um compósito reforçado em uma única direção  $\underline{e}_r$  que será igual a  $\underline{e}_y$  (compressão longitudinal) ou  $\underline{e}_x$  (compressão transversal). É modelado para um meio bifásico com as características que seguem:

A fase matriz é elástica perfeitamente plástica com critério de plasticidade de Von Mises (4.113). A elasticidade isotrópica é representada pelo módulo de elasticidade,  $E^m$ , e coeficiente de Poisson,  $\nu$ .

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \sqrt{3J_2} - \sigma_o^m = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}^m\| - \sigma_o^m \quad (4.113)$$

Onde  $\sigma_o^m$  é o limite em tração/compressão simples da fase matriz. A fase reforço também é elástica perfeitamente plástica. Sua rigidez é chamada de  $E^r$ , seu limite em tração/compressão  $\sigma_o^r$ . O critério de plasticidade uniaxial se escreve simplesmente  $f^r(\sigma^r) = |\sigma^r| - \sigma_o^r$ . Salienta-se ainda:

- As forças volumétricas são nulas:  $\rho(\underline{x})\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$
- O contato não possui atrito sobre  $S_0$  e  $S_H$ .  $\underline{T} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}$  designa o vetor tensão sobre uma face de normal  $\underline{n}$ ; estas condições se escrevem:

$$\underline{T}(y=0) \cdot \underline{e}_x = \underline{T}(y=0) \cdot \underline{e}_z = \underline{T}(y=H) \cdot \underline{e}_x = \underline{T}(y=H) \cdot \underline{e}_z = 0 \quad (4.114)$$

- As normais à  $S_0$  e  $S_H$  valem respectivamente  $\pm \underline{e}_y$ , assim:

$$\Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } y = H \quad (4.115)$$

- A superfície  $S_{lat}$  é livre de tensões:

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ para } x \in S_{lat}, \underline{n} \in (Oxz) \quad (4.116)$$

- Os deslocamentos impostos se escrevem:

$$\xi_y = 0 \text{ sobre } S_0, \quad \xi_y = -\delta \text{ sobre } S_H \quad (4.117)$$

#### 4.5.1.1.1 Reforço longitudinal

Utiliza-se a terminologia reforço longitudinal quando o reforço está posicionado na mesma direção que o carregamento, conforme Figura 4.7.

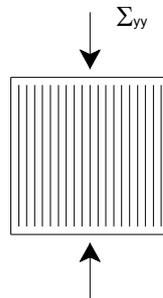


Figura 4.7 – Reforço longitudinal.

### Evolução elástica

Levando em conta a homogeneidade do corpo de prova e das condições de contorno, procura-se a solução do problema em *tensões totais* sob a forma de um campo uniaxial constante  $\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ , estaticamente admissível. A decomposição sobre as fases impõe:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = (\sigma^m + \sigma^r) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y = -\Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.118)$$

A elasticidade da fase matriz, dado o tensor de deformações:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^m = \frac{1+\nu}{E^m} \underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{\nu}{E^m} tr \underline{\underline{\sigma}}^m \underline{1} \quad (4.119)$$

e assim:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\Sigma - \sigma^r}{E^m} [\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)] \quad (4.120)$$

Que a fase reforço resulta então

$$\sigma^r = E^r \varepsilon^r = E^r \epsilon_{yy} = \frac{E^r}{E^m} (-\Sigma - \sigma^r) \quad (4.121)$$

Deduzem-se, então, as tensões parciais de compressão:

$$\begin{aligned} \sigma^m &= -\frac{E^m}{E^r + E^m} \Sigma \\ \sigma^r &= -\frac{E^r}{E^r + E^m} \Sigma \end{aligned} \quad (4.122)$$

e de (4.120) o tensor de deformações:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\Sigma}{E^m + E^r} [\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)] \quad (4.123)$$

Integra-se diretamente com as condições de contorno para obter o campo de deslocamentos

$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{x}.$$

### Evolução elastoplástica

Determina-se aqui o limite da elasticidade do sistema e a fase que plastifica primeiramente, considerando que todos os pontos atingem simultaneamente o limite de elasticidade (ensaio homogêneo). Avalia-se, então, o critério de plasticidade global:

$$F(\underline{\Sigma}) = \max \left\{ f^m(\underline{\sigma}^m), f^r(\sigma^r) \right\} \\ \max \left\{ \frac{E^m}{E^m + E^r} \Sigma - \sigma_o^m, \frac{E^r}{E^m + E^r} \Sigma - \sigma_o^r \right\} \quad (4.124)$$

O limite de elasticidade é então:

$$\Sigma^{el} = \min \left\{ \sigma_o^m \frac{E^m + E^r}{E^m}, \sigma_o^r \frac{E^m + E^r}{E^r} \right\} \quad (4.125)$$

que atende por uma deformação axial:

$$\frac{\delta}{H} = \min \left\{ \frac{\sigma_o^m}{E^m}, \frac{\sigma_o^r}{E^r} \right\} \quad (4.126)$$

De acordo com estes valores, define-se se é a fase reforço ou a fase matriz que plastifica primeiro. Seguindo o carregamento de forma monotônica  $\dot{\delta} > 0$ , admite-se que a fase cujo critério foi atingido plastificou, enquanto a outra permanece elástica. A seguir, abordam-se as duas possibilidades plastificação inicial.

### **Fase reforço plastifica primeiro (reforço “fraco”)**

A partir de (4.126), o limite em compressão é atendido para  $\frac{\delta}{H} = \frac{\sigma_o^r}{E^r}$ . Para  $\dot{\delta} > 0$  segue

$$\sigma^r = -\sigma_o^r \\ \sigma^m = -\Sigma + \sigma_o^r \quad (4.127)$$

Além disso, a fase matriz resta elástica, de onde:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\Sigma + \sigma_o^r}{E^m} \left[ \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \right] \quad (4.128)$$

Se reportando ao fato de que  $\epsilon_{yy} = -\delta/H$ , esta última igualdade fornece a curva de compressão sobre a forma:

$$\Sigma = E^m \frac{\delta}{H} + \sigma_o^r \quad (4.129)$$

Obtém-se a deformação plástica para em seguida escrever o comportamento da fase reforço:

$$\sigma^r = E^r (\epsilon^r - \epsilon_p^r) - \sigma_o^r \quad \text{com} \quad \epsilon^r = \epsilon_{yy} \quad (4.130)$$

$$\epsilon_p^r = \sigma_o^r \left( \frac{1}{E^m} + \frac{1}{E^r} \right) - \frac{\Sigma}{E^m} \quad (4.131)$$

### Fase matriz plastifica primeiro (reforço “forte”)

O limite em compressão é atendido para  $\frac{\delta}{H} = \frac{\sigma_o^m}{E^m}$ . O estado mecânico do sistema neste estágio de carregamento é definido por:

$$\begin{aligned}\sigma^m &= -\sigma_o^m \\ \sigma^r &= -\frac{E^r}{E^m} \sigma_o^m \\ \Sigma &= \Sigma^{el} = \sigma_o^m \frac{E^m + E^r}{E^m} \\ \underline{\underline{\epsilon}} &= -\frac{\sigma_o^m}{E^m} [\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)]\end{aligned}\quad (4.132)$$

Este conjunto constitui o estado inicial a partir do qual as equações de plasticidade se escrevem sob forma incremental:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}^m} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}_e^m} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}_p^m} \quad \text{Decomposição da taxa de deformação} \quad (4.133)$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}_e^m} = \frac{1+\nu}{E^m} \underline{\underline{\dot{\sigma}}^m} - \frac{\nu}{E^m} tr \underline{\underline{\dot{\sigma}}^m} \mathbf{1} \quad \text{Comportamento elástico} \quad (4.134)$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}_p^m} = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} = \dot{\lambda}^m \sqrt{3/2} \frac{\underline{\underline{s}}^m}{\|\underline{\underline{s}}^m\|} \quad \text{Regra de escoamento} \quad (4.135)$$

$$\frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} : \underline{\underline{\sigma}}^m = 0 \quad \text{Condição de coerência} \quad (4.136)$$

O caráter uniaxial de  $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$  e assim de  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}^m}$ , associado a (4.136) implica que:

$$\dot{\sigma}^m = 0 \quad , \quad \dot{\Sigma} = 0 \quad (4.137)$$

A tensão parcial na fase matriz permanece constante e igual à  $\sigma_o^m$ . A tensão na fase reforço vale então:

$$\sigma^r = -\Sigma + \sigma_o^m \quad (4.138)$$

Em termos de deformação, deduz-se sucessivamente, de (4.134) e (4.133).

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}_e^m} = 0 \quad , \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}_p^m} \quad , \quad \dot{\epsilon}^r = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}_p^m} \quad (4.139)$$

Levando em conta a forma (4.113) do critério (Von Mises), a regra de escoamento (4.135) fica, com simplificações:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \left[ -\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{1}{2}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \right] \quad (4.140)$$

Usando a elasticidade da fase reforço e com as equações acima:

$$\dot{\Sigma} = -\dot{\sigma}^r = E^r \dot{\lambda}^m \quad (4.141)$$

Verifica-se nesta equação que o multiplicador plástico  $\dot{\lambda}^m$  é agora positivo uma vez que o carregamento está crescendo ( $\dot{\Sigma} > 0$ ). Utilizando (4.141) e (4.132):

$$\Sigma = \sigma_o^m \frac{E^m + E^r}{E^m} + E^r \lambda^m \quad (4.142)$$

permitindo exprimir o multiplicador plástico:

$$\lambda^m = \frac{\Sigma}{E^r} - \sigma_o^m \left( \frac{1}{E^m} + \frac{1}{E^r} \right) \quad (4.143)$$

A integração de (4.140) com a condição inicial elástica (4.132). Fornece a deformação pós-plastificação da matriz:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} = & -\frac{\sigma_o^m}{E^m} \left[ \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \right] + \\ & + \left[ \frac{\Sigma}{E^r} - \sigma_o^m \left( \frac{1}{E^m} + \frac{1}{E^r} \right) \right] \left( -\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{1}{2}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \right) \end{aligned} \quad (4.144)$$

De esta última igualdade vem a expressão da curva de carregamento:

$$\Sigma = E^r \frac{\delta}{H} + \sigma_o^m \quad (4.145)$$

Após o início da plastificação da fase matriz ela atinge uma tensão uniaxial constante de  $-\sigma_o^m$ . Todo o incremento de carregamento  $\Sigma$  é absorvido pela fase reforço.

#### 4.5.1.1.2 Interpretação e resultados

A Figura 4.8 e a Figura 4.9 representam as curvas de compressão longitudinal do material reforçado nos dois casos estudados. O comportamento é em primeiro lugar elástico, o módulo de elasticidade longitudinal global equivale à soma dos módulos de elasticidade. A partir de uma deformação crítica  $\delta/H = \min \{ \sigma_o^m / E^m, \sigma_o^r / E^r \}$  uma das duas fases plastifica para todo ponto enquanto a outra permanece elástica. Para  $\delta/H = \max \{ \sigma_o^m / E^m, \sigma_o^r / E^r \}$  a segunda fase plastifica ocorrendo o escoamento plástico livre do compósito. A carga limite vale  $\Sigma = \sigma_o^m + \sigma_o^r$ , que equivale a soma dos limites de compressão das duas fases.

Os ensaios de compressão simples são realizados numericamente utilizando uma malha de um único elemento com vinculação apropriada para simular um quarto da estrutura. As propriedades mecânicas do material estão apresentadas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Parâmetros de Cálculo

Fase	Parâmetro	“Reforço fraco”	“Reforço forte”
Matriz	Módulo de Elasticidade	2100 MPa	2100 MPa
	Coefficiente de Poisson	0,3	0,3
	Tensão limite em compressão	31,5 MPa	22,0 MPa
Reforço	Módulo de Elasticidade	21000 MPa	21000 MPa
	Fração volumétrica	4%	4%
	Tensão limite tração-compressão	8,5 MPa	18,0 MPa

A Figura 4.8 apresenta os resultados encontrados para a simulação realizada quando o reforço plastifica antes da fase matriz.

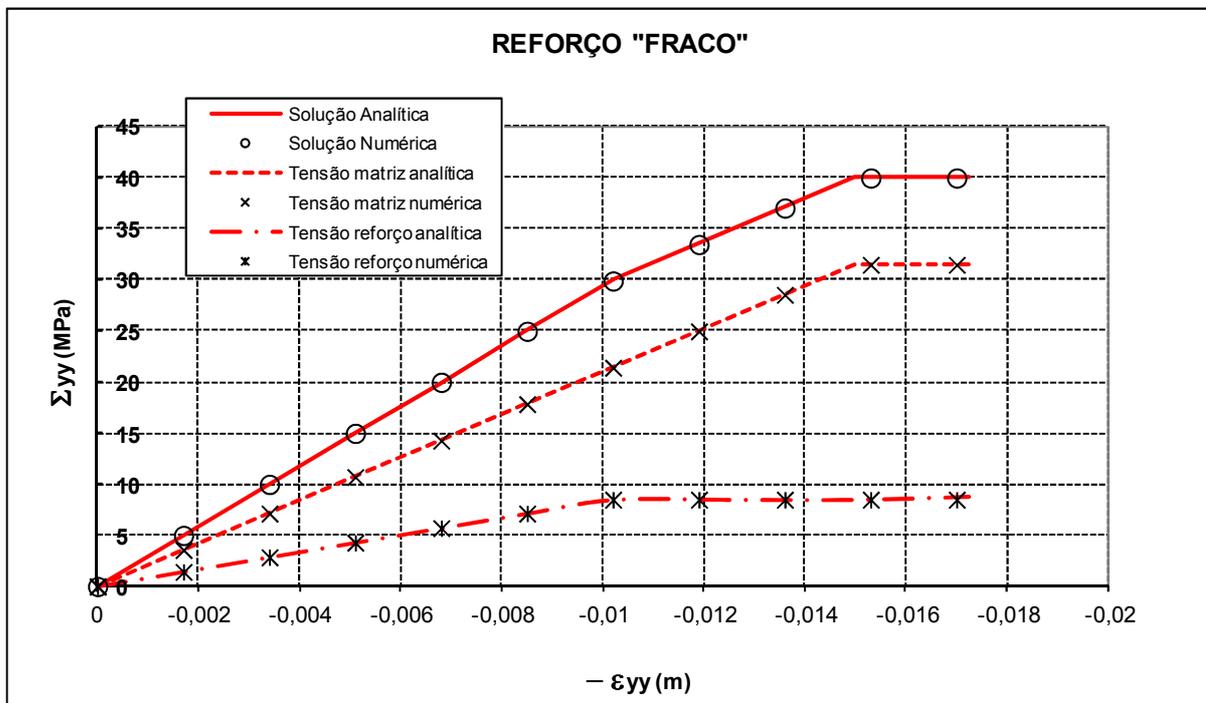


Figura 4.8 – Comportamento elastoplástico do modelo multifásico com reforço longitudinal “fraco”.

A Figura 4.9 apresenta os resultados encontrados para a simulação realizada quando o reforço plastifica após a fase matriz.

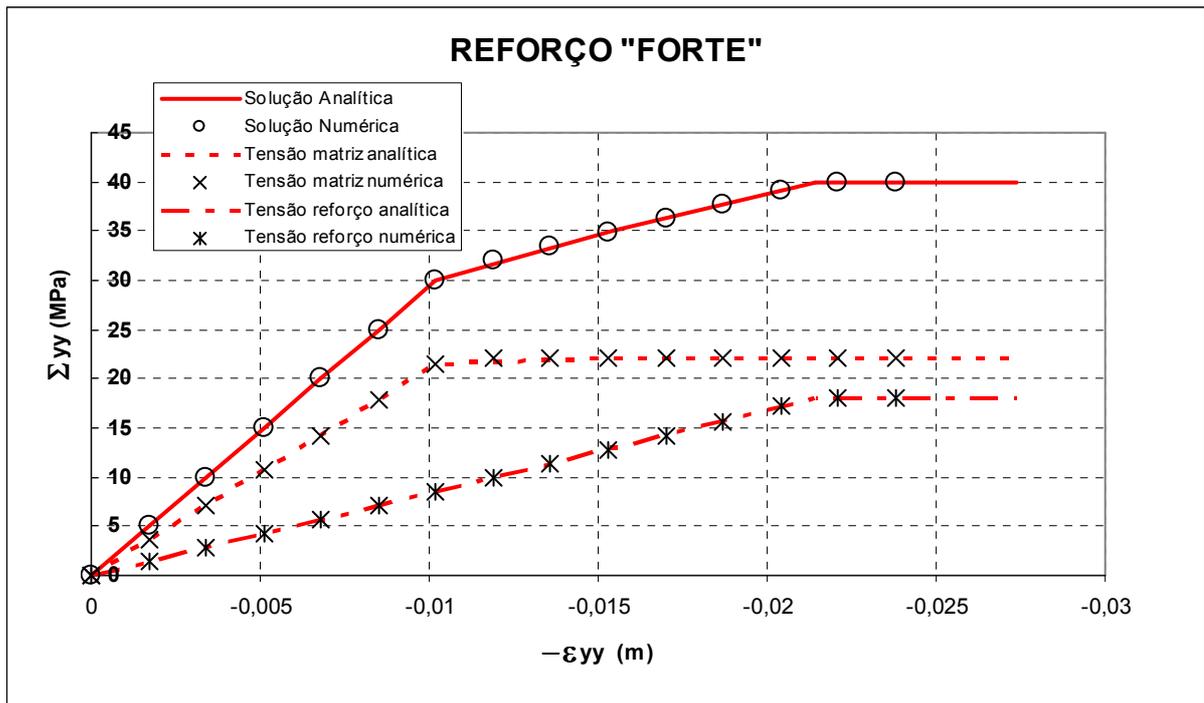


Figura 4.9 – Comportamento elastoplástico do modelo multifásico com reforço longitudinal “forte”.

Fica clara a boa correspondência encontrada entre os resultados numéricos e os resultados obtidos analiticamente.

#### 4.5.1.1.3 Reforço transversal

Utiliza-se a expressão reforço transversal quando o reforço está posicionado em uma direção perpendicular à de aplicação do carregamento, conforme Figura 4.10.

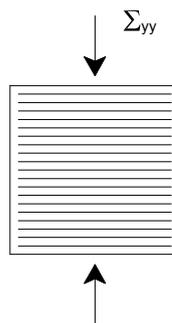


Figura 4.10 – Reforço Transversal.

#### Evolução elástica

Nesta seção, escolhe-se  $\underline{e}_r = \underline{e}_x$ . O estado de tensões global é ainda uniaxial, sob a forma

$\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ . O tensor de tensões parciais da fase matriz se escreve da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = -\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.146)$$

Deduzindo a deformação associada por (4.119).

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{E^m} \left\{ [-\sigma^r + \nu \Sigma] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + [\nu \sigma^r - \Sigma] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \nu [\sigma^r + \Sigma] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\} \quad (4.147)$$

A elasticidade da fase reforço se escreve:

$$\sigma^r = E^r \epsilon_{xx} = \frac{E^r}{E^m} (-\sigma^r + \nu \Sigma) \quad (4.148)$$

Aplicando em (4.147) sucessivamente:

$$\begin{aligned} \sigma^r &= \Sigma \frac{\nu E^r}{E^m + E^r} \\ \sigma^m &= -\Sigma \left\{ \frac{\nu E^r}{E^m + E^r} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \right\} \end{aligned} \quad (4.149)$$

e o tensor de deformações:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\Sigma}{E^m + E^r} \left\{ -\nu \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \left[ 1 + \frac{E^r}{E^m} (1 - \nu^2) \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu \left[ 1 + (1 + \nu) \frac{E^r}{E^m} \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\} \quad (4.150)$$

Constata-se que, pelo efeito de Poisson, a fase reforço é solicitada em tração  $\sigma^r > 0$  para uma compressão global  $-\Sigma$ .

O campo de deformação é homogêneo, é integrado para obter o campo de deslocamento. A condição de contorno permite escrever:

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\delta}{H} \quad (4.151)$$

Retendo o termo  $\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$  de (4.150) e levando em conta (4.151), obtém-se a equação da curva de compressão transversal sob a forma:

$$\Sigma = E_T \frac{\delta}{H} \quad (4.152)$$

Onde o módulo de Young transversal global vale:

$$E_T = \frac{E^m + E^r}{1 + \frac{E^r}{E^m} (1 - \nu^2)} \quad (4.153)$$

### Evolução elastoplástica

Para conhecer qual fase plastifica em primeiro lugar durante o carregamento, avaliam-se os critérios de plasticidade neste estado de tensões. Assim:

$$\begin{aligned} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) &= \sqrt{\Sigma^2 + (\sigma^r)^2} - \Sigma\sigma^r - \sigma_o^m \\ &= \frac{\Sigma}{E^m + E^r} \sqrt{(E^m + E^r)^2 + (\nu E^r)^2} - \nu E^r (E^m + E^r) - \sigma_o^m \end{aligned} \quad (4.154)$$

e

$$f^r(\sigma^r) = \Sigma \frac{\nu E^r}{E^m + E^r} - \sigma_o^r \quad (4.155)$$

O limite elástico em compressão é então:

$$\Sigma^{el} = \min \left\{ \frac{\sigma_o^m (E^m + E^r)}{\sqrt{(E^m + E^r)^2 + (\nu E^r)^2} - \nu E^r (E^m + E^r)}, \frac{\sigma_o^r (E^m + E^r)}{\nu E^r} \right\} \quad (4.156)$$

### Fase reforço plastifica

A fase reforço é solicitada em tração. Então para  $\Sigma > \Sigma^{el}$ :

$$\begin{aligned} \sigma^r &= \sigma_o^r \\ \underline{\underline{\sigma}}^m &= -\sigma_o^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \end{aligned} \quad (4.157)$$

Deduz-se então a expressão da curva de compressão após a plastificação da fase reforço.

$$\Sigma = E^m \frac{\delta}{H} + \nu \sigma_o^r \quad (4.158)$$

e a deformação plástica na fase reforço:

$$\varepsilon_p^r = \varepsilon^r - \frac{\sigma_o^r}{E^r} = \varepsilon_{xx} - \frac{\sigma_o^r}{E^r} = \frac{\nu \Sigma}{E^m} - \sigma_o^r \left( \frac{1}{E^m} + \frac{1}{E^r} \right) \quad (4.159)$$

### Fase matriz plastifica

A partir do ponto de plastificação e para uma compressão crescente, o critério  $f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m)$  é constantemente alcançado. Usando o estado de tensões (4.146) no critério de Von Mises (4.113), observa-se que  $\sigma^r$  e  $\Sigma$  vão se deslocar sobre uma elipse de equação:

$$\Sigma^2 - \Sigma\sigma^r + (\sigma^r)^2 - (\sigma_o^m)^2 = 0 \quad (4.160)$$

Explicitando agora as equações incrementais, a taxa de tensão se escreve:

$$\underline{\dot{\sigma}}^m = -\dot{\sigma}^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \dot{\Sigma} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.161)$$

A taxa de deformação elástica associada vale:

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_e^m = \frac{1}{E^m} \left\{ [-\dot{\sigma}^r + \nu \dot{\Sigma}] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + [\nu \dot{\sigma}^r - \dot{\Sigma}] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \nu [\dot{\sigma}^r + \dot{\Sigma}] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\} \quad (4.162)$$

Para calcular a taxa de deformação plástica, avalia-se o desviador de tensões:

$$\underline{s}^m = \frac{1}{3} \left\{ [\Sigma - 2\sigma^r] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + [\sigma^r - 2\Sigma] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + [\sigma^r + \Sigma] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\} \quad (4.163)$$

Quando o critério de plastificação é alcançado tem-se:

$$\|\underline{s}^m\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_o^m \quad (4.164)$$

A taxa de deformação plástica vale então:

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_p^m = \frac{\dot{\lambda}^m}{2\sigma_o^m} \left\{ [\Sigma - 2\sigma^r] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + [\sigma^r - 2\Sigma] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + [\sigma^r + \Sigma] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\} \quad (4.165)$$

Em seguida opera a elasticidade da fase reforço, assim sucessivamente

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^r &= E^r \dot{\varepsilon}_{xx} = E^r \dot{\varepsilon}_{xx}^m = E^r \left[ \dot{\varepsilon}_{e,xx}^m + \dot{\varepsilon}_{p,xx}^m \right] \\ &= E^r \left[ \frac{\nu \dot{\Sigma} - \dot{\sigma}^r}{E^m} + \frac{\dot{\lambda}^m}{2\sigma_o^m} [\Sigma - 2\sigma^r] \right] \end{aligned} \quad (4.166)$$

Deduz-se desta expressão a taxa do multiplicador plástico:

$$\frac{\dot{\lambda}^m}{2\sigma_o^m} = \frac{\dot{\sigma}^r (E^m + E^r) - \nu E^r \dot{\Sigma}}{E^m E^r (\Sigma - 2\sigma^r)} \quad (4.167)$$

A seguir, apresenta-se a taxa de deformação na direção de compressão e adicionando a contribuição elástica e plástica, e utilizando nesta última o valor da taxa de  $\dot{\lambda}^m$  precedente.

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\nu \dot{\sigma}^r - \dot{\Sigma}}{E^m} + \frac{\dot{\sigma}^r (E^m + E^r - \nu E^r \dot{\Sigma})}{E^m E^r (\Sigma - 2\sigma^r)} (\sigma^r - 2\Sigma) \quad (4.168)$$

A partir do ponto do limite de elasticidade caracterizado por  $\Sigma^{el}$ , a equação da curva de compressão transversal é então dada sob a forma diferencial (4.168), na qual  $\sigma^r$  está implicitamente ligado a  $\Sigma$  pela equação da elipse (4.160). Para resolver, falta então parametrizar a elipse. Utiliza-se a forma seguinte de parametrização:

$$\sigma^r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o^m \sin \theta \quad (4.169)$$

$$\Sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o^m \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \quad (4.170)$$

Substituindo estas últimas equações em (4.168), obtém-se após simplificação:

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_o^m}{E^m} \dot{\theta} \left\{ 2\nu \sin\theta - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \frac{E^m + E^r}{E^r} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{3} \sin\theta - \cos\theta} \right\} \quad (4.171)$$

A equação explícita da curva de carregamento em elasto-plasticidade se obtém integrando (4.171) a partir do limite elástico. Neste ponto, a deformação vale  $\epsilon_{yy} = \Sigma^{el} / E_T$  e escreve-se  $\theta_o$  o valor correspondente do parâmetro.

$$\epsilon_{yy} = \frac{\Sigma^{el}}{E_T} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_o^m}{E^m} \left[ 2\nu \sin\theta - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{E^m + E^r}{E^r} \left\{ \frac{3}{4} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - 2 + \sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 2 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \right\} \right]_{\theta_o}^{\theta} \quad (4.172)$$

A Equação (4.172) deve ser calculada entre os dois limites  $\theta$  e  $\theta_o$  onde  $\theta_o$  corresponde ao  $\Sigma$  de plastificação e  $\theta$  ao carregamento que está sendo aplicado.

#### 4.5.1.1.4 Resultados

Utilizando parâmetros idênticos aos utilizados por Sudret (1999), Tabela 4.3, os resultados encontrados são apresentados a seguir.

Tabela 4.3 – Parâmetros de cálculo para Ensaio de Compressão Transversal

Fase	Parâmetro	Compressão Transversal
Matriz	Módulo de Elasticidade	100 MPa
	Coefficiente de Poisson	0,0
	Tensão limite em tração	1,0 MPa
Reforço	Módulo de Elasticidade	5000 MPa
	Fração volumétrica	1,0 %
	Tensão limite tração	1,0 MPa

A Figura 4.11 mostra o resultado encontrado para o ensaio de compressão simples com reforço na direção transversal.

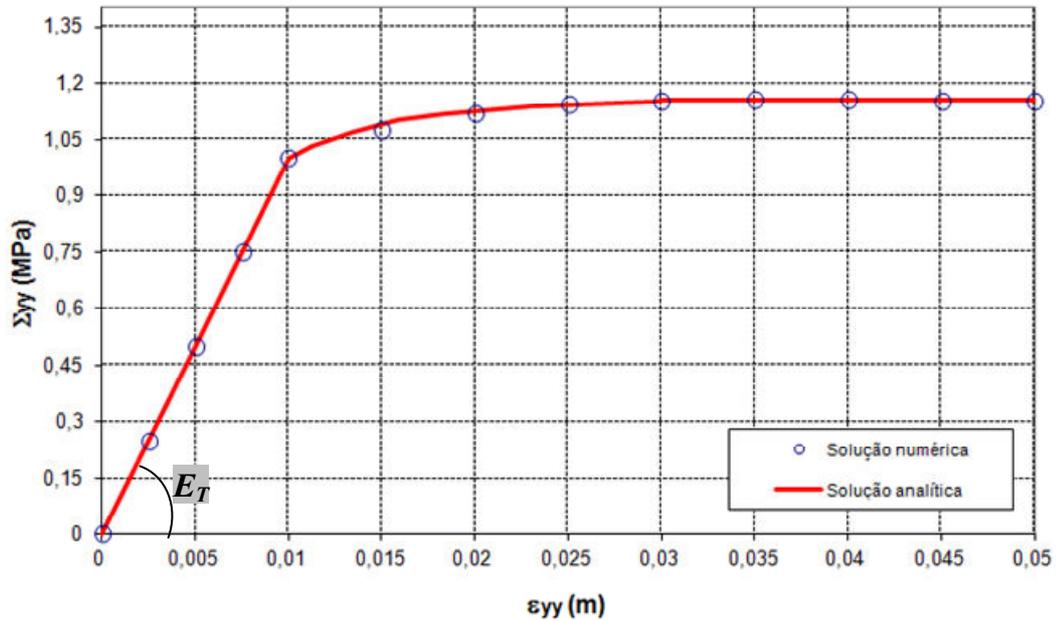


Figura 4.11 – Comportamento elastoplástico do modelo multifásico com reforço transversal

## 4.5.2 Validação do modelo com aderência imperfeita

### 4.5.2.1 Ensaio de compressão em deformação plana

O primeiro ensaio utilizado para validar o modelo com aderência imperfeita será o ensaio de compressão (no plano  $Oxy$ ) de um corpo de prova de altura  $H$  e largura igual a  $1,0$ , reforçado por inclusões dispostas paralelamente a direção  $Ox$ , como indicado na Figura 4.12. As faces laterais são livres de tensões em cada uma das fases tomadas separadamente. A face inferior está em contato com o plano fixo horizontal ( $y=0$ ) enquanto que a face superior está em contato sem atrito com uma placa rígida onde é imposto um deslocamento vertical  $\delta < 0$ . As forças volumétricas são desprezadas, a fase matriz é homogênea isotrópica.

Apresentam-se aqui os resultados da resolução analítica realizada por Sudret e de Buhan (1999) em elasticidade. A solução em deslocamento para cada uma das fases é buscada da seguinte forma:

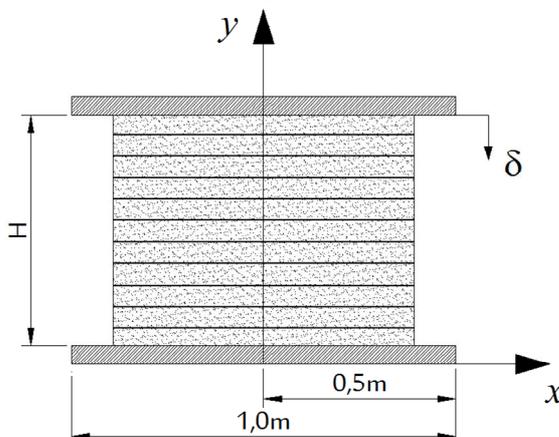
$$\begin{aligned}\underline{\xi}^m &= m(x)\underline{e}_x - y\frac{\delta}{H}\underline{e}_y \\ \underline{\xi}^r &= r(x)\underline{e}_x - y\frac{\delta}{H}\underline{e}_y\end{aligned}\quad (4.173)$$


Figura 4.12 – Compressão de um corpo de prova reforçado

As expressões das leis de comportamento são dadas por

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \lambda^m \left( m'(x) - \frac{\delta}{H} \right) \underline{\underline{1}} + 2\mu^m \left( m'(x)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \frac{\delta}{H}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \right) \\ \underline{\underline{\sigma}}^r &= a^r r'(x) \\ \underline{\underline{I}} &= I\underline{e}_x = c^I (r(x) - m(x))\underline{e}_x\end{aligned}\quad (4.174)$$

onde  $\lambda^m$  e  $\mu^m$  são os coeficientes de Lamé da fase matriz.

Substituindo estas últimas equações nas equações de equilíbrio de cada fase, obtém-se o seguinte sistema diferencial.

$$\begin{cases} a^m m'' + c^I (r - m) = 0 \\ a^r r'' - c^I (r - m) = 0 \end{cases}\quad (4.175)$$

Com  $a^m = \lambda^m + 2\mu^m$ . As faces laterais livres de tensões conduzem, por outro lado, à:

$$\begin{aligned}m'(\pm l) &= \frac{\lambda^m}{a^m} \frac{\delta}{H} \\ r'(\pm l) &= 0\end{aligned}\quad (4.176)$$

Somando as equações (4.175) e integrando duas vezes, levando em conta (4.176):

$$a^r r(x) + a^m m(x) = \lambda^m \frac{\delta}{H} x \quad (4.177)$$

Após alguns procedimentos numéricos, obtém-se a solução em deslocamentos para a fase matriz e a fase reforço.

$$\begin{aligned}
 m(x) &= \frac{\lambda^m}{a^m + a^r} \frac{\delta}{H} \left[ x + l_c \frac{a^r}{a^m} \frac{\sinh(x/l_c)}{\cosh(l/l_c)} \right] \\
 r(x) &= \frac{\lambda^m}{a^m + a^r} \frac{\delta}{H} \left[ x - l_c \frac{a^r}{a^m} \frac{\sinh(x/l_c)}{\cosh(l/l_c)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.178}$$

Onde  $l_c$  designa o *comprimento característico*:  $l_c = \sqrt{\frac{a^r a^m}{c^I (a^r + a^m)}}$ .

A seguir, são deduzidos os esforços internos:

$$\begin{aligned}
 \sigma^r(x) &= a^r \frac{\lambda^m}{a^m + a^r} \frac{\delta}{H} \left[ 1 - \frac{\cosh(x/l_c)}{\cosh(l/l_c)} \right] \\
 I(x) &= -c^I l_c \frac{\lambda^m}{a^m} \frac{\delta}{H} \frac{\sinh(x/l_c)}{\cosh(l/l_c)}
 \end{aligned}
 \tag{4.179}$$

Verificou-se igualmente que  $\sigma_{xx}^m(x) = -\sigma^r(x)$ . Desta forma, o tensor de tensões global corresponde a uma compressão em deformação plana.

O problema apresentado é resolvido com o código numérico implementado com os dados de entrada apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Parâmetros de cálculo para o ensaio de compressão simples

Fase	Parâmetro	
Matriz	Módulo de Elasticidade	10 MPa
	Coefficiente de Poisson	0,45
Reforço	“Rigidez” ( $a^r$ )	100 MPa
Interação	Coefficiente de interação ( $c^I$ )	1000 MN/m <sup>4</sup>

As curvas apresentadas na Figura 4.13 representam o deslocamento horizontal de cada uma das duas fases em função de  $x$ . A variação da tensão axial do reforço  $\sigma^r$  e dos esforços de interação,  $I$ , podem ser observados na Figura 4.14.

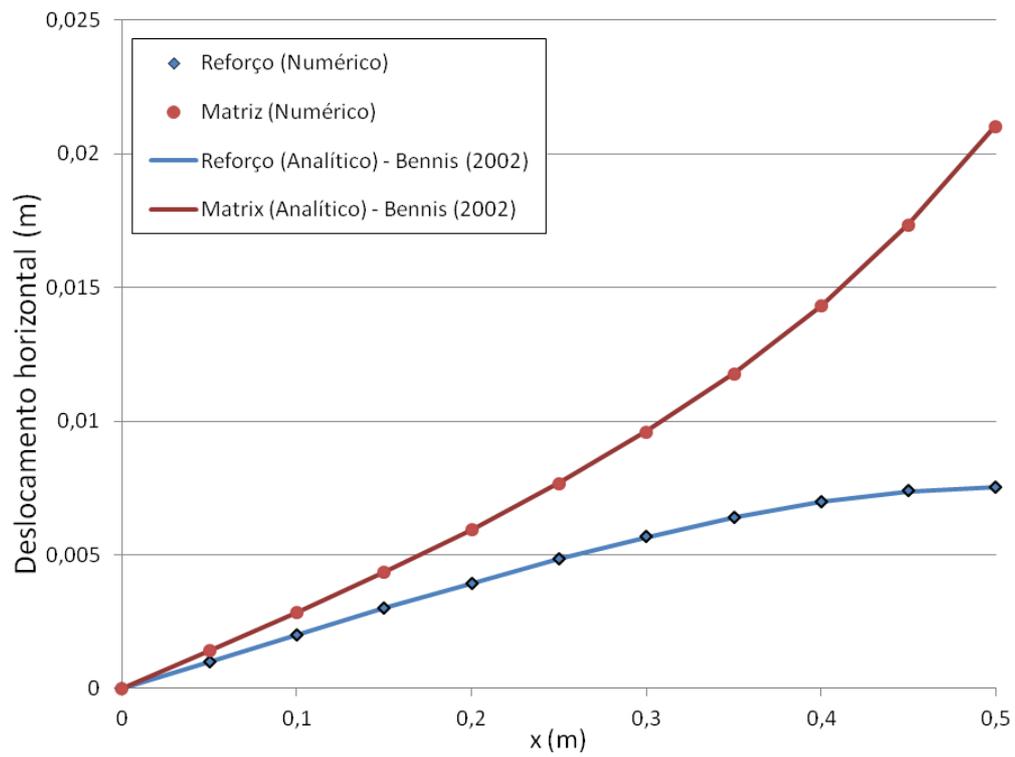


Figura 4.13 – Deslocamentos horizontais

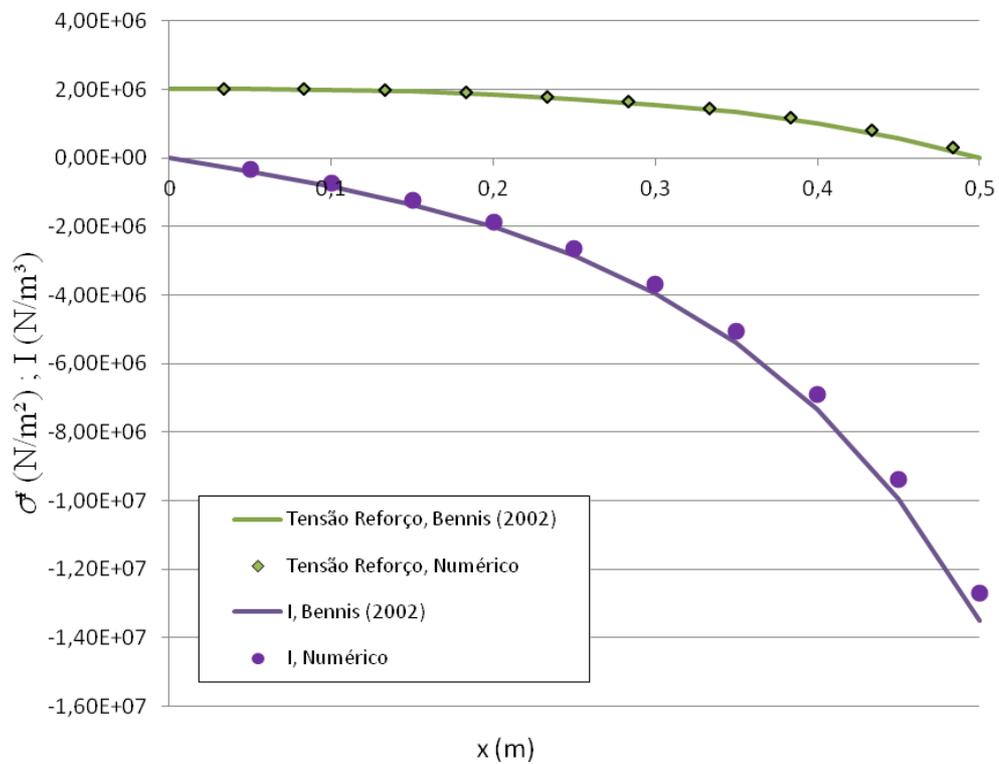


Figura 4.14 – Tensões na fase reforço (N/m²) e esforços de interação (N/m³).

Enquanto o esforço de interação tende a infinito, a tensão  $\sigma^r$  na fase reforço tende, em  $x = 0,5\text{m}$ , a um valor nulo imposto pela condição de borda livre. A fim de ilustrar este efeito de borda ligado diretamente ao coeficiente de interação, traça-se na Figura 4.15, a tensão  $\sigma^r$  para diferentes valores de  $c^I$ . Observa-se boa concordância entre a solução analítica e numérica salvo nos pontos próximos a borda livre, em especial para valores mais elevados do coeficiente de interação. Tal imprecisão numérica é devida ao fato de  $\sigma^r$  tender a uma distribuição do tipo Dirac enquanto  $c^I$  tende ao infinito.

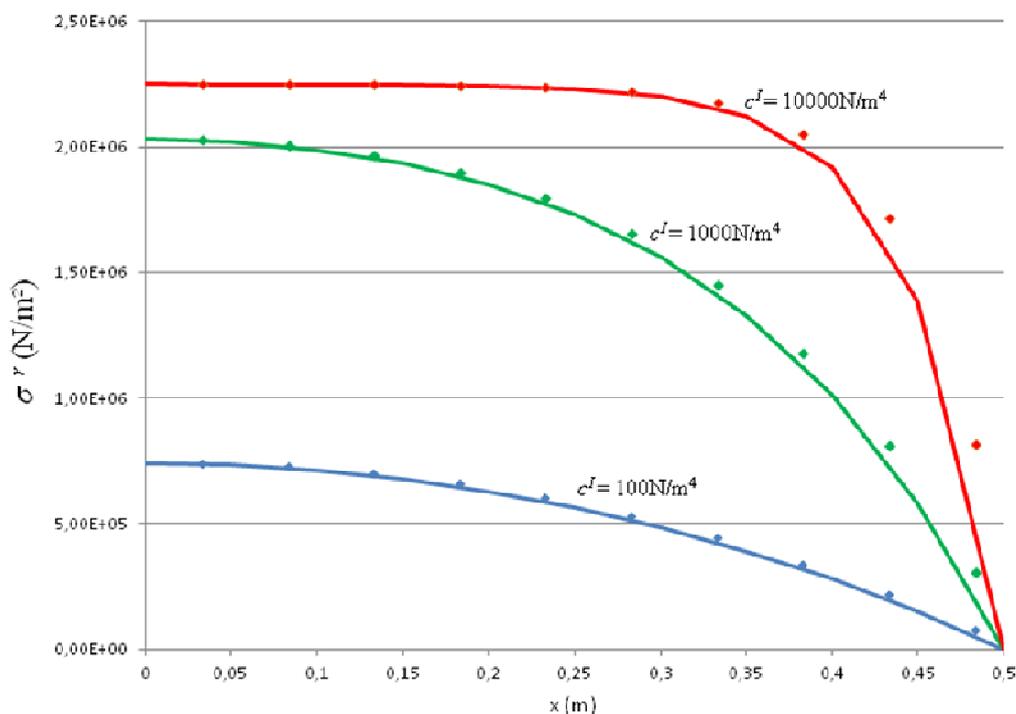


Figura 4.15 – Tensão na fase reforço variando o coeficiente de interação. Linhas contínuas, Bennis (2002); símbolos, resultados numéricos.

#### 4.5.2.2 Ensaio de arrancamento da fase reforço com engastamento

##### 4.5.2.2.1 Elasticidade

O segundo exemplo provém da modelagem bifásica do ensaio de arrancamento de inclusões em um material reforçado por inclusões dispostas paralelamente à  $Oz$  (Figura 4.16). Os reforços de comprimento  $l$  são submetidos à tração por intermédio de uma placa rígida que impõe um deslocamento  $\delta$  ( $\delta > 0$ ) em  $z = l$ , enquanto que a fase matriz se encontra livre de tensões em  $z = l$ .

$$\sigma_{zz}^m(l) = 0 \quad (4.180)$$

Referindo-se agora às condições de contorno impostas em  $z = 0$ , dois tipos de ensaios podem ser realizados: *ensaio de arrancamento sem engastamento* (impõe-se deslocamento nulo apenas para a fase matriz) e *ensaio de arrancamento com engastamento* (impõe-se deslocamento nulo para a fase matriz e para a fase reforço). A segunda opção será tratada nesta seção.

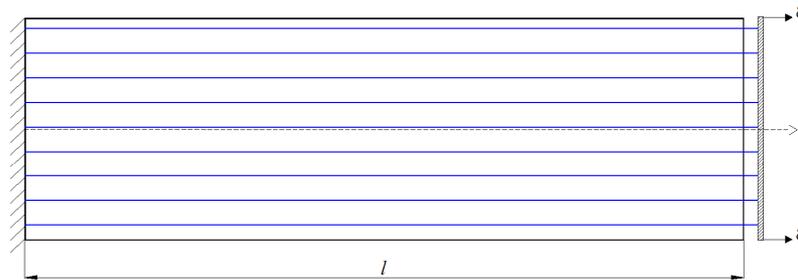


Figura 4.16 – Ensaio de arrancamento da fase reforço.

Considerando um problema unidimensional, dependente apenas de  $z$ , considera-se um meio reforçado com dimensão vertical grande em relação ao comprimento das inclusões. A resolução de tal problema é obtida graças à abordagem por deslocamentos. Buscam-se os campos de deslocamentos das fases matriz e reforço sob a forma:

$$\underline{\xi}^m = m(z)\underline{e}_z \quad \underline{\xi}^r = r(z)\underline{e}_z \quad (4.181)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} m(z=0) &= 0, & \text{para a fase matriz} \\ r(z=0) &= 0, \quad r(z=l) = \delta, & \text{para a fase reforço} \end{aligned} \quad (4.182)$$

Assegurando o caráter cinematicamente admissível para estes campos.

As leis de comportamento são as seguintes:

- Para a fase matriz, a componente do tensor de tensões  $\sigma_{zz}^m$  pode ser expressa por:  
 $\sigma_{zz}^m = a^m m'(z)$ , com  $a^m = \lambda^m + 2\mu^m$ .
- Para a fase reforço  $\sigma^r = a^r r'(z)$ , com  $a^r$  sendo a rigidez da fase reforço.
- Para a lei de interação  $I = c^l (r(z) - m(z))$

A substituição das leis de comportamento nas equações de equilíbrio resulta:

$$\begin{cases} a^m m''(z) + c^l (r(z) - m(z)) = 0 \\ a^r r''(z) - c^l (r(z) - m(z)) = 0 \end{cases} \quad (4.183)$$

Os detalhes da resolução deste sistema podem ser observados em Bennis (2002). A solução dos campos de deslocamentos é apresentada a seguir:

$$r(z) = \frac{\frac{a^m}{a^r} \sinh\left(\frac{z}{l_c}\right) + \frac{z}{l_c} \cosh\left(\frac{l}{l_c}\right)}{\frac{a^m}{a^r} \sinh\left(\frac{l}{l_c}\right) + \frac{l}{l_c} \cosh\left(\frac{l}{l_c}\right)} \delta \quad (4.184)$$

$$m(z) = \frac{-\sinh\left(\frac{z}{l_c}\right) + \frac{z}{l_c} \cosh\left(\frac{l}{l_c}\right)}{\frac{a^m}{a^r} \sinh\left(\frac{l}{l_c}\right) + \frac{l}{l_c} \cosh\left(\frac{l}{l_c}\right)} \delta \quad (4.185)$$

A partir destas expressões dos campos de deslocamentos é possível obter as tensões parciais de cada fase.

$$\sigma^r(z) = a^r r'(z) = a^r \frac{\cosh\left(\frac{z}{l_c}\right) + \frac{a^r}{a^m} \cosh\left(\frac{l}{l_c}\right)}{\frac{l_c}{l} \sinh\left(\frac{l}{l_c}\right) + \frac{a^r}{a^m} \cosh\left(\frac{l}{l_c}\right)} \frac{\delta}{l} \quad (4.186)$$

$$\sigma^m(z) = a^m m'(z) = -a^m \frac{\cosh\left(\frac{z}{l_c}\right) - \cosh\left(\frac{l}{l_c}\right)}{a^m l_c \sinh\left(\frac{l}{l_c}\right) + a^r l \cosh\left(\frac{l}{l_c}\right)} \delta \quad (4.187)$$

Sendo o problema unidimensional, discretiza-se então uma malha retangular de espessura  $t$  e comprimento  $l$ , contendo um único elemento na direção perpendicular a  $\underline{e}_z$ . Foram utilizados 10 elementos tridimensionais de 8 nós, divididos uniformemente ao longo da direção horizontal  $\underline{e}_z$ . Os valores numéricos adotados para o problema são dados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Parâmetros de cálculo para o ensaio de arrancamento com engastamento

Fase	Parâmetro	
Matriz	Módulo de Elasticidade ( $E^m$ )	290 MPa
	Coefficiente de Poisson	0,45
Reforço	“Rigidez” ( $a'$ )	5000 MPa
	Comprimento da inclusão (l)	10 m
Interação	Coefficiente de interação ( $c^I$ )	200 MN/m <sup>4</sup>

Na Figura 4.18 são apresentados os resultados dos campos de deslocamentos  $m$  e  $r$ , referindo-se, respectivamente, às fases matriz e reforço. Da mesma forma, para as tensões parciais nas fases (Figura 4.18) é realizado o comparativo entre a solução analítica e numérica correspondente. Observa-se boa correspondência entre os resultados.

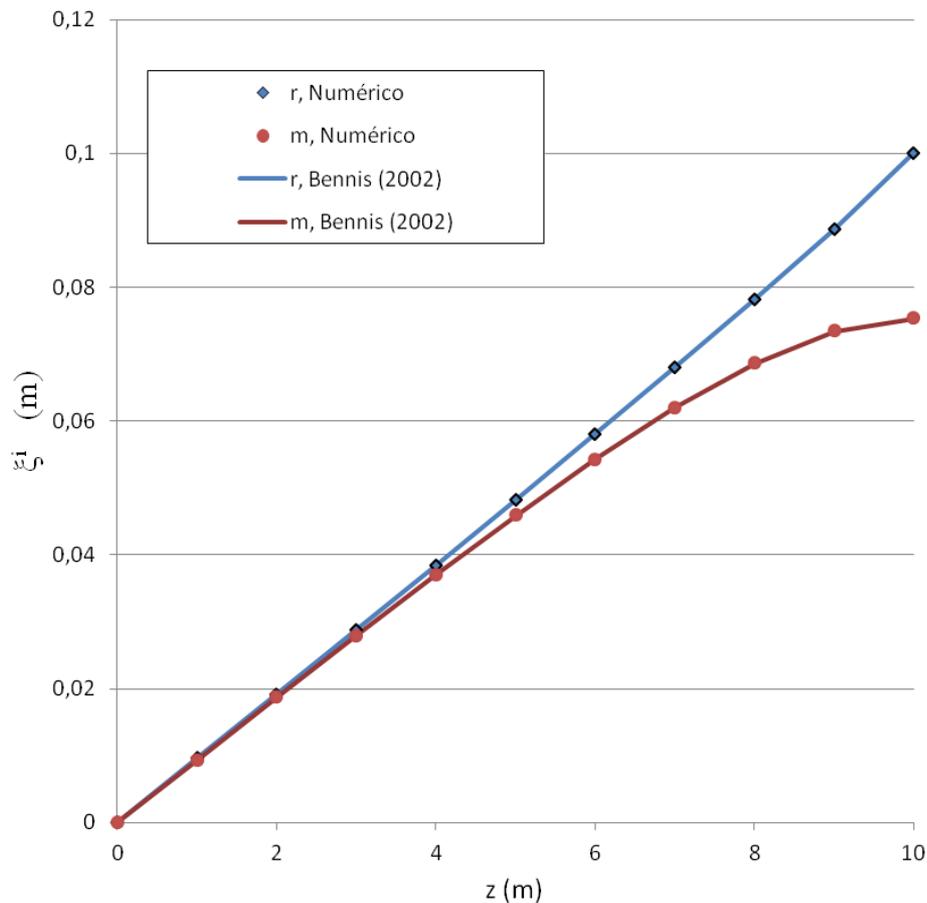


Figura 4.17 – Ensaio de arrancamento com engastamento: comparação entre resultados analíticos e numéricos – deslocamentos das fases matriz e reforço.

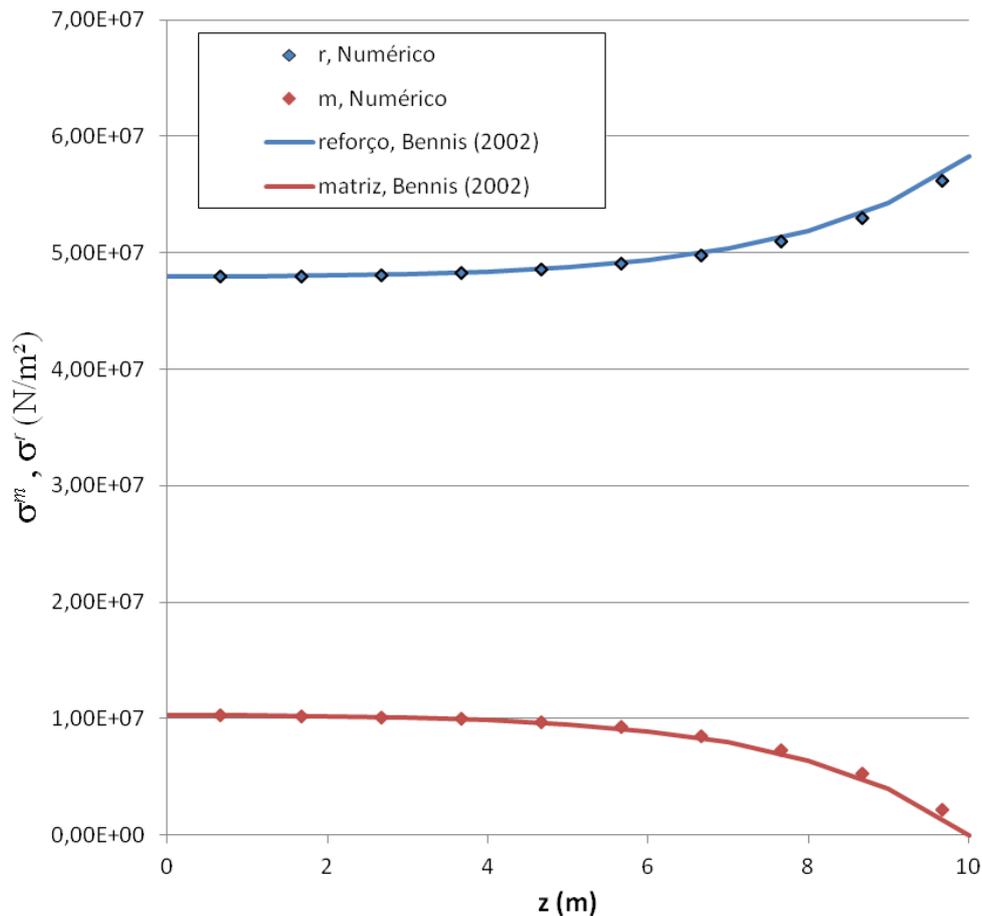


Figura 4.18 – Ensaio de arrancamento com engastamento: comparação entre resultados analíticos e numéricos – Tensões parciais na fase matriz e reforço.

#### 4.5.2.2.2 Evolução elastoplástica

A partir da expressão da tensão parcial na fase reforço, é possível obter a expressão do esforço superficial  $q_e$ , aplicado na extremidade  $z = l$ .

$$q_e = \sigma^r(l) = a^r r' = a^r \frac{1 + \frac{a^m}{a^r}}{1 + \frac{a^m \operatorname{tgh}(\beta)}{a^r \beta}} \frac{\delta}{l} \quad (4.188)$$

Onde  $\beta = \frac{l}{l_c}$ . Esta equação permite traçar a curva de carregamento  $q$  em função de  $\delta/l$  em fase elástica.

O esforço de interação, também em fase elástica, é dado por:

$$I_e(z) = c^l (r - m) = c^l a^r \frac{(a^r + a^m) \operatorname{senh}(z/l_c)}{a^m \operatorname{senh}(\beta) + a^r \beta \operatorname{cosh}(\beta)} \delta \quad (4.189)$$

Levando em conta que a força de interação é crescente em  $z$ , a primeira plastificação irá ocorrer em  $z = l$ . A fim de determinar o limite de elasticidade, considera-se que o critério de plasticidade é atendido em  $z = l$ , ou seja,  $I_e(l) = I_{\max}$ .

Temos então que o limite de elasticidade é atendido para um carregamento correspondente à aplicação de um carregamento correspondente à aplicação de um deslocamento igual a:

$$\delta_{le} = \frac{I_{\max}}{c^l} \frac{a^m + a^r}{a^r + a^m} \frac{\beta}{\operatorname{tgh}\beta} \quad (4.190)$$

A expressão (4.188) se torna, neste limite:

$$q_{le} = q_{le}(\delta_{le}) = a^r \frac{I_{\max}}{c^l l} \frac{\beta}{\operatorname{tgh}\beta} \quad (4.191)$$

Quando  $\delta$  ultrapassa o limite  $\delta_{le}$ , a zona plástica, inicialmente reduzida ao ponto  $z=l$  começa a se propagar. Esta zona corresponde ao segmento  $[z_0, l]$  com  $0 \leq z_0 \leq l$  enquanto que o segmento complementar  $[0, z_0[$  permanece elástico. O valor de  $z_0$  é logicamente uma função do deslocamento,  $z_0 = z_0(\delta)$ .

Após algum desenvolvimento matemático, Bennis (2002) apresenta a relação entre  $\delta$  e  $z_0$ .

$$\delta = \frac{l_c^2 I_{\max}}{a_r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \beta - \frac{z_0}{l_c} \right)^2 + \left( \beta - \frac{z_0}{l_c} + \frac{1}{\operatorname{tgh}\left(\frac{z_0}{l_c}\right)} \right) \left( \frac{a_r + a_m}{a_m} \beta - \frac{z_0}{l_c} \right) \right] \quad (4.192)$$

A relação entre  $q$  e  $z_0$  é dada por:

$$q = \frac{a_r + a_m}{a_m} \left[ I_{\max} l \left( 1 - \frac{z_0}{l} \right) + \frac{I_{\max} l \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z_0}{l} \right)^2 - \left( 1 - \frac{z_0}{l} \right) \left( \frac{a_m + a_r}{a_m} - \frac{z_0}{l} \right) \right\} + a_r \frac{\delta}{l}}{\frac{1}{\beta} \operatorname{tgh}\left(\frac{z_0}{l_c}\right) + \left( \frac{a_m + a_r}{a_m} - \frac{z_0}{l} \right)} \right] \quad (4.193)$$

#### 4.5.2.2.3 Resultados

Os resultados numéricos são comparados com os resultados analíticos obtidos com a formulação apresentada. As curvas na Figura 4.19a apresentam a resposta carga x deslocamento quando a rigidez do reforço é variada (200, 400 e 600 MPa) e o coeficiente de interação é mantido constante em  $300 \text{ MN/m}^4$ . É importante salientar que tanto a fase matriz quanto a fase reforço permanecem elásticas enquanto a interface plastifica. A Figura 4.19b apresenta o resultado quando o coeficiente de variação varia de  $2,93 \text{ MN/m}^4$  até  $293,3 \text{ MN/m}^4$  e a rigidez do reforço é mantida inalterada. Observa-se que quando  $c^l$  é pequeno ( $\beta \ll 1$ ), a curva em fase elástica é praticamente a mesma que em fase elastoplástica. Assim, o efeito da

plasticidade é praticamente desprezível. Quando  $c^I$  é grande ( $\beta \gg 1$ ), é observado um efeito significativo da plastificação da interação.

Os resultados confirmaram a validação do procedimento numérico.

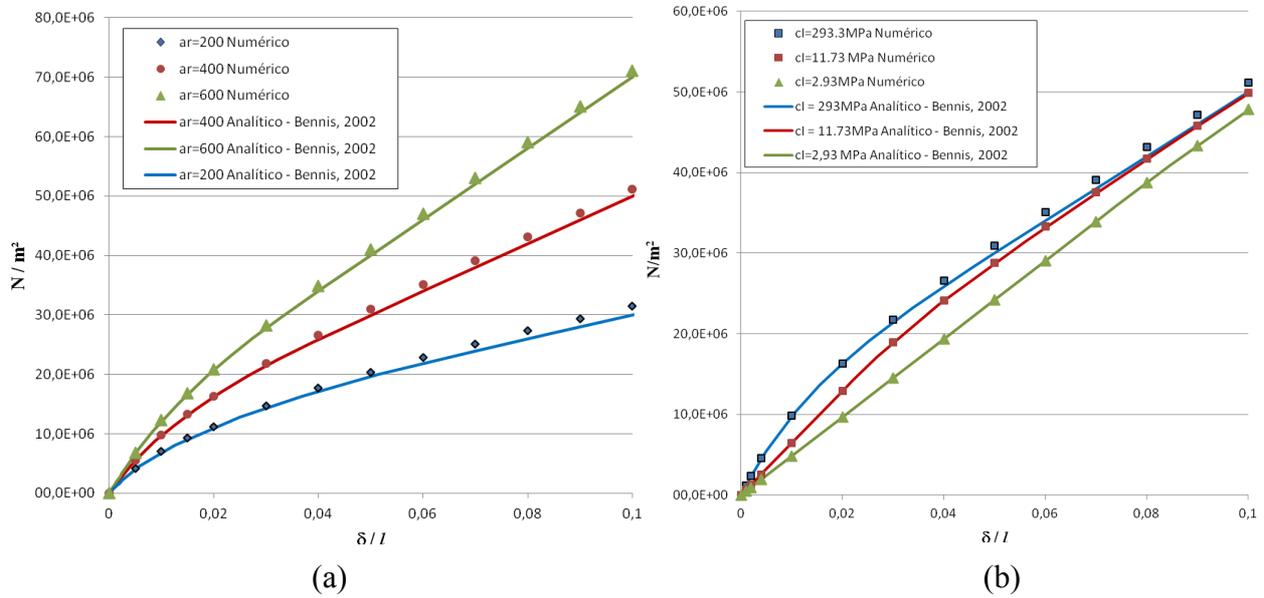


Figura 4.19 – Ensaio de arrancamento com engastamento – Carga-deslocamento (a) variando a rigidez do reforço (b) variando o coeficiente de interação

## 5 APLICAÇÃO A ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

### 5.1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é um material constituído pela mistura de agregados e uma pasta de cimento associados com barras de aço. Devido ao fato do concreto ser uma combinação de diversos materiais, as estruturas de concreto armado comportam-se de maneira bastante complexa, apresentando uma resposta não-linear. Este comportamento deve-se, principalmente, a três efeitos: à plastificação do concreto comprimido e do aço, à fissuração do concreto tracionado e aos efeitos dependentes do tempo (não abordados neste trabalho) como a retração e fluência do concreto. Outros fatores como efeito de pino das barras de aço e o engrenamento dos agregados também contribuem para a resposta não-linear deste material.

### 5.2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO

O concreto é um material que possui resistência à compressão muito maior que a resistência à tração. Desta forma, foram utilizados dois modelos diferentes para descrever seu comportamento: para o concreto comprimido, um modelo elastoplástico com endurecimento e, para o concreto tracionado, um modelo elástico linear até a ruptura e a partir da qual se considera um modelo de *tension-stiffening*. Estes modelos são descritos nos itens que seguem.

#### 5.2.1 Modelo para o concreto comprimido

O modelo para o concreto comprimido é composto por um critério de ruptura, um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

### 5.2.1.1 Critério de ruptura

Utiliza-se o critério de ruptura proposto por Ottosen (1977), o qual é recomendado pelo CEB-FIP Model Code 1990 (1993). Neste critério, a superfície de ruptura é dada pela expressão.

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (5.1)$$

Onde  $f_{cm}$  é a resistência média de compressão do concreto,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões,  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros do critério e  $\lambda$  é uma função que depende do ângulo de similaridade  $\theta$  do concreto. A função  $\lambda$  é definida pelas seguintes expressões.

$$\begin{aligned} \lambda &= c_1 \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos(-c_2 \sin 3\theta) \right], \quad \text{para } \sin 3\theta \leq 0 \\ \lambda &= c_1 \cos \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \sin 3\theta) \right], \quad \text{para } \sin 3\theta > 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Com:

$$\sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{J_3}{J_2^{2/3}} \quad (5.3)$$

Sendo  $J_3$  o terceiro invariante do tensor desviador de tensões.

Os quatro parâmetros do modelo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $c_2$  são determinados, de acordo com CEB-FIP 1990 (1993), a partir da relação de resistência média à compressão uniaxial  $f_{cm}$  e a resistência média à tração uniaxial  $f_{tm}$  do concreto.

Desta forma, os parâmetros do critério de Ottosen são calculados por:

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}}, \quad \beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}, \quad c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}}, \quad c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2, \quad k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}} \quad (5.4)$$

### 5.2.1.2 Critério de plastificação

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha um endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura. Considerando a tensão efetiva  $\sigma_{ef} = f_{cm}$  e reorganizando (5.1), obtém-se a seguinte expressão para a superfície de plastificação.

$$f = \sigma_{ef} = \frac{1}{2} \left[ \lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2} \right] \quad (5.5)$$

O domínio elástico é definido para tensões efetivas menores que 30% da tensão de ruptura. Para superfícies de carregamento subsequentes à superfície de plastificação inicial ( $0,3f_{cm} < \sigma_{ef} < f_{cm}$ ) ocorre o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento, conforme visto na Figura 5.1.

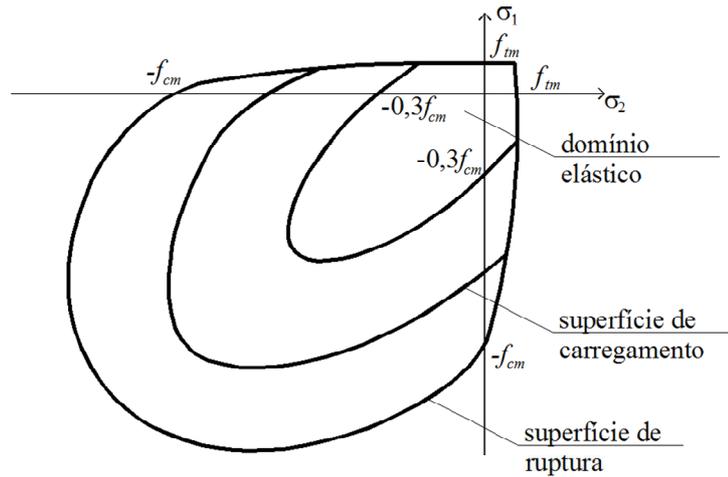


Figura 5.1 – Superfície de plastificação e ruptura

### 5.2.1.3 Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação subsequentes (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. Ela é determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, onde é possível extrapolar os resultados de um ensaio uniaxial para uma situação multiaxial. Utiliza-se, neste trabalho, o diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido proposto pelo CEB-FIP 1990 (1993), que pode ser visto na Figura 5.2. A expressão utilizada é a que segue:

$$\sigma_c = - \frac{\frac{-E_m}{f_{cm}} \varepsilon_p - \left( \frac{\varepsilon_p}{-0,0022} \right)^2}{1 + \left( \frac{E_m}{f_{cm}} 0,0022 - 2 \right) \frac{\varepsilon_p}{-0,0022}} f_{cm} \quad (5.6)$$

onde  $E_m$  é o módulo de elasticidade do concreto e  $\varepsilon_p$  é a deformação plástica. Sob o ponto de vista prático, uma deformação plástica efetiva é computada a partir do vetor de deformações. Este valor é então utilizado em (5.6) para atualizar o parâmetro de endurecimento  $\sigma_c$ .

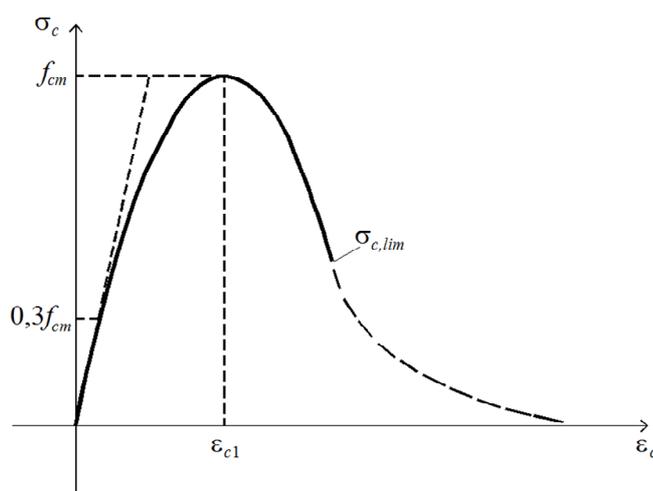


Figura 5.2 – Diagrama tensão-deformação para compressão uniaxial.

### 5.2.2 Modelo para o concreto tracionado

Devido à característica do concreto de possuir uma resistência à tração significativamente inferior a resistência à compressão resulta que, mesmo para carregamentos dentro das condições de serviço, o material fissa. Esta fissuração induz a um comportamento não-linear, influenciando no desempenho carga-deslocamento de estruturas de concreto armado (Jost, 2006).

No contexto do Método dos Elementos Finitos, duas abordagens são utilizadas na maior parte dos casos. O *Modelo Discreto*, que representa as fissuras como descontinuidades reais na malha; e o *Modelo Distribuído (Smearred crack model)*, onde se admite que o concreto se mantém contínuo e as propriedades do material são modificadas.

Neste trabalho, o concreto tracionado é modelado em duas etapas. Antes de atingir a tensão de fissuração, o concreto comporta-se como um material elástico-linear. Após a abertura da fissura, utiliza-se o modelo de fissuras distribuídas baseado na formulação apresentada por Hinton (1988). Este modelo é fundamentado em um critério de fissuração, uma regra para colaboração do concreto entre fissuras (amolecimento) e um modelo para transferência das tensões de corte.

#### 5.2.2.1 O modelo de fissuras distribuídas

Conforme citado anteriormente, o modelo de fissuras distribuídas não leva em conta a descontinuidade real da malha de elementos finitos, não sendo necessário modificar a topologia da malha, resultando em um ganho significativo no custo computacional.

O concreto é inicialmente isotrópico, mas após a fissuração o concreto torna-se ortotrópico, com os eixos principais do material orientados segundo a direção das fissuras (Hinton, 1988). Admite-se assim, que uma fissura tenha se formado em um plano ortogonal à tensão principal de tração  $\sigma_I$  (definida a seguir). Desta forma, o módulo de elasticidade é reduzido na direção perpendicular ao plano de fissuração e o efeito de Poisson é desprezado. O módulo de elasticidade transversal também é reduzido.

#### 5.2.2.2 Critério de fissuração

O critério utilizado para a avaliação da fissuração do concreto consiste em verificar se o nível de tensão dos pontos de integração dos elementos atingiram a superfície de ruptura, conforme apresentado em 5.2.1.1. Uma vez que a superfície de ruptura pode ser alcançada por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo CEB (1983) para distinguir estas situações:

- a) Se  $\sigma_1 \geq \frac{f_m}{2}$ , o ponto de integração fissurou
- b) Se  $\sigma_1 < \frac{f_m}{2}$ , o ponto de integração sofreu esmagamento

onde  $\sigma_I$  é a tensão principal de tração, que pode ser determinada por:

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (5.7)$$

#### 5.2.2.3 Contribuição do concreto entre as fissuras (*tension stiffening*)

Quando ocorre a fissuração, o concreto entre fissuras continua resistindo a esforços de tração, suportando um certo nível de tensão (Hinton, 1988). A aderência do concreto com as barras de aço contribui ativamente para rigidez global da estrutura, caracterizando um fenômeno conhecido como *tension stiffening effect*. A opção adotada neste trabalho sugere a modificação da curva tensão deformação do concreto, com a introdução de um ramo descendente na curva tensão-deformação, conforme proposto por Hinton (1988). A relação constitutiva adotada foi a mesma utilizada por Martineli (2002). Quando  $\varepsilon_{ui} < \varepsilon_t$ :

$$\sigma = E_o \varepsilon_{ui} \quad (5.8)$$

Porém quando  $\varepsilon_{ui} > \varepsilon_t$

$$\sigma = \alpha f_{tm} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_m} \right) \quad (5.9)$$

Onde  $\alpha$  é o parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente,  $\varepsilon_m$  é o parâmetro que indica a deformação limite na qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser levado em conta. Os valores adotados neste trabalho foram 0,4 e 0,01, respectivamente. A Figura 5.3, apresenta o diagrama do concreto tracionado.

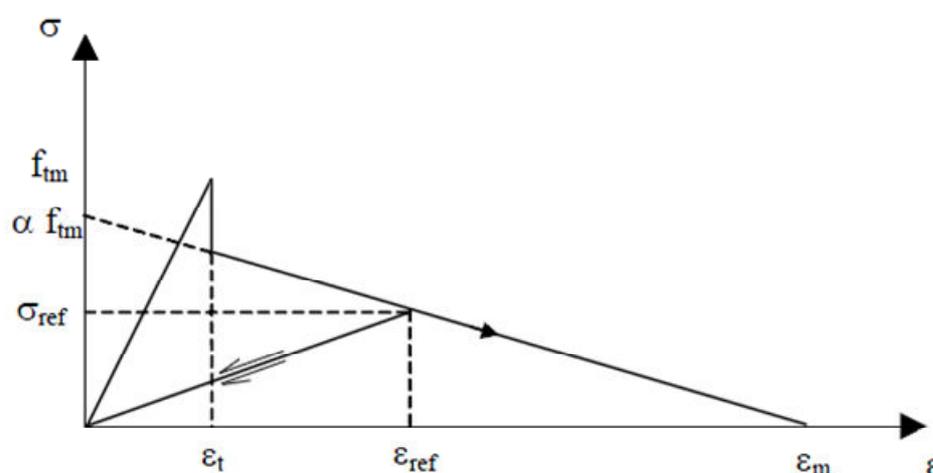


Figura 5.3 – Curva tensão deformação para o concreto tracionado (Martinelli, 2003).

#### 5.2.2.4 Transferência das tensões de corte

Experimentos mostram que uma considerável parcela do esforço de corte é transferido pela superfície irregular do concreto fissurado. Os dois principais mecanismos desta transferência são o efeito de engrenamento dos agregados e o efeito de pino da armadura (Hinton, 1988). Ambos os mecanismos são controlados pela abertura de fissura e a capacidade de transferência de corte é reduzida com o aumento desta abertura. Neste trabalho, adotou-se a abordagem proposta por Hinton (1988) que consiste em adotar um valor reduzido para o módulo de elasticidade transversal correspondente ao plano fissurado. Assim:

$$G_c = \beta G_0 \quad (5.10)$$

Onde  $G_0$  é o módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado, definido por  $G_0 = E / (2(1 + \nu))$  e  $\beta$  é o fator de redução que varia entre 0 e 1.  $G_c$  é o valor reduzido da

variável. Hinton (1988) relaciona o valor de  $\beta$  ao valor da tensão de tração normal ao plano da fissura. Neste trabalho, a seguinte formulação é utilizada:

$$\beta = 1 - (\varepsilon_t / 0.005)^{k_1} \quad (5.11)$$

Onde  $\varepsilon_t$  é a tensão de tração normal ao plano da fissura e  $k_1$  varia de 0,3 até 1,0. O valor de 0,3 é adotado neste trabalho devido ao fato de outros autores, como Martinelli (2003) e Bono (2008), obterem bons resultados com a utilização deste dado. É interessante notar que à medida que a deformação  $\varepsilon_t$  aumenta, o módulo de corte reduzido  $G_c$  diminui.

### 5.3 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO

Neste trabalho utiliza-se um modelo uniaxial para descrever o comportamento das armaduras, considerando que as barras de aço apresentem resistência apenas aos esforços uniaxiais. No modelo implementado, o aço é representado como um material elastoplástico, apresentando o mesmo comportamento em tração e compressão. O diagrama apresentado na Figura 5.4, descreve este comportamento.

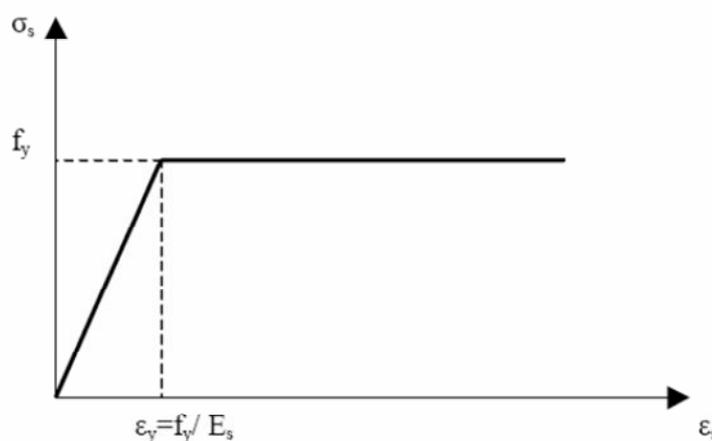


Figura 5.4 – Diagrama tensão-deformação para compressão uniaxial.

### 5.4 VALIDAÇÃO DA MODELAGEM NUMÉRICA

Nos capítulos anteriores foram realizados alguns testes que buscaram provar a validade do modelo numérico implementado. Para tanto foram realizados estudos comparativos envolvendo exemplos com solução analítica disponível. Contudo, estas validações

consideraram materiais hipotéticos, sem levar em conta o comportamento do concreto apresentado no Capítulo 5.

Neste momento serão apresentados os resultados da aplicação do modelo a estruturas de concreto reais: as vigas de Bresler e Scordelis (1963), as lajes de Jofriet e McNeice (1971) e Duddeck et al (1978) e os ensaios de arrancamento de Watstein (1947).

#### 5.4.1 Vigas de Bresler-Scordelis

A primeira aplicação da modelagem multifásica proposta utiliza o modelo que considera uma aderência perfeita entre as barras de aço e o concreto. A aplicação será feita em vigas de concreto armado com as mesmas propriedades das vigas biapoiadas e submetidas a uma carga centralizada, ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963) em um estudo sobre tensões de cisalhamento (Figura 5.5).

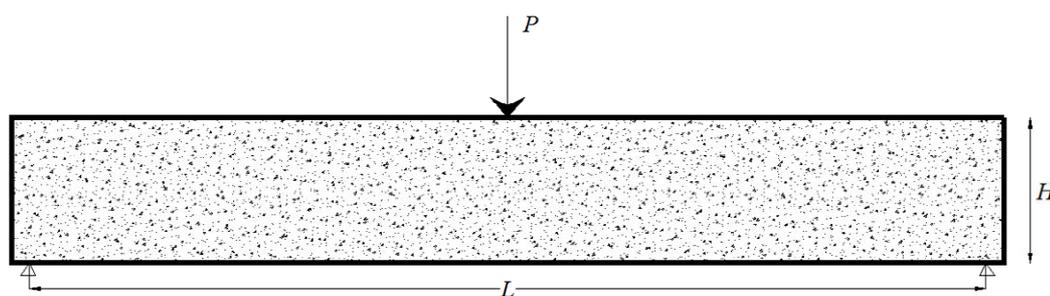


Figura 5.5 – Viga simplesmente apoiada

As 12 vigas simuladas pelos autores são divididas em quatro grupos diferentes (OA, A, B e C), variando o comprimento do vão, as dimensões da seção transversal, o reforço aplicado e a resistência do concreto. Os grupos A, B e C possuem reforço positivo e negativo (armadura inferior e superior) assim como estribos para suportar os esforços de corte.

A Tabela 5.1 apresenta a largura ( $w$ ), altura ( $h$ ), comprimento do vão ( $L$ ), área da armadura inferior ( $A_s$ ), área da armadura superior ( $A_s'$ ), área de estribos, resistência a compressão ( $f_c$ ) e à tração do concreto ( $f_t$ ). As dimensões das vigas e os reforços utilizados podem ser vistos na Figura 5.6. O coeficiente de Poisson utilizado foi  $\nu^m=0,2$ . O módulo de elasticidade do concreto pode ser calculado a partir da equação proposta pelo CEB (1993):

$$E^m = 21500 \left[ \frac{f_{cm}}{10} \right]^{1/3} \text{ (MPa)} \quad (5.12)$$

Tabela 5.1 – Propriedades das vigas (Bresler-Scordelis, 1963)

Viga	w (cm)	h (cm)	L (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	Estribos	f <sub>c</sub> (kN/cm <sup>2</sup> )	f <sub>t</sub> (kN/cm <sup>2</sup> )
OA1	31,0	55,6	366	25,88	-	-	2,25	0,264
OA2	30,5	56,1	457	32,35	-	-	2,37	0,289
OA3	30,7	55,6	640	38,81	-	-	3,76	0,276
A1	30,7	55,1	366	25,88	2,53	φ 6,4c/21	2,41	0,257
A2	30,5	55,9	457	32,35	2,53	φ 6,4c/21	2,43	0,248
A3	30,7	56,1	640	38,81	2,53	φ 6,4c/21	3,50	0,289
B1	23,1	55,6	366	25,88	2,53	φ 6,4c/19	2,48	0,266
B2	22,9	56,1	457	25,88	2,53	φ 6,4c/19	2,32	0,251
B3	22,9	55,6	640	32,35	2,53	φ 6,4c/19	3,87	0,281
C1	23,1	55,6	366	25,88	2,53	φ 6,4c/21	2,96	0,281
C2	22,9	56,1	457	32,35	2,53	φ 6,4c/21	2,38	0,262
C3	22,9	55,6	640	38,81	2,53	φ 6,4c/21	3,50	0,257

A malha utilizada para as simulações consiste em 30 elementos hexaédricos de 20 nós (Figura 5.7). Os elementos hachurados representam os elementos reforçados, ou seja, os elementos que recebem uma contribuição de reforço longitudinal (na direção do eixo  $x$ ). Salienta-se que uma vez que a taxa de armadura superior e inferior são diferentes, estas receberão, na modelagem numérica, diferentes frações volumétricas e, desta forma, serão representadas por duas fases distintas. Para simular as vigas dos grupos A, B e C, que possuem reforço ao cisalhamento, é necessário utilizar uma terceira fase, na direção do eixo  $y$ , para todos os elementos da malha. As dimensões da malha empregada não são especificadas pois variam para cada exemplo (vide Figura 5.6).

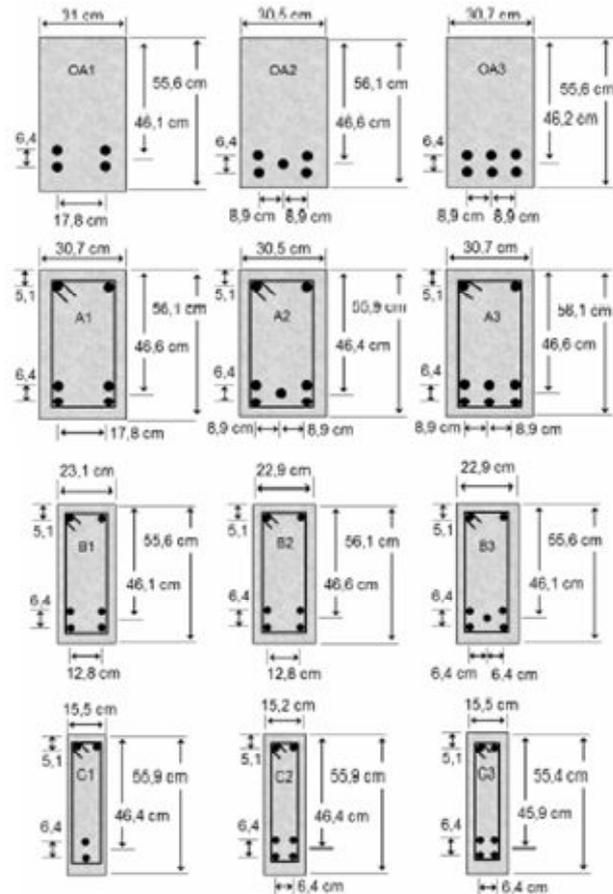


Figura 5.6 – Detalhamento das vigas de Bresler-Scordelis (1963)

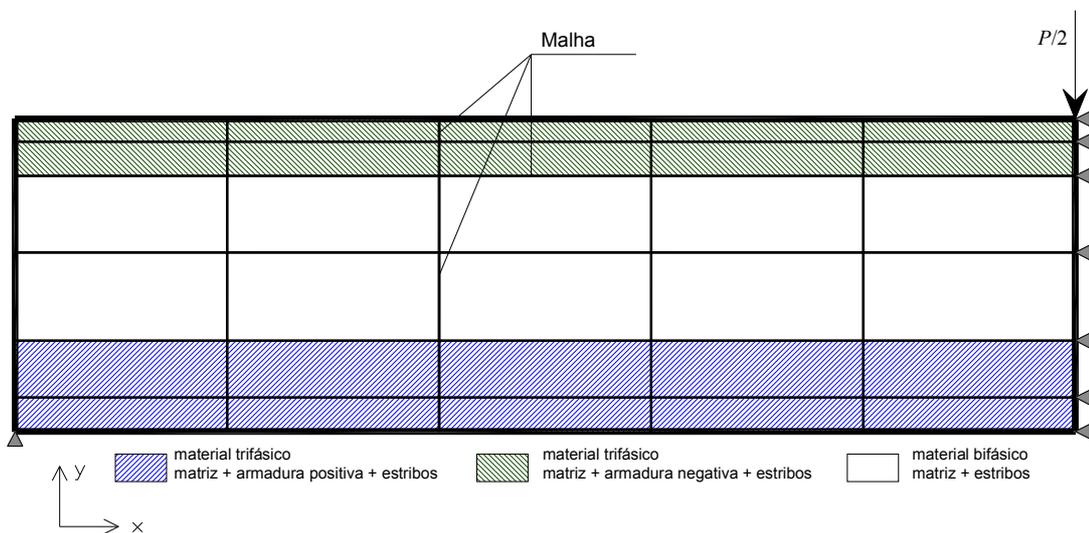


Figura 5.7 – Malha em elementos finitos e fases de reforço

Os resultados da análise não linear destas vigas utilizando a modelagem multifásica são dados na Figura 5.8, Figura 5.9 e Figura 5.10, a seguir. Como pode ser visto nestas figuras, os resultados numéricos possuem boa coerência com os resultados experimentais. As simulações foram interrompidas no ponto em que o algoritmo passou a apresentar instabilidade numérica.

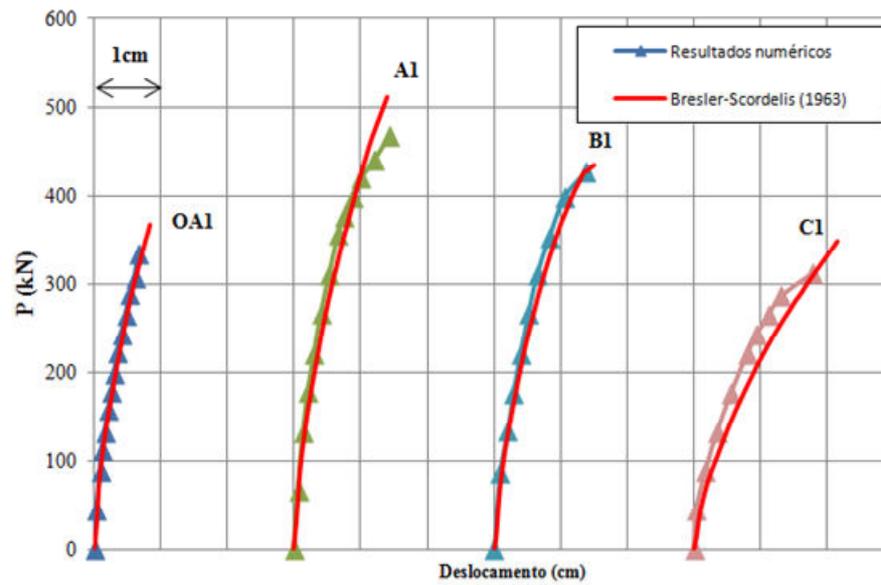


Figura 5.8 – Curvas carga-deslocamento – Bresler-Scordelis – Série 1

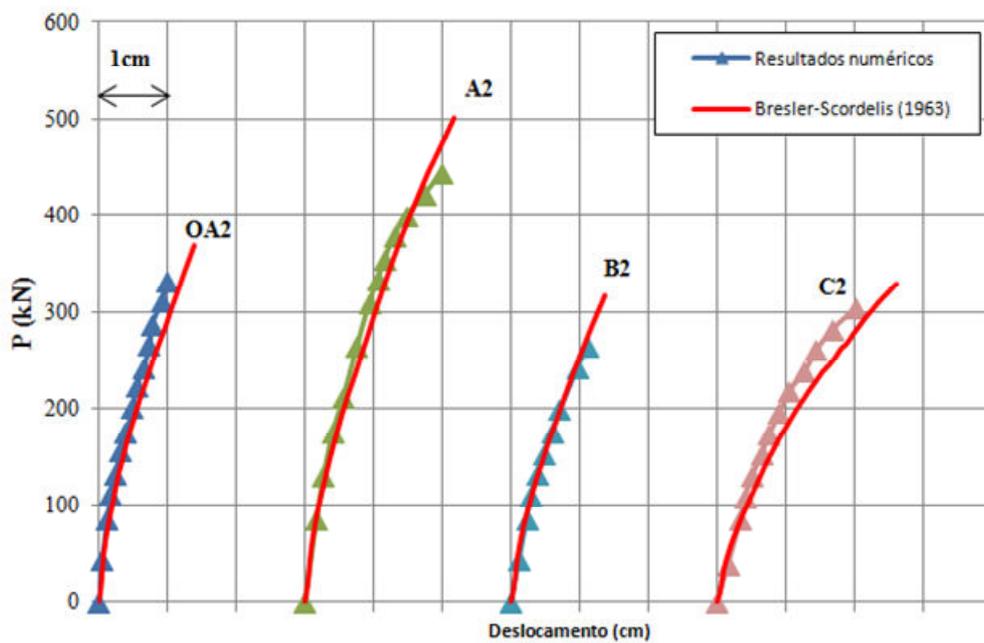


Figura 5.9 – Curvas carga-deslocamento – Bresler-Scordelis – Série 2

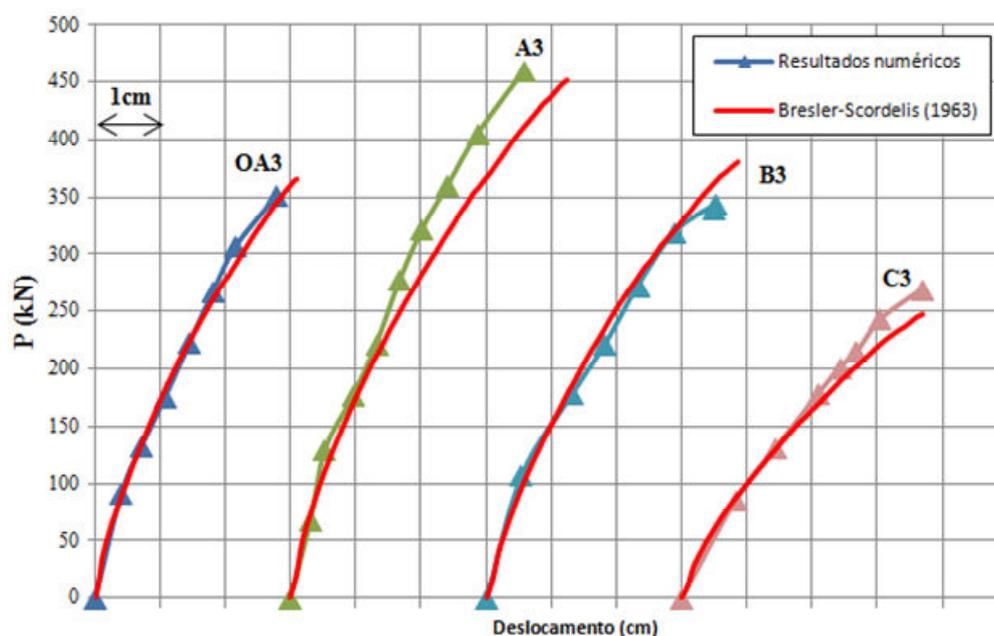


Figura 5.10 – Curvas carga-deslocamento – Bresler-Scordelis – Série 3

#### 5.4.2 Lajes de concreto armado

Resultados de ensaios de placas quadradas, apoiadas nos cantos, submetidas a carga centralizada podem ser encontrados em Jofriet e McNeice (1971) e Duddeck et al. (1978). Os testes realizados por estes autores têm sido usado como *benchmark* para verificação de esquemas numéricos por vários pesquisadores como Zhang et al. (2007) e Hinton et al. (1981). Neste trabalho, estas placas são analisadas utilizando a modelagem multifásica para determinar a precisão da modelagem proposta.

A geometria e reforço das placas são apresentados na Figura 5.11 e na Figura 5.12 e as propriedades dos materiais estão listadas na Tabela 5.2.

A malha em elementos finitos utilizada para realizar ambas as simulações consiste em 200 elementos hexaédricos de 20 nós. A seção transversal da placa é dividida em 8 camadas de concreto e uma ou mais camadas equivalentes de aço com o reforço aplicado em duas direções. Devido à simetria do problema, apenas um quarto da geometria foi discretizado.

Tabela 5.2 – Propriedades dos materiais dos ensaios das lajes de Jofriet e McNeice (1971) e Duddeck et al (1978)

Fase	Propriedades	McNeice	Duddeck
Matriz (concreto)	Módulo de Elasticidade ( $E^m$ )	28.600 MPa	16.400 MPa
	Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,15	0,15
	Resistência à compressão ( $\sigma^m$ )	38 MPa	43 MPa
	Resistência à tração ( $\sigma^t$ )	3,8 MPa	2,0 MPa
	$\alpha_t$ coeficiente de redução	0,4	0,4
Reforço (aço)	Módulo de Elasticidade ( $E^r$ )	200.000 MPa	201.000 MPa
	Fração volumétrica ( $\eta$ )	Varia	Varia
	Tensão de plastificação ( $\sigma^r$ )	350 MPa	670 MPa

As placas testadas por Jofriet e McNeice (1971) possuem reforço apenas na zona inferior da seção transversal (armadura positiva) enquanto nas placas de Duddeck et al (1978) o reforço é posicionado tanto na zona inferior como na zona superior (armadura positiva e negativa). Estes detalhes podem ser observados nas Figuras 5.13 e 5.14.

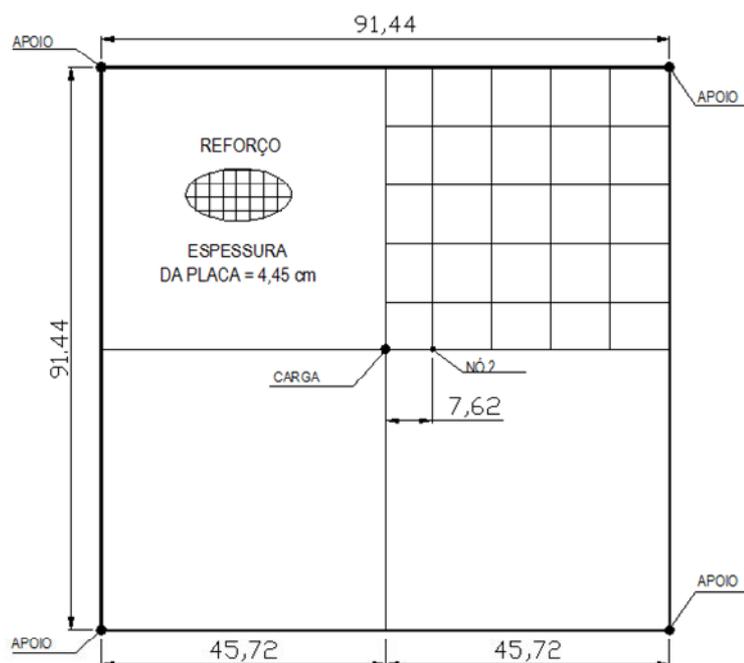


Figura 5.11 – Geometria das lajes reforçadas de Jofriet e McNeice (1971)

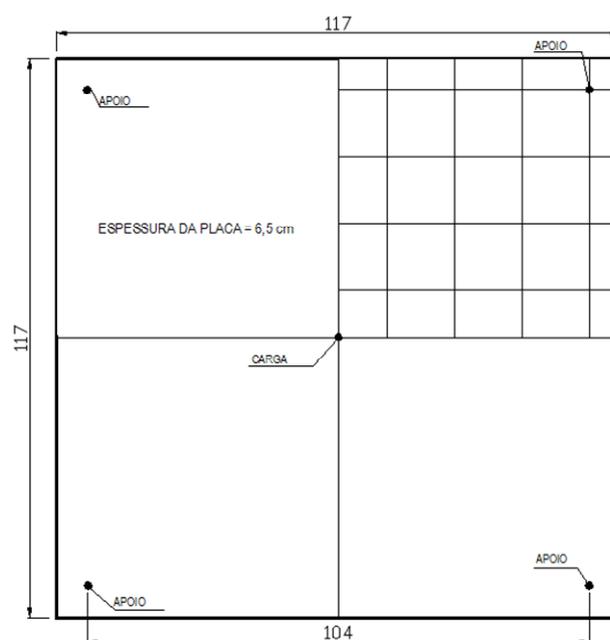


Figura 5.12 – Geometria das lajes reforçadas de Duddeck et al (1978)

As placas são reforçadas em duas direções por uma distribuição paralela de barras introduzidas seguindo as direções  $e_x$  and  $e_y$ . O carregamento corresponde a um teste de flexão com apenas um ponto sendo carregado.

No caso das lajes de Duddeck a taxa de reforço (área de aço em relação à área de concreto) na zona superior é  $\rho = 0.0296$ , enquanto que na zona inferior é  $\rho = 0.061$ . McNeice utiliza apenas armadura positiva com uma taxa de  $282\text{mm}^2/\text{m}$ . Salienta-se que os deslocamentos são medidos no chamado “nó 2”, indicado na Figura 5.11a.

As simulações numéricas foram realizadas correspondendo a cinco diferentes distribuições de reforço. O Exemplo 0 não possui reforço, e servirá de referência, enquanto que no Exemplo 1 o reforço é aplicado em toda a seção transversal da laje. Nos Exemplos 2, 3 e 4, o reforço é aplicado em uma área progressivamente menor, como pode ser observado na Figura 5.13 e Figura 5.14. É importante salientar que a fração volumétrica varia em cada exemplo a fim de manter a mesma quantidade de aço no modelo.

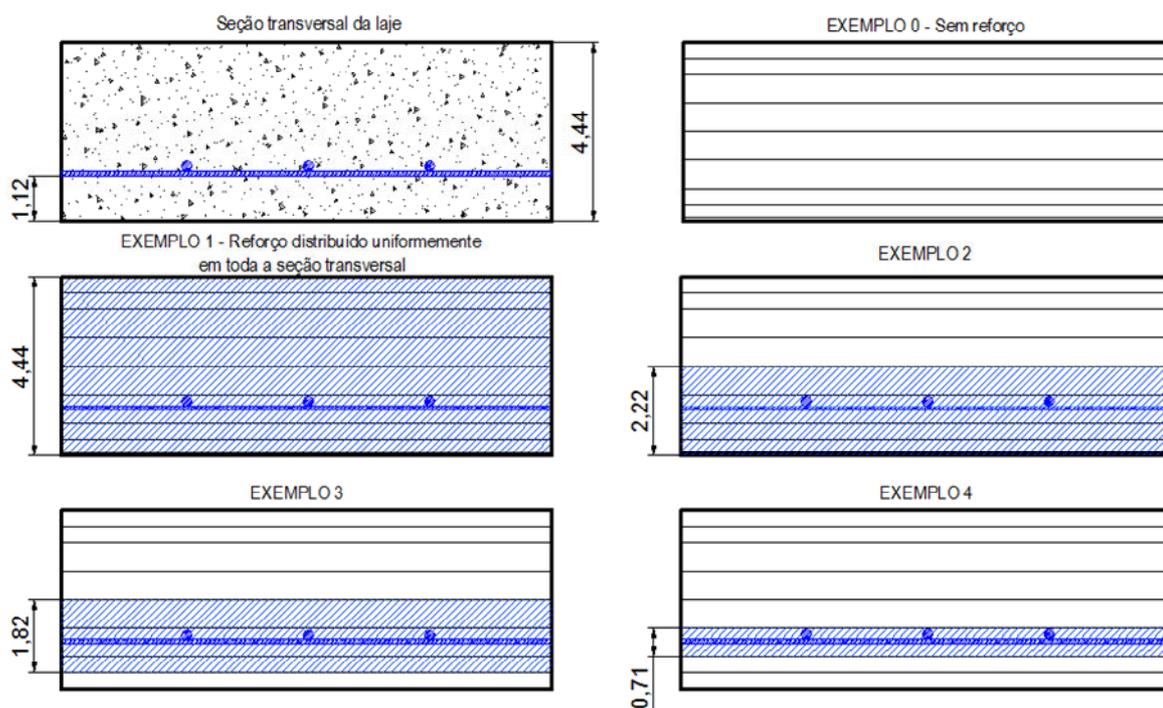


Figura 5.13 – Distribuição de reforço de Jofriet e McNeice (1971): as regiões hachuradas indicam a extensão da zona multifásica.

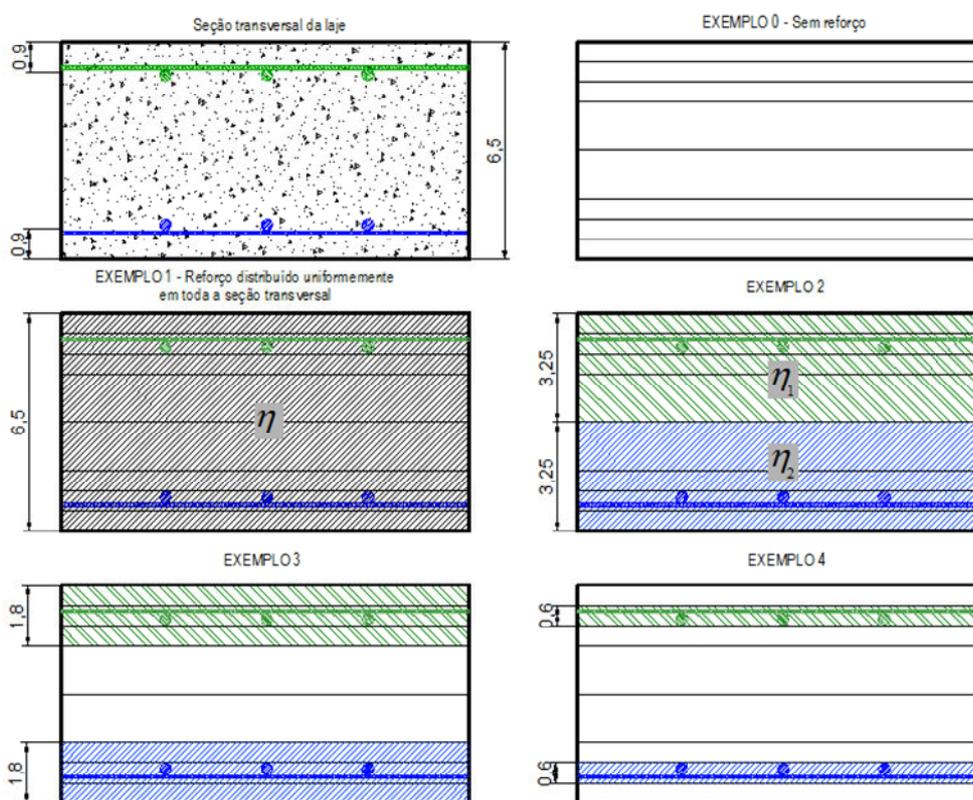


Figura 5.14 – Distribuição de reforço de Duddeck et al (1978): taxas de aço diferentes na zona superior e na zona inferior.

A Figura 5.15 apresenta os resultados numéricos e experimentais. Por comparação, observa-se que os resultados encontrados são compatíveis. Logicamente, considerando as situações

reforçadas, o Exemplo 1, tanto para Duddeck como para Jofriet e McNeice, produziu os piores resultados já que o centro de gravidade das barras de reforço não foi observado. O Exemplo 0, não reforçado, deve ser considerado simplesmente como um referencial.

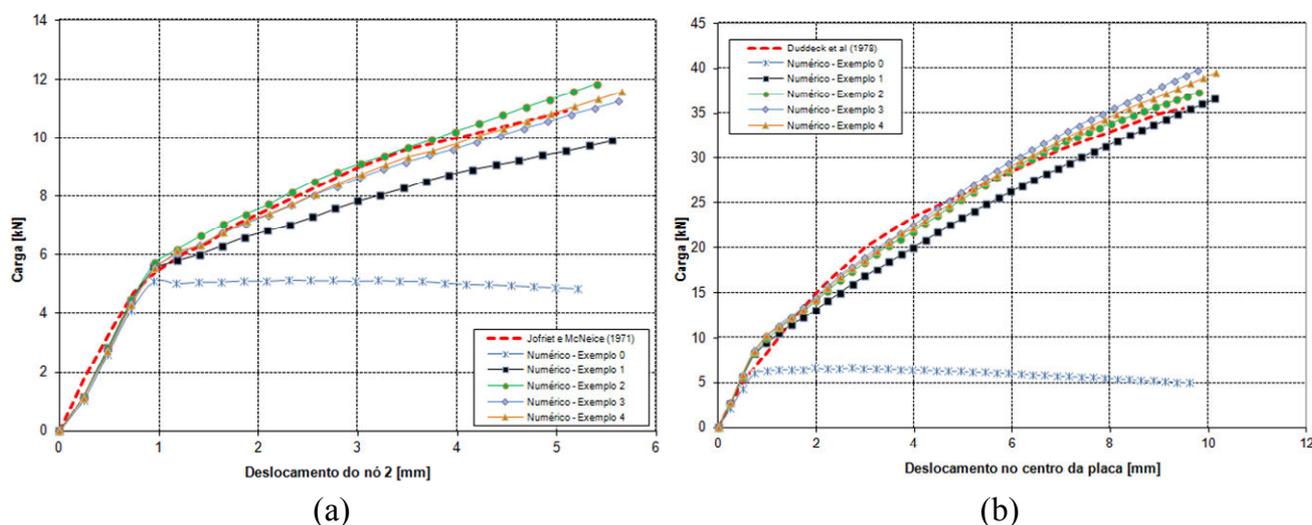


Figura 5.15 – Curvas carga x deslocamento para lajes submetidas a carregamento centralizado. (a) Jofriet e McNeice; (b) Duddeck

Uma importante questão desta modelagem computacional é determinar a extensão da chamada zona multifásica (zona reforçada). Na verdade, este aspecto está relacionado à validade desta abordagem já que teoricamente a densidade de reforço requerida é muito maior para que o material seja considerado, em uma escala macroscópica, como um material homogêneo. A influência da área onde o reforço é aplicado pode ser observada na Figura 5.16.

A análise indica que para os testes de Jofriet e McNeice (1971), os Exemplos 3 e 4 convergem para os resultados experimentais, o que significa que, para o exemplo adotado, zonas reforçadas com uma extensão de 40,9% (1,82cm/4,44cm) e 15,9% (0,71/4,44cm) provaram ser o suficiente para uma apropriada representação da zona reforçada. Comportamento muito similar foi encontrado nas comparações com a laje de Duddeck: o modelo utilizando uma zona com extensão de 50% (3,25cm/6,5cm) produziu bons resultados. Observa-se assim uma independência da extensão da zona multifásica em relação ao modelo. Esta tendência deve ser verificada por estudos complementares.

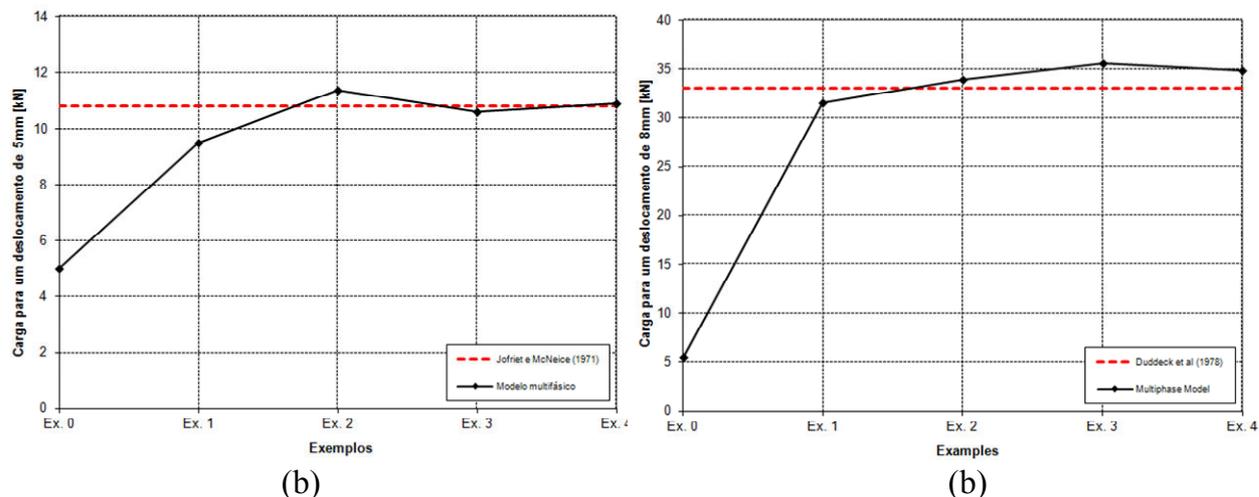


Figura 5.16 – Carga x espessura da zona multifásica para um deslocamento fixo de: (a) 5mm no nó 2 para Jofriet e McNeice e (b) 8mm no centro da placa para Duddeck et al.

#### 5.4.3 Ensaio de arrancamento

Nesta seção será empregado o modelo com aderência imperfeita entre o concreto e o aço, sendo realizada uma primeira tentativa de identificação dos parâmetros da lei de interação através da simulação dos ensaios de arrancamento (*pull-out tests*) realizados por Watstein (1947). O objetivo deste autor foi o de determinar a distribuição das tensões de aderência ao longo de corpos de prova submetidos a ensaios de arrancamento. Foram utilizados corpos de prova cilíndricos com diâmetro de 6 polegadas (15,24cm), comprimento de 8 e 12 polegadas (20,32 e 30,48 cm), reforçados por uma barra aço de 0,75 polegada de diâmetro (1,905 cm), posicionada no centro do cilindro de concreto.

O corpo de prova de concreto é apoiado em uma mesa que possui um orifício. Por este orifício o carregamento na barra de aço é realizado, conforme Figura 5.17. Ao longo do corpo de prova, Watstein (1947) posicionou uma série de extensômetros elétricos (*strain gauges*) a fim de medir o deslizamento relativo entre as barras de aço e o concreto. Na borda superior do cilindro, tanto o concreto quanto o aço estão livres. Já na extremidade inferior o concreto está simplesmente apoiado enquanto a barra de aço sofre o carregamento. Assim, toda a tensão é transferida pelo aço para o concreto por aderência.

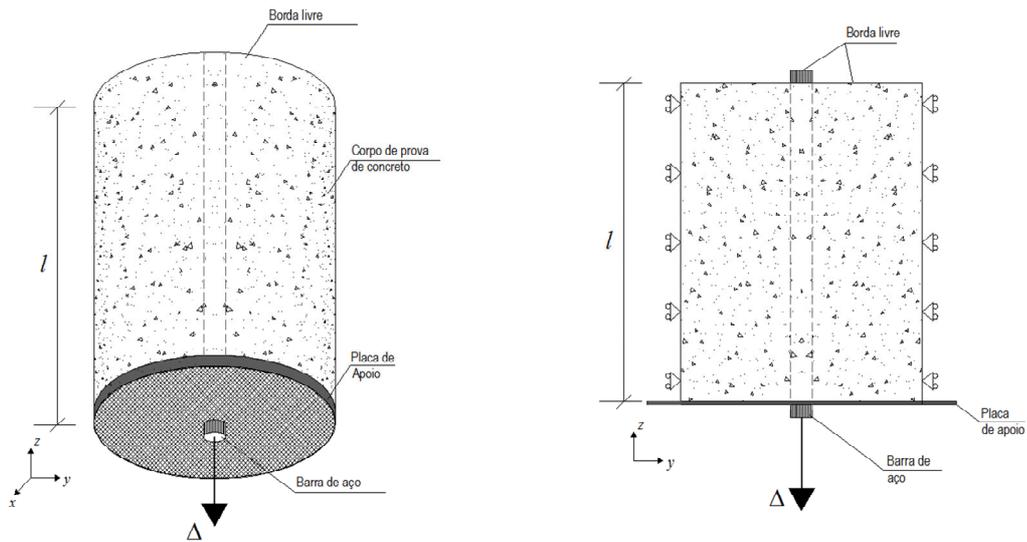


Figura 5.17 – Ensaio de arrancamento

Para a modelagem em elementos finitos, foram utilizados 10 elementos hexaédricos distribuídos ao longo do comprimento do corpo de prova (um elemento na espessura). Lembrando que a formulação empregada permite a utilização de cinemáticas diferentes para cada fase. Desta forma, um deslocamento de  $-\Delta \underline{e}_z$  foi aplicado nos graus de liberdade relativos à armadura. Os deslocamentos no concreto foram restringidos nesta direção. A malha, exemplificando este procedimento pode ser observada na Figura 5.18.

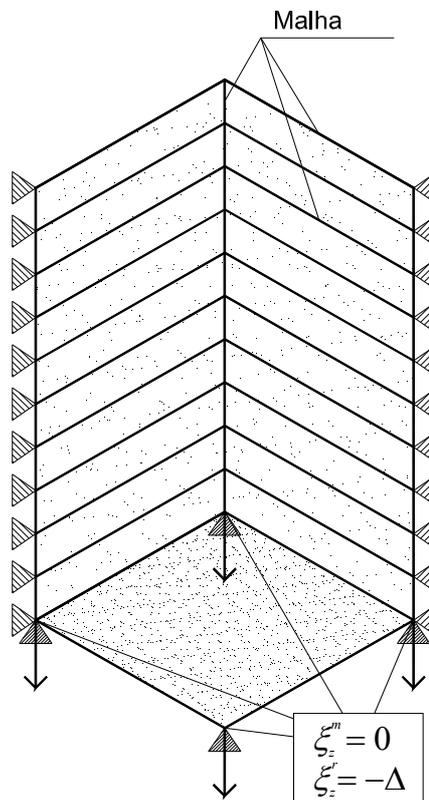


Figura 5.18 – Malha utilizada no ensaio de arrancamento.

É importante salientar que a aplicabilidade desta modelagem multifásica, conforme já citado no Capítulo 3, necessita que as inclusões sejam arrançadas periodicamente de forma paralela a uma certa direção. Neste exemplo há apenas uma barra no corpo de prova e, portanto, esta condição claramente não é atendida. Desta forma, a análise tem base puramente heurística para dar continuidade ao estudo deste ensaio. A Tabela 5.3 apresenta as propriedades dos materiais.

Tabela 5.3 – Propriedades mecânicas – Ensaio de arrancamento de Watstein (1947)

Fase	Parâmetro	Valores
Matriz (Concreto)	Módulo de Elasticidade (MPa)	30.035,0
	Coefficiente de Poisson	0,15
	Resistência à tração (MPa)	2,81
	Resistência à compressão (MPa)	28,1
Reforço (Aço)	Módulo de Elasticidade (MPa)	210.000,0
	Fração volumétrica	1,52%
	Tensão limite (MPa)	500,0
Interação	Coefficiente de Interação (MN/m <sup>4</sup> )	11,0

O coeficiente de interação é um parâmetro de entrada não conhecido e sua determinação é de importância fundamental. Utilizou-se neste trabalho o valor que produziu os resultados mais próximos das curvas experimentais. Na Figura 5.19 é possível observar a sensibilidade do modelo a este parâmetro. Quanto maior o valor de  $c^I$ , maior a curvatura e maior o nível do esforço de interação nas proximidades da borda carregada. O coeficiente de interação variou entre 11 e 88 MN/m<sup>4</sup>, para um mesmo nível de carregamento. Devido a um melhor ajuste à curva, o valor de 11 MN/m<sup>4</sup> será utilizado nas simulações a seguir.

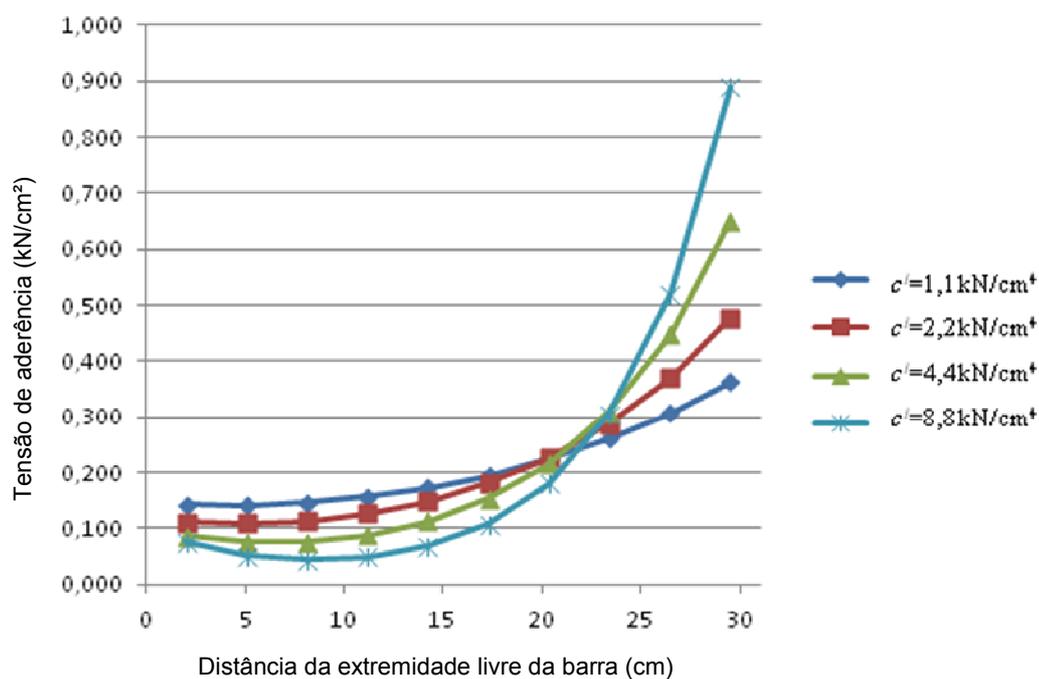


Figura 5.19 – Sensibilidade do modelo ao parâmetro coeficiente de interação.

Os resultados são apresentados em termos de tensão na barra de aço e esforços volumétricos de interação. Em ambos os casos, os resultados são apresentados ao longo do comprimento do corpo de prova para cinco incrementos de carga (18, 36, 45, 54 e 72 kN). A Figura 5.20a e a Figura 5.20b apresentam os resultados para o corpo de prova de 20,3cm. A Figura 5.21a e a Figura 5.21b se referem ao corpo de prova de 30,4cm.

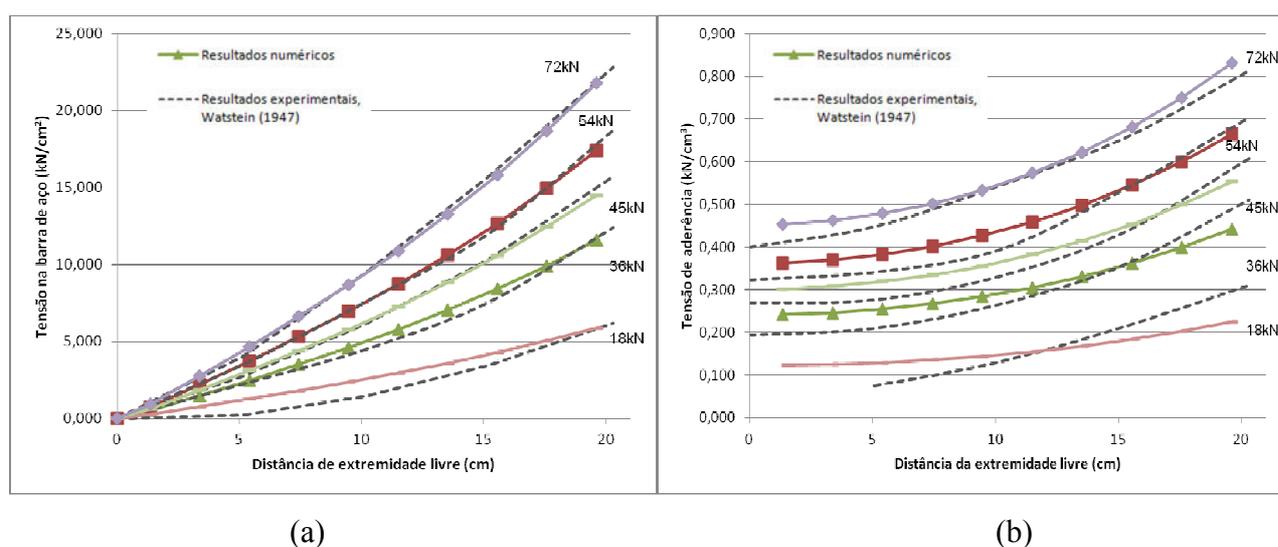


Figura 5.20 – Corpo de prova de 20,3cm. (a) Distribuição da tensão na barra de aço (b) esforços de aderência.

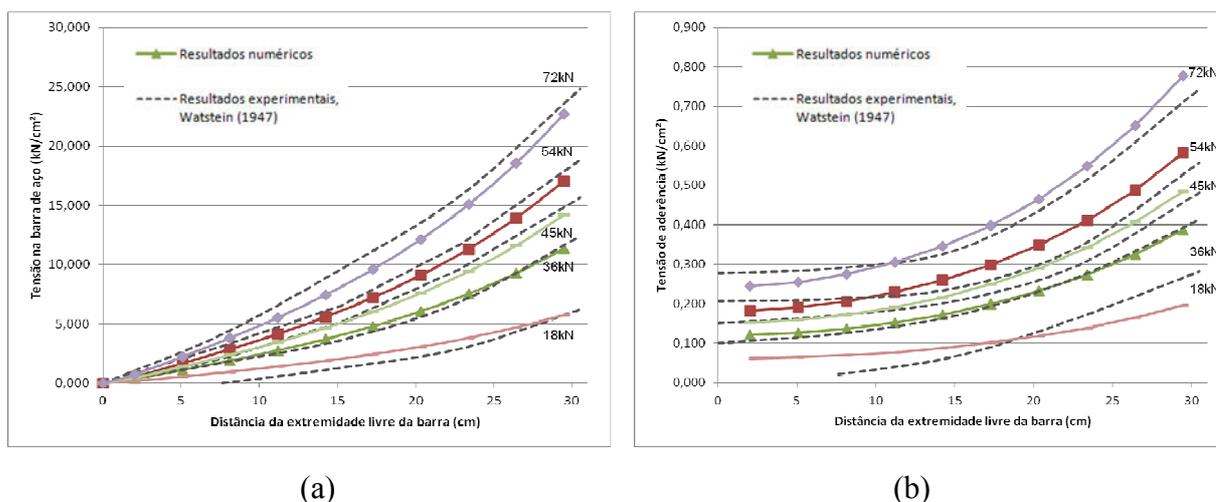


Figura 5.21 – Corpo de prova de 30,4cm. (a) Distribuição das tensões na barra de aço e (b) tensões de aderência.

Os resultados numéricos apresentaram, de forma geral, uma boa correspondência com o estudo experimental mas é importante salientar que a adoção de uma lei de interação linear, com um coeficiente de interação constante, é fisicamente questionável. Assim, utilizando agora uma lei de comportamento elástica perfeitamente plástica para a lei de interação, com um limite  $\tau_{\max} = 0,31 \text{ kN/cm}^2$ , escolhido de tal forma a satisfazer a recomendação do CEB-FIP Model Code 1990 (1993) ( $0,05\sqrt{f_{ck}} < \tau_{\max} < \sqrt{f_{ck}}$ , dependendo das condições de aderência e do tipo de armadura empregada). Desta forma são obtidos os resultados apresentados na Figura 5.22, para o corpo de prova de 30,4cm.

Convém salientar que o esforço de interação e a tensão de cisalhamento são grandezas distintas e podem ser relacionadas, no caso unidirecional, pela equação apresentada por Sudret (1999), a seguir.

$$I = \frac{1}{S_t L} \int_{S^I} \tau^I dS^I \quad (5.13)$$

onde é  $S_t$  e  $L$  são, respectivamente, a área da seção transversal e o comprimento do volume elementar representativo,  $\tau^I$  é a tensão de cisalhamento na interface matriz-inclusão e  $S^I$  é área de interface. O caso geral havia sido apresentado em (3.37).

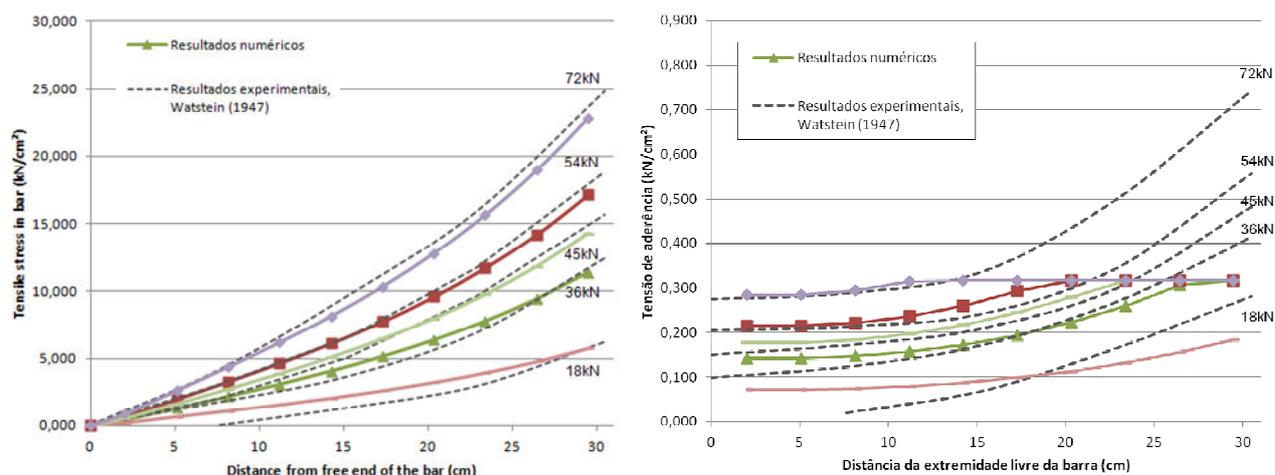


Figura 5.22 – Corpo de prova de 30,4cm com elastoelasticidade perfeita da lei de interação. (a) Distribuição da tensão na barra de aço (b) esforços de aderência.

Claramente os resultados para as tensões de aderência ficam longe dos resultados medidos experimentalmente mas o patamar encontrado para uma tensão igual ao  $\tau_{\text{máx}}$  adotado é idêntico ao comportamento apresentado por Bennis (2002), sendo possível observar que a plastificação da interação, ao longo do corpo de prova tracionado, ocorre de forma gradual, iniciando sempre na extremidade carregada.

Salienta-se novamente que a determinação do comportamento de interação é um aspecto de grande importância. Apesar das curvas da Figura 5.20 e da Figura 5.21 apresentarem um bom ajuste em relação aos resultados numéricos ressalta-se a necessidade da implementação de uma lei de comportamento adequada para a interação com a utilização de parâmetros que resultem de uma curva *tensão de aderência x deslizamento* como, por exemplo, a proposta pelo CEB-FIP Model Code 1990 (1993), apresentada na Figura 5.23.

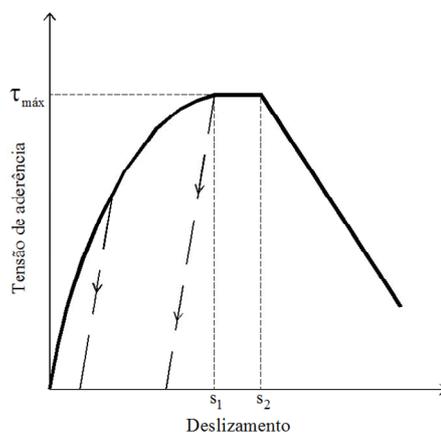


Figura 5.23 – Diagrama tensão de aderência x deslizamento

## 6 CONCLUSÕES E FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

A presente tese de doutorado teve por objetivo principal a modelagem computacional de estruturas de concreto armado a partir de uma abordagem pouco usual para este material, a chamada modelagem multifásica, que se constitui em uma generalização do método de homogeneização. As aplicações realizadas com esta metodologia no ramo da engenharia geotécnica mostraram excelentes resultados em um grande número de estruturas, como por exemplo, a terra armada, redes de estacas e túneis reforçados. Sob o ponto de vista do custo computacional a modelagem apresentada pode apresentar algumas vantagens, especialmente quando comparada a modelos em que são utilizados elementos de aderência entre concreto e aço. De qualquer forma, estas eventuais diferenças nos tempos de processamento não foram quantificadas neste trabalho.

Com auxílio do método dos trabalhos virtuais foram obtidas as equações de movimento do sistema mecânico, dividido por fases e levando em conta as forças de interação entre estas fases. As leis de comportamento, tanto no regime elástico, quanto no regime elastoplástico, também foram apresentadas de forma desacoplada. Devido ao fato de cada meio contínuo possuir cinemática própria, o escorregamento entre o concreto e as barras de aço é computado de forma automática. O desenvolvimento teórico foi implementado em um código em elementos finitos baseado no programa elaborado por Hinton e Owen (1980), tendo este sido estendido para trabalhar com elementos tridimensionais isoparamétricos hexaédricos lineares e quadráticos para a modelagem do concreto.

É importante salientar que, conforme apresentado no desenvolvimento do trabalho, duas modelagens foram desenvolvidas e implementadas: o modelo que considera uma aderência perfeita entre o aço e o concreto, que se constitui na abordagem mais simples para uma modelagem multifásica uma vez que evita a identificação dos parâmetros constitutivos que governam a lei de interação; e o modelo que permite o deslizamento entre estes dois componentes.

As simulações apresentadas no Capítulo 4 tiveram o objetivo de validar o procedimento numérico, ou seja, de observar se os resultados produzidos a partir do código implementado eram corretos e viáveis. Por este motivo, os comparativos foram realizados com soluções analíticas de problemas conhecidos e os resultados foram absolutamente concordantes, mesmo utilizando malhas de elementos muito simplificadas, procedimento utilizado no decorrer de todo este trabalho.

Já as análises numéricas contidas no Capítulo 5 buscaram representar o concreto a partir de formulações que reproduzissem seu comportamento típico. Para tanto foi implementado um modelo para o concreto comprimido, utilizando uma regra de endurecimento proposta pelo Comité Euro-International du Béton (CEB), e um modelo para o concreto tracionado, aplicando o modelo de fissuras distribuídas proposto por Hinton (1988). O critério de ruptura utilizado foi o critério de quatro parâmetros de Ottosen (1977) já que, de uma forma geral, apresenta uma boa correlação com ensaios envolvendo estruturas de concreto. A concordância obtida nas comparações realizadas com os ensaios experimentais foi satisfatória. Quando da investigação da dimensão da zona multifásica, ou seja, da espessura da camada com propriedades equivalentes, observou-se uma rápida convergência dos resultados à medida que a extensão da zona reforçada diminuía, mostrando, contudo, resultados razoavelmente precisos em todos os casos considerados. Estudos complementares são necessários a fim de determinar em que situações esta tendência é verificada.

Uma das principais contribuições do presente trabalho consiste na forma como a interação entre o concreto e a matriz é levada em conta. As técnicas tradicionais para análise das forças de aderência exigem a implementação de elementos que variam de uni a multidimensionais conduzindo, inevitavelmente, a gerações de malha extremamente refinadas e a problemas numéricos demasiadamente grandes. Quanto mais sofisticado o modelo maior o custo computacional associado.

Porém, a determinação dos parâmetros que comandam a lei de interação entre aço e concreto é uma questão chave e é tema para longa discussão. Não é uma tarefa fácil e requer uma sofisticada abordagem micromecânica ou detalhados procedimentos de ajuste a dados experimentais. Sudret (1999) sugere que o parâmetro possa ser estimado como função do módulo de cisalhamento do concreto, da dimensão do volume elementar representativo e da fração volumétrica. No entanto, é de conhecimento geral que existem muitas outras variáveis envolvidas como, por exemplo, o formato e o diâmetro das barras de aço e de suas nervuras, a resistência à compressão do concreto, o tipo de concreto (auto-adensável ou normal) entre

outras propriedades (Almeida Filho, 2008). Desta forma, é muito clara a necessidade de estudos específicos que objetivem a determinação destes dados.

## REFERÊNCIAS

ABDI, R. **Charges limites d'ouvrages en sol renforcé: approches statique et cinématique.** Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.

ALMEIDA FILHO, F. M., BARRAGÁN, B. E., CASAS, J. R., EL DEBS, A. L. H. C. Variability og the bond and mechanical properties of self-compacting concrete. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, 1, pp. 31-57, 2008.

BEBER, A. J. **Comportamento estrutural de vigas de concreto armado reforçadas à flexão com compósitos de fibra de carbono.** Tese de doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2003.

BEDFORD, A.; DRUMHELLER, D. Recent advances in theories of immiscible and structured mixtures. **Int. J. Eng. Sci**, 21, pp. 863-960, 1983.

BEDFORD, A.; STERN, M. Toward a diffusing continuum theory of composites materials. **ASME, J. Appl. Mech**, 38, pp. 8-14, 1971.

BEDFORD, A.; STERN, M. A multi-continuum theory for composite elastic materials. **Acta Mechanica**, 14, pp. 85-102, 1972.

BERNAUD, D.; de BUHAN, P.; MAGHOUS, S. Numerical simulation of the convergence of a bolt-supported tunnel through a homogenization method. **Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech**, 12, pp. 267-288, 1995.

BERNAUD, D.; MAGHOUS, S.; de BUHAN, P.; COUTO, E. A numerical approach for design of bolt-supported tunnels regarded as homogenized structures. **Tunelling and Underground Space Technology**, 24, pp. 533-546, 2009.

BENNIS, M. **Un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions, avec prise en compte de l'interaction matrice/inclusions.** Thèse de doctorat, l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2002.

BIOT, M. **General theory of three-dimensional consolidation.** J. Appl. Phys, 12, pp. 155-164, 1941.

BIOT, M. **Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid.** J. Appl. Phys, 26, pp. 182-185, 1955.

BONO, G. F. F. **Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos.** Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2008.

BRESLER, B., SCORDELIS, A. C. Shear strength reinforced concrete beams. **ACI Journal**, v. 60, n.1, p. 51-72, 1963.

de BUHAN, P. **Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés.** Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1986.

de BUHAN, P.; SALENÇON, J. Analyse de la stabilité des ouvrages renforcés par une méthode d'homogénéisation. **Revue Française de Géotechnique**, 41, pp. 29-43, 1987.

de BUHAN, P.; TALERCIO, A. A homogenization approach to the yield strength of composite materials. **Eur. J. Mech. A/ Solids**, 10(2), pp. 129-154, 1991.

CALLISTER, W. D. **Materials science and engineering: an introduction.** 4 ed. New York: John Wiley and Sons, 1997.

CARON, J. F. **Modélisation de la cinétique de fissuration transverse en fatigue dans les stratiés.** Thèse de doctorat, l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1993.

CHABOT, A. **Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches.** Thèse de doctorat, l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1997.

CHEN, S. H. ; EGGER, P. Three dimensional elasto-viscoplastic finite element analysis of reinforced rock masses and its application. **Int. J. Num. An. Meth. Geo**, 23, pp 61-78, 1999.

CLANCY, P.; RANDOLPH, M. F. Simple design tools for piled raft foundations. **Geotechnique**, 46, pp. 313-328, 1996.

CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finites.** Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, Agosto, 1994.

CHRISTENSEN, R. M.; LO, K. H. Solutions for effective shear properties in three-phase sphere and cylinder models. **J. Mech. Phys. Sol.** 27, pp. 315-330., 1979.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Bulletin d'information No. 156** - Concrete under multiaxial states of stress. Constitutive equations for practical application, Lausanne, Switzerland, 1983.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990 : Design Code**. London : Thomas Telford Services, 1993, 437p.

COUSSY, O. **Mécanique des milieux poreux**, Editions Technip, 1991.

DUDDECK, H., Griebenou, G., Schaper, G. Material and time dependent non-linear behavior of cracked reinforced concrete slabs-Finite element analysis and laboratory tests, in: G. Mehlhorn, H. Ruhle, W. Zerna (Eds.), **Non-Linear Behavior of Reinforced Concrete Spatial Structures** — Prelim Report 1, Werner, Düsseldorf, pp. 101–113, 1978.

ELWI, A. E., HRUDEY, M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics**, New York, ASCE, v. 115, n.4, pp. 740-754, 1989.

EL OMRI, A. **Homogénéisation élasto-plastique stratifiée et plasticité anisotrope**. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.

EL OMRI, A.; SIDORFF, F. Homogenization of a two-phase elastic-plastic layered composite, **C. R. Acad. Sci. Paris**, 312, PP. 425-430 (1991).

GERMAIN, P. **Mécanique, I et II**. Ellipses, Paris, 1986.

GERRARD, C. Reinforced soil: na orthorombic matherial. **J. Geo Eng. Div, ASCE**, 108 (GT11), pp. 1460-1474, 1982.

GERRARD, C. M.; PANDE, G. N. Numerical model of reinforced jointed rock-masses. I. Theory, **Computers in Geotechnics**, 1, pp. 293-318, 1985.

GERRARD, C. M.; PANDE, G. N.; SCHWEIGER, H. F. Modelling the behaviour of soft clays reinforced with stone columns. **Proc. Coll. Int. sur le renforcement en place des sols et des roches**, pp. 145-150, 1984.

GREUELL, E. **Etude du soutènement des tunnels par boulons passifs dans les sols et les roches tendres, par un méthode d'homogénéisations**. These de doctorat, Ecole Polytechnique, 1993.

HASSEN, G. **Modélisation multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions rigides**. Thèse de doctorat, l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2006.

HARRISON, W. J.; GERRARD, C. M. Elastic theory applied to reinforced earth, **J. of soil Mech. And Found. Div, ASCE**, 98 (SM12), pp. 1325-1345, 1972.

HASHIN, Z. Analysis of composite materials – a survey. **J. Appl. Mech.**, 50, pp. 481-505, 1983.

HASHIN, Z.; ROSEN, B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. **J. Appl. Mech, ASME**, 31, pp. 223-232, 1964.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, **J. Mech. Phys. Solids**, 11, pp. 127-140, 1963.

HERMANS, J. J. The elastic properties of fiber reinforced materials when the fiber are aligned. **Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen**, 70, pp. 1-9 (1967).

HERRMAN, L. R.; AL-YASSIN, Z. Numerical analysis of reinforced soil systems, **Proceedings ASCE Symp. On Earth reinforcement**, pp. 428-457, 1978.

HILL, R. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials – I. Elastic behaviour, **J. Mech. Phys. Solids**, 12, pp. 199-212, 1964.

HILL, R. Theory of mechanical properties of fibert-strengthened materials – III. Self-consistent model. **J. Mech. Phys. Solids**, 13, pp. 189-198, 1965.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press, 1988.

HINTON, E; OWEN, D. R. J. **Finite elements in plasticity**. Pineridge Press Limited, United Kingdom, 1980.

HINTON, E., RAHMAN, H.H.A., ZIENKIEWICZ, O.C. Computational strategies for reinforced concrete slab system, in: **Advanced Mechanics of Reinforced Concrete Structures**—Final Report, International Association for Bridge and Structural Engineering, Delft, pp. 303–313, 1981.

JOMMI, C.; NOVA, R.; GOMIS, F. Numerical analysis of reinforced earth walls via a homogenization method, **Numerical models in Geomechanics**. Rotterdam, pp. 231-236, 1995.

JOFRIET, J. C., McNEICE, G. M. Finite-element analysis of reinforced concrete slabs, **J. Struct. Div. ASCE 97 (ST3)**, pp. 785-806, 1971.

JOST, D. T. **Análise de peças fletidas com protensão não aderente pelo método dos elementos finitos**. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, Junho, 2006.

KUPFER, H. B.; HILSDORF, H. K.; RUSCH, H. Behaviour of concrete under biaxial stress. **American Concrete Institute Journal**, v. 66 n. 8, PP. 656-666, 1969.

KWON, M. **Three dimensional finite element analysis for reinforced concrete members**, Thesis – Graduate School, University of Colorado, USA, 2000.

LE NIZERHY, D. **Comportement plastique des matériaux composites multicouches (Calculs de prevision par l'analyse limite)**. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1976.

LEE, J. S.; PANDE, G. N. Analysis of stone-columns reinforced foundations, **Int. J. Num. An. Meth. Geo**, 22, pp-1001-1020, 1998.

MANZOLI, O. L.; OLIVER, J.; LINERO, D. L.; HUESPE, A. E. Three-dimensional analysis of reinforced concrete members via embedded discontinuity finite elements. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**. v.1 n.1, p. 58-83, 2008.

MAJUMDAR, S.; McLAUGHLIN, P. V. Effects of phase geometry and volume fraction on the plane stress limite analysis of a unidirectional fiber-reinforced composite. **Int. J. Solid Structures**, 11, pp. 777-791, 1975.

MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2003.

McLAUGHLIN, P. V.; BATTERMAN, S. C. Limit behaviour of fibrous materials. **Int. J. Solid Structures**, 6, pp. 1357-1376, 1970.

NGO, D. ; SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. **Journal of American Concrete Institute**, v. 65, n.3, p. 152-163, 1967.

NGUYEN, Q. S. On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. **Int. J. Num. Math. Eng.**, 11, pp. 817-832, 1977.

OLIVER, J.; LINERO, D. L.; HUESPE, A. E.; MANZOLI, O. L. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** 197, p. 332-348, 2008.

OTTOSEN, N. S. **A failure criterion for concrete**. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n.4, p. 527-535, 1977.

PAGANO, N. J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. **Journal of Composite Materials**. v. 3, pp. 398-411, 1969.

PAGANO, N. J. Exact solutions for rectangular bidirection composites and sandwich plates. **Journal of Composite Materials**. v. 4, pp. 20-34, 1970.

PETERSON, P. E. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Report No TVBM-1106. Division of Building Materials, University of Lund, Lund, Sweden, 1981.

POULOUS, H. G.; DAVIS, E. H. **Pile foundation analysis and design**. Wiley and Sons, 1980.

PRUCHNICKI, E. **Contribution à l'homogénéisation en phase linéaire et non linéaire – Application au renforcement des sols**. Thèse de doctorat, U.S.T., Lille, 1991.

PRUCHNICKI, E.; SHAHROUR, I. A macroscopic elastoplastic constitutive law for multilayered media: application to reinforced earth material. **Int. J. Num. An. Meth. Geo.**, 18, pp. 507-518, 1994.

RANDOLPH, M. F. Design methods for pile groups and piled rafts. **Proc. XIII<sup>th</sup> Int. Conf. on Soil Mech. and Foun. Eng.** New Delhi, vol. 5, pp. 61-81, 1994.

ROMSTAD, K. M.; HERRMANN, L. R.; SHEN, C. K. Integraed study of reinforced earth – Theoretical formulation, **J. Geo. Eng. Div, ASCE**, 102 (GT5), pp. 457-471, 1976.

SALENÇON, J. **Introduction à l'élasto-plasticité et au calcul à la rupture**, Cours de l'Ecole Polytechnique, 1994.

SALENÇON, J. **Mécanique des milieux continus, tome I. Concepts généraux**. Ellipses, AUPELF/UREF, Paris, 1996a.

SAWICKI, A. Yield conditions for layered composites. **Int. J. Solids Structures**, 17(10), pp. 969-979, 1981.

SAWICKI, A. Engineering mechanics of elasto-plastic composites. **Mechanics of Materials**, 109, pp. 217-231, 1983a.

SAWICKI, A. Plastic limit behaviour of reinforced earth. **J. Geo. Eng. Div, ASCE**, 109, pp. 1000-1005, 1983b.

SAWICKI, A. Developments in the mechanics of reinforced soil: Empirical background and analytical approaches. **Appl. Mech. Rev, ASME**, 51, pp. 651-668, 1998.

SHARMA, K. G. ; PANDE, G. N. Stability of rock masses reinforced by passive, fully grouted rock bolts, **Int. J. Rock Mech. Min. Sci.**, 25 (5), pp. 273-285, 1988.

SIAD, L. **Analyse de stabilité des ouvrages em terre armée par une méthode d'homegénisation**. Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1987.

SUDRET, B. **Modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions**. Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1999.

TANDON, G. P.; WENG, G. J. The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites. **Polym. Compos.**, 5, pp. 327-333, 1984.

TRUESDELL, C. ; TOUPIN, R. **The classical field theories, Fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites**, Wiley Interscience, New York, 1960.

OTTOSEN, N. S. A failure criterion for concrete. **Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE**, v. 103, pp. 527-627, 1977.

VERZURA, L. **Analyse de la stabilité d'ouvrages en sol renforcé par fils continus**. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993.

WULLSCHLÄGER D. ; NATAU, O. The bolted rock mass as an anisotropic continuum – Material behaviour and design suggestions for rock cavities. **Proc. Int. Symp. On Rock Bolting**, 1983.

ZAOUI, A. **Matériaux hétérogènes et composites**. Cours de l'Ecole Polytechnique, 1998.

ZHANG, Y. X., BRADFORD, M. A., GILBERT, R. I. A layered shear-flexural plate/shell element using Timoshenko functions for nonlinear analysis of reinforced concrete plates. **Finite Elements in Analysis and Design**, 43, pp. 888–900, 2007.

ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. **The finite element method. Volume 1 : The basis**. 5 ed., Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C. ; VALLIAPAN, S. ; KING, I. P. Elasto-plastic solutions of engineering problems <initial stress>, finite element approach. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, 1, pp. 75-100, 1969.