

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE PERFIS FORMADOS A FRIO UTILIZANDO MODOS  
PUROS DE DEFORMAÇÃO

por

Gustavo Prates Mezzomo

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2012

ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE PERFIS FORMADOS A FRIO UTILIZANDO MODOS  
PUROS DE DEFORMAÇÃO

por

Gustavo Prates Mezzomo  
Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Ignacio Iturrioz

Aprovada por:

Prof. Dr. Gladimir de Campos Grigoletti (ULBRA)

Prof. Dr. Inácio Benvegnu Morsch (PPGEC/UFRGS)

Prof. Dr. Rogério José Marczak (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Ruy Carlos Ramos de Menezes (PPGEC/UFRGS)

Prof. Dr. Francis H. R. França  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 30 de Maio de 2012.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Prof. Dr. Ignacio Iturrioz, aos meus pais Angela e Elio, aos meus familiares, aos meus colegas e amigos e ao CNPq.

## RESUMO

A esbeltez dos perfis de aço formados a frio pode resultar na interação entre diferentes modos de flambagem, tornando a análise desses componentes uma tarefa complexa. Para o projeto de perfis formados a frio, é fundamental a compreensão da natureza do modo de flambagem ao qual estão submetidos. O cálculo de modos de flambagem puros e a quantificação da interação de modos contribuem para o estudo do comportamento desses perfis. Nesse trabalho, o cálculo da carga crítica elástica de modos de flambagem puros ou combinados é realizado através do uso de modelos de elementos finitos restringidos. Para o cálculo focado em uma classe de flambagem específica (de modos globais, distorcionais, locais ou outros), diferentes procedimentos de restrição são propostos. Utilizando um procedimento de restrição geral, o campo de deformações do modelo é restringido de acordo com uma combinação de modos de deformação da seção, definidos com base nos conceitos da teoria generalizada de vigas e do método das faixas finitas restringido. Na direção longitudinal do perfil, podem ser combinados diversos componentes harmônicos que respeitem as condições de contorno das extremidades. Também são mostrados casos em que todos os componentes harmônicos longitudinais possíveis podem ser automaticamente considerados. O cálculo de modos de flambagem combinados possibilita, automaticamente, a quantificação da interação dos modos considerados. Para validação dos procedimentos propostos, são apresentados resultados numéricos da análise de um perfil C com enrijecedores de borda, com duas diferentes condições de contorno das extremidades, e submetidos a dois tipos de carregamento. Os resultados são comparados com os fornecidos pela teoria generalizada de vigas e pelo método das faixas finitas restringido. Os procedimentos de restrição são aplicados na análise de um perfil inspirado em uma estrutura real com apoios intermediários (ao longo do comprimento), explorando a vantagem da implementação utilizando elementos finitos. O potencial dos procedimentos aqui propostos é discutido. Finalmente, foram sugeridos novos objetivos para a continuação desse trabalho.

Palavras-chave: Perfis formados a frio, método dos elementos finitos, modos de flambagem puros, restrições.

## **ABSTRACT**

The slenderness of cold-formed steel member can result in the interaction of different buckling modes, making the analysis of these members a complex task. In the design of thin-walled members, the understanding of the nature of the buckling mode is fundamental. The calculation of pure buckling modes and the evaluation of the interaction amongst the buckling modes help in the study of the behavior of thin-walled members. In this research, the elastic critical buckling load calculation of pure and combined buckling modes is carried out using constrained finite element models. Different constraining procedures are proposed for the calculation focused on each buckling class (of global, distortional, local or other modes). Using a general constraining procedure, the deformation fields of the model are constrained in accordance with a combination of section deformation modes, which are defined based on the concepts of the generalized beam theory and the constrained finite strip method. In the longitudinal direction on the member, several harmonic components may be combined, which must meet the boundary conditions of the member ends. Cases where all possible longitudinal harmonic components can be automatically considered are also presented. In order to validate the proposed procedures, numerical results are presented on the analysis of a lipped channel, with two different configurations of boundary conditions at member ends and submitted to two different types of loading. The results are compared to the ones provided by the generalized beam theory and the constrained finite strip method. The constraining procedures are applied to the analysis of a member inspired by a real structure with intermediate supports (between the member ends), exploring the advantages of the implementation using the finite element method. The potentiality of the procedures proposed herein is discussed. Finally, new aims are proposed in order to continue this research.

**Keywords:** Thin-walled members, finite element method, pure buckling modes, constraints.

## ÍNDICE

1. Introdução .....	1
1.1 Objetivos.....	5
1.2 Justificativa .....	6
1.3 Estrutura do trabalho.....	6
2. Fundamentos Teóricos .....	8
2.1 Modos puros de flambagem de perfis formados a frio .....	8
2.2 Fundamentos do Método das Faixas Finitas (MFF).....	14
2.3 Restrição do modelo numérico no contexto do Método das Faixas Finitas .....	20
2.3.1 Problema de autovalores restringido .....	21
2.3.2 Identificação modal .....	24
2.3.3 Normalização das bases vetoriais.....	27
2.3.4 Exemplo de bases naturais e axiais ortogonais .....	28
2.4 Método das Faixas Finitas Restringido (MFFr) para condições de contorno gerais ....	31
2.5 Fundamentos da Teoria Generalizada de Vigas (GBT).....	35
3. Revisão Bibliográfica .....	48
3.1 Pesquisa sobre a Teoria Generalizada de Vigas (GBT).....	48
3.2 Pesquisa sobre o Método das Faixas Finitas Restringido (MFFr).....	51
3.3 Pesquisa sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF) aplicado a análises de flambagem focadas em modos puros e combinados.....	55
4. Metodologia.....	59
4.1 Descrição dos modelos estudados .....	59
4.2 Procedimento de restrição geral de uma malha de elementos finitos .....	65
4.2.1 Implementação das restrições.....	69
4.2.2 Procedimento de restrição independente das funções de forma longitudinais....	78
4.3 Restrição do modelo de elementos finitos ao espaço GD.....	82
4.4 Restrição do modelo de elementos finitos aos espaços G e GO .....	86
4.5 Restrição do modelo de elementos finitos ao espaço L.....	89
5. Validação dos métodos propostos: análise de um perfil C com enrijecedores de bordas ...	92
5.1 Análises iniciais .....	94
5.1.1 Diferença entre GBT e MFFr no cálculo da carga crítica de modos G e D .....	97

5.2	Curvas GD .....	99
5.3	Curvas G e GO.....	100
5.4	Curvas D .....	101
5.5	Curvas L.....	104
5.6	Curvas DL.....	104
5.7	Análise da deformada .....	110
6.	Aplicação dos métodos propostos: análise de uma estrutura real.....	114
6.1	Análise da coluna sem travamentos.....	117
6.2	Análise da coluna com travamentos .....	119
6.2.1	Análise do modo G.....	121
6.2.2	Análise do Modo D .....	125
7.	Conclusões .....	131
ANEXO A - Definição das matrizes de restrição do Método das Faixas Finitas Restringido		142
A.1	Notação .....	142
A.2	Dedução da matriz $\mathbf{R}_{GD}$ .....	143
A.3	Dedução das matrizes $\mathbf{R}_G$ e $\mathbf{R}_D$ .....	150
A.4	Dedução da matriz $\mathbf{R}_L$ .....	154
A.5	Dedução da matriz $\mathbf{R}_0$ .....	156
ANEXO B - Bases naturais e axiais ortogonais: exemplo numérico .....		158

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Seções transversais típicas de perfis formados a frio. (a) Perfil C. (b) Perfil C com enrijecedores de borda. (c) Perfil C com enrijecedor na alma. (d) Perfil cartola. (e) Perfil Z. (f) Perfil C com flanges adicionais. (g) Variação do perfil cartola. (h) Telha trapezoidal. ...	1
Figura 2.1. Ilustração qualitativa da flambagem de um perfil formado a frio.....	9
Figura 2.2. Três tipos de modos de flambagem de um perfil C com enrijecedores de borda. (a) Modo local. (b) Modo distorcional. (c) Modo global (flexão em torno do eixo de menor inércia). .....	11
Figura 2.3. Exemplo de gráfico de tensão crítica em função do comprimento de meia-onda (dimensões em mm).....	11
Figura 2.4. Sistemas de coordenadas global e local considerados e graus de liberdade (GDLs) associados. ....	13
Figura 2.5. MFF utilizado no software CUFSM, considerando uma meia-onda senoidal ao longo do comprimento. (a) Discretização de um perfil C com enrijecedores de borda. (b) Deslocamentos no plano da faixa (membranais). (c) Deslocamentos fora do plano da faixa (flexão de placa) e distribuição de trações longitudinais numa faixa. ....	15
Figura 2.6. Exemplo de gráfico fornecido pelo CUFSM (dimensões em mm).....	19
Figura 2.7. (a) Dimensões (em mm) e propriedades mecânicas do perfil utilizado no exemplo numérico. (b) Discretização adotada. ....	28
Figura 2.8. Bases vetoriais naturais do CUFSM para os subespaços G, D, L e O, para o perfil da Figura 2.7 (distribuições de deslocamentos com magnitude arbitrária). ....	29
Figura 2.9. Bases axiais ortogonais do CUFSM para os subespaços G, D e L, para o perfil da Figura 2.7 (distribuições de deslocamentos com magnitude arbitrária, sujeitas a pequenas alterações de acordo com o comprimento). ....	30
Figura 2.10. (a) Sistema de coordenadas local da GBT e GDLs (discretização considerando apenas nós principais). (b) Discretização utilizando subnós. ....	36
Figura 2.11. Funções elementares para o perfil da Figura 2.10(b). (a) Funções elementares de empenamento. (b) Funções elementares de flexão transversal. ....	38
Figura 2.12. Discretização modal do perfil da Figura 2.10(b). (a) Modos de deformação de corpo rígido e distorcionais. (b) Modos de deformação locais. ....	44

Figura 4.1. Seções dos perfis estudados (dimensões em mm). (a) Perfil C com enrijecedores de borda utilizado para validação dos procedimentos propostos. (b) Perfil inspirado na estrutura real utilizada como aplicação dos procedimentos (coluna de um silo de armazenagem).....	59
Figura 4.2. Carregamentos utilizados. (a) Perfil C submetido à compressão axial. (b) Perfil C submetido à flexão em torno do eixo de maior inércia. (c) Perfil da coluna do silo submetido à compressão axial. ....	60
Figura 4.3. Exemplos das malhas de elementos finitos. (a) Perfil C. (b) Perfil da coluna do silo.....	61
Figura 4.4. Discretizações das seções dos modelos de elementos finitos. (a) Discretização da seção do perfil C. (b) Discretização da seção do perfil da coluna do silo. (c) Discretização utilizada para um dos esquemas de restrição dos nós de uma seção do perfil C. ....	62
Figura 4.5. Condições de contorno das extremidades para o perfil C. (a) Condições de contorno na análise linear elástica. (b) Efeito Poisson na análise linear elástica para compressão axial. (c) Condições de contorno para um perfil S-S em uma análise linear de flambagem focada em modos G, D, L ou combinações destes. (d) Condições de contorno adicionais para um perfil E-E em uma análise linear de flambagem.....	63
Figura 4.6. Condições de contorno das extremidades para o perfil da coluna do silo. (a) Sistemas de coordenadas locais de cada elemento de placa do perfil. (b) Aplicação de restrições de translação e de deslocamentos acoplados. (c) Deformação desejada na análise linear elástica para carregamento de compressão axial. (d) Relação entre os deslocamentos de elementos de placa contíguos.....	64
Figura 4.7. Seleção de seções e nós para a restrição da malha de elementos finitos do perfil C. (a) Seção $s$ a ser restringida. (b) Restrição de apenas algumas seções da malha. (c) Restrição de apenas alguns nós da seção (somente os nós da discretização da seção 1-1-0). ....	68
Figura 4.8. Exemplo de implementação das restrições em um modelo de elementos finitos. (a) Condições de contorno na análise linear elástica. (b) Condições de contorno na análise linear de flambagem e incógnitas selecionadas. (c) Restrições na seção que contém as incógnitas. (d) Restrições nas demais seções selecionadas. ....	77
Figura 4.9. Exemplo de implementação das restrições independentes das funções de forma longitudinais. (a) Condições de contorno na análise linear elástica. (b) Condições de	

contorno na análise linear de flambagem e incógnitas selecionadas. (c) Restrições em uma das seções selecionadas. ....	82
Figura 4.10. Restrição do modelo de elementos finitos aos espaços G e GO para o perfil C analisado. (a) Sistemas de coordenadas globais e locais em uma seção. (b) Distribuição linear de empenamento definida pelas incógnitas $V$ dos nós principais. (c) Definição de movimento de corpo rígido em uma seção. (d) Exemplo de modo global puro. (e) Definição de uma seção sem distorção, permitindo extensão transversal dos elementos de placa e empenamento não-linear. (f) Exemplo de um modo G considerando a contribuição dos modos O. ....	86
Figura 4.11. Restrição do modelo de elementos finitos ao espaço GO para o perfil da coluna do silo. (a) Sistemas de coordenadas locais de cada elemento de placa do perfil. (b) Definição de movimentos de corpo rígido locais, permitindo extensão transversal dos elementos de placa e empenamento não-linear. (c) Relação entre os deslocamentos de elementos de placa contíguos para que a seção não apresente distorção.....	88
Figura 4.12. Restrição do modelo de elementos finitos ao espaço L para o perfil C analisado. (a) Sistemas de coordenadas globais e locais em uma seção. (b) Condições de contorno das extremidades na análise linear elástica. (c) Condições de contorno das extremidades na análise de flambagem (perfil S-S). (d) Restrições em uma seção genérica do modelo na análise de flambagem.....	90
Figura 5.1. Distribuições transversais dos diferentes modos de flambagem analisados para o perfil C. D1, D2 e F coincidem com os modos naturais do MFFr.....	93
Figura 5.2. Comparação entre as diferentes curvas de flambagem do perfil C S-S. (a) Compressão axial. (b) Flexão em torno do eixo de maior inércia. ....	95
Figura 5.3. Comparação entre as diferentes curvas de flambagem do perfil C E-E. (a) Compressão axial. (b) Flexão em torno do eixo de maior inércia. ....	95
Figura 5.4. Curvas GD do perfil C para flexão em torno do eixo de maior inércia. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E (considerando somente o componente harmônico dominante).....	100
Figura 5.5. Curvas G e GO do perfil C para compressão axial. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E. ....	101
Figura 5.6. Curvas D do perfil C para flexão em torno do eixo de maior inércia. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E.....	102
Figura 5.7. Curvas L do perfil C para compressão axial. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E. ....	104

Figura 5.8. Curvas DL do perfil C para compressão axial. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E. ....	105
Figura 5.9. Modos de flambagem do perfil C E-E de 800 mm sob compressão axial. (a) Espaço D. (b) Espaço DL. ....	111
Figura 5.10. Análise da deformada do modo D1 do perfil C. (a) Deslocamento no centro da alma. (b) Deslocamento no centro da alma para a análise de flambagem focada no espaço D.....	113
Figura 5.11. Análise da deformada do modo DL do perfil C. (a) Contribuição do modo D1. (b) Contribuição do modo L1. ....	113
Figura 6.1. Estrutura real analisada. (a) Silo de armazenagem e colunas de sustentação. (b) Detalhe dos apoios intermediários das colunas. ....	114
Figura 6.2. Condições de contorno do perfil da coluna do silo. (a) Ponto de travamento ao longo do comprimento. (b) Ponto de travamento na seção.....	115
Figura 6.3. Modos de deformação naturais utilizados na análise da coluna do silo (bases modais).....	116
Figura 6.4. Modos de deformação axiais ortogonais utilizados na análise da coluna do silo (bases modais).....	116
Figura 6.5. Modos de flambagem característicos obtidos na análise de flambagem não restringida do perfil da coluna do silo sem travamentos. ....	117
Figura 6.6. Primeiro modo predominantemente L obtido na análise de flambagem não restringida do perfil da coluna do silo com travamentos. (a) Deformada ao longo do comprimento. (b) Detalhe da deformada do flange superior (não é a mesma escala de (a)). (c) Deformada da seção no meio de uma meia-onda próxima ao meio do vão.....	119
Figura 6.7. Primeiro modo predominantemente G obtido na análise de flambagem não restringida do perfil da coluna do silo com travamentos. (a) Deformada ao longo do comprimento. (b) Detalhe da deformada do flange superior (não é a mesma escala de (a)). (c) Deformada da seção no meio do vão.....	120
Figura 6.8. Primeiro modo predominantemente D obtido na análise de flambagem não restringida do perfil da coluna do silo com travamentos. (a) Deformada ao longo do comprimento. (b) Detalhe da deformada do flange superior (não é a mesma escala de (a)). (c) Deformada da seção no meio do vão.....	120

Figura 6.9. Funções de forma longitudinais associadas a cada modo de deformação na análise do modo G do perfil da coluna do silo com travamentos, considerando todos os componentes harmônicos.....	124
Figura 6.10. Funções de forma longitudinais associadas a cada modo de deformação na análise do modo D do perfil da coluna do silo com travamentos, considerando todos os componentes harmônicos.....	128
Figura 6.11. Deformada no flange superior do perfil do silo com travamentos para o modo D obtido utilizando diversas combinações de modos axiais ortogonais. (a) Três modos, cada um com um componente harmônico. (b) Três modos, com todos os componentes considerados. (c) Quatro modos, cada um com um componente harmônico. (d) Quatro modos, com todos os componentes considerados.....	128
Figura 6.12. Exemplo de modo de flambagem espúrio observado na análise do perfil da coluna do silo com travamentos. (a) Análise de flambagem restringida ao modo axial ortogonal D1, considerando todos os componentes harmônicos. (b) Primeiro modo de flambagem (espúrio). (c) Segundo modo de flambagem.....	129

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Critérios obedecidos por cada tipo de modo de flambagem.....	14
Tabela 5.1. Contribuição do modo D1 nos resultados da curva D1L1 do perfil C S-S.....	107
Tabela 5.2. Contribuição do modo D1 nos resultados da curva D1L1 do perfil C E-E. ....	108
Tabela 6.1. Resultados da análise dos modos G, D e L do perfil da coluna do silo sem travamentos. ....	118
Tabela 6.2. Resultados da análise do modo G do perfil da coluna do silo com travamentos.	122
Tabela 6.3. Resultados da análise do modo D do perfil da coluna do silo com travamentos.	125

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

1 Comp – refere-se à análise de flambagem considerando um componente harmônico das funções de forma longitudinais

1 Sub – refere-se ao esquema de restrição do modelo de elementos finitos usado que considera a restrição de apenas alguns nós de uma seção e de apenas algumas seções do modelo

1+1 Comp – refere-se à análise de flambagem considerando dois modos de deformação da seção, cada um com um componente harmônico longitudinal associado

2 Comp – refere-se à análise de flambagem considerando dois componentes harmônicos das funções de forma longitudinais

2+2 Comp – refere-se à análise de flambagem considerando dois modos de deformação da seção, cada um com dois componentes harmônicos longitudinais associados (os mesmos para cada modo)

B – índice que se refere aos graus de liberdade de flexão de placa de uma faixa finita

D – Distorcional (refere-se a um modo de deformação, ao espaço de deformações ou ao tipo de flambagem)

G – Global (refere-se a um modo de deformação, ao espaço de deformações ou ao tipo de flambagem)

GBT – *Generalized Beam Theory* (Teoria Generalizada de Vigas)

k – *known* (refere-se aos graus de liberdade conhecidos do modelo de vigas bidimensional equivalente à seção do perfil)

L – Local (refere-se a um modo de deformação, ao espaço de deformações ou ao tipo de flambagem)

M – índice que se refere aos graus de liberdade membranais de uma faixa finita ou de um elemento de placa; índice que se refere a um espaço de deformações reduzido genérico (por exemplo, pode ser o espaço G, D, L, O ou qualquer combinação desses)

MEF – Método dos Elementos Finitos

MFF – Método das Faixas Finitas

MFFr – Método das Faixas Finitas Restringido

MRD – Método da Resistência Direta

NTE – norma do trabalho externo

NV – norma vetorial

O – Outro (refere-se a um modo de deformação, ao espaço de deformações ou ao tipo de flambagem)

Todos os Comp – refere-se à análise de flambagem considerando todos os componentes harmônicos longitudinais possíveis

Todos os Modos – refere-se à curva de flambagem que considera todo o espaço de deformações do modelo numérico em questão

Total – refere-se ao esquema de restrição do modelo de elementos finitos usado que considera a restrição de todos os graus de liberdade da malha

u – *unknown* (refere-se aos graus de liberdade desconhecidos do modelo de vigas bidimensional equivalente à seção do perfil)

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{0}$  – matriz com zeros

$\mathbf{A}$  – matriz que define a condição de ortogonalidade de empenamento entre modos G e D

$b$  - largura de uma faixa finita

$b^{(i)}$  – largura de uma faixa finita  $i$  ou de um elemento de placa  $i$

$\mathbf{B}$  – matriz com derivadas das funções de forma de uma faixa finita; matriz contendo as propriedades da seção transversal do perfil (rigidez à flexão transversal) relacionadas a todas as funções elementares, na GBT

$\tilde{\mathbf{B}}$  - matriz contendo as propriedades da seção transversal do perfil (rigidez à flexão transversal) relacionadas a todos os modos ortogonais, na GBT

$\mathbf{Bv}$  – matriz que permite expressar  $\mathbf{Vs}$  em função de  $\mathbf{Vm}$

$c_{M,i}$  - coeficiente de contribuição modal do modo axial ortogonal  $i$  pertencente ao espaço M

$\mathbf{c}_{\text{GDLO}}$  - vetor com as contribuições dos modos axiais ortogonais para um modo de deformação no espaço geral do MFF

$\mathbf{c}_M$  - vetor com as contribuições dos modos axiais ortogonais para um modo de deformação no espaço M

$\mathbf{C}$  – matriz contendo as propriedades da seção transversal do perfil (rigidez axial) relacionadas a todas as funções elementares, na GBT

$\tilde{\mathbf{C}}$  - matriz contendo as propriedades da seção transversal do perfil (rigidez axial) relacionadas a todos os modos ortogonais, na GBT

$\mathbf{C}_1$  - matriz que permite expressar  $\mathbf{Wm}$  em função de  $\mathbf{Vm}$

$\mathbf{C}_2$  - matriz que permite expressar  $\mathbf{Ws}$  em função de  $\mathbf{w}$

$d_{bf}$  - dimensão dos flanges inferiores do perfil da coluna do silo

$d_f$  - dimensão dos flanges do perfil C

$d_l$  - dimensão dos enrijecedores de borda do perfil C e do perfil da coluna do silo

$d_{ff}$  - dimensão do flange superior do perfil da coluna do silo

$d_w$  - dimensão da alma do perfil C e das almas do perfil da coluna do silo

$\mathbf{d}$  – vetor com os graus de liberdade de uma faixa finita ou de um modelo de faixas finitas

$\mathbf{d}_{\text{H,GD}}$  - vetor com graus de liberdade modais do espaço GD

$\mathbf{d}_{[m]}$  - vetor com os graus de liberdade do componente harmônico  $m$  no MFF

$\mathbf{d}_{[m]}(Y)$  - vetor com os graus de liberdade do componente harmônico  $m$  no MFF, dependente da função de forma longitudinal

$\mathbf{d}_M$  - vetor com os graus de liberdade (nodais ou modais) do espaço de deformações reduzido  $M$  de um modelo de faixas finitas (caso  $\mathbf{R}_M$  seja uma base modal para o espaço  $M$ ,  $\mathbf{d}_M$  é um vetor de contribuições modais)

$\mathbf{d}_{uv}$  - vetor com os graus de liberdade membranais de uma faixa finita

$\mathbf{d}_t$  - vetor de deslocamentos transversais do modelo de vigas bidimensional equivalente à seção do perfil

$\mathbf{d}_{w0}$  - vetor com os graus de liberdade de flexão de placa de uma faixa finita

$D_i$  - determinante da matriz que transforma  $u^{(i-1)}$  e  $u^{(i)}$  (referentes a dois elementos de placa conectados no nó  $i$ ) para coordenadas globais

$\mathbf{D}$  - matriz contendo as propriedades da seção transversal do perfil (rigidez à torção) relacionadas a todas as funções elementares, na GBT

$\tilde{\mathbf{D}}$  - matriz contendo as propriedades da seção transversal do perfil (rigidez à torção) relacionadas a todos os modos ortogonais, na GBT

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal

$EA^{(i)}$  - rigidez axial de uma viga  $i$  no modelo de vigas bidimensional equivalente à seção do perfil

$EI^{(i)}$  - rigidez à flexão de uma viga  $i$  no modelo de vigas bidimensional equivalente à seção do perfil

$G$  - módulo de elasticidade transversal

$\mathbf{H}_D$  - base vetorial modal para o espaço  $D$  (contém modos de deformação  $D$  expressos em termos dos graus de liberdade do espaço  $GD$ )

$\mathbf{H}_D^0$  - base vetorial modal para o espaço  $D$  transformada (contém modos de deformação axiais ortogonais  $D$  expressos em termos dos graus de liberdade do espaço  $GD$ )

$\mathbf{H}_G$  - base vetorial modal para o espaço  $G$  (contém modos de deformação  $G$  expressos em termos dos graus de liberdade do espaço  $GD$ )

$\mathbf{H}_G^0$  - base vetorial modal para o espaço G transformada (contém modos de deformação axiais ortogonais G expressos em termos dos graus de liberdade do espaço GD)

$\mathbf{H}_{GD}$  - matriz de transformação da base vetorial do espaço GD (contém modos de deformação G e D expressos em termos dos graus de liberdade do espaço GD)

$\mathbf{I}$  – matriz identidade

$k_r$  - constante dependente do número de meias-ondas  $r$ , que vale  $r\pi/L$

$\mathbf{k}_e$  - matriz de rigidez elástica de uma faixa finita

$\mathbf{k}_{e,t}$  - matriz de rigidez local de graus de liberdade transversais de uma viga  $i$ , no modelo de vigas bidimensional equivalente à seção do perfil

$\mathbf{k}_g$  - matriz de rigidez geométrica de uma faixa finita

$\mathbf{K}_e$  - matriz de rigidez elástica global no MFF

$\mathbf{K}_e^{[rs]}$  - matriz de rigidez elástica de um modelo de faixas finitas referente à interação entre os componentes harmônicos  $r$  e  $s$

$\mathbf{K}_{e,M}$  - matriz de rigidez elástica global do problema de autovalores restringido ao espaço de deformações M, no MFFr

$\mathbf{K}_{e,t}$  - matriz de rigidez global de graus de liberdade transversais do modelo de vigas bidimensional equivalente à seção do perfil

$\mathbf{K}_g$  - matriz de rigidez geométrica global no MFF

$\mathbf{K}_g^{[rs]}$  - matriz de rigidez geométrica de um modelo de faixas finitas referente à interação entre os componentes harmônicos  $r$  e  $s$

$\mathbf{K}_{g,M}$  - matriz de rigidez geométrica global do problema de autovalores restringido ao espaço de deformações M, no MFFr

$L$  – comprimento do perfil; comprimento de meia-onda

$m$  – número de meias-ondas do componente harmônico da função de forma longitudinal; número de graus de liberdade do modelo de faixas finitas

$m_M$  – número reduzido de graus de liberdade de um modelo de faixas finitas restringido ao espaço de deformações M

$n$  – número de linhas nodais (ou nós) do modelo de faixas finitas

$nm$  – número de nós principais no modelo de faixas finitas

$ns$  – número de subnós no modelo de faixas finitas

$p$  – valor máximo da carga de compressão distribuída na linha média da seção do perfil

$p_k$  - coeficiente de participação modal na GBT (refere-se a um modo ortogonal puro  $k$ )

$p_M$  - participação modal dos modos pertencentes ao espaço M, no MFFr

$P$  – carga de compressão

$P_{cr}$  - carga crítica de flambagem

$P_{cr,D}$  - carga crítica de flambagem dos modos distorcionais

$P_{cr,G}$  - carga crítica de flambagem dos modos globais

$P_{cr,L}$  - carga crítica de flambagem dos modos locais

$P_{lim}$  - carga limite

$q$  - número máximo de meias-ondas considerado no MFF (inteiro positivo)

$\mathbf{q}_t$  - vetor de forças nodais referentes aos graus de liberdade transversais do modelo de vigas bidimensional equivalente à seção do perfil

$r$  – número de meias-ondas de um componente da função de forma longitudinal do perfil no MFF

$r_D$  - número de meias-ondas do modo distorcional 5, na análise de flambagem do perfil E-E através da GBT

$r_L$  - número de meias-ondas do modo local 7, na análise de flambagem do perfil E-E através da GBT

$\mathbf{R}_j^{[m]}$  - coluna genérica da matriz  $\mathbf{R}_{GDLO}^O$  (modo de deformação axial ortogonal), associada ao modo  $j$  e ao componente harmônico  $m$

$\mathbf{R}_j^{[m]}(Y)$  - coluna genérica da matriz  $\mathbf{R}_{GDLO}^O$  (modo de deformação axial ortogonal), associada ao modo  $j$  e ao componente harmônico  $m$ , dependente da função de forma longitudinal

$\mathbf{R}_{GD,U}^{[m]}$  - submatriz de  $\mathbf{R}_{GD}^{[m]}$  (matriz  $\mathbf{R}_{GD}$  associada ao componente harmônico  $m$ ) referente aos graus de liberdade  $U$

$\mathbf{R}_{GD,V}^{[m]}$  - submatriz de  $\mathbf{R}_{GD}^{[m]}$  (matriz  $\mathbf{R}_{GD}$  associada ao componente harmônico  $m$ ) referente aos graus de liberdade  $V$

$\mathbf{R}_{\text{GD},W}^{[m]}$  - submatriz de  $\mathbf{R}_{\text{GD}}^{[m]}$  (matriz  $\mathbf{R}_{\text{GD}}$  associada ao componente harmônico  $m$ ) referente aos graus de liberdade  $W$

$\mathbf{R}_{\text{GD},\Theta}^{[m]}$  - submatriz de  $\mathbf{R}_{\text{GD}}^{[m]}$  (matriz  $\mathbf{R}_{\text{GD}}$  associada ao componente harmônico  $m$ ) referente aos graus de liberdade  $\Theta$

$\mathbf{R}_{\text{GDLO}}^{\text{O}}$  - matriz contendo modos de deformação axiais ortogonais que gera todo o espaço de graus de liberdade do MFF

$\mathbf{R}_{\text{GDLO}}^{\text{O}[m]}$  - matriz contendo modos de deformação axiais ortogonais que gera todo o espaço de graus de liberdade do componente harmônico  $m$  no MFF

$\mathbf{R}_{\text{M}}$  - matriz de restrição do modelo de faixas finitas associada ao espaço de deformações reduzido  $M$  (caso seja utilizada uma base modal, contém modos de deformação expressos em termos dos graus de liberdade gerais do MFF)

$\mathbf{R}_{\text{M}}^{\text{O}}$  - matriz de restrição transformada do modelo de faixas finitas associada ao espaço de deformações reduzido  $M$  (contém modos de deformação axiais ortogonais expressos em termos dos graus de liberdade gerais do MFF)

$s$  – eixo do sistema de coordenadas local de um elemento de placa (direção transversal, no plano da placa, na GBT)

$\mathbf{S}_1$  - matriz que permite expressar  $\mathbf{U}_m$  em função de  $\mathbf{V}_m$

$\mathbf{S}_2$  - matriz que permite expressar  $\mathbf{U}_s$  em função de  $\mathbf{w}$

$t$  – espessura da chapa do perfil (constante)

$t^{(i)}$  - espessura de uma faixa finita  $i$

$t^{(k)}(x)$  - espessura da faixa principal  $k$ , dependente de  $x$

$T_i$  – tração em uma linha nodal  $i$ , no MFF

$u$  – grau de liberdade associado ao deslocamento transversal na direção do eixo local  $x$

$u^{(i)}$  - deslocamento na direção do eixo local  $x$  de um elemento de placa  $i$  (comum às duas linhas nodais da faixa principal)

$u_i^{[m]}$  - grau de liberdade  $u$  associado ao nó  $i$  e ao componente harmônico  $m$  no MFF

$u_k$  - magnitude da função elementar de empenamento  $\bar{u}_k(s)$  na GBT (valor do empenamento no nó  $k$  devido a  $\bar{u}_k(s)$ )

$\bar{u}_k(s)$  - função elementar de empenamento de um nó  $k$ , na GBT

$\tilde{u}_k(s)$  - função de deslocamentos  $u$  na seção do perfil, referente a um modo ortogonal puro na GBT

$U$  – grau de liberdade associado ao deslocamento transversal na direção do eixo global  $X$

$U_i(Y)$  - grau de liberdade  $U$  no nó  $i$  de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$

$U_{j,i}^{[m]}$  - deslocamento  $U$  no nó  $i$  do modo de deformação  $j$  associado ao componente harmônico  $m$  ( $\mathbf{R}_j^{[m]}$ )

$\mathbf{u}$  – vetor com os campos de deslocamentos  $u(x, s)$  de todos os segmentos de placa do perfil, na GBT

$\mathbf{U}$  – matriz com as funções  $\bar{u}_k(s)$  de todos os segmentos de placa do perfil, na GBT; vetor com os graus de liberdade  $U$  do modelo de faixas finitas

$\mathbf{U}(Y)$  - vetor com os graus de liberdade  $U$  de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$

$\mathbf{U}_j^{[m]}$  - vetor com os deslocamentos  $U$  do modo de deformação  $j$  associado ao componente harmônico  $m$  ( $\mathbf{R}_j^{[m]}$ )

$\mathbf{U}_{[m]}$  - vetor com os graus de liberdade  $U$  do modelo de faixas finitas associados ao componente harmônico  $m$

$\mathbf{U}\mathbf{m}$  – vetor com os graus de liberdade  $U$  dos nós principais internos

$\mathbf{U}\mathbf{s}$  – vetor com os graus de liberdade  $U$  dos nós principais externos e dos subnós

$v$  – grau de liberdade associado ao deslocamento longitudinal (empenamento) na direção do eixo local  $y$

$v_i^{(k)}(x)$  - função de empenamento arbitrária  $i$  na faixa principal  $k$

$v_i^{[m]}$  - grau de liberdade  $v$  associado ao nó  $i$  e ao componente harmônico  $m$  no MFF

$\bar{v}_k(s)$  - função de deslocamentos  $v$  causados pela aplicação da função elementar de empenamento  $\bar{u}_k(s)$  no nó  $k$ , na GBT

$\tilde{v}_k(s)$  - função de deslocamentos  $v$  na seção do perfil, referente a um modo ortogonal puro na GBT

$V$  - grau de liberdade associado ao deslocamento longitudinal (empenamento) na direção do eixo global  $Y$

$V_i(Y)$  - grau de liberdade  $V$  no nó  $i$  de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$

$V_{j,i}^{[m]}$  - deslocamento  $V$  no nó  $i$  do modo de deformação  $j$  associado ao componente harmônico  $m$  ( $\mathbf{R}_j^{[m]}$ )

$\mathbf{v}$  - vetor com os campos de deslocamentos  $v(x,s)$  de todos os segmentos de placa do perfil, na GBT

$\mathbf{V}$  - matriz com as funções  $\bar{v}_k(s)$  de todos os segmentos de placa do perfil, na GBT; vetor com os graus de liberdade  $V$  (empenamento) do modelo de faixas finitas

$\mathbf{V}(Y)$  - vetor com os graus de liberdade  $V$  de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$

$\mathbf{V}_j^{[m]}$  - vetor com os deslocamentos  $V$  do modo de deformação  $j$  associado ao componente harmônico  $m$  ( $\mathbf{R}_j^{[m]}$ )

$\mathbf{V}_{[m]}$  - vetor com os graus de liberdade  $V$  do modelo de faixas finitas associados ao componente harmônico  $m$

$\mathbf{V}_m(Y)$  - vetor com os graus de liberdade  $V$  dos nós principais de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$  (vetor utilizado como incógnita no procedimento de restrição ao espaço GD)

$\mathbf{V}_m^{[m]}$  - vetor com os graus de liberdade  $V$  dos nós principais do modelo de faixas finitas associados ao componente harmônico  $m$

$\mathbf{V}\mathbf{m}$  - vetor com os graus de liberdade  $V$  (empenamento) dos nós principais

$\mathbf{V}\mathbf{s}$  - vetor com os graus de liberdade  $V$  dos subnós

$w$  - grau de liberdade associado ao deslocamento transversal na direção do eixo local  $z$

$w_i^{[m]}$  - grau de liberdade  $w$  associado ao nó  $i$  e ao componente harmônico  $m$  no MFF

$w_k$  - magnitude da função elementar de empenamento  $\bar{w}_k(s)$ , na GBT (valor do deslocamento perpendicular ao elemento de placa no nó  $k$  devido a  $\bar{w}_k(s)$ )

$\bar{w}_k(s)$  - função elementar de flexão transversal de um nó  $k$ , na GBT, ou função de deslocamentos  $w$  causados pela aplicação da função elementar de empenamento  $\bar{u}_k(s)$  no nó  $k$ , na GBT

$\tilde{w}_k(s)$  - função de deslocamentos  $w$  na seção do perfil, referente a um modo ortogonal puro na GBT

$W$  - grau de liberdade associado ao deslocamento transversal na direção do eixo global  $Z$

$W_i(Y)$  - grau de liberdade  $W$  no nó  $i$  de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$

$W_{j,i}^{[m]}$  - deslocamento  $W$  no nó  $i$  do modo de deformação  $j$  associado ao componente harmônico  $m$  ( $\mathbf{R}_j^{[m]}$ )

$W_m^0$  - carregamento modal associado ao modo  $m$  na GBT (resultante das tensões causadas pelas funções elementares)

$\tilde{W}_m^0$  - carregamento modal associado ao modo  $m$  na GBT (resultante das tensões causadas pelos modos ortogonais)

$\mathbf{w}$  - vetor com os graus de liberdade locais  $w$  dos nós principais externos e dos subnós do modelo de faixas finitas; vetor com os campos de deslocamentos  $w(x,s)$  de todos os segmentos de placa do perfil, na GBT

$\mathbf{W}$  - matriz com as funções  $\bar{w}_k(s)$  de todos os segmentos de placa do perfil, na GBT; vetor com os graus de liberdade  $W$  do modelo de faixas finitas

$\mathbf{W}(Y)$  - vetor com os graus de liberdade  $W$  de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$

$\mathbf{W}_j^{[m]}$  - vetor com os deslocamentos  $W$  do modo de deformação  $j$  associado ao componente harmônico  $m$  ( $\mathbf{R}_j^{[m]}$ )

$\mathbf{W}_{[m]}$  - vetor com os graus de liberdade  $W$  do modelo de faixas finitas associados ao componente harmônico  $m$

**Wm** – vetor com os graus de liberdade  $W$  dos nós principais internos

**Ws** – vetor com os graus de liberdade  $W$  dos nós principais externos e dos subnós

$x$  – eixo do sistema de coordenadas local de um elemento de placa (direção transversal, no plano da placa, no MFFr, e direção longitudinal na GBT)

$X$  – eixo do sistema de coordenadas global do perfil (direção transversal)

**X<sub>m</sub>** - matriz de termos de segunda ordem (matriz geométrica) associada ao carregamento modal  $W_m^0$ , na GBT

**$\tilde{X}_m$**  - matriz de termos de segunda ordem (matriz geométrica) associada ao carregamento modal  $\tilde{W}_m^0$ , na GBT

$y$  – eixo do sistema de coordenadas local de um elemento de placa (direção longitudinal no MFFr)

**y** – vetor de coordenadas mistas das funções elementares na GBT

**y<sub>k</sub>** – vetor de coordenadas mistas representando um modo de deformação puro na GBT, resultante do problema de autovalores que diagonaliza as matrizes **B** e **C**

$Y$  - eixo do sistema de coordenadas global do perfil (direção longitudinal)

$Y_s$  - posição de uma seção genérica  $s$  no modelo de elementos finitos

$z$  – eixo do sistema de coordenadas local de um elemento de placa (direção transversal, perpendicular ao plano da placa, no MFFr e na GBT)

$Z$  – eixo do sistema de coordenadas global do perfil (direção transversal)

$\alpha^{(i)}$  - ângulo de uma faixa finita ou de um elemento de placa em relação ao eixo global  $X$

$\alpha_i$  - ângulo da faixa no subnó  $i$

$\alpha_j^{[m]}$  - coeficiente de contribuição modal de um modo de deformação genérico  $j$  associado ao um componente harmônico  $m$ , modificado para restringir o modelo de elementos finitos de forma independente das funções de forma longitudinais

$\beta_j^{[m]}$  - coeficiente de contribuição modal de um modo de deformação genérico  $j$  associado ao um componente harmônico  $m$

$\gamma_{xs}^M$  - deformação cisalhante membranal de um elemento de placa do perfil na GBT

$\gamma_{xy}^M$  - deformação cisalhante membranal de um elemento de placa do perfil no MFF

$\delta$  - deslocamento genérico num perfil submetido à carga de compressão  $P$

$\delta_{1000}$  - deslocamento causado pela flexão em relação ao eixo de maior inércia do perfil, para um perfil C de 1000 mm

$\delta_{8000}$  - deslocamento causado pela flexão em relação ao eixo de maior inércia do perfil, para um perfil C de 8000 mm

$\Delta Y_s$  - distância entre seções restringidas em um modelo de elementos finitos

$\varepsilon_{ss}^M$  - deformação transversal membranal de um elemento de placa do perfil na GBT

$\varepsilon_{xx}^M$  - deformação transversal membranal de um elemento de placa do perfil no MFF

$\varepsilon_{yy}^M$  - deformação longitudinal membranal de um elemento de placa do perfil no MFF

$\varepsilon$  - vetor de deformações de uma faixa finita

$\theta$  - grau de liberdade associado à rotação transversal em torno do eixo local  $y$

$\theta_i^{[m]}$  - grau de liberdade  $\theta$  associado ao nó  $i$  e ao componente harmônico  $m$  no MFF

$\Theta$  - grau de liberdade associado à rotação transversal em torno do eixo global  $Y$

$\Theta_i(Y)$  - grau de liberdade  $\Theta$  no nó  $i$  de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$

$\Theta_{j,i}^{[m]}$  - rotação  $\Theta$  no nó  $i$  do modo de deformação  $j$  associado ao componente harmônico  $m$

$(\mathbf{R}_j^{[m]})$

$\Theta$  - vetor com os graus de liberdade de rotação  $\Theta$  do modelo de faixas finitas

$\Theta(Y)$  - vetor com os graus de liberdade  $\Theta$  de uma seção do modelo de elementos finitos localizada em  $Y$

$\Theta_j^{[m]}$  - vetor com as rotações  $\Theta$  do modo de deformação  $j$  associado ao componente harmônico  $m$  ( $\mathbf{R}_j^{[m]}$ )

$\Theta_{[m]}$  - vetor com os graus de liberdade  $\Theta$  do modelo de faixas finitas associados ao componente harmônico  $m$  ( $\mathbf{R}_j^{[m]}$ )

$\lambda$  - parâmetro de carga na equação de segunda ordem da GBT

$\lambda_i$  - autovalor genérico na análise de flambagem no MFF

$\lambda_k$  - autovalor no processo de diagonalização das matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  da GBT

$\Lambda$  - matriz de autovalores da análise linear de flambagem no MFF

$\Lambda_M$  - matriz de autovalores da análise de flambagem restringida ao espaço de deformações M, no MFFr  
 $\nu$  - Coeficiente de Poisson  
 $\sigma_{cr}$  - tensão crítica de flambagem  
 $\sigma_i$  - tensão longitudinal em uma linha nodal  $i$  no MFF  
 $\sigma_{xx}^M$  - tensão normal membranal na direção do eixo local  $x$   
 $\sigma_{yy}^M$  - tensão normal membranal na direção do eixo local  $y$   
 $\phi_k(x)$  - função de amplitude da função elementar referente ao nó  $k$  na GBT  
 $\tilde{\phi}_k(x)$  - função de amplitude do modo ortogonal  $k$  na GBT  
 $\phi_{k,x}(x)$  - derivada da função de amplitude da função elementar referente ao nó  $k$  na GBT  
 $\tilde{\phi}_{k,x}(x)$  - derivada da função de amplitude do modo ortogonal  $k$  na GBT  
 $\Phi$  - vetor com as funções de amplitude de todas as funções elementares, na GBT  
 $\Phi_{,x}$  - vetor com as derivadas das funções de amplitude de todas as funções elementares, na GBT  
 $\tilde{\Phi}$  - vetor com as funções de amplitude de todos os modos ortogonais, na GBT  
 $\Phi$  - matriz de autovetores da análise linear de flambagem no MFF  
 $\Phi_i$  - autovetor genérico da análise linear de flambagem no MFF  
 $\Phi_M$  - matriz de autovetores da análise de flambagem restringida ao espaço de deformações M, no MFFr  
 $\Phi_{M,i}$  - autovetor genérico da análise de flambagem restringida ao espaço de deformações M, no MFFr, expresso em termos dos graus de liberdade (nodais ou modais) do espaço de deformações reduzido M  
 $\psi(x)$  - função de amplitude na GBT (representa a variação da amplitude dos deslocamentos da seção ao longo do comprimento do perfil)  
 $\psi_{,x}(x)$  - derivada da função de amplitude na GBT  
 $\psi(y)$  - função de forma longitudinal de uma faixa finita

$\psi_{j,comb}(Y)$  - combinação de componentes harmônicos com seus respectivos coeficientes de contribuição modal modificados, associada ao modo de deformação  $j$

$\psi_{[m]}(Y)$  - componente harmônico da função de forma com um número de meias-ondas  $m$ , no processo de restrição do modelo de elementos finitos

$\psi'_{j,comb}(Y)$  - combinação das derivadas de componentes harmônicos com coeficientes apropriados, associada ao modo de deformação  $j$

## 1. INTRODUÇÃO

Os perfis formados a frio, fabricados a partir da dobra de chapas de pequena espessura, caracterizam-se pela esbeltez e pela facilidade de produção em diferentes geometrias. Também são conhecidos como perfis de chapa dobrada ou perfis de parede fina.

A fabricação dos perfis formados a frio, em dobradeiras ou perfiladeiras, quando comparada à dos perfis laminados ou soldados, é simples e barata. Devido à facilidade de fabricação em diversas geometrias, podem ser criadas formas especiais de perfis para atender a uma determinada solicitação, sendo possível otimizar as dimensões da seção, o que representa economia. Assim, os perfis de aço formados a frio são alternativas leves e econômicas para os diversos ramos da construção metálica.

As características dos perfis formados a frio vão de encontro à tendência atual da construção metálica no mundo e no Brasil, que é a aplicação de elementos esbeltos para a obtenção de estruturas leves. Por isso, o emprego desse tipo de perfil vem crescendo muito nas últimas décadas, em várias áreas da construção metálica.

Os perfis de aço formados a frio podem ser aplicados, por exemplo, em construção de prédios (residenciais, comerciais e industriais), carrocerias de ônibus e caminhões, estruturas de aviões, máquinas e implementos agrícolas, prateleiras e *racks* de armazenagem etc. Os perfis de chapa dobrada também podem ser usados como cobertura ou fechamento lateral sob a forma de telhas metálicas, que ainda contam com outras aplicações. A Figura 1.1 mostra algumas seções transversais típicas dos perfis formados a frio.

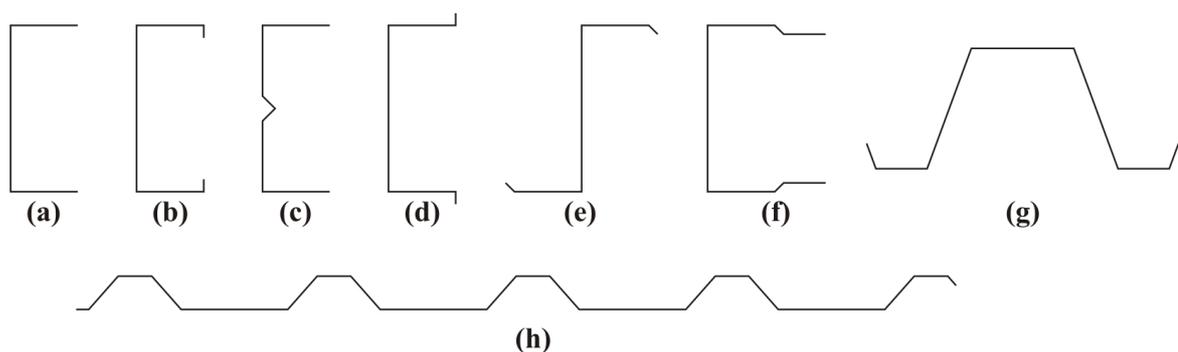


Figura 1.1. Seções transversais típicas de perfis formados a frio. (a) Perfil C. (b) Perfil C com enrijecedores de borda. (c) Perfil C com enrijecedor na alma. (d) Perfil cartola. (e) Perfil Z. (f) Perfil C com flanges adicionais. (g) Variação do perfil cartola. (h) Telha trapezoidal.

Conforme discutido, o uso de perfis de aço formados a frio tem como concepção a obtenção de estruturas leves. Porém, o uso de chapas de pequena espessura na fabricação desses perfis resulta, muitas vezes, numa grande esbeltez dos elementos que compõem a seção, ou seja, as paredes da seção apresentam uma grande relação largura/espessura. Essa grande esbeltez faz com que os perfis de aço formados a frio sejam bastante suscetíveis ao fenômeno da flambagem local de seus elementos e ao fenômeno da flambagem distorcional da seção, quando submetidos a esforços de compressão.

Perfis que sofrem flambagem local ou distorcional possuem comportamentos pós-críticos estáveis, ou seja, não entram diretamente em colapso quando flambam (possuem uma considerável reserva pós-flambagem ou reserva pós-crítica). Porém, esses dois tipos de flambagem são responsáveis pela redução da capacidade resistente de um perfil, devendo ser considerados nos cálculos de dimensionamento do mesmo.

Assim, os perfis formados a frio estão sujeitos a três tipos de modos de flambagem discutidos na literatura e nas normas de projeto: flambagem global, flambagem distorcional e flambagem local (tratados, por exemplo, em Yu e LaBoube, 2010). A cada tipo de flambagem está associado um diferente grau de reserva pós-flambagem. As normas de projeto, para o cálculo da resistência desses perfis com consideração da reserva pós-flambagem, baseiam-se, mesmo que indiretamente, na determinação das cargas críticas elásticas associadas a cada tipo de flambagem do perfil. O Método da Resistência Direta (MRD) [Schafer, 2008], incluído recentemente nas normas de projeto [North American Specification, 2004, e ABNT, 2010] baseia-se explicitamente nessa abordagem. Por isso, é muito importante a consideração dos três tipos de flambagem citados.

Mesmo que os modos globais, distorcionais e locais sejam fenômenos aceitos e tratados nas normas de projeto, não existem definições únicas para os três tipos de flambagem. Considerando ainda que esses três tipos de *modos puros* de flambagem podem interagir, pode-se dizer que a análise do comportamento de perfis formados a frio é, no mínimo, complexa.

O cálculo das cargas críticas de flambagem elástica de um perfil formado a frio é normalmente realizado através do uso de algum método numérico. Os métodos numéricos mais utilizados para esse fim são o Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando elementos de casca, o Método das Faixas Finitas (MFF) e a Teoria Generalizada de Vigas (GBT, sigla que vem do nome em inglês *Generalized Beam Theory*).

O MEF [Zienkiewicz, 1982] é o método numérico mais geral e mais popular, disponível através de diversos softwares comerciais. No MEF, podem-se modelar quaisquer condições de contorno, configurações de carregamento e irregularidades. Os modelos de elementos finitos têm, em geral, um grande número de graus de liberdade, o que implica, além de um custo computacional maior do que o dos outros dois métodos numéricos citados, um grande número de modos de flambagem gerados em uma análise linear. Assim, o usuário precisa analisar vários modos para encontrar as cargas críticas associadas aos três tipos característicos de flambagem, o que fica subjetivo e ainda mais trabalhoso devido à interação entre os modos puros pertencentes aos três tipos de flambagem comentados.

O MFF [Cheung e Tham, 1998] é um método muito usado especificamente na análise de perfis formados a frio, também disponível através de alguns softwares, inclusive gratuitamente [Schafer, 2006, e Schafer, 2011]. O método utiliza menos graus de liberdade do que o MEF, sendo mais eficiente computacionalmente, o que facilita aos softwares a apresentação dos resultados de carga crítica em função do comprimento de meia-onda ou do comprimento do perfil. Para perfis com extremidades simplesmente apoiadas, esse tipo de gráfico poupa tempo na identificação das cargas críticas dos três tipos de flambagem, mas não elimina o problema da interação entre os modos puros. Além disso, o MFF é limitado a perfis prismáticos e com condições de contorno uniformes ao longo do comprimento do perfil.

Outro método numérico disponível, embora menos conhecido, é a GBT [Schardt, 1989]. O principal atrativo desse método é o fato de trabalhar diretamente com modos de flambagem desacoplados, sendo o único método conhecido capaz de, inerentemente, produzir e isolar soluções para todos os modos de flambagem: globais, distorcionais e locais. A GBT também trabalha com poucos graus de liberdade, mas possui limitações. O método só é aplicável a perfis prismáticos e utiliza hipóteses simplificadoras. Além disso, a teoria é pouco conhecida e existem poucos softwares disponíveis baseados na GBT.

Como alternativa à GBT, Ádány e Schafer, 2006a, 2006b e 2008, propuseram uma nova abordagem que permite a decomposição da solução de um problema linear de flambagem de um perfil formado a frio prismático de seção aberta em modos puros de flambagem, ou ainda em modos de deformação individuais (modos dentro do espaço vetorial que define um modo de flambagem puro). Os modos puros de flambagem são definidos através de hipóteses mecânicas retiradas da GBT. O campo de deformações do modelo numérico é, então, restringido de acordo com as hipóteses que definem modos globais,

distorcionais ou locais. Ainda são considerados modos que não se enquadram nas definições de nenhum desses três tipos normalmente tratados (*outros modos*). A implementação desses conceitos foi realizada utilizando o MFF, através do software CUFSM [Schafer e Ádány, 2006, e Li e Schafer, 2010b], originando o chamado Método das Faixas Finitas Restringido (MFFr).

O MFFr permite a aplicação das restrições no modelo antes da análise de flambagem, forçando o perfil a deformar de acordo com o modo de flambagem desejado (*decomposição modal*), ou a restrição depois da análise, para identificar a contribuição dos tipos de flambagem na solução geral (*identificação modal*), ou seja, para analisar a interação entre os modos.

Tanto na GBT quanto no MFFr, os modos puros de flambagem são definidos por uma base vetorial composta por *modos de deformação individuais* pertencentes a um tipo de flambagem, ou seja, que satisfaçam certas hipóteses mecânicas. Em outras palavras, uma base vetorial gera o espaço de deformações de um tipo de flambagem, e um modo puro é qualquer combinação dos modos de deformação individuais dessa base. Assim, a solução pode ter três focos diferentes:

- Espaço vetorial completo de um tipo de flambagem (global, distorcional, local ou outro), ou seja, a solução é focada em um modo puro de flambagem;
- Um modo de deformação individual, ou seja, a solução é focada em um modo puro de flambagem, porém é realizada em um subespaço do espaço de deformações que define o tipo de flambagem;
- Espaço vetorial de uma combinação de modos de deformação individuais pertencentes a qualquer tipo de flambagem, que representa o caso geral.

O MFFr trabalha com elementos de casca, mas apresenta as mesmas limitações inerentes ao MFF convencional. O ideal, numa análise de perfis formados a frio, seria a utilização de um método de solução geral, como o MEF, que fornecesse cargas críticas de modos de flambagem puros (pertencentes aos tipos global, distorcional ou local) e que permitisse a quantificação da interação entre modos.

Mais recentemente, Casafont et al., 2009a e 2009b, apresentaram uma proposta de extensão do processo de restrição do MFFr ao MEF. O procedimento permite o cálculo de cargas críticas de modos puros de flambagem de perfis formados a frio de seção aberta através da restrição do modelo de elementos finitos (*decomposição modal*). O campo de deformações

do modelo é restringido de acordo com algum modo de deformação individual específico calculado pela GBT, aplicando um método de restrição semelhante ao do MFFr. Posteriormente, Casafont et al., 2011, estenderam a pesquisa para o cálculo da carga crítica de modos de flambagem combinando diversos modos de deformação da GBT, para um componente harmônico único.

Uma abordagem diferente foi proposta pelo grupo de Ádány e Joó [Joó e Ádány, 2009, e Ádány et al., 2010], na qual um modo de flambagem obtido através de um modelo de elementos finitos não restringido tem sua interação avaliada através de um processo de identificação modal. As funções base que permitem a identificação modal no MFFr são utilizadas para aproximar o modo de flambagem fornecido pelo modelo de elementos finitos.

Apesar do recente avanço nos estudos do cálculo de cargas críticas de modos puros de flambagem (decomposição modal) e da quantificação da interação entre os modos numa solução geral (identificação modal), o assunto não está resolvido. O MFFr e a GBT possuem aplicações limitadas. A restrição de modelos de elementos finitos é um assunto ainda pouco abordado. Além disso, não existe um procedimento definitivo para quantificar a interação entre os diferentes modos de deformação em um modo de flambagem. Portanto, a análise de flambagem de perfis formados a frio utilizando modos puros é um tema pouco explorado, que ainda pode contribuir muito para a compreensão do comportamento estrutural desses perfis.

## **1.1 Objetivos**

Esse trabalho tem como objetivo geral analisar a flambagem de perfis formados a frio através de modelos de elementos finitos restringidos, obtendo modos puros de flambagem ou modos combinados cuja interação seja quantificada. Esse tipo de análise auxilia na compreensão do comportamento estrutural desses perfis. Para poder aproximar-se desse objetivo geral, é possível definir um conjunto de objetivos específicos, listados a seguir:

- 1) Definir diferentes procedimentos de restrição para a análise linear focada nas três principais classes de flambagem (de modos globais, distorcionais e locais), com inspiração nas exigências das normas de projeto de perfis formados a frio.
- 2) Definir um procedimento de restrição geral que permita o cálculo da carga crítica de qualquer modo de flambagem combinando diferentes modos de deformação da seção e diferentes componentes harmônicos na direção longitudinal do perfil. Dessa forma, torna-

se possível analisar perfis com quaisquer condições de contorno das extremidades e quantificar a interação entre os modos. Para isso, foram utilizados:

- Os conceitos gerais do procedimento de restrição de Ádány e Schafer, 2006a, 2006b e 2008, e Li e Schafer, 2009, 2010a e 2010b, aplicáveis a qualquer método geral de solução;
  - Uma metodologia de aplicação das restrições no software Ansys [Ansys, Inc., 2007], semelhante à inicialmente proposta por Casafont et al., 2009a e 2009b.
- 3) Realizar a decomposição modal e a identificação modal através do MEF para variação livre do modo de flambagem ao longo do comprimento do perfil (análise independente de componentes harmônicos longitudinais).
  - 4) Aplicar os procedimentos de restrição propostos em problemas envolvendo condições de contorno intermediárias, explorando as vantagens do MEF em relação ao MFF e à GBT. Para isso, analisou-se um perfil inspirado em uma estrutura real.

## **1.2 Justificativa**

A utilização dos perfis de aço formados a frio em constante crescimento no Brasil é a justificativa inicial para o estudo desses componentes.

A necessidade das cargas críticas elásticas de modos de flambagem puros para o projeto de perfis formados a frio, utilizando normas ou o MRD, justifica o estudo de um procedimento para se decompor a solução da análise de flambagem nos modos desejados.

A obtenção das cargas críticas elásticas de modos de flambagem puros e a quantificação da interação entre os modos em uma solução geral podem auxiliar na compreensão do comportamento estrutural de perfis formados a frio, cuja análise é muitas vezes complexa.

A análise de flambagem utilizando modos puros através do MEF pode contornar limitações do MFFr, relacionadas a condições de contorno. Além disso, o MEF permite a análise de perfis não uniformes, por exemplo, perfis com furos.

## **1.3 Estrutura do trabalho**

No Capítulo 1, é introduzido o tema da flambagem de perfis de aço formados a frio. Deu-se destaque aos diferentes tipos de flambagem que podem ocorrer e à importância do cálculo da carga crítica associada a cada modo de flambagem no projeto de perfis formados a

frio. Foram citados os diferentes métodos de análise de flambagem de perfis formados a frio, destacando aqueles que permitem focar a solução em modos de deformação puros.

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica. Os princípios básicos do MFF, do MFFr, do MFF estendido a condições de contorno gerais e da GBT são mostrados. Foi dado destaque à definição dos modos de deformação puros da seção que definem os espaços de deformação dos diferentes tipos de flambagem, dentro do contexto do MFFr.

A revisão bibliográfica é apresentada no Capítulo 3. São discutidos trabalhos que utilizaram os diferentes métodos numéricos de análise de perfis formados a frio para a análise de flambagem focada em modos de deformação puros ou combinados (GBT, MFFr e MEF).

O Capítulo 4 traz a metodologia empregada nesse trabalho. Primeiramente, descrevem-se os exemplos estudados e os detalhes da modelagem numérica. Em seguida, é apresentado o procedimento geral proposto para a restrição da malha de elementos finitos de acordo com modos de deformação puros ou combinados. Também são apresentados diferentes esquemas de restrição aplicáveis a análises focadas em determinados tipos de flambagem.

Os resultados do trabalho estão expostos nos Capítulos 5 e 6. No Capítulo 5, é abordado o exemplo utilizado para validação dos procedimentos propostos, comparando os resultados com os fornecidos pelo MFFr e pela GBT. São mostrados os resultados de análises focadas em modos puros e de um modo combinado, quantificando a interação. É verificada a influência do número de componentes harmônicos utilizados e do número de graus de liberdade restringidos na malha de elementos finitos.

No Capítulo 6, é feita a aplicação dos procedimentos propostos a um perfil inspirado em uma estrutura real, com apoios intermediários (ao longo do comprimento). Dessa forma, explora-se a vantagem do MEF em relação ao MFFr e à GBT.

Finalmente, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões obtidas e são sugeridas novas metas para a continuação dessa pesquisa.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nesse capítulo, é apresentada a base teórica do estudo realizado. É mostrado o procedimento básico de restrição de um problema linear de flambagem para que a solução seja focada em um modo puro de flambagem (ou em uma combinação qualquer de modos de deformação individuais da seção). O procedimento é o mesmo proposto por Ádány e Schafer no contexto do MFF, inicialmente para perfis com extremidades simplesmente apoiadas. Hipóteses mecânicas da GBT são utilizadas para definir modos puros globais e distorcionais. Relaxando algumas dessas hipóteses, é possível também definir modos locais e outros modos.

Primeiramente, é introduzido o problema de flambagem de perfis formados a frio. Dentro desse contexto, são descritos os critérios mecânicos que definem cada uma das classes de flambagem típicas. Os fundamentos do procedimento de restrição são apresentados para o caso de extremidades simplesmente apoiadas. São discutidos os procedimentos de ortogonalização e normalização dos vetores base que geram os espaços de deformação das classes de flambagem, o que é essencial para a quantificação da interação entre os modos. Posteriormente, descreve-se a extensão do procedimento para condições de contorno gerais, que fornece a idéia chave para a transcrição do método de restrição para a aplicação em modelos de elementos finitos. A extensão do procedimento para o MEF é apresentada no Capítulo 4. Finalmente, princípios básicos da GBT são mostrados.

### 2.1 Modos puros de flambagem de perfis formados a frio

A flambagem é um tipo de instabilidade estrutural através da qual uma estrutura submetida a tensões compressivas sofre uma súbita mudança no modo de deformação, relacionada à bifurcação do estado de equilíbrio. A flambagem está associada a um grande aumento de deslocamentos causado por um pequeno acréscimo de carga, manifestando-se quando se atinge a chamada carga de bifurcação.

O comportamento pós-flambagem de uma estrutura pode ser estável, ou seja, a estrutura continua a resistir ao carregamento aplicado após a ocorrência da flambagem. Em outras palavras, diz-se que a estrutura possui uma reserva pós-flambagem. Este é o caso da flambagem em perfis formados a frio, embora os diferentes modos de flambagem observados nesse tipo de estrutura estejam associados a diferentes graus de reserva pós-flambagem.

A flambagem de um perfil formado a frio está ilustrada qualitativamente na Figura 2.1, onde a carga de compressão  $P$  está dada em função de um deslocamento genérico da

estrutura (dado por  $\delta$ ). Admite-se um perfil sem imperfeições geométricas e que a flambagem ocorra no regime elástico.

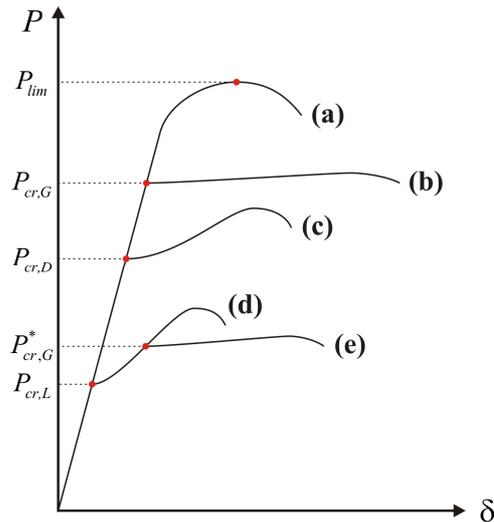


Figura 2.1. Ilustração qualitativa da flambagem de um perfil formado a frio.

A trajetória fundamental do perfil é dada pela curva (a), onde o colapso ocorre quando se atinge uma carga limite  $P_{lim}$ . As curvas (b) a (e) representam bifurcações do estado de equilíbrio do perfil, ou seja, trajetórias pós-flambagem. Cada uma dessas curvas está associada a um modo de deformação e a uma carga de bifurcação.

O comportamento pós-flambagem de um perfil formado a frio depende fortemente da natureza do modo de deformação. Normas de projeto de perfis formados a frio baseiam-se no conceito de tipo de modo de flambagem (ou classe de flambagem), sendo três os modos usualmente tratados: globais, distorcionais e locais. A cada um desses tipos está associado um diferente grau de reserva pós-flambagem.

A determinação da resistência última de um perfil formado a frio através das normas é feita (mesmo que indiretamente) em função das cargas críticas de cada tipo de modo de flambagem. A carga crítica de um modo de flambagem é a menor carga de bifurcação associada a modos da mesma natureza (modos globais, distorcionais ou locais).

Na Figura 2.1, as curvas (b), (c) e (d) representam os modos críticos das três classes de flambagem de interesse.  $P_{cr,G}$ ,  $P_{cr,D}$  e  $P_{cr,L}$  são as cargas críticas de flambagem dos modos globais, distorcionais e locais, respectivamente. A curva (b) representa o comportamento pós-flambagem de um modo global, onde se tem uma baixa resistência pós-flambagem. As curvas (c) e (d) representam um modo distorcional e um modo local, respectivamente. Esses modos

possuem considerável resistência pós-flambagem, sendo a do modo local maior, conforme pode ser verificado, por exemplo, nas curvas de resistência do MRD [Schafer, 2008].

A análise de um perfil formado a frio torna-se complexa devido à interação entre os diferentes modos de flambagem. A interação entre modos globais e locais, cujo comportamento está mostrado na curva (e) da Figura 2.1, é considerada nas normas de projeto, ou seja, a flambagem global pode ocorrer após a manifestação da flambagem local (carga de bifurcação  $P_{cr,G}^*$ ). Porém, a interação envolvendo modos distorcionais é mais complexa. A interação entre modos locais e distorcionais foi estudada, por exemplo, em Kwon e Hancock, 1992, e Bernard et al., 1993 e 1995.

É comum recorrer a métodos numéricos, como o MEF ou o MFF, para fazer a análise linear de flambagem de um perfil formado a frio. Porém, em uma análise numérica, os três tipos usuais de modos de flambagem normalmente interagem entre si, tornando a determinação da carga crítica associada a um tipo de modo de flambagem, muitas vezes, complicada. A interação entre os modos faz com que a determinação das cargas críticas seja um processo subjetivo, uma vez que o projetista deve julgar que modo está sendo analisado. Além disso, as definições de cada tipo de modo de flambagem normalmente usadas não são únicas e gerais.

Exemplos típicos dos três tipos de flambagem tratados na prática estão mostrados na Figura 2.2. Um modo global é um modo em que o perfil deforma-se sem deformação de sua seção transversal. Define-se modo local como o modo que envolve apenas deformações de placa associadas aos elementos planos que formam o perfil, sem que haja translação das linhas de interseção entre os elementos. Já o modo distorcional é um modo que envolve distorção da seção juntamente com a translação de algumas linhas de interseção dos elementos que formam o perfil. Todos os modos ocorrem sob forma de ondas ao longo do comprimento do perfil, normalmente definidas por funções harmônicas. Porém, essas três definições não são rigorosas, ou seja, não são expressas matematicamente de forma explícita. Além disso, existem alguns casos em que elas não funcionam, conforme comentado em Schafer e Ádány, 2005, e Ádány e Schafer, 2006c.

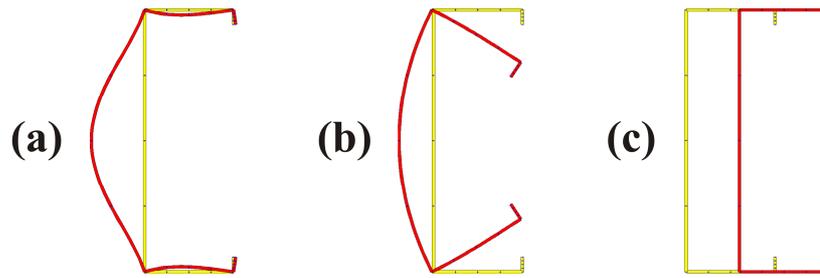


Figura 2.2. Três tipos de modos de flambagem de um perfil C com enrijecedores de borda. (a) Modo local. (b) Modo distorcional. (c) Modo global (flexão em torno do eixo de menor inércia).

Outro procedimento que ajuda na identificação do modo de flambagem é o gráfico da carga crítica (ou tensão crítica) em função do comprimento de meia-onda, fornecido por softwares que utilizam o MFF ou a GBT. Rigorosamente, esse tipo de gráfico só é diretamente aplicável a perfis com extremidades simplesmente apoiadas, cujos modos de flambagem ocorrem em ondas senoidais ao longo do comprimento do perfil. Portanto, o comprimento de meia-onda é definido como o tamanho de meia-onda senoidal do modo analisado. Mesmo assim, para perfis com outras condições de contorno, o gráfico é útil para se determinarem os componentes harmônicos dominantes associados a cada modo [Li e Schafer, 2010b]. Um exemplo desse tipo de gráfico está mostrado na Figura 2.3, onde as curvas foram obtidas considerando um módulo de elasticidade longitudinal  $E$  de 210000 MPa e um coeficiente de Poisson  $\nu$  de 0,3.

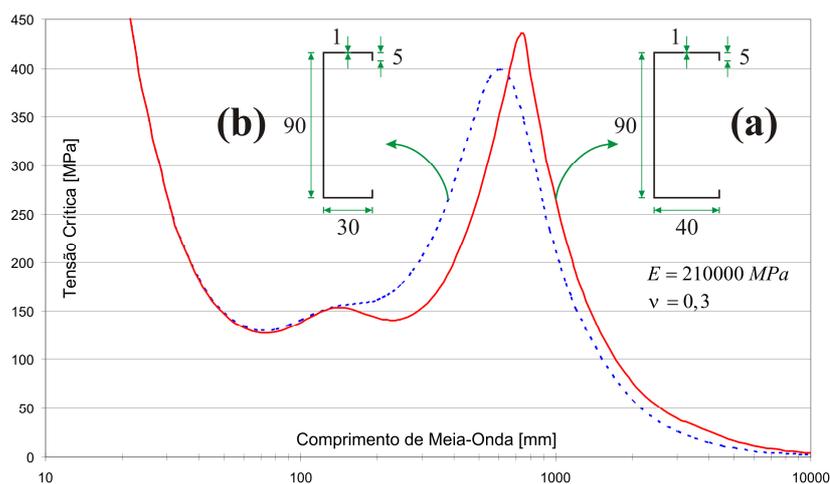


Figura 2.3. Exemplo de gráfico de tensão crítica em função do comprimento de meia-onda (dimensões em mm).

Costuma-se associar o primeiro mínimo da curva com o modo local crítico, e o segundo mínimo ao modo distorcional crítico. A porção descendente final da curva

corresponde à flambagem global. A curva do perfil (a) apresenta os dois mínimos referentes aos modos local e distorcional. Por outro lado, a curva do perfil (b), que apenas tem a dimensão dos flanges diferente da do perfil (a), não apresenta o segundo mínimo. Ainda existem casos em que mais de dois mínimos podem ocorrer. Mesmo que os mínimos supostamente associados aos modos local e distorcional existam, a interação entre modos, em maior ou menor grau, sempre estará presente.

O MRD utiliza as cargas críticas de curvas como as mostradas na Figura 2.3. Portanto, a resistência de um perfil é determinada levando em conta a interação entre os tipos de modos de flambagem, ou seja, mesmo que se associe uma carga crítica a certo tipo de modo, o método está calibrado para levar em consideração a interação com outros modos. Mesmo que o MRD proponha uma maneira de contornar o problema de como considerar o efeito da interação entre modos de flambagem, os mínimos da curva da carga crítica em função do comprimento de meia-onda continuam podendo não aparecer para uma dada combinação de perfil e carregamento.

Dados os problemas na identificação dos modos de flambagem de um perfil formado a frio, uma análise focada em uma classe específica de flambagem torna-se muito atrativa. Como comentado, os tipos de modos de flambagem normalmente interagem entre si. Quando não se tem interação entre os tipos de flambagem, tem-se um *modo de flambagem puro*. Por exemplo, pode-se ter um modo local puro ou um modo distorcional puro. O conceito de modo puro exige, assim, uma definição matemática rigorosa das classes de flambagem.

A GBT é o único método conhecido que é capaz de produzir e isolar soluções para os três tipos básicos de modos de flambagem: global, distorcional e local. Os modos definidos pela GBT geralmente estão de acordo com definições comumente utilizadas na prática, embora algumas divergências possam aparecer, conforme discutido em Schafer e Ádány, 2005, e Ádány e Schafer, 2006c. Ádány e Schafer, 2008, identificaram uma série de hipóteses mecânicas na formulação da GBT que permitem a definição de modos globais e distorcionais. Essas hipóteses foram descritas como um conjunto de critérios que permitem a definição rigorosa de quatro tipos de modos flambagem: globais (G), distorcionais (D), locais (L) ou outros (O). *Outros modos* são modos associados ao cisalhamento membranal e à extensão transversal membranal dos elementos de placa que compõem um perfil.

A definição matemática dos tipos de flambagem aplica-se a perfis prismáticos. Assim, modela-se o perfil como um conjunto de elementos de placa e define-se um sistema de coordenadas.

Na união de cada elemento, tem-se um nó na seção transversal e uma linha nodal da direção longitudinal do perfil. O sistema de coordenadas adotado está mostrado na Figura 2.4, que é o mesmo sistema empregado nos trabalhos de Ádany e Schafer, 2006a, 2006b e 2008, e de Casafont et al., 2009a e 2009b, e considera os graus de liberdade (GDLs) da GBT e do MFF (discutidos nos itens 2.5 e 2.2, respectivamente). Os eixos globais  $X$  e  $Z$  definem a seção transversal do perfil, e o eixo  $Y$  representa a direção longitudinal. Assim o campo de deformações transversais do perfil fica definido pelos GDLs  $U$ ,  $W$  e  $\Theta$ , e o empenamento é dado pelo GDL  $V$ . Cada elemento de placa tem um sistema de coordenadas local representado pelos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , onde GDLs são  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $\theta$ . O sistema de coordenadas local de uma placa fica automaticamente definido pela conectividade das linhas nodais do perfil, sendo o eixo  $x$  paralelo ao plano da placa e o eixo  $y$  coincidente com o eixo global  $Y$ . Na Figura 2.4, o sistema de coordenadas local está ilustrado para o elemento de placa compreendido entre as linhas nodais 3 (inicial) e 4 (final).

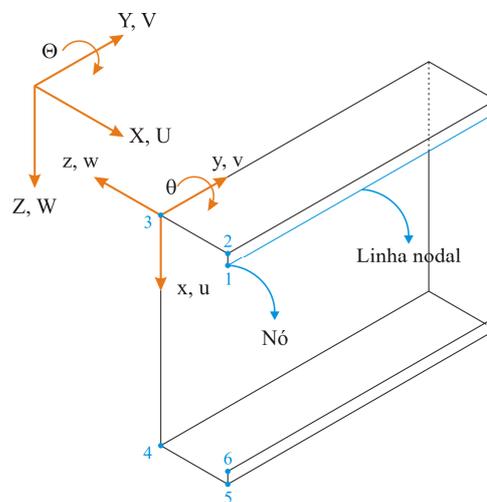


Figura 2.4. Sistemas de coordenadas global e local considerados e graus de liberdade (GDLs) associados.

Convém observar que, nesse trabalho, serão tratados perfis sem ramificações, ou seja, em cada linha nodal estão conectadas no máximo duas placas.

Os três critérios que permitem a separação dos quatro tipos de flambagem são listados a seguir:

- **Critério 1 (Hipóteses de Vlasov):**

(a)  $\gamma_{xy}^M = 0$ , ou seja, não há deformação cisalhante membranal no plano de um elemento de placa.

(b)  $\varepsilon_{xx}^M = 0$ , ou seja, não há deformação transversal membranal dos elementos de placa.

(c)  $v$  é linear em  $x$  dentro de um elemento de placa.

- **Critério 2 (Empenamento Longitudinal):**

(a)  $v \neq 0$ , ou seja, o empenamento não é constantemente zero na seção transversal do perfil.

(b) A seção transversal do perfil está em equilíbrio transversal.

- **Critério 3 (Seção sem Distorção):**

(a) Não há flexão transversal nos elementos de placa.

Obedecer ou não aos critérios acima define os tipos de modos de flambagem. A Tabela 2.1 mostra quais os critérios a que cada tipo de flambagem obedece. Por exemplo, os modos L são os modos que obedecem ao Critério 1 e não obedecem ao Critério 2. Os três critérios e suas conseqüências serão discutidos na seção 2.3. Deve-se ainda observar que as definições dos tipos de modos de flambagem baseadas nos três critérios citados falha quando o perfil é formado por menos de três elementos de placa, ou seja, quando o perfil tem menos de quatro linhas nodais, que é o caso de uma seção do tipo cantoneira. Esse problema é discutido em Ádány, 2004.

Tabela 2.1. Critérios obedecidos por cada tipo de modo de flambagem.

	<b>Modos G</b>	<b>Modos D</b>	<b>Modos L</b>	<b>Modos O</b>
<b>Critério 1 – Hipóteses de Vlasov</b>	Sim	Sim	Sim	Não
<b>Critério 2 – Empenamento Longitudinal</b>	Sim	Sim	Não	-
<b>Critério 3 – Seção sem Distorção</b>	Sim	Não	-	-

## 2.2 Fundamentos do Método das Faixas Finitas (MFF)

O MFF é uma ferramenta numérica muito útil para a investigação dos modos de flambagem de um perfil formado a frio. O método apresentado aqui é o *semianalytical finite strip method* descrito por Cheung e Tham, 1998, originalmente desenvolvido para análise de tensões em placas. Entre as primeiras aplicações do MFF na análise linear de flambagem de perfis formados a frio, podem-se destacar três trabalhos. Przemieniecki, 1973, foi o primeiro

autor a utilizar o MFF na análise de flambagem local. Plank e Wittrick, 1974, estenderam o método para análise de modos de flambagem distorcionais e globais. Posteriormente, o MFF começou a ganhar ainda mais importância com os trabalhos de Hancock, sendo a primeira aplicação em perfis I sob flexão [Hancock, 1978]. Atualmente, existe o software CUFSM, gratuitamente disponível por Schafer em seu website [Schafer, 2006, e Schafer, 2011], que faz a análise linear de flambagem de perfis formados a frio através do MFF. O MFF utilizado nesse software é o contexto do procedimento de restrição de Ádány e Schafer apresentado na seção 2.3.

O método consiste em dividir os elementos planos de placa de um perfil como o da Figura 2.4 em faixas longitudinais, conforme esquematizado na Figura 2.5(a). Os nós situados das extremidades de cada elemento de placa (numerados de 1 a 6) são os chamados nós principais, enquanto os demais nós são denominados subnós.

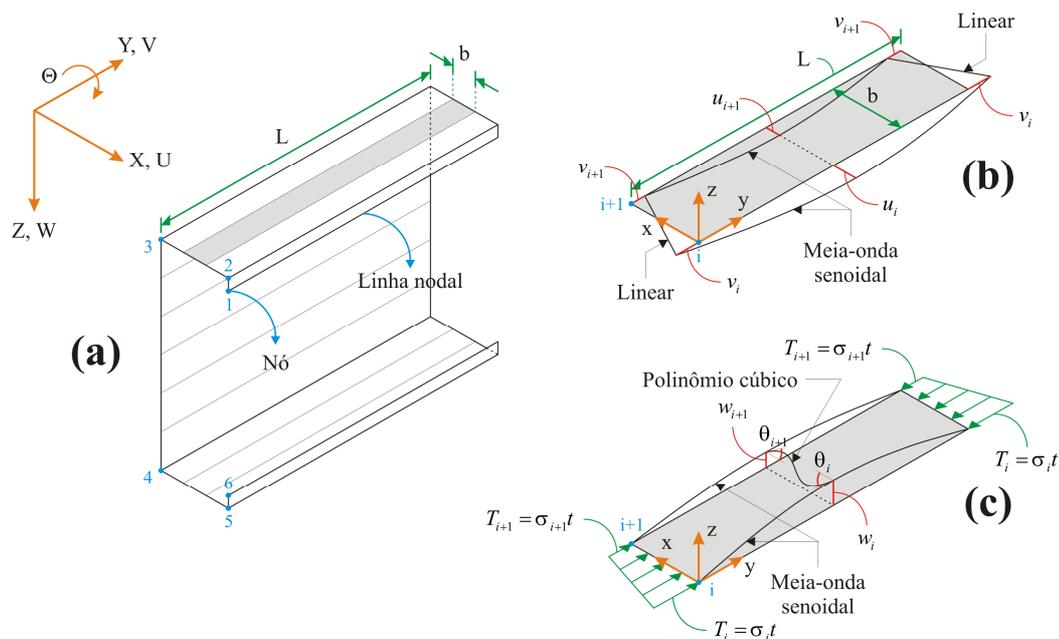


Figura 2.5. MFF utilizado no software CUFSM, considerando uma meia-onda senoidal ao longo do comprimento. (a) Discretização de um perfil C com enrijecedores de borda. (b) Deslocamentos no plano da faixa (membranais). (c) Deslocamentos fora do plano da faixa (flexão de placa) e distribuição de trações longitudinais numa faixa.

Diferentemente do MEF, com o qual também é feita a discretização longitudinal do perfil, o MFF emprega *funções de forma* para representar a variação longitudinal (direção  $Y$ ) dos deslocamentos ao longo de todo o comprimento da faixa. As funções de forma longitudinais devem ser escolhidas de acordo com as condições de contorno do problema. O

MFF de Cheung e Tham (utilizado no software CUFMSM) utiliza séries harmônicas como funções de forma longitudinais, enquanto funções polinomiais interpolam a variação dos deslocamentos nas direções transversais da seção. Para perfis com extremidades simplesmente apoiadas, apenas uma *meia-onda* senoidal pode ser considerada. Nesse caso, a análise é realizada em função do comprimento de meia-onda, que é o tamanho de uma meia-onda senoidal do modo analisado ao longo do comprimento do perfil.

Cada faixa finita é representada por suas duas linhas nodais, aqui denotadas genericamente por  $i$  e  $i+1$ , cada uma com quatro GDLs ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $\theta$ ) associados ao sistema de coordenadas local (Figura 2.5(b) e Figura 2.5(c)). A faixa finita possui rigidez de membrana e de flexão de placa. A rigidez membranal, referente aos GDLs  $u$  e  $v$ , obedece à hipótese de estado plano de tensões. A rigidez de flexão de placa está relacionada aos GDLs fora do plano da faixa ( $w$  e  $\theta$ ) e respeita a teoria clássica de placas considerando pequenos deslocamentos.

Os campos de deslocamentos membranais  $u$  e  $v$  estão mostrados na Figura 2.5(b) e o campo de deslocamentos  $w$ , associado à flexão de placa, está exibido na Figura 2.5(c) para um perfil com extremidades simplesmente apoiadas. Para definir inteiramente os campos de deslocamentos membranais, utilizam-se os deslocamentos nodais  $u_i$ ,  $u_{i+1}$ ,  $v_i$  e  $v_{i+1}$  (Figura 2.5(b)) e as funções de forma (longitudinais e transversais). Tanto  $u$  quanto  $v$  variam linearmente na direção transversal  $x$ . Na direção longitudinal  $y$ ,  $u$  obedece a um componente harmônico da função de forma (no exemplo, uma meia-onda senoidal), e  $v$  varia segundo a derivada da função de forma (no caso, um cosseno). Para definir o campo de deslocamentos  $w$  da flexão de placa, usam-se os deslocamentos  $w_i$  e  $w_{i+1}$  e as rotações  $\theta_i$  e  $\theta_{i+1}$  das duas linhas nodais (Figura 2.5(c)) e as funções de forma.  $w$  varia segundo um polinômio cúbico na direção transversal  $x$  e acompanha a meia-onda senoidal na direção longitudinal  $y$ .

Cada faixa pode ser carregada com uma distribuição de trações na direção longitudinal  $y$  com variação linear da direção transversal  $x$ , porém uniforme ao longo do comprimento  $L$  da faixa (Figura 2.5(c)). As trações assumem valores  $T_i$  e  $T_{i+1}$  nas duas linhas nodais, sendo iguais ao produto da tensão na direção  $y$  ( $\sigma_i$  ou  $\sigma_{i+1}$ ) e da espessura da faixa  $t$ . Além do carregamento, as propriedades mecânicas, a espessura  $t$  e quaisquer restrições nodais (aplicadas sobre as linhas nodais) não podem variar na direção longitudinal das faixas.

De forma geral, os campos de deslocamentos de uma faixa finita  $u$ ,  $v$  e  $w$ , aproximados pelos deslocamentos das linhas nodais e pelas funções de forma (longitudinal e transversal) são escritos matematicamente pelas Eqs. (2.1), (2.2) e (2.3), respectivamente.

$$u = \left[ \begin{array}{cc} \left(1 - \frac{x}{b}\right) & \left(\frac{x}{b}\right) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \psi(y) \quad (2.1)$$

$$v = \left[ \begin{array}{cc} \left(1 - \frac{x}{b}\right) & \left(\frac{x}{b}\right) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{Bmatrix} \psi(y) \quad (2.2)$$

$$w = \left[ \begin{array}{cccc} \left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}\right) & x \left(1 - \frac{2x}{b} + \frac{x^2}{b^2}\right) & \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3}\right) & x \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{x}{b}\right) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix} \psi(y) \quad (2.3)$$

$\psi(y)$  representa a função de forma longitudinal. No caso de um perfil com extremidades simplesmente apoiadas,  $\psi(y) = \sin(r\pi Y/L)$ . A constante  $r$  denota o número de meias-ondas considerado ao longo do comprimento da faixa, normalmente assumido como 1.

As deformações de uma faixa (vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) são compostas de duas porções: uma referente ao comportamento de membrana (vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$ ) e outra à flexão de placa (vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}^B$ ). De acordo com a hipótese de estado plano de tensões, três componentes de deformação existem: a deformação transversal  $\varepsilon_{xx}$ , a deformação longitudinal  $\varepsilon_{yy}$  e a deformação cisalhante  $\gamma_{xy}$ . As expressões das deformações são dadas na Eq. (2.4). O índice  $M$  refere-se à membrana e o índice  $B$  à flexão de placa.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}^B = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^M + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^B = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z \partial^2 w / \partial x^2 \\ -z \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2z \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Aplicando a Eq. (2.4), as deformações podem ser escritas em função das derivadas das funções de forma (matriz  $\mathbf{B}$ ) e dos deslocamentos e rotações nodais (representados pelo vetor  $\mathbf{d}$ ):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{uv} \\ \mathbf{d}_{w\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Como observado, as deformações podem ser escritas de maneira desacoplada, ou seja, os GDLs membranais, representados por  $\mathbf{d}_{uv} = [u_i \quad v_i \quad u_{i+1} \quad v_{i+1}]^T$ , estão desacoplados dos

GDLs de flexão de placa, dados por  $\mathbf{d}_{w\theta} = [w_i \ \theta_i \ w_{i+1} \ \theta_{i+1}]^T$ . Conseqüentemente, a matriz  $\mathbf{B}$  pode ser escrita dividida em duas submatrizes:  $\mathbf{B}^M$  e  $\mathbf{B}^B$ .

Posteriormente, a matriz de rigidez elástica pode ser obtida através da definição de energia de deformação interna, e a matriz de rigidez geométrica pode ser encontrada a partir da energia potencial das trações aplicadas na faixa. Todo esse procedimento está descrito em Schafer e Ádány, 2006, e Li e Schafer, 2010b. No final, as matrizes de rigidez elástica e geométrica ( $\mathbf{k}_e$  e  $\mathbf{k}_g$ , respectivamente) podem ser escritas na forma dada pela Eq. (2.6), com os comportamentos membranal e de placa desacoplados.  $\mathbf{k}_e$  e  $\mathbf{k}_g$  são matrizes de dimensão  $8 \times 8$ , senda cada submatriz de dimensão  $4 \times 4$ .

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_e^M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_e^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_g^M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_g^B \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Caso as condições de contorno das extremidades da faixa sejam alteradas, outras funções de forma longitudinais  $\psi(y)$  devem ser usadas nas Eqs. (2.1), (2.2) e (2.3). Isso resulta em matrizes de rigidez diferentes na Eq. (2.6).

Como visto, para uma faixa finita individual, o comportamento membranal está desacoplado da flexão de placa. Entretanto, quando diversas faixas formam um perfil, resultando em um ângulo entre faixas, o acoplamento existe. Assim, no sistema de coordenadas global, os deslocamentos e a rotação são compatíveis em uma linha nodal comum a duas faixas.

Em coordenadas globais, as deformações do modelo são representadas pelo vetor  $\mathbf{d}$ , que contém os deslocamentos das linhas nodais. Assim,  $\mathbf{d}^T = [\mathbf{U}^T \ \mathbf{V}^T \ \mathbf{W}^T \ \mathbf{\Theta}^T]$ , onde, por exemplo,  $\mathbf{U}$  é um vetor que contém os deslocamentos  $U$  de todas as linhas nodais de um modelo com o da Figura 2.5(a). Sendo  $n$  o número de linhas nodais do modelo, o vetor  $\mathbf{d}$  terá dimensão  $4 \times n$ .

No CUFSM, é realizada uma análise linear de flambagem, ou seja, é resolvido um problema generalizado de autovalores:

$$\mathbf{K}_e \Phi = \Lambda \mathbf{K}_g \Phi \quad (2.7)$$

Na Eq. (2.7),  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez global do modelo e é função da função de forma longitudinal, que, por sua vez, depende do comprimento do perfil  $L$  e do número de meias-

ondas.  $\mathbf{K}_g$  é a matriz de rigidez geométrica global, sendo função da função de forma longitudinal e das trações  $T$  aplicadas nas extremidades.  $\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_i \ \dots \ \Phi_{4 \times n}]$  é a matriz de autovetores (que representam os modos de flambagem), onde  $(4 \times n)$  é o número de GDLs do modelo e  $n$  é o número de linhas nodais.  $\Phi_i$  é um autovetor genérico descrito em termos dos GDLs globais do modelo (dimensão  $4 \times n$ ), ou seja, é um vetor  $\mathbf{d}$  que satisfaz a Eq.(2.7).  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_{4 \times n}]$  é a matriz diagonal de autovetores. Assim, todas as matrizes da Eq. (2.7) têm dimensão igual a  $(4 \times n) \times (4 \times n)$ .

Sendo as matrizes de rigidez elástica e geométrica funções do comprimento  $L$ , o CUFSM permite a resolução da Eq. (2.7) para diversos valores de  $L$ . Considerando a função de forma de uma meia-onda senoidal, o comprimento analisado é, na verdade, o comprimento de meia-onda de um perfil com extremos simplesmente apoiados, já que esse tipo de perfil flamba com várias meias-ondas senoidais iguais ao longo de seu comprimento.

A Figura 2.6 mostra um exemplo de gráfico gerado pelo CUFSM, para o caso de um perfil C com enrijecedores de borda com extremidades simplesmente apoiadas, submetido à compressão uniforme.

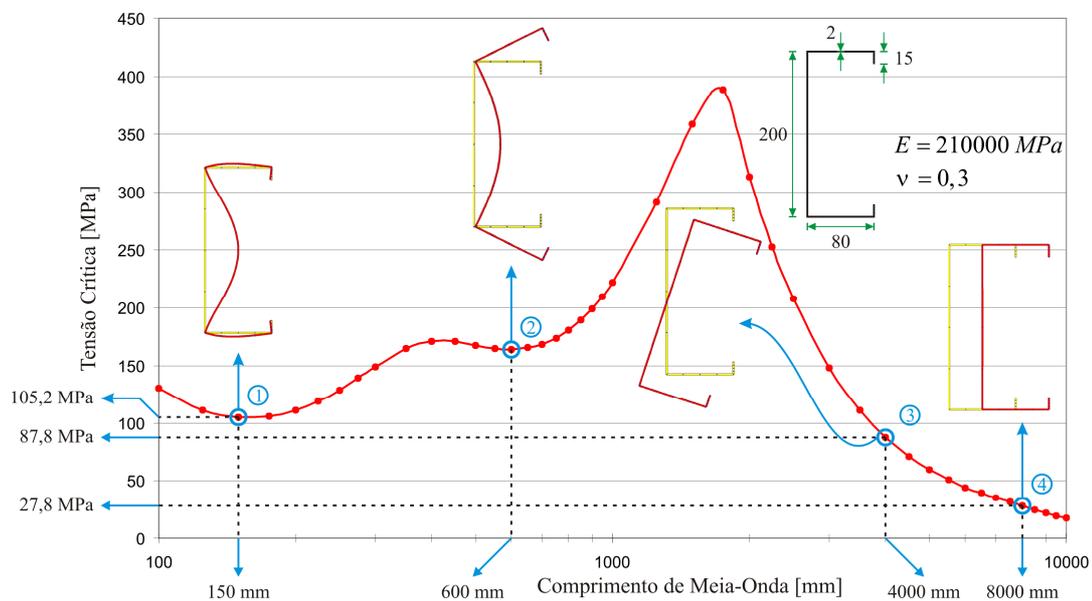


Figura 2.6. Exemplo de gráfico fornecido pelo CUFSM (dimensões em mm).

Na Figura 2.6, o ponto 1 corresponde a um modo de flambagem predominantemente local (segundo um critério visual), o ponto 2 a um modo distorcional, o ponto 3 a um modo

global de flexo-torção e o ponto 4 a um modo global de flexão em relação ao eixo de menor inércia.

Esse tipo de gráfico, uma vez definido o comprimento de um perfil analisado, permite determinar a tensão crítica de flambagem do mesmo: mínimo valor de tensão entre todos os comprimentos de meia-onda inferiores ao comprimento do perfil. Considerando, por exemplo, na Figura 2.6, o comprimento do perfil for de 600 mm, a flambagem estará associada à tensão crítica elástica de 105,2 MPa e a um modo local com comprimento de meia-onda igual a 150 mm, mesmo que esse ponto corresponda ao mínimo distorcional, ou seja, o perfil flamba localmente com quatro meias-ondas ao longo de seu comprimento. Para um perfil de 4000 mm, por exemplo, o modo característico é o global, com tensão crítica elástica de 87,8 MPa e comprimento de meia-onda igual ao comprimento do perfil, ou seja, o perfil flamba com apenas uma meia-onda de flambagem.

Como comentado, os modos de flambagem obtidos para cada comprimento de um gráfico como o da Figura 2.6 correspondem a uma interação entre os quatro tipos de flambagem e, mais especificamente, entre vários modos de deformação individuais da seção. Assim, na análise de faixas finitas realizada para um perfil com extremidades simplesmente apoiadas, todos os modos de deformação que contribuem para o modo de flambagem têm o mesmo comprimento de meia-onda.

### **2.3 Restrição do modelo numérico no contexto do Método das Faixas Finitas**

Nessa seção, é apresentado o procedimento proposto por Ádány e Schafer, 2006a, 2006b e 2008, que permite a decomposição da solução de um problema linear de flambagem de um perfil formado a frio prismático de seção aberta em modos puros de flambagem. A partir das hipóteses mecânicas que definem rigorosamente os tipos de modos de flambagem (Tabela 2.1), os campos de deformação do modelo numérico utilizado podem ser restringidos de acordo com um tipo específico ou um modo combinado.

Assim, os critérios da Tabela 2.1 são aplicados através de equações de restrição no campo de deformações do modelo. Essas equações são escritas na forma de matrizes de restrição para cada tipo de modo de flambagem, considerando os GDLs do modelo numérico.

As equações de restrição, quando aplicadas antes da análise, permitem que a solução seja focada em modo específico de flambagem e, assim, reduz os GDLs do problema. Essa aplicação de restrições é chamada de *decomposição modal*. Por outro lado, as equações

também podem ser aplicadas depois da análise, o que permite que um modo de flambagem seja identificado em termos da contribuição de cada tipo de modo de flambagem na solução (ou de cada modo de deformação individual da seção). Essa aplicação é definida como *identificação modal*, onde é realizada uma transformação da solução para uma base vetorial adequada.

O procedimento de restrição de Ádány e Schafer pode ser aplicado a qualquer método numérico geral que utilize análise estrutural matricial, como o MFF e MEF. As características do método utilizado, como montagem das matrizes de rigidez, são mantidas. A decomposição da solução do problema de flambagem é feita apenas através da restrição do modelo. Porém, os autores apresentam a formulação dentro do contexto do MFF, e, mais especificamente, utilizando o MFF empregado dentro do software CUFSM, o que resulta no chamado MFFr.

### 2.3.1 Problema de autovalores restringido

As hipóteses mecânicas dos critérios listados na Tabela 2.1, os quais definem os modos puros de flambagem, representam equações de restrição sobre os campos de deformações do modelo numérico (no caso, modelo de faixas finitas). Assim, é possível relacionar os GDLs gerais do problema, representados pelo vetor  $\mathbf{d}$ , com um número reduzido de GDLs que definem a deformação restringida de acordo com um modo puro dada pelo vetor  $\mathbf{d}_M$ . Em outras palavras, enquanto  $\mathbf{d}$  representa o campo geral de deslocamentos,  $\mathbf{d}_M$  representa deformações dentro de um subespaço que define um modo de flambagem. A relação entre  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{d}_M$  é dada através de uma matriz de restrição  $\mathbf{R}_M$ :

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_M \mathbf{d}_M \quad (2.8)$$

Na Eq. (2.8),  $\mathbf{d}$  é um modo de deformação geral com  $m = 4 \times n$  GDLs, enquanto  $\mathbf{d}_M$  é um modo de deformação num espaço reduzido de GDLs, dado genericamente por  $m_M$ . O índice  $M$  representa a restrição de acordo com um modo puro específico: G, D, L ou O. Assim, podem ser construídas *matrizes de restrição* associadas a cada tipo de modo de flambagem, ou seja,  $\mathbf{R}_G$ ,  $\mathbf{R}_D$ ,  $\mathbf{R}_L$  e  $\mathbf{R}_O$ . Cada matriz terá dimensão  $m \times m_M$ , sendo o número reduzido de GDLs  $m_M$  diferente para cada matriz. Deve-se notar que é possível fazer a restrição considerando uma combinação de modos puros, por exemplo, GD ou GDL.

Um modo de flambagem  $\Phi_i$  no problema generalizado de autovalores da Eq. (2.7) é um campo de deformações que pode ser restringido como na Eq. (2.8), ou seja, a matriz de autovetores pode ser escrita como:

$$\Phi = \mathbf{R}_M \Phi_M \quad (2.9)$$

Assim, introduzindo (2.9) em (2.7) e multiplicando por  $\mathbf{R}_M^T$  pela esquerda, tem-se:

$$\mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_e \mathbf{R}_M \Phi_M = \Lambda_M \mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_g \mathbf{R}_M \Phi_M \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K}_{e,M} \Phi_M = \Lambda_M \mathbf{K}_{g,M} \Phi_M \quad (2.11)$$

A Eq. (2.11) representa o problema de autovalores restringido.  $\mathbf{K}_{e,M} = \mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_e \mathbf{R}_M$  e  $\mathbf{K}_{g,M} = \mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_g \mathbf{R}_M$  são as matrizes de rigidez reduzidas do problema restringido.  $\Phi_M = [\Phi_{M,1} \quad \Phi_{M,2} \quad \cdots \quad \Phi_{M,i} \quad \cdots \quad \Phi_{M,m_M}]$  é a matriz com os autovetores ( $m_M$  modos de flambagem) no espaço reduzido de GDLs, e  $\Lambda_M$  é a matriz diagonal com os autovalores associados.

Depois da resolução da Eq. (2.11), os modos puros de flambagem podem ser descritos em termos dos GDLs gerais do modelo através da Eq. (2.9). Assim,  $\mathbf{d}_M$  (e cada  $\Phi_{M,i}$ ) pode ser interpretado como um vetor de coordenadas generalizadas, dependendo da base vetorial usada para a definição da matriz  $\mathbf{R}_M$ .

A aplicação da Eq. (2.8) define um subespaço dos GDLs gerais do modelo, o que faz com que o problema restringido da Eq. (2.11) seja resolvido dentro desse subespaço. Portanto, as colunas de  $\mathbf{R}_M$  podem ser consideradas como uma base vetorial que gera o espaço que define o modo M (*espaço M*). A base vetorial de  $\mathbf{R}_M$  não é única e transformações dentro do espaço M são possíveis. Conforme discutido na próxima seção, é possível definir  $\mathbf{R}_M$  de tal forma que suas colunas sejam *modos de deformação individuais* da seção que formem uma base para o espaço reduzido do modo de flambagem puro M. Os modos de deformação da seção têm significado físico e fazem com que os componentes do vetor  $\mathbf{d}_M$  sejam coeficientes de contribuição modal das colunas de  $\mathbf{R}_M$ .

É importante observar que, juntas, as matrizes  $\mathbf{R}_G$ ,  $\mathbf{R}_D$ ,  $\mathbf{R}_L$  e  $\mathbf{R}_O$  geram o espaço inteiro de GDLs do modelo numérico. Em outras palavras, elas representam uma transformação da solução da base original (*base nodal*) para uma base onde os espaços G, D,

L e O estão separados (*base modal*), conforme Eq. (2.12). Rigorosamente falando, os espaços G, D, L e O são, na verdade, subespaços do espaço GDLO.

$$\mathbf{d} = [\mathbf{R}_G \quad \mathbf{R}_D \quad \mathbf{R}_L \quad \mathbf{R}_O] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_G \\ \mathbf{d}_D \\ \mathbf{d}_L \\ \mathbf{d}_O \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

A dedução inicial das matrizes  $\mathbf{R}_G$ ,  $\mathbf{R}_D$ ,  $\mathbf{R}_L$  e  $\mathbf{R}_O$  é detalhada no Anexo A. Posteriormente, é possível fazer a transformação dessas bases vetoriais. Assim, na Eq. (2.12), se as colunas das matrizes  $\mathbf{R}_G$ ,  $\mathbf{R}_D$ ,  $\mathbf{R}_L$  e  $\mathbf{R}_O$  representarem modos de deformação da seção, é possível definir uma matriz de restrição genérica, utilizando quaisquer colunas dessas matrizes, ou seja, pode-se definir um problema de autovalores restringido, como o da equação (2.11) focado em qualquer modo de deformação individual (modo puro) ou em qualquer combinação de modos individuais (que pode ser um modo puro ou combinado).

Considerando as dimensões da matriz de restrição genérica  $\mathbf{R}_M$ , todas as matrizes da Eq. (2.11) terão dimensões  $m_M \times m_M$ , o que demonstra a redução do problema. O número de autovetores do problema de autovalores restringido será igual à dimensão do subespaço considerado. A dimensão de cada subespaço é dependente da seção transversal e da discretização utilizada no MFF, sendo discutida detalhadamente no Anexo A. De acordo com a definição da Figura 2.5(a), sendo  $nm$  o número de nós principais e  $ns$  o número de subnós (tal que  $n = nm + ns$ ), existirão 4 modos G,  $nm - 4$  modos D,  $n + ns + 2$  modos L e  $2(n - 1)$  modos O.

Os autovetores do problema restringido da Eq. (2.11) focado em determinado tipo de modo de flambagem são chamados de modos puros de flambagem, e os autovalores correspondentes fornecem as cargas críticas desses modos puros. Métodos de projeto como o MRD estão calibrados para cargas críticas de flambagem fornecidas pelo MFF ou pelo MEF sem restrições. Por isso, por enquanto, as soluções focadas em modos puros de flambagem têm utilidade prática somente para identificar qual o comprimento de meia-onda a ser considerado numa análise utilizando o MFF ou o MEF sem restrições [Ádány e Schafer, 2008].

Uma observação deve ser feita em relação à dimensão do espaço D, que é dada por  $nm - 4$ . Essa fórmula só é válida caso resulte em um número não negativo. Assim, a fórmula

falha para seções com menos de três placas ou menos de quatro linhas nodais, como uma cantoneira. O procedimento para abordar esse tipo de seção é discutido em Ádány, 2004.

### 2.3.2 Identificação modal

As matrizes de restrição também podem ser usadas para classificar a solução do problema linear de flambagem fornecida pelo MFF quanto à contribuição dos diferentes tipos de flambagem ou, ainda, quanto à contribuição dos diferentes modos de deformação da seção. Essa aplicação é chamada de identificação modal.

Para o caso geral, ou seja, o cálculo da contribuição dos diferentes modos de deformação individuais, é necessária a utilização de bases vetoriais ortonormais, ou seja, ortogonalização e normalização das bases vetoriais precisam ser feitas.

Primeiramente, os subespaços G, D, L e O devem ser separados conforme Eq. (2.12) (as deduções das matrizes de restrição são dadas no Anexo A). Cada base vetorial é composta por vetores linearmente independentes e, em geral, podem-se definir infinitas bases para os subespaços. Portanto, para o cálculo da contribuição dos modos, deseja-se determinar bases ortonormais, mas mantendo a separação dos subespaços. Também é conveniente que as bases tenham significado físico.

Sabe-se que autovetores (Eq. (2.7) ou Eq. (2.11)) são ortogonais entre si. Para os autovetores do problema restringido a um subespaço M, as condições de ortogonalidade são expressas por:

$$\Phi_{M,i}^T \mathbf{K}_{e,M} \Phi_{M,j} \begin{cases} \neq 0 & \text{se } i = j \\ = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad \Phi_{M,i}^T \mathbf{K}_{g,M} \Phi_{M,j} \begin{cases} \neq 0 & \text{se } i = j \\ = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.13)$$

Quando o problema de autovalores restringido (Eq. (2.11)) é resolvido dentro de um subespaço específico (G, D, L ou O), os diversos autovetores do problema geram o mesmo espaço que as colunas da matriz de restrição. Portanto, eles formam uma nova base vetorial para o mesmo espaço considerado, sendo que os vetores são ortogonais entre si com relação às matrizes de rigidez elástica e geométrica. Agora, se a Eq. (2.11) for resolvida uma vez para cada subespaço, serão obtidas quatro bases vetoriais ortogonais, sendo que os espaços G, D, L e O continuam separados. Além disso, esse procedimento define bases com significado físico.

Deve-se observar que a condição de ortogonalidade é satisfeita dentro de cada subespaço, mas os vetores de um subespaço não são necessariamente ortogonais a todos os

vetores de outros subespaços (com relação às matrizes de rigidez). Mesmo assim, os espaços estão separados com relação às deformações permitidas em cada um.

Como os autovetores de  $\Phi_M$  geram o espaço M, qualquer modo de deformação no espaço M (vetor  $\mathbf{d}_M$  da Eq. (2.8)) pode ser escrito como uma combinação linear dos mesmos:

$$\mathbf{d}_M = \Phi_M \mathbf{c}_M \quad (2.14)$$

onde  $\Phi_M$  é uma matriz  $m_M \times m_M$  contendo os modos ortogonais, e  $\mathbf{c}_M$  é um vetor de dimensão  $m_M$  cujos componentes definem as contribuições dos modos.

Substituindo (2.14) em (2.8), pode-se expressar o modo de deformação  $\mathbf{d}_M$  no espaço de GDLs gerais do MFF:

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_M \mathbf{d}_M = \mathbf{R}_M \Phi_M \mathbf{c}_M = \mathbf{R}_M^O \mathbf{c}_M \quad (2.15)$$

Na Eq. (2.15), a matriz  $\Phi_M$  pode ser interpretada como uma matriz de transformação, que transforma a base vetorial de  $\mathbf{R}_M$  numa base ortogonal  $\mathbf{R}_M^O$  (também de dimensão  $m \times m_M$ ), cujas colunas são os modos ortogonais que geram o espaço M, mas agora expressos em função dos GDLs do MFF. Portanto, qualquer vetor  $\mathbf{d}$  que pertença ao espaço M pode ser escrito como uma combinação linear de vetores ortogonais.

Como mostrado através da Eq. (2.12), sabe-se que, juntos, os espaços G, D, L e O geram o espaço inteiro de GDLs gerais do MFF. Resolvendo o problema de autovalores restringido para os quatro subespaços, encontram-se quatro bases vetoriais ortogonais  $\Phi_G$ ,  $\Phi_D$ ,  $\Phi_L$  e  $\Phi_O$ . Com o auxílio das Eqs. (2.14) e (2.15), pode-se reescrever (2.12) como:

$$\mathbf{d} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{R}_G^O & \mathbf{R}_D^O & \mathbf{R}_L^O & \mathbf{R}_O^O \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{c}_G \\ \mathbf{c}_D \\ \mathbf{c}_L \\ \mathbf{c}_O \end{array} \right\} = \mathbf{R}_{GDLO}^O \mathbf{c}_{GDLO} \quad (2.16)$$

Assim, qualquer modo de deformação geral pode ser escrito como uma combinação linear das colunas de  $\mathbf{R}_{GDLO}^O$ , que são modos de deformação ortogonais definidos de forma que os espaços G, D, L e O estão separados. Finalmente, a contribuição de cada modo de deformação individual e de cada tipo de flambagem (G, D, L e O) pode ser encontrada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{c}_{\text{GDLO}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_{\text{G}} \\ \mathbf{c}_{\text{D}} \\ \mathbf{c}_{\text{L}} \\ \mathbf{c}_{\text{O}} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{\text{GDLO}}^{\text{O}} \mathbf{d} \quad (2.17)$$

onde os vetores  $\mathbf{c}_{\text{G}}$ ,  $\mathbf{c}_{\text{D}}$ ,  $\mathbf{c}_{\text{L}}$  e  $\mathbf{c}_{\text{O}}$  fornecem a contribuição de cada tipo de flambagem na solução geral  $\mathbf{d}$  do MFF. Devido à ortogonalidade das colunas de  $\mathbf{R}_{\text{G}}^{\text{O}}$ ,  $\mathbf{R}_{\text{D}}^{\text{O}}$ ,  $\mathbf{R}_{\text{L}}^{\text{O}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{O}}^{\text{O}}$ , a Eq. (2.17) sempre pode ser resolvida.

Como a solução do problema de autovalores da Eq. (2.11) depende do carregamento considerado, diversas bases vetoriais ortogonais existem. Como o único foco é a ortogonalidade, assume-se uma carga de compressão uniformemente distribuída. Assim, os vetores da base vetorial obtida resolvendo o problema de autovalores restringido da Eq. (2.11) para uma carga de compressão uniforme (axial) serão chamados de *modos axiais ortogonais*. Por outro lado, os modos inicialmente definidos para a obtenção das matrizes  $\mathbf{R}_{\text{G}}$ ,  $\mathbf{R}_{\text{D}}$ ,  $\mathbf{R}_{\text{L}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{O}}$  são denominados *modos naturais* [Ádány e Schafer, 2008], cuja definição é tratada detalhadamente no Anexo A.

Os modos axiais ortogonais garantem um significado físico para cada modo de deformação individual das matrizes de restrição. Na verdade, os modos naturais globais, como definidos no Anexo A, já tinham significado físico e eram iguais aos utilizados na GBT. Porém, para os modos distorcionais e locais, somente os modos axiais ortogonais assemelham-se aos usados na GBT. Para uma comparação mais detalhada dos modos aqui definidos e dos modos usados na GBT, deve-se considerar a dependência do comprimento do perfil.

Para os modos naturais globais e distorcionais, observa-se que os deslocamentos transversais dependem linearmente do comprimento do perfil (presença do parâmetro  $k_r = r\pi/L$ , definido no Anexo A). Na verdade, a distribuição de deslocamentos transversais não é afetada pelo comprimento do perfil, apenas a razão entre deslocamentos transversais e longitudinais (empenamento) é influenciada. O comportamento dos modos naturais globais e distorcionais motivou a definição de modos de deformação para um comprimento unitário ( $k_r = 1$ ), para que pudessem ser comparados com os da GBT. Esse tópico é discutido em Ádány e Schafer, 2006b, Ádány e Schafer, 2008, e Ádány et al., 2006a.

Os modos axiais ortogonais são, em geral, dependentes do comprimento do perfil, já que são obtidos através do problema de autovalores restringido, que considera as matrizes de rigidez, as quais dependem do comprimento. Para cada comprimento do perfil, o modo de flambagem será uma diferente combinação de modos naturais. Conseqüentemente, tanto a distribuição de empenamento quanto a distribuição de deslocamentos transversais vão variar com o comprimento. Mesmo assim, alguns modos axiais ortogonais globais e distorcionais podem ser iguais aos modos naturais, conforme mostrado na seção 2.3.4.

No caso dos modos locais, não existe empenamento. Para os modos axiais ortogonais locais, a distribuição dos deslocamentos transversais sempre muda com o comprimento do perfil. Mesmo assim, essa dependência pode ser fraca.

Deve-se notar que não existem outros modos (associados à extensão transversal e ao cisalhamento) na GBT.

### 2.3.3 Normalização das bases vetoriais

Para um cálculo apropriado da contribuição dos modos de deformação individuais considerados num problema restringido, os vetores das bases devem ser normalizados, já que autovetores são arbitrariamente escalados. Dois esquemas de normalização serão tratados nesse trabalho: (1) norma vetorial (NV) e (2) norma do trabalho externo (NTE). Esses esquemas são discutidos, por exemplo, em Li et al., 2011.

Cada vetor  $\Phi_{M,i}$  da base vetorial do subespaço M (colunas da matriz  $\Phi_M$ ) é normalizado de acordo com uma das seguintes formas:

$$\begin{aligned} \text{NV: } \Phi_{M,i}^T \Phi_{M,i} &= 1 \\ \text{NTE: } \Phi_{M,i}^T \mathbf{K}_{g,M} \Phi_{M,i} &= 1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Portanto, cada vetor  $\Phi_{M,i}$  inicialmente definido resolvendo a equação (2.11) deve ser escalado como mostra a equação (2.19). Nota-se que os vetores assim escalados satisfazem as respectivas condições dadas em (2.18).

$$\begin{aligned} \text{NV: } \frac{\Phi_{M,i}}{\sqrt{\Phi_{M,i}^T \Phi_{M,i}}} \\ \text{NTE: } \frac{\Phi_{M,i}}{\sqrt{\Phi_{M,i}^T \mathbf{K}_{g,M} \Phi_{M,i}}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

A NV é o esquema de normalização mais simples. Apesar da simples implementação, a norma vetorial apresenta características que, a princípio, podem ser desvantagens: (1) a base vetorial resultante dessa normalização é dependente da discretização da seção, e (2) os componentes relacionados aos GDLs de rotação têm uma influência pequena em relação aos componentes de translação, já que são termos de magnitude usualmente muito menor. Já a NTE não apresenta as supostas desvantagens citadas e, além disso, possui um significado físico, também podendo ser facilmente generalizada para outros métodos numéricos como o MEF.

Com todas as bases normalizadas, os vetores  $\mathbf{c}_G$ ,  $\mathbf{c}_D$ ,  $\mathbf{c}_L$  e  $\mathbf{c}_O$  fornecem a contribuição de cada tipo de flambagem na solução geral  $\mathbf{d}$  do MFF. Para calcular a contribuição de uma classe inteira de modos de flambagem, ou seja, a contribuição de todos os modos globais, distorcionais, locais ou outros na solução, normalmente utiliza-se a norma euclidiana [Li et al., 2011]. Assim, a participação  $p_M$  de uma classe de flambagem na solução é dada por:

$$p_M = \frac{\|\mathbf{c}_M\|_2}{\|\mathbf{c}_G\|_2 + \|\mathbf{c}_D\|_2 + \|\mathbf{c}_L\|_2 + \|\mathbf{c}_O\|_2} \quad (2.20)$$

onde, por exemplo,  $\|\mathbf{c}_M\|_2 = \sqrt{\sum_i c_{M,i}^2}$ , sendo  $c_{M,i}$  um componente do vetor  $\mathbf{c}_M$ .

Depois de escolhido o esquema de normalização, as Eqs. (2.15), (2.16) e (2.17) podem ser aplicadas para executar a identificação modal.

### 2.3.4 Exemplo de bases naturais e axiais ortogonais

Para ilustrar as definições das bases vetoriais das seções anteriores, será considerado o perfil da Figura 2.7. Por simplicidade, discretizou-se o perfil apenas com nós principais.

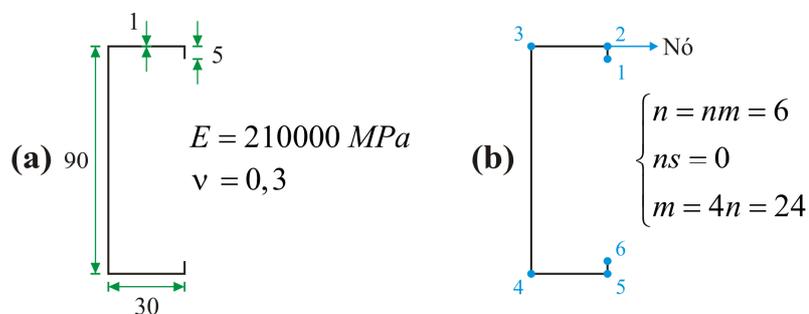


Figura 2.7. (a) Dimensões (em mm) e propriedades mecânicas do perfil utilizado no exemplo numérico. (b) Discretização adotada.

A Figura 2.8 mostra as bases vetoriais do CUFSM, definidas sem o processo de obtenção dos modos axiais ortogonais. Os vetores dessas bases são, então, os chamados modos naturais, formando as *bases naturais* (abordadas no Anexo A).

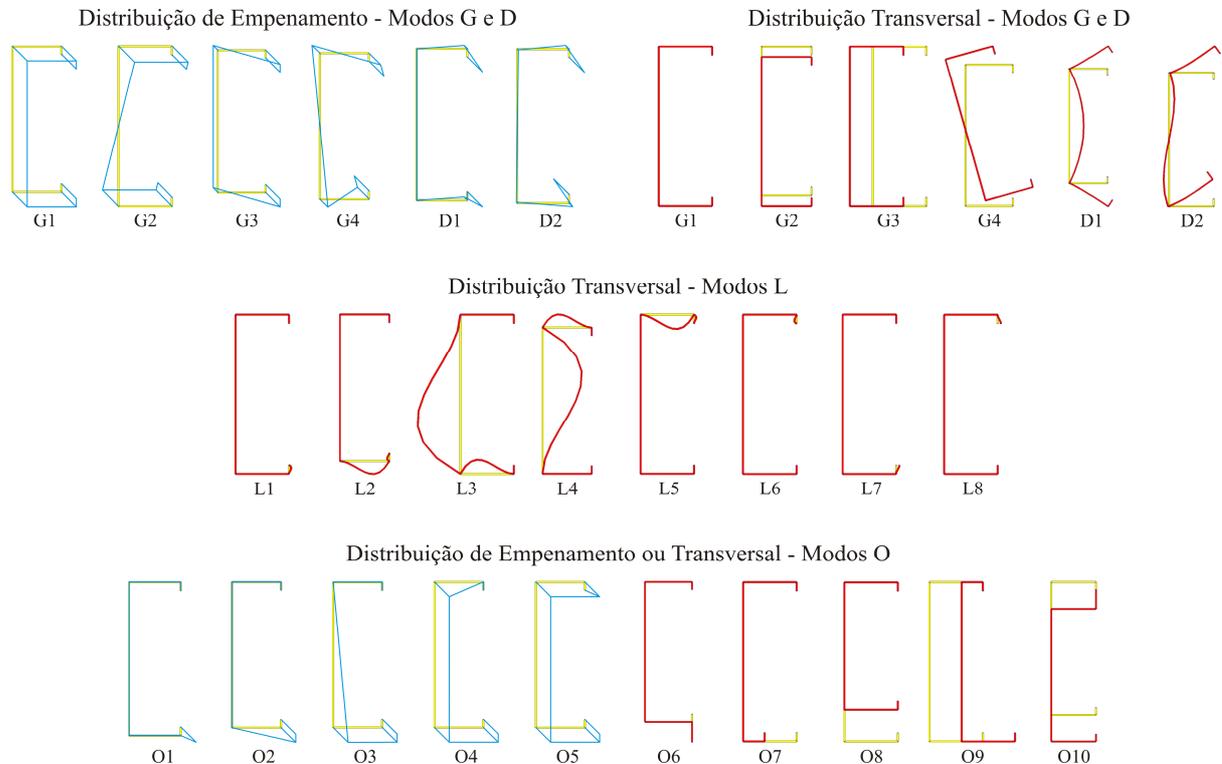


Figura 2.8. Bases vetoriais naturais do CUFSM para os subespaços G, D, L e O, para o perfil da Figura 2.7 (distribuições de deslocamentos com magnitude arbitrária).

A base natural para o modo global é a mesma da GBT. Para o modo distorcional, a base natural é obtida aplicando as condições de ortogonalidade da distribuição de empenamento (ver Anexo A). Para o modo local, a base natural é obtida aplicando deslocamentos unitários nos GDLs que definem um modo de deformação no espaço local. Finalmente, a base natural para os outros modos é obtida através da aplicação de extensões transversais membranais e cisalhamentos membranais unitários, sendo que existe mais de uma forma de se aplicarem tais deformações.

Na Figura 2.8, a cada modo está atribuído um número. O número de modos de uma base depende da dimensão do subespaço considerado. Os modos G e D dependem apenas no número de nós principais, enquanto os modos L e O dependem também da discretização do perfil. Na figura, os modos estão escalados arbitrariamente, ou seja, não foi utilizado nenhum esquema de normalização. Deve-se notar que, para os modos L, não há distribuição de

empenamento. Conforme a definição da base natural de modos O, os modos dessa base não apresentam empenamento e deformações transversais simultaneamente.

Como comentado na seção 2.3.2 e no Anexo A, nas bases naturais dos espaços G e D, a razão entre deslocamentos transversais e longitudinais (empenamento) varia linearmente com o comprimento do perfil. Porém, tanto a distribuição de empenamento quanto as distribuições de deslocamentos transversais permanecem inalteradas quando consideradas isoladamente.

Utilizando o procedimento de ortogonalização apresentado na seção 2.3.2, obtêm-se bases de modos axiais ortogonais. A Figura 2.9 mostra as chamadas *bases axiais ortogonais* para os espaços G, D e L, retiradas do CUFSM. Em geral, as distribuições de deslocamentos dos modos axiais ortogonais dependem do comprimento, já que, para cada comprimento do perfil, os modos axiais ortogonais serão uma diferente combinação de modos naturais (problema de autovalores). Portanto, na Figura 2.9, as distribuições estão sujeitas a pequenas alterações de acordo com o comprimento considerado. Na figura, a magnitude de cada distribuição é arbitrária.

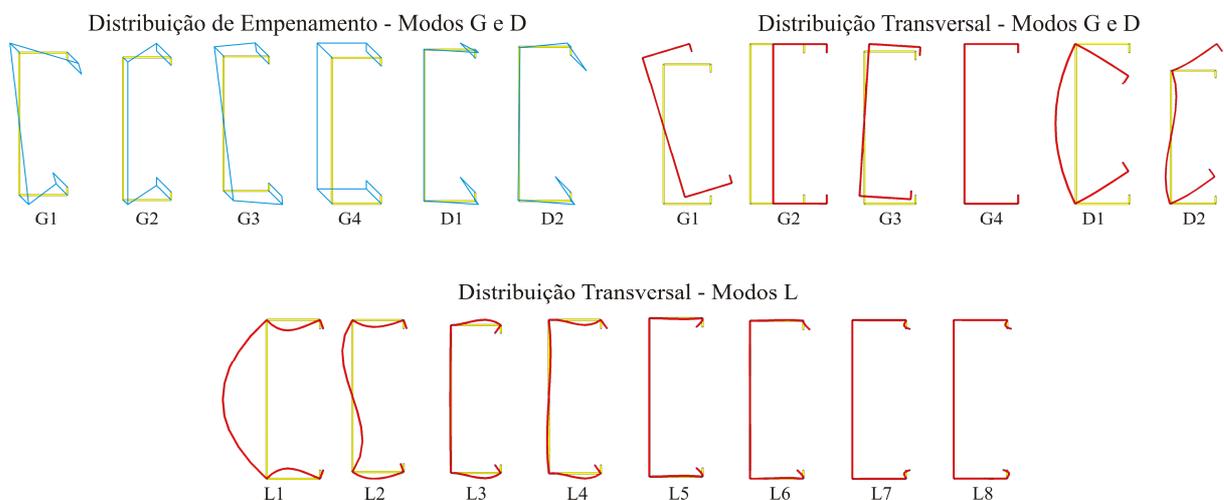


Figura 2.9. Bases axiais ortogonais do CUFSM para os subespaços G, D e L, para o perfil da Figura 2.7 (distribuições de deslocamentos com magnitude arbitrária, sujeitas a pequenas alterações de acordo com o comprimento).

Observa-se que os modos axiais ortogonais sempre envolvem deformação de toda a seção. Esses modos têm significado físico e assemelham-se aos modos da GBT. Ao contrário dos modos naturais globais, os modos axiais ortogonais incluem modos de flexo-torção. Também é interessante observar que, para o perfil utilizado como exemplo, os modos de deformação da base natural do espaço D (D1 e D2 da Figura 2.8) são idênticos aos modos da

base axial ortogonal para o mesmo espaço (D1 e D2 da Figura 2.9). O mesmo acontece com o modo de flexão em relação ao eixo de menor inércia (G2). Assim, os modos axiais ortogonais D1, D2 e G2 não têm distribuições de deslocamentos dependentes do comprimento; apenas a razão entre deslocamentos transversais e longitudinais varia (linearmente) com o comprimento.

Para a obtenção dos modos de deformação axiais ortogonais do espaço O, pode-se fazer a ortogonalização dentro do espaço inteiro de modos O (resultando em modos que envolvam simultaneamente cisalhamento e extensão membranais), ou dividir a base de modos naturais O em uma base de modos envolvendo apenas empenamento (cisalhamento membranal) e outra envolvendo somente extensão membranal e, posteriormente, aplicar a ortogonalização dentro de cada uma dessas bases, o que dá um maior apelo físico aos modos axiais ortogonais O. Ainda existe uma abordagem mais matemática para se definirem os modos axiais ortogonais O, tratada no Anexo A. De qualquer forma, os modos O não possuem significado físico tão claro a ponto de serem considerados individualmente.

A diferença entre as bases naturais e as bases axiais ortogonais é explicada matematicamente no Anexo B, considerando como exemplo os modos globais.

## **2.4 Método das Faixas Finitas Restringido (MFFr) para condições de contorno gerais**

O MFF pode ser naturalmente estendido para condições de contorno diferentes de simples apoios selecionando-se funções de forma longitudinais harmônicas apropriadas. Além disso, em geral, diversos componentes harmônicos devem ser considerados na análise. Baseando-se em funções de forma longitudinais propostas por Bradford e Azhari, 1995, e utilizando a notação de Cheung e Tham, 1998, a generalização do MFFr é apresentada em Li e Schafer, 2009, 2010a e 2010b.

Portanto, como comentado na seção 2.2, o MFF geral apresentado por Cheung e Tham, utiliza séries harmônicas como funções de forma longitudinais. Funções polinomiais interpolam a variação dos deslocamentos nas direções transversais da seção. Mais especificamente, para os deslocamentos membranais, são utilizadas funções de forma transversais lineares, e, para os deslocamentos de flexão, são empregadas funções de forma transversais cúbicas.

Considerando a forma geral dos campos de deslocamentos de uma faixa finita, as Eqs. (2.1), (2.2) e (2.3) podem ser reescritas como:

$$u = \sum_{m=1}^q \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \left( \frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_i^{[m]} \\ u_{i+1}^{[m]} \end{Bmatrix} \psi_{[m]}(y) \quad (2.21)$$

$$v = \sum_{m=1}^q \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \left( \frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} v_i^{[m]} \\ v_{i+1}^{[m]} \end{Bmatrix} \psi'_{[m]}(y) \frac{L}{m\pi} \quad (2.22)$$

$$w = \sum_{m=1}^h \left[ \left( 1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) x \left( 1 - \frac{2x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \right) \left( \frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) x \left( \frac{x^2}{b^2} - \frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} w_i^{[m]} \\ \theta_i^{[m]} \\ w_{i+1}^{[m]} \\ \theta_{i+1}^{[m]} \end{Bmatrix} \psi_{[m]}(y) \quad (2.23)$$

onde  $m$  é o número harmônico (ou número de meias-ondas) do componente harmônico,  $q$  é o número máximo de meias-ondas considerado na análise (inteiro positivo), e  $\psi_{[m]}(y)$  é o componente da função de forma longitudinal correspondente ao número de meias-ondas  $m$ . Nota-se que, no MFF geral, existem GDLs associados a cada componente harmônico  $m$ . Portanto, cada linha nodal de uma faixa finita terá  $4 \times q$  GDLs. Convém observar que, nas seções 2.2 e 2.3, o número de meias-ondas era denotado por  $r$ , e  $m$  referia-se ao número de GDLs associado a um componente harmônico.

Nesse trabalho, duas configurações das condições de contorno das extremidades são analisadas: perfil simplesmente apoiado/simplesmente apoiado (S-S) e perfil engastado/engastado (C-C). Para esses dois casos, um componente harmônico  $m$  da função de forma longitudinal é dado por:

$$\begin{aligned} \text{S-S: } \psi_{[m]} &= \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \\ \text{C-C: } \psi_{[m]} &= \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Funções de forma para outras condições de contorno podem ser encontradas em Bradford e Azhari, 1995, e Li e Schafer, 2009.

O problema linear de flambagem para condições de contorno gerais tem a mesma forma da Eq. (2.7). Entretanto, o número de GDLs do problema é aumentado quando se consideram diversos componentes harmônicos da função de forma longitudinal. O número de GDLs do MFF convencional (para perfis simplesmente apoiados) é multiplicado pelo número de componentes harmônicos considerados  $q$ . Portanto, o vetor  $\mathbf{d}$  do MFF geral assume a seguinte forma:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{[1]} \\ \mathbf{d}_{[2]} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{[m]} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{[q]} \end{Bmatrix}, \text{ onde } \mathbf{d}_{[m]} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{[m]} \\ \mathbf{V}_{[m]} \\ \mathbf{W}_{[m]} \\ \mathbf{\Theta}_{[m]} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Em (2.25), por exemplo,  $\mathbf{d}_{[m]}$  representa os deslocamentos das linhas nodais referentes ao componente harmônico  $m$ .  $\mathbf{U}_{[m]}$  é um vetor que contém os deslocamentos  $U$  de todas as linhas nodais do modelo, referentes ao componente  $m$ , e  $\mathbf{V}_{[m]}$ ,  $\mathbf{W}_{[m]}$  e  $\mathbf{\Theta}_{[m]}$  são similarmente definidos. Assim, o vetor  $\mathbf{d}_{[m]}$  tem dimensão  $4 \times n$ , o que resulta numa dimensão de  $(4 \times n) \times q$  para o vetor  $\mathbf{d}$ .

Conseqüentemente, as matrizes de rigidez elástica e geométrica de (2.7) também consideram os diversos componentes harmônicos, assumindo a seguinte forma:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{[11]} & \mathbf{K}_e^{[12]} & \dots & \mathbf{K}_e^{[1m]} & \dots & \mathbf{K}_e^{[1q]} \\ & \mathbf{K}_e^{[22]} & \dots & \mathbf{K}_e^{[2m]} & \dots & \mathbf{K}_e^{[2q]} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & \mathbf{K}_e^{[mm]} & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{K}_e^{[qq]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_g^{[11]} & \mathbf{K}_g^{[12]} & \dots & \mathbf{K}_g^{[1m]} & \dots & \mathbf{K}_g^{[1q]} \\ & \mathbf{K}_g^{[22]} & \dots & \mathbf{K}_g^{[2m]} & \dots & \mathbf{K}_g^{[2q]} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & \mathbf{K}_g^{[mm]} & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{K}_g^{[qq]} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Na Eq. (2.26), cada submatriz possui um índice  $[rs]$ , onde  $r$  e  $s$  representam dois componentes harmônicos quaisquer. Quando  $r \neq s$ , a submatriz representa a interação entre dois componentes harmônicos diferentes. A dimensão de cada submatriz é  $(4 \times n) \times (4 \times n)$  e, conseqüentemente,  $\mathbf{K}_e$  e  $\mathbf{K}_g$  têm dimensão  $[(4 \times n) \times q] \times [(4 \times n) \times q]$ . A derivação detalhada dessas matrizes é tratada em Li e Schafer, 2010b.

Para perfis com extremidades simplesmente apoiadas (S-S), as submatrizes  $\mathbf{K}_e^{[rs]}$  e  $\mathbf{K}_g^{[rs]}$  são nulas quando  $r \neq s$ , resultando em matrizes de rigidez elástica e geométrica diagonais em bloco na Eq. (2.26). Em outras palavras, não existe interação entre componentes harmônicos quando o perfil é simplesmente apoiado. Portanto, ao resolver a Eq. (2.7), cada



Finalmente, independente do uso de bases desacopladas ou acopladas, os modos de flambagem resultantes da Eq. (2.7) ou da Eq. (2.11) sempre terão contribuição de diversos componentes harmônicos quando as extremidades do perfil não forem simplesmente apoiadas, de acordo com as submatrizes fora da diagonal de (2.26).

## **2.5 Fundamentos da Teoria Generalizada de Vigas (GBT)**

A GBT é um método de análise aplicável a perfis de parede fina, desenvolvido para levar em conta a distorção da seção. A teoria busca, ao mesmo tempo, unificar e estender teorias clássicas de análise de perfis formados a frio. Todos os usuais modos de deformação de corpo rígido (extensão/encurtamento axial, flexão em torno dos dois eixos principais da seção e torção) e os modos de deformação de alta ordem (envolvendo distorção da seção e flexão transversal) são tratados de forma idêntica.

A GBT foi desenvolvida por Schardt, 1989, mas a apresentação de seus conceitos mais importantes de forma concisa foi feita por Davies e Leach, 1994a e 1994b. Esses últimos autores publicaram diversos trabalhos utilizando a GBT na análise de flambagem de perfis formados a frio. Posteriormente, Silvestre e Camotim, 2002a e 2002b, voltaram a apresentar a GBT de forma mais detalhada, estendendo a teoria a materiais ortotrópicos.

Os fundamentos aqui apresentados aplicam-se à análise de perfis formados a frio prismáticos de seção aberta sem ramificações, considerando um material isotrópico. A GBT pode ser aplicada tanto em problemas de primeira ordem quanto em problemas de segunda ordem, ou seja, pode ser usada para a análise linear elástica de perfis formados a frio e, com a inclusão de efeitos de segunda ordem associados à não-linearidade geométrica, pode ser empregada em problemas de flambagem (lineares ou não). Naturalmente, como comentado em Davies e Leach, 1994b, a GBT também pode ser estendida para análises de terceira ordem (estudo do comportamento pós-flambagem, por exemplo), utilizando a teoria de grandes deslocamentos, mas isso está além do objetivo dessa pesquisa.

A GBT permite que se trabalhe com modos de deformação característicos de maneira independente, sendo possível escolher quais os modos serão utilizados na análise. Assim, a GBT é uma ferramenta muito prática e útil para a investigação do comportamento de perfis formados a frio. Em análises de primeira ordem, as equações de equilíbrio são totalmente desacopladas e a solução por superposição de efeitos é válida. Em análises de segunda ordem,

existe o acoplamento causado pelos efeitos de segunda-ordem, ou seja, pode ocorrer interação entre os modos de deformação considerados na análise.

Na GBT, os deslocamentos da seção são expressos como uma combinação de modos de deformação característicos. Esses modos são determinados analisando-se somente a seção transversal do perfil. Da mesma forma que no MFF, são utilizadas funções de forma para expressar a variação de deslocamentos ao longo do comprimento do perfil. Assim, a *discretização modal* realizada na seção, de onde são obtidos os modos de deformação característicos utilizados para expressar os campos de deslocamentos da seção, é a característica mais importante da GBT. É utilizado o conceito de *funções elementares*, as quais permitem expressar qualquer modo de deformação da seção, constituindo a característica unificadora da GBT de tratar todos os modos da mesma forma.

Assim, a GBT é composta de duas etapas distintas: (1) a análise da seção transversal, para a determinação dos modos de deformação característicos e as propriedades relacionadas cada um (matrizes do problema), e (2) a solução de um sistema de equações de equilíbrio de um problema em particular (primeira ou segunda ordem).

Primeiramente, considera-se o perfil mostrado na Figura 2.7(a). A Figura 2.10(a) mostra o mesmo perfil (por simplicidade, discretizado apenas com nós principais) e o sistema de coordenadas local com a notação normalmente utilizada na GBT.

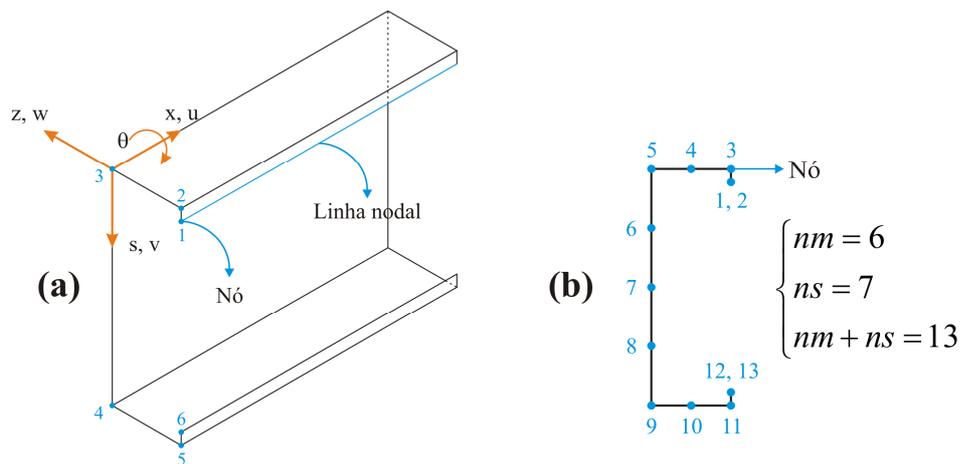


Figura 2.10. (a) Sistema de coordenadas local da GBT e GDLs (discretização considerando apenas nós principais). (b) Discretização utilizando subnós.

Os eixos  $s$  e  $z$  definem o plano transversal de um elemento de placa do perfil, e o eixo  $x$  representa a direção longitudinal. Na Figura 2.10, o sistema de coordenadas local está ilustrado para o elemento de placa compreendido entre os nós 3 (inicial) e 4 (final).

Comparando o sistema de coordenadas local da GBT com o utilizado no MFFr (Figura 2.4), nota-se que o eixo  $x$  da GBT equivale ao eixo  $y$  do MFFr, o eixo  $s$  da GBT equivale ao eixo  $x$  do MFFr, enquanto o eixo  $z$  é comum para os dois métodos. Assim, na GBT, o campo de deslocamentos transversais de um elemento de placa fica definido pelos GDLs  $v$ ,  $w$  e  $\theta$ , e o empenamento é dado pelo GDL  $u$ .

A Figura 2.10(b) mostra o exemplo de discretização da seção utilizada para a definição das funções elementares, que é o primeiro passo para a determinação dos modos de deformação característicos. Conforme a figura, o número de nós principais  $nm$  é igual a 6, e o número de subnós  $ns$  vale 7. De acordo com a notação do MFFr (ver Figura A.1), existiriam apenas 5 subnós. Porém, na GBT, os nós principais externos do MFFr são considerados duas vezes: uma vez como um nó principal e outra vez como um subnó. Conforme discutido a seguir, a dimensão do espaço vetorial utilizado na GBT depende dessa consideração, sendo dada por  $nm + ns$  (igual a 13 nesse exemplo). Na verdade, no MFFr, de certa forma, os nós principais externos também são tratados como subnós (ver agrupamento dos GDLs da Figura A.2).

A GBT é baseada na teoria de placas finas e considera certas hipóteses mecânicas para as deformações membranais. Essas hipóteses são as mesmas descritas no Critério 1 da seção 2.1, utilizado no MFFr, ou seja, deformações transversais membranais e as deformações cisalhantes membranais de um elemento de placa são nulas (na nova notação,  $\varepsilon_{ss}^M = \gamma_{xs}^M = 0$ ). Além disso, o empenamento  $u$  é continuamente linear em  $s$  dentro de um elemento de placa, ou seja, entre dois nós principais.

Os campos de deslocamentos são representados com um produto de duas funções de uma única variável: uma dependente de  $x$  (coordenada do eixo do perfil) e outra dependente de  $s$  (coordenada da linha média da seção):

$$u(x, s) = u(s)\psi_{,x}(x); \quad v(x, s) = v(s)\psi(x); \quad w(x, s) = w(s)\psi(x) \quad (2.28)$$

onde  $u(s)$ ,  $v(s)$  e  $w(s)$  são as distribuições de deslocamentos na seção,  $\psi(x)$  é a função de amplitude, que representa a variação da amplitude dos deslocamentos da seção ao longo do comprimento do perfil, e  $\psi_{,x}(x)$  é a derivada da função de amplitude. A presença de  $\psi_{,x}(x)$  na Eq. (2.28) vem da hipótese mecânica de deformações cisalhantes membranais nulas [Silvestre e Camotim, 2002a].

As distribuições de deslocamentos na seção  $u(s)$ ,  $v(s)$  e  $w(s)$  podem ser escritas em termos das funções elementares. É definida uma função elementar para cada nó utilizado na discretização da seção (Figura 2.10(b)). O tipo de função elementar ( $\bar{u}_k(s)$  ou  $\bar{w}_k(s)$ ) depende da natureza do nó  $k$  considerado, ou seja, se o nó é principal ou se é um subnó. Cada função é definida aplicando-se um deslocamento unitário ( $u$  ou  $w$ ) no nó  $k$ , enquanto os deslocamentos nos outros nós são nulos. Inicialmente, considera-se uma variação linear das funções elementares. A Figura 2.11 mostra as funções elementares do perfil da Figura 2.10(b). Existem  $nm + ns$  funções elementares, sendo  $\bar{u}_k(s)$  uma função elementar de empenamento e  $\bar{w}_k(s)$  uma função de flexão transversal. Nota-se que, para a definição de  $\bar{u}_k(s)$ , são desconsiderados os subnós.

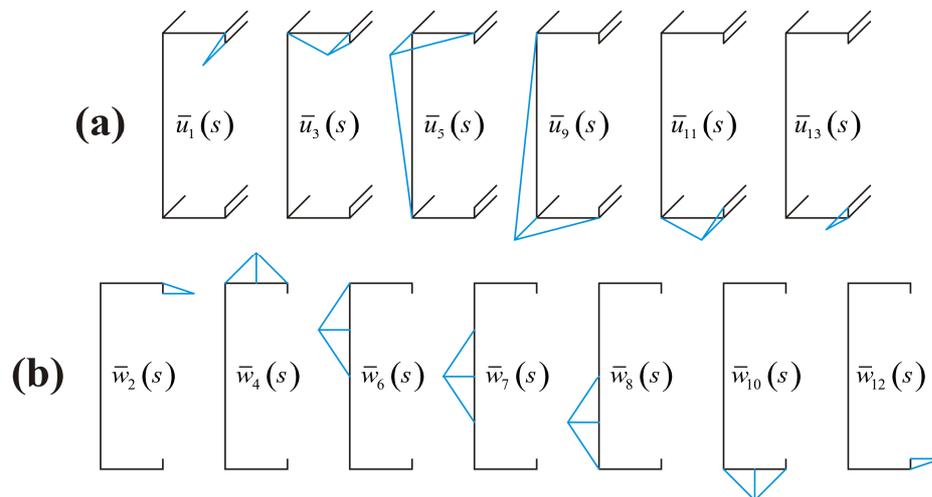


Figura 2.11. Funções elementares para o perfil da Figura 2.10(b). (a) Funções elementares de empenamento. (b) Funções elementares de flexão transversal.

Devido à hipótese mecânica de deformações cisalhantes membranais nulas ( $\gamma_{xs}^M = 0$ ), quando uma função elementar de empenamento  $\bar{u}_k(s)$  é aplicada (Figura 2.11(a)), segmentos de placa adjacentes aos nós apresentam deslocamentos  $v$ . As hipóteses mecânicas da GBT permitem que esses deslocamentos sejam determinados em função de  $\bar{u}_k(s)$  e das propriedades geométricas da seção. Assim, cada função elementar de empenamento  $\bar{u}_k(s)$  implica uma função  $\bar{v}_k(s)$  na seção.

Os deslocamentos  $\bar{v}_k(s)$  provocam rotações relativas entre os elementos de placa, violando a compatibilidade nos nós. Considerando, além de  $\bar{v}_k(s)$ , a hipótese de deformações transversais membranais nulas ( $\varepsilon_{ss}^M = 0$ ), devem ser determinados os momentos fletores transversais nos nós, para garantir a compatibilidade entre os elementos de placa. A determinação dos momentos pode ser realizada através do método das forças. Respeitada a compatibilidade dos nós, a seção apresentará flexão transversal, ou seja, deslocamentos  $w$ . Portanto,  $\bar{u}_k(s)$  também implica uma função  $\bar{w}_k(s)$  na seção (que terá variação cúbica). Toda a dedução dos deslocamentos dos deslocamentos transversais  $\bar{v}_k(s)$  e  $\bar{w}_k(s)$  em função de  $\bar{u}_k(s)$  pode ser encontrada em Silvestre e Camotim, 2002a.

No caso da aplicação de uma função elementar  $\bar{w}_k(s)$  (Figura 2.11(b)), a hipótese de deformações cisalhantes membranais nulas é automaticamente respeitada, não implicando aparecimento de deslocamentos  $\bar{v}_k(s)$ . Deve-se notar que também não haverá empenamento da seção ( $\bar{u}_k(s)$ ). Portanto, a consideração de funções elementares  $\bar{w}_k(s)$  (ou seja, a utilização de subnós na discretização da seção) está diretamente ligada à consideração de modos de deformação locais na análise do perfil. Por outro lado, as funções elementares  $\bar{u}_k(s)$  estão relacionadas a modos de deformação globais e distorcionais, que apresentam distribuição de empenamento.

A aplicação de  $\bar{w}_k(s)$  também exige a determinação de momentos fletores nos nós para garantir a compatibilidade dos segmentos de placa. A determinação é feita pelo método das forças e é dada em Silvestre e Camotim, 2002a. Mais uma vez, a variação de  $\bar{w}_k(s)$  será cúbica.

Como se assume que o empenamento da seção é continuamente linear entre os nós principais do perfil, a distribuição de empenamento é completamente definida pelos valores nodais dos nós principais. Assim, o empenamento  $u(s)$  da Eq. (2.28) pode ser escrito como uma combinação das funções elementares de empenamento  $\bar{u}_k(s)$ :

$$u(s) = \sum_{k=1}^{nm+ns} u_k \bar{u}_k(s) \quad (2.29)$$

onde  $u_k$  é a magnitude da função elementar  $\bar{u}_k(s)$ , ou seja, o valor do empenamento no nó  $k$  devido a  $\bar{u}_k(s)$ . Conforme Figura 2.11(a), são consideradas funções elementares de empenamento associadas apenas aos nós principais. Considerando ainda que funções elementares de flexão transversal (Figura 2.11(b)) não provocam empenamento, o somatório da Eq. (2.29) aplica-se apenas aos nós principais (1, 3, 5, 9, 11 e 13).

Substituindo (2.29) em (2.28), tem-se:

$$u(x, s) = \sum_{k=1}^{nm+ns} \bar{u}_k(s) \phi_{k,x}(x) \quad (2.30)$$

onde  $\phi_{k,x}(x) = u_k \psi_{,x}(x)$  representa a variação da amplitude da função elementar de empenamento  $\bar{u}_k(s)$  corrigida pela sua magnitude  $u_k$ .

A distribuição de deslocamentos transversais  $v(s)$  causada pelo empenamento da seção pode ser escrita como mostra a Eq. (2.31), onde o somatório considera somente os nós principais, pois as funções elementares  $\bar{w}_k(s)$  também não provocam deslocamentos na direção  $s$ .

$$v(s) = \sum_{k=1}^{nm+ns} u_k \bar{v}_k(s) \quad (2.31)$$

A Eq. (2.31) permite escrever o campo de deslocamentos  $v(x, s)$  de (2.28) como:

$$v(x, s) = \sum_{k=1}^{nm+ns} \bar{v}_k(s) \phi_k(x) \quad (2.32)$$

onde  $\phi_k(x) = u_k \psi(x)$  é a função de amplitude da função elementar referente ao nó  $k$ . Nota-se que  $\phi_{k,x}(x)$  é a derivada de  $\phi_k(x)$ .

A distribuição de deslocamentos transversais  $w(s)$  leva em conta (1) a contribuição da flexão transversal causada por cada  $\bar{u}_k(s)$  e (2) a contribuição das próprias funções elementares  $\bar{w}_k(s)$ . Como  $\bar{u}_k(s)$  e  $\bar{w}_k(s)$  nunca estão associados a um mesmo nó, a distribuição  $w(s)$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(s) &\Rightarrow w(s) = \sum_{k=1}^{nm+ns} u_k \bar{w}_k(s) \quad (k = 1, 3, 5, 9, 11, 13) \\ \bar{w}_k(s) &\Rightarrow w(s) = \sum_{k=1}^{nm+ns} w_k \bar{w}_k(s) \quad (k = 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12) \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde  $u_k$  é a magnitude de  $\bar{w}_k(s)$  associada à flexão transversal causada por  $\bar{u}_k(s)$  (nós principais), e  $w_k$  é a magnitude de  $\bar{w}_k(s)$  associada às funções elementares de flexão transversal (subnós).

Finalmente, o campo de deslocamentos  $w(x, s)$  de (2.28) pode ser escrito como:

$$w(x, s) = \sum_{k=1}^{nm+ns} \bar{w}_k(s) \phi_k(x) \quad (2.34)$$

sendo que, nesse caso, a função de amplitude  $\phi_k(x)$  é dada pela Eq. (2.35).

$$\phi_k(x) = \begin{cases} u_k \psi(x) & (k = 1, 3, 5, 9, 11, 13) \\ w_k \psi(x) & (k = 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12) \end{cases} \quad (2.35)$$

Convém observar que, caso sejam considerados apenas nós principais (ou seja, caso se esteja desprezando a flexão transversal da seção), a distribuição de deslocamentos transversais  $v(s)$  e  $w(s)$  é inteiramente definida pelo empenamento  $u(s)$ . Isso também é demonstrado no Anexo A, onde as hipóteses mecânicas da GBT são empregadas na dedução do MFFr.

Torna-se conveniente trabalhar num espaço vetorial de dimensão  $nm+ns$  definido pelas funções elementares. Atribui-se um sistema de *coordenadas mistas* às funções elementares. Para o exemplo considerado, as coordenadas mistas são dadas pelo vetor  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \{u_1 \quad w_2 \quad u_3 \quad w_4 \quad u_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8 \quad u_9 \quad w_{10} \quad u_{11} \quad w_{12} \quad u_{13}\}^T \quad (2.36)$$

Os campos de deslocamentos de (2.28) podem ser escritos em forma matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\boldsymbol{\phi}_x; \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}\boldsymbol{\phi}; \quad \mathbf{w} = \mathbf{W}\boldsymbol{\phi} \quad (2.37)$$

Os termos da Eq. (2.37) podem ser explicados escrevendo, por exemplo,  $\mathbf{w}$ , na forma explícita:

$$\begin{Bmatrix} w^{(1)}(x, s) \\ w^{(2)}(x, s) \\ \vdots \\ w^{(nm+ns-3)}(x, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(1)}(s) & \bar{w}_2^{(1)}(s) & \cdots & \bar{w}_{nm+ns}^{(1)}(s) \\ \bar{w}_1^{(2)}(s) & \bar{w}_2^{(2)}(s) & \cdots & \bar{w}_{nm+ns}^{(2)}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{w}_1^{(nm+ns-3)}(s) & \bar{w}_2^{(nm+ns-3)}(s) & \cdots & \bar{w}_{nm+ns}^{(nm+ns-3)}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_{nm+ns}(x) \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Assim,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores contendo os campos de deslocamentos em todos os  $nm+ns-3$  segmentos de placa da seção (ou seja, elementos entre dois nós consecutivos da discretização), sendo que o índice sobrescrito refere-se à numeração dos segmentos. As matrizes  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$ , de dimensão  $(nm+ns-3) \times (nm+ns)$  contêm as funções elementares (ou

distribuições de deslocamentos causadas por  $\bar{u}_k(s)$ ) escritas para cada segmento de placa da seção. Finalmente, o vetor  $\boldsymbol{\phi}$  é o vetor de funções de amplitude, que inclui as coordenadas mistas de (2.36). O vetor  $\boldsymbol{\phi}$  está expandido na Eq. (2.39), agora considerando que cada modo de deformação pode ter uma função de forma longitudinal diferente (aplicável a condições de contorno diferentes de apoios simples). Naturalmente,  $\boldsymbol{\phi}_x$  é o vetor com as respectivas derivadas em relação à variável  $x$ . Deve-se notar que as colunas das matrizes  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  referentes aos subnós devem ser consideradas nulas.

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \vdots \\ \phi_{11}(x) \\ \phi_{12}(x) \\ \phi_{13}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1\psi_1(x) \\ w_2\psi_2(x) \\ u_3\psi_3(x) \\ \vdots \\ u_{11}\psi_{11}(x) \\ w_{12}\psi_{12}(x) \\ u_{13}\psi_{13}(x) \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

O sistema de equações de equilíbrio da GBT é obtido através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais. A dedução do sistema de primeira ordem está detalhada em Silvestre e Camotim, 2002a e a incorporação dos efeitos de segunda ordem relacionados à não-linearidade geométrica está dada em Silvestre e Camotim, 2002b. A forma matricial do sistema de equações de equilíbrio para análise linear de flambagem (problema de autovalores) [Ádány et al., 2006a] é dada por:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\phi}_{,xxxx} - \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_{,xx} + \mathbf{B}\boldsymbol{\phi} - \lambda W_m^0 \mathbf{X}_m \boldsymbol{\phi}_{,xx} = 0 \quad (2.40)$$

As matrizes  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes de dimensão  $(nm+ns) \times (nm+ns)$  contendo propriedades da seção transversal relacionadas aos  $nm+ns$  modos de deformação considerados na análise (funções elementares). Todas são matrizes de rigidez associadas ao comportamento linear:  $\mathbf{C}$  é uma matriz de rigidez axial (empenamento),  $\mathbf{D}$  é uma matriz de rigidez à torção, e  $\mathbf{B}$  é uma matriz de rigidez à flexão transversal.

O termo  $W_m^0$  representa o *carregamento modal* antes da flambagem, ou seja, a resultante das tensões causadas pelo modo  $m$ , que pode ser qualquer função elementar.  $\lambda$  é o parâmetro de carga associado ao valor conhecido  $W_m^0$ . Finalmente,  $\mathbf{X}_m$  é a matriz de termos de segunda ordem (matriz geométrica) associada ao carregamento modal  $W_m^0$ . As matrizes  $\mathbf{C}$ ,

$\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{X}_m$  resultam da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais [Silvestre e Camotim, 2002a e 2002b], e podem ser determinadas através das matrizes de funções elementares  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$ , conforme Ádány et al., 2006a.

A forma do sistema de equações de equilíbrio mostrado na Eq. (2.40) ainda não é adequada para a solução. As matrizes  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  possuem diversos termos fora da diagonal, tornando o sistema de equações altamente acoplado, dificultando a solução. Além disso, os componentes dessas matrizes não têm significado físico claro, o que dificulta a interpretação dos resultados. O carregamento modal  $W_m^0$  também não tem significado físico, já que está associado a funções elementares sem significado prático.

Para se ter uma ferramenta prática, é importante ter um sistema de equações o mais desacoplado possível, ou seja, o ideal é que as matrizes da Eq. (2.40) sejam diagonais. Para aproveitar a vantagem da GBT de trabalhar com modos de deformação separadamente, é conveniente que se utilizem modos de deformação característicos, atribuindo significado físico claro aos termos do sistema de equações. Portanto, deve-se mudar a base vetorial utilizada, resultando em um sistema de *coordenadas modais*, associadas aos modos de deformação característicos.

Através de um procedimento mostrado em Silvestre e Camotim, 2002a e Ádány et al., 2006a, é possível, ao mesmo tempo, diagonalizar as matrizes  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  e mudar base vetorial da Eq. (2.40). Primeiramente, resolve-se o seguinte problema de autovalores, considerando as matrizes de rigidez axial (empenamento) e de rigidez à flexão transversal:

$$(\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{C}) \mathbf{y}_k = 0 \quad (2.41)$$

A Eq. (2.41) resulta em  $nm + ns$  autovalores  $\lambda_k$ . Quatro desses autovalores são nulos, enquanto os outros  $nm + ns - 4$  autovalores são positivos e estão associados a autovetores  $\mathbf{y}_k$  ortogonais que representam modos de deformação distorcionais e locais, ou seja, modos com significado físico prático. Os autovetores  $\mathbf{y}_k$  são dados pelo vetor da Eq. (2.36), onde cada componente representa um valor nodal de deslocamento do modo. Deve-se observar que os modos locais possuem valores  $u$  nulos.

Assim como no MFFr, são obtidos  $nm - 4$  modos distorcionais, mas agora é  $ns$  o número de modos locais. Os quatro autovetores restantes da Eq. (2.41) estão associados a modos de deformação de corpo rígido. A determinação dos outros quatro modos de deformação ortogonais característicos (associados à extensão axial, à flexão em relação aos

dois eixos principais da seção e à torção) exige mais trabalho, o qual está detalhado em Leach, 1994, e Ádány et al., 2006a. Mais uma vez é possível observar que os modos globais e distorcionais estão relacionados aos nós principais da seção, enquanto os modos locais estão ligados aos subnós (na notação do MFFr, também aos nós principais externos).

No final, são obtidos  $nm+ns$  modos de deformação ortogonais, com significado físico. A utilização dos modos de deformação ortogonais como base vetorial do sistema de equações da GBT, além de favorecer a interpretação dos resultados, diagonaliza as matrizes **C**, **D** e **B** no momento do cálculo de seus componentes associados aos novos modos.

A Figura 2.12 mostra os deslocamentos transversais dos modos de deformação ortogonais (puros) obtidos através da discretização modal do perfil da Figura 2.10(b). Na Figura 2.12(a) estão mostrados os quatro modos de corpo de rígido e os dois modos distorcionais, enquanto na Figura 2.12(b) estão exibidos os modos locais.

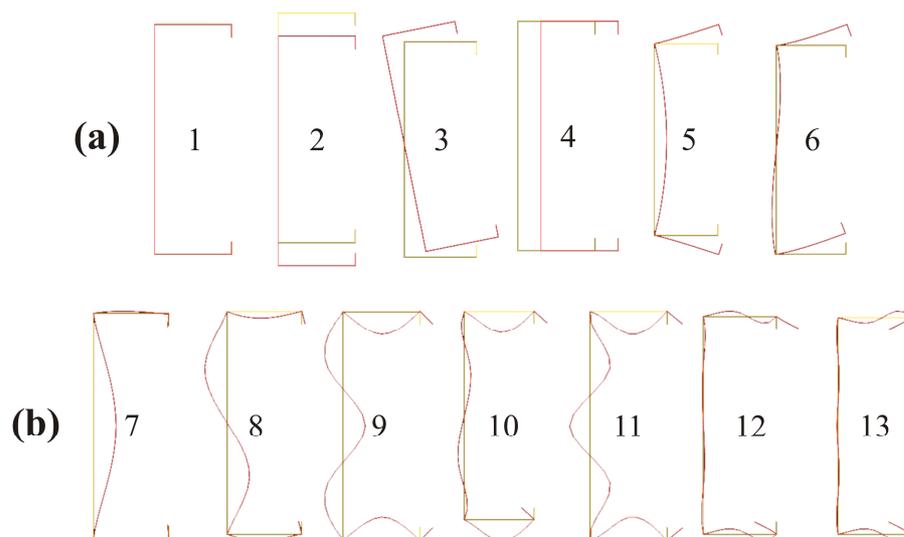


Figura 2.12. Discretização modal do perfil da Figura 2.10(b). (a) Modos de deformação de corpo rígido e distorcionais. (b) Modos de deformação locais.

Os modos 1 a 6 da GBT possuem distribuições de deslocamentos idênticas (inclusive empenamento) às dos modos naturais globais e distorcionais utilizados no MFFr (modos G1 a G4 e modos D1 e D2 na Figura 2.8). Os modos locais 7 e 8 da GBT são muito semelhantes aos modos axiais ortogonais L1 e L2 do MFFr (Figura 2.9). Esses modos não são exatamente iguais porque a distribuição de deslocamentos dos modos axiais ortogonais é dependente do comprimento do perfil. Também é importante observar que, caso o perfil utilizado no exemplo tivesse sido discretizado com mais nós na determinação dos modos axiais ortogonais

(ver Figura 2.7(b)), a base axial ortogonal da Figura 2.9 teria outros modos semelhantes aos modos 9 a 13 da GBT (Figura 2.12).

A cada modo de deformação ortogonal  $\mathbf{y}_k$  estarão associadas distribuições de deslocamentos na seção  $\tilde{u}_k(s)$ ,  $\tilde{v}_k(s)$  e  $\tilde{w}_k(s)$ . Assim, é possível fazer a *discretização modal* do campo de deslocamentos da seção reescrevendo as Eqs. (2.29), (2.31) e (2.33) como:

$$\begin{aligned} u(s) &= \sum_{k=1}^{nm+ns} p_k \tilde{u}_k(s) \\ v(s) &= \sum_{k=1}^{nm+ns} p_k \tilde{v}_k(s) \\ w(s) &= \sum_{k=1}^{nm+ns} p_k \tilde{w}_k(s) \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde  $p_k$  é o coeficiente de *participação modal*.

Finalmente, os campos de deslocamentos do perfil são expressos por:

$$\begin{aligned} u(x, s) &= \sum_{k=1}^{nm+ns} \tilde{u}_k(s) \tilde{\phi}_{k,x}(x) \\ v(x, s) &= \sum_{k=1}^{nm+ns} \tilde{v}_k(s) \tilde{\phi}_k(x) \\ w(x, s) &= \sum_{k=1}^{nm+ns} \tilde{w}_k(s) \tilde{\phi}_k(x) \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde  $\tilde{\phi}_k(x) = p_k \psi(x)$  é a função de amplitude, com  $\psi(x)$  representando a variação dos deslocamentos da seção ao longo do comprimento do perfil e  $p_k$  fornecendo a magnitude.

Utilizando a base vetorial dos modos de deformação ortogonais, o sistema de equações de equilíbrio da GBT pode ser escrito como mostra a Eq. (2.44), onde o sistema de coordenadas é dado pelos valores  $p_k$  dos  $nm+ns$  modos ortogonais.

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{,xxxx} - \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{,xx} + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\boldsymbol{\phi}} - \lambda\tilde{W}_m^0\tilde{\mathbf{X}}_m\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{,xx} = 0 \quad (2.44)$$

As matrizes  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}$  e  $\tilde{\mathbf{X}}_m$  são matrizes contendo propriedades dos modos ortogonais, com significado físico. Davies e Leach, 1994a, mostram como o sistema de equações da GBT pode ser reduzido a equações de teorias clássicas de viga, deixando claros os significados físicos dessas matrizes. O carregamento modal  $\tilde{W}_m^0$  representa a resultante das tensões dos novos modos de deformação, e terá significado físico prático caso esteja relacionado aos modos de corpo rígido 1 a 4 da Figura 2.12(a), ou seja, representará força

axial, momento em relação ao eixo de menor inércia, momento em relação ao eixo de maior inércia e bi-momento, respectivamente.

As matrizes  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$  são diagonais, o que garante o desacoplamento completo das equações em análises de primeira ordem (por exemplo, ver Davies e Leach, 1994a e 1994b). Para análises de flambagem, a interação entre os modos pode existir (dependendo de quais modos são considerados na análise), já que a matriz  $\tilde{\mathbf{X}}_m$  é, em geral, não diagonal.

Assim como no MFFr, para que os coeficientes de participação modal tenham sentido, os modos de deformação precisam ser normalizados. Uma vez aplicado um esquema de normalização, a participação de um modo  $k$  na configuração deformada da seção será dada por:

$$p_k = \frac{\int_L |\tilde{\phi}_k(x)| dx}{\sum_{i=1}^{nm+ns} \left( \int_L |\tilde{\phi}_i(x)| \right) dx} \quad (2.45)$$

onde o numerador está relacionado à contribuição do modo  $k$  e o denominador está relacionado à contribuição de todos os modos de deformação considerados na análise. A integração é feita no comprimento do perfil  $L$  e leva em conta possíveis diferenças entre as funções de forma longitudinais dos diferentes modos.

A Eq. (2.44) considera apenas um carregamento modal, correspondente a um modo  $m$ . Mais carregamentos modais podem ser considerados, sendo que, nesse caso, a matriz  $\tilde{\mathbf{X}}_m$  faz parte de um tensor de terceira ordem e  $\tilde{W}_m^0$  faz parte de um vetor com os diferentes tipos de carregamentos modais (ver Silvestre e Camotim, 2002b). O tratamento para uma combinação de carregamentos modais é mostrado em Davies e Leach, 1994b. Além disso, o carregamento modal de (2.44) foi assumido uniforme ao longo do comprimento.

O sistema da Eq. (2.44) só pode ser resolvido analiticamente para perfis simplesmente apoiados (extremidades localmente e globalmente rotuladas e livres para empenar) submetidos a tensões uniformes ao longo do comprimento. Para outras condições de contorno das extremidades e outros carregamentos, a solução deve ser aproximada por métodos numéricos, como método das diferenças finitas ou MEF. Os métodos numéricos para a solução das equações de equilíbrio da GBT são comentados em Davies e Leach, 1994a e 1994b, e Silvestre e Camotim, 2002b, e uma solução detalhada pelo MEF é dada em Silvestre e Camotim, 2003a.

Para o caso em que é possível a solução analítica, a solução para cada modo de deformação será dada por:

$$\tilde{\phi}_k(x) = p_k \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (2.46)$$

lembrando que  $m$  é o número de meias-ondas ao longo do comprimento  $L$  do perfil, e  $p_k$  é o coeficiente de participação modal na solução. Nota-se que a função de forma longitudinal é a mesma utilizada no MFF. No caso em que  $m=1$ , a solução é dada em função do comprimento de meia-onda, como no gráfico da Figura 2.6.

Para a realização da análise linear de flambagem de perfis de seção aberta (inclusive com ramificações) utilizando a GBT, pode ser usado o software GBTUL [Bebiano et al., 2008], gratuitamente disponível. A análise pode ser realizada considerando qualquer combinação de modos de deformação ortogonais da GBT. O software disponibiliza dois métodos de solução: (1) solução analítica e (2) solução numérica através do MEF [Silvestre e Camotim, 2003a]. Através da solução analítica, somente perfis com extremidades simplesmente apoiadas, submetidos a cargas axiais, momentos fletores e bimomentos uniformes ao longo do comprimento, podem ser analisados. Utilizando a solução numérica, o software permite a análise de perfis com extremidades simplesmente apoiadas, engastadas ou livres, sendo essas condições aplicáveis independentemente para os modos de deformação considerados. Nesse caso, carregamentos variáveis ao longo do comprimento podem ser aplicados.

Finalmente, deve-se observar que modos de deformação de extensão transversal membranal e de cisalhamento membranal (modos O do MFFr) não estão incluídos na formulação da GBT apresentada, que é a utilizada no software GBTUL. Isso se deve às hipóteses simplificadoras que consideram  $\varepsilon_{ss}^M = \gamma_{xs}^M = 0$ . Porém, como comentado em Ádány e Schafer, 2006b, e Ádány et al., 2006b, 2007 e 2008a, o estado de tensões linear considerado para os modos globais e distorcionais na GBT permite que esses modos considerem, de certa forma, deformações transversais membranais e cisalhantes, ou seja, os modos O do MFFr estão incluídos implicitamente nos modos G e D da GBT. Uma discussão sobre isso é apresentada na seção 5.1.1. De qualquer forma, na GBT “clássica”, os modos O não podem ser isolados.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A decomposição da solução da análise de flambagem de perfis formados a frio, para a obtenção da carga crítica de flambagem de modos de deformação específicos, é um tema novo, envolvendo muitos tópicos ainda não resolvidos e abertos para o estudo. Portanto, não se encontram muitos trabalhos disponíveis na literatura que abordem o assunto.

Com o objetivo de se obterem cargas críticas de modos puros ou combinados, explorando o comportamento da flambagem em perfis formados a frio, os trabalhos disponíveis até o momento seguem, basicamente, duas linhas ligeiramente diferentes: (1) análise através do Método das Faixas Finitas Restringido (MFFr) [Schafer e Ádány, 2006 e Li e Schafer, 2010b], e (2) análise utilizando a Teoria Generalizada de Vigas (GBT, que é a sigla em inglês) [Silvestre e Camotim, 2002a e 2002b]. Porém, também já podem ser encontrados alguns trabalhos tratando da obtenção de cargas críticas de modos de deformação separados fazendo uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), que é o foco dessa pesquisa.

O estudo da flambagem focada em modos de deformação específicos, além da contribuição para uma melhor compreensão do comportamento estrutural de perfis formados a frio, também tem uma motivação prática, relacionada à utilização de normas de projeto. Cada tipo de modo flambagem usualmente considerado (global, distorcional ou local) possui um diferente grau de reserva pós-flambagem, que é determinado pelas normas através de uma relação com a carga crítica de flambagem elástica. Além disso, o modo de flambagem em si é fundamental para a consideração de imperfeições geométricas.

Métodos numéricos usualmente usados para a análise de perfis formados a frio (MEF e MFF), apesar de gerais, não podem diretamente calcular a carga crítica de um modo de deformação específico, pois os diferentes modos pertencentes a diferentes fenômenos de flambagem interagem entre si.

#### 3.1 Pesquisa sobre a Teoria Generalizada de Vigas (GBT)

A GBT é o único método de análise que, inerentemente, permite a decomposição da solução da análise de flambagem, ou seja, o método foi desenvolvido com base na definição de modos de deformação característicos separados, permitindo que a solução seja encontrada como uma combinação desses modos. Originalmente desenvolvida por Schardt, 1989, a GBT foi efetivamente introduzida na literatura com os trabalhos de Davies e Leach, 1994a e 1994b, os quais apresentaram os conceitos de forma concisa, focando no potencial da teoria e

mostrando que ainda era possível explorar mais a teoria de vigas ao invés de se recorrer unicamente a métodos numéricos.

No primeiro trabalho de Davies e Leach, 1994a, os princípios básicos da GBT foram apresentados através de um exemplo numérico de uma análise de primeira ordem (análise linear elástica). Foram abordados diferentes tópicos, como a definição completa dos modos de deformação de corpo rígido e distorcionais a partir da distribuição de empenamento da seção, métodos de solução da equação de equilíbrio da GBT e equivalência à teoria clássica de vigas. Com o exemplo numérico, utilizou-se o princípio da superposição de efeitos para a resolução do sistema de equações de primeira ordem e mostrou-se a importância da consideração da distorção da seção na análise de perfis formados a frio, comparando os resultados da GBT com os fornecidos pela teoria clássica.

Davies e Leach, 1994b, introduziram efeitos de segunda ordem à formulação da GBT. Esses efeitos estão associados à não-linearidade geométrica e permitem a análise de flambagem de perfis formados a frio. Nesse trabalho, um exemplo numérico de uma análise linear de flambagem (problema de autovalores) foi apresentado. Soluções para modos de deformação individuais e combinação de modos foram obtidas, dando destaque à possível interação entre os modos em uma análise de flambagem. Finalmente, uma comparação com resultados experimentais foi feita.

Posteriormente, Davies, Leach e outros autores publicaram diversos trabalhos utilizando a GBT na análise de flambagem de perfis formados a frio. Leach, 1994, mostrou como as propriedades associadas aos modos de deformação individuais da GBT podem ser calculadas. Entre outros trabalhos, podem-se citar: Leach e Davies, 1996, Davies et al., 1997 e Jiang e Davies, 1997. Schardt, 1994, ainda escreveu um artigo discutindo o acoplamento do sistema de equações de equilíbrio da GBT causado pelos diferentes modos de deformação considerados na análise e/ou pelos diferentes carregamentos modais aos quais o perfil é submetido.

Mais recentemente, Silvestre e Camotim voltaram a explorar o potencial da GBT. O marco inicial dessa pesquisa foi a publicação de Silvestre e Camotim, 2002a e 2002b, que mostraram a formulação da GBT de forma detalhada e com aplicação estendida a materiais ortotrópicos. No primeiro desses artigos [Silvestre e Camotim, 2002a], foi apresentada a formulação da GBT de primeira ordem. Foi mostrada a dedução detalhada dos modos de deformação individuais de corpo rígido, distorcionais e locais a partir da definição de funções

elementares. Mostrou-se como obter um sistema de equações de equilíbrio desacoplado, através do uso de modos de deformação ortogonais com significado físico. Foi apresentado um exemplo numérico, considerando diferentes materiais laminados. Verificou-se a contribuição de cada modo de deformação individual para o valor de deslocamento do problema, comparando os diversos tipos de materiais.

No segundo artigo de Silvestre e Camotim, 2002b, efeitos de segunda ordem foram incluídos na formulação geral da GBT, aplicável a materiais ortotrópicos. Assim, foi possível a análise de flambagem de perfis formados a frio. O artigo focou na análise linear de flambagem (problema de autovalores), mas também apresentou uma discussão sobre como identificar problemas não-lineares de segunda ordem, permitindo uma aproximação linear para problemas envolvendo pequenos deslocamentos. Foram apresentados exemplos numéricos de um perfil sob compressão axial ou flexão, considerando diferentes materiais laminados. Dependendo do caso, um comportamento não-linear foi constatado, sendo a solução uma aproximação linear. A contribuição de cada modo de deformação individual na solução foi calculada para diversos comprimentos do perfil.

Após a apresentação detalhada da teoria da GBT, Silvestre e Camotim, juntamente com outros autores publicaram diversos artigos sobre o tema. Silvestre e Camotim, 2003a, apresentaram um método de solução das equações de equilíbrio da GBT através do MEF. Em Silvestre e Camotim, 2003b, a GBT de segunda ordem é estendida para problemas envolvendo grandes deslocamentos. A modificação da formulação da GBT para permitir a aplicação a perfis com seções abertas ramificadas é dada em Dinis et al., 2006. Para seções fechadas a formulação está em Gonçalves et al., 2009. A GBT também foi aplicada em análises de perfis com condições de contorno das extremidades não convencionais em Camotim et al., 2008. Uma discussão sobre como considerar modos de deformação de extensão transversal membranal e de cisalhamento membranal na formulação da GBT pode ser encontrada em Silvestre e Camotim, 2003b, e Gonçalves et al., 2009.

Finalmente, a pesquisa realizada pela equipe de Silvestre e Camotim resultou no desenvolvimento de um software que permite a análise linear de flambagem de perfis formados a frio através da GBT: o GBTUL. Trata-se de um software gratuito, disponível no website dos criadores [Bebiano et al., 2008].

### 3.2 Pesquisa sobre o Método das Faixas Finitas Restringido (MFFr)

Paralelamente à pesquisa de Silvestre e Camotim sobre a GBT, Ádány e Schafer propuseram um novo método para a separação de modos de deformação em uma análise de flambagem de perfis formados a frio prismáticos de seção aberta sem ramificações (tanto para a obtenção das cargas críticas de modos específicos quanto para a quantificação da contribuição de diferentes modos em uma solução geral). Essa nova abordagem consiste em introduzir hipóteses mecânicas da GBT, que permitem caracterizar os diferentes tipos de flambagem, em métodos numéricos gerais, como o MFF e o MEF. Ao contrário da GBT, que enriquece o modelo simplificado de vigas para a consideração dos diferentes tipos de flambagem, a abordagem de Ádány e Schafer aplica restrições nos campos de deformações de um modelo numérico geral, fazendo com que o modelo deforme-se (flambe) conforme o desejado. A aplicação mais trabalhada pelos autores até o momento foi no contexto do MFF, resultando no MFFr. Mesmo assim, a abordagem é geral, podendo ser naturalmente estendida ao MEF, o que, porém, ainda consiste em um tema de estudo amplamente aberto.

No trabalho de Ádány, 2004, o MFFr foi apresentado, mostrando a motivação do trabalho relacionada a problemas comuns na identificação e na definição dos tipos de modos de flambagem. Definições matemáticas, inspiradas na GBT, para quatro tipos de modos de flambagem (globais, distorcionais, locais e outros) foram estabelecidas pela primeira vez. Em seguida, diversos artigos sobre o MFFr foram publicados. Por exemplo, em Schafer e Ádány, 2006, a teoria do MFF convencional e do MFFr foi apresentada de forma concisa, destacando as duas aplicações fundamentais do MFFr: a *decomposição modal* (para o cálculo da carga crítica de modos de deformação específicos) e a *identificação modal* (para o cálculo da contribuição de diferentes modos em uma solução considerando modos combinados).

Três trabalhos de Ádány e Schafer detalham o MFFr. O primeiro deles [Ádány e Schafer, 2006a] mostrou como hipóteses mecânicas da GBT podem ser utilizadas para restringir o modelo de faixas finitas para que esse se deforme de acordo com modos globais e distorcionais, ou seja, foi apresentada de forma detalhada a dedução da matriz de restrição dos GDLs do modelo ao espaço de deformações gerado por modos globais e distorcionais (matriz  $\mathbf{R}_{GD}$ ).

No segundo trabalho [Ádány e Schafer, 2006b], mostrou-se como separar modos globais e distorcionais, partindo da metodologia da GBT, ou seja, o espaço de deformações

gerado pelos modos globais e distorcionais foi separado em dois subespaços: o gerado por modos globais e o gerado por modos distorcionais. Para isso, definiram-se bases vetoriais formadas por modos de deformação característicos. Foram considerados os quatro modos globais de corpo rígido da GBT, enquanto os modos distorcionais puderam ser determinados a partir da condição de ortogonalidade relacionada à distribuição de empenamento da seção. Posteriormente, mostrou-se como obter, no MFF, uma base vetorial de modos distorcionais ortogonais com significado físico, semelhantes aos usados na GBT. Exemplos numéricos de cálculos de cargas críticas de modos de deformação individuais e combinados foram mostrados, fixando conceitos como *modo puro de flambagem*, *modo de deformação individual* e *modo de flambagem individual*. A validade do MFFr foi mostrada através da comparação com outros métodos de análise de perfis formados a frio, também sendo destacadas as fontes de diferenças de resultados no cálculo da carga crítica de modos globais e distorcionais.

A separação de todos os tipos de modos de flambagem (globais, distorcionais, locais e outros) para a análise linear de flambagem de perfis formados a frio através do MFFr foi dada em Ádány e Schafer, 2008, onde também foram revisados procedimentos dos dois trabalhos anteriores. Primeiramente, mostrou-se como definir a matriz de restrição ao espaço de deformações gerado por modos globais e distorcionais (matriz  $\mathbf{R}_{GD}$ ), a partir de hipóteses mecânicas da GBT. Seguiu-se com a separação dos modos globais e distorcionais (definição das matrizes de restrição  $\mathbf{R}_G$  e  $\mathbf{R}_D$ ). Relaxando as hipóteses da GBT, o MFFr pôde ser estendido a modos locais e outros modos, o que levou a definição das matrizes de restrição  $\mathbf{R}_L$  e  $\mathbf{R}_O$ , sendo possível gerar o espaço inteiro de GDLs do MFF e, conseqüentemente de deformações possíveis. Com isso, a decomposição modal focada em modos puros de flambagem ficou resolvida.

Também foram propostas bases vetoriais formadas por modos de deformação com significado físico para os espaços de deformação dos quatro tipos de flambagem discutidos, ou seja, foram definidos os *modos axiais ortogonais*, obtidos a partir de modos puros de flambagem resultantes da análise de um modelo sob carga axial, restringido de acordo com cada um dos quatro tipos de modos de flambagem separadamente. Assim, a solução do MFFr passou a ser expressa em termos de *bases modais*. Fazendo uso dos modos axiais ortogonais, foi possível estabelecer o procedimento de identificação modal. A identificação modal permite o cálculo da contribuição dos diferentes modos de deformação individuais em uma

solução geral. Logicamente, também é possível calcular a contribuição do conjunto de todos os modos pertencentes a um tipo de flambagem (que definem um modo puro). Além disso, como os modos axiais ortogonais têm significado físico, tornou-se atraente a decomposição modal focada em um modo de deformação individual.

Foram apresentados exemplos numéricos de cálculos de carga crítica de modos puros e combinados, ilustrando a interação entre os modos de flambagem. A quantificação da interação entre os modos foi feita através da identificação modal, calculando a contribuição dos modos para diversos comprimentos do perfil. Foram abordados aspectos como a influência da discretização do perfil, do tipo de carregamento e do tipo de bases vetoriais utilizadas. Provou-se que, com a utilização dos modos axiais ortogonais, uma grande redução do modelo é possível, ou seja, muitas vezes poucos modos precisam ser considerados na análise. Posteriormente, Li et al., 2011, fizeram um estudo mais detalhado da influência dos parâmetros do MFFr, abordando também o impacto dos diferentes esquemas de normalização das bases vetoriais.

Análises lineares de flambagem restringidas de perfis formados a frio prismáticos de seção aberta sem ramificações podem ser feitas utilizando o software CUFSM, apresentado primeiramente em Schafer e Ádány, 2006, gratuitamente disponível por Schafer em seu website [Schafer, 2006, e Schafer, 2011]. O MFF utilizado nessa primeira versão do CUFSM e em todos os trabalhos de Ádány e Schafer citados considera apenas uma meia-onda senoidal ao longo do comprimento do perfil, ou seja, o MFFr empregado nesses trabalhos pode ser aplicado a apenas perfis com extremidades simplesmente apoiadas e livres para empenar, sendo que todos os modos de deformação considerados na análise têm o mesmo comprimento de meia-onda.

Na literatura, apenas dois métodos permitem a decomposição da solução da análise de flambagem de perfis formados a frio em modos de deformação pertencentes aos diferentes tipos de flambagem: a GBT e o MFFr. Mesmo que o MFFr seja baseado em princípios da GBT, esses dois métodos possuem implementações bem diferentes, cada um com suas particularidades e limitações. Para uma revisão concisa da teoria desses dois métodos, juntamente com uma comparação dos principais aspectos e dos resultados fornecidos por cada um deles, podem-se consultar Ádány et al., 2006a, 2006b, 2007 e 2008a.

Considerando as limitações da primeira versão do CUFSM (considerando uma meia-onda senoidal ao longo do comprimento do perfil), Li e Schafer, 2009, apresentaram uma

extensão do MFF que permite sua aplicação a perfis com diferentes condições de contorno das extremidades. Cada condição de contorno implica a utilização de um diferente tipo de função de forma longitudinal. Atenção especial foi dada ao número de componentes harmônicos que devem ser considerados para condições de contorno diferentes de apoios simples. Considerando as funções de forma longitudinais como um somatório de componentes harmônicos, os resultados de carga crítica do MFF apresentado por Li e Schafer são sempre dados em função do comprimento do perfil, diferentemente da primeira versão do CUFSM, cujos resultados eram apresentados em função do comprimento de meia-onda. As participações dos componentes harmônicos nas soluções de vários exemplos de placas e de perfis foram calculadas, destacando a presença do *componente harmônico dominante*. Os resultados do MFF estendido foram comparados com os fornecidos por soluções analíticas (exemplos de placas) e pelo MEF (exemplos de placas e de perfis), validando o método.

No trabalho de Li e Schafer, o MFF foi apresentado numa notação generalizada, que permite a consideração de qualquer condição de contorno. Provou-se que é possível derivar o MFFr de Ádány e Schafer, 2008, nessa nova notação, o que permite que o MFFr seja aplicado a condições de contorno gerais das extremidades do perfil. Assim, foi mostrado como deduzir as matrizes de restrição que permitem a decomposição dos modos de deformação na solução da análise linear de flambagem de um modelo de faixas finitas com condições de contorno gerais.

Nos trabalhos seguintes de Li e Schafer, 2010a e 2010b, foi realizada a implementação do MFFr para condições de contorno gerais, detalhando seus conceitos. As bases vetoriais que definem os espaços dos modos de flambagem podem ser definidas considerando ou não o acoplamento entre diversos componentes harmônicos utilizados na análise.

Em Li e Schafer, 2010a, é apresentado um exemplo numérico de um perfil C com enrijecedores de borda com extremidades engastadas submetido a carregamento de compressão axial. É demonstrado o acoplamento entre componentes harmônicos na análise de flambagem, através do cálculo da contribuição de cada componente na solução. A identificação modal é realizada considerando-se as diferentes definições para as bases vetoriais dos espaços que definem os modos de flambagem no MFFr para condições de contorno gerais. Diferentes esquemas de normalização foram empregados.

No trabalho seguinte [Li e Schafer, 2010b], é descrita a implementação do MFFr para condições de contorno gerais no software CUFSM. São mostrados resultados de

decomposição modal e identificação modal para um perfil C com enrijecedores de borda com extremidades engastadas submetido à flexão em torno do eixo de maior inércia. É proposto um método de seleção dos componentes harmônicos mais importantes na análise, baseado no gráfico da carga crítica em função do comprimento de meia-onda, o que pode diminuir consideravelmente o custo computacional. O MFFr restringido também é utilizado para auxiliar o projeto através do MRD. Identificando-se os componentes harmônicos com maior contribuição para cada modo de flambagem puro, esses componentes podem ser selecionados na análise utilizando o MFF convencional (sem restrições). O emprego desses componentes dominantes na análise convencional permite que sejam obtidos modos predominantemente pertencentes às classes de flambagem características sem que o MFFr seja utilizado, possibilitando que as cargas críticas sejam usadas em conjunto com o MRD.

### **3.3 Pesquisa sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF) aplicado a análises de flambagem focadas em modos puros e combinados**

A decomposição da solução da análise de flambagem de perfis formados a frio através do MEF ainda é um assunto pouco explorado. Ádány et al., 2008b e 2010, e Joó e Ádány, 2009, propuseram um método aproximado para realizar a *identificação modal* através de modelos de elementos finitos. As bases vetoriais do MFFr estendido a condições de contorno gerais foram utilizadas para aproximar o campo de deformações geral de um modo de flambagem obtido através de um modelo de elementos finitos (sem restrições). As bases vetoriais definidas no MFFr separam os espaços de deformações dos quatro tipos de modos de flambagem (globais, distorcionais, locais e outros). Além disso, utilizando bases vetoriais ortonormais, a identificação modal pode ser realizada. Nos trabalhos em questão, norma vetorial foi considerada.

Os vetores de deslocamentos do MFFr representam funções de deslocamento ao longo do comprimento do perfil e, portanto, o campo de deslocamentos do modelo de elementos finitos pode ser aproximado como uma combinação linear dessas funções. Porém, essa aproximação, em geral, implica um erro. A aproximação do campo de deslocamentos dos modelos de elementos finitos foi encontrada através da minimização da norma vetorial do erro. Posteriormente, foi possível calcular a participação de modos de deformação individuais ou dos tipos de flambagem em uma solução de elementos finitos. Finalmente, o erro gerado na aproximação também pôde ser quantificado. Deve-se observar que foram consideradas

funções base correspondentes a diversos componentes harmônicos ao longo do comprimento do perfil analisado, porém, foram utilizadas apenas funções de forma longitudinais senoidais.

Em Ádány et al., 2008b, foi analisado um perfil C com enrijecedores de bordas, de comprimento fixo, sob carregamento axial, considerando como parâmetros: a discretização da seção, o comprimento de meia-onda mínimo das funções base, e diferentes condições de contorno das extremidades do perfil. A identificação modal foi realizada para diversos modos obtidos numa análise linear de flambagem utilizando elementos finitos. Demonstrou-se que, dependendo do número de meias-ondas do modo de flambagem a ser identificado, uma discretização fina precisa ser utilizada no modelo de elementos finitos, e um grande número de funções base correspondentes a vários comprimentos de meia-onda precisa ser considerado. O método de identificação modal proposto mostrou fornecer bons resultados também para certas condições de contorno diferentes de apoios simples, mesmo empregando funções base senoidais.

Em Ádány et al., 2010, as análises do trabalho anterior foram feitas de forma mais detalhada. Chegou-se à conclusão de que usando funções bases senoidais, apenas perfis com extremidades simplesmente apoiadas ou com condições de contorno mais rígidas podem ser analisados adequadamente. Também foi verificada a influência do carregamento na identificação modal através do método proposto. Finalmente, foi feita uma discussão sobre a seleção de funções bases visando à diminuição do custo computacional da identificação modal.

Em Joó e Ádány, 2009, a identificação modal dos modos obtidos com modelos de elementos finitos não restringidos foi utilizada em conjunto com o MRD. Foi analisado um perfil Z sob compressão axial e flexão pura, com extremidades simplesmente apoiadas ou somente com a alma apoiada. As resistências calculadas utilizando as cargas críticas dos modos identificados pelo procedimento proposto são equivalentes às obtidas utilizando o MFF. Porém, é destacada a vantagem da identificação modal em modelos de elementos finitos, com os quais se podem analisar condições de contorno não convencionais e irregularidades ao longo do comprimento do perfil. Foi analisado um caso de um perfil com restrições elásticas intermediárias e propôs-se a análise futura de perfis com furos.

Casafont et al., 2009a, apresentaram uma metodologia para a obtenção da carga crítica de modos de deformação puros, através de uma análise linear de flambagem usando o MEF. Através de um procedimento de restrição baseado no do MFFr, o modelo de elementos finitos

é restringido de acordo com um modo de deformação individual obtido através da GBT. Esse primeiro trabalho dos autores focou-se no cálculo da carga crítica de modos de deformação distorcionais.

No MFFr, foi possível estabelecer a relação entre os graus de liberdade gerais do MFF e um número de graus de liberdade reduzidos, os quais definem o modo de deformação específico ao qual o modelo é restringido. No caso de modos distorcionais, os graus de liberdade reduzidos são os valores de empenamento nos nós da seção que definem os elementos de placa. Essa relação resulta nas conhecidas matrizes de restrição do MFFr. Nesse trabalho, essa relação de restrição foi escrita como uma função do comprimento do perfil, usando funções de forma longitudinais (no caso, uma meia-onda senoidal).

O procedimento de restrição proposto foi implementado utilizando o software Ansys [Ansys, Inc., 2007]. Como não é possível alterar as matrizes de rigidez do modelo no programa, as restrições precisaram ser aplicadas através de relações entre os graus de liberdade do modelo, permitidas pelo programa, deixando algumas incógnitas (graus de liberdade livres) na análise linear de flambagem. Utilizando as relações de restrição escritas em função do comprimento, podem-se estabelecer relações entre os graus de liberdade de algumas seções da malha de elementos finitos, resultando em uma incógnita por seção restringida, ou seja, o valor de empenamento em algum nó. Assim, um modelo de elementos finitos, restringido de acordo com um modo de deformação individual, terá, além dos graus de liberdade não incluídos no processo de restrição, um número de graus de liberdade igual ao número de seções restringidas. Também é possível restringir o modelo selecionando apenas um grau de liberdade incógnita (em apenas uma seção restringida).

Foram apresentados cálculos de carga crítica de modos distorcionais para um perfil C com enrijecedores de borda sob compressão axial. Os resultados foram comparados com os fornecidos pela GBT e pelo CUFISM. Mesmo não restringindo todas as seções da malha e nem todos os nós das seções restringidas, os resultados foram bons, especialmente para comprimentos iguais e maiores do que o comprimento crítico de flambagem distorcional. Em um segundo trabalho dos autores [Casafont et al., 2009b], o procedimento para o cálculo da carga crítica de modos de deformação puros, através do MEF foi aplicado também a modos individuais globais e locais, considerando diferentes dimensões da seção. Mais uma vez, o método proposto mostrou bons resultados, principalmente para comprimentos maiores do que o crítico.

Posteriormente, Casafont et al., 2011, estenderam a pesquisa para análise de modos combinados, para perfis com outras condições de contorno das extremidades e para carregamento de flexão pura. O método de restrição proposto utiliza um grau de liberdade como incógnita para cada modo de deformação da seção considerado. As equações de restrição são deduzidas apenas para um componente harmônico comum aos modos de deformação envolvidos na análise. Na análise de perfis com condições de contorno diferentes de apoios simples, o procedimento de restrição foi aplicado de forma independente das funções de forma longitudinais, porém, considerando somente um modo de deformação. Também foi feito um estudo sobre a influência do número de graus de liberdade restringidos nos resultados de carga crítica.

A pesquisa desenvolvida por Casafont e sua equipe ainda é um tema aberto. Resta explorar o método para a o cálculo da carga crítica de casos gerais de modos de deformação combinados, para o cálculo de contribuição modal e para a análise de perfis não-uniformes (perfis com apoios intermediários ou furos, por exemplo). Também é necessário mais pesquisa sobre a sensibilidade dos resultados ao grau de restrição da malha, lembrando que a restrição em apenas algumas seções e em apenas alguns nós de cada seção é muito vantajosa quando o procedimento é aplicado a modelos com malha irregular, que é o caso de perfis com furos.

## 4. METODOLOGIA

Nesse capítulo, primeiramente é apresentada a descrição dos perfis estudados e dos modelos de elementos finitos utilizados. Posteriormente, descreve-se o procedimento geral de restrição da malha do modelo de elementos finitos que permite uma análise linear de flambagem focada em qualquer combinação de modos de deformação da seção, considerando diversos componentes harmônicos na direção longitudinal. O cálculo da interação modal é automaticamente derivado da formulação. Para a análise focada em certas classes de flambagem, diferentes esquemas de restrição alternativos são possíveis. Em outros casos, o número de componentes harmônicos pode ser deixado livre.

### 4.1 Descrição dos modelos estudados

Para validar os métodos de restrição propostos, foi adotado um caso simples. Considerou-se um perfil C com enrijecedores de borda, uniforme ao longo do comprimento. Posteriormente, foi feita uma aplicação a um perfil inspirado em uma estrutura real (uma coluna de um silo de armazenagem), com apoios intermediários, ou seja, ao longo de seu comprimento. A Figura 4.1 mostra as seções dos perfis estudados, considerados como um conjunto de placas, representadas pelos planos médios, unidas sem raios nas dobras da seção, conforme a limitação na definição dos modos de flambagem puros utilizada nesse trabalho.

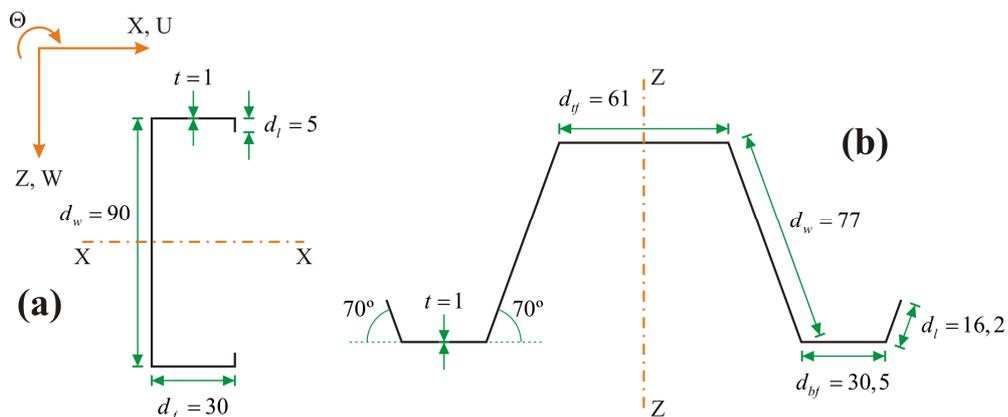


Figura 4.1. Seções dos perfis estudados (dimensões em mm). (a) Perfil C com enrijecedores de borda utilizado para validação dos procedimentos propostos. (b) Perfil inspirado na estrutura real utilizada como aplicação dos procedimentos (coluna de um silo de armazenagem).

Na Figura 4.1(a),  $d_w$  é a dimensão da alma,  $d_f$  é a dimensão dos flanges,  $d_l$  é a dimensão dos enrijecedores e  $t$  é a espessura. Para o perfil da Figura 4.1(b),  $d_w$  é a dimensão

das almas,  $d_{bf}$  é a dimensão dos flanges inferiores,  $d_{f}$  é a dimensão do flange superior,  $d_l$  é a dimensão dos enrijecedores e  $t$  é a espessura. Assume-se um módulo de elasticidade longitudinal de 210000 MPa para o perfil (a) e de 200000 MPa para o perfil (b). O coeficiente de Poisson é de 0,3.

Os carregamentos utilizados estão mostrados na Figura 4.2. Para o perfil C utilizado na validação dos procedimentos, são considerados dois tipos de carregamento: compressão axial (Figura 4.2(a)) e flexão em torno do eixo  $X - X$  (Figura 4.2(b)). Para o perfil da coluna do silo, é considerado apenas o carregamento de compressão axial (Figura 4.2(c)). Os carregamentos são modelados como forças distribuídas na linha média da seção, em ambas as extremidades do perfil.  $p$  representa o valor máximo da carga distribuída na seção.

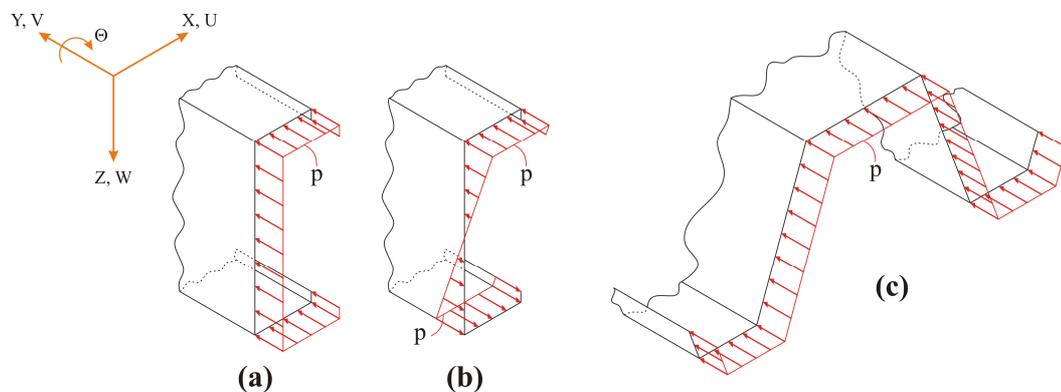


Figura 4.2. Carregamentos utilizados. (a) Perfil C submetido à compressão axial. (b) Perfil C submetido à flexão em torno do eixo de maior inércia. (c) Perfil da coluna do silo submetido à compressão axial.

A seção utilizada para a validação (Figura 4.1(a)) é mesma de Casafont et al., 2009a. Na Figura 4.1 e na Figura 4.2, está exibido o sistema de coordenadas global  $X - Y - Z$  adotado, com os GDLs do MFFr e da GBT ( $U, V, W$  e  $\Theta$ ). O sistema de coordenadas é o mesmo dos trabalhos de Ádány e Schafer, 2006a, 2006b e 2008, e Casafont et al., 2009a, 2009b e 2011 (já utilizado na seção 2.2).

Para a análise de elementos finitos, foi utilizado o software Ansys [Ansys, Inc., 2007]. Os perfis foram modelados utilizando elementos tridimensionais de casca, do tipo SHELL63 [Ansys, Inc., 2007]. Trata-se de elementos estruturais com rigidez de membrana e de flexão, possuindo quatro nós com seis GDLs em cada.

Os perfis foram discretizados com malha regular, com tamanho máximo do elemento de 5 mm para o perfil C e de 8 mm para o perfil da coluna do silo. Os enrijecedores do perfil

C (de dimensão  $d_l = 5 \text{ mm}$ ) foram forçados a ter 2 elementos na seção. Exemplos das malhas de elementos finitos estão dados na Figura 4.3.

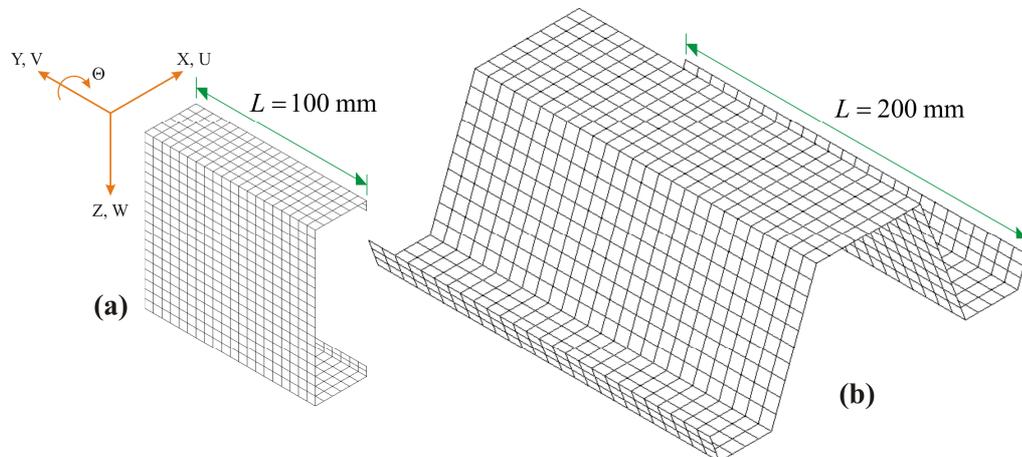


Figura 4.3. Exemplos das malhas de elementos finitos. (a) Perfil C. (b) Perfil da coluna do silo.

O tamanho máximo de elemento adotado resulta em uma determinada quantidade de subnós em cada elemento de placa da seção. Para o perfil C, além dos nós principais (nós localizados nas extremidades de cada elemento de placa), obtém-se uma seção com 1 subnó nos enrijecedores, 5 subnós nos flanges e 17 subnós na alma. Para o perfil da coluna do silo, a seção possui 2 subnós nos enrijecedores, 3 subnós nos flanges inferiores, 9 subnós nas almas e 7 subnós no flange superior.

Assim, define-se uma nomenclatura para a discretização da seção, baseada no número de subnós em cada elemento de placa. Iniciando no enrijecedor de borda e indo até o elemento de placa por onde passa o eixo de simetria da seção (alma para o perfil C e flange superior para o perfil da coluna do silo, de acordo com Figura 4.1), tem-se uma discretização 1-5-17 para o perfil C e uma discretização 2-3-9-7 para o perfil da estrutura real. As discretizações das seções dos modelos de elementos finitos estão ilustradas na Figura 4.4(a) e (b). Outra discretização utilizada nesse trabalho está mostrada na Figura 4.4(c) (discretização 0-1-1 do perfil C). Essa discretização refere-se a uma seleção de nós restringidos de uma seção do modelo de elementos finitos, conforme discutido mais adiante.

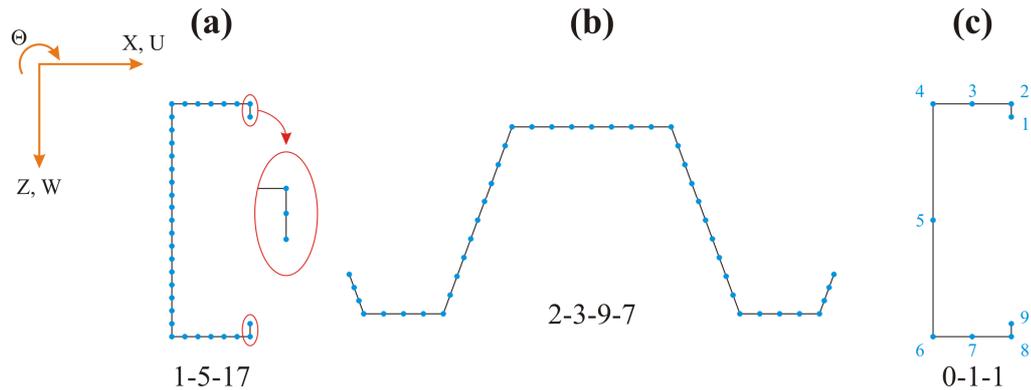


Figura 4.4. Discretizações das seções dos modelos de elementos finitos. (a) Discretização da seção do perfil C. (b) Discretização da seção do perfil da coluna do silo. (c) Discretização utilizada para um dos esquemas de restrição dos nós de uma seção do perfil C.

Duas condições de contorno foram analisadas nesse trabalho: (1) perfil com extremidades simplesmente apoiada/simplesmente apoiada (perfil S-S) e (2) perfil com extremidades engastada-engastada (perfil E-E). As condições de contorno aqui adotadas são locais, ou seja, aplicam-se a cada placa que forma o perfil.

Os modelos de elementos finitos foram utilizados em análise lineares de flambagem. Primeiramente, uma análise linear elástica é realizada, para se obter a matriz de rigidez geométrica do modelo. Posteriormente, um problema de autovalores é resolvido, fornecendo modos de flambagem e cargas críticas. Para que os resultados sejam comparáveis com os fornecidos pelo MFF, as condições de contorno dos modelos devem ser aplicadas de forma que a deformação por efeito Poisson na análise linear elástica esteja livre. No caso de um perfil com carga axial, o motivo é facilmente compreendido. Com a deformação por Poisson livre nas extremidades, a deformação da seção na análise linear elástica será constante ao longo do comprimento do perfil. Caso o efeito Poisson estivesse restringido nas extremidades, a deformada da seção seria variável ao longo do comprimento do perfil, o que não pode ser levado em conta no MFF.

As condições de contorno das extremidades do modelo na análise linear elástica estão simbolicamente mostradas na Figura 4.5, para o perfil C. Os *deslocamentos acoplados* representam restrições que fazem com que todos os nós de aplicação tenham o mesmo valor de deslocamento em uma análise. Assim, nas extremidades, todos os nós de um flange terão o mesmo deslocamento  $W$ , e, em um enrijecedor, todos os nós terão o mesmo deslocamento  $U$ . A Figura 4.5(b) exemplifica o efeito Poisson para um perfil sob compressão axial (a deformação é constante ao longo do perfil).

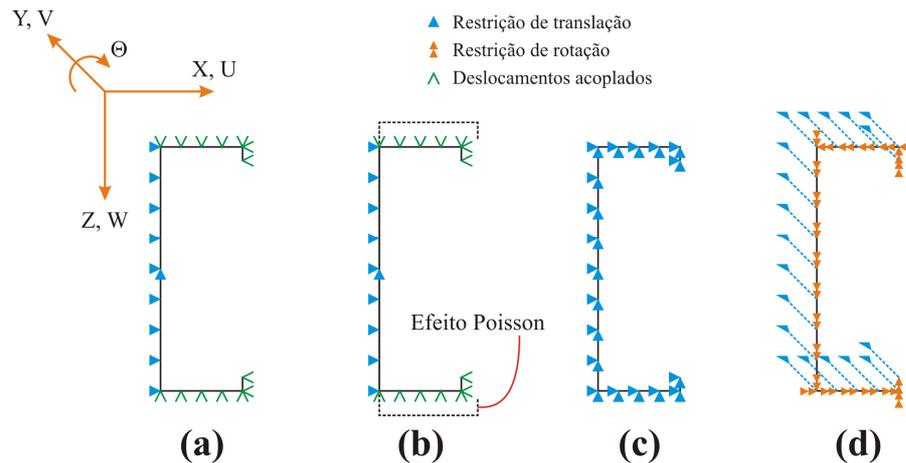


Figura 4.5. Condições de contorno das extremidades para o perfil C. (a) Condições de contorno na análise linear elástica. (b) Efeito Poisson na análise linear elástica para compressão axial. (c) Condições de contorno para um perfil S-S em uma análise linear de flambagem focada em modos G, D, L ou combinações destes. (d) Condições de contorno adicionais para um perfil E-E em uma análise linear de flambagem.

Na análise linear de flambagem, devem ser aplicadas as condições de contorno particulares de cada caso analisado (perfil S-S ou perfil E-E). Para um perfil S-S, as condições de contorno das extremidades são aplicadas como mostra a Figura 4.5(c), sempre que a análise linear de flambagem for focada em modos G, D, L ou combinações destes. O conjunto de restrições proposto garante localmente o apoio simples em cada elemento de placa que forma o perfil (translação perpendicular ao plano da placa impedida, e rotação e empenamento livres) e evita modos de flambagem associados à extensão transversal (membranal) dos elementos de placa (característica dos modos O). Caso os modos O sejam considerados na análise de flambagem, devem ser mantidas as condições de contorno da Figura 4.5(a).

Para a análise de flambagem do perfil E-E, além das condições de contorno das extremidades dadas na Figura 4.5(c) (ou Figura 4.5(a), dependendo da inclusão dos modos O na análise), precisam ser aplicadas as restrições da Figura 4.5(d). Essas restrições adicionais referem-se (1) ao engaste local de cada elemento de placa que forma o perfil e (2) ao empenamento nulo.

Deve-se observar que restrições longitudinais (direção Y) devem ser aplicadas durante a análise linear elástica. Assim, restringem-se todos os GDLs V da seção localizada no meio do vão. Antes de se realizar a análise de flambagem, essas restrições devem ser removidas, a não ser que se espere empenamento nulo na seção onde elas foram aplicadas, o que não é o caso geral.

Para o perfil da coluna do silo da Figura 4.1(b), que possui ângulos relativos entre elementos de placa diferentes de  $90^\circ$ , a aplicação das condições de contorno das extremidades é muito mais trabalhosa. A Figura 4.6 esquematiza o processo.

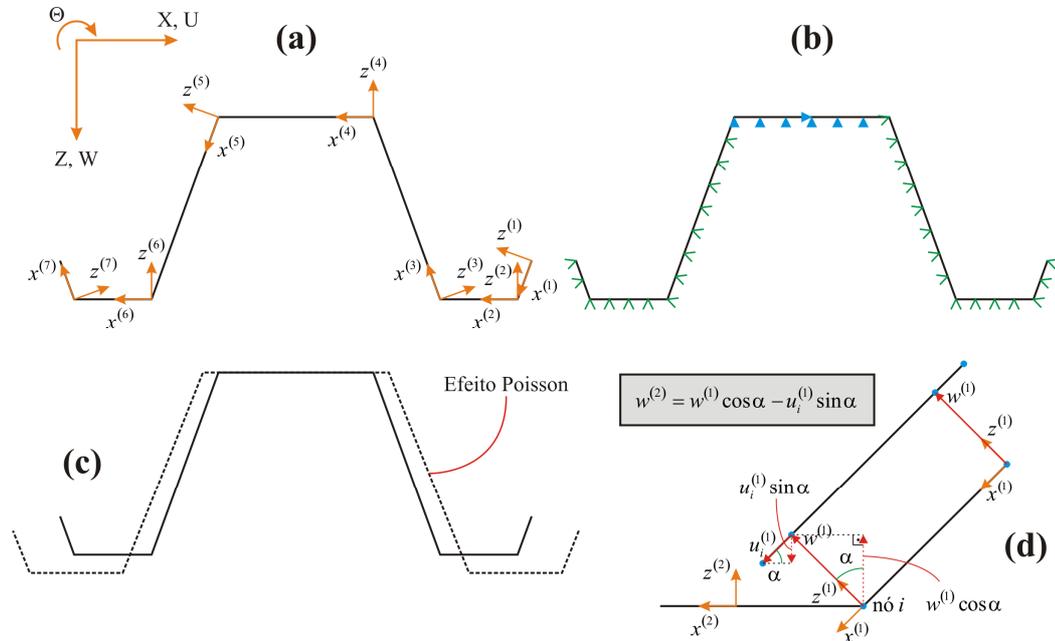


Figura 4.6. Condições de contorno das extremidades para o perfil da coluna do silo. (a) Sistemas de coordenadas locais de cada elemento de placa do perfil. (b) Aplicação de restrições de translação e de deslocamentos acoplados. (c) Deformação desejada na análise linear elástica para carregamento de compressão axial. (d) Relação entre os deslocamentos de elementos de placa contíguos.

Primeiramente, definem-se sistemas de coordenadas locais associados a cada elemento de placa que forma o perfil, conforme Figura 4.6(a). Posteriormente, aplicam-se restrições de translação e deslocamentos acoplados conforme Figura 4.6(b), de forma semelhante à realizada para o perfil C, permitindo a deformação por Efeito Poisson na análise linear elástica. Como os ângulos relativos entre os elementos de placa são diferentes de  $90^\circ$ , um nó situado na união de dois elementos nunca vai ter os eixos  $x$  e  $z$  coincidindo com os dois elementos. Portanto, na aplicação de deslocamentos acoplados, esse nó só pode ser relacionado a nós de um dos elementos de placa da união, como mostra a Figura 4.6(b).

Para que a deformada do perfil na análise linear elástica seja como a da Figura 4.6(c) (para carregamento de compressão axial), é preciso relacionar os deslocamentos dos dois elementos de placa de uma união. A relação necessária é dada na Figura 4.6(d), tomando como exemplo os elementos 1 e 2 da Figura 4.6(a) (elementos com sistemas de coordenadas

$x^{(1)} - z^{(1)}$  e  $x^{(2)} - z^{(2)}$ , respectivamente). No elemento 1, todos os nós possuem deslocamentos  $w$  acoplados, que assumirão um valor genérico  $w^{(1)}$  quando o perfil se deformar. No elemento 2, todos os nós, exceto o nó  $i$ , têm deslocamentos  $w$  acoplados, assumindo um valor  $w^{(2)}$ . O valor de  $w^{(2)}$  pode ser determinado a partir das deformações permitidas para o elemento 1, que terá um deslocamento constante  $w^{(1)}$  e uma extensão membranal. Finalmente, o valor de  $w^{(2)}$  pode ser determinado em função de  $w^{(1)}$  e do deslocamento  $u$  do nó  $i$  ( $u_i^{(1)}$ ), através de relações geométricas, conforme Figura 4.6(d). Esse tipo de relação de deslocamentos deve ser aplicado a para cada par de elementos de placa contíguos.

Uma descrição detalhada do perfil da coluna do silo e de suas condições de contorno intermediárias é dada no Capítulo 6.

#### 4.2 Procedimento de restrição geral de uma malha de elementos finitos

Em uma análise linear de flambagem, para se obter uma solução focada em um modo de deformação puro, o campo de deformações do modelo numérico precisa ser restringido de acordo com o espaço de deformações de um tipo de flambagem (global, distorcional, local ou outro). No contexto do MFF, o espaço de deformações de um tipo de flambagem é definido por uma base vetorial formada por diversos modos de deformação da seção, usualmente ortogonais e normalizados. São definidas bases vetoriais para cada componente harmônico considerado na direção longitudinal do perfil. Generalizando, a solução pode ser focada em qualquer combinação de modos de deformação da seção, pertencentes às diferentes classes de flambagem e associados a quaisquer componentes harmônicos, definindo-se as chamadas matrizes de restrição.

As seções 2.3 e 2.4 mostram como se faz a restrição de um modelo de faixas finitas para se obterem soluções focadas em qualquer combinação de modos de deformação (MFFr). As matrizes de restrição do MFFr são obtidas considerando as definições inspiradas na GBT para os diferentes tipos de flambagem. Admitindo válidas essas definições, as matrizes de restrição do MFFr continuam válidas no contexto do MEF e podem ser utilizadas para restringir o modelo. Deve-se observar que, com esse procedimento, apenas os GDLs do MFF serão restringidos no modelo tridimensional ( $U$ ,  $V$ ,  $W$  e  $\Theta$  na Figura 4.3).

O procedimento aqui apresentado é inspirado no proposto por Casafont et al., 2009a 2009b, porém desenvolvido de forma mais geral, conforme discutido nas próximas seções.

Convém lembrar que, conforme a definição matemática dos modos de flambagem do MFFr, o procedimento de restrição geral de uma malha de elementos finitos só pode ser aplicado a perfis prismáticos de seção aberta, ou seja, não é possível considerar raios nas dobras do perfil analisado. Além disso, só podem ser analisados perfis formados por pelo menos três elementos de placa.

O espaço de GDLs do MFF, dado pelo vetor  $\mathbf{d}$  da Eq. (2.25), é inteiramente gerado pelas bases vetoriais de (2.27), onde são considerados  $q$  componentes harmônicos. Por simplicidade, escolhem-se dois componentes harmônicos quaisquer  $m_1$  e  $m_2$ :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{[m_1]} \\ \mathbf{d}_{[m_2]} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{GDLO}}^{O[m_1]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\text{GDLO}}^{O[m_2]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{\text{GDLO}}^{[m_1]} \\ \mathbf{d}_{\text{GDLO}}^{[m_2]} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Para simplificar ainda mais, selecionam-se apenas dois modos de deformação da seção, cada um associado a um componente harmônico diferente, ou seja, define-se uma matriz de restrição escolhendo uma coluna de  $\mathbf{R}_{\text{GDLO}}^{O[m_1]}$  (vetor  $\mathbf{R}_1$  associado a  $m_1$ ) e outra de  $\mathbf{R}_{\text{GDLO}}^{O[m_2]}$  (vetor  $\mathbf{R}_2$  associado a  $m_2$ ). Assim, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{[m_1]} \\ \mathbf{d}_{[m_2]} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{[m_1]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2^{[m_2]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1^{[m_1]} \\ \beta_2^{[m_2]} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

onde  $\beta_1^{[m_1]}$  e  $\beta_2^{[m_2]}$  são os coeficientes de contribuição modal dos dois modos de deformação considerados (normalizados).

Em (4.2), são considerados os GDLs das linhas nodais de um modelo de faixas finitas. Para considerar a variação dos deslocamentos ao longo do comprimento do perfil, a Eq. (4.2) deve ser escrita em função de  $Y$ :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{[m_1]}(Y) \\ \mathbf{d}_{[m_2]}(Y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{[m_1]}(Y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2^{[m_2]}(Y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1^{[m_1]} \\ \beta_2^{[m_2]} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Como já mencionado, a variação dos GDLs do MFF ao longo do comprimento do perfil é dada pelas funções de forma longitudinais. Para um componente harmônico  $m$ , os GDLs transversais ( $U$ ,  $W$  e  $\Theta$ ) variam de acordo com uma função  $\psi_{[m]}(Y)$ , e os GDLs de empenamento  $V$  variam de acordo com  $\psi'_{[m]}(Y)(L/m\pi)$ . Para as condições de contorno analisadas aqui, as funções de forma longitudinais estão dadas na Eq. (2.24). Assim, pode-se expandir a Eq. (4.3) como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_{[m_1]}(Y) \\ \mathbf{V}_{[m_1]}(Y) \\ \mathbf{W}_{[m_1]}(Y) \\ \mathbf{\Theta}_{[m_1]}(Y) \\ \mathbf{U}_{[m_2]}(Y) \\ \mathbf{V}_{[m_2]}(Y) \\ \mathbf{W}_{[m_2]}(Y) \\ \mathbf{\Theta}_{[m_2]}(Y) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{U}_1^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & 0 \\ \mathbf{V}_1^{[m_1]} \psi'_{[m_1]}(Y)(L/m_1\pi) & 0 \\ \mathbf{W}_1^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & 0 \\ \mathbf{\Theta}_1^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_2^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \\ 0 & \mathbf{V}_2^{[m_2]} \psi'_{[m_2]}(Y)(L/m_2\pi) \\ 0 & \mathbf{W}_2^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \\ 0 & \mathbf{\Theta}_2^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \beta_1^{[m_1]} \\ \beta_2^{[m_2]} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

onde, por exemplo,  $\mathbf{U}_1^{[m_1]}$  contém os deslocamentos  $U$  do modo de deformação  $\mathbf{R}_1$  associado ao componente harmônico  $m_1$ .

A relação de restrição dada pela Eq. (4.4) permite escrever os deslocamentos do MFF associados a cada componente harmônico em qualquer posição ao longo do comprimento do perfil. No MEF, os GDLs estão associados aos nós da malha, e não estão separados com respeito a componentes harmônicos longitudinais. Portanto, para que a Eq. (4.4) seja aplicável a uma seção de um modelo, a mesma deve ser reescrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}(Y) \\ \mathbf{V}(Y) \\ \mathbf{W}(Y) \\ \mathbf{\Theta}(Y) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{U}_1^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & \mathbf{U}_2^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \\ \mathbf{V}_1^{[m_1]} \psi'_{[m_1]}(Y)(L/m_1\pi) & \mathbf{V}_2^{[m_2]} \psi'_{[m_2]}(Y)(L/m_2\pi) \\ \mathbf{W}_1^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & \mathbf{W}_2^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \\ \mathbf{\Theta}_1^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & \mathbf{\Theta}_2^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \beta_1^{[m_1]} \\ \beta_2^{[m_2]} \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

onde, por exemplo, o vetor  $\mathbf{U}(Y)$  contém os deslocamentos  $U$  dos nós de uma seção (na posição  $Y$ ) de um modelo de elementos finitos. É importante notar que, na passagem da Eq. (4.4) para a Eq. (4.5), é conveniente o uso de *bases axiais modais desacopladas*.

Em um modelo de elementos finitos, a relação de restrição da Eq. (4.5) só pode ser aplicada nas posições  $Y$  que contenham nós, como a seção  $s$  da Figura 4.7(a) (posição  $Y_s$ ). Além disso, é recomendável a utilização de uma malha regular de elementos finitos (como as da Figura 4.3). Porém, caso deseje-se modelar irregularidades ao longo do comprimento do perfil, não é possível obter uma malha uniforme ao longo do comprimento. Assim, torna-se conveniente (1) aplicar as restrições em apenas alguns nós de uma seção do modelo de

elementos finitos e (2) aplicar restrições em apenas algumas seções ao longo do comprimento do perfil. A Figura 4.7(b) mostra um exemplo com apenas algumas seções restringidas, separadas por uma distância  $\Delta Y_s$ . A Figura 4.7(c) exhibe os nós selecionados para restrição em cada seção (referentes à discretização 0-1-1 da Figura 4.4(c)).

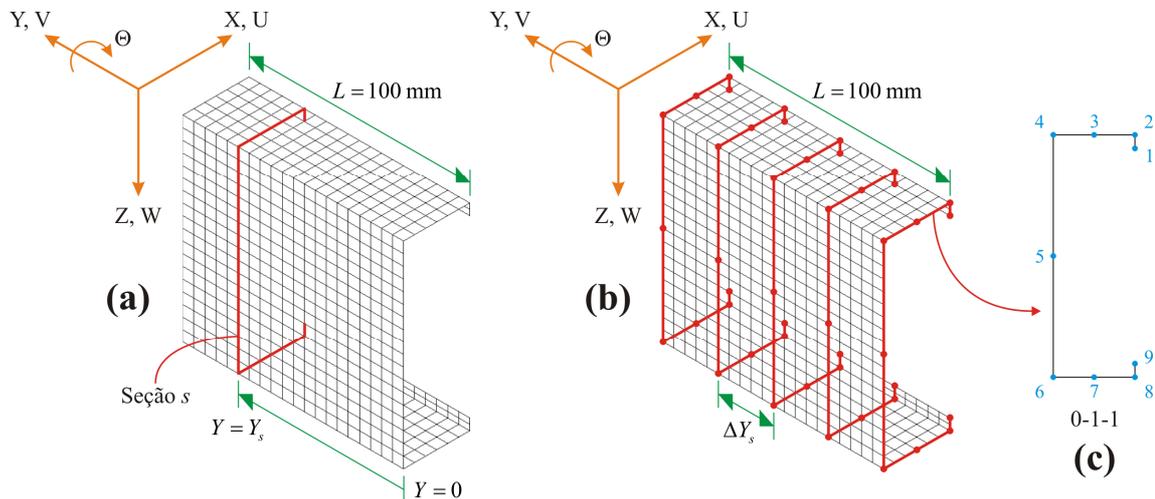


Figura 4.7. Seleção de seções e nós para a restrição da malha de elementos finitos do perfil C. (a) Seção  $s$  a ser restringida. (b) Restrição de apenas algumas seções da malha. (c) Restrição de apenas alguns nós da seção (somente os nós da discretização da seção 1-1-0).

A aplicação das restrições em apenas algumas seções do modelo é automaticamente controlada através da Eq. (4.5). Basta gerar uma malha com nós em seções estrategicamente posicionadas (certas coordenadas  $Y_s$ ), onde se desejem aplicar as restrições.

É importante observar que, muitas vezes, a restrição de um número de nós menor do que o total da malha é suficiente para se obterem bons resultados. Além disso, o tempo de pré-processamento do MEF é bastante reduzido.

Para o procedimento geral de restrição dos modelos de elementos finitos, dois esquemas de restrição foram considerados nesse trabalho:

- **Esquema “Total”:** Todos os nós de todas as seções da malha são utilizados para a restrição. Deve-se lembrar que esse esquema só é facilmente implementado para malhas regulares. Os resultados obtidos com o esquema Total são considerados padrões para o método proposto.
- **Esquema “1 Sub”:** Esse esquema foi utilizado somente na análise do perfil C. Apenas os nós principais da seção e 1 subnó da alma e de cada flange são utilizados para a restrição. Portanto, esse esquema considera uma discretização 0-1-1 para aplicação das

restrições. Além disso, apenas algumas seções são restringidas ao longo do comprimento do perfil. O espaçamento entre seções restringidas  $\Delta Y_s$  é de 10 mm para perfis com  $L \leq 200$  mm e de 25 mm quando  $L > 200$  mm. Esse esquema foi utilizado em Casafont et al., 2009a e 2009b, e está ilustrado na Figura 4.4(c).

Para a restrição de um modelo de elementos finitos através Eq. (4.5), são utilizados os modos de deformação puros da seção do MFFr (no caso, vetores  $\mathbf{R}_1^{[m_1]}$  e  $\mathbf{R}_2^{[m_2]}$ ). O software CUFSM permite análises através do MFFr com a manipulação dos modos de deformação individuais usados, mas, através do CUFSM, não é possível um acesso direto aos modos de deformação. Por outro lado, Schafer disponibilizou as rotinas de programação que são empregadas dentro do CUFSM em seu website [Schafer, 2006, e Schafer, 2011]. A partir dessas rotinas, implementadas em Matlab [The MathWorks, Inc., 2010], é possível a obtenção dos valores nodais de deslocamentos dos modos de deformação individuais.

Dependendo do esquema de restrição adotado (Total ou 1 Sub), utilizam-se modelos de faixas finitas com diferentes discretizações para a obtenção dos modos de deformação da seção (por exemplo, para o perfil C, discretização 1-5-17 ou 0-1-1). Como mencionado, os modos de deformação utilizados em (4.5) são normalizados. Então, é importante lembrar que o esquema de normalização NV é sensível a discretização do modelo de faixas finitas.

A implementação das restrições no modelo de elementos finitos é feita de forma diferente da realizada no MFFr, sendo detalhada na próxima seção.

Finalmente, cabe destacar que o uso combinado das matrizes de restrição do MFFr e funções de forma longitudinais foi apresentado pela primeira vez por Casafont et al., 2009a e 2009b, porém considerando apenas um modo de deformação (da GBT) e um componente harmônico. Posteriormente [Casafont et al., 2011], foi feita a extensão para uma combinação de modos de deformação, considerando apenas o caso de um componente harmônico comum aos modos considerados. Assim, não foi realizada a abordagem geral aqui proposta, combinando modos e componentes do MFFr e deixando explícitos os coeficientes de contribuição modal.

#### **4.2.1 Implementação das restrições**

No MFFr, o problema de autovalores que define a análise linear de flambagem pode ser restringido através da aplicação de uma matriz de restrição, conforme Eq. (2.11). Com o

uso de bases ortogonais, é feita uma transformação no problema de autovalores, que passa a trabalhar com coordenadas modais, ou seja, a solução representa as contribuições dos diversos modos de deformação da seção considerados na análise.

Em programas de elementos finitos, em geral, não é possível ou não é prático alterar as matrizes de rigidez do modelo para restringir o problema de autovalores como é feito no MFFr. Portanto, a solução será sempre dada em termos dos deslocamentos nodais do modelo (GDLs da malha). Em outras palavras, não há como encontrar diretamente os coeficientes  $\beta$  de (4.5).

Assim, a restrição das deformações do modelo de elementos finitos deve ser feita de outra forma. Conforme proposta de Casafont et al., 2009a e 2009b, as restrições do modelo de elementos finitos podem ser definidas através de relações entre os GDLs da malha. Essas relações são permitidas pelo software Ansys, através da execução do comando CE [Ansys, Inc., 2007].

As seções restringidas têm suas distribuições de deslocamentos definidas por uma relação como a dada em (4.5). A magnitude dessas distribuições (representada pelos coeficientes de contribuição modal  $\beta$ ) deve ser calculada na análise de flambagem. A variação das distribuições ao longo do comprimento do perfil é automaticamente dada pelas funções de forma longitudinais. Assim, a análise de flambagem deve ter, pelo menos, uma incógnita para cada modo de deformação considerado (no MFF, as incógnitas são os próprios coeficientes  $\beta$ ).

No MEF, as incógnitas precisam, necessariamente, ser algum GDL da malha, ou seja, alguns GDLs de alguns nós da malha devem ser deixados livres e os coeficientes  $\beta$  devem ser escritos em função desses GDLs. Finalmente, todos os outros GDLs restringidos são escritos em função dos GDLs assumidos como incógnitas.

Primeiramente, considera-se o exemplo de um problema restringido de acordo com apenas um modo de deformação e um componente harmônico, ou seja, o problema é dado pela Eq. (4.5) com, por exemplo,  $\beta_2^{[m_2]} = 0$ . Escrevendo a equação para um nó genérico  $i$  da seção restringida, tem-se:

$$\begin{aligned}
U_i(Y) &= \beta_1^{[m_1]} U_{1,i}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) \\
V_i(Y) &= \beta_1^{[m_1]} V_{1,i}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) (L/m_1\pi) \\
W_i(Y) &= \beta_1^{[m_1]} W_{1,i}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) \\
\Theta_i(Y) &= \beta_1^{[m_1]} \Theta_{1,i}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde, por exemplo,  $U_{1,i}^{[m_1]}$  é o deslocamento  $U$  do modo de deformação  $\mathbf{R}_1$  associado ao componente harmônico  $m_1$ , no nó  $i$  da seção.

Como comentado, a distribuição de deslocamentos do modo de deformação da seção  $\mathbf{R}_1$  é obtida através das rotinas do software CUFISM. O coeficiente de contribuição modal  $\beta_1^{[m_1]}$  define a magnitude desse modo e deve ser escrito em função de um GDL da malha escolhido como incógnita.

Tomando como exemplo a discretização 0-1-1 do perfil C, utilizada para a definição dos modos e para a restrição do modelo (Figura 4.7(c)), qualquer GDL ( $U$ ,  $V$ ,  $W$  ou  $\Theta$ ) de qualquer dos 9 nós de qualquer seção restringida pode ser utilizado como incógnita do modelo. Como modos de deformação locais possuem distribuição de empenamento nula ( $V_{1,i}^{[m_1]} = 0$ , caso  $\mathbf{R}_1$  seja um modo local), é conveniente escolher algum GDL transversal para se determinar o coeficiente de contribuição modal. Assim, no exemplo, seleciona-se o GDL  $\Theta$  do nó 1 da Figura 4.7(c), localizado na posição  $Y_A$ . Portanto, tem-se:

$$\Theta_1(Y_A) = \beta_1^{[m_1]} \Theta_{1,1}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y_A) \quad \therefore \quad \beta_1^{[m_1]} = \frac{\Theta_1(Y_A)}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y_A)} \tag{4.7}$$

Substituindo o coeficiente  $\beta_1^{[m_1]}$  de (4.7) em (4.6), os GDLs  $U$ ,  $V$ ,  $W$  e  $\Theta$  dos nós restringidos podem ser escritos em função da incógnita  $\Theta_1(Y_A)$ . Os GDLs transversais restringidos ficam dados por:

$$U_i(Y) = \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)} \frac{U_{1,i}^{[m_1]}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]}} \Theta_1(Y_A) \tag{4.8}$$

$$W_i(Y) = \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)} \frac{W_{1,i}^{[m_1]}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]}} \Theta_1(Y_A) \tag{4.9}$$

$$\Theta_i(Y) = \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)} \frac{\Theta_{1,i}^{[m_1]}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]}} \Theta_1(Y_A) \tag{4.10}$$

Conforme discutido posteriormente, para se implementar o procedimento de restrição em que a solução é independente das funções de forma longitudinais, é essencial desacoplar os GDLs de empenamento  $V$  dos GDLs transversais. Isso é necessário porque a variação longitudinal dos GDLs de empenamento é diferente da variação dos GDLs transversais.

Portanto, além da incógnita  $\Theta_1(Y_A)$ , seleciona-se uma incógnita adicional  $V$ , por exemplo,  $V_1(Y_A)$ . O coeficiente de contribuição modal é novamente calculado em função da nova incógnita, de forma que os GDLs de empenamento restringidos possam ser escritos como:

$$V_i(Y) = \frac{\psi'_{[m_1]}(Y) V_{1,i}^{[m_1]}}{\psi'_{[m_1]}(Y_A) V_{1,1}^{[m_1]}} V_1(Y_A) \quad (4.11)$$

Cada equação de restrição (Eqs. (4.8)-(4.11)) é escrita em função de um GDL assumido como incógnita e possui dois coeficientes. O primeiro coeficiente é a razão entre a função de forma na posição do nó restringido e a função de forma na posição do nó incógnita. O segundo coeficiente refere-se à distribuição de deslocamentos do modo considerado e leva em conta apenas a seção.

Deve-se observar que as incógnitas devem ser escolhidas em nós onde  $\Theta$  e  $V$  do modo de deformação da seção não sejam nulos. No exemplo, a rotação  $\Theta$  e o deslocamento  $V$  não podem ser nulos no nó 1 da discretização 0-1-1 do perfil C. É importante lembrar que modos de deformação locais têm a distribuição de empenamento nula. Então, na restrição de acordo com um modo local, ao invés de se aplicar a Eq. (4.11), os GDLs de empenamento dos nós restringidos devem ser diretamente igualados a zero. Finalmente, deve-se destacar que as restrições dos GDLs devem ser aplicadas após a análise linear elástica, ou seja, após a geração da matriz de rigidez geométrica.

Agora, considera-se o problema restringido da Eq. (4.5), ou seja, de acordo com dois modos de deformação, cada um com um componente harmônico diferente. Primeiramente, escreve-se a Eq. (4.5) para um nó genérico  $i$  da seção restringida:

$$\begin{aligned} U_i(Y) &= \beta_1^{[m_1]} U_{1,i}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) + \beta_2^{[m_2]} U_{2,i}^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \\ V_i(Y) &= \beta_1^{[m_1]} V_{1,i}^{[m_1]} \psi'_{[m_1]}(Y) (L/m_1\pi) + \beta_2^{[m_2]} V_{2,i}^{[m_2]} \psi'_{[m_2]}(Y) (L/m_2\pi) \\ W_i(Y) &= \beta_1^{[m_1]} W_{1,i}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) + \beta_2^{[m_2]} W_{2,i}^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \\ \Theta_i(Y) &= \beta_1^{[m_1]} \Theta_{1,i}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) + \beta_2^{[m_2]} \Theta_{2,i}^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde são utilizados modos de deformação da seção normalizados ( $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$ ), obtidos através das rotinas do software CUFSM.

No exemplo da Eq. (4.5), existem dois modos de deformação e, conseqüentemente, dois coeficientes de contribuição modal desconhecidos ( $\beta_1^{[m_1]}$  e  $\beta_2^{[m_2]}$ ). Escolhendo dois GDLs da malha como incógnitas e utilizando a Eq. (4.12), define-se um sistema linear de duas equações que permite encontrar os coeficientes de contribuição modal em função desses GDLs.

Como já comentado, é conveniente escolher GDLs transversais para se determinarem os coeficientes de contribuição modal. Por simplicidade, escolhem-se GDLs de um mesmo tipo (por exemplo, somente  $\Theta$ ) em nós diferentes da discretização da seção adotada. Esses nós podem estar em qualquer seção restringida do modelo, mas, para simplificar ainda mais, escolhem-se dois nós diferentes em uma mesma seção. Assim, no exemplo, selecionam-se os GDLs  $\Theta$  dos nós 1 e 2 da Figura 4.7(c), localizados em uma mesma seção na posição  $Y_A$ . Portanto, tem-se:

$$\begin{cases} \Theta_1(Y_A) = \beta_1^{[m_1]} \Theta_{1,1}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y_A) + \beta_2^{[m_2]} \Theta_{2,1}^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y_A) \\ \Theta_2(Y_A) = \beta_1^{[m_1]} \Theta_{1,2}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y_A) + \beta_2^{[m_2]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y_A) \end{cases} \quad (4.13)$$

Do sistema de equações de (4.13), os coeficientes de contribuição modal  $\beta_1^{[m_1]}$  e  $\beta_2^{[m_2]}$  podem ser obtidos em função das duas incógnitas  $\Theta_1(Y_A)$  e  $\Theta_2(Y_A)$  (as quais serão dadas pela análise linear de flambagem do modelo restringido). Resolvendo (4.13):

$$\begin{aligned} \beta_1^{[m_1]} &= \frac{\Theta_{2,2}^{[m_2]} \Theta_1(Y_A) - \Theta_{2,1}^{[m_2]} \Theta_2(Y_A)}{(\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}) \psi_{[m_1]}(Y_A)} \\ \beta_2^{[m_2]} &= \frac{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_2(Y_A) - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_1(Y_A)}{(\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}) \psi_{[m_2]}(Y_A)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) em (4.12), os GDLs  $U$ ,  $W$  e  $\Theta$  dos nós restringidos são reescritos em função das duas incógnitas  $\Theta_1(Y_A)$  e  $\Theta_2(Y_A)$ :

$$\begin{aligned}
U_i(Y) = & \frac{U_{1,i}^{[m_1]} U_{2,2}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)} - U_{1,2}^{[m_1]} U_{2,i}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_2]}(Y)}{\psi_{[m_2]}(Y_A)}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \Theta_1(Y_A) \\
& + \frac{U_{1,1}^{[m_1]} U_{2,i}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_2]}(Y)}{\psi_{[m_2]}(Y_A)} - U_{1,i}^{[m_1]} U_{2,1}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \Theta_2(Y_A)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
W_i(Y) = & \frac{W_{1,i}^{[m_1]} W_{2,2}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)} - W_{1,2}^{[m_1]} W_{2,i}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_2]}(Y)}{\psi_{[m_2]}(Y_A)}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \Theta_1(Y_A) \\
& + \frac{W_{1,1}^{[m_1]} W_{2,i}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_2]}(Y)}{\psi_{[m_2]}(Y_A)} - W_{1,i}^{[m_1]} W_{2,1}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \Theta_2(Y_A)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_i(Y) = & \frac{\Theta_{1,i}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,i}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_2]}(Y)}{\psi_{[m_2]}(Y_A)}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \Theta_1(Y_A) \\
& + \frac{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,i}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_2]}(Y)}{\psi_{[m_2]}(Y_A)} - \Theta_{1,i}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]} \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \Theta_2(Y_A)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Para desacoplar os GDLs de empenamento dos GDLs transversais, selecionam-se duas incógnitas adicionais: por exemplo,  $V_1(Y_A)$  e  $V_2(Y_A)$ . Os coeficientes de contribuição modal são novamente calculados em função das novas incógnitas, de forma que os GDLs de empenamento restringidos possam ser escritos como:

$$\begin{aligned}
V_i(Y) = & \frac{V_{1,i}^{[m_1]} V_{2,2}^{[m_2]} \frac{\psi'_{[m_1]}(Y)}{\psi'_{[m_1]}(Y_A)} - V_{1,2}^{[m_1]} V_{2,i}^{[m_2]} \frac{\psi'_{[m_2]}(Y)}{\psi'_{[m_2]}(Y_A)}}{V_{1,1}^{[m_1]} V_{2,2}^{[m_2]} - V_{1,2}^{[m_1]} V_{2,1}^{[m_2]}} V_1(Y_A) \\
& + \frac{V_{1,1}^{[m_1]} V_{2,i}^{[m_2]} \frac{\psi'_{[m_2]}(Y)}{\psi'_{[m_2]}(Y_A)} - V_{1,i}^{[m_1]} V_{2,1}^{[m_2]} \frac{\psi'_{[m_1]}(Y)}{\psi'_{[m_1]}(Y_A)}}{V_{1,1}^{[m_1]} V_{2,2}^{[m_2]} - V_{1,2}^{[m_1]} V_{2,1}^{[m_2]}} V_2(Y_A)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

No exemplo, a rotação  $\Theta$  e o deslocamento  $V$  dos modos  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  não podem ser nulos nos nós 1 e 2 da discretização 0-1-1 do perfil C. Caso contrário, a contribuição do modo de deformação fica excluída do problema restringido. É importante destacar que, caso algum

modo local seja considerado no problema (distribuição de empenamento nula), sua contribuição é automaticamente excluída na restrição dos GDLs  $V$  (Eq. (4.18)). Nesse caso, os coeficientes de contribuição modal só terão sentido quando calculados utilizando os GDLs transversais (Eq. (4.14)).

Observando as Eqs. (4.15) a (4.18), verifica-se que as equações de restrição são independentes das magnitudes dos modos de deformação, ou seja, se qualquer modo de deformação for multiplicado por certo coeficiente, as equações permanecem inalteradas. Portanto, o esquema de normalização dos modos de deformação não tem influência na carga crítica do modelo restringido. Por outro lado, a normalização tem impacto sobre os coeficientes de participação modal (ver Eq. (4.14)), pois cada modo é modificado de forma independente quando normalizado.

Em análises focadas em combinações de modos naturais, outra vantagem pode ser derivada da independência das equações de restrição em relação às magnitudes dos modos de deformação. Como já comentado, para modos naturais, a razão entre deslocamentos transversais e longitudinais é linearmente dependente do comprimento, mas as distribuições permanecem inalteradas. Portanto, caso a análise restringida considere GDLs transversais e longitudinais desacoplados (como nas Eqs. (4.15) a (4.18)), os modos naturais podem ser definidos para qualquer comprimento de perfil e as equações de restrição permanecem inalteradas. Obviamente, caso haja interesse no cálculo das contribuições modais, os modos naturais devem ser definidos adequadamente em relação ao comprimento e número de meias-ondas.

As equações de restrição apresentadas nessa seção aplicam-se a um exemplo simples. Quanto mais modos de deformação e componentes harmônicos forem considerados no problema, mais extensas ficam essas expressões. Cuidados adicionais devem ser tomados para que o sistema de equações que permite expressar os coeficientes de contribuição modal em função dos GDLs escolhidos como incógnitas tenha solução, ou seja, as incógnitas devem ser escolhidas em posições adequadas da malha.

Por simplicidade na programação, costumam-se selecionar incógnitas de um mesmo tipo, por exemplo, somente GDLs  $\Theta$  para as equações de restrição dos GDLs transversais. Nesse caso, para um conjunto de componentes harmônicos iguais associados aos diferentes modos de deformação, um número igual de nós diferentes da discretização da seção deve ser obrigatoriamente utilizado para selecionar as incógnitas. Assim, no exemplo de dois modos de

deformação, caso  $\psi_{[m_1]}(Y) = \psi_{[m_2]}(Y)$ , as duas incógnitas  $\Theta$  devem ser escolhidas em dois nós diferentes da Figura 4.7(c), podendo estar ou não em seções diferentes. O sistema de equações de (4.13) seleciona duas incógnitas  $\Theta$  em dois nós diferentes (no caso, em uma mesma seção) e teria solução nesse caso.

Por outro lado, para um conjunto de modos de deformação com distribuições de deslocamentos proporcionais, um número igual de seções diferentes deve ser obrigatoriamente utilizado para selecionar as incógnitas. No exemplo de dois modos de deformação, caso  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  tenham distribuições de deslocamentos proporcionais, o sistema de equações de (4.13) não poderá ser empregado nesse caso. Seria necessário selecionar uma incógnita  $\Theta$  em uma seção diferente  $Y_B$ . Essa incógnita poderia estar ou não no mesmo nó da discretização da seção da outra incógnita. Assim, por simplicidade, o sistema de (4.13) poderia ser escrito para  $\Theta_1(Y_A)$  e  $\Theta_1(Y_B)$ . Como comentado, um modo de deformação natural associado a dois componentes harmônicos diferentes resultaria em dois modos com distribuições de deslocamentos proporcionais.

O ideal é a utilização do menor número possível de modos de deformação e componentes harmônicos que forneça um bom resultado para o problema. Números menores de modos e componentes representam simplicidade na programação e um menor tempo de pré-processamento no programa de elementos finitos. Em geral, o uso de modos axiais ortogonais reduz o número de modos necessários em comparação com os modos naturais. A seleção dos componentes harmônicos de maior importância é tratada em Li e Schafer, 2010b.

Cabe destacar que o tempo necessário para a solução do problema de elementos finitos restringido não é influenciado pelos números de modos de deformação e de componentes harmônicos selecionados. Em geral, o MFFr e a GBT fornecem soluções mais rápidas do que o MEF. Porém, quando muito componentes harmônicos são necessários, o tamanho das matrizes do MFFr aumenta e a discretização longitudinal do modelo da GBT torna-se mais fina. Isso implica um maior tempo de solução, podendo tornar esses métodos menos eficientes do que o MEF numa análise de flambagem restringida.

A restrição de um modelo de elementos finitos, através do comando CE do Ansys, está esquematizada na Figura 4.8, para o perfil C com condições de contorno S-S, restringido de acordo com apenas um modo de deformação e um componente harmônico utilizando esquema de restrição 1 Sub.

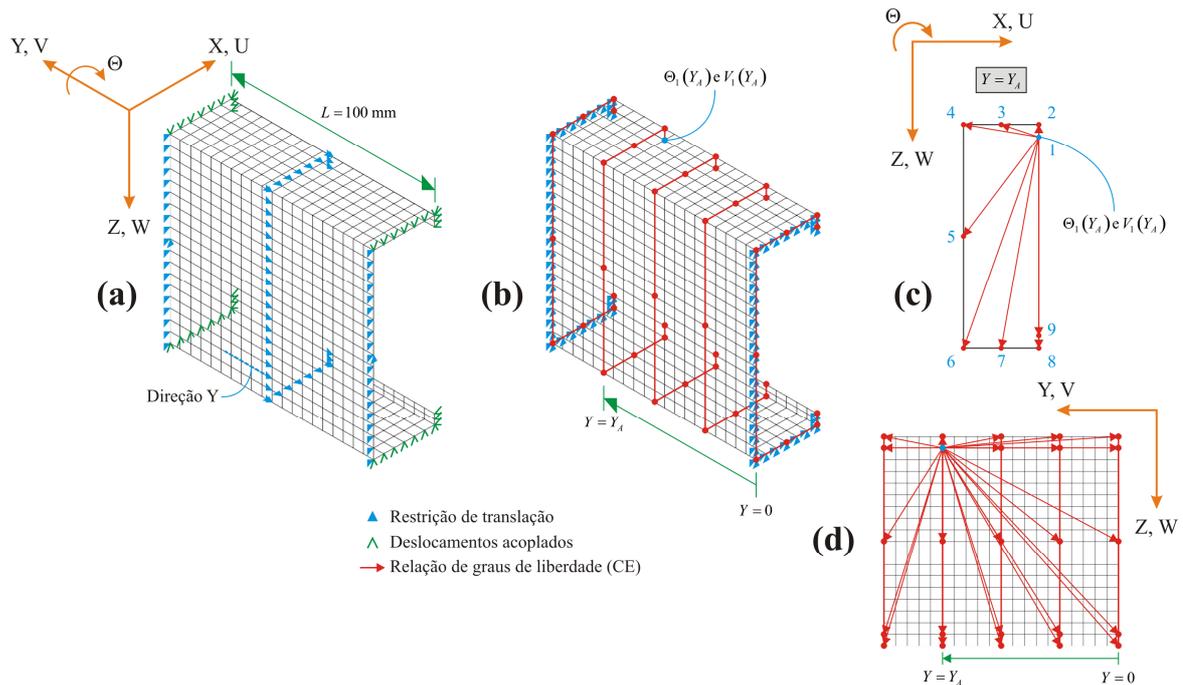


Figura 4.8. Exemplo de implementação das restrições em um modelo de elementos finitos. (a) Condições de contorno na análise linear elástica. (b) Condições de contorno na análise linear de flambagem e incógnitas selecionadas. (c) Restrições na seção que contém as incógnitas. (d) Restrições nas demais seções selecionadas.

A Figura 4.8(a) mostra as condições de contorno aplicadas na análise linear elástica, permitindo a deformação por efeito Poisson e com restrições longitudinais (direção  $Y$ ) aplicadas no meio do vão. Posteriormente, na análise linear de flambagem (Figura 4.8(b)), selecionam-se um GDL transversal e outro longitudinal como incógnitas: no exemplo, os GDLs  $\Theta$  e  $V$  do nó 1 da discretização 0-1-1 (segundo esquema 1 Sub), na seção posicionada em  $Y_A$ , ou seja,  $\Theta_1(Y_A)$  e  $V_1(Y_A)$ . Essas incógnitas servem para restringir os 9 nós da discretização 0-1-1 de cada seção selecionada. A Figura 4.8(c) esquematiza a restrição feita em  $Y = Y_A$ , onde são necessários apenas os GDLs escolhidos como incógnitas e o modo de deformação da seção retirado do MFFr (ver Eqs. (4.8)-(4.11)). Para a restrição das demais seções selecionadas (Figura 4.8(d)), utilizam-se as incógnitas, o modo de deformação da seção e o componente harmônico da função de forma longitudinal.

Deve-se destacar que, nas seções das extremidades do perfil, apenas os GDLs longitudinais são restringidos. Além disso, observa-se que, na Figura 4.8(b), as condições de contorno das extremidades e do meio do vão foram modificadas na análise linear de flambagem (como já comentado na seção 4.1). Nas extremidades, foram aplicadas restrições de translação adequadas a uma análise restringida de acordo com um modo G, D ou L (sem

deformação membranal). No meio do vão, as restrições longitudinais foram removidas, pois o empenamento do modo de flambagem, em geral, não será nulo na seção de aplicação das restrições. O movimento de corpo rígido axial do perfil é automaticamente evitado pelas relações de GDLs longitudinais.

#### 4.2.2 Procedimento de restrição independente das funções de forma longitudinais

É possível restringir um modelo de elementos finitos de acordo com uma combinação de modos de deformação de forma independente das funções de forma longitudinais. Assim, o número de ondas de flambagem é livre para cada modo de deformação considerado, ou seja, a variação longitudinal dos deslocamentos da seção é dada na solução da análise de flambagem.

Primeiramente, considera-se o caso de apenas um modo de deformação ( $\mathbf{R}_1$ ) com todos os componentes harmônicos possíveis. Por exemplo, o vetor de rotações em uma seção fica dado por:

$$\Theta(Y) = \beta_1^{[m_1]} \Theta_1^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) + \beta_1^{[m_2]} \Theta_1^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) + \beta_1^{[m_3]} \Theta_1^{[m_3]} \psi_{[m_3]}(Y) + \dots \quad (4.19)$$

Como comentado, em geral, os modos de deformação variam com o comprimento de meia-onda. Portanto, na Eq. (4.19),  $\Theta_1^{[m_1]}$  será diferente de  $\Theta_1^{[m_2]}$ , por exemplo.

Sabe-se que para modos G e D que coincidam com os modos naturais, a razão entre deslocamentos transversais e longitudinais desses modos varia linearmente com o comprimento de meia-onda, mas as distribuições de deslocamentos permanecem inalteradas. Quando o problema é restringido de acordo com algum desses modos G e D, a Eq. (4.19) fica:

$$\Theta(Y) = \Theta_1^{[m_1]} \left( \alpha_1^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) + \alpha_1^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) + \alpha_1^{[m_3]} \psi_{[m_3]}(Y) + \dots \right) \quad (4.20)$$

Na Eq. (4.20), assume-se que as distribuições de deslocamentos dos modos sejam proporcionais. Assim, pode-se utilizar somente a distribuição  $\Theta_1^{[m_1]}$ , por exemplo, modificando os coeficientes de contribuição modal  $\beta$  apropriadamente.

Modos axiais ortogonais L, em geral, apresentam uma variação pequena da distribuição de deslocamentos transversais com o comprimento de meia-onda, ou, pelo menos, a variação da distribuição de deslocamentos pouco influencia no resultado de carga crítica. Nesse caso, pode-se assumir que a distribuição de deslocamentos é independente do comprimento de meia-onda. Portanto, a Eq. (4.20) é tida como válida.

A Eq. (4.20) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\Theta(Y) = \Theta_1^{[m_1]} \psi_{1,comb}(Y) \quad (4.21)$$

onde  $\psi_{1,comb}(Y)$  é a combinação dos diversos componentes harmônicos com seus respectivos coeficientes de contribuição modal modificados.

A Eq. (4.21) pode ser escrita para um nó  $i$  da seção, assim como os outros GDLs transversais:

$$\begin{aligned} U_i(Y) &= U_{1,i}^{[m_1]} \psi_{1,comb}(Y) \\ W_i(Y) &= W_{1,i}^{[m_1]} \psi_{1,comb}(Y) \\ \Theta_i(Y) &= \Theta_{1,i}^{[m_1]} \psi_{1,comb}(Y) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Deixando, por exemplo, a rotação do nó 1 da seção livre em todas as seções do modelo ( $\theta_1(Y)$  para uma seção na coordenada genérica  $Y$ ), pode-se expressar  $\psi_{1,comb}(Y)$  como:

$$\psi_{1,comb}(Y) = \frac{\Theta_1(Y)}{\Theta_{1,1}^{[m_1]}} \quad (4.23)$$

Finalmente, substituindo (4.23) em (4.22), são obtidas as equações de restrição dos GDLs transversais:

$$U_i(Y) = \frac{U_{1,i}^{[m_1]}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]}} \Theta_1(Y) \quad (4.24)$$

$$W_i(Y) = \frac{W_{1,i}^{[m_1]}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]}} \Theta_1(Y) \quad (4.25)$$

$$\Theta_i(Y) = \frac{\Theta_{1,i}^{[m_1]}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]}} \Theta_1(Y) \quad (4.26)$$

Como existe uma incógnita em cada seção do modelo, as restrições das Eqs. (4.24)-(4.26) são independentes das funções de forma longitudinais. Portanto, a contribuição de todos os componentes harmônicos é automaticamente considerada para o modo de deformação analisado.

O mesmo procedimento é usado para os GDLs de empenamento. O deslocamento longitudinal de um nó  $i$  de uma seção é dado por:

$$V_i(Y) = V_{1,i}^{[m_1]} \psi'_{1,comb}(Y) \quad (4.27)$$

onde  $\psi'_{1,comb}(Y)$  é a combinação das derivadas dos diversos componentes harmônicos com os coeficientes apropriados.

Escolhendo uma incógnita adicional  $V$  por seção, por exemplo, no nó 1, acha-se a expressão para  $\psi'_{1,comb}(Y)$ . Finalmente, tem-se a equação de restrição dos GDLs de empenamento:

$$V_i(Y) = \frac{V_{1,i}^{[m_1]}}{V_{1,1}^{[m_1]}} V_1(Y) \quad (4.28)$$

Nota-se que, como a variação longitudinal dos GDLs transversais é diferente da dos GDLs de empenamento, é necessário desacoplar esses dois tipos de GDLs para que a restrição do modelo seja independente das funções de forma longitudinais. Portanto, devem ser escolhidos um GDL transversal e um GDL de empenamento como incógnitas em cada seção.

Considerando agora um problema com dois modos de deformação e todos os componentes harmônicos possíveis para cada um deles, tem-se, por exemplo, uma expressão para a rotação do nó  $i$  de uma seção como a seguinte:

$$\Theta_i(Y) = \Theta_{1,i}^{[m_1]} \psi_{1,comb}(Y) + \Theta_{2,i}^{[m_2]} \psi_{2,comb}(Y) \quad (4.29)$$

Deve-se notar que os componentes  $m_1$  e  $m_2$  escolhidos não vão influenciar no resultado de carga crítica da análise restringida ou, pelo menos, vão influenciar muito pouco (referindo-se aos modos locais). Escolhendo as rotações dos nós 1 e 2 de cada seção como incógnitas, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \Theta_1(Y) = \Theta_{1,1}^{[m_1]} \psi_{1,comb}(Y) + \Theta_{2,1}^{[m_2]} \psi_{2,comb}(Y) \\ \Theta_2(Y) = \Theta_{1,2}^{[m_1]} \psi_{1,comb}(Y) + \Theta_{2,2}^{[m_2]} \psi_{2,comb}(Y) \end{cases} \quad (4.30)$$

De (4.30), são obtidas as expressões para  $\psi_{1,comb}(Y)$  e  $\psi_{2,comb}(Y)$ :

$$\begin{aligned} \psi_{1,comb}(Y) &= \frac{\Theta_{2,2}^{[m_2]} \Theta_1(Y) - \Theta_{2,1}^{[m_2]} \Theta_2(Y)}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \\ \psi_{2,comb}(Y) &= \frac{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_2(Y) - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_1(Y)}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Finalmente, podem-se escrever as equações de restrição dos GDLs transversais. Por exemplo, a equação de restrição da rotação fica:

$$\Theta_i(Y) = \frac{\Theta_{1,i}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,i}^{[m_2]}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \Theta_1(Y) + \frac{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,i}^{[m_2]} - \Theta_{1,i}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}}{\Theta_{1,1}^{[m_1]} \Theta_{2,2}^{[m_2]} - \Theta_{1,2}^{[m_1]} \Theta_{2,1}^{[m_2]}} \Theta_2(Y) \quad (4.32)$$

Para desacoplar os GDLs de empenamento dos GDLs transversais, selecionam-se duas incógnitas adicionais por seção: por exemplo,  $V_1(Y)$  e  $V_2(Y)$ . De acordo com o mesmo procedimento seguido para os GDLs transversais, os GDLs de empenamento restringidos podem ser escritos como:

$$V_i(Y) = \frac{V_{1,i}^{[m_1]}V_{2,2}^{[m_2]} - V_{1,2}^{[m_1]}V_{2,i}^{[m_2]}}{V_{1,1}^{[m_1]}V_{2,2}^{[m_2]} - V_{1,2}^{[m_1]}V_{2,1}^{[m_2]}} V_1(Y) + \frac{V_{1,1}^{[m_1]}V_{2,i}^{[m_2]} - V_{1,i}^{[m_1]}V_{2,1}^{[m_2]}}{V_{1,1}^{[m_1]}V_{2,2}^{[m_2]} - V_{1,2}^{[m_1]}V_{2,1}^{[m_2]}} V_2(Y) \quad (4.33)$$

É importante destacar que o procedimento de restrição independente das funções de forma longitudinais só é válido para modos naturais ou modos cuja influência da variação da distribuição de deslocamentos com o comprimento de meia-onda seja julgada como pequena.

Também se deve notar que, como as incógnitas repetem-se em todas as seções, o número de modos de deformação considerados é limitado. Se muitos modos de deformação forem considerados no problema, a malha terá muitos GDLs livres (incógnitas), podendo não ficar adequadamente restringida. Por exemplo, se forem considerados tantos modos quanto o número de nós da seção, todos os GDLs de empenamento do modelo serão incógnitas e, conseqüentemente, o modelo não terá o empenamento restringido de acordo com os modos de deformação selecionados. Para a restrição dos GDLs transversais, mais modos podem ser considerados, já que o número de GDLs transversais é três vezes o número de nós da seção.

A restrição de um modelo de elementos finitos de maneira independente das funções de forma longitudinais, através do comando CE do Ansys, está esquematizada na Figura 4.9, para o perfil C com condições de contorno S-S, restringido de acordo com apenas um modo de deformação utilizando esquema de restrição 1 Sub.

A Figura 4.9(a) mostra as condições de contorno aplicadas na análise linear elástica, permitindo a deformação por efeito Poisson e com restrições longitudinais (direção  $Y$ ) aplicadas no meio do vão. Posteriormente, na análise linear de flambagem (Figura 4.9(b)), selecionam-se como incógnitas um GDL transversal e outro longitudinal em cada seção a ser restringida: no exemplo, selecionam-se os GDLs  $\Theta$  e  $V$  do nó 1 da discretização 0-1-1 (segundo esquema 1 Sub) em cada seção. As duas incógnitas de uma seção servem para restringir apenas os 9 nós da discretização 0-1-1 da seção em questão. A Figura 4.9(c) exemplifica a restrição feita em  $Y = Y_A$ , onde são necessários apenas os GDLs escolhidos como incógnitas e o modo de deformação da seção retirado do MFFr (ver Eqs. (4.24)-(4.26) e (4.28)).

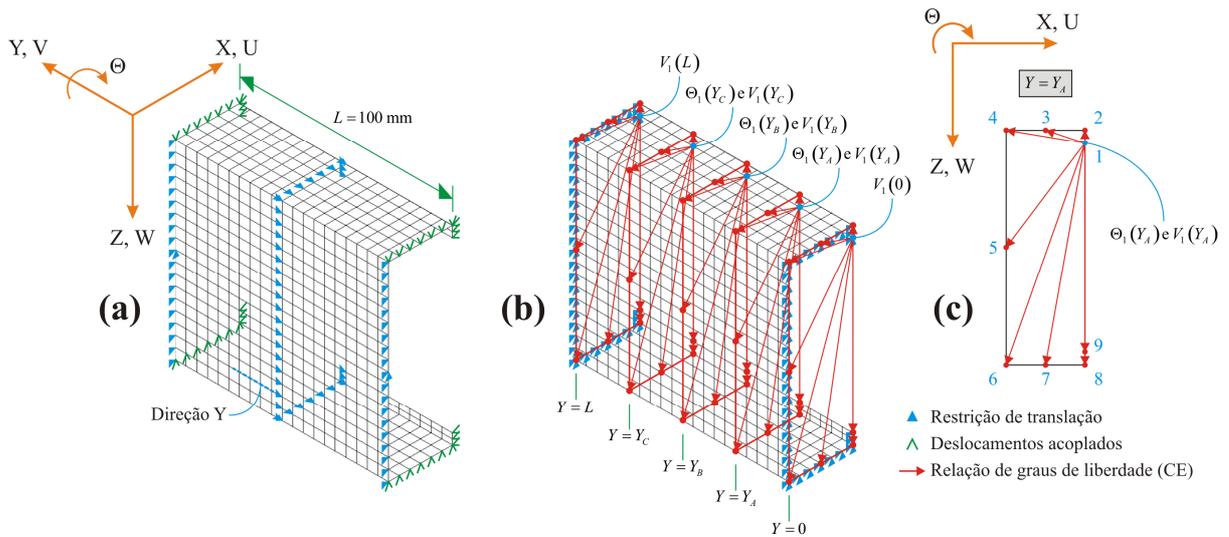


Figura 4.9. Exemplo de implementação das restrições independentes das funções de forma longitudinais. (a) Condições de contorno na análise linear elástica. (b) Condições de contorno na análise linear de flambagem e incógnitas selecionadas. (c) Restrições em uma das seções selecionadas.

Deve-se destacar que, nas seções das extremidades do perfil, apenas os GDLs longitudinais são restringidos. Portanto, nessas seções, seleciona-se apenas um GDL longitudinal como incógnita, como indicado na Figura 4.9(b).

### 4.3 Restrição do modelo de elementos finitos ao espaço GD

O procedimento de restrição de um modelo de elementos finitos de acordo com o espaço de deformações dos modos G e D (espaço GD) é mais simples do que o procedimento geral apresentado na seção 4.2. Com esse procedimento, a restrição é feita no espaço nodal do MFF, ou seja, trabalha-se diretamente com os GDLs do MFF e não se precisam definir modos de deformação individuais e coeficientes de contribuição modal.

No MFF, a propriedade principal dos modos G e D é a de que esses modos são completamente definidos pela distribuição de empenamento, ou seja, a distribuição de deslocamentos transversais é função da distribuição de empenamento (ver Anexo A). Além disso, como a distribuição de empenamento é linear em cada elemento de placa da seção (ver seção 2.1), todos os GDLs da seção são definidos pelos valores de empenamento dos nós principais.

Assim, no MFFr, um problema restringido ao espaço GD considerando, por exemplo, dois componentes harmônicos é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{[m_1]} \\ \mathbf{d}_{[m_2]} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{GD}}^{[m_1]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\text{GD}}^{[m_2]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_m^{[m_1]} \\ \mathbf{V}_m^{[m_2]} \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

onde  $\mathbf{R}_{\text{GD}}^{[m_1]}$  e  $\mathbf{R}_{\text{GD}}^{[m_2]}$  são as matrizes de restrição ao espaço GD associadas aos componentes harmônicos considerados, e  $\mathbf{V}_m^{[m_1]}$  e  $\mathbf{V}_m^{[m_2]}$  são vetores contendo os valores de empenamento dos nós principais da seção, associados a cada componente harmônico. As matrizes de restrição são obtidas através da aplicação dos Critérios 1 e 2 da Tabela 2.1 e são dadas em Ádány e Schafer, 2008, e Li e Schafer, 2010b.

Para estender o procedimento de restrição a um modelo de elementos finitos, seguem-se os mesmos passos apresentados na seção 4.2. Primeiramente, a Eq. (4.34) deve ser escrita em função de  $Y$ , usando as funções de forma longitudinais e considerando que os GDLs de empenamento e GDLs transversais variam de forma diferente. Posteriormente, escreve-se a equação para os GDLs de uma seção da malha de elementos finitos, ou seja, os GDLs relacionados a cada componente harmônico não são mais considerados de forma independente. Assim, para dois componentes harmônicos, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}(Y) \\ \mathbf{V}(Y) \\ \mathbf{W}(Y) \\ \mathbf{\Theta}(Y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{GD,U}}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & \mathbf{R}_{\text{GD,U}}^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \\ \mathbf{R}_{\text{GD,V}}^{[m_1]} \psi'_{[m_1]}(Y)(L/m_1\pi) & \mathbf{R}_{\text{GD,V}}^{[m_2]} \psi'_{[m_2]}(Y)(L/m_2\pi) \\ \mathbf{R}_{\text{GD,W}}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & \mathbf{R}_{\text{GD,W}}^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \\ \mathbf{R}_{\text{GD,\Theta}}^{[m_1]} \psi_{[m_1]}(Y) & \mathbf{R}_{\text{GD,\Theta}}^{[m_2]} \psi_{[m_2]}(Y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_m^{[m_1]} \\ \mathbf{V}_m^{[m_2]} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Na Eq. (4.35), as incógnitas são os vetores  $\mathbf{V}_m^{[m_1]}$  e  $\mathbf{V}_m^{[m_2]}$ , que podem ser determinadas em função de GDLs de empenamento dos nós principais da malha de elementos finitos.

O vetor  $\mathbf{V}(Y)$  contém os valores de empenamento de todos os nós de uma seção (nós principais e subnós). Selecionando-se apenas os componentes referentes aos nós principais, cria-se um novo vetor  $\mathbf{V}_m(Y)$ . No caso de apenas um componente harmônico (por exemplo,  $m_1$ ), é facilmente verificado que o vetor  $\mathbf{V}_m(Y)$  é dado por:

$$\mathbf{V}_m(Y) = \mathbf{V}_m^{[m_1]} \psi'_{[m_1]}(Y)(L/m_1\pi) \quad (4.36)$$

Definindo como incógnitas os GDLs de empenamento dos nós principais da seção na posição  $Y_A$ , por exemplo, o vetor  $\mathbf{V}_m^{[m_1]}$  será dado por:

$$\mathbf{V}_m^{[m_1]} = \frac{\mathbf{V}_m(Y_A)}{\psi'_{[m_1]}(Y_A)(L/m_1\pi)} \quad (4.37)$$

As equações de restrição são encontradas substituindo (4.37) em (4.35) (considerando apenas o componente  $m_1$  para o caso de um componente harmônico). A equação de restrição dos GDLs de empenamento fica:

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{R}_{\text{GD,V}}^{[m_1]} \mathbf{V}_m(Y_A) \frac{\psi'_{[m_1]}(Y)}{\psi'_{[m_1]}(Y_A)} \quad (4.38)$$

As equações de restrição para os GDLs transversais têm a forma a seguir, exemplificada pra os GDLs  $U$ :

$$\mathbf{U}(Y) = \mathbf{R}_{\text{GD,U}}^{[m_1]} \mathbf{V}_m(Y_A) \frac{\psi_{[m_1]}(Y)}{\psi_{[m_1]}(Y_A)(L/m_1\pi)} \quad (4.39)$$

Para o exemplo de dois modos de deformação, o vetor  $\mathbf{V}_m(Y)$  é dado por:

$$\mathbf{V}_m(Y) = \mathbf{V}_m^{[m_1]} \psi'_{[m_1]}(Y)(L/m_1\pi) + \mathbf{V}_m^{[m_2]} \psi'_{[m_2]}(Y)(L/m_2\pi) \quad (4.40)$$

Na Eq. (4.40), há dois vetores como incógnitas:  $\mathbf{V}_m^{[m_1]}$  e  $\mathbf{V}_m^{[m_2]}$ . Esses vetores podem ser encontrados definindo-se como incógnitas os GDLs de empenamento dos nós principais de duas seções, por exemplo,  $Y_A$  e  $Y_B$ . Assim, tem-se um sistema linear de duas equações que permite escrever  $\mathbf{V}_m^{[m_1]}$  e  $\mathbf{V}_m^{[m_2]}$  em função de  $\mathbf{V}_m(Y_A)$  e  $\mathbf{V}_m(Y_B)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_m^{[m_1]} &= \frac{\mathbf{V}_m(Y_A) \psi'_{[m_2]}(Y_B) - \mathbf{V}_m(Y_B) \psi'_{[m_2]}(Y_A)}{\left[ \psi'_{[m_1]}(Y_A) \psi'_{[m_2]}(Y_B) - \psi'_{[m_1]}(Y_B) \psi'_{[m_2]}(Y_A) \right] (L/m_1\pi)} \\ \mathbf{V}_m^{[m_2]} &= \frac{\mathbf{V}_m(Y_B) \psi'_{[m_1]}(Y_A) - \mathbf{V}_m(Y_A) \psi'_{[m_1]}(Y_B)}{\left[ \psi'_{[m_1]}(Y_A) \psi'_{[m_2]}(Y_B) - \psi'_{[m_1]}(Y_B) \psi'_{[m_2]}(Y_A) \right] (L/m_2\pi)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Substituindo (4.41) em (4.35), encontram-se as equações de restrição. Conforme Ádány e Schafer, 2008, e Li e Schafer, 2009, a submatriz  $\mathbf{R}_{\text{GD,V}}^{[m]}$  é igual para qualquer componente harmônico  $m$ . Então  $\mathbf{R}_{\text{GD,V}}^{[m_1]} = \mathbf{R}_{\text{GD,V}}^{[m_2]}$ , e a equação de restrição para os GDLs de empenamento simplifica-se em:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Y) = & \frac{\psi'_{[m_1]}(Y)\psi'_{[m_2]}(Y_B) - \psi'_{[m_1]}(Y_B)\psi'_{[m_2]}(Y)}{\psi'_{[m_1]}(Y_A)\psi'_{[m_2]}(Y_B) - \psi'_{[m_1]}(Y_B)\psi'_{[m_2]}(Y_A)} \mathbf{R}_{\text{GD},\mathbf{V}}^{[m_2]} \mathbf{V}_m(Y_A) \\ & + \frac{\psi'_{[m_1]}(Y_A)\psi'_{[m_2]}(Y) - \psi'_{[m_1]}(Y)\psi'_{[m_2]}(Y_A)}{\psi'_{[m_1]}(Y_A)\psi'_{[m_2]}(Y_B) - \psi'_{[m_1]}(Y_B)\psi'_{[m_2]}(Y_A)} \mathbf{R}_{\text{GD},\mathbf{V}}^{[m_2]} \mathbf{V}_m(Y_B) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para os GDLs transversais, as submatrizes de  $\mathbf{R}_{\text{GD}}$  são iguais para qualquer componente harmônico  $m$ , exceto por um coeficiente  $L/m\pi$ . Portanto, para os GDLs  $U$ , por exemplo,  $\mathbf{R}_{\text{GD},U}^{[m_1]} = (m_2/m_1) \mathbf{R}_{\text{GD},U}^{[m_2]}$ . Então, a equação de restrição para os GDLs  $U$ , por exemplo, simplifica-se em:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(Y) = & \frac{\psi'_{[m_1]}(Y)\psi'_{[m_2]}(Y_B) - \psi'_{[m_1]}(Y_B)\psi'_{[m_2]}(Y)}{\left[ \psi'_{[m_1]}(Y_A)\psi'_{[m_2]}(Y_B) - \psi'_{[m_1]}(Y_B)\psi'_{[m_2]}(Y_A) \right] (L/m_2\pi)} \mathbf{R}_{\text{GD},U}^{[m_2]} \mathbf{V}_m(Y_A) \\ & + \frac{\psi'_{[m_1]}(Y_A)\psi'_{[m_2]}(Y) - \psi'_{[m_1]}(Y)\psi'_{[m_2]}(Y_A)}{\left[ \psi'_{[m_1]}(Y_A)\psi'_{[m_2]}(Y_B) - \psi'_{[m_1]}(Y_B)\psi'_{[m_2]}(Y_A) \right] (L/m_2\pi)} \mathbf{R}_{\text{GD},U}^{[m_2]} \mathbf{V}_m(Y_B) \end{aligned} \quad (4.43)$$

A obtenção das matrizes  $\mathbf{R}_{\text{GD}}$  é detalhada no Anexo A. Para isso, é necessária a matriz de rigidez de um modelo bidimensional de vigas equivalente à seção do perfil analisado (ver Anexo A). Esse modelo bidimensional pode ser criado dentro do software Ansys utilizando elementos do tipo BEAM3, e sua matriz de rigidez pode ser acessada através de uma análise de subestruturas [Ansys, Inc., 2007].

É interessante observar que o procedimento de restrição ao espaço GD apresentado aqui considera todo o espaço de deformações dos modos G e D, ou seja, são automaticamente considerados todos os modos de deformação individuais G e D que seriam definidos para aplicar o procedimento geral de restrição da seção 4.2.

Até o momento, a única maneira conhecida de se separarem modos G e modos D é através da definição de modos de deformação individuais característicos que gerem o espaço de deformações dessas classes de flambagem, como é feito no MFFr. Portanto, para restringir o problema ao espaço de modos D, o único método conhecido é o procedimento geral apresentado na seção 4.2. Por outro lado, é possível restringir o problema ao espaço dos modos G de uma forma muito mais simples, discutida na próxima seção.

#### 4.4 Restrição do modelo de elementos finitos aos espaços G e GO

Um modelo de elementos finitos pode ser restringido ao espaço de deformações dos modos G através de um procedimento simples que define relações entre GDLs da malha, mas não utiliza matrizes de restrição ou modos de deformação do MFFr. O procedimento consiste basicamente em definir, em cada seção restringida do modelo, uma distribuição de empenamento linear e um movimento de corpo rígido. Dessa forma, tem-se um modelo restringido ao espaço G de forma independente das funções de forma longitudinais. A Figura 4.10 esquematiza o processo de restrição proposto para o perfil C analisado.

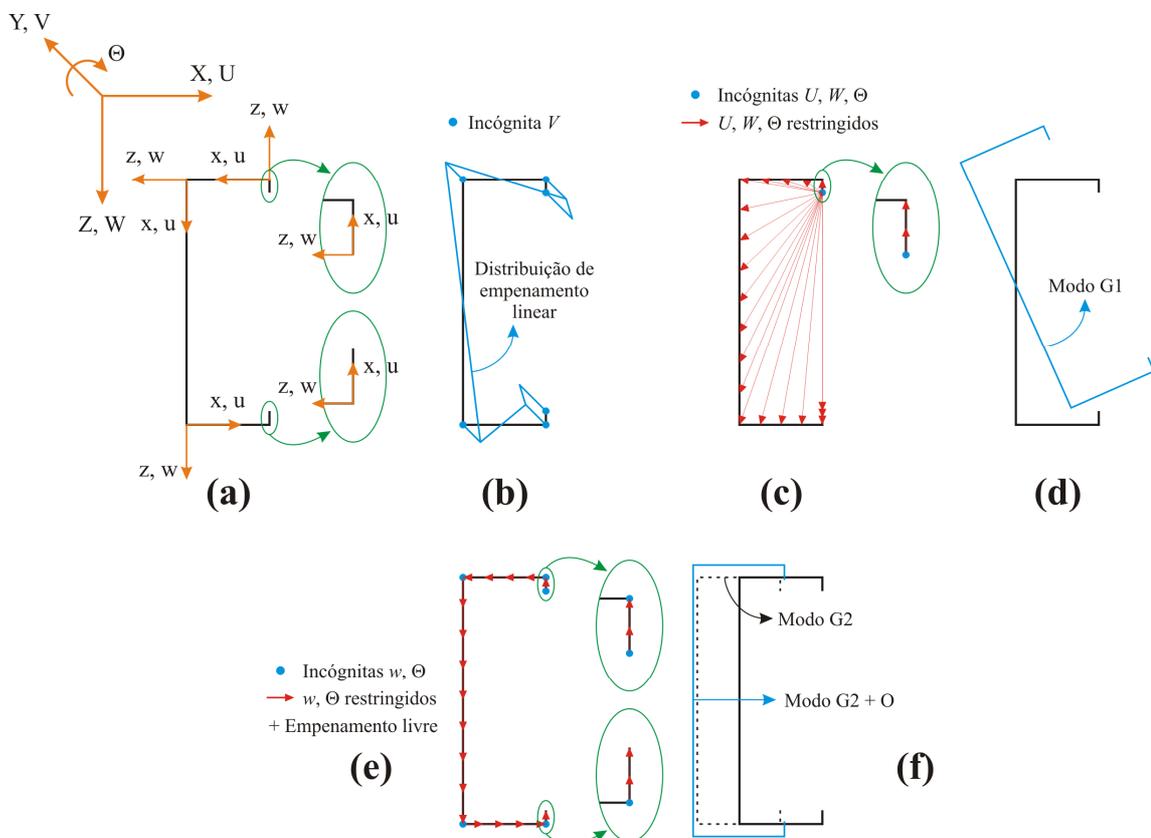


Figura 4.10. Restrição do modelo de elementos finitos aos espaços G e GO para o perfil C analisado. (a) Sistemas de coordenadas globais e locais em uma seção. (b) Distribuição linear de empenamento definida pelas incógnitas  $V$  dos nós principais. (c) Definição de movimento de corpo rígido em uma seção. (d) Exemplo de modo global puro. (e) Definição de uma seção sem distorção, permitindo extensão transversal dos elementos de placa e empenamento não-linear. (f) Exemplo de um modo G considerando a contribuição dos modos O.

A definição da distribuição de empenamento linear em cada seção é feita em função dos GDLs de empenamento  $V$  dos nós principais (incógnitas), conforme exemplificado na Figura 4.10(b). Como comentado na seção 4.3, os modos G são completamente definidos

pelos valores de empenamento dos nós principais. Em cada seção, também é definido um movimento de corpo rígido envolvendo os três GDLs transversais. Os GDLs  $U$ ,  $W$  e  $\Theta$  de algum nó da seção são escolhidos como incógnitas e todos os outros GDLs transversais da seção são restringidos em função dessas incógnitas, conforme Figura 4.10(c). Restringindo o modelo dessa forma, o modo de flambagem obtido na análise de elementos finitos respeitará aos três critérios da Tabela 2.1, como exemplifica a Figura 4.10(d) para o modo axial ortogonal G1 do perfil C.

Como comentado, por exemplo, em Ádány e Schafer, 2006b, e Ádány et al., 2006a, as cargas críticas dos modos G obtidas com o MFFr podem ser consideravelmente maiores do que fornecidas por solução analíticas e pela GBT (diferenças de até aproximadamente 10%). Essa diferença deve-se ao diferente tratamento das tensões membranais, conforme detalhado na seção 5.1.1

As soluções analíticas e a GBT envolvem um modelo de viga e, portanto, consideram um estado de tensões membranais unidimensional. Apenas as tensões longitudinais são consideradas, enquanto as tensões transversais são desprezadas. Por outro lado, o MFF (e também o MEF utilizando elementos de casca) assume um estado plano de tensões em cada elemento de placa que forma o perfil, ou seja, o efeito Poisson é levado em conta. Portanto, sempre que as deformações membranais transversais são restringidas, como no caso de um modelo restringido ao espaço dos modos G (ver Tabela 2.1), os modelos de placa comportam-se de maneira mais rígida do que os modelos de viga.

No MFFr, a flexibilidade adicional do modelo devida à deformação membranal livre é atribuída à inclusão dos modos O na análise, que são modos que envolvem extensão transversal dos elementos de placa e empenamento não-linear. A combinação de modos G e O no MFFr faz com que a carga crítica obtida apresente boa concordância com a fornecida por soluções analíticas ou pela GBT, que são métodos bastante aceitos para tratar modos globais. Em outras palavras, pode-se dizer que a deformação membranal transversal está implicitamente incluída nos modelos de viga.

Para que a análise de flambagem utilizando um modelo de elementos finitos seja focada na combinação dos modos G e O, propõe-se que cada seção do modelo seja restringida conforme Figura 4.10(e), para o perfil C analisado. Em cada elemento de placa, define-se um movimento de corpo rígido envolvendo apenas os GDLs globais  $\Theta$  e os GDLs locais  $w$ , de forma que a deformação membranal transversal esteja livre em cada elemento na análise de

flambagem. Além disso, os GDLs de empenamento de cada seção devem ser deixados livres, o que permite uma distribuição de empenamento não-linear. Dessa forma, pode-se obter um modo de flambagem como o mostrado na Figura 4.10(f), onde há contribuição da deformação membranal transversal.

Para o perfil da coluna do silo da Figura 4.1(b), que possui ângulos relativos entre elementos de placa diferentes de  $90^\circ$ , a aplicação das restrições ao espaço GO é mais trabalhosa. A Figura 4.11 esquematiza o processo.

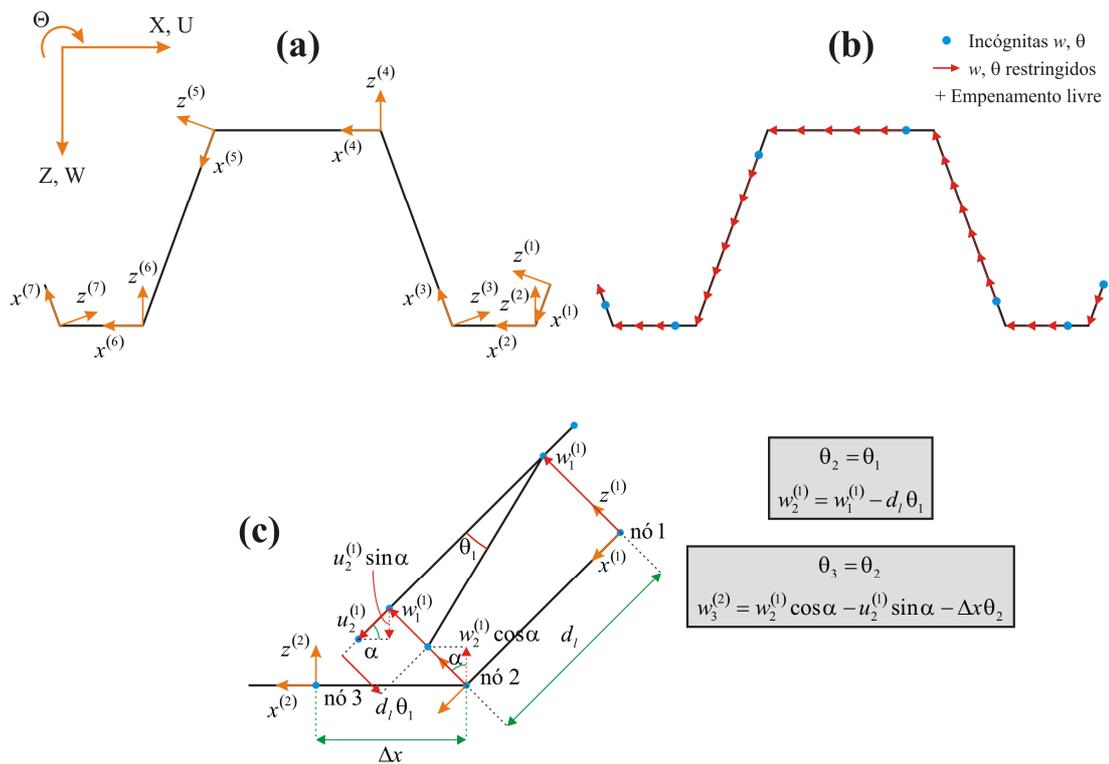


Figura 4.11. Restrição do modelo de elementos finitos ao espaço GO para o perfil da coluna do silo. (a) Sistemas de coordenadas locais de cada elemento de placa do perfil. (b) Definição de movimentos de corpo rígido locais, permitindo extensão transversal dos elementos de placa e empenamento não-linear. (c) Relação entre os deslocamentos de elementos de placa contíguos para que a seção não apresente distorção.

Primeiramente, definem-se sistemas de coordenadas locais associados a cada elemento de placa que forma o perfil, conforme Figura 4.11(a). Posteriormente, definem-se movimentos de corpo rígido envolvendo apenas os GDLs locais  $w$  e  $\theta$  de cada elemento de placa, como mostra a Figura 4.11(b). Conforme já comentado na seção 4.1, como os ângulos relativos entre os elementos de placa são diferentes de  $90^\circ$ , um nó situado na união de dois elementos nunca vai ter os eixos  $x$  e  $z$  coincidindo com os dois elementos. Portanto, na definição do

movimento de corpo rígido, esse nó só pode ser relacionado a nós de um dos elementos de placa da união.

Para que a seção não apresente distorção, é preciso relacionar os deslocamentos dos dois elementos de placa de uma união. A relação necessária é dada na Figura 4.11(c), tomando como exemplo os elementos 1 e 2 da Figura 4.11(a) (elementos com sistemas de coordenadas  $x^{(1)} - z^{(1)}$  e  $x^{(2)} - z^{(2)}$ , respectivamente). No elemento 1, as incógnitas encontram-se no nó 1 ( $w_1^{(1)}$  e  $\theta_1^{(1)}$ ) e, no elemento 2, no nó 3 ( $w_3^{(2)}$  e  $\theta_3^{(2)}$ ). As incógnitas do nó 3 devem ser relacionadas com os deslocamentos do nó 2, onde  $w_2^{(1)}$  e  $\theta_2^{(1)}$  relacionam-se com o nó 1 através de um movimento de corpo rígido local. Conforme as expressões dadas na Figura 4.11(c), a rotação é a mesma para os nós 1 e 2 e o valor de  $w$  local ( $w_2^{(1)}$ ) é definido considerando uma relação geométrica de pequenos deslocamentos. No nó 3, a rotação é a mesma do nó 2 e o valor de  $w$  local ( $w_3^{(2)}$ ) é dado considerando simultaneamente um movimento de corpo rígido envolvendo pequenos deslocamentos e a extensão membranal do elemento 1 (da mesma forma que na Figura 4.6(d)). O procedimento deve ser repetido para cada par de elementos de placa contíguos.

Com o método proposto para restrição ao espaço dos modos G e O, podem ser obtidos modos de flambagem onde a seção não apresente distorção e que não respeitem o Critério 1 da Tabela 2.1. Deve-se recordar que as condições de contorno das extremidades do perfil devem ser como as da Figura 4.5(a) na análise de flambagem.

Finalmente, é importante destacar que não existe uma única maneira para se definir o espaço de deformações dos modos O. Aqui, optou-se por definir um espaço de modos O cujos modos de deformação individuais que gerem o espaço não apresentem distorção da seção, da mesma forma que são definidos os modos naturais e os *modos O parcialmente ortogonais* da versão 3.12 do software CUFMS [Schafer e Ádány, 2006]. Na versão 4 do software [Li e Schafer, 2010b], os modos O são definidos de maneira diferente, incluindo distorção na seção.

#### 4.5 Restrição do modelo de elementos finitos ao espaço L

O modelo de elementos finitos também pode ser restringido ao espaço de deformações dos modos L de maneira muito simples, através da aplicação direta de restrições de translação sobre os GDLs do modelo.

Conforme discutido em Ádány e Schafer, 2008, por exemplo, os modos L apresentam as seguintes características (referindo-se aos sistemas de coordenadas da Figura 4.12(a), para o caso do perfil C):

- O empenamento é nulo em todos os nós de uma seção ( $V = 0$ );
- Não há translação dos nós principais internos (das dobras) de uma seção ( $U = W = 0$ );
- Não há deformação transversal membranal dos elementos de placa ( $u = 0$  para todos os nós de qualquer seção).
- Podem existir apenas deslocamentos  $w$  (perpendiculares a cada elemento de placa) para os nós que não sejam os principais internos, e rotações  $\Theta$  para todos os nós.

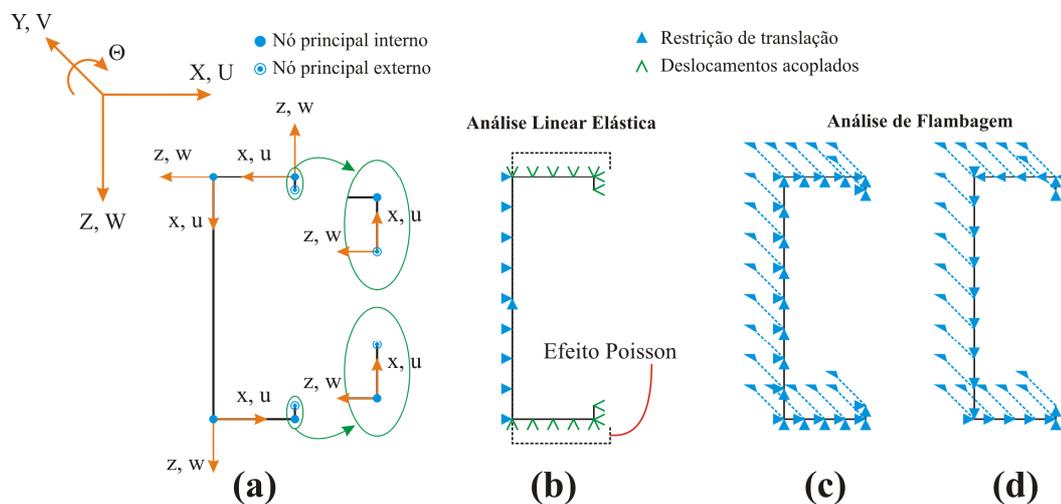


Figura 4.12. Restrição do modelo de elementos finitos ao espaço L para o perfil C analisado. (a) Sistemas de coordenadas globais e locais em uma seção. (b) Condições de contorno das extremidades na análise linear elástica. (c) Condições de contorno das extremidades na análise de flambagem (perfil S-S). (d) Restrições em uma seção genérica do modelo na análise de flambagem.

Na análise linear elástica, as condições de contorno das extremidades são as mesmas já descritas na seção 4.1, permitindo a deformação por efeito Poisson, como ilustra a Figura 4.12 (b) para um perfil sob compressão axial. Posteriormente, na análise de flambagem, restrições de translação são aplicadas a todos os nós selecionados do modelo de elementos finitos, de forma que as hipóteses mecânicas dos modos L sejam obedecidas (ver seção 2.1).

Nas extremidades do perfil, as condições de contorno da análise de flambagem ficam definidas como mostra a Figura 4.12(c) para um perfil S-S. Essas condições de contorno garantem o apoio simples de cada elemento de placa e obedecem às hipóteses mecânicas que

definem os modos L. Para um perfil C-C, restrições de rotação devem ser adicionadas, da mesma forma que na Figura 4.5(d).

Para uma seção genérica do modelo, os GDLs globais  $V$  e os GDLs locais  $u$  de todos os nós devem ser restringidos, de acordo com a Figura 4.12(d). Dessa forma, em cada seção, o empenamento será nulo, os elementos de placa não apresentarão extensão transversal e os nós principais internos (dobras do perfil) não se deslocarão.

## 5. VALIDAÇÃO DOS MÉTODOS PROPOSTOS: ANÁLISE DE UM PERFIL C COM ENRIJECEDORES DE BORDAS

Nesse capítulo, a metodologia apresentada no Capítulo 4 é aplicada na análise de flambagem do perfil C da Figura 4.1(a), considerando duas condições de contorno das extremidades (perfis S-S e E-E) e dois tipos de carregamento (compressão axial e flexão em torno do eixo de maior inércia, conforme Figura 4.2(a) e (b)).

O procedimento geral de restrição do modelo de elementos finitos da seção 4.2, que utiliza modos de deformação individuais definidos no MFFr, é aplicado (1) na análise de flambagem focada no espaço dos modos D e (2) na análise de uma combinação de modos distorcionais e locais, onde é feito o cálculo de contribuição modal. Também são apresentados os resultados de carga crítica obtidos com os diferentes esquemas alternativos de restrição propostos: procedimento geral independente das funções de forma longitudinais e esquemas de restrição aplicáveis aos espaços inteiros de modos GD, G, GO e L. Os resultados obtidos foram comparados com os fornecidos por modelos de faixas finitas e modelos usando a GBT.

As análises pelo MFFr foram realizadas utilizando o software CUFSM [Schafer e Ádány, 2006, e Li e Schafer, 2010b], gratuitamente disponível por Schafer em seu website [Schafer, 2006, e Schafer, 2011]. Os fundamentos do CUFSM estão descritos na seção 2.2, e a teoria do MFFr está na seção 2.3. Para as análises utilizando a GBT, os modelos foram feitos no software GBTUL, também gratuito, disponibilizado pelos criadores em [Bebiano et al., 2008]. A base teórica do GBTUL é discutida na seção 2.5.

Os modelos de faixas finitas e da GBT utilizados para a validação dos resultados possuem 3 subnós em cada elemento de placa de forma o perfil, ou seja, correspondem a uma discretização da seção do tipo 3-3-3.

A Figura 5.1 ilustra a distribuição transversal dos modos a serem obtidos nas análises de flambagem restringidas. O procedimento geral de restrição da seção 4.2.1 (e sua variação para número de ondas livre, da seção 4.2.2) foi aplicado utilizando os modos axiais ortogonais D1, D2 e L1 da Figura 2.9, retirado das rotinas do CUFSM.

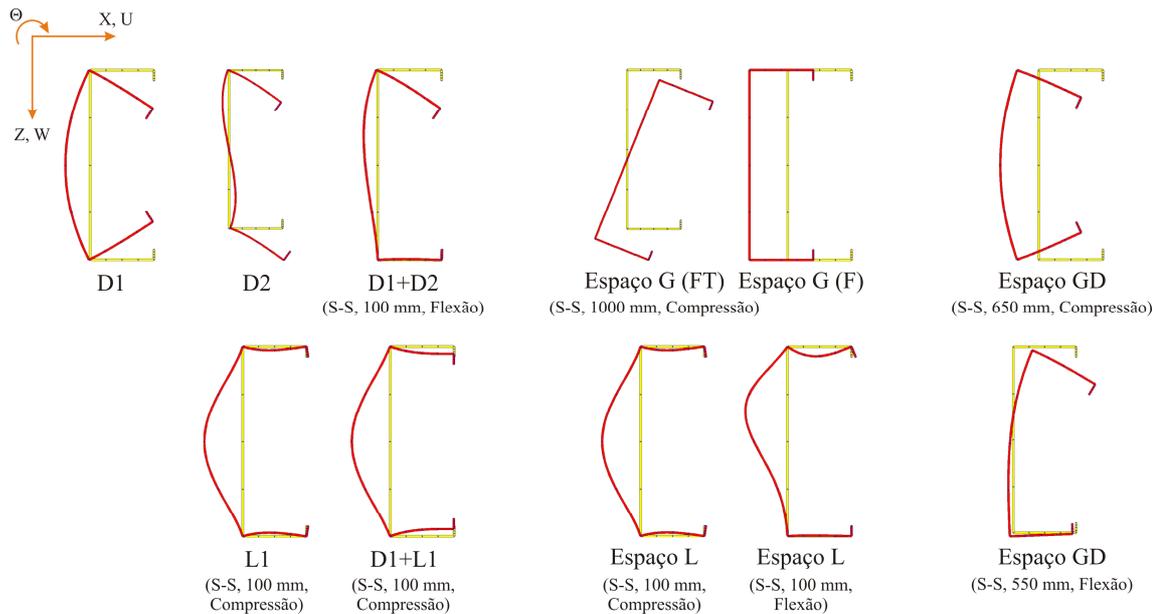


Figura 5.1. Distribuições transversais dos diferentes modos de flambagem analisados para o perfil C. D1, D2 e F coincidem com os modos naturais do MFFr.

Na análise de flambagem focada do espaço D, foi utilizado o modo de deformação D1 para o caso de carregamento de compressão axial, e os modos D1 e D2 para o caso de flexão, resultando num modo de flambagem combinado, exemplificado na Figura 5.1 para um perfil S-S com comprimento de meia-onda de 100 mm. Deve-se recordar que o modo axial ortogonal D1 é automaticamente a primeira solução de uma análise focada no espaço D para um perfil com carga axial.

Para o perfil S-S, fez-se uma análise focada no espaço DL através de uma simplificação considerando a combinação dos modos de deformação axiais ortogonais D1 e L1, conforme exemplificado na Figura 5.1 para um perfil S-S sob carga axial e comprimento de meia-onda de 100 mm.

Os modos de flambagem obtidos com os procedimentos de restrição alternativos para os espaços inteiros G, L e GD também estão exemplificados na Figura 5.1. Para os modos G, o modo FT representa um modo de flexo-torção e F representa um modo de flexão pura em torno do eixo de menor inércia (igual ao modo G2 da Figura 2.9). O procedimento de restrição ao espaço GO resulta em modos cujas distribuições transversais são semelhantes às dos modos G, a não ser pela possível extensão transversal dos elementos de placa (como na Figura 4.10(f)).

Ainda se deve observar que os modos da Figura 5.1 que coincidam com os modos naturais do MFFr (ou seja, os modos D1, D2 e F) têm distribuições transversais que independem do comprimento de meia-onda (ou comprimento do perfil).

Os resultados de carga crítica obtidos através dos modelos restringidos de elementos finitos foram comparados com os fornecidos pelo MFFr (software CUFSM) e pela GBT (software GBTUL). O MEF e o MFF baseiam-se numa teoria muito semelhante, pois os dois métodos trabalham com elementos de placa. Portanto, os resultados fornecidos pelo MFFr são considerados padrões para a verificação de resultados.

Como comentado, para um perfil S-S, a flambagem sempre ocorre através de meias-ondas senoidais ao longo do comprimento. Portanto, é comum apresentar os resultados de carga crítica em função do comprimento de meia-onda. Dessa forma, diversos modos de flambagem possíveis podem ser representados no gráfico. Para um perfil E-E, a variação harmônica longitudinal do modo de flambagem é mais complexa: a flambagem não ocorre com ondas iguais ao longo do comprimento do perfil. Além disso, cada modo de deformação individual considerado na análise, em geral, aparece com um número diferente de meias-ondas ao longo do comprimento do perfil. Analisando detalhadamente, podem aparecer diversos componentes harmônicos associados a um mesmo modo de deformação individual (normalmente, haverá um componente dominante). Portanto, os resultados de carga crítica do perfil E-E são apresentados em função do comprimento do perfil.

## 5.1 Análises iniciais

Primeiramente, foi feita uma comparação da curva de flambagem considerando todos os modos (curva “Todos os Modos”) com as curvas obtidas nas análises restringidas considerando as classes de flambagem G, D e L separadamente. Assim, é possível fazer uma comparação inicial dos diferentes métodos de análise, verificando a interação entre os modos para os diferentes carregamentos e para as diferentes condições de contorno.

A Figura 5.2 considera o perfil S-S e a Figura 5.3 refere-se ao perfil E-E. Os dois casos de carregamento (compressão axial e flexão pura) estão mostrados. Deve-se observar que, na Figura 5.3(b), os resultados de elementos finitos foram comparados apenas com os do MFF, já que o software GBTUL não permite a análise de um perfil E-E com momentos concentrados nas extremidades.

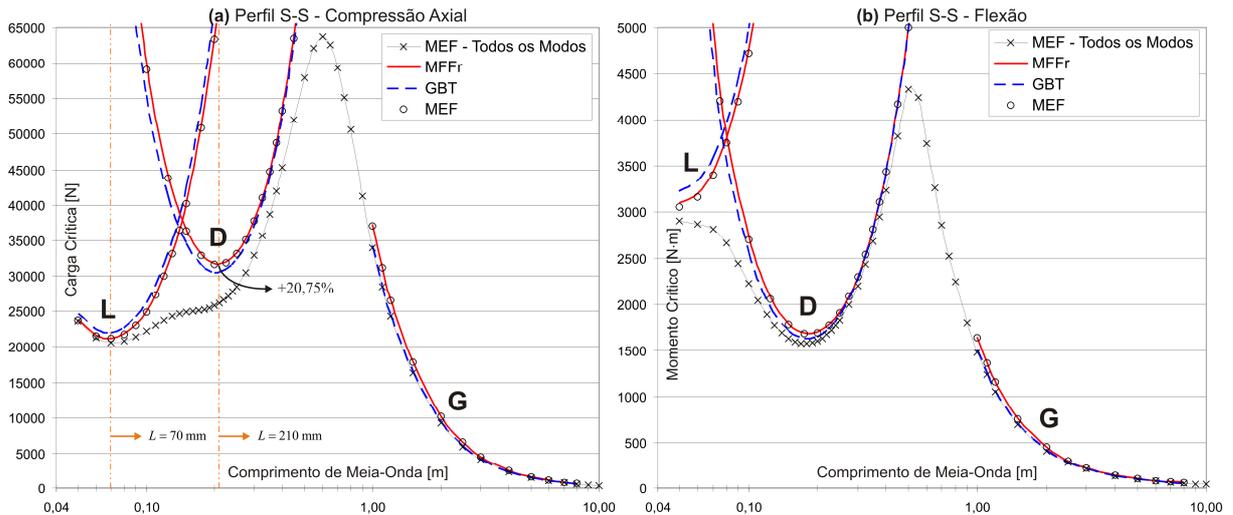


Figura 5.2. Comparação entre as diferentes curvas de flambagem do perfil C S-S. (a) Compressão axial. (b) Flexão em torno do eixo de maior inércia.

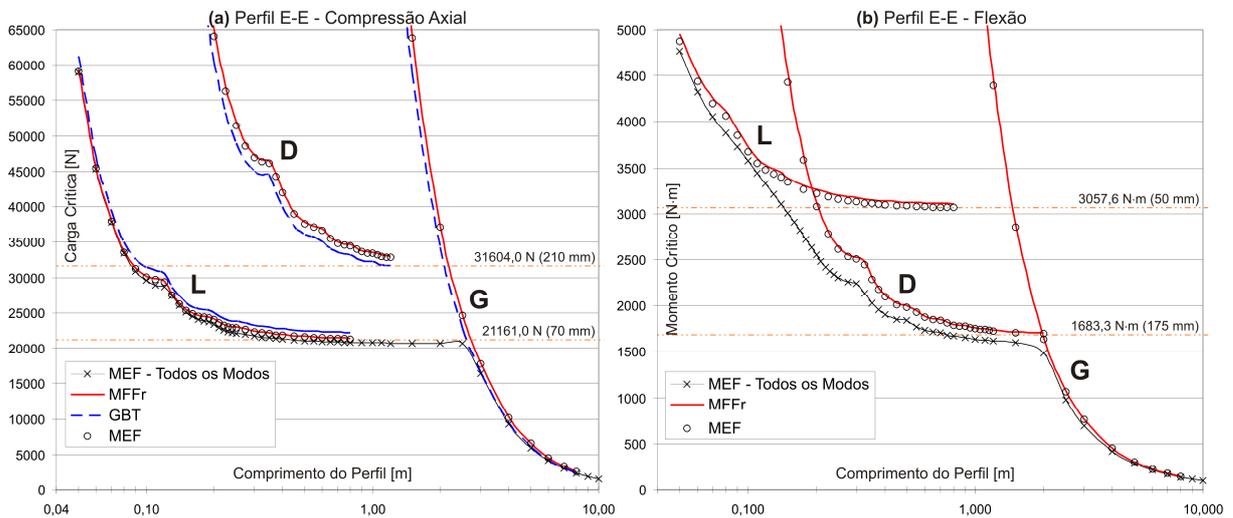


Figura 5.3. Comparação entre as diferentes curvas de flambagem do perfil C E-E. (a) Compressão axial. (b) Flexão em torno do eixo de maior inércia.

Na análise de flambagem considerando todos os modos, MEF, MFF e GBT, em geral, fornecem resultados com diferença desprezível e, portanto, nas figuras, apenas a curva Todos os Modos do MEF está mostrada. Por outro lado, os diferentes métodos de análise podem apresentar pequenas diferenças nas análises de flambagem restringidas, conforme discutido nas próximas seções.

Na Figura 5.2 e na Figura 5.3, para o MEF, as curvas das análises restringidas foram obtidas utilizando procedimentos considerados padrões para cada classe de flambagem, todos considerando esquema de restrição “Total”. As curvas L foram obtidas utilizando o procedimento de restrição alternativo da seção 4.5. As curvas D foram obtidas utilizando o

procedimento geral de restrição da seção 4.2.1 para o perfil S-S (considerando apenas meia-onda senoidal) e o procedimento da seção 4.2.2 (restrição independente das funções de forma longitudinais) para o perfil E-E. Finalmente, as curvas G foram obtidas com o procedimento alternativo da seção 4.4.

Na Figura 5.2(a), nota-se que a curva L do MEF tem um mínimo que praticamente coincide com o mínimo da curva Todos os Modos, ou seja, para pequenos comprimentos de meia-onda (menores do que 100 mm), não há interação significativa entre os modos de deformação na curva convencional (o modo de flambagem é praticamente local puro). Para o mínimo local (70 mm), a curva dos modos L fornece um resultado apenas 2,50% maior. Porém, para comprimentos de meia-onda maiores, a interação entre os modos é facilmente verificada. Por exemplo, na região do mínimo da curva D (aproximadamente 210 mm), a diferença entre a curva D do MEF e a curva Todos os Modos (que não apresenta mínimo nesse ponto) é considerável (20,75% maior), revelando grande interação entre modos locais e distorcionais na análise considerando todos os modos.

Comparando a Figura 5.2(a) e a Figura 5.2(b), constata-se que, para o perfil S-S submetido à compressão, o modo L é crítico em relação ao modo D e, quando o carregamento é de flexão, acontece o contrário, sendo o modo D crítico (a não ser para pequenos comprimentos). Para ambos os carregamentos, a curva G do MEF fornece resultados aproximadamente 10% maiores do que os da curva Todos os Modos. Nesse caso, a diferença deve-se à interação entre modos G e O na curva da análise não restringida, conforme comentado na seção 4.4 e detalhado em 5.1.1.

Na Figura 5.3, para o perfil E-E, mais uma vez se nota que, o modo crítico é o modo L para o carregamento de compressão e o modo D para o carregamento de flexão (a não ser para pequenos comprimentos). Na Figura 5.3(a), a curva L do MEF apresenta uma pequena diferença quando comparada à curva Todos os Modos (resultados no máximo 3,5% maiores), o que indica uma pequena interação entre modos locais e distorcionais na análise considerando todos os modos, na faixa de comprimentos nos quais a curva L governa. Porém, apesar de a diferença entre a curva L e a curva Todos os Modos ser pequena, a contribuição dos modos distorcionais na análise considerando todos os modos pode ser considerável (em termos de porcentagem), conforme discutido adiante. Assim como para o perfil S-S, a curva G do MEF fornece resultados até 10% maiores do que curva Todos os Modos na faixa de comprimentos onde a curva G governa.

Comparando a Figura 5.3 com a Figura 5.2, verifica-se que as cargas críticas dos modos G para o perfil E-E são maiores do que as do perfil S-S, conforme esperado. Também é possível observar que, para longos comprimentos, as cargas críticas dos modos L e D do perfil E-E tendem às respectivas cargas críticas do perfil S-S (mínimos das curvas L e D da Figura 5.2). Na Figura 5.3, as linhas tracejadas horizontais indicam as cargas críticas dos mínimos L e D do perfil S-S, com os respectivos comprimentos de meia-onda. Isso significa que, para grandes comprimentos, as condições de contorno das extremidades influenciam menos, o que sugere que a interação de componentes harmônicos seja menor para o perfil E-E, nas análises focadas em modos puros.

Conforme as figuras, nas análises de flambagem restringidas, os resultados de elementos finitos utilizando esquema de restrição Total, em geral, concordam muito bem com os fornecidos pelo MFF. As análises utilizando esquema 1 Sub são discutidas nas próximas seções. Também são abordados a influência do número de componentes harmônicos utilizados e o cálculo da contribuição modal de um modo combinado.

Por outro lado, os resultados obtidos com a GBT diferem um pouco. Para o modo L, a GBT fornece valores maiores (de 3 a 7%). Já para o modo D, os resultados da GBT são menores (em geral, entre 3 e 4%). Finalmente, para os modos G, a GBT fornece resultados até 9% menores. Nesse último caso (comentado na seção 4.4 e detalhado em 5.1.1), isso se deve à influência dos modos O, que são implicitamente incluídos nos modos G (e D) da GBT, e são totalmente desconsiderados no MFFr (e no MEF) na análise de flambagem focada no espaço G. Como consequência, a curva G da GBT praticamente coincide com a curva Todos os Modos na região onde os modos G governam, onde há interação entre modos G e O.

### **5.1.1 Diferença entre GBT e MFFr no cálculo da carga crítica de modos G e D**

A diferença entre os resultados da GBT e do MFFr no cálculo de modos G e D deve-se ao estado de tensões normais membranais considerado em cada um dos métodos. O MFFr, como trabalha com elementos de placa, considera um estado plano de tensões. A GBT, por ser baseada na teoria clássica de vigas, considera um estado de tensões linear. Porém, para a consideração da flexão transversal em modos de deformação distorcionais e locais, a GBT incorpora a teoria de placas, idêntica à utilizada no MFFr.

Considera-se o sistema de coordenadas local de um elemento de placa de um perfil, ilustrado na Figura 2.4. As tensões normais membranais (nas direções  $x$  e  $y$ ) dos modelos de viga e de placa são dadas pelas Eqs. (5.1) e (5.2), respectivamente:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^M = 0 \\ \sigma_{yy}^M = E\varepsilon_{yy}^M \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^M = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx}^M + \nu\varepsilon_{yy}^M) \\ \sigma_{yy}^M = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_{xx}^M + \varepsilon_{yy}^M) \end{cases} \quad (5.2)$$

A diferença entre a GBT e o MFFr sempre se tornará relevante quando as deformações membranais transversais forem restringidas ( $\varepsilon_{xx}^M = 0$ ), que é o caso dos modos puros G e D (de acordo com o Critério 1 da Tabela 2.1). Para o modelo de placa, não é possível ter deformações membranais transversais nulas ( $\varepsilon_{xx}^M = 0$ ) e tensões membranais transversais nulas ( $\sigma_{xx}^M = 0$ , como na teoria clássica de vigas) simultaneamente. Então, a Eq. (5.2) fica:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^M = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_{yy}^M \\ \sigma_{yy}^M = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{yy}^M \end{cases} \quad (5.3)$$

Comparando (5.1) e (5.3), a diferença entre MFFr e GBT para a tensão longitudinal membranal  $\sigma_{yy}^M$  é igual a  $1/(1-\nu^2)$ . Considerando  $\nu=0,3$ , essa diferença é igual a aproximadamente 10%. Portanto, o MFFr considera um modelo mais rígido para o cálculo de modos G e D.

O efeito da diferença da rigidez membranal longitudinal entre MFFr e GBT no cálculo das cargas críticas de flambagem depende da importância das tensões normais membranais no modo de flambagem considerado:

- Para modos globais de flexão, as tensões normais membranais são dominantes. Portanto, a diferença entre MFFr e GBT será de aproximadamente 10%.
- Para modos globais de flexo-torção, além das tensões normais membranais, também existem tensões cisalhantes, que não afetadas pelo efeito Poisson. Nesse caso, a diferença entre MFFr e GBT será sempre menor do que 10%.

- Para modos distorcionais, tanto as tensões longitudinais membranais quanto as tensões de flexão transversais são importantes. As tensões de flexão transversais são tratadas de forma idêntica no MFFr e na GBT (teoria de placas). Assim, para modos distorcionais, a diferença entre MFFr e GBT será sempre menor do que 10%.
- Os modos locais são governados por tensões de flexão transversais. Para esses modos, a diferença entre MFFr e GBT é desprezível.

No MFFr, a consideração dos modos O em conjunto com os modos G ou D fornece uma flexibilidade adicional ao modelo (violando a hipótese mecânica  $\varepsilon_{xx}^M = 0$ , segundo Tabela 2.1), de forma que os resultados praticamente coincidam com os da GBT. Isso significa que, implicitamente, as deformações membranais transversais são consideradas na GBT. Em outras palavras, os modos globais e distorcionais da GBT devem ser vistos como uma combinação dos modos G e O ou D e O do MFFr.

Modelos de elementos finitos utilizando elementos de casca assemelham-se a modelos de faixas finitas. Portanto, as observações feitas para o MFFr também são válidas a modelos de elementos finitos restringidos. Conseqüentemente, sempre que os modos O não forem considerados numa análise utilizando um modelo de elementos finitos restringido, o resultado poderá ser até 10% maior do que uma análise de elementos finitos não restringida, mesmo que todo o espaço dos modos G, D e L seja considerado na análise restringida.

## 5.2 Curvas GD

A Figura 5.4 mostra as curvas da análise de elementos finitos focada no espaço GD (procedimento de restrição da seção 4.3) para o carregamento de flexão, cujos modos D e G são críticos em relação ao local para a maioria dos comprimentos. As curvas GD mostradas consideram esquema de restrição Total e são comparadas com a curva Todos os Modos do MEF e com as curvas D e G. Para o perfil E-E, a curva GD considera apenas um componente harmônico: o componente dominante inspecionado visualmente na análise do MFF.

A curva GD do MEF difere-se da curva Todos os Modos pela não consideração dos modos L (na região onde o modo D governa) ou dos modos O (na região onde o modo G governa). Por outro lado, a curva GD do MEF concorda com as curvas D e G do MEF e do MFFr nas regiões governadas pelos modos D e G, respectivamente, ou seja, o procedimento de restrição ao espaço GD permite que se obtenham cargas críticas de modos G e D puros, dependendo do comprimento do perfil analisado.

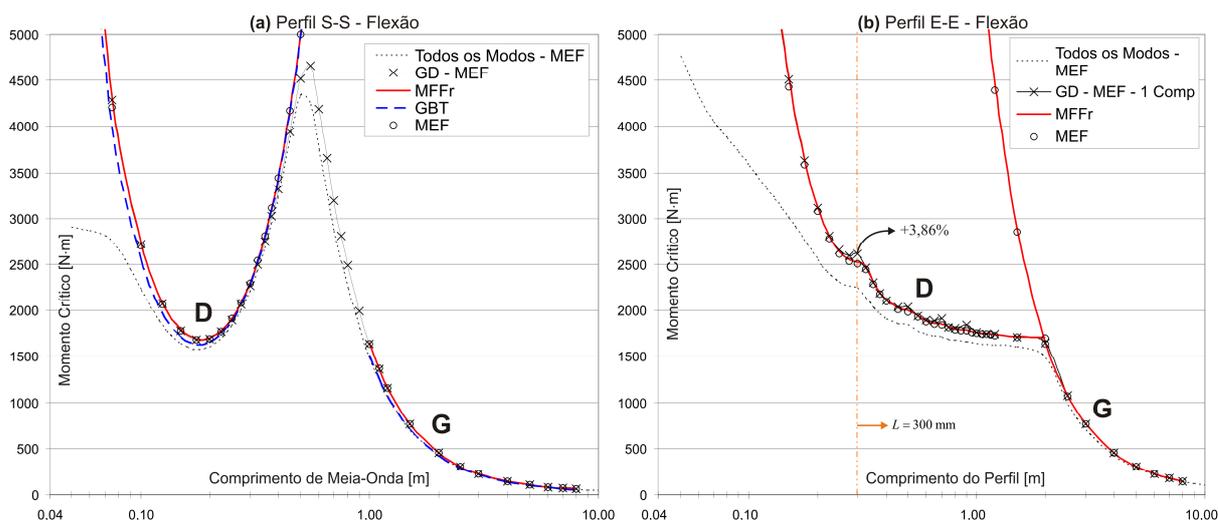


Figura 5.4. Curvas GD do perfil C para flexão em torno do eixo de maior inércia. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E (considerando somente o componente harmônico dominante).

Na Figura 5.4(b), é possível observar que, na região onde o modo D governa, as maiores diferenças entre a curva GD do MEF e a curva D do MEF ocorrem nas transições entre diferentes componentes harmônicos dominantes. A maior diferença é de 3,86% para o comprimento do perfil de 300 mm. Na região onde o modo G governa, o componente dominante é sempre o de uma meia-onda, o que torna as diferenças desprezíveis. Portanto, a consideração de apenas um componente harmônico (o dominante) na análise focada no espaço inteiro dos modos G e D fornece bons resultados para toda a faixa de comprimentos.

### 5.3 Curvas G e GO

A Figura 5.5 ilustra a comparação da curva GO do MEF (procedimento de restrição da seção 4.4) com a curva G obtida com os diferentes métodos, para o carregamento de compressão axial. Os resultados da curva GO - MEF são praticamente idênticos para os dois esquemas de restrição propostos (Total e 1 Sub). Para a curva G - MEF, são mostrados os resultados dos dois esquemas de restrição.

Como já comentado, os resultados da curva G - MEF - Total apresentam excelente concordância com a curva do MFFr. Para o perfil S-S, a diferença é praticamente zero e, para o perfil E-E, o resultado do MEF é 2,14% menor para um comprimento de 1000 mm com a diferença caindo a zero pra comprimentos maiores. Por outro lado, os resultados obtidos com o esquema de restrição 1 Sub (curva G - MEF - 1 Sub) são, em geral, 6 a 9% menores do que os do MFFr.

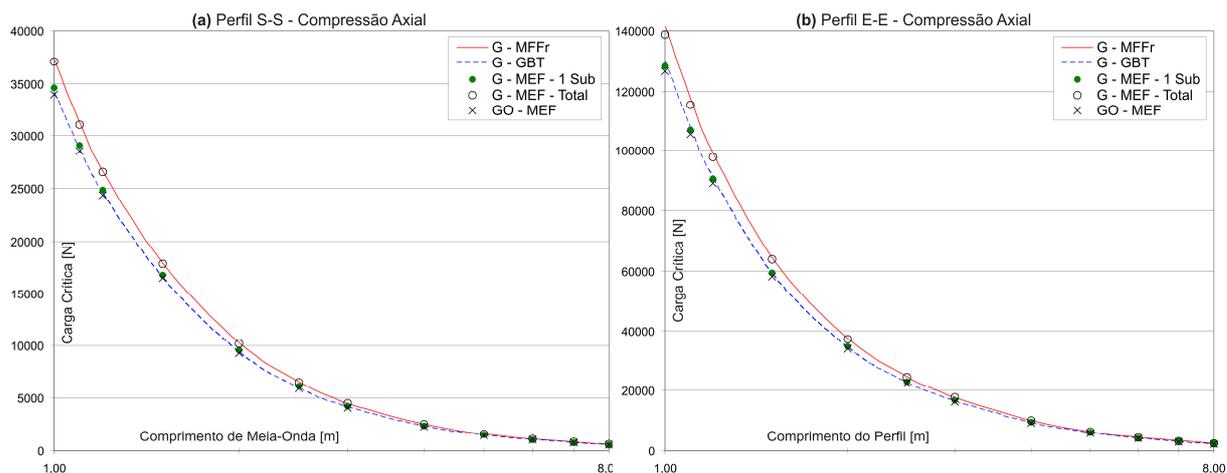


Figura 5.5. Curvas G e GO do perfil C para compressão axial. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E.

Assim, o procedimento de restrição da seção 4.4 fornece resultados melhores com esquema 1 Sub quando os modos O são considerados. Na verdade, o esquema 1 Sub aplicado para o espaço G não consegue eliminar completamente a influência dos modos O. Por isso, a curva G – MEF – 1 Sub aproxima-se da curva GO – MEF.

Conforme discussão da seção 5.1.1, espera-se que os resultados da curva GO – MEF sejam aproximadamente 10% menores do que os resultados obtidos considerando somente o espaço dos modos G. Adicionalmente, espera-se que os resultados concordem com os fornecidos pela curva G - GBT, já que esse método considera implicitamente a influência dos modos O na análise focada no espaço G. Assim, para o perfil S-S, a diferença entre curva GO – MEF e a curva G – GBT é praticamente zero e, para o perfil E-E, o resultado da curva GO – MEF é 2,49% menor do que o da curva G – GBT para um comprimento de 1000 mm com a diferença indo a zero para comprimentos maiores.

É importante destacar que, embora os resultados da curva GO – MEF apresentem uma excelente concordância com a curva G – GBT (que considera implicitamente os modos O), poderá haver uma pequena diferença de resultados em comparação com a curva GO obtida com o MFFr. Essa diferença só não ocorrerá caso os modos O do MFFr sejam definidos com detalhado na seção 4.4, que são os modos utilizados apenas na versão 3.12 do software CUFSM [Schafer, 2006].

## 5.4 Curvas D

Os resultados da análise de flambagem focada no espaço D são mostrados para o carregamento de flexão, caso em que o modo D é crítico em relação ao local para a maioria

dos comprimentos. O esquema de restrição geral da seção 4.2 foi empregado, utilizando os dois modos de deformação distorcionais que definem o espaço D do perfil adotado como exemplo (modos D1 e D2 da Figura 5.1). Deve-se notar que, para carregamento de compressão axial, o primeiro modo de flambagem obtido na análise focada no espaço D coincide com o modo D1 e, portanto, pode ser utilizado apenas esse modo de deformação para a restrição do modelo, o que caracteriza uma vantagem da utilização de modos de deformação axiais ortogonais do MFFr.

A Figura 5.6 exibe as curvas D do MEF comparadas com as curvas D fornecidas pelos outros métodos. Os resultados dos dois esquemas de restrição estudados (Total e 1 Sub) estão mostrados.

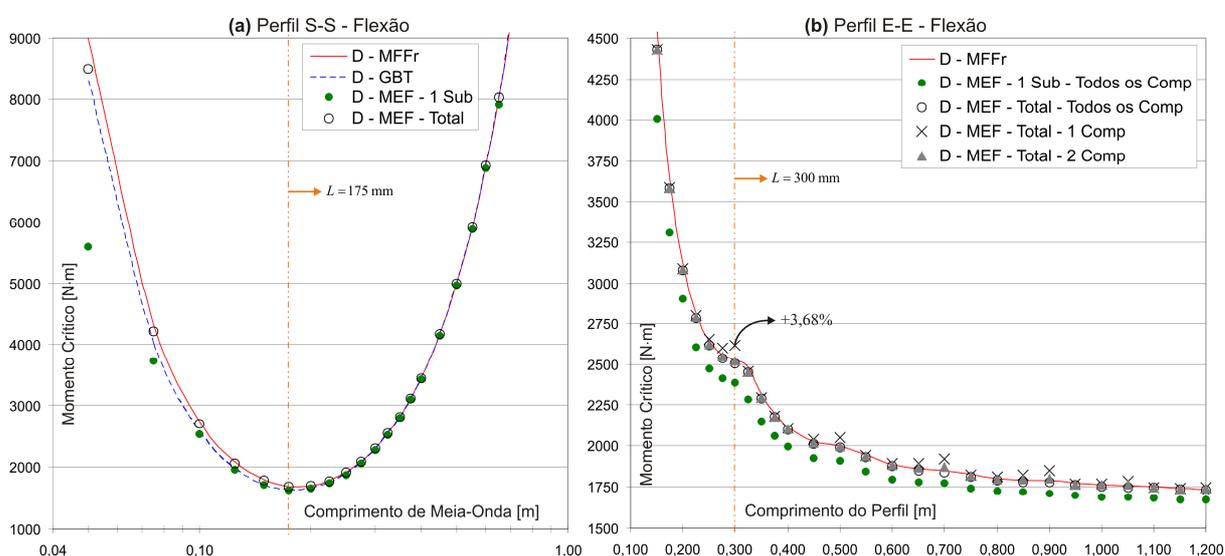


Figura 5.6. Curvas D do perfil C para flexão em torno do eixo de maior inércia. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E.

Para o perfil E-E (Figura 5.6(b)), a análise restringida foi realizada considerando um, dois e todos os componentes harmônicos (curvas 1 Comp, 2 Comp e Todos os Comp, respectivamente). Na análise considerando apenas um componente, foi utilizado o componente dominante baseado no resultado da análise considerando todos os componentes (inspeção visual), admitido comum para os modos de deformação D1 e D2. Na análise levando em conta dois componentes, foi considerado o componente que, juntamente com o componente dominante, fornecesse a menor carga crítica. Na análise considerando todos os componentes, conforme procedimento descrito na seção 4.2.2, foram utilizadas duas incógnitas por seção restringida, referentes aos dois modos de deformação considerados.

Para o perfil S-S (Figura 5.6(a)), a diferença de resultados entre o esquema Total e a curva do MFFr é desprezível para comprimentos de meia-onda iguais ou maiores do que 100 mm (comprimento bem menor do que o comprimento crítico). Apenas para um comprimento de meia-onda de 50 mm, a curva D – MEF – Total fornece um resultado 5,61% menor. Porém, esse é um comprimento de meia-onda de pouco interesse prático para o perfil do exemplo. Mesmo assim, essa diferença pode ser eliminada caso, no procedimento de restrição da seção 4.2, os GDLs de empenamento não sejam desacoplados dos GDLs transversais, ou seja, ao invés de se utilizarem um GDL de empenamento e um GDL transversal como incógnitas, elege-se apenas um deles. Deve-se lembrar que, acoplando GDLs de empenamento e transversais, fica impossível utilizar o esquema de restrição que considera todos os componentes harmônicos possíveis (seção 4.2.2).

Conforme Figura 5.6(a), o esquema 1 Sub só fornece resultados bons comparados para comprimentos de meia-onda iguais ou maiores do que o crítico. Por exemplo, para um comprimento de 175 mm, o resultado da curva D – MEF – 1 Sub é 3,44% menor do que o do MFFr, diminuindo para comprimentos maiores. Portanto, para comprimentos de meia-onda pequenos, uma baixa restrição da malha não consegue eliminar a influência dos modos locais no resultado da análise de flambagem.

Para o perfil E-E (Figura 5.6(b)), o esquema de restrição Total apresenta excelente concordância com os resultados do MFFr quando são considerados todos ou apenas dois componentes harmônicos. Uma pequena diferença é verificada para comprimentos de perfil menores do que 150 mm, que são de pouco interesse prático. Quando apenas um componente harmônico é considerado, uma pequena diferença é observada nas regiões de transição entre os componentes harmônicos dominantes. Porém, a maior diferença observada foi para o comprimento de perfil de 300 mm, onde a curva D – MEF – Total – 1 Comp fornece um resultado 3,68% maior do que o do MFFr. Conforme já verificado na Figura 5.3(b), para comprimentos maiores, o comportamento do perfil tendo ao de um perfil S-S, e a consideração do componente dominante passa a ser suficiente.

Na Figura 5.6(b), verifica-se que o esquema 1 Sub apresentou uma diferença considerável quando comparado com o MFFr. Considerando todos os componentes harmônicos e comprimentos de perfil maiores do que 200 mm (valor razoável para interesse prático), os resultados da curva D – MEF – 1 Sub – Todos os Comp são até 8% menores do

que os do MFFr (para um comprimento de perfil de 325 mm), com uma diferença média de 5,45%.

## 5.5 Curvas L

Os resultados da análise de flambagem focada no espaço L são mostrados para o carregamento de compressão axial, caso em que o modo L é crítico em relação ao local. O esquema de restrição alternativo da seção 4.5 foi empregado, que considera automaticamente o espaço inteiro dos modos locais e a contribuição de todos os componentes harmônicos possíveis.

A Figura 5.7 exibe as curvas L do MEF comparadas com as curvas L fornecidas pelos outros métodos. Os resultados dos dois esquemas de restrição estudados (Total e 1 Sub) estão mostrados. Ambos os esquema fornecem resultados idênticos, que apresentam excelente concordância com os resultados do MFFr. Os resultados do MEF são, em média, menos do que 0,5% menores do que os do MFFr.

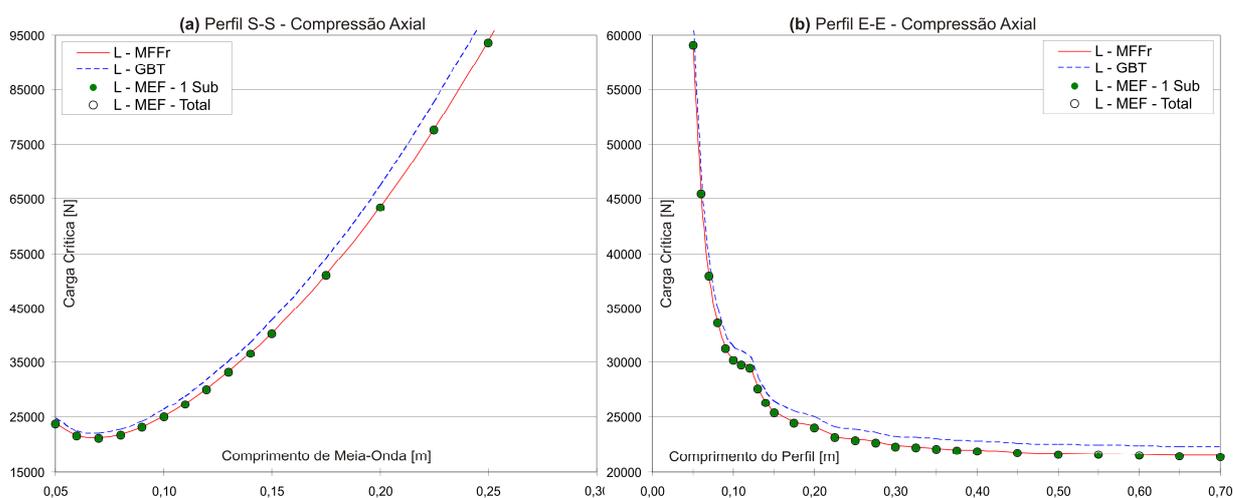


Figura 5.7. Curvas L do perfil C para compressão axial. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E.

## 5.6 Curvas DL

Fez-se uma análise de flambagem de elementos finitos focada no espaço dos modos D e L juntos (espaço DL) para o caso de compressão axial. Foi utilizado o procedimento de restrição geral das seções 4.2.1 e 4.2.2 em uma análise simplificada considerando apenas dois modos de deformação axiais ortogonais: o primeiro modo distorcional (D1) e o primeiro modo local (L1), dados na Figura 2.9 e na Figura 5.1.

A Figura 5.8 ilustra as curvas D1L1 do MEF, que devem aproximar a análise de flambagem focada no espaço DL, para os dois casos de condições de contorno considerados. As curvas são comparadas com os resultados do MFFr e da GBT considerando o espaço DL inteiro (curvas DL).

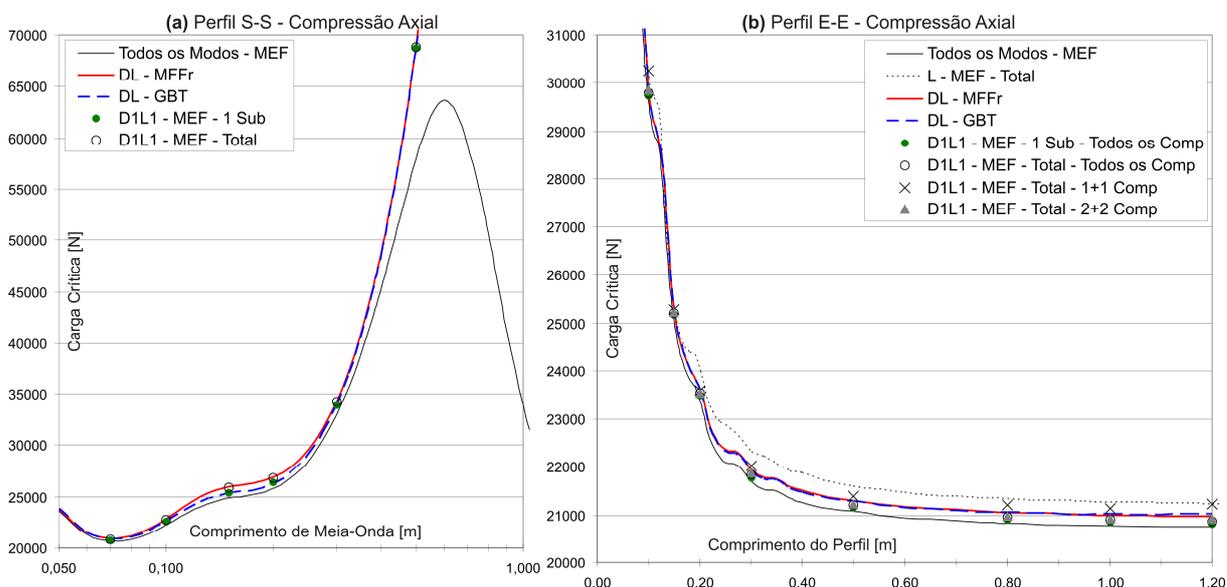


Figura 5.8. Curvas DL do perfil C para compressão axial. (a) Perfil S-S. (b) Perfil E-E.

Para o perfil E-E (Figura 5.8(b)) foram adotadas três combinações de componentes harmônicos:

- **1+1 Comp:** É considerado apenas um componente harmônico associado a cada modo de deformação, os quais podem ser diferentes. São escolhidos os componentes dominantes para cada modo, que podem ser verificados visualmente nos resultados do MFFr ou da GBT. Portanto, no modelo de elementos finitos, são utilizados dois GDLs como incógnitas para a restrição dos GDLs transversais e mais dois GDLs para a restrição dos GDLs de empenamento.
- **2+2 Comp:** São considerados dois componentes harmônicos, e ambos são associados a cada modo de deformação. Os componentes dominantes de cada modo, que podem ser previamente observados nos resultados do MFFr ou da GBT, são atribuídos aos dois modos de deformação considerados. Caso o componente dominante seja o mesmo para ambos os modos, seleciona-se outro componente que, junto com o dominante, forneça a menor carga crítica. Assim, no modelo de elementos finitos, são utilizados quatro GDLs

como incógnitas para a restrição dos GDLs transversais e mais quatro GDLs para a restrição dos GDLs de empenamento.

- **Todos os Comp:** É utilizado o procedimento de restrição da seção 4.2.2, que considera todos os componentes harmônicos possíveis. Como são considerados dois modos de deformação, são utilizados dois GDLs como incógnitas para a restrição dos GDLs transversais e mais dois GDLs para a restrição dos GDLs de empenamento, em cada seção restringida do modelo de elementos finitos.

As curvas D1L1 do MEF apresentam excelente concordância com a curva DL do MFFr, para as duas configurações de condições de contorno e para os dois esquemas de restrição utilizados. Portanto, para o caso de compressão, a utilização de poucos modos de deformação axiais ortogonais é suficiente para se obter um bom resultado de carga crítica.

Para o perfil S-S, o esquema Total fornece resultados praticamente idênticos ao do MFFr, e os resultados do esquema 1 Sub são no máximo 2,27% menores, para um comprimento de meia-onda de 150 mm. Para o perfil E-E, a diferença de resultados é, em geral, menor do que 1% para qualquer combinação de componentes harmônicos utilizada, ou seja, a consideração de apenas o componente harmônico dominante para cada modo (esquema 1+1 Comp) já é suficiente para se obter um bom resultado para a carga crítica no espaço DL.

Ao contrário da análise focada somente no espaço dos modos D, o esquema 1 Sub fornece excelentes resultados na análise focada no espaço DL. Na análise focada no espaço D para pequenos comprimentos, o esquema 1 Sub não eliminava apropriadamente a influência dos modos L por falta de restrição na malha de elementos finitos. Como a análise focada no espaço DL inclui os modos L, esse problema não existe mais.

Na Figura 5.8, as curvas D1L1 são compradas com a curva Todos os Modos do MEF, revelando resultados muito próximos. A pequena diferença ainda se deve à influência dos modos O na curva Todos os Modos. Para o perfil E-E, também é feita a comparação com a curva L. Nota-se que os resultados são muito próximos aos da curva D1L1, o que demonstra que o modo local L1 é dominante na curva D1L1. Mesmo assim, a análise da contribuição dos modos no modo de flambagem pode revelar uma considerável participação (em porcentagem) do modo D1, conforme discutido adiante.

A Tabela 5.1 exhibe os resultados de participação modal da curva D1L1 do MEF para o perfil S-S. Os resultados são dados em termos da porcentagem de participação do modo D1

( $p_{D1}$ ); o restante, automaticamente, será a participação do modo L1 ( $p_{L1}$ ). São considerados dois esquemas de normalização (NV e NTE) e os resultados são comparados com os fornecidos pelo CUFSM para o espaço DL inteiro (números entre parênteses).

Tabela 5.1. Contribuição do modo D1 nos resultados da curva D1L1 do perfil C S-S.

Comprimento de Meia-Onda [mm]	$p_{D1}$ [%] - MEF ( $p_{D1}$ [%] - MFF)			
	VN		WN	
	1 Sub	Total	1 Sub	Total
70	12,64 (11,40)	6,97 (6,80)	6,87 (6,20)	6,11 (5,90)
100	34,80 (32,80)	22,09 (21,70)	21,46 (20,00)	19,79 (19,40)
150	71,25 (69,60)	57,36 (56,80)	55,97 (54,20)	53,94 (53,40)
200	85,00 (84,20)	75,96 (75,50)	74,42 (73,50)	73,35 (72,90)
300	91,28 (90,90)	85,64 (85,30)	84,32 (83,90)	83,86 (83,50)
500	92,96 (92,80)	88,37 (88,10)	87,15 (87,00)	86,88 (86,60)
800	93,29 (93,10)	88,91 (88,70)	87,72 (87,60)	87,47 (87,30)

Como comentado, os valores de participação modal utilizando o esquema de normalização NV são fortemente dependentes da discretização da seção utilizada para se definirem os modos no MFFr, o que é verificado na Tabela 5.1. Para o esquema de normalização NTE, as pequenas diferenças de resultados entre os esquemas de restrição 1 Sub e Total vêm da leve diferença dos modos de flambagem obtidos com as diferentes discretizações. Finalmente, para quaisquer esquemas de restrição e normalização considerados, os resultados de participação modal do MEF mostram muito boa concordância com os resultados do MFFr.

A Tabela 5.2 mostra os resultados de participação modal da curva D1L1 do MEF do perfil E-E para o esquema de normalização VN. Os resultados são dados em termos de participação modal do modo D1 ( $p_{D1}$ ) e são comparados com os fornecidos pelo MFFr considerando o espaço DL inteiro (números entre parênteses). Os resultados do MFFr para a combinação de componentes harmônicos 2+2 Comp são dados diretamente pelo software CUFSM, enquanto os resultados para a combinação 1+1 Comp só podem ser obtidos através da manipulação das rotinas do programa. Para a combinação Todos os Comp utilizando o MFFr, foram considerados os vinte primeiros componentes para perfis de comprimento de até 1000 mm, e os trinta primeiros componentes para perfis maiores.

Tabela 5.2. Contribuição do modo D1 nos resultados da curva D1L1 do perfil C E-E.

Comprimento do Perfil [mm]	$p_{D1}$ [%] - MEF ( $p_{D1}$ [%] - MFF)					
	1 Sub			Total		
	1+1 Comp	2+2 Comp	Todos os Comp	1+1 Comp	2+2 Comp	Todos os Comp
100	9,82 (8,51)	10,38 (8,90)	10,63 (8,99)	5,33 (5,02)	5,62 (5,25)	5,76 (5,30)
150	7,31 (6,34)	7,78 (6,72)	7,79 (6,87)	3,86 (3,66)	4,12 (3,88)	4,13 (4,00)
200	33,59 (31,55)	32,51 (30,40)	36,41 (30,41)	21,08 (20,83)	20,20 (20,06)	23,14 (20,10)
300	32,54 (30,14)	26,20 (23,94)	27,49 (23,57)	19,92 (19,68)	15,33 (15,25)	16,46 (15,00)
500	19,14 (17,37)	16,13 (14,18)	18,94 (18,34)	10,83 (10,62)	8,74 (8,62)	10,58 (11,40)
800	14,86 (13,35)	13,51 (11,90)	16,27 (16,73)	8,16 (7,99)	7,27 (7,09)	8,95 (10,20)
1000	12,42 (11,11)	13,06 (11,45)	15,25 (15,43)	6,74 (6,58)	6,99 (6,80)	8,30 (9,40)
1200	13,59 (12,18)	14,56 (13,00)	15,35 (15,64)	7,42 (7,25)	7,97 (7,76)	8,35 (9,60)
1500	10,61 (9,43)	13,10 (11,55)	14,47 (14,49)	5,68 (5,53)	7,05 (6,85)	7,82 (8,70)
2000	9,78 (8,67)	13,22 (11,70)	14,18 (14,15)	5,21 (5,07)	7,14 (6,94)	7,64 (8,40)

Deve-se notar que o esquema de restrição geral que considera todos os componentes harmônicos da seção 4.2.2 não fornece diretamente os valores de contribuição modal. Por outro lado, esse esquema fornece valores da função de forma longitudinal associada a cada modo de deformação em cada seção restringida (ver Eqs. (4.20), (4.21) e (4.29)). Portanto, é possível obter as expressões analíticas dessas funções através de algum procedimento de aproximação. As funções de forma longitudinais permitem propor um meio de avaliar a participação modal de cada modo de maneira semelhante à feita na GBT.

Na GBT, tem-se uma função de forma longitudinal associada a cada modo de deformação, a qual, para condições de contorno diferentes de apoios simples, considera automaticamente todos os componentes harmônicos do MFFr (solução por elementos finitos, comentada na seção 2.5). Portanto, o procedimento de restrição da seção 4.2.2 assemelha-se bastante aos princípios da GBT. A participação de determinado modo de deformação pode ser calculada através da integração de sua função de forma longitudinal ao longo do comprimento

do perfil. De acordo com o procedimento da seção 4.2.2, a distribuição dos deslocamentos transversais em uma seção é dada pela seguinte equação, exemplificada para o vetor de rotações:

$$\Theta(Y) = \Theta_{D1}^{[m_1]} \psi_{D1,comb}(Y) + \Theta_{L1}^{[m_2]} \psi_{L1,comb}(Y) \quad (5.4)$$

Com proposta inspirada na GBT, a participação modal do modo D1 fica dada por:

$$p_{D1} [\%] = 100 \frac{\int_0^L |\psi_{D1,comb}(Y)| dY}{\int_0^L |\psi_{D1,comb}(Y)| dY + \int_0^L |\psi_{L1,comb}(Y)| dY} \quad (5.5)$$

Para que os valores de participação modal tenham sentido, os modos D1 e L1 da Eq. (5.4) devem estar normalizados. Assim, propõe-se que os componentes harmônicos  $m_1$  e  $m_2$  associados aos modos de deformação sejam os componentes dominantes. Deve-se lembrar que nenhuma normalização é necessária para se obter o resultado de carga crítica do modo de flambagem que considera todos os componentes harmônicos. Conseqüentemente, nenhuma normalização é precisa para se visualizarem previamente os componentes harmônicos dominantes.

A partir dos resultados da Tabela 5.2, verifica-se que:

- Assim como na Tabela 5.1, o esquema de normalização NV é fortemente sensível à discretização da seção utilizada para se definirem os modos de deformação utilizados na análise de flambagem (1 Sub e Total).
- Para o esquema de restrição Total e combinações 1+1 Comp e 2+2 Comp (ou seja, procedimento de restrição da seção 4.2.1), os resultados fornecidos pelo MEF são muito bons, sendo sempre ligeiramente maiores do que os do MFFr. Para o esquema 1 Sub, a diferença é um pouco maior. Mesmo assim, os resultados são coerentes, sendo sempre maiores do que os do MFFr.
- Comparando as combinações de componentes 1+1 Comp e 2+2 Comp, observam-se algumas diferenças consideráveis nos resultados, principalmente para o comprimento de perfil de 300 mm.
- Comparando as combinações de componentes 2+2 Comp e Todos os Comp para o MFFr, verifica-se que uma diferença maior de resultados ocorre para comprimentos de perfil a partir de 500 mm, ou seja, quanto maior o comprimento do perfil, maior o número de componentes harmônicos contribuindo para o modo de flambagem. Para o MEF

(cálculo de contribuição alternativo da Eq. (5.5)), a maior diferença ocorre para o comprimento de 200 mm.

– Mesmo que se observem certas diferenças dos resultados de contribuição modal entre as diferentes combinações de componentes utilizadas, a carga crítica da análise focada no espaço DL varia muito pouco, conforme observado na Figura 5.8(b).

Cabe destacar que não existe um esquema definitivo de normalização dos modos de deformação que forneça resultados padrões de contribuição modal. Portanto, os resultados obtidos com ambos os esquemas de restrição (Total e 1 Sub) são bons.

Finalmente, o método de cálculo da contribuição modal proposto para o esquema de restrição geral considerando todos os componentes harmônicos, com base na GBT e considerando a normalização dos componentes dominantes, apresentou resultados muito bons.

## 5.7 Análise da deformada

Conforme discutido nas seções anteriores, a análise de flambagem do perfil E-E utilizando o procedimento geral foi realizada considerando diversas combinações de componentes harmônicos. O procedimento geral de restrição foi utilizado na análise de flambagem focada no espaço dos modos D e nos espaço dos modos D e L juntos (espaço DL). Na análise focada no espaço DL, assumiu-se uma simplificação através do uso dos modos de deformação D1 e L1.

A variação longitudinal do modo de flambagem foi considerada fixa ou livre. A análise focada no espaço D com variação fixa foi realizada considerando um ou dois componentes harmônicos. Na análise focada no espaço DL com variação fixa, foram atribuídos um ou dois componentes harmônicos a cada modo de deformação considerado (D1 e L1).

Conforme Figura 5.6(b) e Figura 5.8(b), a consideração de apenas o componente harmônico dominante já é suficiente para se obter um bom resultado de carga crítica. Porém, como verificado na Tabela 5.2, os resultados de contribuição modal podem apresentar certa diferença para as diferentes combinações de componentes harmônicos consideradas. Essas diferenças devem-se à variação da deformada do perfil de acordo com a combinação de componentes utilizada.

A Figura 5.9 ilustra as diferenças na deformada para um perfil E-E de 800 mm sob compressão axial. A Figura 5.9(a) mostra a análise de flambagem focada no espaço dos

modos D (utilizando modo D1), que considera três meias-ondas para a análise utilizando apenas um componente, e três e cinco meias-ondas para a análise com dois componentes. A Figura 5.9(b) exibe a análise focada no espaço DL (simplificação utilizando os modos de deformação D1 e L1). Para a combinação 1+1 Comp, foram utilizados o componente com nove meias-ondas para o modo D1 e o com onze meias-ondas para o modo L1. Para a combinação 2+2 Comp, os componentes com nove e onze meias-ondas foram associados a ambos os modos de deformação. As análises da Figura 5.9 consideram esquema de restrição Total.

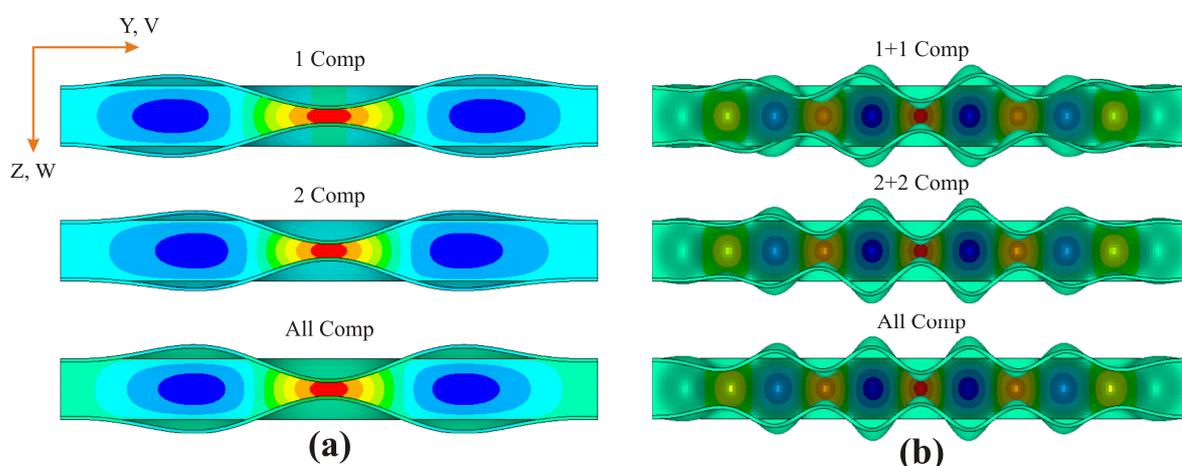


Figura 5.9. Modos de flambagem do perfil C E-E de 800 mm sob compressão axial. (a) Espaço D. (b) Espaço DL.

Na análise focada no espaço D (Figura 5.9(a)), observa-se certa diferença na deformada, principalmente entre a análise 1 Comp e as demais. Na análise focada no espaço DL (Figura 5.9(b)), fica evidente a superposição de um modo local e de um modo distorcional. Conforme Tabela 5.2, o modo local é dominante, e, portanto, sua contribuição pode ser bem visualizada pela deformada da alma. Constata-se que a deformada do modo local pouco varia com a combinação de componentes utilizada. A contribuição do modo distorcional é observada pela translação do conjunto flange/enrijecedor. Ao contrário do modo local, a deformada associada ao modo distorcional é bastante sensível à combinação de componentes empregada. Por exemplo, observam-se nove meias-ondas ao longo do comprimento associadas do modo distorcional para a combinação Todos os Comp, enquanto que onze meias-ondas manifestam-se para a combinação 2+2 Comp.

As observações da Figura 5.9 podem ser postas de forma mais rigorosa fazendo-se o gráfico de algum deslocamento do perfil ao longo de seu comprimento. Isso pode ser feito

diretamente a partir da formulação da análise de flambagem restringida. Como exemplo, escolhe-se o deslocamento  $U$  no centro da alma (nó 18 para discretização 1-5-17), conforme indicado na Figura 5.10(a). Assim, para a análise de flambagem focada no espaço D, as Eqs. (4.6), (4.12) e (4.22) fornecem a expressão do deslocamento  $U$  do nó 18 em função da posição ao longo do comprimento do perfil (eixo  $Y$ ), para um, dois ou todos os componentes harmônicos, respectivamente:

$$U_{18}(Y) = \beta_{D1}^{[m_1=3]} U_{D1,18}^{[m_1=3]} \psi_{[m_1=3]}(Y) \quad (5.6)$$

$$U_{18}(Y) = \beta_{D1}^{[m_1=3]} U_{D1,18}^{[m_1=3]} \psi_{[m_1=3]}(Y) + \beta_{D1}^{[m_2=5]} U_{D1,18}^{[m_2=5]} \psi_{[m_2=5]}(Y) \quad (5.7)$$

$$U_{18}(Y) = U_{D1,18}^{[m_1=3]} \psi_{D1,comb}(Y) \quad (5.8)$$

onde D1 é o único modo de deformação utilizado para o caso de compressão axial e  $m_1$  e  $m_2$  são os números de meias-ondas dos dois componentes considerados. Os coeficientes de contribuição modal  $\beta$  ou a função  $\psi_{D1,comb}(Y)$  são encontrados de acordo com os procedimentos descritos nas seções 4.2.1 e 4.2.2. Deve-se notar que, na Eq. (5.8), tanto faz o componente associado ao modo de deformação desde que os GDLs de empenamento estejam desacoplados dos GDLs transversais. Para a análise de flambagem focada no espaço DL, o deslocamento  $U$  pode ser decomposto nas parcelas referentes aos modos de deformação D1 e L1. Conforme seção 4.2.2, quando algum modo local é considerado, a Eq. (5.8) é uma simplificação, sendo baseada no componente dominante.

Para a análise de flambagem focada no espaço D, o gráfico do deslocamento  $U$  da alma em função da posição ao longo do comprimento do perfil está exibido na Figura 5.10(b), a partir de uma das extremidades do perfil até o meio do vão. O deslocamento está normalizado em relação ao maior deslocamento do modelo  $\delta_{max}$ .

Para a análise focada no espaço DL, o deslocamento  $U$  da alma é decomposto nas parcelas devidas aos modos D1 e L1 ( $U_{D1}$  e  $U_{L1}$ , respectivamente, conforme Figura 5.10(a)). A Figura 5.11 exhibe os gráficos de  $U_{D1}$  e  $U_{L1}$  em função da posição ao longo do comprimento do perfil, com normalização em relação ao maior deslocamento do modo de flambagem  $\delta_{max}$ .

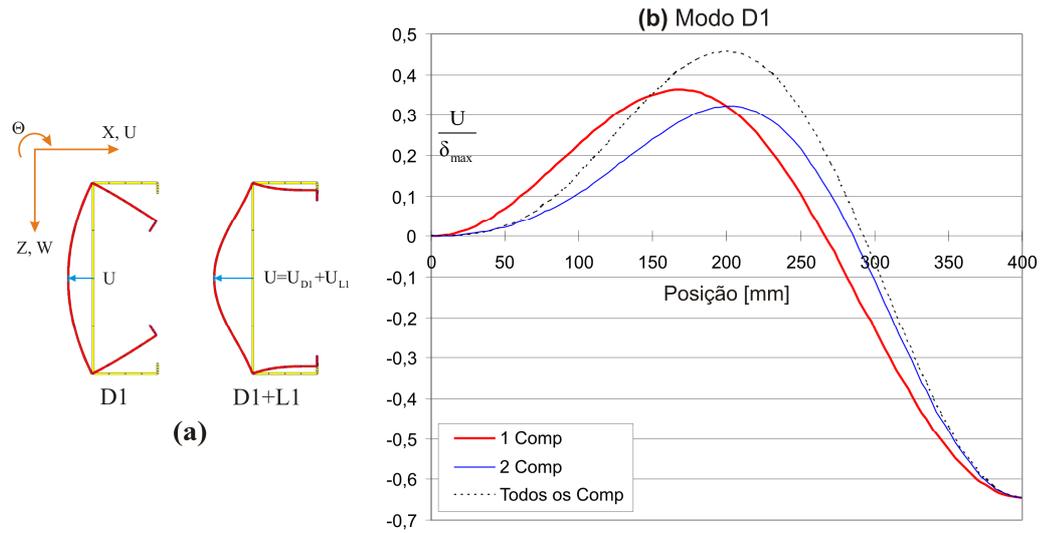


Figura 5.10. Análise da deformada do modo D1 do perfil C. (a) Deslocamento no centro da alma. (b) Deslocamento no centro da alma para a análise de flambagem focada no espaço D.

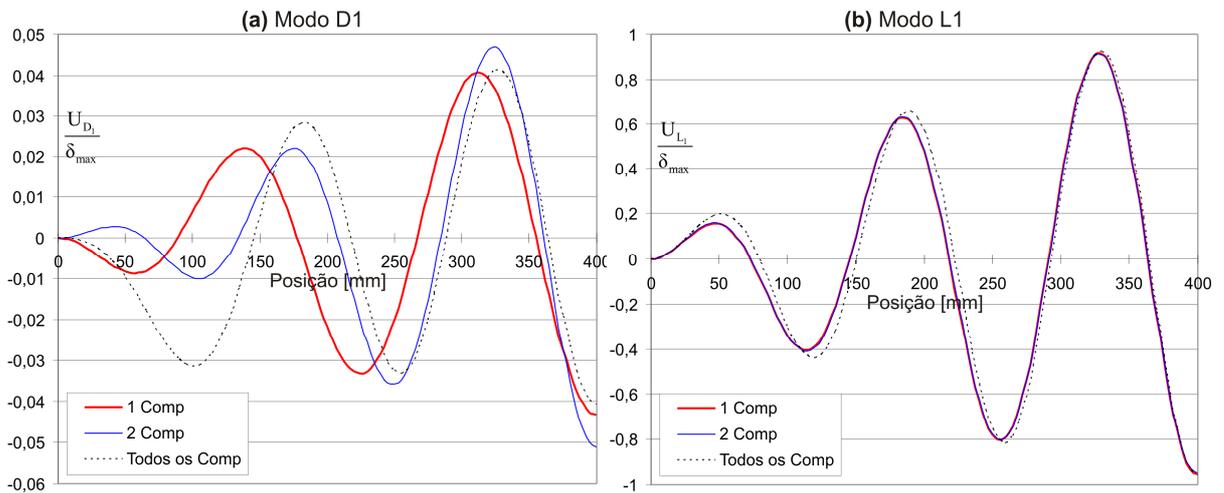


Figura 5.11. Análise da deformada do modo DL do perfil C. (a) Contribuição do modo D1. (b) Contribuição do modo L1.

## 6. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS PROPOSTOS: ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA REAL

Nesse capítulo, os procedimentos de restrição propostos são aplicados na análise de um perfil inspirado em uma estrutura real, com apoios intermediários (ao longo de seu comprimento). Analisou-se a coluna de sustentação de um silo de armazenagem, estudada por Triches, 2011. A estrutura real está mostrada na Figura 6.1(a), onde as colunas de sustentação do silo possuem barras de travamento ao longo de seu comprimento, conforme detalhe ilustrado na Figura 6.1(b).



Figura 6.1. Estrutura real analisada. (a) Silo de armazenagem e colunas de sustentação. (b) Detalhe dos apoios intermediários das colunas.

A seção da coluna de sustentação do silo está exibida na Figura 4.1(b), onde as dimensões dos elementos de placa são as mesmas consideradas em Triches, 2011. Nesse trabalho, a espessura foi reduzida para 1 mm, visando a uma maior participação de modos locais e distorcionais na análise de flambagem. Assumiu-se um comprimento  $L = 1500$  mm, e o carregamento considerado é de compressão axial, conforme Figura 4.2(c).

A modelagem das condições de contorno que melhor representem a estrutura real foi abordada em Triches, 2011. Referindo-se à Figura 6.1(a), a extremidade inferior da coluna possui restrições que se aproximam de um engaste, ou seja, com empenamento nulo. Na extremidade superior (união da coluna com o corpo do silo), a modelagem mais próxima da

realidade seria um apoio flexível. As barras de travamento intermediárias também apresentam certa flexibilidade axial.

Como o objetivo da análise da coluna é a verificação da influência de apoios intermediários na aplicação dos métodos de restrição propostos, as condições de contorno foram modeladas de forma simplificada. As duas extremidades foram consideradas como apoios simples (empenamento livre), modelados conforme Figura 4.6. Foi considerado apenas um ponto de travamento intermediário, localizado no meio do vão, conforme Figura 6.2(a). As barras de travamento foram consideradas como rígidas, oferecendo restrição translacional nas duas direções da seção, no ponto mostrado na Figura 6.2(b).

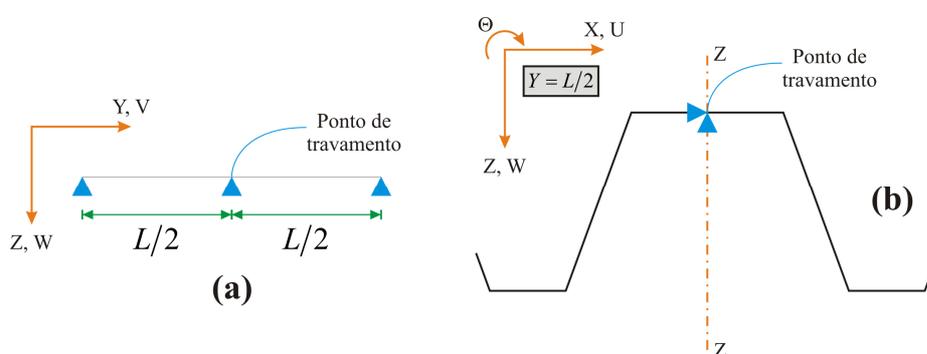


Figura 6.2. Condições de contorno do perfil da coluna do silo. (a) Ponto de travamento ao longo do comprimento. (b) Ponto de travamento na seção.

Como já discutido, perfis com extremidades simplesmente apoiadas sem apoios intermediários flambam em ondas senoidais ao longo do comprimento, ou seja, todos os modos de deformação da seção manifestam-se com a mesma variação longitudinal. Porém, a simples inclusão de um apoio intermediário provoca a interação entre diferentes componentes harmônicos longitudinais.

Para testar os procedimentos de restrição propostos, selecionaram-se alguns modos de flambagem retirados da análise de elementos finitos não restringida. Os modos da análise não restringida não são modos puros e, combinando-se alguns modos de deformação da seção e componentes harmônicos longitudinais, pode-se chegar a uma solução aproximada para esses modos de forma que a contribuição modal possa ser calculada. Em alguns casos, os modos são praticamente puros e procedimentos de restrição específicos para determinadas classes de flambagem podem ser aplicados.

Com inspiração em métodos de projeto de perfis formados a frio como o MRD, selecionaram-se para a análise um modo de flambagem que represente cada uma das três

principais classes de flambagem (de modos G, D e L). Esses três modos são escolhidos entre os diversos modos obtidos na análise de elementos finitos não restringida, através de critério visual, e depois são analisados de acordo com os procedimentos de restrição.

Para a utilização do procedimento geral de restrição das seções 4.2.1 e 4.2.2, foram utilizados os modos de deformação da seção mostrados na Figura 6.3 (modos naturais) e na Figura 6.4 (modos axiais ortogonais). Deve-se notar que estão exibidos todos os modos do espaço G (4 modos) e todos os modos do espaço D ( $nm - 4$  modos). Para o espaço L, apenas o modo axial ortogonal L1 foi considerado, já que os modos naturais L não possuem significado físico e muitos destes precisariam ser combinados nas análises. Na Figura 6.4, a ordem dos modos axiais ortogonais é dada para o comprimento da coluna analisada (1500 mm) e para uma meia-onda ao longo do comprimento ( $m = 1$ ).

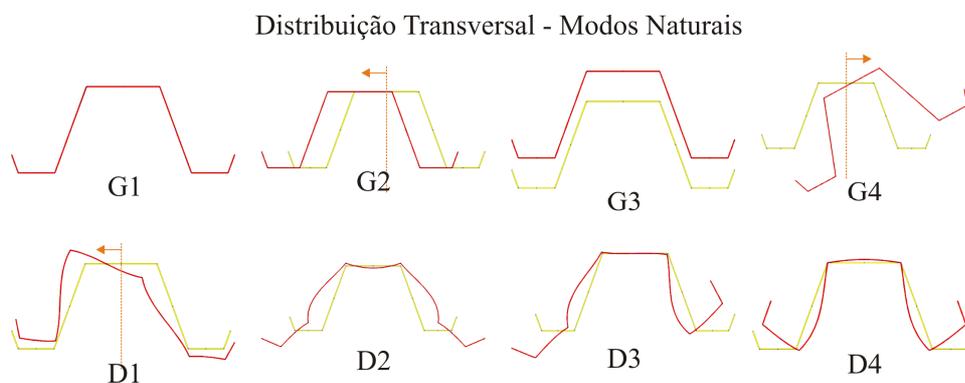


Figura 6.3. Modos de deformação naturais utilizados na análise da coluna do silo (bases modais).

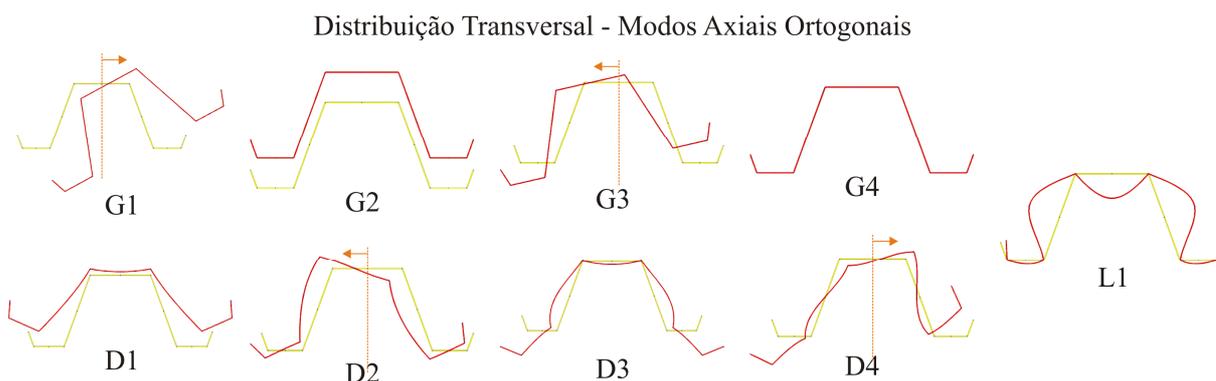


Figura 6.4. Modos de deformação axiais ortogonais utilizados na análise da coluna do silo (bases modais).

## 6.1 Análise da coluna sem travamentos

Para verificar a influência dos apoios intermediários na solução da análise de flambagem da coluna do silo, primeiramente se fez uma análise do perfil sem travamentos. A Figura 6.5 mostra os três modos característicos obtidos na análise não restringida (selecionados visualmente para representar as classes G, D e L), com as respectivas cargas críticas ( $\sigma_{cr}$ ).

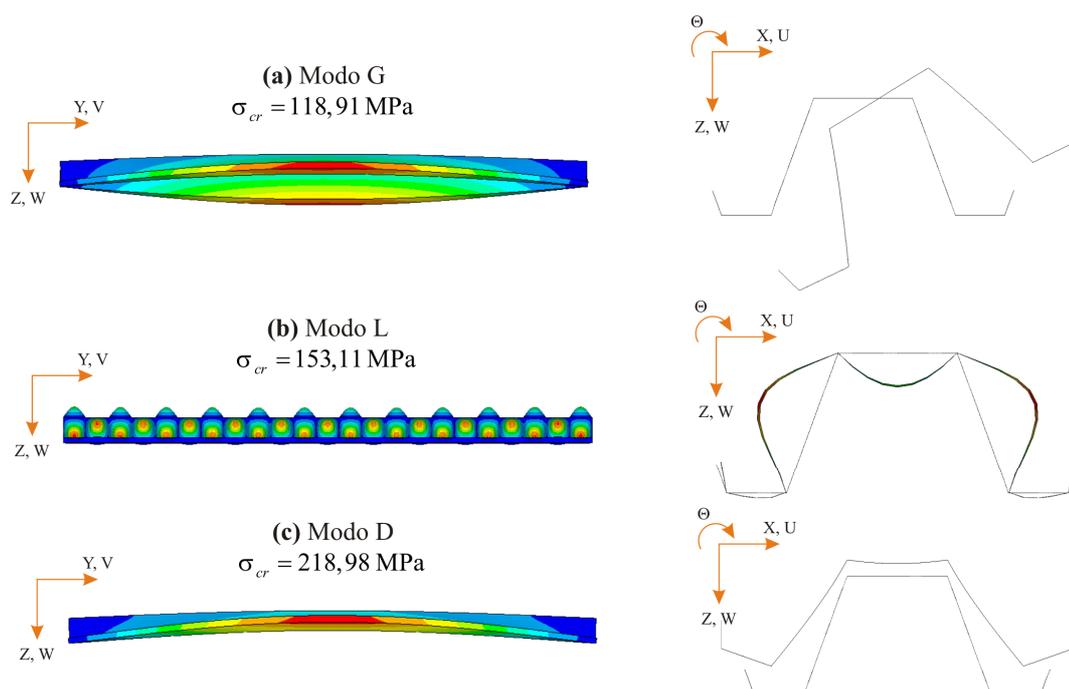


Figura 6.5. Modos de flambagem característicos obtidos na análise de flambagem não restringida do perfil da coluna do silo sem travamentos.

Cada um dos três modos da Figura 6.5 foi analisado de acordo com diversos procedimentos de restrição propostos. Os resultados de carga crítica e de participação modal utilizando esquema de normalização NV estão dispostos na Tabela 6.1. Os procedimentos de restrição para o espaço G e para o espaço GO referem-se à seção 4.4, e o procedimento para o espaço L refere-se à seção 4.5. Para o procedimento geral (seção 4.2), estão indicados entre parênteses os modos de deformação utilizados (modos axiais ortogonais da Figura 6.4). Como o perfil é S-S, foi considerado apenas um componente harmônico na utilização do procedimento geral: uma meia-onda senoidal na análise dos modos G e D.

Tabela 6.1. Resultados da análise dos modos G, D e L do perfil da coluna do silo sem travamentos.

Modo Analisado	Procedimento de Restrição	Tensão Crítica [MPa]	Participação Modal
G ( $\sigma_{cr} = 118,91$ MPa)	Espaço G	133,92 (+12,62%)	100 % G
	Espaço GO	122,32 (+2,87%)	-
	Geral (Modos G1 e D2)	130,26 (+9,54%)	94,90% G1
	MFFr (Modos G1, D2 e O)	119,85 (+0,791%)	96,30% G1
L ( $\sigma_{cr} = 153,11$ MPa)	Espaço L	153,55 (+0,287%)	100% L
D ( $\sigma_{cr} = 218,98$ MPa)	Geral (Modo D1)	268,23 (+22,49%)	100% D1
	Geral (Modos D1 e G2)	232,62 (+6,23%)	80,29% D1
	MFFr (Modos D1, G2 e O)	220,10 (+0,511%)	82,30% D1

Para o modo G, o procedimento de restrição focado no espaço G fornece um resultado de carga crítica 12,62% maior do que o da análise não restringida, enquanto o procedimento focado no espaço GO fornece um resultado apenas 2,87% maior. Portanto, os modos O têm considerável participação no modo visualmente considerado G. A diferença de resultados remanescente deve-se a uma pequena participação de modos D.

Para a utilização do procedimento de restrição geral, verifica-se que o modo axial ortogonal G1 da Figura 6.4 assemelha-se muito à deformada da seção do modo G da Figura 6.5(a). Fazendo uma análise combinando os modos axiais ortogonais G1 e D2 da Figura 6.4, o resultado da carga crítica é melhor do que o obtido utilizando o procedimento de restrição para o espaço G: resultado 9,54% maior, cuja diferença pode ser eliminada incluindo os modos O na análise. A restrição utilizando procedimento geral considerando os modos O exigiria a combinação de muitos modos de deformação na análise. Por isso, fez-se apenas a análise utilizando o MFFr considerando os modos G1, D2 e todo o espaço O, resultando numa carga crítica apenas 0,791% maior. Apesar de o modo ser predominantemente global (96,30% G1), a inclusão dos modos O é fundamental para um bom resultado.

Para o modo L, o procedimento de restrição focado no espaço inteiro de modos L (que ainda considera todos os componentes harmônicos possíveis) fornece um resultado com diferença desprezível, ou seja, o modo analisado é praticamente local puro.

A deformada da seção do modo D (Figura 6.5(c)) sugere uma grande participação do modo axial ortogonal D1 da Figura 6.4. Utilizando o procedimento de restrição geral com

apenas o modo D1, chega-se a uma carga crítica 22,49% maior do que a da análise não restringida, ou seja, o modo analisado não é um modo distorcional puro. Fazendo a análise com a inclusão do modo G2 (flexão vertical), obtém-se agora uma carga crítica 6,23% maior. Mais uma vez, essa diferença pode ser eliminada com a consideração dos modos O. Fazendo a análise através do MFFr focada nos modos D1, G2 e todo o espaço O, a carga crítica obtida é apenas 0,511% maior.

É interessante observar a significativa participação do modo de deformação G2 no modo de flambagem. Na análise considerando os modos D1 e G2, D1 tem 80,29% de participação e G2 contribui com 19,71%. Mesmo que o modo D1 da Figura 6.4 inclua translação vertical, é importante a consideração do modo de flexão vertical G2.

Finalmente, cabe comentar que o procedimento de restrição focado no espaço GD da seção 4.3 pode ser utilizado na análise dos modos G e D, fornecendo resultados praticamente iguais aos do procedimento geral combinando os modos G1 e D2 ou D1 e G2 (Tabela 6.1), embora não forneça os valores de participação modal. O procedimento para o espaço GD é vantajoso em análises em que diversos modos de deformação da seção G e D precisem ser combinados.

## 6.2 Análise da coluna com travamentos

Fez-se a análise de flambagem não restringida da coluna com travamentos e selecionaram-se os três primeiros modos que, por critério visual, representassem as três classes de flambagem características (G, D e L). Os três modos, com as respectivas cargas críticas ( $\sigma_{cr}$ ), estão mostrados na Figura 6.6, na Figura 6.7 e na Figura 6.8.

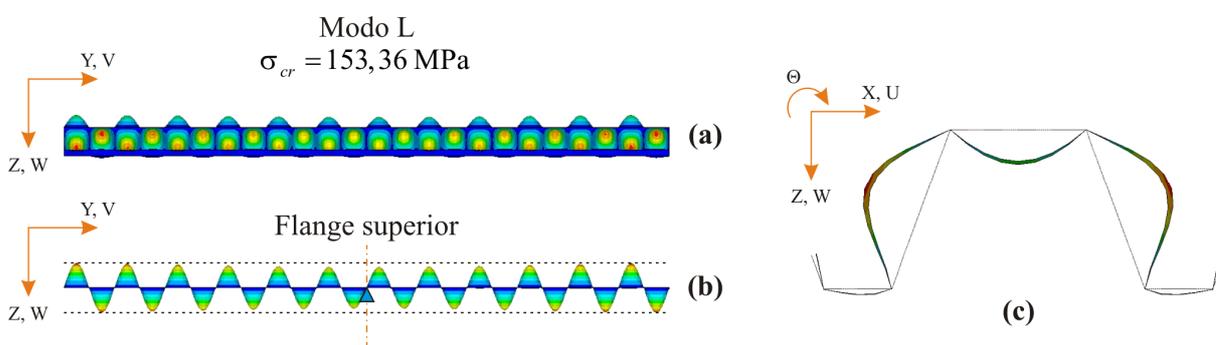


Figura 6.6. Primeiro modo predominantemente L obtido na análise de flambagem não restringida do perfil da coluna do silo com travamentos. (a) Deformada ao longo do comprimento. (b) Detalhe da deformada do flange superior (não é a mesma escala de (a)). (c) Deformada da seção no meio de uma meia-onda próxima ao meio do vão.

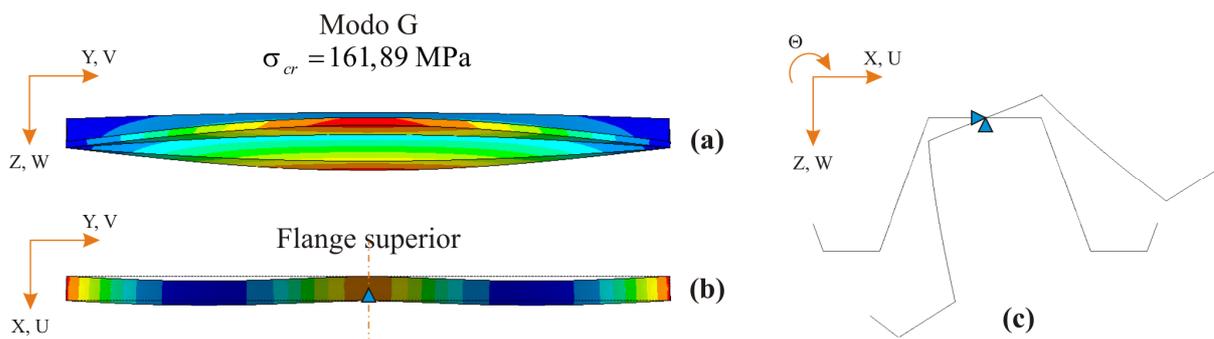


Figura 6.7. Primeiro modo predominantemente G obtido na análise de flambagem não restringida do perfil da coluna do silo com travamentos. (a) Deformada ao longo do comprimento. (b) Detalhe da deformada do flange superior (não é a mesma escala de (a)). (c) Deformada da seção no meio do vão.

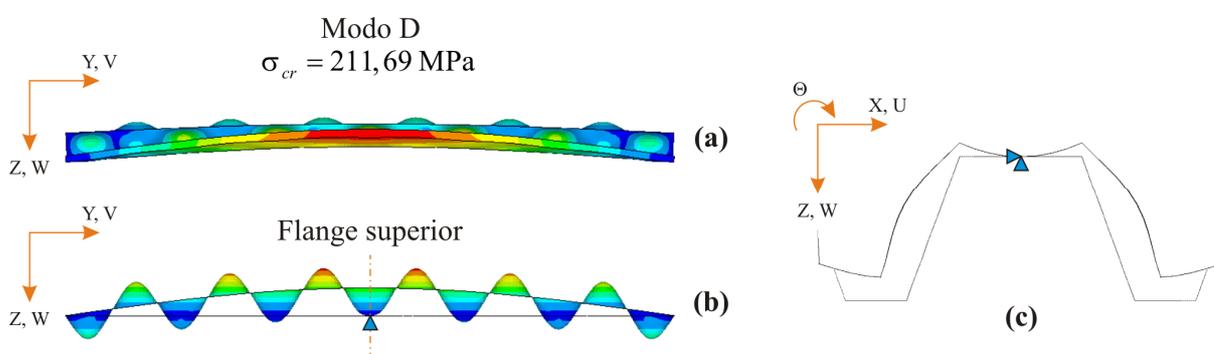


Figura 6.8. Primeiro modo predominantemente D obtido na análise de flambagem não restringida do perfil da coluna do silo com travamentos. (a) Deformada ao longo do comprimento. (b) Detalhe da deformada do flange superior (não é a mesma escala de (a)). (c) Deformada da seção no meio do vão.

Comparando os modos da coluna com travamentos com os da coluna sem travamentos, observa-se que os apoios intermediários provocam uma interação entre componentes harmônicos longitudinais, mesmo que as extremidades sejam simplesmente apoiadas. Essa interação ocorre principalmente para o modo D, ilustrado na Figura 6.8.

Comparando o modo L da Figura 6.6 com o modo L da coluna sem travamentos (Figura 6.5(b)), verifica-se que o número de meias-ondas aumentou de 23 para 24, para satisfazer as condições de contorno intermediárias. Além disso, existe uma pequena interação de componentes harmônicos, que pode ser observada no detalhe da deformada do flange superior (Figura 6.6(b)), onde as meias-ondas são maiores nas proximidades das extremidades do perfil. Porém, o resultado de carga crítica é praticamente o mesmo. Portanto, os apoios intermediários têm pouca influência sobre modos predominantemente L, ao menos para perfis longos (com várias ondas de flambagem).

Comparando o modo G da Figura 6.7 com o modo G da coluna sem travamentos (Figura 6.5(a)), verifica-se que a carga crítica aumentou consideravelmente. Para a coluna sem travamentos, o modo G é predominantemente de flexo-torção, porém, o apoio intermediário da coluna com travamentos impede a parcela de flexão lateral, aumentando a carga crítica.

Comparando o modo D da Figura 6.8 com o modo D da coluna sem travamentos (Figura 6.5(c)), verifica-se que as cargas críticas assemelham-se, mas as deformadas são diferentes. Para a coluna com travamentos, o apoio intermediário provoca interação entre componentes harmônicos longitudinais, onde visualmente há a contribuição de um modo distorcional com uma meia-onda senoidal e um modo local com 13 meias-ondas. Porém, a análise de flambagem restringida pode revelar participações de outros modos e componentes, conforme discussão da seção 6.2.2.

Aplicando o procedimento de restrição focado no espaço inteiro dos modos L (que considera todos os componentes harmônicos) para o modo predominantemente L da Figura 6.6, chega-se a um valor de carga crítica de 153,75 MPa (resultado apenas 0,254% maior do que o da análise não restringida). Portanto, o modo analisado é praticamente local puro. As análises dos modos G e D são mais trabalhosas, sendo descritas nas próximas seções.

### **6.2.1 Análise do modo G**

Os resultados de carga crítica e de participação modal utilizando esquema de normalização NV estão dispostos na Tabela 6.2. Os procedimentos de restrição para o espaço G e para o espaço GO referem-se à seção 4.4. Para o procedimento geral (seção 4.2), bases naturais (Figura 6.3) e bases modais (Figura 6.4) foram utilizadas. Em cada combinação testada, os modos de deformação e os componentes harmônicos associados estão indicados.

Nas análises considerando todos os componentes harmônicos (seção 4.2.2), o cálculo da contribuição modal foi feito utilizando o método de integração das funções de forma longitudinais, proposto na seção 5.6. Na análise considerando bases modais e todos os componentes, os modos de deformação da seção foram definidos para uma meia-onda senoidal ( $m = 1$ ). Deve-se lembrar que modos axiais ortogonais têm a deformada dependente do número de meias-ondas.

Tabela 6.2. Resultados da análise do modo G do perfil da coluna do silo com travamentos.

<b>Modo Analisado: G (<math>\sigma_{cr} = 161,89</math> MPa)</b>		
<b>Procedimento de Restrição</b>	<b>Tensão Crítica [MPa]</b>	<b>Participação Modal</b>
Espaço G	215,61 (+33,18%)	100% G
Espaço GO	195,17 (+20,56%)	-
<b>Bases Naturais</b> 	224,91 (+38,93%)	88,54% G4 11,46% D1
<b>Bases Naturais</b> 	191,88 (+18,52%)	6,27% G2 88,26% G4 5,47% D1
<b>Bases Naturais</b> 	182,32 (+12,62%)	4,30% G2 84,61% G4 6,70% D1 4,39% D3
<b>Bases Naturais – Todos os Componentes G2+G4+D1+D3</b>	177,03 (+9,35%)	3,73% G2 87,20% G4 5,55% D1 3,52% D3
<b>Bases Modais – Todos os Componentes</b> 	178,53 (+10,28%)	87,96% G1 5,24% G3 6,80% D2

Aplicando o procedimento de restrição ao espaço G, o resultado de carga crítica obtido é 33,18% maior do que o fornecido pela análise não restringida. Portanto, a participação de outras classes de flambagem (em particular, modos D e modos O) é bastante significativa. Com a inclusão dos modos O na análise (procedimento de restrição ao espaço GO), a diferença diminui: a carga crítica fica 20,56% maior, ou seja, a não inclusão dos modos O na análise de um modo predominantemente global provoca um aumento de cerca de 10% na carga crítica, como já comentado ao longo do trabalho.

Para se aproximar do valor de carga crítica do modo da análise não restringida ( $\sigma_{cr} = 161,89$  MPa), modos distorcionais ainda precisam ser incluídos na análise restringida.

Para isso, utilizou-se o procedimento geral de restrição da 4.2, combinando modos de deformação da seção. Como já mencionado, para a inclusão dos modos O nesse tipo de análise, muitos modos de deformação da seção precisariam ser combinados. Portanto, foram considerados apenas modos G e D, com a meta de se obter uma carga crítica no máximo 10% maior do que 161,89 MPa.

De acordo com o modo G da análise não restringida, exibido na Figura 6.7, apenas modos de deformação da seção não simétricos foram considerados, todos com uma meia-onda senoidal ao longo do comprimento do perfil ( $m=1$ ). Utilizando bases naturais, a primeira combinação testada foi a dos modos G4 (torção) e D1. Ambos os modos possuem um componente de translação horizontal, e a combinação dos mesmos satisfaria as condições de contorno do meio do vão (ver Figura 6.7(c)). Porém, a carga crítica obtida é 38,93% maior do que a da análise não restringida. Para que a seção possa deformar-se de acordo com a menor carga crítica e, ao mesmo tempo, satisfazer as condições de contorno intermediárias, é fundamental a inclusão de um modo de flexão horizontal pura (G2). Assim, a carga crítica obtida fica 18,52% maior.

Incluindo o outro modo natural distorcional não simétrico da Figura 6.3 (modo D3), a carga crítica obtida é 12,62% maior do que a fornecida pela análise não restringida. Deve-se observar que, embora pequena, existe uma interação entre componentes harmônicos referentes aos modos distorcionais, claramente visualizada na deformada do flange superior (Figura 6.7(b)). Fazendo a mesma análise, de forma independente dos componentes harmônicos (procedimento da seção 4.2.2), a carga crítica obtida é 9,53% maior, atingindo-se a meta estabelecida para o modo analisado.

Deve-se recordar que os modos naturais são ideais para a utilização do procedimento de restrição da seção 4.2.2, já que, para esses modos, a distribuição de deslocamentos transversais e a distribuição de empenamento, quando consideradas isoladamente, são independentes do comprimento de meia-onda. Portanto, o procedimento de restrição aplicado, que desacopla GDLs transversais dos longitudinais, efetivamente considerada todos os componentes harmônicos possíveis, cada um com o modo de deformação da seção associado de forma exata (ver detalhes na seção 4.2.2).

A Figura 6.9 mostra a variação das funções de forma longitudinais de cada modo de deformação na análise considerando todos os componentes utilizando bases naturais ( $\psi_{j,comb}(Y)$ ) da seção 4.2.2, onde  $j$  é o modo de deformação da seção). Nas funções de forma

associadas aos modos distorcionais (D1 e D3), observa-se certa interação entre componentes harmônicos.

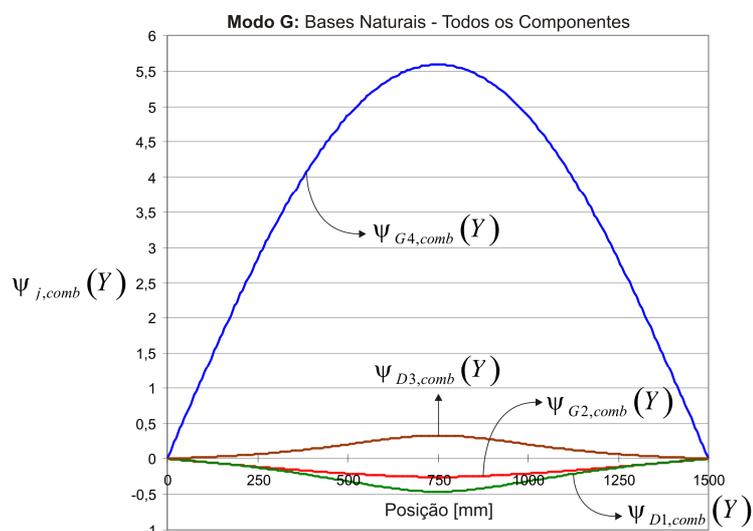


Figura 6.9. Funções de forma longitudinais associadas a cada modo de deformação na análise do modo G do perfil da coluna do silo com travamentos, considerando todos os componentes harmônicos.

É interessante fazer uma comparação entre bases naturais e bases modais. Combinando os modos axiais ortogonais G1, G3 e D2 da Figura 6.4, e fazendo a análise restringida de forma independente das funções de forma longitudinais, obtém-se uma carga crítica 10,28% maior do que a da análise não restringida, ou seja, o resultado é praticamente o mesmo do que o atingido com a combinação de quatro modos naturais (G2, G4, D1 e D3 da Figura 6.3), o que deixa evidente a vantagem do uso de modos axiais ortogonais.

Analisando os resultados de participação modal, verifica-se a predominância dos modos G (especialmente do modo natural de torção G4), como esperado baseando-se no critério visual. Comparando os resultados de participação modal do procedimento de restrição geral considerando uma meia-onda senoidal com o procedimento considerando todos os componentes harmônicos, para a combinação de modos naturais G2, G4, D1 e D3, observa-se grande semelhança. Assim, o método de avaliação da contribuição modal através da integração das funções de forma longitudinais da seção 5.6 mostra-se confiável.

Finalmente, deve-se destacar que o modo não puro obtido na análise não restringida pode ser efetivamente analisado através do procedimento de restrição geral com o uso de poucos modos de deformação da seção e poucos componentes harmônicos, mesmo com a presença de apoios intermediários. Selecionando-se modos de deformação de acordo com o

critério de simetria, incluindo-se modos de flexão pura para satisfazer as condições de contorno intermediárias, e considerando que a não inclusão dos modos O pode aumentar a carga crítica em até 10%, pode-se compor o modo analisado e avaliar a participação modal.

### 6.2.2 Análise do Modo D

Os resultados de carga crítica e de participação modal utilizando esquema de normalização NV estão dispostos na Tabela 6.3.

Tabela 6.3. Resultados da análise do modo D do perfil da coluna do silo com travamentos.

<b>Modo Analisado: D (<math>\sigma_{cr} = 211,69</math> MPa)</b>		
<b>Procedimento de Restrição</b>	<b>Tensão Crítica [MPa]</b>	<b>Participação Modal</b>
<b>Bases Modais</b> <p>D1 (m=1) L1 (m=13)</p>	229,32 (+8,33%) (modo espúrio)	88,83%D1 11,17%L1
<b>Bases Modais</b> <p>D1 (m=1) G2 (m=1) L1 (m=13)</p>	216,21 (+2,14%)	59,81%D1 19,20%G2 20,99%L1
<b>Bases Modais – Todos os Componentes D1+G2+L1</b>	215,90 (+1,99%)	58,15%D1 18,75%G2 23,10%L1
<b>Bases Modais</b> <p>D1 (m=1) D3 (m=13) G2 (m=1) L1 (m=13)</p>	213,68 (+0,940%)	58,55%D1 0,987%D3 19,50% G2 20,96%L1
<b>Bases Modais – Todos os Componentes D1+D3+G2+L1</b>	213,28 (+0,751%)	57,88%D1 1,19%D3 19,39% G2 21,54%L1
<b>Bases Naturais</b> <p>D2 (m=1) D4 (m=1) G3 (m=1) L1 (m=13)</p>	216,12 (+2,09%)	42,22%D1 41,24%D3 7,90% G2 8,65%L1
<b>Bases Naturais – Todos os Componentes D2+D4+G3+L1</b>	213,22 (+0,723%)	41,90%D1 40,88%D3 8,18% G2 9,05%L1

Como modos de deformação pertencentes a diferentes classes de flambagem precisam ser combinados, foi utilizado apenas o procedimento geral de restrição da seção 4.2, empregando-se bases naturais (Figura 6.3) e bases modais (Figura 6.4). Em cada combinação testada, os modos de deformação e os componentes harmônicos associados estão indicados na tabela.

Nas análises considerando todos os componentes harmônicos (seção 4.2.2), o cálculo da contribuição modal foi feito utilizando o método de integração das funções de forma longitudinais, proposto na seção 5.6. Na análise considerando bases modais e todos os componentes, os modos de deformação da seção foram definidos para um valor de  $m$  igual ao utilizado na análise combinando componentes. Deve-se lembrar que modos axiais ortogonais têm a deformada dependente do número de meias-ondas. Como comentado anteriormente, nas análises considerando bases naturais, o modo L1 utilizado é um modo axial ortogonal, já que muitos modos naturais locais precisariam ser considerados para equivalerem a esse modo.

De acordo com o modo D da análise não restringida, exibido na Figura 6.8, apenas modos de deformação da seção simétricos foram considerados. É clara a interação entre componentes harmônicos e, portanto, diferentes componentes foram atribuídos aos modos de deformação considerados na análise restringida. Utilizando bases modais (Figura 6.4), a primeira combinação testada foi a dos modos D1 (com uma meia-onda) e L1 (com treze meias-ondas). Ambos possuem deslocamento vertical no centro do flange superior, e a combinação dos mesmos satisfaria as condições de contorno do meio do vão (ver Figura 6.8(c)). A carga crítica obtida é 8,33% maior do que a fornecida pela análise não restringida, e os resultados de participação modal revelam ampla predominância do modo D1. Porém, como discutido adiante, o modo de flambagem obtido com essa combinação é um modo espúrio e deve ser desconsiderado.

Para que a seção possa deformar-se de acordo com a menor carga crítica e, ao mesmo tempo, satisfazer as condições de contorno intermediárias, é fundamental a inclusão de um modo de flexão vertical pura (G2 com  $m = 1$ ). Assim, a carga crítica obtida fica apenas 2,14% maior do que a da análise não restringida, e os resultados de participação modal alteram-se significativamente em relação à combinação de modos D1+L1. O modo de flambagem continua sendo predominantemente D1, mas com participações importantes dos modos G2 e L1. A mesma análise feita considerando todos os componentes harmônicos praticamente não altera a carga crítica.

A carga crítica é reduzida ainda mais com a inclusão do modo D3 na análise. Ao contrário do outro modo distorcional (D1), esse modo deve ser utilizado com treze meias-ondas ao longo do comprimento ( $m = 13$ ) para fornecer a menor carga crítica, ou seja, o modo distorcional D1 interage principalmente com o modo global G2 (ambos com  $m = 1$ ), e o modo distorcional D3 interage fundamentalmente com o modo local L1 (ambos com  $m = 13$ ).

A análise do modo D do perfil do silo com travamentos também foi realizada empregando bases naturais. Foram utilizados os modos D2, D4 e G3 da Figura 6.3, combinados com o modo axial ortogonal L1 da Figura 6.4. Para essa combinação, ao contrário da análise utilizando bases modais, os dois modos distorcionais (D2 e D4) devem ser considerados com uma meia-onda ao longo do comprimento ( $m = 1$ ) para se obter a menor carga crítica. Como se verifica nos resultados de participação modal, os dois modos distorcionais têm contribuições semelhantes, ou seja, os modos naturais D2 e D4 devem ser combinados para equivalerem ao modo axial ortogonal D1 (que ocorre com  $m = 1$ ). De fato, o resultado de carga crítica obtido é o mesmo da combinação dos modos axiais ortogonais D1, G2 e L1. Portanto, mais uma vez fica comprovada a eficiência do uso de modos axiais ortogonais.

É claro que, caso seja feita a análise independente das funções de forma longitudinais (procedimento da seção 4.2.2), o resultado de carga crítica obtido utilizando bases naturais considerando os quatro modos propostos equivale ao fornecido pela análise empregando bases modais considerando os quatro modos aplicáveis a esse caso.

A Figura 6.10 mostra a variação das funções de forma longitudinais de cada modo de deformação na análise considerando todos os componentes utilizando bases modais e naturais ( $\psi_{j,comb}(Y)$  da seção 4.2.2, onde  $j$  é o modo de deformação da seção). A diferença entre os dois tipos de bases está na participação dos modos distorcionais. Para bases modais, o modo D1 aparece com uma função de forma que é praticamente uma meia-onda senoidal (interação com G2), enquanto o modo D3 tem treze meias-ondas e interage com L1. Para bases naturais, os dois modos distorcionais (D2 e D4) participam do modo de flambagem com uma função de forma longitudinal composta predominantemente de uma meia-onda senoidal e de um componente com treze meias-ondas, ou seja, ambos os modos distorcionais interagem com G3 e L1. Ainda se observa uma maior participação modal dos modos D quando se empregam bases naturais.

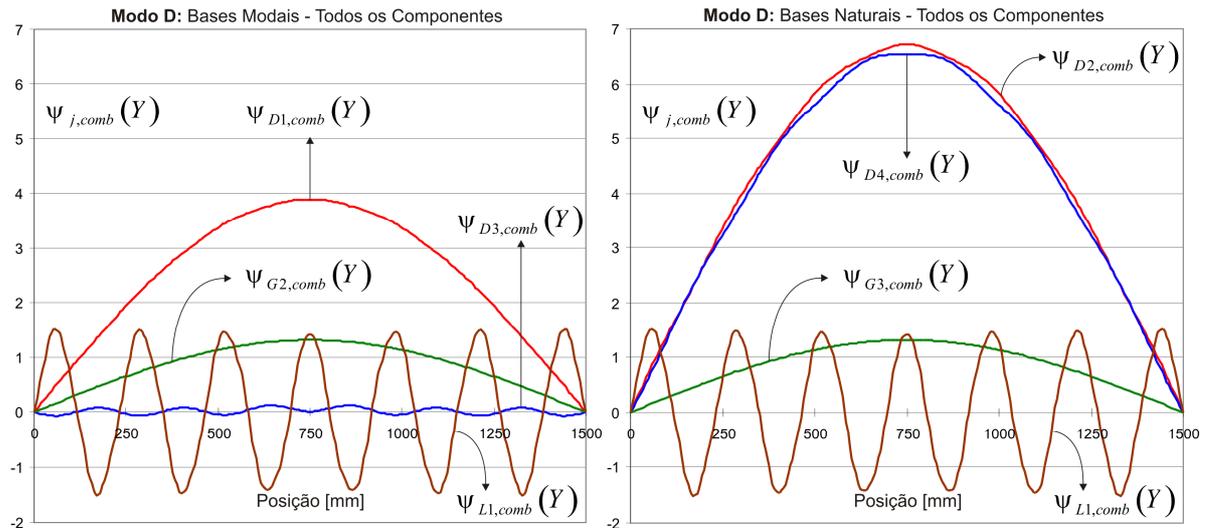


Figura 6.10. Funções de forma longitudinais associadas a cada modo de deformação na análise do modo D do perfil da coluna do silo com travamentos, considerando todos os componentes harmônicos.

A Figura 6.11 ilustra a deformada no flange superior para diversas combinações de modos axiais ortogonais (bases modais). Em todas as análises, observa-se um componente de uma meia-onda senoidal associado aos modos D1 e G2 interagindo com um componente de treze meias-ondas referente ao modo L1 e ao modo D3, quando este último é considerado.

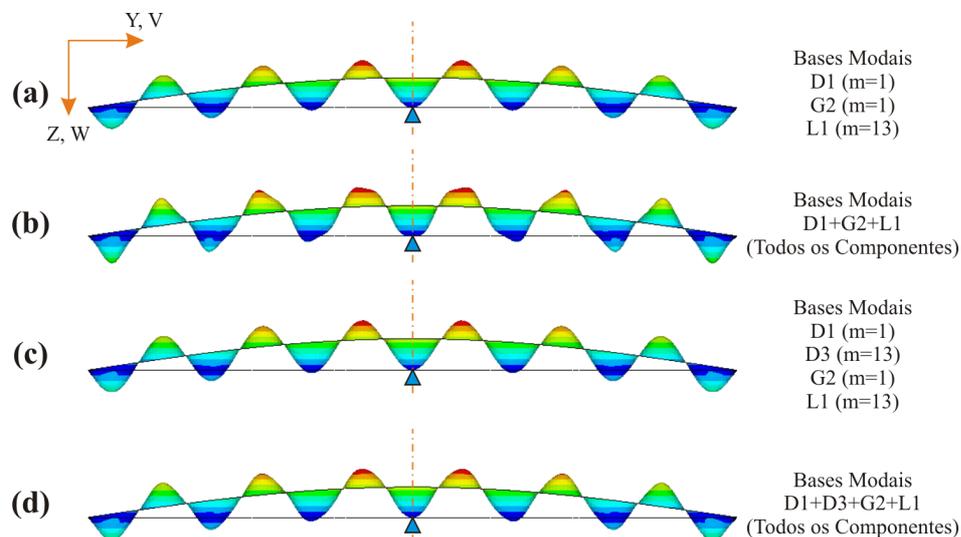


Figura 6.11. Deformada no flange superior do perfil do silo com travamentos para o modo D obtido utilizando diversas combinações de modos axiais ortogonais. (a) Três modos, cada um com um componente harmônico. (b) Três modos, com todos os componentes considerados. (c) Quatro modos, cada um com um componente harmônico. (d) Quatro modos, com todos os componentes considerados.

As treze meias-ondas observadas são senoidais para as análises da Figura 6.11(a) e da Figura 6.11(c), e praticamente senoidal para a análise da Figura 6.11(d) (ou seja, o componente de treze meias-ondas é amplamente dominante). Na análise da Figura 6.11(b), o modo D3 não foi considerado e, por isso, ocorre interação entre componentes harmônicos associados ao modo L1.

Para compreender o modo espúrio obtido analisando-se o modo D combinando os modos axiais ortogonais D1 e L1 (ver Tabela 6.3 e Figura 6.4), propõe-se restringir a análise de flambagem do perfil da coluna do silo com travamentos ao modo D1, considerando todos os componentes harmônicos. Como o modo D1 inclui uma translação vertical, a única maneira para a solução satisfazer as condições de contorno do meio do vão é o perfil flambar com um número de meias-ondas par, ou seja, a seção permanecer indeformada na posição dos apoios intermediários.

A Figura 6.12 (a) mostra o modo de deformação da seção considerado na análise restringida (modo axial ortogonal D1). O primeiro modo de flambagem obtido está exibido na Figura 6.12(b), que corresponde a um modo com uma meia-onda senoidal ao longo do comprimento do perfil e uma deformação localizada na região do apoio. Portanto, trata-se de um modo espúrio e deve ser desconsiderado. O segundo modo de flambagem obtido (Figura 6.12(c)) satisfaz as condições de contorno do meio do vão de forma realista.

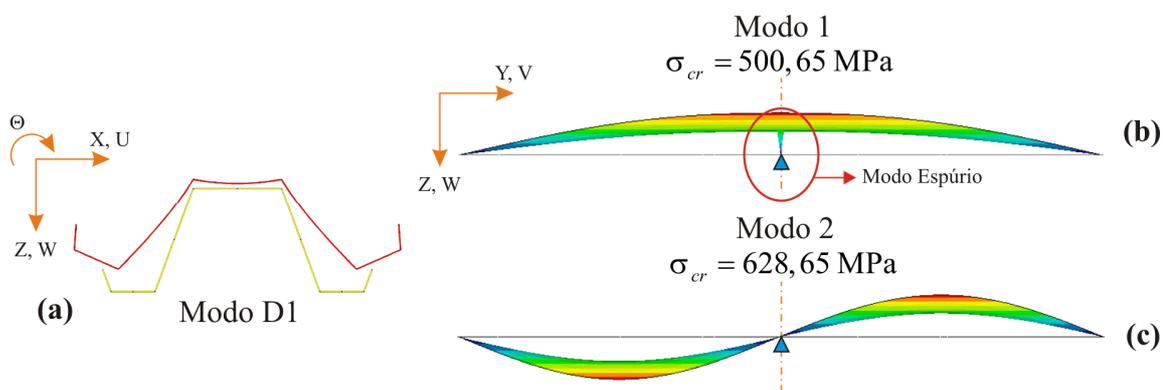


Figura 6.12. Exemplo de modo de flambagem espúrio observado na análise do perfil da coluna do silo com travamentos. (a) Análise de flambagem restringida ao modo axial ortogonal D1, considerando todos os componentes harmônicos. (b) Primeiro modo de flambagem (espúrio). (c) Segundo modo de flambagem.

Da mesma forma que na análise do modo G, deve-se destacar que o modo não puro obtido na análise não restringida pode ser efetivamente analisado através do procedimento de restrição geral com o uso de poucos modos de deformação da seção e poucos componentes

harmônicos, mesmo com a presença de apoios intermediários. Selecionando-se modos de deformação de acordo com o critério de simetria, incluindo-se modos de flexão pura para satisfazer as condições de contorno intermediárias, e considerando a interação de modos de deformação com o mesmo componente harmônico associado, pode-se compor o modo analisado e avaliar a participação modal.

Finalmente, cabe destacar que o modo da coluna do silo com travamentos analisado nessa seção pode não ser considerado um modo suficientemente dominante para representar a classe de modos distorcionais. Por exemplo, na análise considerando bases modais (D1+D3+G2+L1) e todos os componentes harmônicos (ver Tabela 6.3), obtém-se um modo com as seguintes participações modais (utilizando a norma euclidiana descrita na seção 2.3.3): 58,58% D, 19,62% G e 21,80% L. Apesar da maior participação dos modos distorcionais, as outras classes de flambagem possuem contribuição significativa. Joó e Ádány, 2009, adotaram um critério através do qual um modo de flambagem é considerado puro se a contribuição de dada classe é de pelo menos 70 a 80%. Portanto, no exemplo estudado, mais modos devem ser avaliados.

## 7. CONCLUSÕES

Nesse trabalho, foi realizada a análise linear de flambagem de perfis de parede fina prismáticos de seção aberta focada em modos puros ou combinados através de modelos de elementos finitos restringidos. Diferentes procedimentos de restrição foram propostos, dependendo do subespaço de modos de deformação levado em consideração na análise.

Os conceitos do MFFr para condições de contorno gerais foram detalhadamente revisados e aplicados dentro do contexto do MEF. Dessa forma, foi proposto um procedimento de restrição geral que permite que a análise linear de flambagem elástica seja restringida de acordo com uma combinação de modos de deformação da seção e de componentes harmônicos da função de forma longitudinal. Utilizando bases vetoriais apropriadas para se definirem as quatro classes de flambagem (de modos G, D, L e O), os coeficientes de contribuição modal do MFFr podem ser escritos em função de GDLs da malha de elementos finitos escolhidos como incógnitas. Assim, os demais GDLs da malha podem ser relacionados com as incógnitas. Finalmente, obtém-se a carga de bifurcação elástica da combinação de modos desejada, quantificando-se automaticamente a interação entre os modos.

Com inspiração na GBT, o procedimento de restrição geral foi estendido para tornar a análise independente das funções de forma longitudinais, ou seja, todos os componentes harmônicos possíveis passam a ser considerados. A cada modo de deformação é associada uma função de forma longitudinal combinada. Pontos dessas funções ao longo do comprimento do perfil podem ser escritos em função de DOFs incógnitas da malha. Finalmente, expressões analíticas podem ser obtidas para essas funções através de algum método de aproximação. A integração dessas funções permite o cálculo da contribuição modal, de maneira semelhante à realizada na GBT. O procedimento de restrição independente das funções de forma longitudinais não permite a consideração de muitos modos de deformação na análise, porém, é perfeitamente aplicável em uma análise de flambagem focada no espaço dos modos D, por exemplo.

Esquemas alternativos de restrição permitem a obtenção das cargas críticas de modos G e L puros, com a consideração de todos os componentes harmônicos possíveis. Além disso, é possível a inclusão da influência dos modos O no cálculo dos modos G, de forma a concordar com os resultados da teoria clássica de vigas e da GBT. A carga crítica de modos D

puros pode ser obtida utilizando-se o procedimento geral de restrição, o qual também possibilita a consideração de todos os componentes possíveis.

Portanto, tem-se diferentes procedimentos de restrição que permitem calcular a carga crítica de modos associados às três principais classes de flambagem: de modos G, D e L, o que é motivado por métodos de projeto de perfis formados a frio como o Método da Resistência Direta. Finalmente, a identificação modal (quantificação da interação entre modos) é realizada através do procedimento geral de restrição, considerando ou não todos os componentes harmônicos.

Ainda foi proposto um procedimento de restrição focado no espaço inteiro dos modos G e D (espaço GD), através do qual GDLs de empenamento do modelo são considerados como incógnitas. Dependendo do comprimento do perfil analisado, esse procedimento pode fornecer cargas críticas tanto de modos globais puros quanto de modos distorcionais puros, sempre que se verificar que não há interação significativa entre esses modos.

Em geral, as análises de flambagem restringidas realizadas através do MFFr e da GBT implicam menor custo computacional quando comparadas com as análises através do MEF. Por outro lado, o tempo necessário para a solução do problema de elementos finitos restringido (como proposto) não é influenciado pelos números de modos de deformação e de componentes harmônicos selecionados. Quando muito componentes harmônicos são necessários na análise, o tamanho das matrizes do MFFr aumenta e a discretização longitudinal do modelo da GBT torna-se mais fina. Isso implica um maior tempo de solução, podendo tornar esses métodos menos eficientes do que o MEF numa análise de flambagem restringida.

As principais vantagens de se realizar a análise de flambagem restringida utilizando o MEF está na facilidade da modelagem de condições de contorno não convencionais nas extremidades do perfil e, principalmente, a inclusão de irregularidades ao longo do comprimento do mesmo. Essas irregularidades podem ser, por exemplo, apoios intermediários ou até mesmo furos.

Nos procedimentos de restrição propostos, nem todos os GDLs da malha de elementos finitos precisam ser restringidos para se obterem bons resultados de carga crítica e de contribuição modal. Isso pode ser particularmente útil para a implementação do procedimento em perfis com irregularidades ao longo do comprimento que resultem em uma malha também irregular.

Os procedimentos de restrição propostos foram validados para um perfil C enrijecido com duas configurações de condições de contorno (perfil S-S e perfil E-E) e submetido a dois tipos de carregamento (compressão pura e flexão pura). Os resultados foram comparados com os fornecidos pelo MFFr (software CUFSM) e pela GBT (software GBTUL). Foram testados dois esquemas de restrição: malha totalmente restringida (esquema Total) e malha parcialmente restringida (esquema 1 Sub). Posteriormente, os procedimentos foram aplicados na análise de um perfil inspirado em uma estrutura real, com apoios intermediários: uma coluna de sustentação de um silo de armazenagem.

Na análise do perfil C, primeiramente verificou-se que a obtenção das curvas de flambagem de modos puros permite uma avaliação da interação modal. A diferença entre as curvas de modos puros e a curva da análise não restringida dá idéia do grau de interação.

Por exemplo, comparando a curva do modo global puro com a curva de flambagem da análise não restringida, verifica-se uma diferença de até 10%, a qual é eliminada com a inclusão dos modos O (que envolvem extensão membranal e empenamento não-linear). A comparação da curva GD com as curvas G e D revela que a análise focada no espaço GD também pode ser utilizada para a obtenção de modos G e D puros.

Para o perfil C analisado, qualquer procedimento de restrição proposto, utilizando esquema de restrição Total, fornece resultados com diferença desprezível com relação aos do MFFr. Utilizando esquema de restrição 1 Sub, os resultados obtidos têm certa diferença nas análises focadas no espaço G e no espaço D (para pequenos comprimentos), ou seja, a malha pouco restringida não consegue eliminar a influência dos modos O na análise focada no espaço G, e não elimina a influência dos modos L na análise focada no espaço D.

Nas análises do perfil C com extremidades engastadas (perfil E-E), verificou-se que poucos componentes harmônicos longitudinais precisam ser considerados para se obter um bom resultado de carga crítica (muitas vezes, apenas o componente dominante é suficiente). Porém, o número de componentes considerados pode alterar a deformada ao longo comprimento, podendo ter certo impacto dos resultados de contribuição modal.

Restringindo a análise de flambagem do perfil C de acordo com uma combinação de modos distorcionais e locais, verificou-se que o esquema 1 Sub fornece ótimos resultados, inclusive para pequenos comprimentos, ao contrário do que ocorre na análise focada apenas no espaço D. Deve-se ressaltar que um estudo de convergência de resultados em função do grau de restrição da malha de elementos finitos ainda falta ser feito.

Para o perfil da coluna do silo, foi feita a verificação da influência de apoios intermediários na aplicação dos métodos de restrição propostos. Primeiramente, observou-se que a inclusão de apoios intermediários provoca interação entre componentes harmônicos longitudinais, mesmo para perfis com extremidades simplesmente apoiadas (perfil S-S).

Com inspiração em métodos de projeto de perfis formados a frio como o Método da Resistência Direta, selecionaram-se três modos (não puros) da análise linear de flambagem de elementos finitos não restringida para representar as três principais classes de flambagem (G, D e L). Combinando-se alguns modos de deformação da seção e componentes harmônicos longitudinais, pode-se chegar a uma solução aproximada para esses modos de forma que a contribuição modal possa ser calculada e seus comportamentos possam ser estudados.

Os modos não puros puderam ser efetivamente analisados através do procedimento de restrição geral com o uso de poucos modos de deformação da seção e poucos componentes harmônicos, mesmo com a presença de apoios intermediários. A seleção de modos de deformação de acordo com o critério de simetria, a inclusão de modos de flexão pura para satisfazer as condições de contorno intermediárias e a consideração da interação de modos de deformação com o mesmo componente harmônico associado são alguns critérios que ajudam a compor o modo analisado e estudar seu comportamento.

Além disso, os modos O podem ser deixados de fora da análise, levando em conta que a carga crítica obtida pode ser até 10% maior caso o modo seja predominantemente global. Também foi verificado que a utilização de modos de deformação axiais ortogonais (bases modais) reduz o número de modos necessários para compor um modo de flambagem não puro.

O procedimento de restrição geral considerando todos os componentes harmônicos permite a avaliação da contribuição modal de forma eficiente através do método proposto de integração das funções de forma longitudinais. Mesmo assim, a análise restringida combinando componentes tem vantagens. Além de permitir melhor compreensão do comportamento do modo de flambagem analisado, a definição da variação longitudinal do modo de flambagem pode ser útil para a utilização dos modos restringidos em métodos de otimização. Quando todos os componentes são considerados, o modo desejado pode não ser o primeiro fornecido pela análise linear de flambagem do MEF.

Finalmente, tem-se uma ferramenta que permite o estudo do comportamento de perfis de parede fina em relação à flambagem que ainda deve ser mais explorado. Os procedimentos

de restrição propostos podem ser aplicados em exemplos mais complexos, como perfis com outros tipos de condições de contorno intermediárias e, até mesmo, perfis com furos.

Os modos puros de flambagem podem ser empregados como função objetivo em processos de otimização, ou seja, podem-se obter seções cujas cargas de bifurcação de determinados modos de deformação sejam aumentadas de acordo com a necessidade.

Modos puros de flambagem também podem ser aplicados como imperfeições geométricas iniciais na análise não-linear de perfis formados a frio através do MEF. A utilização de certos modos obtidos em uma análise linear de flambagem é uma abordagem comum para se modelarem imperfeições geométricas numa análise não-linear. Entre os trabalhos que abordam o tema, podem ser citados Schafer e Peköz, 1998, Chodraui, 2006, Grigoletti, 2008, e Li e Schafer et al., 2010. O emprego de modos puros juntamente com essa metodologia permite maior controle na seleção dos modos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio**: NBR 14762. Rio de Janeiro, 2010.

Ádány, S. **Buckling Mode Classification of Members with Open Thin-Walled Cross-Sections by Using the Finite Strip Method**. Research Report, Johns Hopkins University, 2004.

Ádány, S., Joó, A.L. e Schafer, B.W. Identification of FEM buckling modes of thin-walled columns by using cFSM base functions, **5<sup>th</sup> International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS 2008)**, Sydney, Australia, June 23-25, 2008.

Ádány, S., Joó, A.L. e Schafer, B.W. Buckling mode identification of thin-walled members by using cFSM base functions. **Thin-Walled Structures**, v. 48, p. 806-817, 2010.

Ádány, S. e Schafer, B.W. Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Derivation, **Thin-Walled Structures**, v. 44, p. 563-584, 2006.

Ádány, S. e Schafer, B.W. Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples, **Thin-Walled Structures**, v. 44, p. 585-600, 2006.

Ádány, S. e Schafer, B.W. Uncertainties in the definition of buckling of thin-walled members, **IABSE Symposium on Responding to Tomorrow's Challenges in Structural Engineering**, 2006.

Ádány, S. e Schafer, B.W. A full modal decomposition of thin-walled, single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method, **Journal of Constructional Steel Research**, v. 64, p.12-29, 2008.

Ádány, S., Silvestre, N., Schafer, B.W. e Camotim, D. Buckling analysis of unbranched thin-walled members: generalized beam theory and constrained finite strip method, **III European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering (ECCM 2006)**, Lisbon, Portugal, June 5-8, 2006.

Ádány, S., Silvestre, N., Schafer, B.W. e Camotim, D. Buckling analysis of unbranched thin-walled members using cFSM and GBT: a comparative study, **International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures**, Lisbon, Portugal, September 6-8, 2006.

Ádány, S., Silvestre, N., Schafer, B.W. e Camotim, D. On the identification and characterisation of local, distortional and global buckling modes in thin-walled members using the cFSM and GBT approaches, **6<sup>th</sup> International Conference on Steel & Aluminium Structures (ICSAS'07)**, Oxford, UK, July 24-27, 2007.

Ádány, S., Silvestre, N., Schafer, B.W. e Camotim, D. Buckling mode identification of thin-walled members: a comparison between cFSM and GBT approaches, **5<sup>th</sup> International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS 2008)**, Sydney, Australia, June 23-25, 2008.

Ansys, Inc. **Ansys Release 11.0 Documentation**, 2007.

Bebiano R., Pina P., Silvestre N. e Camotim D. **GBTUL – Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Members**. DECivil/IST, Technical University of Lisbon, 2008. <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt>.

Bernard, E. S., Bridge, R. Q. and Hancock, G. J. Tests of profiled steel decks with V-stiffeners, **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 119, n. 8, p. 2277-2293, 1993.

Bernard, E. S., Bridge, R. Q. and Hancock, G. J. Tests of profiled steel decks with flat-hat stiffeners, **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 121, n. 8, p. 1175-1182, 1995.

Bradford, M.A. e Azhari, M. Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method, **Computers & Structures**, v. 56, p. 75-83, 1995.

Camotim, D., Silvestre, N., Basaglia, C. e Bebiano, R. GBT-based buckling analysis of thin-walled members with non-standard support conditions, **Thin-Walled Structures**, v. 46, p. 800-815, 2008.

Casafont, M., Marimon, F. e Pastor, M.M. Calculation of pure distortional elastic buckling loads of members subjected to compression via the finite element method, **Thin-Walled Structures**, v. 47, p. 701-729, 2009.

Casafont, M., Pastor, M.M., Caamaño, E. e Marimon, F. Linear buckling analysis of compressed members combining the Generalised Beam Theory and the Finite Element Method, **12<sup>th</sup> International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing**, Stirlingshire, Scotland, 2009.

Casafont, M., Marimon, F., Pastor, M. e Ferrer, M. Linear buckling analysis of thin-walled members combining the Generalised Beam Theory and the Finite Element Method, **Computers and Structures**, v. 89, p. 1982-2000, 2011.

Cheung, Y.K. e Tham, L.G. **The Finite Strip Method**. CRC Press, 1998.

Chodraui, G.M. de B. **Análise Teórica e Experimental de Perfis de Aço Formados a Frio Submetidos à Compressão**, Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos, 2006.

Davies, J.M. e Leach, P. First-order generalised beam theory, **Journal of Constructional Research**, v. 31, p. 187-220, 1994.

Davies, J.M. e Leach, P. Second-order generalised beam theory, **Journal of Constructional Research**, v. 31, p. 221-241, 1994.

Davies, J.M., Leach, P. e Taylor, A. The design of perforated cold-formed steel sections subjected to axial load and bending, **Thin-Walled Structures**, v. 29, p. 141-157, 1997.

Dinis, P.B., Camotim, D. e Silvestre, N. GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily 'branched' open cross-sections, **Thin-Walled Structures**, v. 44, p. 20-38, 2006.

Gonçalves, R., Dinis, P.B. e Camotim, D. GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections, **Thin-Walled Structures**, v. 47, p. 583-600, 2009.

Grigoletti, G. de C. **Otimização via Algoritmos Genéticos de Perfis U Formados a Frio Submetidos à Compressão Utilizando o Método da Resistência Direta**, Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, 2008.

Hancock, G. J. Local, distortional, and lateral buckling of I-beams, **Journal of the Structural Division**, v. 104, p. 1787-1798, 1978.

Jiang, C. e Davies, J.M. Design of thin-walled purlins for distortional buckling, **Thin-Walled Structures**, v. 29, p. 189-202, 1997.

Joó, A.L. e Ádány, S. FEM-based approach for the stability design of thin-walled members by using cFSM base functions, **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, v. 53, p. 61-74, 2009.

Kwon, Y. B. and Hancock, G. J. Tests of cold-formed channels with local and distortional buckling, **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 117, n. 7, p. 1786-1803, 1992.

Leach, P. The calculation of modal cross-section properties for use in the generalized beam theory, **Thin-Walled Structures**, v. 19, p. 61-79, 1994.

Leach, P. e Davies, J.M. An experimental verification of the generalized beam theory applied to interactive buckling problems, **Thin-Walled Structures**, v. 25, p. 61-79, 1996.

Li, Z., Hanna, M.T., Ádány, S. e Schafer, B.W. Impact of basis, orthogonalization, and normalization on the constrained Finite Strip Method for stability solutions of open thin-walled members, **Thin-Walled Structures**, v. 49, p. 1108-1122, 2011.

Li, Z. e Schafer, B.W. Finite strip stability solutions for general boundary conditions and the extension of the constrained finite strip method, **Trends in Civil and Structural Engineering Computing**, Chapter 5, p. 103-130, 2009.

Li, Z. e Schafer, B.W. The constrained finite strip method for general end boundary conditions, **Structural Stability Research Council – Annual Stability Conference**, Orlando, USA, 2010.

Li, Z. e Schafer, B.W. Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods, **20<sup>th</sup> International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures**, Saint Louis, USA, November 3-4, 2010.

North American Specification. Appendix 1: Design of cold-formed steel structural members using the Direct Strength Method. **2004 Supplement to the North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structures**. American Iron and Steel Institute, Washington, US, 2004.

Plank, R.J. e Wittrick, W.H. Buckling under combined loading of thin, flat-walled structures by a complex finite strip method, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, p. 323-329, 1974.

Przemieniecki, J.S. Finite element structural analysis of local instability, **American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal**, v. 11, p. 33-39, 1973.

Schafer, B.W. CUFSM: Elastic buckling analysis of thin-walled members by the finite strip method, **CUFSM version 3.12**, 2006. <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>.

Schafer, B.W. Review: the direct strength method of cold-formed steel members design, **Journal of Constructional Steel Research**, v. 64, p. 766-778, 2008.

Schafer, B.W. CUFSM: Elastic buckling analysis of thin-walled members by the finite strip method and constrained finite strip method for general end boundary conditions, **CUFSM version 4.04**, 2011. <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>.

Schafer, B.W. e Ádány, S. Understanding and classifying local, distortional and global buckling in open thin-walled members, **Technical Session and Meeting, Structural Stability Research Council**, Montreal, Canada, 2005.

Schafer, B.W. e Ádány, S. Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods, **18<sup>th</sup> International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures**, Orlando, US, October 26-27, 2006.

Schafer, B.W., Li, Z. e Moen, C.D. Computational modeling of cold-formed steel, **Thin-Walled Structures**, v. 48, p. 752-762, 2010.

Schafer, B.W. e Peköz, T. Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses, **Journal of Constructional Steel Research**, v. 47, p. 193-210, 1998.

Schardt, R. **Verallgemeinerte Technische Biegetheorie**. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

Schardt, R. Generalized beam theory – an adequate method for coupled stability problems, **Thin-Walled Structures**, v. 19, p. 161-180, 1994.

Silvestre, N. e Camotim, D. First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials, **Thin-Walled Structures**, v. 40, p. 755-789, 2002.

Silvestre, N. e Camotim, D. Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials, **Thin-Walled Structures**, v. 40, p. 791-820, 2002.

Silvestre, N. e Camotim, D. GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members, **Computers and Structures**, v. 81, p. 1889-1904, 2003.

Silvestre, N. e Camotim, D. Nonlinear generalized beam theory for cold-formed steel members, **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 3, p. 461-490, 2003.

The MathWorks, Inc., 2012. <http://www.mathworks.com/>.

Triches, F.J. **Análise Estrutural das Colunas de Sustentação de um Silo Metálico**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2011.

Yu, W-W e LaBoube, R.A. **Cold-Formed Steel Design**. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

Zienkiewicz, O. C. **El Método de Los Elementos Finitos**, Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España, 1982.

## ANEXO A - Definição das matrizes de restrição do Método das Faixas Finitas Restringido

### A.1 Notação

Além de se fazer a discretização do perfil dividindo cada elemento de placa que o forma em várias faixas finitas, resultando em vários nós na seção, é conveniente fazer a distinção entre *nós principais* e *subnós*. Nós principais conectam dois elementos de placa que formam o perfil, ou seja, conectam faixas que tenham um ângulo relativo diferente de zero. Assim, os subnós são os nós que conectam duas faixas paralelas. Além disso, é importante classificar os nós principais como *internos* (duas placas conectadas ao nó) ou *externos* (apenas uma placa conectada ao nó). Essas definições estão ilustradas na Figura A.1(a), onde os nós são numerados de 1 a  $n = nm + ns$ , sendo  $nm$  o número de nós principais e  $ns$  o número de subnós, resultando em  $n - 1$  faixas. O índice  $i$  refere-se a um nó ou faixa genéricos, sendo que a numeração dos nós está exibida dentro de círculos e a das faixas dentro de quadrados. Índices subscritos referem-se aos nós e índices sobrescritos entre parênteses referem-se às faixas. Cada faixa  $i$  tem uma largura  $b^{(i)}$ , uma espessura constante  $t^{(i)}$  e um ângulo com o eixo  $X$  global  $\alpha^{(i)}$ , conforme Figura A.1(b). Aqui, a espessura vai ser sempre considerada constante para todas as faixas do perfil e, portanto, chamada apenas de  $t$ .

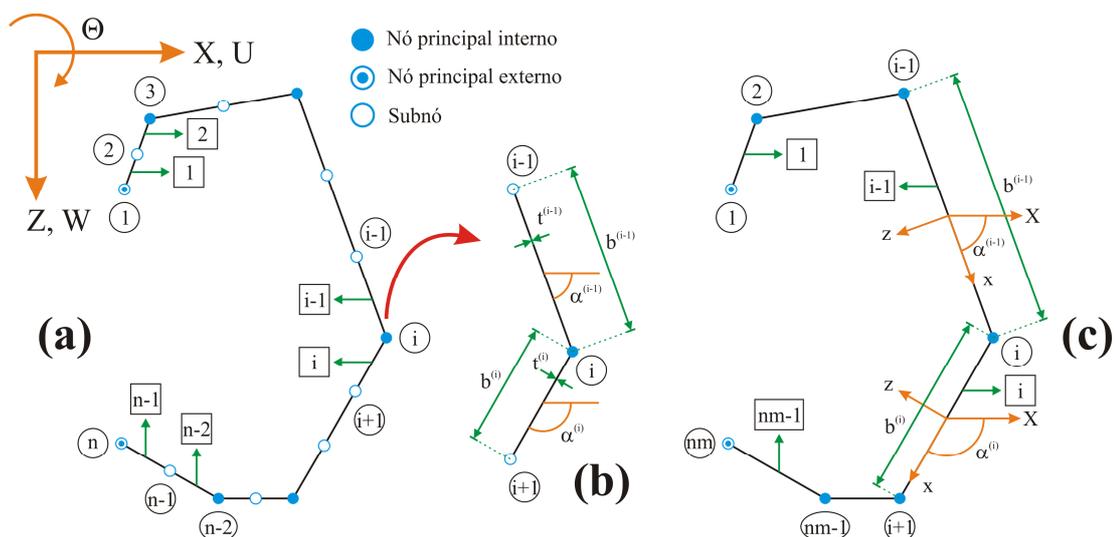


Figura A.1. (a) Nós principais e subnós de uma seção discretizada em faixas finitas. (b) Detalhe com as propriedades geométricas de faixas genéricas. (c) Seção dividida em faixas principais (somente nós principais considerados).

Conforme explicado mais adiante, para o tratamento de modos globais e distorcionais, os subnós não tem contribuição e podem ser desconsiderados, resultando na notação apresentada na Figura A.1(c). As faixas resultantes coincidem com os elementos de placa que formam o perfil, sendo chamadas de *faixas principais*. Assim a seção fica formada por  $nm$  nós e  $nm - 1$  faixas principais. Cada faixa principal  $i$  tem uma largura  $b^{(i)}$  e um ângulo com o eixo  $X$  global  $\alpha^{(i)}$ . A espessura de uma faixa principal não será utilizada nas deduções aqui apresentadas.

## A.2 Dedução da matriz $\mathbf{R}_{GD}$

Para a definição das matrizes de restrição dos modos G e D ( $\mathbf{R}_G$  e  $\mathbf{R}_D$ ), uma abordagem inspirada na GBT é seguida. Primeiramente, encontram-se as relações de restrição que definem modos globais e distorcionais. Posteriormente, os modos G e D são separados. Matematicamente, primeiro a matriz  $\mathbf{R}_{GD}$  é deduzida, considerando que todos os modos globais e distorcionais obedecem aos Critérios 1 e 2 da Tabela 2.1. Num segundo momento,  $\mathbf{R}_{GD}$  é separada em  $\mathbf{R}_G$  e  $\mathbf{R}_D$ .

Como será visto, essa abordagem é conveniente porque a aplicação dos Critérios 1 e 2 faz com que os deslocamentos  $U$ ,  $W$  e  $\Theta$  possam ser escritos em função do empenamento  $V$ , ou seja, os deslocamentos transversais são unicamente definidos pela distribuição de empenamento. Assim, as distribuições de empenamento utilizadas para separar os modos globais e distorcionais na GBT podem ser usadas.

Além disso, como o empenamento de um campo de deformações pertencente ao espaço GD é linear entre dois nós principais (Critério 1(c) da Tabela 2.1), todo o campo de deformações é definido pelos deslocamentos longitudinais  $V$  dos nós principais da seção. Conseqüentemente, é possível estabelecer uma relação entre os GDLs longitudinais dos nós principais e todos os GDLs. Também se deve notar que o número de vetores da base do espaço GD será igual ao número de nós principais  $nm$ .

A dedução de  $\mathbf{R}_{GD}$  é composta de várias partes, ou seja, as relações entre os diferentes tipos de GDLs e os graus de liberdade  $V$  dos nós principais são obtidas, em geral, separadamente. O vetor  $\mathbf{d} = \mathbf{R}_M \mathbf{d}_M$  da Eq. (2.8) contém os graus de liberdade  $U$ ,  $V$ ,  $W$  e  $\Theta$  de todos os nós principais e subnós da Figura A.1. A ordem dos graus de liberdade dentro do vetor não importa, mas, nessa seção, é utilizada a ordem apresentada na Figura A.2 (partes do

vetor  $\mathbf{d}$ ), já que as relações de restrição são deduzidas considerando essa divisão de tipos de graus de liberdade. A cada divisão está associada uma submatriz de  $\mathbf{R}_M$ .

Graus de Liberdade	Dimensão	Partes do Vetor $\mathbf{d}$	Partes da Matriz $\mathbf{R}_M$
$V$ dos nós principais	$nm$	$\mathbf{V}_m$	$\mathbf{R}_{M,V_m}$
$V$ dos subnós	$ns$	$\mathbf{V}_s$	$\mathbf{R}_{M,V_s}$
$U$ dos nós principais internos	$nm-2$	$\mathbf{U}_m$	$\mathbf{R}_{M,U_m}$
$W$ dos nós principais internos	$nm-2$	$\mathbf{W}_m$	$\mathbf{R}_{M,W_m}$
$U$ dos subnós e nós principais externos	$ns+2$	$\mathbf{U}_s$	$\mathbf{R}_{M,U_s}$
$W$ dos subnós e nós principais externos	$ns+2$	$\mathbf{W}_s$	$\mathbf{R}_{M,W_s}$
$\Theta$ de todos os nós	$nm+ns$	$\Theta$	$\mathbf{R}_{M,\Theta}$
Total: $4(nm+ns)$ $=4n=m$			

Figura A.2. Divisão dos graus de liberdade utilizada e partes da matriz de restrição  $\mathbf{R}_M$ .

Para restringir o campo de deformações ao espaço GD, primeiramente se aplica o Critério 1 da Tabela 2.1. O Critério 1 está diretamente ligado à teoria clássica de vigas, restringindo algumas deformações membranais e permitido empenamento. Como comentado, nesse caso, os subnós da seção são desconsiderados e se trabalha apenas com a seção da Figura A.1(c). Os Critérios 1(a) e 1(b) implicam que:

$$\varepsilon_{xx}^M = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma_{xy}^M = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Inserindo as Eqs. (2.1) e (2.2) (expressões de  $u$  e  $v$  do MFF) nas Eqs. (A.1) e (A.2), obtém-se a seguinte relação:

$$u_i = u_{i+1} = u^{(i)} = (v_i - v_{i+1}) \frac{1}{b^{(i)} k_r} = (V_i - V_{i+1}) \frac{1}{b^{(i)} k_r} \quad (\text{A.3})$$

onde  $u^{(i)}$  é o deslocamento na direção  $x$  comum às duas linhas nodais da faixa principal  $i$  e  $k_r = r\pi/L$ . Foi utilizada a equivalência entre o GDL longitudinal local  $v$  e o GDL longitudinal global  $V$  (ver Figura 2.4).

Considerando o nó principal genérico  $i$  da Figura A.1(c), que conecta as faixas principais  $i-1$  e  $i$ , pode-se escrever a relação dada na Eq. (A.3) para essas duas faixas, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u^{(i-1)} \\ u^{(i)} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_r} \begin{bmatrix} 1/b^{(i-1)} & -1/b^{(i-1)} & 0 \\ 0 & 1/b^{(i)} & -1/b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A equação acima fornece uma relação entre os GDLs transversais locais e os GDLs longitudinais globais (empenamento). Para ter a mesma relação, porém expressa no sistema de coordenadas global, faz-se uma transformação de coordenadas. De acordo com a Figura A.1, para as duas faixas principais conectadas ao nó  $i$ :

$$\begin{bmatrix} u^{(i-1)} \\ u^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha^{(i-1)} & \sin \alpha^{(i-1)} \\ \cos \alpha^{(i)} & \sin \alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Igualando (A.4) e (A.5), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_r D_i} \begin{bmatrix} \sin \alpha^{(i)} & -\sin \alpha^{(i-1)} \\ -\cos \alpha^{(i)} & \cos \alpha^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/b^{(i-1)} & -1/b^{(i-1)} & 0 \\ 0 & 1/b^{(i)} & -1/b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$D_i = \sin \alpha^{(i)} \cos \alpha^{(i-1)} - \sin \alpha^{(i-1)} \cos \alpha^{(i)} \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, a partir de (A.6) são estabelecidas as relações entre os deslocamentos transversais dos nós principais internos e os deslocamentos longitudinais de todos os nós principais, conforme as seguintes equações:

$$\mathbf{U}\mathbf{m} = \frac{1}{k_r} \mathbf{S}_1 \mathbf{V}\mathbf{m} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{W}\mathbf{m} = -\frac{1}{k_r} \mathbf{C}_1 \mathbf{V}\mathbf{m} \quad (\text{A.9})$$

$\mathbf{U}\mathbf{m}$  e  $\mathbf{W}\mathbf{m}$  são vetores com os GDLs  $U$  e  $W$  dos nós principais internos (2 a  $nm-1$ ). Conforme Figura A.2, esses vetores têm dimensão  $nm-2$ .  $\mathbf{V}\mathbf{m}$  é o vetor com os GDLs  $V$  de todos os nós principais e tem dimensão  $nm$ .  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{C}_1$  são matrizes de dimensão  $(nm-2) \times nm$  obtidas a partir de (A.6) que contêm apenas propriedades geométricas da seção. A forma explícita dessas matrizes pode ser encontrada em Ádány e Schafer, 2008.

Desconsiderando os subnós, o Critério 1(c) fica automaticamente satisfeito pelas funções de forma transversais utilizadas no MFF (ver Figura 2.5), ou seja, o empenamento é linear dentro de uma faixa principal. Assim, o empenamento dos subnós  $\mathbf{V}\mathbf{s}$  (Figura A.2) pode ser obtido diretamente por interpolação linear. Define-se uma matriz  $\mathbf{B}\mathbf{v}$  que faz a relação

entre os o empenamento dos subnós e o empenamento dos nós principais  $\mathbf{V}_m$ , de acordo com a Eq. (A.10).  $\mathbf{B}_v$  está detalhada em Ádány e Schafer, 2008.

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{B}_v \mathbf{V}_m \quad (\text{A.10})$$

A relação entre os demais GDLs da Figura A.2 e o os GDLs longitudinais  $V$  dos nós principais (vetor  $\mathbf{V}_m$ ) é obtida através da aplicação do Critério 2. O Critério 2(a) diz que o empenamento não pode ser nulo em toda a seção. Fisicamente, isso significa que as linhas nodais dos nós principais internos (dobras do perfil) não permanecem retas. De acordo com as Eqs. (A.8) e (A.9), um empenamento  $\mathbf{V}_m$  não nulo resulta em vetores  $\mathbf{U}_m$  e  $\mathbf{W}_m$  não nulos. Existe uma exceção, que é o caso do chamado modo axial puro, que será discutido mais adiante.

O Critério 2(b) diz que, em qualquer posição ao longo do comprimento do perfil, a seção transversal deve estar em equilíbrio. Isso quer dizer que as tensões resultantes da flexão transversal devem estar em equilíbrio independentemente das tensões longitudinais. Isso implica uma analogia entre a seção transversal e um pórtico plano (modelo de vigas bidimensional), conforme mostra a Figura A.3.

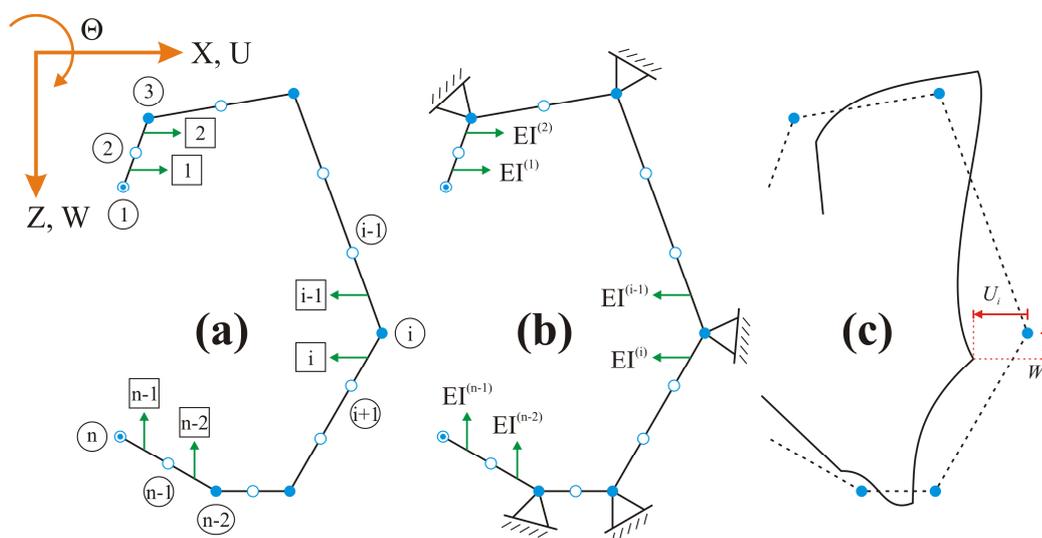


Figura A.3. Aplicação do Critério 2. (a) Seção transversal do perfil analisado. (b) Modelo de vigas bidimensional equivalente. (c) Deformações devidas ao movimento dos apoios.

A Figura A.3(a) mostra a seção transversal do perfil analisado, enquanto a Figura A.3(b) mostra o modelo de vigas bidimensional equivalente. Os nós principais internos do modelo equivalente são considerados restringidos por apoios rotulados. Os apoios representam os pontos do modelo onde há deslocamentos prescritos (Figura A.3(c)). Um nó

principal interno  $i$  terá deslocamentos  $U_i$  e  $W_i$ , e os deslocamentos de todos os nós principais internos são representados pelos vetores  $\mathbf{Um}$  e  $\mathbf{Wm}$  das Eqs. (A.8) e (A.9).

A rigidez de flexão do modelo de vigas é idêntica à rigidez de flexão transversal de placa do perfil; cada faixa  $i$  terá uma rigidez de flexão constante  $EI^{(i)}$ . A rigidez axial de cada viga do modelo equivalente é considerada grande, o que permite desprezar a extensão longitudinal das vigas (Critério 1(b)). Levando em conta essa hipótese, apenas momentos são considerados para garantir o equilíbrio da seção.

O modelo equivalente de vigas é um sistema hiperestático. Para a resolução do problema, a alternativa mais simples [Ádány e Schafer, 2008] é método da rigidez. Primeiramente, considera-se uma faixa  $i$  como um elemento de viga no sistema equivalente, cujos graus de liberdade e dimensões estão mostrados na Figura A.4.

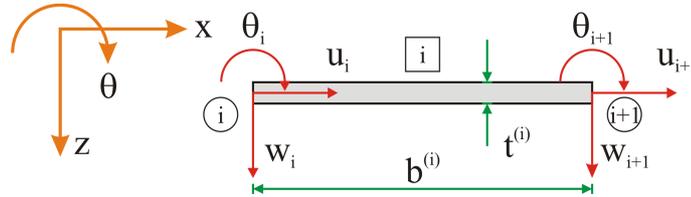


Figura A.4. Elemento de viga no modelo bidimensional equivalente.

A matriz de rigidez elástica associada aos GDLs transversais do elemento da Figura A.4 ( $\mathbf{k}_{e,t}$ ), no sistema de coordenadas local, é dada pela Eq. (A.11):

$$\mathbf{k}_{e,t} = \begin{bmatrix} \frac{EA^{(i)}}{b^{(i)}} & 0 & 0 & -\frac{EA^{(i)}}{b^{(i)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI^{(i)}}{b^{(i)3}} & \frac{6EI^{(i)}}{b^{(i)2}} & 0 & \frac{12EI^{(i)}}{b^{(i)3}} & \frac{6EI^{(i)}}{b^{(i)2}} \\ 0 & \frac{4EI^{(i)}}{b^{(i)}} & 0 & 0 & \frac{6EI^{(i)}}{b^{(i)2}} & \frac{2EI^{(i)}}{b^{(i)}} \\ 0 & 0 & \frac{EA^{(i)}}{b^{(i)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI^{(i)}}{b^{(i)3}} & -\frac{6EI^{(i)}}{b^{(i)2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI^{(i)}}{b^{(i)2}} & \frac{4EI^{(i)}}{b^{(i)}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Simétrica

onde a ordem dos GDLs é:  $u_i, w_i, \theta_i, u_{i+1}, w_{i+1}$  e  $\theta_{i+1}$ .  $EA^{(i)}$  é a rigidez axial da viga que, como comentado, é considerada infinitamente grande.

A rigidez de flexão do elemento de viga  $EI^{(i)}$  é dada pela rigidez de flexão transversal da faixa correspondente no modelo original. Considerando um material isotrópico:

$$EI^{(i)} = \frac{ELt^{(i)3}}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{A.12})$$

A matriz de rigidez local do elemento de viga pode ser deduzida diretamente através da simplificação da matriz de rigidez de uma faixa do MFF. O processo está descrito em Li, 2009, o qual é de grande utilidade na implementação do procedimento de restrição do modelo.

Através da transformação de coordenadas, pode-se montar a matriz de rigidez global dos GDLs transversais do modelo de vigas equivalente. Tendo a matriz global, pode-se definir a condição de equilíbrio da seção:

$$\mathbf{K}_{e,t} \mathbf{d}_t = \mathbf{q}_t \quad (\text{A.13})$$

onde  $\mathbf{K}_{e,t}$  é a matriz de rigidez transversal global,  $\mathbf{d}_t$  é vetor de deslocamentos transversais referentes aos GDLs  $U, W$  e  $\Theta$ , e  $\mathbf{q}_t$  é o vetor de forças nodais para os mesmos GDLs.

Como mostra a Figura A.3(c), não atuam forças externas no sistema. Por outro lado, deslocamentos prescritos conhecidos nas direções  $X$  e  $Z$  são aplicados nos nós principais internos. Assim, é conveniente dividir a Eq. (A.13) de acordo com GDLs conhecidos e desconhecidos, como mostra a Eq. (A.14). O índice  $k$  refere-se aos GDLs conhecidos (em inglês, *known*) e o índice  $u$  corresponde aos desconhecidos (em inglês, *unknown*).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e,t,kk} & \mathbf{K}_{e,t,ku} \\ \mathbf{K}_{e,t,uk} & \mathbf{K}_{e,t,uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{t,k} \\ \mathbf{d}_{t,u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{t,k} \\ \mathbf{q}_{t,u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{t,k} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

O vetor  $\mathbf{d}_{t,k}$  é a parte do vetor de deslocamentos transversais que contém os GDLs conhecidos:  $U$  e  $W$  dos nós principais internos, ou seja, os vetores  $\mathbf{U}_m$  e  $\mathbf{W}_m$  das Eqs. (A.8) e (A.9). Portanto,  $\mathbf{d}_{t,u}$  contém todos os outros GDLs transversais: translações dos nós principais externos, translações dos subnós e rotações de todos os nós.  $\mathbf{q}_{t,k}$  é um vetor de forças nodais atuando nos GDLs conhecidos (reações) e  $\mathbf{q}_{t,u}$  é um vetor nulo, já que forças externas não são aplicadas no sistema.

Resolvendo a divisão inferior da Eq. (A.14), referente aos GDLs desconhecidos, tem-se:

$$\mathbf{d}_{t,u} = -\mathbf{K}_{e,t,uu}^{-1} \mathbf{K}_{e,t,uk} \mathbf{d}_{t,k} \quad (\text{A.15})$$

De acordo com a ordem dos GDLs proposta na Figura A.2,  $\mathbf{d}_{t,k}$  e  $\mathbf{d}_{t,u}$  podem ser escritos de forma explícita. Com o auxílio das Eqs. (A.8) e (A.9), chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{W}_s \\ \boldsymbol{\Theta} \end{Bmatrix} = -\mathbf{K}_{e,t,uu}^{-1} \mathbf{K}_{e,t,uk} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_m \\ \mathbf{W}_m \end{Bmatrix} = -\mathbf{K}_{e,t,uu}^{-1} \mathbf{K}_{e,t,uk} \frac{1}{k_r} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ -\mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \mathbf{V}_m \quad (\text{A.16})$$

Com as relações dadas em (A.8), (A.9), (A.10) e (A.16), todos os GDLs do modelo podem ser escritos em função do empenamento dos nós principais (vetor  $\mathbf{V}_m$ ). Com isso, as partes da matriz de restrição  $\mathbf{R}_{GD}$  dadas na Figura A.2 podem ser definidas. A definição de  $\mathbf{R}_{GD}$  depende inicialmente da determinação de  $\mathbf{R}_{GD,V_m}$ , que é a matriz que relaciona os GDLs longitudinais dos nós principais, dentro no espaço de GDLs gerais do MFF, com os GDLs do espaço GD:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{R}_{GD,V_m} \mathbf{d}_{GD} \quad (\text{A.17})$$

Para que os campos de deformações no espaço GD possam ser definidos diretamente pelo empenamento, define-se que  $\mathbf{R}_{GD,V_m}$  seja igual a uma matriz identidade  $\mathbf{I}$  (dimensão  $nm \times nm$ ).

$$\mathbf{R}_{GD,V_m} = \mathbf{I} \quad (\text{A.18})$$

Então, as partes da matriz  $\mathbf{R}_{GD}$  podem ser retiradas diretamente das Eqs. (A.8), (A.9), (A.10) e (A.16).

$$\mathbf{R}_{GD,U_m} = \frac{1}{k_r} \mathbf{S}_1 \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{R}_{GD,W_m} = -\frac{1}{k_r} \mathbf{C}_1 \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{R}_{GD,V_s} = \mathbf{B}_v \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{GD,U_s} \\ \mathbf{R}_{GD,W_s} \\ \mathbf{R}_{GD,\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_{t,uu}^{-1} \mathbf{K}_{t,uk} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{GD,U_m} \\ \mathbf{R}_{GD,W_m} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_{e,t,uu}^{-1} \mathbf{K}_{e,t,uk} \frac{1}{k_r} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ -\mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

### A.3 Dedução das matrizes $\mathbf{R}_G$ e $\mathbf{R}_D$

A restrição do campo de deformações através da matriz  $\mathbf{R}_{GD}$  não permite a distinção entre modos de deformação individuais G e D. Para isso, uma transformação adicional dentro do espaço GD é introduzida. Matematicamente, deseja-se expressar o vetor de deslocamentos no espaço GD  $\mathbf{d}_{GD}$  em termos de uma base vetorial onde espaços G e D estejam separados.

Primeiramente, define-se uma matriz de transformação  $\mathbf{H}_{GD}$  de dimensão  $nm \times nm$  que permita escrever  $\mathbf{d}_{GD}$  em função de uma base vetorial e de um vetor  $\mathbf{d}_{H,GD}$  associado a essa base:

$$\mathbf{d}_{GD} = \mathbf{H}_{GD} \mathbf{d}_{H,GD} \quad (\text{A.23})$$

Como a base vetorial deve separar os espaços G e D, divide-se a matriz  $\mathbf{H}_{GD}$  nas submatrizes  $\mathbf{H}_G$  e  $\mathbf{H}_D$ , contendo bases para os espaços G e D separadamente. Conseqüentemente, o vetor  $\mathbf{d}_{H,GD}$  é dividido nos vetores  $\mathbf{d}_G$  e  $\mathbf{d}_D$ :

$$\mathbf{d}_{GD} = [\mathbf{H}_G \quad \mathbf{H}_D] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_G \\ \mathbf{d}_D \end{Bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

As colunas de  $\mathbf{H}_G$  e  $\mathbf{H}_D$  são modos de deformação individuais dentro dos espaços G e D, e, mais especificamente, são distribuições de empenamento. Assim, diz-se que cada uma dessas matrizes é uma *base modal* e os vetores  $\mathbf{d}_G$  e  $\mathbf{d}_D$  são vetores de *coordenadas modais*. É conveniente definir as bases modais a partir de modos de deformação individuais com significado físico, como será descrito a seguir.

Uma vez definidas as matrizes  $\mathbf{H}_G$  e  $\mathbf{H}_D$ , pode-se introduzir a transformação da Eq. (A.24) na Eq. (2.8) ( $\mathbf{d} = \mathbf{R}_M \mathbf{d}_M$ ) para obter as matrizes de restrição  $\mathbf{R}_G$  e  $\mathbf{R}_D$ :

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{d}_{GD} = \mathbf{R}_{GD} [\mathbf{H}_G \quad \mathbf{H}_D] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_G \\ \mathbf{d}_D \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}_G \quad \mathbf{R}_D] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_G \\ \mathbf{d}_D \end{Bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_G \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_D \quad (\text{A.27})$$

As matrizes  $\mathbf{R}_G$  e  $\mathbf{R}_D$  são bases modais dos espaços G e D, mas agora escritas em termos dos GDLs gerais do MFF.

De acordo com o Critério 3 da Tabela 2.1, os modos globais não podem apresentar distorção da seção transversal, ou seja, os modos globais representam deslocamentos de corpo rígido da seção. De acordo com os GDLs do MFF (e da GBT), existem quatro movimentos de corpo rígido possíveis para uma seção: translação axial, duas translações transversais e uma rotação ao redor do eixo axial. Assim, a dimensão do espaço  $G$  é igual a 4, de acordo com a Eq. (A.28), onde cada vetor tem dimensão  $nm$ , ou seja, o valor dos empenamentos nos  $nm$  nós principais.

$$\mathbf{H}_G = [\mathbf{H}_{G1} \quad \mathbf{H}_{G2} \quad \mathbf{H}_{G3} \quad \mathbf{H}_{G4}] \quad (\text{A.28})$$

Assim, como a GBT sugere, pode-se definir a base vetorial do espaço  $G$  (Eq. (A.28)) a partir das quatro distribuições de empenamento mostradas na Figura A.5, utilizando um perfil C com enrijecedores de borda como exemplo.

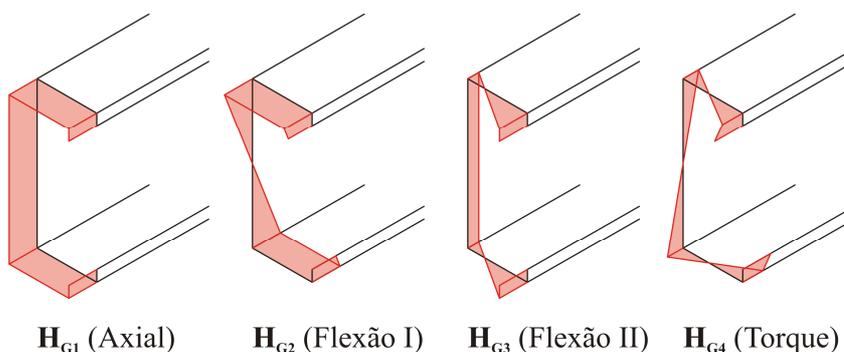


Figura A.5. Distribuições de empenamento para modos de deformação de corpo rígido (arbitrariamente escalados).

As funções de empenamento da Figura A.5 estão associadas a tipos específicos de carregamento: (1) força axial pura, (2) flexão pura em torno do eixo principal de maior inércia, (3) flexão pura em torno do eixo principal de menor inércia e (4) torque puro. Assim, tem-se um modo *axial* ( $\mathbf{H}_{G1}$ ), dois modos *de flexão* ( $\mathbf{H}_{G2}$  e  $\mathbf{H}_{G3}$ ) e um modo *de torque* ( $\mathbf{H}_{G4}$ ).  $\mathbf{H}_{G2}$ ,  $\mathbf{H}_{G3}$  e  $\mathbf{H}_{G4}$  têm significado físico claro, sendo associados à flambagem de flexão em torno dos dois eixos principais e à flambagem torsional.

O modo  $\mathbf{H}_{G1}$  será associado à extensão axial. As definições da GBT sugerem que esse é um modo global. Porém, a teoria clássica de vigas normalmente não considera esse modo. Portanto, o modo axial também pode ser considerado como um modo O (já que evidentemente não é um modo local nem distorcional). De qualquer forma, o modo de deformação axial tem pouca importância prática como um modo de flambagem.

Deve-se notar que, para a definição dos modos globais, o que importa é a distribuição de empenamento e não a magnitude. Portanto, os modos globais podem ser arbitrariamente escalados. Além disso, para a geração do espaço  $G$ , poderiam ser definidos dois modos de flexão em torno de quaisquer eixos não paralelos, mas o significado físico seria perdido.

Nesse ponto, é importante fazer uma observação quanto às definições de modos de deformação e modos de flambagem. Um *modo puro de deformação* é quando o vetor pode ser escrito em termos de uma base vetorial do espaço de algum tipo de flambagem e um vetor de coordenadas modais. Para modos de deformação globais e distorcionais puros, respectivamente, pode-se escrever:

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_G \mathbf{d}_G = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_G \mathbf{d}_G \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_D \mathbf{d}_D = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_D \mathbf{d}_D \quad (\text{A.30})$$

Cada vetor pertencente à base vetorial definida pela matriz  $\mathbf{H}_{GD}$  (ou  $\mathbf{H}_G$  e  $\mathbf{H}_D$ ) é um *modo de deformação individual* (global ou distorcional) expresso em função dos GDLs do espaço GD (que são os valores de empenamento  $V$  nos nós principais, ou seja,  $\mathbf{V}\mathbf{m}$ ), tendo dimensão  $nm$ . Cada vetor da matriz  $\mathbf{R}_G$  ou da matriz  $\mathbf{R}_D$  é um *modo de deformação individual* (global ou distorcional) expresso em termos dos GDLs gerais do MFF ( $U, V, W$  e  $\Theta$ ), tendo dimensão  $m$ .

Um *modo puro de flambagem* é um *modo puro de deformação* que satisfaça o problema generalizado de autovalores da Eq. (2.7), resultando na Eq. (2.11). Mais especificamente, um *modo de flambagem individual* é quando o problema de autovalores restringido dado pela Eq. (2.11) é resolvido utilizando uma matriz de restrição com apenas uma coluna. Por exemplo, ao invés de usar a matriz  $\mathbf{R}_G$  completa, seleciona-se apenas  $\mathbf{R}_{G2} = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_{G2}$ , ou seja, o perfil é forçado a flambar de acordo com a distribuição de deslocamentos de um *modo de deformação individual* (flexão em torno do eixo de maior inércia para o exemplo da Figura A.5). Um modo de flambagem individual só terá significado físico se a base vetorial do espaço do tipo de flambagem em questão for definida adequadamente. Garantindo a separação dos espaços de deformação dos tipos de flambagem ( $G$  e  $D$ , no caso), evidentemente, um *modo de deformação individual* é um caso específico de um *modo puro de deformação*.

Finalmente, pode-se definir um *modo combinado de flambagem*, que ocorre quando o problema de autovalores restringido da Eq. (2.11) é resolvido utilizando uma matriz de

restrição genérica, como comentado na seção 2.3.1. Uma matriz genérica é composta por qualquer combinação de colunas das matrizes  $\mathbf{R}_G$ ,  $\mathbf{R}_D$ ,  $\mathbf{R}_L$  e  $\mathbf{R}_O$ . Um *modo puro de flambagem* é um caso específico do *modo combinado de flambagem*, o qual considera apenas modos de deformação pertencente a um tipo de flambagem.

Para fixar melhor essas definições, consideram-se os modos de deformação globais de um perfil C com enrijecedores de borda (Figura A.5). Se o problema de autovalores restringido da Eq. (2.11) for resolvido, por exemplo, para os modos individuais  $\mathbf{H}_{G2}$ ,  $\mathbf{H}_{G3}$  e  $\mathbf{H}_{G4}$ , obtêm-se modos de flambagem individuais de flexão em torno do eixo de maior inércia, flexão em torno do eixo de menor inércia e torsional, respectivamente. Porém, resolvendo a Eq. (2.11) dentro do espaço G (considerando a base vetorial da Eq. (A.28) inteira), é obtida uma matriz  $\Phi_G$  que contém alguns modos de flexo-torção, ou seja, são obtidos modos puros de flambagem que são uma combinação dos modos de deformação individuais da base vetorial. Na verdade, somente para seções duplamente simétricas os modos puros de flambagem são idênticos aos modos de deformação individuais.

Como não há definição direta para os modos distorcionais, a base vetorial do espaço D deve ser determinada de maneira que ela, juntamente com a base vetorial do espaço G, gere o espaço GD. Matematicamente, o espaço D é o espaço nulo do espaço G dentro do espaço GD. Qualquer vetor no espaço G deve ser ortogonal a qualquer vetor do espaço D. Mais especificamente, a ortogonalidade deve ocorrer entre as funções de empenamento na seção inteira. A condição de ortogonalidade proposta pela GBT é:

$$\sum_{k=1}^{nm-1} \int_0^{b^{(k)}} v_i^{(k)}(x) v_j^{(k)}(x) t^{(k)}(x) dx = 0 \quad (\text{A.31})$$

onde a notação refere-se à Figura A.1(c). A integral é na seção inteira, através das  $nm-1$  faixas principais.  $x$  é a coordenada local,  $t^{(k)}(x)$  é a espessura da faixa  $k$ , e  $v_i^{(k)}(x)$  e  $v_j^{(k)}(x)$  são duas funções de empenamento arbitrárias dos espaços G e D, respectivamente, na faixa  $k$ . Aqui, a espessura é considerada constante.

Segunda a dedução apresentada em Ádány e Schafer, 2006b e 2008, considerando a espessura constante ao longo da seção, é possível escrever a condição de ortogonalidade de (A.31) em termos das bases vetoriais  $\mathbf{H}_G$  e  $\mathbf{H}_D$ , chegando a:

$$\mathbf{H}_D^T \mathbf{A} \mathbf{H}_G = \mathbf{0} \quad (\text{A.32})$$

Na Eq. (A.32),  $\mathbf{A}$  é uma matriz de dimensão  $nm \times nm$ , contendo valores das áreas das seções das faixas, e está explícita em Ádány e Schafer, 2006b e 2008. Como a dimensão do espaço GD é  $nm$  e a dimensão do espaço G é 4, a dimensão do espaço D será  $nm - 4$  e a matriz  $\mathbf{H}_D$  terá dimensão  $nm \times (nm - 4)$ . Finalmente, a matriz de restrição  $\mathbf{R}_D$  é encontrada através da Eq. (A.27).

Conforme discutido na seção 2.3.2, é conveniente definir bases vetoriais ortogonais. A condição de ortogonalidade da Eq. (A.31) pode ser considerada para os vetores de um mesmo subespaço, ficando:

$$\sum_{k=1}^{nm-1} \int_0^{b^{(k)}} v_i^{(k)}(x) v_j^{(k)}(x) t^{(k)}(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

$$i, j = 1, \dots, m_M \quad (\text{M} = \text{G ou D})$$

onde  $v_i^{(k)}(x)$  e  $v_j^{(k)}(x)$  são duas funções de empenamento do mesmo subespaço (G ou D), na faixa  $k$ , e  $m_M$  é o número de GDLs do subespaço genérico M (que pode ser G ou D), ou seja, o número de vetores da base.

A base vetorial do espaço G definida como na Figura A.5 já é uma base ortogonal, automaticamente respeitando (A.33). Porém, a simples aplicação de (A.32) não garante uma base vetorial ortogonal para o espaço D. Portanto,  $\mathbf{H}_D$  deve ser definida obedecendo simultaneamente às Eqs. (A.32) e (A.33). As bases vetoriais ortogonais para os espaços G e D (ou seja, que respeitam a condição de ortogonalidade de empenamento da Eq. (A.33)) são chamadas de *bases naturais*. Os vetores dessas bases são denominados *modos de deformação naturais*.

É importante observar que as condições de ortogonalidade das Eqs. (A.32) e (A.33) não definem uma única base vetorial ortogonal  $\mathbf{H}_D$ . Como comentado, é conveniente definir modos que tenham significado físico. Uma metodologia para definir uma base vetorial  $\mathbf{H}_D$  ortogonal com significado físico é apresentada na seção 2.3.2.

#### A.4 Dedução da matriz $\mathbf{R}_L$

Os modos de deformação locais respeitam o Critério 1 da Tabela 2.1, ou seja, os deslocamentos transversais dos nós principais internos podem ser escritos em função dos

deslocamentos longitudinais (empenamento) de todos os nós principais (Eqs. (A.8) e (A.9)). Por outro lado, o Critério 2 não é obedecido.

Pelo Critério 2(a), o empenamento deve ser nulo na seção. Considerando as Eqs. (A.8) e (A.9), como o vetor  $\mathbf{V}\mathbf{m}$  é nulo, os modos locais não apresentam translação transversal nos nós principais internos. Isso significa que as linhas nodais correspondente às dobras do perfil (união dos elementos de placa) permanecem retas. Além disso, considerando o Critério 1(a), que diz que não há deformação transversal membranal nas placas, os deslocamentos locais  $u$  devem ser zero para todas as faixas. Conseqüentemente, as translações ficam limitadas à direção local  $w$  (perpendicular às placas), para os nós que não sejam os nós principais internos.

Como nenhuma outra restrição de deformações é atribuída aos modos L, os possíveis deslocamentos são: (1) translação na direção local  $w$  dos nós principais externos, (2) translação na direção local  $w$  dos subnós e (3) rotação  $\Theta$  de todos os nós. Assim, a restrição ao campo de deformações dos modos locais é dada pela seguinte relação:

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_L \mathbf{d}_L \quad (\text{A.34})$$

onde  $\mathbf{d}$  é o vetor com os  $m$  GDLs gerais do MFF e  $\mathbf{d}_L$  é o vetor no espaço reduzido L, contendo os GDLs  $w$  dos 2 nós principais externos e dos  $ns$  subnós e as rotações  $\Theta$  dos  $n$  nós. Portanto, a dimensão do espaço L é  $n + ns + 2$ . Considerando a ordem dos GDLs dada na Figura A.2, e Eq. (A.34) pode ser expandida conforme Eq. (A.35).  $\mathbf{d}_L$  contém os GDLs  $w$  dos 2 nós principais externos e dos  $ns$  subnós (vetor  $\mathbf{w}$ ) e as rotações  $\Theta$  dos  $n$  nós (vetor  $\Theta$ ). A matriz  $\mathbf{R}_L$  tem dimensão  $m \times (n + ns + 2)$ .

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}\mathbf{m} \\ \mathbf{V}\mathbf{s} \\ \mathbf{U}\mathbf{m} \\ \mathbf{W}\mathbf{m} \\ \mathbf{U}\mathbf{s} \\ \mathbf{W}\mathbf{s} \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{L,Vm} \\ \mathbf{R}_{L,Vs} \\ \mathbf{R}_{L,Um} \\ \mathbf{R}_{L,Wm} \\ \mathbf{R}_{L,Us} \\ \mathbf{R}_{L,Ws} \\ \mathbf{R}_{L,\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \Theta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Para a determinação da matriz de restrição  $\mathbf{R}_L$ , define-se uma base onde cada vetor corresponde a um deslocamento unitário em um dos GDLs do vetor  $\mathbf{d}_L$  e deslocamento nulo nos demais GDLs. Assim, tem-se:

$$\mathbf{R}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{L,vm} \\ \mathbf{R}_{L,vs} \\ \mathbf{R}_{L,Um} \\ \mathbf{R}_{L,Wm} \\ \mathbf{R}_{L,Us} \\ \mathbf{R}_{L,Ws} \\ \mathbf{R}_{L,\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

onde  $\mathbf{0}$  representa submatrizes com zeros,  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade  $n \times n$ ,  $\mathbf{S}_2 = \text{diag}(-\sin \alpha_1, -\sin \alpha_2, \dots)$  e  $\mathbf{C}_2 = \text{diag}(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots)$  são matrizes  $(ns+2) \times (ns+2)$  que fazem a transformação de coordenadas entre sistema global e local segundo Figura A.1, sendo  $\alpha_i$  é o ângulo da faixa no subnó  $i$ .

Os modos locais são modos que envolvem apenas flexão de placa, ou seja, não apresentam deformações membranais e estão de acordo com a teoria clássica de placas. Esses modos violam naturalmente o Critério 2(b), já que a flexão de placa sempre inclui flexão longitudinal, que não ocorrem nos modos pertencentes ao espaço GD.

A base vetorial para o espaço L definida como citado acima, através da aplicação de deslocamentos unitários é chamada de base de *modos naturais*. Os vetores dessa base não têm significado físico. Na seção 2.3.2, é mostrado um procedimento para a determinação de uma base vetorial com significado físico, obtida a partir da base de modos naturais.

### A.5 Dedução da matriz $\mathbf{R}_O$

Os modos de deformação O exibem extensão/encurtamento transversal das placas e/ou deformação cisalhante no plano das placas (a qual normalmente causa uma distribuição de empenamento não-linear entre os nós principais). Em outras palavras, os modos pertencentes ao espaço O não obedecem à característica comum entre modos G, D e L: o Critério 1, que se refere às deformações membranais.

No contexto do MFF, tanto a deformação transversal membranal quanto o cisalhamento membranal são constantes na direção transversal  $x$  das faixas, já que os deslocamentos  $u$  e  $w$  são lineares (ver seção 2.2). Isso significa que uma base vetorial para  $\mathbf{R}_O$  pode ser definida aplicando-se extensões unitárias e deformações cisalhantes unitárias para cada faixa finita. Assim, determinam-se os  $2(n-1)$  vetores independentes da base vetorial do espaço O. Essa é a base de *modos naturais* pertencentes ao espaço O. Essa base

ainda pode ser dividida quanto a modos envolvendo apenas extensão membranal e modos envolvendo apenas empenamento (cisalhamento membranal). Na seção 2.3.2, é mostrado um procedimento para a determinação de uma base vetorial com significado físico, obtida a partir da base de modos naturais.

Existe outra abordagem essencialmente matemática para a definição de  $\mathbf{R}_O$ , proposta em Ádány e Schafer, 2008, através da qual se gera o espaço O de forma que esse não se sobreponha aos outros subespaços (G, D e L), ou seja, busca-se uma base vetorial que esteja no espaço GDLO, mas esteja fora do espaço GDL (base vetorial do espaço nulo de GDL). Para isso, define-se uma condição de ortogonalidade simples, com relação à matriz de rigidez elástica global  $\mathbf{K}_e$  do modelo numérico:

$$\mathbf{R}_O^T \mathbf{K}_e \mathbf{R}_{GDL} = \mathbf{0} \quad (\text{A.37})$$

A Eq. (A.37) fornece uma base de modos de deformação O *totalmente ortogonais*. Também se deve notar que a matriz  $\mathbf{R}_O$  definida de acordo com a Eq. (A.37) não é única.

Finalmente, é importante observar que a definição da base da base vetorial para o espaço O é um tema aberto.

## ANEXO B - Bases naturais e axiais ortogonais: exemplo numérico

Para explicar melhor a diferença entre as bases naturais e as bases axiais ortogonais, considera-se a flambagem global. Para o perfil da Figura 2.7 (perfil C com enrijecedores de bordas discretizado apenas com nós principais), a base natural do espaço G, em termos dos GDLs do espaço GD, é dada pela matriz  $\mathbf{H}_G$  introduzida na seção A.3:

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} 1 & -40 & 22,5 & -1015,3 \\ 1 & -45 & 22,5 & -804,72 \\ 1 & -45 & -7,5 & 545,28 \\ 1 & 45 & -7,5 & -545,28 \\ 1 & 45 & 22,5 & 804,72 \\ 1 & 40 & 22,5 & 1015,3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde cada coluna fornece o valor de empenamento dos seis nós principais mostrados na Figura 2.7(b). Assim, as colunas representam as distribuições de empenamento G1, G2, G3 e G4 da Figura 2.8. Convém observar que a magnitude de cada vetor da Eq. (B.1) é arbitrária. Para encontrar a base vetorial natural em termos dos GDLs gerais do MFF  $\mathbf{R}_G$  (ou seja, para determinar também a distribuição de deslocamentos transversais), utiliza-se a Eq. (A.26), obtendo-se vetores cujos valores referentes aos GDLs de empenamento  $V$  serão idênticos aos da Eq. (B.1) (ver (A.18)).

A base axial ortogonal é encontrada resolvendo o problema de autovalores restringido da Eq. (2.11) para o espaço G, chegando à matriz de autovetores  $\Phi_G$ . Considerando extremidades simplesmente apoiadas e um comprimento de 1000 mm, tem-se:

$$\Phi_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0,5717 & 0 & 0,01198 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Posteriormente, a base axial ortogonal expressa em termos dos GDLs gerais do MFF  $\mathbf{R}_G^0$  é determinada pela Eq. (2.15). Nesse ponto, torna-se interessante expandir essa última equação como segue:

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_G \mathbf{d}_G = \mathbf{R}_G \Phi_G \mathbf{c}_G = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_G \Phi_G \mathbf{c}_G \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.1) e (B.2) em (B.3), tem-se:

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_{\text{GD}} \begin{bmatrix} 1 & -40 & 22,5 & -1015,3 \\ 1 & -45 & 22,5 & -804,72 \\ 1 & -45 & -7,5 & 545,28 \\ 1 & 45 & -7,5 & -545,28 \\ 1 & 45 & 22,5 & 804,72 \\ 1 & 40 & 22,5 & 1015,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0,5717 & 0 & 0,01198 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{c}_G \quad (\text{B.4})$$

A multiplicação das matrizes  $\mathbf{H}_G$  e  $\Phi_G$  resulta em uma matriz  $\mathbf{H}_G^0$ :

$$\mathbf{H}_G^0 = \begin{bmatrix} 540,48 & -22,5 & -52,163 & -1 \\ 415,08 & -22,5 & -54,64 & -1 \\ -356,75 & 7,5 & -38,468 & -1 \\ 356,75 & 7,5 & 38,468 & -1 \\ -415,08 & -22,5 & 54,64 & -1 \\ -540,48 & -22,5 & 52,163 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

onde as colunas representam as distribuições de empenamentos dos modos axiais ortogonais G1, G2, G3 e G4 da Figura 2.9, ou seja, cada coluna da matriz  $\Phi_G$  resulta numa combinação linear das colunas de  $\mathbf{H}_G$ , expressas nas colunas de  $\mathbf{H}_G^0$ . Por exemplo, a primeira coluna de  $\Phi_G$  representa uma combinação dos modos G2 e G4 da Figura 2.8 (flexão em relação ao eixo de maior inércia e torção, respectivamente), resultando no modo G1 da Figura 2.9 (modo de flexo-torção). Portanto, como comentado na seção 2.3.1, cada modo de flambagem global  $\Phi_{G,i}$  (ou, em geral, cada modo de deformação  $\mathbf{d}_G$ ) pode ser interpretado como um vetor de coordenadas generalizadas no espaço G.

Também se pode notar que, como algumas colunas de  $\Phi_G$  não têm termos fora da diagonal (colunas 2 e 4), alguns modos axiais ortogonais globais são iguais aos modos naturais (mais especificamente, o modo axial e o modo de flexão em relação ao eixo de menor inércia da Figura 2.8 e da Figura 2.9).

Sabe-se que, para executar a identificação modal, as bases vetoriais precisam ser normalizadas. Tomando como exemplo o esquema de normalização NTE, de acordo com a Eq. (2.19), a base axial ortogonal  $\Phi_G$  fica:

$$\Phi_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{\Phi_{G,4}^T \mathbf{K}_{g,G} \Phi_{G,4}}} \\ \frac{1}{\sqrt{\Phi_{G,1}^T \mathbf{K}_{g,G} \Phi_{G,1}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\Phi_{G,3}^T \mathbf{K}_{g,G} \Phi_{G,2}}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{\Phi_{G,2}^T \mathbf{K}_{g,G} \Phi_{G,2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-0,5717}{\sqrt{\Phi_{G,1}^T \mathbf{K}_{g,G} \Phi_{G,1}}} & 0 & \frac{0,01198}{\sqrt{\Phi_{G,3}^T \mathbf{K}_{g,G} \Phi_{G,3}}} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Tendo a matriz  $\Phi_G$  normalizada, a base axial ortogonal normalizada expressa em termos dos graus de liberdade gerais do MFF é encontrada através da Eq. (2.15):

$$\mathbf{R}_G^0 = \mathbf{R}_G \Phi_G.$$

A normalização também pode ser feita diretamente no espaço de GDLs do MFF, ou seja, cada coluna da matriz  $\mathbf{R}_G^0$  (de dimensão  $m$ ) é normalizada como mostra a Eq. (B.7), onde pode ser visto que é utilizada a matriz  $\mathbf{K}_g$  original (dimensão  $m \times m$ ).

$$\mathbf{R}_G^0 = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\mathbf{R}_{G,1}^0}{\sqrt{\mathbf{R}_{G,1}^{0T} \mathbf{K}_g \mathbf{R}_{G,1}^0}} & \frac{\mathbf{R}_{G,2}^0}{\sqrt{\mathbf{R}_{G,2}^{0T} \mathbf{K}_g \mathbf{R}_{G,2}^0}} & \frac{\mathbf{R}_{G,3}^0}{\sqrt{\mathbf{R}_{G,3}^{0T} \mathbf{K}_g \mathbf{R}_{G,3}^0}} & \frac{\mathbf{R}_{G,4}^0}{\sqrt{\mathbf{R}_{G,4}^{0T} \mathbf{K}_g \mathbf{R}_{G,4}^0}} \end{array} \right] \quad (\text{B.7})$$

Essa última opção de normalização é sempre usada quando se trabalha com bases naturais.

Para ilustrar a variação das distribuições de deslocamentos dos modos axiais ortogonais com o comprimento, considera-se agora um comprimento de 8000 mm. A matriz  $\Phi_G$  fica:

$$\Phi_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,08524 & 0,01584 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Comparando (B.8) com (B.2), primeiramente se nota que a ordem dos modos mudou. Agora o modo de flexo-torção que combina os modos naturais G2 e G4 da Figura 2.8 (flexão em relação ao eixo de maior inércia e torção, respectivamente) é o segundo (segunda coluna). Então, comparando a segunda coluna de (B.8) com a primeira coluna de (B.2), nota-se que, para o comprimento de perfil de 8000 mm, existe uma contribuição muito menor do modo de

torção (observar que, como os modos naturais não foram normalizados, as contribuições não indicam porcentagem). Com isso, tem-se uma base axial ortogonal para o espaço G, expressa em termos dos graus de liberdade do espaço G (matriz  $\mathbf{H}_G^0$ ), dada por:

$$\mathbf{H}_G^0 = \begin{bmatrix} -22,5 & 46,54 & -56,08 & -1 \\ -22,5 & 23,591 & -57,745 & -1 \\ 7,5 & -91,477 & -36,364 & -1 \\ 7,5 & 91,477 & 36,364 & -1 \\ -22,5 & -23,591 & 57,745 & -1 \\ -22,5 & -46,54 & 56,08 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Comparando a segunda coluna de (B.9) com a primeira de (B.5), verifica-se que o modo de flexo-torção resultante tem uma distribuição de empenamento diferente. Conseqüentemente, a distribuição de deslocamentos transversais também será diferente. A Figura B.1 mostra a distribuição de empenamento e a distribuição de deslocamentos transversais para o modo de flexo-torção G1 da Figura 2.9, para os comprimentos  $L$  de 1000 mm e de 8000 mm.

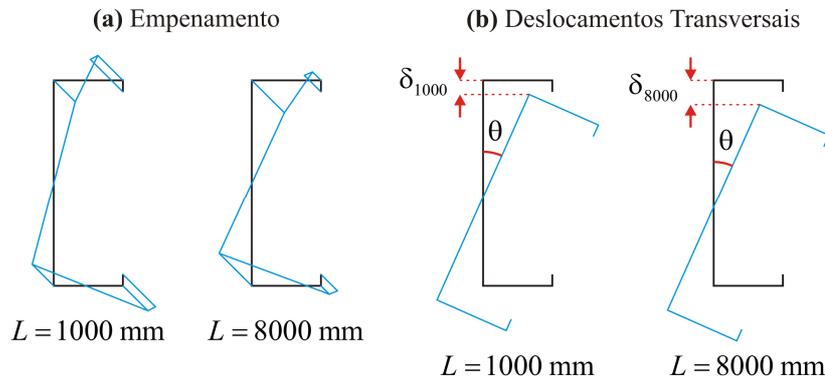


Figura B.1. Variação das distribuições de deslocamentos do modo axial ortogonal G1 com o comprimento do perfil (a) Distribuição de empenamento. (b) Distribuição de deslocamentos transversais.

Para o comprimento de 8000 mm, a contribuição do modo natural G2 (flexão em relação ao eixo de maior inércia) é maior, ou seja, para uma mesma rotação  $\theta$ , tem-se que

$$\delta_{8000} > \delta_{1000}.$$