

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**MAURÍCIO ZARDO OLIVEIRA**

**ESTABILIDADE E ESTABILIZAÇÃO DE  
UMA CLASSE DE SISTEMAS  
NÃO-LINEARES SUJEITOS A  
SATURAÇÃO**

Porto Alegre  
2012

**MAURÍCIO ZARDO OLIVEIRA**

**ESTABILIDADE E ESTABILIZAÇÃO DE  
UMA CLASSE DE SISTEMAS  
NÃO-LINEARES SUJEITOS A  
SATURAÇÃO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho

Porto Alegre  
2012

**MAURÍCIO ZARDO OLIVEIRA**

**ESTABILIDADE E ESTABILIZAÇÃO DE  
UMA CLASSE DE SISTEMAS  
NÃO-LINEARES SUJEITOS A  
SATURAÇÃO**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Emanuel de Souza, LNCC  
Doutor pela Université Pierre et Marie Curie – Paris, França

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto, UFSC  
Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, UFRGS  
Doutor pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Prof. Dr. Walter Fetter Lages, UFRGS  
Doutor pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre, agosto de 2012.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho a minha esposa Ana Paula e aos meus pais, em especial pela dedicação e apoio em todos os momentos difíceis.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador João Manoel Gomes da Silva Jr. pela paciência, total atenção e disposição ao longo do período do doutorado, sem os quais impossibilitariam a conclusão desta tese. Agradeço-o também por proporcionar a experiência no exterior no doutorado sanduíche em Toulouse, França.

Um especial agradecimento é dado ao meu co-orientador Daniel Ferreira Coutinho, por ter transmitido seus ensinamentos e pelas orientações feitas desde a época do mestrado até o presente momento.

Agradeço também ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, PPGEE, pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa, bem como a todos os alunos e membros que a ele compõem. Em especial aos amigos que fiz durante este tempo: ao Bender por diversos momentos de reflexão; ao Jeferson, Lucíola, Diego, Ivan e Manoel por todos os momentos de aprendizagem e distração.

À CAPES, sou grato pela provisão da bolsa de doutorado e pelo financiamento de meu doutorado sanduíche. Durante este período em Toulouse, não poderia deixar de agradecer: a minha orientadora estrangeira Sophie Tarbouriech pela total atenção e disposição para o desenvolvimentos dos resultados; a Isabelle por compartilhar seu conhecimento; aos brasileiros: Giorgio, Luiz, Cristiano, Gustavo, Kiraly, Victor; e a outros grandes amigos: Sandy, Ahmed, Mirko, Mathieu, Giorgia, Francesco, Mailys, Akin, Supatcha, Razvan, Adrien.

Por fim, agradeço a minha família e principalmente aos meus pais pelo apoio e incentivo. Em especial, a minha esposa Ana Paula, por me acompanhar em todos os momentos (deste a época do mestrado) e por compartilhar, em Toulouse, pouco mais de um ano, pouco mais de  $20m^2$ .

## RESUMO

Este trabalho aborda o problema de análise de estabilidade e estabilização de sistemas não-lineares racionais sujeitos a saturação. A abordagem utilizada neste estudo é baseada em representações algébricas diferenciais (DAR) de sistemas racionais e na versão modificada da condição de setor generalizada para lidar com a saturação. Inicialmente, métodos para caracterizar a estabilidade de sistemas em tempo discreto sujeitos a perturbações são propostos. Neste contexto, apresentam-se abordagens na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) para o cálculo de estimativas da região de atração do sistema, bem como limites para uma classe de perturbações admissíveis  $\ell_2$  de forma a garantir que as trajetórias sejam limitadas e estimativas do ganho  $\ell_2$  do sistema. Duas abordagens são consideradas: a primeira é baseada em uma única função de Lyapunov quadrática e a segunda considerando funções de Lyapunov quadráticas por partes. Em seguida, técnicas para síntese de compensadores *anti-windup* são propostas com o objetivo de aumentar a região de atração de sistemas em tempo contínuo. As condições são desenvolvidas e incorporadas em um algoritmo iterativo, sendo que a cada iteração é resolvido um problema de otimização convexa com restrições na forma de LMIs. Tais resultados são estendidos para lidar com sistemas incertos e sistemas sujeitos a perturbações. Com o objetivo de evitar métodos iterativos e facilitar a aplicação em sistemas multivariáveis propõe-se uma nova abordagem para sintetizar este tipo de compensador (diretamente na forma de LMIs). Extensões dos resultados são apresentadas para tratar sistemas em tempo discreto. Por fim, é apresentada uma abordagem para síntese de realimentação estática de estados. Estes métodos são baseados em condições de estabilização local permitindo, simultaneamente, calcular o ganho de realimentação de estados e uma função de Lyapunov que leva a uma estimativa maximizada da região de atração do sistema em malha fechada. Propõe-se também uma extensão dos resultados abordando sistemas em tempo discreto. Exemplos numéricos são apresentados com o objetivo de ilustrar a aplicação e verificar a eficiência dos métodos propostos.

**Palavras-chave:** Sistemas Não-Lineares, Sistemas Racionais, Saturação, Perturbações, Estabilidade, *Anti-windup*, Realimentação, Funções de Lyapunov, LMI.

## ABSTRACT

This work addresses the problem of stability analysis and stabilization of nonlinear rational systems subject to saturation. The approach used in this study is based on the differential algebraic representation (DAR) of rational systems and on a modified version of the generalized sector condition to deal with saturation. First, methods to characterize the stability of discrete-time systems subject to disturbances are proposed. In this context, approaches based on linear matrix inequalities to compute estimates of the region of attraction of the system, as well as limits for a class of admissible  $\ell_2$  disturbances to ensure bounded trajectories and estimates of the  $\ell_2$ -gain of the system are presented. Two approaches are considered: the first one based on a single quadratic Lyapunov function and the second one considering piecewise quadratic Lyapunov functions. Then, techniques for the synthesis of *anti-windup* compensators are proposed in order to enlarge the region of attraction of continuous-time systems. The conditions are developed and incorporated into an iterative algorithm, where at each iteration, a convex optimization problem with LMI constraints is solved. These results are extended to deal with uncertain systems and systems subject to disturbances. In order to avoid iterative methods and facilitate the application to multivariable systems, a new approach to synthesize this type of compensator (directly in terms of LMI) is proposed. Extensions of the results are also presented to deal with discrete-time systems. Finally, a method for the synthesis of static state feedback gains is proposed. This method is based on local stabilization conditions which allow to calculate the state feedback gain and a Lyapunov function leading to a maximized estimate of the region of attraction of the closed-loop system. The extension of these results for the case of discrete-time systems is also addressed. Numerical examples are presented in order to illustrate the application and to verify the efficiency of the proposed methods.

**Keywords:** Nonlinear Systems, Rational Systems, Saturation, Disturbances, Stability, *Anti-windup*, Feedback, Lyapunov Functions, LMI.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	10
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	11
<b>LISTA DE ABREVIATURAS</b> . . . . .	12
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	13
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	15
<b>2 CONCEITOS PRELIMINARES</b> . . . . .	19
<b>2.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov</b> . . . . .	19
2.1.1 Estabilidade Interna . . . . .	20
2.1.2 Estabilidade de Sistemas Sujeitos a Perturbações Externas . . . . .	23
2.1.3 Estabilidade de Sistemas em Tempo Discreto . . . . .	27
<b>2.2 Métodos LMI para Tratamento de Sistemas Não-Lineares</b> . . . . .	29
2.2.1 Sistemas do Tipo Lure . . . . .	30
2.2.2 Sistemas Polinomiais e Racionais . . . . .	33
<b>2.3 Sistemas Sujeitos a Saturação</b> . . . . .	41
2.3.1 Modelagem por Não-linearidade do Tipo Zona-morta . . . . .	41
2.3.2 O Problema de Anti-Windup . . . . .	42
<b>2.4 Considerações Finais</b> . . . . .	44
<b>3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE - CASO DISCRETO</b> . . . . .	46
<b>3.1 Apresentação do problema</b> . . . . .	46
<b>3.2 Preliminares</b> . . . . .	47
3.2.1 Representação Algébrica Recursiva – RAR . . . . .	48
3.2.2 Teoria de Lyapunov para Estabilidade $\ell_2$ . . . . .	48
3.2.3 Polítopo dos Estados Admissíveis . . . . .	49
3.2.4 Condição de Setor Generalizada . . . . .	50
<b>3.3 Resultado Principal</b> . . . . .	50
3.3.1 Abordagem - Função de Lyapunov Quadrática . . . . .	51
3.3.2 Abordagem - Função de Lyapunov Quadrática por Partes . . . . .	53
3.3.3 Problemas de Otimização . . . . .	57
<b>3.4 Exemplo Numérico</b> . . . . .	59
3.4.1 Estabilidade Assintótica . . . . .	60
3.4.2 Estabilidade $\ell_2$ Entrada-Estado e Estimativa do Ganho $\ell_2$ . . . . .	62
<b>3.5 Considerações Finais</b> . . . . .	63

<b>4</b>	<b>SÍNTESE DE COMPENSADORES ANTI-WINDUP - ABORDAGEM ITERATIVA</b>	64
4.1	<b>Apresentação do problema</b>	65
4.2	<b>Preliminares</b>	65
4.2.1	Representação Algébrica-Diferencial – DAR	66
4.2.2	Politopo dos Estados Admissíveis	67
4.2.3	Condição de Setor Generalizada	67
4.3	<b>Resultado Principal</b>	67
4.4	<b>Cálculo do Ganho de Anti-windup</b>	69
4.4.1	Algoritmo e Problemas de Otimização	70
4.5	<b>Extensão dos Resultados</b>	71
4.5.1	Sistemas Não-lineares Incertos	72
4.5.2	Estabilidade $\mathcal{L}_2$	72
4.6	<b>Exemplo Numérico</b>	75
4.7	<b>Considerações Finais</b>	77
<b>5</b>	<b>SÍNTESE DE COMPENSADORES ANTI-WINDUP - ABORDAGEM CONVEXA</b>	79
5.1	<b>Apresentação do Problema</b>	79
5.2	<b>Preliminares</b>	80
5.2.1	Representação Algébrica Diferencial – DAR	80
5.2.2	Resultados da Teoria de Lyapunov	81
5.2.3	Condição de Setor Generalizada	81
5.3	<b>Resultado Principal</b>	82
5.4	<b>Problemas de Otimização</b>	86
5.5	<b>Extensão - Caso Discreto</b>	86
5.5.1	Apresentação do Problema	87
5.5.2	Resultado Teórico	87
5.6	<b>Exemplos Numéricos</b>	90
5.7	<b>Considerações Finais</b>	95
<b>6</b>	<b>SÍNTESE DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS</b>	98
6.1	<b>Apresentação do Problema</b>	98
6.2	<b>Preliminares</b>	99
6.2.1	Representação Diferencial Algébrica – DAR	99
6.2.2	Politopo dos Estados Admissíveis	100
6.2.3	Condição de Setor Generalizada	100
6.3	<b>Resultado Principal</b>	100
6.4	<b>Problema de Otimização</b>	103
6.5	<b>Extensão - Caso Discreto</b>	104
6.5.1	Apresentação do Problema	104
6.5.2	Resultado Teórico	105
6.6	<b>Exemplos Numéricos</b>	107
6.7	<b>Considerações Finais</b>	110
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	112
	<b>REFERÊNCIAS</b>	115

<b>APÊNDICE A</b>	<b>DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES . . . . .</b>	<b>122</b>
-------------------	--	------------

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Estabilidade no sentido de Lyapunov assintótica. . . . .	21
Figura 2:	Regiões $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_0$ . . . . .	26
Figura 3:	Sistema na forma de Lure . . . . .	30
Figura 4:	Condição de setor - Estabilidade local e global. . . . .	31
Figura 5:	Representação linear-fracionária. . . . .	35
Figura 6:	Compensação anti-windup. . . . .	43
Figura 7:	Exemplo de partição $\Gamma_h$ . . . . .	54
Figura 8:	Regiões $\Gamma_h$ . . . . .	61
Figura 9:	Estimativas da região de atração do sistema (118). . . . .	62
Figura 10:	Estimativa do ganho $\ell_2$ para diferentes valores de perturbação admissíveis. . . . .	63
Figura 11:	Estimativa da região $\mathcal{R}_1$ sem o ganho de anti-windup. . . . .	76
Figura 12:	Estimativa da região $\mathcal{R}_2$ com o ganho de anti-windup. . . . .	76
Figura 13:	Comparação entre regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ . . . . .	77
Figura 14:	Sinal de saída e sinal de controle - com anti-windup (linha tracejada) e sem anti-windup (linha contínua). . . . .	78
Figura 15:	Estimativa da região de atração sem anti-windup. . . . .	90
Figura 16:	Estimativa da região de atração com anti-windup. . . . .	91
Figura 17:	Comparação entre estimativas da região de atração. . . . .	91
Figura 18:	Trajetória da saída $y$ e do sinal de controle $v_c$ com anti-windup (contínua) e sem anti-windup (tracejada). . . . .	92
Figura 19:	Trajetória da saída $y$ e do sinal de controle $v_c$ com anti-windup (contínua) e sem anti-windup (tracejada). . . . .	94
Figura 20:	Trajetórias das saídas $y$ e do sinal de controle $v_c$ com anti-windup (contínua) e sem anti-windup (tracejada). . . . .	96
Figura 21:	Estimativa da região de atração $\mathcal{R}_1$ . . . . .	108
Figura 22:	Estimativa da região de atração $\mathcal{R}_3$ . . . . .	109
Figura 23:	Estimativa da região de atração $\mathcal{R}_5$ . . . . .	110

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Resultados do problema de otimização para $E_c = 0$ e $E_c \neq 0$ . . . . .	95
-----------	--	----

## LISTA DE ABREVIATURAS

BMI	Desigualdade Matricial Bilinear
DAR	Representação Algébrica Diferencial
ISS	Estabilidade Entrada-Estado
IOS	Estabilidade Entrada-Saída
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares
NDI	Inversão de Dinâmica Não-linear
RAR	Representação Algébrica Recursiva
SOS	Soma de formas quadráticas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\triangleq$	definido como
$\forall$	para todo
$\in$	pertencente ao
$\subset$	subconjunto de
$\cup$	união
$\cap$	interseção
$\rightarrow$	tende para
$\Rightarrow$	implica
$\sum$	somatório
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano de ordem $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$I$	matriz identidade com dimensões que podem ser inferidas a partir do contexto
$I_n$	matriz identidade de ordem $n$
$0$	escalar, bem como a matriz de zeros, com dimensões que podem ser inferidas a partir do contexto
$0_{n \times m}$	matriz de zeros, com dimensões $n \times m$
$H'$	matriz transposta da matriz real $H$
$H_{(i)}$	$i$ -ésima linha da matriz $H$
$\text{sym}\{H\}$	$H + H'$
$\text{traço}(H)$	traço da matriz $H$
$\text{diag}(\cdot)$	matriz diagonal cujos elementos são dados em $(\cdot)$
$H > 0$	significa que a matriz $H$ é simétrica e definida positiva.
$H < 0$	significa que a matriz $H$ é simétrica e definida negativa.

$H \geq 0$	significa que a matriz $H$ é simétrica e semi-definida positiva.
$H \leq 0$	significa que a matriz $H$ é simétrica e semi-definida negativa.
*	utilizado em matrizes simétricas para representar o respectivo elemento transposto da matriz
$H \succeq 0$	denota que todos os termos de $H$ são não-negativos.
$H \preceq 0$	denota que todos os termos de $H$ são não-positivos.
$x_+$	representa $x(k + 1)$
$sat(\cdot)$	função saturação
$sign(\cdot)$	função sinal
$(\mathcal{A} \times \mathcal{D})$	representa $(\mathcal{A} \times \mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^{n_a+n_d}$ é um conjunto obtido através de produto cartesiano dos conjuntos dados por $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n_a}$ e $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n_d}$
$\mathcal{V}(\phi)$	conjunto de todos os vértices de um politopo conhecido $\phi$
$\ \cdot\ $	norma vetorial Euclideana
□	fim de demonstração

# 1 INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade e a estabilização de sistemas não-lineares é um grande desafio na teoria de controle de sistemas. Diferentemente de abordagens aplicadas a sistemas lineares, o desenvolvimento de métodos genéricos é bastante complexo devido à diversidade de fenômenos não-lineares que podem aparecer na dinâmica destes sistemas.

Para sistemas não-lineares sem perturbação, o objetivo principal é garantir a estabilidade (ou estabilização) global ou local do ponto de equilíbrio de interesse. Novamente, diferentemente do caso linear, a estabilidade global para o sistema em malha fechada nem sempre pode ser garantida. No caso em que o ponto de equilíbrio não é globalmente assintoticamente estável, o principal problema é determinar a região de atração do sistema, definida como o conjunto de todos os pontos a partir dos quais as trajetórias do sistema convergem para o ponto de equilíbrio (origem) ao longo do tempo. Desta forma, a estabilidade é garantida apenas na vizinhança do ponto de equilíbrio (KHALIL, 1996). No entanto, encontrar a exata região de atração de forma analítica pode se tornar uma tarefa extremamente complexa ou até mesmo impossível (GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985). Alternativamente, pode-se determinar uma estimativa da região de atração do sistema tal que aproxime-se da melhor forma possível (i.e. de maneira menos conservadora) de tal região. Estas estimativas são geralmente obtidas a partir de domínios de Lyapunov, os quais são conjuntos invariantes (CHESI, 2011; BLANCHINI, 1999).

Por outro lado, ao lidar com sistemas sujeitos a perturbações de entrada, a caracterização da estabilidade entrada-estado (ISS) e da estabilidade entrada-saída (IOS) são de maior interesse (KHALIL, 1996). Neste caso, o foco principal está em resultados globais (ou semi-globais), no sentido de que um limitante das trajetórias de estado é assegurado para qualquer condição inicial e qualquer perturbação limitada (levando em consideração uma dada norma). Entretanto, quando o ponto de equilíbrio do sistema não é globalmente estável, o interesse está em determinar uma estimativa do conjunto de estados atingíveis, considerando que as condições iniciais e as perturbações pertencem a determinados conjuntos admissíveis. Outro problema de interesse consiste em determinar o limite máximo sobre as perturbações consideradas, para que as trajetórias permaneçam limitadas, considerando que as condições iniciais pertencem a um determinado conjunto. Este problema pode ser visto como uma análise da tolerância (ou robustez) do sistema à ação de distúrbios externos. Além disso, para condições iniciais nulas, também pode-se analisar a estabilidade, estimando-se um limitante superior mínimo vinculado ao ganho do sistema (geralmente em um sentido  $\mathcal{L}_p$ ), da entrada de perturbação para a saída regulada (KHALIL, 1996; LU; DOYLE, 1995). Isto corresponde a avaliar a capacidade do sistema de atenuar as perturbações externas.

Particularmente, a caracterização da estabilidade e a síntese de compensadores e de leis de controle para sistemas não-lineares polinomiais ou racionais com o objetivo de au-

mentar estimativas (maximizadas) da região de atração tem recebido especial atenção nos últimos anos. Neste sentido, pode-se citar os trabalhos utilizando somas de formas quadráticas ou *SOS* (do termo em inglês, *Sum of Squares*) (PARRILO, 2000; CHESI, 2011) para sistemas não-lineares polinomiais. Para o caso de sistemas não-lineares racionais, pode-se citar a abordagem introduzida em (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996) baseada em uma representação LFR (do inglês, *Linear Fractional Representation*), bem como a abordagem baseada na representação DAR (do inglês, *Differential Algebraic Representation*) (TROFINO, 2000; TROFINO; DE SOUZA, 2001; COUTINHO et al., 2004). A principal razão de abordar estas classes de sistemas está no fato de que abrangem uma larga gama de casos práticos. Além disso, ao considerar representações apropriadas, as condições de análise e síntese podem ser apresentadas na forma de Desigualdades Matriciais Lineares (ou LMIs, do termo em inglês *Linear Matrix Inequalities*). Estas podem ser eficientemente (numericamente) solucionadas através de problemas de otimização convexa e permitem considerar diretamente outros requisitos em performance e robustez (BOYD et al., 1994).

Além de não-linearidades presentes na dinâmica do sistema e de perturbações de entrada, também é importante considerar que grande parte de sistemas de controle possuem restrições físicas ou de segurança em seus atuadores. Tais restrições podem ser vistas como saturação de controle, sendo que estas restrições limitam os sinais de controle que podem ser efetivamente aplicados à planta. Este fato tem motivado um grande número de trabalhos concentrados na estabilidade e no desempenho de sistemas de controle em malha fechada (TARBOURIECH et al., 2011). No caso de sistemas lineares sujeitos a saturação, diversas técnicas têm sido propostas para determinar a estimativa da região de atração e para caracterizar a estabilidade entrada-estado. Entretanto, o número de trabalhos que lidam diretamente com sistemas não-lineares e saturação de controle é significativamente inferior.

Considerando o problema de saturação nos atuadores, pode-se ainda utilizar técnicas de *anti-windup*, sendo que o objetivo está na introdução de modificações a um controlador pré-estabelecido a fim de minimizar os efeitos causados pela saturação. Apesar de existirem diferentes estratégias e abordagens para projeto, a maioria dos métodos propostos também consideram modelos lineares e, mesmo neste caso, o projeto *anti-windup* pode ser um problema de solução complexa (TARBOURIECH et al., 2011). Em geral, o objetivo da utilização desta estratégia está na melhoria do desempenho do sistema em malha fechada. Por outro lado, através da compensação de *anti-windup*, pode-se também aumentar a região de atração, como ilustrado em (CAO; LIN; WARD, 2002) e (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005) para sistemas lineares.

Observa-se então que o problema de análise de estabilidade e estabilização para sistemas não-lineares sujeitos a saturação é um desafio no cenário atual. Para lidar com estes fenômenos, esta tese propõe diferentes abordagens através da utilização de métodos numéricos (baseados em LMIs) para contribuir neste sentido. A classe de sistemas considerada abrange todos os sistemas não-lineares que podem ser modelados por equações diferenciais (ou de diferenças) racionais, sendo que a classe de sistemas racionais engloba a dos sistemas polinomiais. Em particular, verifica-se que grande número de sistemas não-lineares podem ser representadas por esta classe de sistemas (TROFINO, 2000; COUTINHO et al., 2004).

Esta tese tem como objetivo central o estudo da estabilidade e estabilização de sistemas de controle não-lineares do tipo racional com atuadores saturantes. Em relação à análise de estabilidade o foco está na estabilidade assintótica, na estabilidade entrada-

estado e na estimativa do ganho  $\mathcal{L}_2$  para uma classe de sistemas de controle não-lineares discretos sujeitos a saturação do atuador e perturbações. Já no caso de síntese de compensadores, a atenção é voltada para o desenvolvimento de metodologias para projeto de compensadores de *anti-windup*, bem como controladores de realimentação de estados. A abordagem proposta é baseada na teoria de Lyapunov e em uma representação algébrica diferencial (DAR) do sistema racional. Para lidar com a não-linearidade da saturação, são consideradas versões modificadas da condição de setor generalizada proposto em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005). Com base nas condições teóricas propostas, são formulados alguns problemas de otimização, a fim de:

- determinar estimativas maximizadas da região de atração do sistema em malha fechada;
- calcular um limite superior maximizado da norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação, para o qual a ISS é garantida (ou seja, as trajetórias do sistema são limitadas);
- calcular um limite superior minimizado do ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação à saída regulada;
- determinar concomitantemente um compensador *anti-windup* e uma função de Lyapunov a fim de encontrar uma estimativa da região de atração maximizada do sistema em malha fechada;
- simultaneamente, calcular o ganho de realimentação de estados e uma função de Lyapunov quadrática levando a uma estimativa maximizada da região de atração do sistema em malha fechada.

Este trabalho é organizado em 7 capítulos.

Inicialmente, no Capítulo 2 são apresentados conceitos básicos, bem como uma revisão bibliográfica relacionada com os temas do trabalho. Uma atenção especial é dada à estabilidade de sistemas não-lineares no sentido de Lyapunov. Além disso, são destacadas algumas abordagens baseadas em LMIs utilizadas para lidar com sistemas racionais e polinomiais. Outro ponto que é destacado é o de sistemas sujeitos a saturação no atuador. Neste contexto, é apresentada uma breve revisão das técnicas utilizadas na literatura para lidar com este problema, bem como o projeto de compensadores *anti-windup*.

O Capítulo 3 apresenta resultados desenvolvidos para a caracterização da estabilidade de sistemas racionais em tempo discreto sujeitos a perturbações. Os métodos são desenvolvidos considerando funções de Lyapunov quadráticas. Com o objetivo de reduzir o conservadorismo, consideram-se também funções de Lyapunov quadráticas por partes. Então, são propostas condições para analisar tanto a estabilidade local assintótica, quanto a estabilidade externa (no um sentido  $\ell_2$ ) do sistema em malha fechada. Estas abordagens são ilustradas através de simulações numéricas, demonstrando que as abordagens propostas são ferramentas sistemáticas úteis para a análise da estabilidade local.

Nos Capítulos 4 e 5 técnicas de *anti-windup* que permitem aumentar a região de atração do sistema em malha fechada são apresentadas. O Capítulo 4 concentra-se em métodos numéricos para o projeto de compensadores *anti-windup* estáticos para sistemas sujeitos à saturação do atuador. Neste caso, são desenvolvidas condições sob a forma de BMIs (desigualdades matriciais bilineares) para estabilização local do sistema em malha fechada. Tais condições são então incorporadas em um algoritmo iterativo, onde em cada passo é resolvido um problema de otimização convexo com restrições na forma de LMIs.

Além disso, tais resultados são estendidos para lidar com sistemas incertos e sistemas sujeitos a perturbações limitadas em energia ( $\mathcal{L}_2$ ). Com o intuito de evitar a utilização de técnicas iterativas, o Capítulo 5 apresenta uma nova técnica para sintetizar este tipo de compensador, sendo que as condições de estabilização local são desenvolvidas diretamente na forma de LMIs. Neste capítulo, uma extensão dos resultados é apresentada para tratar sistemas não-lineares em tempo discreto sujeitos a saturação do atuador. Em ambos os casos, exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a aplicação das abordagens e as melhorias efetivas no tamanho da região de atração do sistema em malha fechada.

O Capítulo 6 apresenta uma abordagem baseada em LMIs para calcular o ganho de realimentação de estados para sistemas não-lineares racionais sujeitos à saturação do atuador. Da mesma forma que os capítulos anteriores, este procedimento visa implicitamente a maximização da região de atração do sistema em malha fechada. Uma extensão dos resultados também é apresentada para sistemas em tempo discreto. Exemplos ilustram a aplicação da metodologia e as vantagens ao utilizá-la.

O presente trabalho é finalizado com um capítulo de conclusões e perspectivas.

## 2 CONCEITOS PRELIMINARES

O objetivo principal deste capítulo é apresentar alguns conceitos básicos relacionados à estabilidade de sistemas não-lineares. Primeiramente, discute-se o problema de estabilidade de sistemas não-lineares considerando a teoria de Lyapunov. Conceitos que caracterizam a estabilidade interna, bem como a estabilidade no sentido entrada-estado e a estimativa do ganho  $\mathcal{L}_2$  supondo sinais de entrada com energia limitada são apresentados. Além disso, destacam-se de forma resumida os principais métodos utilizados na literatura para tratar sistemas não-lineares que consideram a abordagem por LMIs. Para finalizar, alguns resultados da literatura para lidar com sistemas sujeitos à saturação são colocados. Caso necessário, o leitor poderá obter maiores detalhes e informações nas referências citadas no decorrer do texto.

### 2.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Sistemas lineares invariantes no tempo podem ser estáveis ou instáveis, independentemente das condições iniciais ou das entradas do sistema. Diferentemente, para sistemas não-lineares a análise de estabilidade possui algumas particularidades, podendo depender das condições iniciais ou forçadas. Por exemplo, um sistema não-linear pode apresentar vários pontos de equilíbrio isolados ou mesmo uma trajetória de equilíbrio (ciclo limite). Desta forma, a estabilidade de um sistema não-linear é caracterizada em relação aos seus pontos de equilíbrio. Normalmente, utiliza-se o conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov para avaliar a estabilidade de um sistema não-linear, através da análise do comportamento de uma função escalar dos estados do sistema. Se esta função escalar, conhecida como função de Lyapunov, for positiva e decrescente ao longo das trajetórias do sistema, pode-se concluir que o ponto de equilíbrio (no qual se deseja caracterizar a estabilidade) do sistema é estável ou assintoticamente estável. Um ponto de equilíbrio é estável se todas as soluções iniciadas na vizinhança deste ponto permanecerem próximas do mesmo. Caso contrário este ponto é dito instável. Quando estes pontos tendem ao ponto de equilíbrio quando o tempo tende ao infinito, diz-se que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. A verificação da estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser realizada através dos métodos indireto ou direto de Lyapunov (KHALIL, 1996).

Pelo método direto de Lyapunov (também chamado de segundo método de Lyapunov), verifica-se a estabilidade sem solucionar o conjunto de equações diferenciais que descrevem o sistema. Entretanto, sua limitação está em determinar uma função de Lyapunov tal que a estabilidade do ponto de equilíbrio possa ser garantida. Caso a função seja encontrada, a estabilidade está verificada, porém em caso contrário, nada se pode afirmar a respeito da estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema. É importante ressaltar que o método direto de Lyapunov pode ser aplicado a sistemas forçados e não forçados, lineares

e não-lineares, estacionários ou variantes no tempo, determinísticos ou estocásticos (VI-DYASAGAR, 1993).

Em contrapartida, o método indireto de Lyapunov verifica a estabilidade do sistema determinando se a aproximação linear do sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio é estável. Por este método, a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema é caracterizada localmente, isto é, em uma região (em geral, de difícil caracterização) na vizinhança do ponto de equilíbrio. Caso a aproximação linear do sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio seja marginalmente estável nada se pode afirmar sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema não-linear.

### 2.1.1 Estabilidade Interna

A caracterização da estabilidade de sistemas não-lineares é um problema fundamental na teoria de controle de sistemas. Para sistemas sem a presença de perturbações ou sinais exógenos, o interesse principal está em garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Como o foco deste trabalho é desenvolver condições para sistemas que não são globalmente estáveis, o objetivo é analisar a estabilidade interna local onde o principal problema é determinar uma estimativa não conservadora da região de atração do sistema. Em geral, estas estimativas são obtidas através de domínios de Lyapunov, como por exemplo nas referências (KHALIL, 1996; BARREIRO; ARACIL; PAGANO, 2006; BLANCHINI, 1999; CHESI et al., 2005).

A seguir são apresentadas algumas definições importantes para conceituar estabilidade interna com base no seguinte sistema não-linear em tempo contínuo:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ .

**Definição 1** (Ponto de equilíbrio) *Para o sistema (1),  $x_e$  é definido como um ponto de equilíbrio se  $f(x_e) \equiv 0, \forall t \geq 0$ .*

Em geral, supõe-se que o ponto de equilíbrio do sistema seja a origem. Porém caso isto não aconteça, pode-se transladar o ponto de equilíbrio  $x_e$  à origem fazendo com que o 0 seja o ponto de equilíbrio do sistema transladado (KHALIL, 1996; SASTRY, 1999).

**Definição 2** (Estabilidade) *O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é dito um ponto de equilíbrio estável se  $\forall t_0 \geq 0$  e  $\epsilon > 0$ , exista um  $\delta(t_0, \epsilon)$  tal que*

$$\|x_0\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

onde  $x(t)$  é a solução do sistema iniciando em  $x_0$ , no tempo  $t = t_0$ .

Definindo agora

$$\mathcal{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_e\| \leq r, r > 0\}, \quad (2)$$

considere regiões  $\mathcal{B}(\delta)$  e  $\mathcal{B}(\epsilon)$  similarmente ao apresentado em (2). A definição de estabilidade, apresentada na Definição 2, requer que as trajetórias iniciadas dentro da região representada por  $\mathcal{B}(\delta)$  de raio  $\delta$  não saiam da região  $\mathcal{B}(\epsilon)$  de raio  $\epsilon$ , centrada no ponto de equilíbrio  $x_e$ . Desta forma, pode-se dizer que o sistema possui um ponto de equilíbrio estável. Além disto, quando as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio, tem-se a estabilidade assintótica para este mesmo ponto. Esta definição de estabilidade é apresentada a seguir e ilustrada através da Figura 1.

**Definição 3** (Estabilidade assintótica) *O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é dito ponto de equilíbrio assintoticamente estável se*

- $x_e = 0$  é um ponto de equilíbrio estável,
- $x_e = 0$  é atrativo, isto é, existe um  $\delta(t_0)$  tal que

$$\|x_0\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

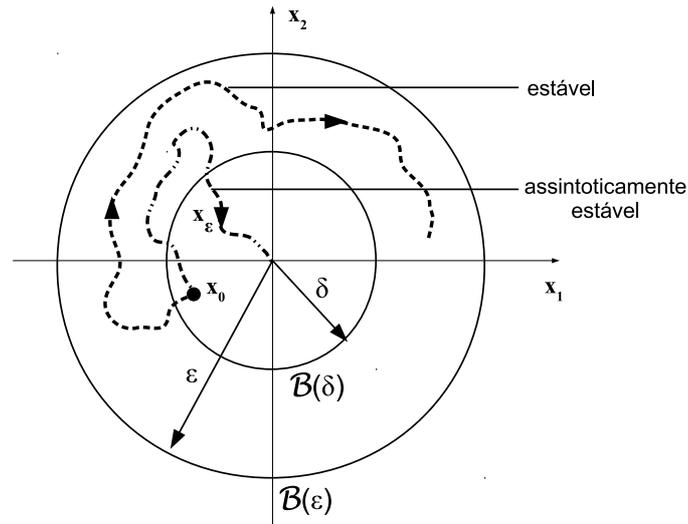


Figura 1: Estabilidade no sentido de Lyapunov assintótica.

Note que as definições anteriores referem-se a estabilidade local, ou seja, nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. No entanto, caso seja possível garantir a convergência das trajetórias, tal que  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , diz-se que o ponto de equilíbrio é globalmente estável. Conceitos referentes à estabilidade global são mostrados a seguir.

**Definição 4** (Estabilidade global assintótica) *O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é dito ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável se é estável e  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

Um conceito mais forte do que a estabilidade assintótica, no sentido de assegurar um decaimento exponencial para a trajetória dos estados, é o conceito de estabilidade exponencial.

**Definição 5** (Estabilidade exponencial (KHALIL, 1996)) *O ponto de equilíbrio  $x = 0$  é dito ponto de equilíbrio exponencialmente estável se existir um  $\lambda$  e uma estimativa da taxa de convergência  $\alpha > 0$  tal que:*

$$\|x(t)\| \leq \lambda e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|, \quad \forall \|x_0\| \leq \epsilon \text{ e } t \geq t_0.$$

A seguir, apresentam-se vários resultados relacionando os conceitos de estabilidade acima definidos com a caracterização da estabilidade de um ponto de equilíbrio pelo método direto de Lyapunov (KHALIL, 1996).

Primeiramente, considere que  $V(x)$  é uma função de Lyapunov de forma que a derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias de (1), denotada por  $\dot{V}(x)$  e dada por:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \quad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (4)$$

**Teorema 1** (Estabilidade por Lyapunov) *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio para o sistema (1) e  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  um domínio contendo a origem. Sendo agora  $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}_+$  uma função definida positiva no domínio  $\mathcal{D}$  satisfazendo*

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ em } \mathcal{D} - \{0\} \quad (5)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D} \quad (6)$$

então,  $x = 0$  é estável. Por outro lado, se

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ em } \mathcal{D} - \{0\}, \quad (7)$$

então  $x = 0$  é assintoticamente estável.

Observe que para sistemas onde a estabilidade global não pode ser verificada, pode-se definir um conjunto de estados iniciais para os quais a convergência ao ponto de equilíbrio é garantida. Este procedimento utiliza o conceito local e tal conjunto pode ser visto como uma estimativa da região de atração. Com este interesse, pode-se apresentar uma definição de região de atração (também chamada de domínio de atração ou base) (KHALIL, 1996; GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985; CHESI, 2011; BLANCHINI, 1999).

**Definição 6** (Região de Atração) *Considere que  $\phi_s(x, x_0)$  é uma solução (trajetória) para o sistema (1), com uma determinada condição inicial  $x_0$  para  $t_0 = 0$ . Então, a região de atração  $\mathcal{R}_a$  é definida como o conjunto de todos os pontos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $\phi_s(x, x_0)$  é definida para todo  $t \geq 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_s(x, x_0) = 0$ .*

Encontrar a região de atração exata de forma analítica pode se tornar uma tarefa extremamente complexa ou até mesmo impossível. No entanto, funções de Lyapunov podem ser utilizadas a fim de se obter uma estimativa que esteja contida na região de atração. Desta forma, a ideia é utilizar funções de Lyapunov  $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}_+$  para estimar a região de atração  $\mathcal{R}_a$ . Sendo  $V$  uma função de Lyapunov, então é possível considerar um conjunto, denotado por

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq c\}. \quad (8)$$

Neste caso, se  $\mathcal{R} \in \mathcal{D}$  e  $\dot{V}(x) < 0$  em  $\mathcal{D} - \{0\}$ , então o conjunto  $\mathcal{R}$  é invariante e contrativo, i.e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_s(x, x_0) = 0$ . Assim,  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_a$  e  $\mathcal{R}$  pode ser vista como uma estimativa da região de atração (KHALIL, 1996; CHESI, 2011; TARBOURIECH et al., 2011).

A partir das considerações e definições apresentadas, segue o seguinte resultado básico a partir da teoria de Lyapunov (KHALIL, 1996).

**Lema 1** *Considere um sistema não-linear (1) e um conjunto  $\mathcal{B}_x$ , com  $f : \mathcal{B}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  sendo uma função localmente Lipschitz tal que  $f(0) = 0$ . Supondo que existam escalares positivos  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  e uma função continuamente diferenciável  $V : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:*

$$\epsilon_1 x'x \leq V(x) \leq \epsilon_2 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (9)$$

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon_3 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (10)$$

$$\mathcal{R} \triangleq \{x : V(x) \leq \delta\} \subset \mathcal{B}_x, \quad (11)$$

*então, a origem do sistema é localmente exponencialmente estável e  $V(x)$  é uma função de Lyapunov em  $\mathcal{B}_x$ . Além disso, o conjunto  $\mathcal{R}$  é uma estimativa da região de atração. Em outras palavras, para todo  $x(0) \in \mathcal{R}$ , a trajetória de  $x(t)$  pertence a  $\mathcal{R}$  e converge para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .*

Com base na definição (8), a estimativa da região de atração  $\mathcal{R}$  está diretamente relacionada com a função de Lyapunov  $V(x)$ . Sendo assim, note que ao considerar funções de Lyapunov mais complexas, pode-se encontrar estimativas da região de atração menos conservadoras. Um exemplo da redução do conservadorismo associada a função de Lyapunov pode ser visto em (COUTINHO et al., 2004) que considera diferentes classes de função de Lyapunov.

Por outro lado, vale destacar que no caso em que a trajetória  $\phi_s(x, x_0)$  converge para a origem (ponto de equilíbrio de interesse) em  $t \rightarrow \infty$  para todo  $x_0$ , a estabilidade do sistema é vista sob contexto global e diz-se que a origem é globalmente assintoticamente estável. Então, através da teoria de Lyapunov, a estabilidade global pode ser garantida através do seguinte Teorema:

**Teorema 2** (Estabilidade Global por Lyapunov) *Sendo  $x = 0$  um ponto de equilíbrio e sendo  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  uma função positiva continuamente diferenciável tal que:*

- $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ ,
- $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$ ,
- $\dot{V} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall x \neq 0$

*então,  $x = 0$  é globalmente assintoticamente estável.*

### 2.1.2 Estabilidade de Sistemas Sujeitos a Perturbações Externas

Para sistemas sujeitos a perturbações, a caracterização da estabilidade no sentido entrada-estado (conhecida por ISS, proveniente do termo em inglês *Input-to-State Stability*) e estabilidade entrada-saída (IOS do termo em inglês *Input-to-Output Stability*) são de maior interesse. A noção de ISS e IOS foi introduzida inicialmente em (SONTAG, 1989) e resultados teóricos baseados na teoria de Lyapunov foram propostos para caracterizar a estabilidade de sistemas com entradas e saídas limitadas. A motivação destes resultados está no fato de que para sistemas sujeitos a perturbações, não é esperado que as trajetórias do sistema convirjam para a origem quando o tempo tender ao infinito (KHALIL, 1996). O objetivo está em garantir que as trajetórias dos estados sejam limitadas para uma dada perturbação também limitada. Outros trabalhos que abordam estes problemas podem ser vistos em (SONTAG, 1998, 2001, 2008).

Tais conceitos têm sido aplicados a sistemas não-lineares, tanto para análise da estabilidade quanto para projeto de controladores estabilizantes, e principalmente para sistemas em tempo contínuo. Alguns resultados foram estendidos para sistemas discretos (vide, por exemplo, (LAILA; ASTOLFI, 2005; HUANG et al., 2005; JIANG; WANG, 2001)). Entretanto, nota-se que a maioria destes trabalhos se concentram em conceitos de estabilidade global ou semi-global, no sentido que as trajetórias dos estados são limitadas para qualquer condição inicial e qualquer perturbação limitada segundo uma norma específica.

Quando o sistema não é globalmente estável, a ISS ou a IOS depende da magnitude de uma considerada norma dos sinais dos estados ou da saída, ou seja, a limitação da norma pode ser garantida para determinados conjuntos específicos de sinais. Assim, a caracterização destes conjuntos dos sinais de perturbações admissíveis são de maior importância, ou seja, deseja-se caracterizar um conjunto de sinais de perturbação para os quais as trajetórias resultantes serão garantidamente limitadas. Neste caso, o interesse está também em determinar se o conjunto de estados atingíveis está dentro da região de atração do sistema para um dado conjunto de condições iniciais e perturbações (sinais de entrada).

Em particular, pode-se concentrar na estimativa da maior energia admissível para as perturbações tal que as trajetórias dos estados permaneçam limitadas, considerando ou não um conjunto de condições iniciais admissíveis. Para condições iniciais nulas, pode-se analisar propriedades referentes a atenuação de perturbações do sistema determinando uma estimativa (um limite superior minimizado) do ganho do sistema (no sentido  $\mathcal{L}_p$ ), da entrada de perturbação para uma saída regulada (COUTINHO et al., 2008; LU; DOYLE, 1995).

A seguir, apresentam-se resultados básicos referentes a estabilidade entrada-estado e a estimativa do ganho considerando sinais de perturbação com energia limitada, i.e com norma  $\mathcal{L}_2$  finita.

### 2.1.2.1 Estabilidade Entrada-Estado

Com o objetivo de caracterizar a estabilidade entrada-estado de sistemas não-lineares sujeitos a perturbações, considere o seguinte caso particular de sistemas não-lineares:

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)w. \quad (12)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estados;  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é o sinal de perturbação;  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  são funções não-lineares em  $x$  satisfazendo as condições de existência e unicidade de solução.

Como a estabilidade de sistemas sujeitos a perturbações é usualmente caracterizada no sentido  $\mathcal{L}_p$ , considere a seguinte definição.

**Definição 7** O espaço  $\mathcal{L}_p^{n_a}$  para  $1 \leq p < \infty$  é definido como o conjunto de todas a funções contínuas por partes  $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_a}$ , tal que:

$$\|a\|_p = \left( \int_0^\infty \|a(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Neste trabalho, o interesse está em perturbações (sinais exógenos) do tipo  $\mathcal{L}_2$ . Note que sinais  $\mathcal{L}_2$  podem ser interpretados como sinais limitados em energia e, portanto, possuem grande relevância prática. Neste caso, considera-se sinais dados por

$$\|w\|_2 = \int_0^\infty w(t)'w(t)dt < \infty.$$

de forma que  $w \in \mathcal{W} \subset \mathcal{L}_2^{n_w}$ , sendo que  $\mathcal{W}$  um determinado conjunto. Uma maneira de abordar este problema é limitar a perturbação através de um conjunto definido da seguinte forma:

$$\mathcal{W} \triangleq \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \beta\} \quad (13)$$

sendo que  $\beta \in \mathbb{R}$  é um parâmetro positivo definindo o tamanho do conjunto de perturbações admissíveis  $\mathcal{W}$ .

Considerando agora uma função

$$\mathcal{J}_s \triangleq \dot{V}(x) - w'w$$

com  $V(x)$  sendo uma função definida positiva  $\forall x \in \mathcal{B}_x$ . Então, segue que:

$$\int_0^T \mathcal{J}_s dt = \int_0^T (\dot{V}(x) - w'w) dt = V(T) - V(0) - \int_0^T w'w dt. \quad (14)$$

Definindo agora os seguintes conjuntos associados a  $V(x)$ :

$$\mathcal{R}_0 \triangleq \{x \in \mathcal{R}^n : V(x) \leq \alpha\} \quad (15)$$

e

$$\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathcal{R}^n : V(x) \leq \delta\} \subset \mathcal{B}_x \quad (16)$$

com  $\delta = \alpha + \beta$ . Então, a partir de (14) se  $\dot{V}(x) - w'w < 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{B}_x$ , pode-se concluir que:

- se  $w(t) = 0$ , então  $\dot{V}(x) < 0$ , o que garante  $x(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ ,  $\forall x(0) \in \mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ .
- se  $w(t) \neq 0$ , com  $w$  satisfazendo (13), se  $x(0) \in \mathcal{R}_0$ , tem-se  $V(T) < V(0) + \|w\|_2^2 \leq \delta$ , o que implica que as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}$ .

Percebe-se que  $\dot{V}(x) - w'w \leq 0$  assegura que  $\mathcal{R}$  é uma região de estados atingíveis, considerando que  $x(0) \in \mathcal{R}_0$  e que  $w$  satisfaça (13). Além disso, no caso em que  $w = 0$ , se  $\dot{V}(x) - w'w < 0$  e  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ , segue que  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{R}$ , o que significa que  $\mathcal{R}$  está contido na região de atração do sistema em malha fechada ( $\mathcal{R}_a$ ) e pode ser visto como uma estimativa desta região.

Para ilustrar esta relação, observe a Figura 2. Inicialmente, suponha que as trajetórias do sistema estejam limitadas com  $x(0) \in \mathcal{R}_0$  ( $t_1$ ) e assume-se que o sistema é sujeito a uma perturbação  $w(t)$  ( $t > t_1$ ), que satisfaça (13). Neste caso, as trajetórias estão limitadas a uma estimativa da região de atração  $\mathcal{R}$  onde há garantia de estabilidade ( $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_a$ ). Considerando que a perturbação esvanece em  $t_2$ , garante-se que as trajetórias do sistema convergem assintoticamente para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.1.2.2 Estimativa do Ganho $\mathcal{L}_p$

Como apresentado anteriormente, para condições iniciais nulas, pode-se analisar propriedades referentes à atenuação da perturbação do sistema determinando uma estimativa (um limite superior minimizado) do ganho do sistema (no sentido  $\mathcal{L}_p$ ), da entrada de perturbação para uma saída regulada (COUTINHO et al., 2008; LU; DOYLE, 1995).

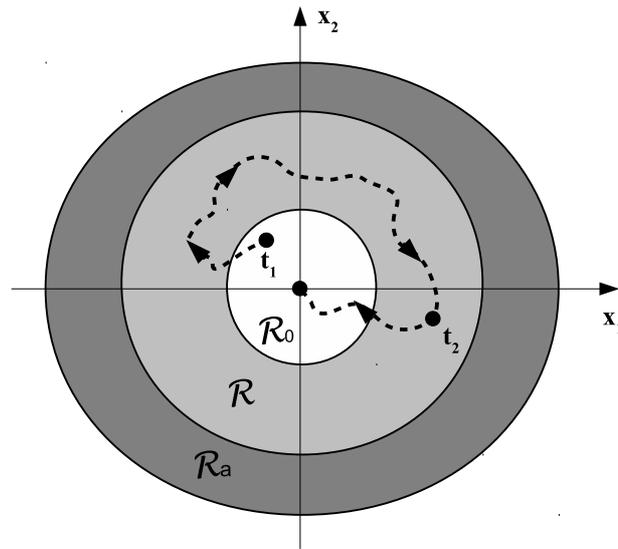


Figura 2: Regiões  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_0$ .

Considere então o seguinte sistema não-linear sujeito a perturbação:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x) + f_2(x)w \\ y &= h_1(x) + h_2(x)w,\end{aligned}\tag{17}$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estados;  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é o sinal de perturbação;  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é o sinal de saída;  $f_1(x), f_2(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h_1(x), h_2(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  são funções não-lineares em  $x$  satisfazendo as condições de existência e unicidade de solução.

A definição para estabilidade no sentido  $\mathcal{L}_p$  é apresentada a seguir (KHALIL, 1996; VIDYASAGAR, 1993):

**Definição 8** Considere  $x(0) = 0$  e um mapeamento  $\mathcal{F} : \mathcal{L}_p^{n_w} \rightarrow \mathcal{L}_p^{n_y}$ . Se existir uma função  $\chi$  definida em  $[0, \infty)$ , e uma constante não-negativa  $b_2$ , tal que:

- $\|y\|_{\mathcal{L}_p} = \|\mathcal{F}w\|_{\mathcal{L}_p} \leq \chi(\|w\|_{\mathcal{L}_p}) + b_2$ , para todo  $w \in \mathcal{L}^{n_w}$ , então o mapeamento  $\mathcal{F}$  é dito  $\mathcal{L}_p$ -estável;
- $\|y\|_{\mathcal{L}_p} = \|\mathcal{F}w\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma\|w\|_{\mathcal{L}_p} + b_2$ , para todo  $w \in \mathcal{L}^{n_w}$ , então,  $\mathcal{F}$  é dito  $\mathcal{L}_p$ -estável com ganho finito.

O termo  $b_2$  é chamado termo de bias, introduzido na definição para permitir que  $\mathcal{F}w$  não esvaneça quando  $w = 0$ .

Considerando uma abordagem utilizando a teoria de Lyapunov, a estabilidade no sentido  $\mathcal{L}_2$  pode ser garantida primeiramente definindo

$$\mathcal{J}_y = \dot{V}(x) - w'w + \gamma^{-2}y'y,$$

A partir destas definições segue que

$$\int_0^T (\dot{V}(x) - w'w + \gamma^{-2}y'y)dt = V(T) - V(0) - \int_0^T w'w dt + \gamma^{-2} \int_0^T y'y dt, \quad \forall T > 0.$$

Assim, se  $x(0) \in \mathcal{R}_0$  e  $\mathcal{J}_y < 0 \forall x \in \mathcal{B}_x$ , pode-se concluir que:

- se  $w(t) = 0$ , então  $\dot{V}(x) < -\gamma^{-2}y'y \leq 0$ , o que garante  $x(t) \rightarrow 0$  em  $t \rightarrow \infty$ .
- se  $w(t) \neq 0$ , com  $w$  satisfazendo (13):
  - se  $x(0) \in \mathcal{R}_0$ ,  $V(T) < V(0) + \|w\|_2^2 - \gamma^{-2}\|y\|_2^2 \leq \delta \forall T > 0$ , o que implica que as trajetórias do sistema não saiam do conjunto  $\mathcal{R}$ ;
  - para  $T \rightarrow \infty$ ,  $\|y\|_2^2 < \gamma^2\|w\|_2^2 + \gamma^2V(0)$ . Desta forma, se  $x(0) = 0$ , segue que  $\|y\|_2^2 < \gamma^2\|w\|_2^2$ , ou seja,  $\gamma$  é um limitante para o chamado ganho  $\mathcal{L}_2$  (ou  $\mathcal{H}_\infty$ ).

Percebe-se que  $\mathcal{J}_y < 0$  assegura que  $\mathcal{R}$  é uma região de estados atingíveis, considerando que  $x(0) \in \mathcal{R}_0$  e  $\|w\|_2^2 \leq \beta$ . Além disso, no caso em que  $w = 0$ , desde que  $\mathcal{J}_y < 0$  e  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ , segue que  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{R}$ , o que significa que  $\mathcal{R}$  está incluído em  $\mathcal{R}_a$  e pode ser visto como uma estimativa da região de atração do sistema de malha fechada.

### 2.1.3 Estabilidade de Sistemas em Tempo Discreto

Conceitualmente, os resultados apresentados para sistemas contínuos podem ser naturalmente estendidos para sistemas discretos. Entretanto, devido à descontinuidade da trajetória dos estados, as condições de estabilidade por Lyapunov são caracterizadas pela busca de uma função  $V(x)$  definida positiva tal que a sua variação

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

seja definida negativa ao longo das trajetórias do sistema.

A seguir são apresentados resultados para caracterizar a estabilidade interna e estabilidade entrada-estado de sistemas em tempo discreto sujeitos a perturbações externas.

#### 2.1.3.1 Estabilidade Interna

Considere o seguinte sistema não-linear em tempo discreto:

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad x(k_0) = x_0 \quad (18)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema e  $f(x(k))$  é uma função matricial de dimensão apropriada e  $k \in \mathbb{N}$ .

Da mesma forma que em sistemas em tempo contínuo, a teoria de Lyapunov pode ser aplicada para verificar conceitos locais relacionados a estabilidade interna dos pontos de equilíbrio do sistema (18). Neste sentido, considere o seguinte resultado.

**Lema 2** *Considerando um sistema não-linear (18) com  $f : \mathcal{B}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  sendo uma função localmente Lipschitz tal que  $f(0) = 0$ . Supondo que existam escalares positivos  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  e uma função continuamente diferenciável  $V : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições (VIDYASAGAR, 1993):*

$$\epsilon_1 x'x \leq V(x) \leq \epsilon_2 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (19)$$

$$\Delta V(x) \leq -\epsilon_3 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (20)$$

$$\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \delta\} \subset \mathcal{B}_x. \quad (21)$$

Então,  $V(x)$  é uma função de Lyapunov em  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{R}$  é uma estimativa da região de atração. Além disto, para todo  $x(0) \in \mathcal{R}$ , a trajetória de  $x(k)$  pertence a  $\mathcal{R}$  e converge para a origem quando  $k \rightarrow \infty$ .

### 2.1.3.2 Estabilidade Entrada-Estado

Da mesma forma ao apresentado para sistemas em tempo contínuo, pode-se analisar a estabilidade entrada-estado de sistemas não-lineares em tempo discreto sujeitos a perturbações. Considere então a seguinte classe de sistemas não-lineares discretos:

$$x(k+1) = f_1(x) + f_2(x)w. \quad (22)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estados;  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é o sinal de perturbação;  $f_1(x)$ ,  $f_2(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  são funções não-lineares em  $x$  satisfazendo as condições de existência e unicidade de solução.

Como a estabilidade para sistemas em tempo discreto sujeitos a perturbações é usualmente caracterizada no sentido  $\ell_p$ , tem-se a seguinte definição.

**Definição 9** O espaço  $\ell_p^{n_a}$  para  $1 \leq p < \infty$  é definido como o conjunto de todas as funções  $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_a}$ , tal que:

$$\|a\|_p = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|a(k)\|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Assumindo que a perturbação é limitada em energia, ou seja,  $w \in \mathcal{W} \subset \ell_2^{n_w}$  com

$$\mathcal{W} \triangleq \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \beta\}, \quad (23)$$

tem-se que  $\beta \in \mathbb{R}$  é um parâmetro positivo que define o tamanho do conjunto de perturbações admissíveis  $\mathcal{W}$ .

Definindo agora  $\mathcal{J}_s \triangleq \Delta V(x) - w'w$  com  $V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}_x$ , segue que

$$\sum_{k=0}^T \mathcal{J}_s = \sum_{k=0}^T (\Delta V(x) - w'w) = V(T) - V(0) - \sum_{k=0}^T w'w. \quad (24)$$

Note que os conjuntos (15) e (16) também podem ser associados a  $V(x)$ . Então, a partir de (24) se

$$\Delta V(x) - w'w < 0, \forall x \in \mathcal{B}_x,$$

conclui-se que:

- se  $w(k) = 0$ , então  $\Delta V(x) < 0$ , o que garante  $x(k) \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty, \forall x(0) \in \mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ .
- se  $w(k) \neq 0$ , com  $w \in \mathcal{W}$ , se  $x(0) \in \mathcal{R}_0$ , tem-se

$$V(T) < V(0) + \|w\|_2^2 \leq \delta,$$

o que implica que as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}$ .

Análogo ao caso contínuo, tem-se que  $\Delta V(x) - w'w \leq 0$  assegura que  $\mathcal{R}$  é uma região de estados atingíveis considerando que  $x(0) \in \mathcal{R}_0$  e que  $w \in \mathcal{W}$  com  $\mathcal{W}$  definido em (23). Para  $w = 0$ , se  $\Delta V(x) - w'w \leq 0$  e  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ , segue que  $\Delta V(x) < 0, \forall x \in \mathcal{R}$ , o que significa que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_a$ .

### 2.1.3.3 Estimativa do ganho $\ell_2$

Conforme visto para sistemas em tempo contínuo tem-se interesse em verificar a atenuação de uma perturbação para uma saída regulada. Para sistemas não-lineares em tempo discreto sujeitos a perturbações pode-se realizar uma estimativa do ganho  $\ell_2$  similar, conforme apresentado a seguir.

Considere então o seguinte sistema não-linear em tempo discreto sujeito a perturbação:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f_1(x) + f_2(x)w \\ y(k) &= h_1(x) + h_2(x)w, \end{aligned} \quad (25)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estados;  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é o sinal de perturbação;  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é o sinal de saída;  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  e  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  são funções não-lineares em  $x$  satisfazendo as condições de existência e unicidade de solução.

A partir destas considerações, uma forma de verificar a estabilidade no sentido  $\ell_2$  de sistemas discretos é apresentada a seguir.

Definindo  $\mathcal{J}_y = \Delta V(x) - w'w + \gamma^{-2}y'y$ ,  $\forall T > 0$ , segue que

$$\sum_{k=0}^T (\Delta V(x) - w'w + \gamma^{-2}y'y) = V(T) - V(0) - \sum_{k=0}^T w'w + \gamma^{-2} \sum_{k=0}^T y'y$$

Assim, se  $x(0) \in \mathcal{R}_0$  e  $\mathcal{J}_y < 0 \forall x \in \mathcal{B}_x$ , conclui-se que:

- se  $w(k) = 0$ , então  $\Delta V(x) < -\gamma^{-2}y'y \leq 0$ , o que garante  $x(k) \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty$ .
- se  $w(k) \neq 0$ , com  $w$  satisfazendo (13):
  - se  $x(0) \in \mathcal{R}_0$ ,  $V(T) < V(0) + \|w\|_2^2 - \gamma^{-2}\|y\|_2^2 \leq \delta$ , o que implica que as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}$ ;
  - para  $T \rightarrow \infty$ ,  $\|y\|_2^2 < \gamma^2\|w\|_2^2 + \gamma^2V(0)$ . Desta forma, se  $x(0) = 0$ , segue que  $\|y\|_2^2 < \gamma^2\|w\|_2^2$ , ou seja,  $\gamma$  é um limitante para o chamado ganho  $\ell_2$ .

Tem-se novamente que  $\mathcal{J}_y < 0$  assegura que  $\mathcal{R}$  é uma região de estados atingíveis considerando que  $x(0) \in \mathcal{R}_0$  e  $\|w\|_2^2 \leq \beta$ . Além disso, no caso em que  $w = 0$ , se  $\mathcal{J}_y < 0$  e  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ , segue que  $\Delta V(x) < 0, \forall x \in \mathcal{R}$ , o que significa que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_a$ .

## 2.2 Métodos LMI para Tratamento de Sistemas Não-Lineares

Pode-se considerar que o estudo de LMIs para sistemas dinâmicos iniciou-se em 1890 com o surgimento da teoria de Lyapunov (BOYD et al., 1994). Desde então, esta abordagem é utilizada em vários problemas teóricos específicos em engenharia de controle como, por exemplo, análise de estabilidade, síntese de controladores, e em problemas de filtragem e observação de estados. A disseminação da técnica LMI se deu a partir dos anos de 1990 com o surgimento dos primeiros algoritmos de solução (como exemplo, pode-se citar o *LMI Control Toolbox* (GAHINET et al., 1995)). Com o passar dos anos, novas técnicas e métodos foram desenvolvidos a fim de facilitar sua resolução e aplicação. Atualmente existem diversos pacotes computacionais capazes de solucionar LMIs. Neste sentido, destaca-se o surgimento de *solvers* mais eficientes e rápidos para a resolução de LMIs tais como: *SeDuMi* (STURM, 1999) e *SDPT3* (TOH; TODD; TUTUNCU, 1999). Além disso, *softwares* específicos (*Parsers*) para tratar LMIs têm sido cada vez mais utilizados (por exemplo, Yalmip (LOFBERG, 2004)). A principal vantagem da utilização de

(*Parsers*) está na capacidade de traduzir o problema LMI para a formulação genérica, e então utilizar programas de resolução de LMIs.

Vale destacar que este tipo de formulação tem, entre outras, a vantagem de permitir um fácil tratamento de sistemas com incertezas e, como será visto na sequência desta tese, de permitir a utilização de problemas de otimização convexa para a solução de diversos problemas de controle. Neste contexto, técnicas oriundas da literatura de controle robusto vêm sendo aplicadas a sistemas não-lineares com o intuito de derivar condições de estabilidade e estabilização na forma de LMIs. O foco principal destas abordagens é garantir a estabilidade e/ou desempenho de certas classes de sistemas não-lineares. Neste contexto, algumas destas classes têm recebido maior atenção. Dentre estas, pode-se citar sistemas polinomiais, sistemas racionais e sistemas do tipo Lure. Um interesse especial também é dado às não-linearidades ditas “duras”, como é o caso das saturações de controle.

Nesta seção são apresentados, de forma resumida, algumas abordagens relevantes para tratar as não-linearidades acima mencionadas a partir de formulações LMI.

### 2.2.1 Sistemas do Tipo Lure

Diversos sistemas não-lineares podem ser representados através de um sistema linear realimentado por um elemento não-linear. Tal representação é ilustrada na Figura 3.

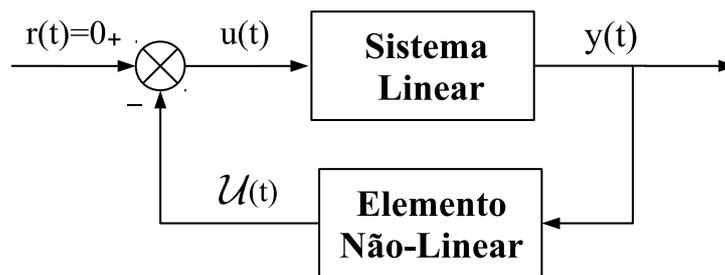


Figura 3: Sistema na forma de Lure

O estudo da estabilidade para sistemas que podem ser representados conforme a figura acima é chamado de Problema de Lure (ou Problema de Estabilidade Absoluta) (KHALIL, 1996). Basicamente constitui-se na análise de estabilidade de um tipo de sistema que pode ser representado como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -\mathcal{U}(y) \end{aligned} \quad (26)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ , o par  $(A, B)$  é controlável e o par  $(C, A)$  é observável. Além disso, considera-se que  $\mathcal{U}(y) : [0; \infty) \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  é uma não-linearidade sem memória e localmente Lipschitz em  $y$ , obedecendo condições chamadas condições de setor, conforme será visto a seguir.

#### 2.2.1.1 Condição de Setor

A seguir caracteriza-se uma não-linearidade satisfazendo uma condição de setor (KHALIL, 1996):

**Definição 10** Considere matrizes diagonais  $K_1$  e  $K_2$ , tal que  $K = K_1 - K_2$  seja definida positiva e que  $\mathcal{U}(0) = 0$ . Então para todo  $y \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $\mathcal{U}(y)$  pertence ao setor  $(K_1, K_2)$  caso a condição abaixo for verificada:

$$[\mathcal{U}(y) - K_1 y]' [\mathcal{U}(y) - K_2 y] \leq 0, \forall t \geq 0. \quad (27)$$

A condição apresentada em (27) pode ser convenientemente utilizada para analisar a estabilidade do sistema não-linear (26) quando a não-linearidade pertence a um setor  $(K_1, K_2)$ . Este é um problema clássico que continua a receber atenção (ver por exemplo (CASTELAN; TARBOURIECH; QUEINNEC, 2008; ARCAK; LARSEN; KOKOTOVIC, 2003)).

Uma condição de setor pode ser caracterizada tanto de forma local quanto global. Sendo  $a \in \mathbb{R}^{n_y}$  e  $b \in \mathbb{R}^{n_y}$ , de forma que  $a_{(i)} < 0 < b_{(i)}, \forall i = 1, \dots, n_y$ , define-se a região  $\mathcal{S}$  da seguinte forma:

$$\mathcal{S} \triangleq \{y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}; a_{(i)} < y_{(i)}(t) < b_{(i)}\} \quad (28)$$

Neste caso,  $\mathcal{S}$  é uma região convexa que contém a origem e, caso a condição de setor for verificada em  $\mathcal{S}$ , esta região é definida como a região de validade da condição de setor.

Assim, a partir destas considerações, para uma não-linearidade  $\mathcal{U}(t, y)$ , conclui-se que:

- Se  $\mathcal{S}$  está estritamente contida em  $\mathbb{R}^{n_y}$ , então a condição de setor (27) é satisfeita localmente;
- Se  $\mathcal{S}$  corresponder a todo o espaço  $\mathbb{R}^{n_y}$ , então a condição (27) é satisfeita globalmente.

A Figura 4 ilustra não-linearidades pertencentes a setor. Primeiramente, considere a Figura 4(a) onde uma não linearidade  $\mathcal{U}(y)$  pertence a um setor  $(K_1, K_2)$  localmente, sendo que o domínio de validade da condição de setor é dado por (28). Por outro lado, a Figura 4(b) representa uma não linearidade  $\mathcal{U}(y)$  que pertence globalmente a um setor  $(K_1, K_2)$ .

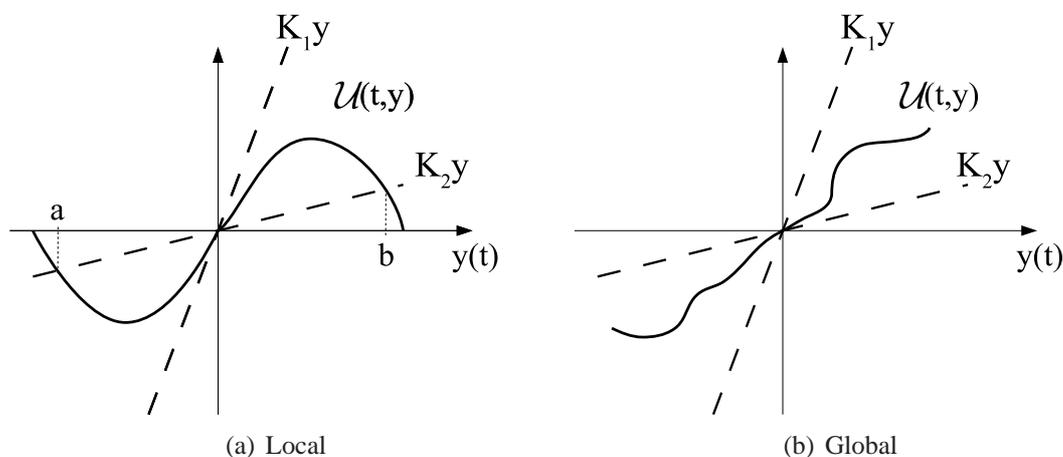


Figura 4: Condição de setor - Estabilidade local e global.

**Definição 11** *Seja um setor  $(K_1, K_2)$ :*

- *o sistema (26) é dito absolutamente estável se a origem é globalmente assintoticamente estável, para qualquer não-linearidade  $\mathcal{U}(t, y)$  pertencente ao setor  $(K_1, K_2)$  globalmente.*
- *o sistema (26) é dito absolutamente estável com domínio finito se a origem é assintoticamente estável para qualquer não-linearidade pertencente ao setor  $(K_1, K_2)$  localmente.*

Como apresentado anteriormente, uma abordagem que utiliza esta forma de modelagem é proposta em (CASTELAN; TARBOURIECH; QUEINNEC, 2005). Para facilitar a compreensão, considere o sistema não-linear apresentado em (26). Então, assumindo que a não-linearidade  $\mathcal{U}(y) \in (0, H)$ , a seguinte condição de setor é verificada  $\forall y \in \mathcal{S}$ :

$$\mathcal{U}(y)\Delta[\mathcal{U}(y) - Hy] \leq 0, \quad (29)$$

sendo que  $\mathcal{U}(y) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é uma função vetorial não-linear,  $\Delta \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  é uma matriz diagonal e  $H = H' \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  é uma dada matriz positiva definida.

Utilizando a abordagem clássica de setor é possível verificar a estabilidade do sistema (26) através de técnicas baseadas em LMIs a partir da teoria de Lyapunov. Para ilustrar este procedimento, considere uma função de Lyapunov quadrática  $V(x) = x'Px$ , de forma que se a relação

$$\begin{bmatrix} WA + A'W & WC'H \\ \star & -2Y \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

com  $W = P^{-1}$  (sendo  $P = P' > 0$ ),  $Y = \Delta^{-1}$ , for verificada, então segue que  $V(x) > 0$  e  $\dot{V}(x) < 0$ , para todo  $x \in \mathcal{S}$ . Note que pré- e pós-multiplicando (30) por  $\text{diag}(P, \Delta)$  e em seguida por  $[x' \ \mathcal{U}(y)']$  e  $\begin{bmatrix} x \\ \mathcal{U}(y) \end{bmatrix}$  tem-se que

$$\dot{V}(x) - 2\mathcal{U}(y)\Delta[\mathcal{U}(y) - Hy] < 0.$$

Assim, supondo que  $x \in \mathcal{S}$ , segue que (29) é verificada considerando  $y = Cx$  e conclui-se que  $\dot{V} < 0$ .

Observe que neste caso, uma região  $\mathcal{R}$  está associada à função de Lyapunov  $V(x)$ . Então, deve-se garantir que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ . Desta forma, a não-linearidade satisfaz a condição de setor para qualquer  $x \in \mathcal{R}$ . Neste caso, qualquer que seja a região elipsoidal  $\mathcal{R}$ , esta é uma estimativa da região de atração, ou seja  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}_a$ .

Para exemplificar a utilização deste tipo de modelagem é apresentado o seguinte exemplo.

**Exemplo 1** *Considere o sistema não-linear sem a presença da saturação apresentado em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010):*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= (1 + x_1^2)x_1 + (2 + 8x_2^2)x_2, \end{aligned} \quad (31)$$

Com efeito, (31) pode ser reescrito como (26) sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = I_2 \quad \text{e} \quad \mathcal{U}(y) = \mathcal{U}(Cx) = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

### 2.2.2 Sistemas Polinomiais e Racionais

Primeiramente, considere a definição abaixo (CHESI, 2011):

**Definição 12** Uma função  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio de grau não maior que  $d \in \mathbb{N}$  se

$$p(x) = \sum_{q \in \mathbb{N}, |q| \leq d} a_q x^q \quad (33)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $a_q \in \mathbb{R}$ . Em (33),  $a_q x^q$  é um monômio de grau  $q$  e  $a_q$  é seu coeficiente.

A partir da definição acima, pode-se definir uma função racional dos estados da seguinte maneira:

$$f_r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (34)$$

onde  $p(x)$  e  $q(x)$  são funções polinomiais de grau  $d_p$  e  $d_q$ , respectivamente. Observe que, se o denominador  $q(x)$  for uma constante não nula, a função  $f_r(x)$  será uma função polinomial. Assim, os polinômios estão incluídos na classe de funções racionais (34). Vale salientar ainda que, nos pontos onde  $q(x) = 0$  a função  $f_r(x)$  não está definida.

Considerando primeiramente sistemas polinomiais, diversos trabalhos de análise de estabilidade podem ser encontrados atualmente na literatura. No entanto, pode-se dizer que o início do tratamento de sistemas polinomiais deu-se no final da década de 60 com o trabalho (BOSE; LI, 1968), proposto para tratar o caso de sistemas polinomiais utilizando somas de formas quadráticas. Tal abordagem não obteve grande repercussão devido ao fato de não existirem *solvers* capazes de resolver os problemas de ordem superior, ou seja, com um número maior de estados.

Com os avanços tecnológicos ocorridos no final dos anos 90, surgiram novos pacotes computacionais capazes de solucionar problemas de forma mais eficiente. Desde então, vários trabalhos foram propostos para tratar sistemas polinomiais. Inicialmente, estes foram desenvolvidos utilizando somas de formas quadráticas ou *SOS* (do termo em inglês, *sum of squares*). Os primeiros trabalhos a abordarem este tema através da utilização de LMIs podem ser vistos em (PARRILO, 2000), bem como, em (CHESI et al., 2000). A partir destes, outras formulações foram propostas considerando a abordagem *SOS*, como por exemplo em (CHESI; TESI; VICINO, 2002) e em (CHESI, 2004) onde métodos foram generalizados através de funções de Lyapunov polinomiais. Em particular, ainda pode-se citar o trabalho recentemente proposto em (VALMORBIDA; TARBOURIECH; GARCIA, 2010a) onde um método “quasi”-LMI é proposto para estimar a região de atração de sistemas não-lineares polinomiais em tempo contínuo.

Por outro lado, a classe de sistemas racionais engloba a dos sistemas polinomiais. Para esta classe, técnicas oriundas da literatura de controle robusto foram aplicadas a sistemas não-lineares com o intuito de derivar condições de estabilidade e estabilização na forma de LMIs. Pode-se dizer que tais metodologias foram introduzidas em (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996) que apresenta a representação LFR (do inglês, *Linear Fractional Representation*). Similarmente, outras abordagens foram apresentadas para lidar com sistemas racionais. Uma atenção especial é dada à representação algébrica diferencial (DAR), que foi introduzida em (TROFINO, 2000; TROFINO; DE SOUZA, 2001). Ambas representações permitem modelar classes de funções vetoriais racionais e alguns exemplos de suas aplicações podem ser vistas em (TUAN; APKARIAN; NGUYEN, 2003; COUTINHO; DE SOUZA; BARBOSA, 2007; COUTINHO et al., 2004).

A seguir são descritas, de forma resumida, as abordagens acima mencionadas.

### 2.2.2.1 Abordagem por Representação Linear-Fracionária - LFR

Uma abordagem que permite tratar sistemas não-lineares na forma racional é denominada Representação Linear-Fracionária ou LFR (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996). Tais métodos consideram uma classe particular de sistemas não-lineares dados por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= g(x, u),\end{aligned}\tag{35}$$

sendo que  $f$  e  $g$  são funções matriciais racionais nos estados  $x \in \mathbb{R}^n$  e lineares na entrada  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ .

Note que é possível reescrever o sistema (35) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x) + B_u(x)u \\ y &= C_y(x) + D_{yu}(x)u,\end{aligned}\tag{36}$$

onde  $A(x)$ ,  $B_u(x)$ ,  $C_y(x)$  e  $D_{yu}(x)$  são funções racionais (multivariáveis) em  $x$ ;  $A(0) = 0$  e  $C(0) = 0$ ; e  $B_u$  e  $D_{yu}$  não possuem singularidades na origem.

A partir da representação (36), os resultados baseados nesta abordagem consideram o Lema apresentado a seguir.

**Lema 3** *Para qualquer função matricial racional  $M(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$ , sem singularidades na origem, existem inteiros não-negativos  $r_1, \dots, r_n$ , e matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  de dimensões apropriadas, tal que  $M(x)$  tenha a seguinte LFR (para todo  $x$  onde  $M$  é definida) (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996):*

$$M(x) = A + B\Delta(x)[I - D\Delta(x)]^{-1}C,$$

com

$$\Delta(x) = \text{diag}(x_1, I_{r_1}, \dots, x_n I_{r_n}).$$

Observe que nesta abordagem, deve-se considerar que  $\det([I - D_{qp}\Delta(x)]^{-1}) \neq 0$ .

A partir do Lema 3, tem-se que as matrizes em (36) podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} A(x) & B_u(x) \\ C_y(x) & D_{yu}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_u \\ C_y & D_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ D_{yp} \end{bmatrix} \Delta(x)[I - D_{qp}\Delta(x)]^{-1} \begin{bmatrix} C_q & D_{qu} \end{bmatrix}.\tag{37}$$

A partir de (37), o sistema (36) é reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_p p \\ q &= C_q x + D_{qu} u + D_{qp} p \\ y &= C_y x + D_{yu} u + D_{yp} p \\ p &= \Delta(x)q, \quad \Delta(x) = \text{diag}\{x_1, I_{r_1}, \dots, x_n I_{r_n}\}.\end{aligned}\tag{38}$$

É importante ressaltar que a LFR (38) pode ser vista como um sistema linear invariante no tempo, conectado a uma entrada fictícia  $p$  e uma saída fictícia  $q$  (veja Figura 5), sendo que a matriz de realimentação  $\Delta$  é linear no vetor dos estados  $x$  e sua estrutura reflete os graus de não-linearidade do sistema.

Para ilustrar esta representação é apresentado o seguinte exemplo.

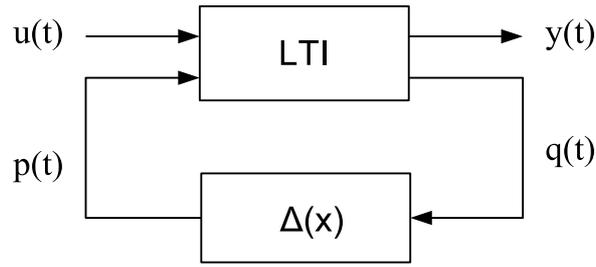


Figura 5: Representação linear-fractionária.

**Exemplo 2** Considere o sistema não-linear apresentado em (31).

$$\dot{x} = A(x)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 + x_1^2 & 2 + 8x_2^2 \end{bmatrix} x.$$

A partir do Lema 3 conclui-se que, definindo

$$\Delta(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix},$$

o sistema não-linear (31) pode ser representado utilizando a representação linear-fractionária (38) com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \end{bmatrix}, C_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{qp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_u = 0, D_{qu} = 0, C_y = 0, D_{yu} = 0 \text{ e } D_{yp} = 0.$$

Considere agora uma região  $\mathcal{B}_\sigma$  definida como:

$$\mathcal{B}_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_i| \leq \sigma^{-1}, i = 1, \dots, n_x\}. \quad (39)$$

com  $\sigma > 0$ . Se  $x \in \mathcal{B}_\sigma$  então  $\|\Delta(x)\| < \sigma^{-1}$ . Esta abordagem é aplicada similarmente para sistemas com incertezas limitadas em norma. Entretanto, tais conceitos podem ser utilizados para tratar sistemas não-lineares de forma que uma região  $\mathcal{R}$  está associada à função de Lyapunov  $V(x)$ . Então, deve-se considerar a inclusão  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\sigma$ .

Particularmente, esta abordagem utiliza exclusivamente funções de Lyapunov quadráticas. Então, considerando  $u = 0$  e uma função de Lyapunov na forma  $V(x) = x'Px$ , é possível verificar a estabilidade do sistema (38) conforme apresentado a seguir.

Para um dado  $\sigma > 0$ , o sistema (38) é quadraticamente estável, se existirem variáveis  $P$ ,  $S$  e  $G$  tais que as LMIs

$$P > 0, S > 0, G = -G',$$

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'_q S C_q & P B_q + C'_q G + C'_q S D_{qp} \\ * & D'_{qp} S D_{qp} G - \sigma^2 S + D'_{qp} G - G D_{qp} \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

são verificadas.

De fato, se (40) é satisfeita, então  $\forall \|\Delta(x)\| < \sigma^{-1}$  pode-se mostrar que (BOYD et al., 1994):

$$[A + B_p \Delta(x)(I - D_{qp} \Delta(x))^{-1} C_q]' P + P [A + B_p \Delta(x)(I - D_{qp} \Delta(x))^{-1} C_q] < 0.$$

Neste caso, ao considerar um elipsoide  $\mathcal{R}$  sendo um conjunto invariante associado à função de Lyapunov, tal que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\sigma$ , com  $\mathcal{B}_\sigma$  definido em (39), então as trajetórias  $x(t)$  iniciadas dentro do elipsoide convergem para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

Com base nesta estratégia, algumas abordagens foram desenvolvidas para tratar o sistema (35). Tais métodos são baseados em LMIs, permitindo a utilização de problemas de otimização convexa para verificar a estabilidade e para sintetizar controladores. Outra vantagem ao utilizar esta representação está no fato de que existem algoritmos para computar LFRs (GHAOUI; NICULESCU, 2000) e é possível obter uma formulação através da utilização de um *toolbox* específico para *MatLab*. Para mais detalhes a respeito da abordagem apresentada nesta seção, pode-se consultar a referência (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996). Além disto, extensões destes métodos para o caso de filtragem de sistemas não-lineares incertos podem ser vistos em (TUAN; APKARIAN; NGUYEN, 2003).

### 2.2.2.2 Representação Algébrica Diferencial

Outra possível formulação para tratar sistemas com dependência racional nos estados é a representação algébrica diferencial (denominada de representação DAR, para sistemas em tempo contínuo ou representação algébrica recursiva (RAR) para o caso discreto) (TROFINO, 2000; COUTINHO et al., 2004; DUROLA; DANÈS; COUTINHO, 2008).

Para introduzir esta representação, considere o seguinte sistema não-linear:

$$\dot{x} = f(x), \quad (41)$$

onde  $f(x)$  é uma função racional em  $x \in \mathbb{R}^n$ .

A representação DAR deste sistema é descrita pelas seguintes equações algébrico-diferenciais (COUTINHO et al., 2004):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(x)x + A_2(x)z \\ 0 &= \Omega_1(x)x + \Omega_2(x)z \end{aligned} \quad (42)$$

onde  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é um vetor auxiliar contendo termos racionais e polinomiais (com ordem igual ou maior que dois) de  $f(x)$ ; e  $A_1(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_2(x) \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$ ,  $\Omega_1(x) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$  e  $\Omega_2(x) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  são matrizes afins em  $x$ .

Para que a representação acima seja bem definida, a variável  $z$  deve poder ser eliminada da expressão (42), retornando ao sistema original através da seguinte relação:

$$z = -\Omega_2(x)^{-1} \Omega_1(x)x.$$

Portanto, a matriz  $\Omega_2(x)' \Omega_2(x)$  deve ser inversível para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Desta forma, assume-se em relação à representação (42) que a matriz  $\Omega_2(x)$  tem posto completo por colunas para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Para ilustrar a DAR de sistemas não-lineares é apresentado um exemplo.

**Exemplo 3** *Relembrando o sistema não-linear apresentado em (31) tem-se:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= (1 + x_1^2)x_1 + (2 + 8x_2^2)x_2. \end{aligned}$$

Definindo  $z = [x_1^2 \ x_2^2]'$ , obtém-se uma DAR, como definida em (42), para o sistema acima com

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & 8x_2 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega_2(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz  $\Omega_2(x)$  acima tem posto completo por colunas para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Desta forma a representação é bem definida.

A fim de exemplificar a utilização desta representação aplicada a um sistema racional é apresentado o seguinte exemplo.

**Exemplo 4** Considere o sistema não-linear abaixo:

$$\dot{x} = 4x - \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x^2}{1+x^2}. \quad (43)$$

Definindo  $z = \left[ \frac{x}{1+x^2} \quad \frac{x^2}{1+x^2} \right]'$ , obtém-se uma DAR, como definida em (42), para o sistema (43) com

$$A_1(x) = [4], \quad A_2(x) = [-1 \quad -2],$$

$$\Omega_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega_2(x) = \begin{bmatrix} -1 & -x \\ x & -1 \end{bmatrix}.$$

Similarmente ao exemplo precedente, a representação é bem definida pois é possível verificar que a matriz  $\Omega_2(x)$  tem posto completo por colunas para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Observação 1** A representação de um sistema racional segundo a DAR (42) não é única. Sendo assim, para um dado sistema racional, diferentes DARs podem ser determinadas. Entretanto, através da relação entre LFR e DAR apresentada em (COUTINHO et al., 2008), é possível obter uma DAR com a utilização de algoritmos utilizados para computar LFRs.

Note que, com a utilização da representação DAR, é possível verificar a estabilidade do sistema (41), representado na forma (42), a partir da Teoria de Lyapunov apresentada na Seção 2.1.1. Com este objetivo, considere o seguinte vetor auxiliar

$$\zeta = [x' \ \dot{x}' \ z']', \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta}, \quad (44)$$

sendo que  $n_\zeta = 2n_x + n_z$ .

Sejam agora as seguintes matrizes dependentes dos estados:

$$\mathcal{N}_0(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) & -I_n & A_2(x) \\ \Omega_1(x) & 0 & \Omega_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{n_x} & -x_{(n_x-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_1(x) \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times n_x} \quad (45)$$

Na definição acima, a matriz  $\mathcal{N}_1(x)$  é um *aniquilador* linear em  $x$ , ou seja,  $\mathcal{N}_1(x)x = 0$ . A noção de *aniquiladores* lineares foi aplicada em (TROFINO, 2000) para obter-se condições na forma de LMIs menos conservadoras para a análise de estabilidade de sistemas não-lineares. Além disso, a partir de (42), segue que  $\mathcal{N}_0(x)\zeta = 0$ .

Definindo agora

$$\mathcal{N}_2(x) = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \mathcal{N}_1(x) & 0 \end{array} \right] \\ \mathcal{N}_0(x) \end{bmatrix}, \quad (46)$$

tem-se  $\mathcal{N}_2(x)\zeta = 0$ .

Relembrando dos conceitos apresentados na Seção 2.1, a partir de uma função candidata de Lyapunov  $V(x)$ , a ideia é verificar se

$$\dot{V} < 0, \quad \forall \zeta : \mathcal{N}_2(x)\zeta = 0, \quad (47)$$

ao longo das trajetórias do sistema (41). Uma maneira usual de lidar com este problema é aplicar o Lema de Finsler (veja Apêndice A (OLIVEIRA; SKELTON, 2001)), sendo que a condição (47) é satisfeita se a seguinte relação for verificada:

$$\zeta' (\Lambda_1 + L\mathcal{N}_2(x) + \mathcal{N}_2(x)'L') \zeta < 0 \quad (48)$$

Neste caso,  $L$  é um multiplicador livre a ser determinado, e

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se a relação acima é satisfeita para todo  $x$  pertencente a uma determinada região  $\mathcal{B}_x$ , então  $\dot{V} < 0$  em  $\mathcal{B}_x$ . Usualmente os testes de estabilidade para sistemas não-lineares representados a partir de uma DAR utilizam uma estimativa da região de atração  $\mathcal{R}$  relacionada com  $V(x)$ , tal que as condições são verificadas para  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ , onde  $\mathcal{B}_x$  é uma região convexa definida *a priori*. Uma forma de resolver este problema é considerar  $\mathcal{B}_x$  sendo uma região politópica. Desta forma, por convexidade, caso a condição (48) seja verificada para todos os vértices da região  $\mathcal{B}_x$ , então é verificada para todo  $x \in \mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ .

Esta abordagem tem sido cada vez mais aceita na literatura, principalmente pela facilidade de lidar com sistemas incertos e determinadas classes de sistemas não-lineares. Neste contexto, pode-se citar as metodologias de (COUTINHO et al., 2004) onde condições de estabilidade, bem como o projeto de controladores foram propostas para lidar com sistemas não-lineares racionais. Por outro lado, estas metodologias podem também ser utilizadas para projeto de filtros para sistemas incertos como visto em (COUTINHO et al., 2009) e (COUTINHO et al., 2003). Nota-se que a abordagem DAR também pode ser aplicada a sistemas sujeitos a perturbações, como visto em (COUTINHO et al., 2008). Além disto, para sistemas em tempo discreto pode-se citar (COUTINHO; FU; TROFINO, 2004) que apresenta métodos para análise de estabilidade e projeto de compensadores para sistemas não-lineares incertos.

Destaca-se ainda que a representação DAR pode modelar toda a classe de funções vetoriais racionais nos estados, da mesma forma que à representação LFR apresentada em (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996; TUAN; APKARIAN; NGUYEN, 2003). Essencialmente, as duas representações são equivalentes no sentido de representarem a mesma classe de sistemas além da existência de uma relação entre as duas representações (veja, (COUTINHO et al., 2008) para maiores detalhes). Entretanto, a representação DAR possui algumas vantagens, dentre elas a facilidade da extensão dos resultados principalmente para tratar funções de Lyapunov mais complexas.

### 2.2.2.3 Abordagem por Somas de Formas Quadráticas

Recentemente, diversas técnicas para análise de estabilidade e síntese de controladores têm sido propostas para sistemas polinomiais. Veja por exemplo, (CHESI; TESI; VICINO, 2002; CHESI et al., 2004; CHESI, 2004; VALMORBIDA; TARBOURIECH; GARCIA, 2010b). Neste sentido, a abordagem por somas de formas quadráticas ou *SOS* (do inglês, *sum of squares*) tem recebido atenção nos últimos anos por tratar sistemas polinomiais utilizando técnicas LMIs. Este método é apresentado de forma resumida a seguir e para maiores detalhes, além das citações no decorrer do texto, recomenda-se a referência (CHESI, 2011).

Primeiramente, considere um polinômio  $F(x)$  definido por (33). Obviamente  $F(x)$  é não-negativo, ou seja,  $F(x) \geq 0$ , se os graus deste polinômio (ou uma representação na forma homogênea) são pares. Desta forma, uma simples condição suficiente para que uma função  $F(x)$  seja não-negativa é dada pela existência de uma decomposição na seguinte forma (PARRILO, 2000):

$$F(x) = \sum_i^M f_i^2(x), \quad i = 1, \dots, M. \quad (49)$$

Se uma função  $F(x)$  pode ser escrita na forma (49), para algum conjunto de funções  $f_i$ , então  $F(x)$  é não-negativa para todo  $x$ . Com esta consideração, é apresentada a seguinte definição (PAPACHRISTODOULOU, 2005).

**Definição 13** *Um polinômio  $F(x)$  de grau  $2d$  é SOS se e somente se existir uma matriz semidefinida positiva  $Q$  e um vetor de monômios  $z$  contendo os monômios em  $x$  de grau igual ou menor que  $d$  tal que*

$$F(x) = z'Qz. \quad (50)$$

A ideia básica do método consiste em expressar o polinômio dado como uma forma quadrática em uma nova variável vetorial  $z$ . Esta nova variável contém um conjunto de monômios dados pelos diferentes produtos das variáveis  $x$  do polinômio original. Assim, se  $Q \geq 0$ , então  $F(x) \geq 0$ .

Note que o vetor  $z$  possui variáveis que não são independentes entre si. Logo esta representação pode não ser única. Além disso, pode-se ter  $Q \geq 0$  para algumas representações e não para outras. Por outro lado, se  $F(x)$  pode realmente ser reescrito como a soma dos quadrados de polinômios, então é possível utilizar uma expansão em monômios tal que  $F(x)$  possa ser representado por (50). Com o intuito de ilustrar este procedimento, é apresentado o seguinte exemplo.

**Exemplo 5** *Considere o seguinte polinômio (PARRILO, 2000)*

$$F(x) = 2x_1^4 + 2x_1^3x_2 - x_1^2x_2^2 + 5x_2^4.$$

Definindo  $z = [x_1^2 \ x_2^2 \ x_1x_2]'$  tem-se que:

$$F(x) = z'Qz = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Neste caso, não é possível verificar  $Q \geq 0$ , no entanto, definindo uma matriz  $L(\lambda)$  tal que  $z'(L(\lambda))z = 0$ , pode-se adicionar graus de liberdade ao problema. Então, é possível considerar que:

$$F(x) = z'(Q + L(\lambda))z = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}' \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Note que com esta representação é possível encontrar valores para a variável  $\lambda$  tal que  $S'S = (Q + L(\lambda)) \geq 0$ . Por exemplo, utilizando  $\lambda = 3$ , tem-se uma possível decomposição para  $F(x)$  na forma de soma dos quadrados como segue:

$$F(x) = z'L'Lz = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix},$$

logo

$$F(x) = \frac{1}{2} [(2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1x_2)^2 + (x_2^2 + 3x_1x_2)^2].$$

Utilizando a teoria de Lyapunov, apresentada na Seção 2.1.1, conceitos para garantir a análise de estabilidade são relacionados à existência de uma função candidata de Lyapunov  $V(x)$  definida positiva de modo que sua derivada  $\dot{V}(x)$  seja negativa ao longo das trajetórias do sistema. Utilizando esta abordagem é possível caracterizar a estabilidade de sistemas polinomiais com base na teoria de Lyapunov, sendo que a ideia básica consiste em garantir que:

- $V(x)$  é SOS;
- $-\dot{V}(x)$  é SOS.

Então  $V(x)$  é uma função de Lyapunov e pode-se verificar a estabilidade de sistemas polinomiais (PAPACHRISTODOULOU, 2005).

Observe que, neste caso, ao utilizar uma função de Lyapunov quadrática na forma  $V(x) = x'Px$  sendo que  $P = P'$  seja uma matriz a ser determinada, o problema deixa de ser LMI. Diferentemente de outras abordagens, técnicas baseadas em SOS necessitam que a função de Lyapunov seja definida previamente.

Esta abordagem pode ser utilizada na análise de estabilidade de uma classe de sistemas polinomiais, considerando a busca de estimativas da região de atração na forma  $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : V(x) < c\}$  (CHESI, 2011). Assim, pode-se considerar que a condição  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{R}$ , é satisfeita se existir um polinômio  $s(x)$  tal que

$$s(x) \text{ e } -\dot{V}(x) + (V(x) - c)s(x) \text{ são SOS.} \quad (53)$$

De fato, se  $V(x)$  é SOS, logo  $V(x) - c$  também é SOS. Então, é possível verificar a condição  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{R}$ , com  $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : V(x) < c\}$  utilizando *S-Procedure* (veja Apêndice A) de forma que se (53) é satisfeita, então  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{R}$ .

## 2.3 Sistemas Sujeitos a Saturação

Na prática, grande parte dos sistemas de controle possuem restrições físicas ou de segurança em seus atuadores, as quais limitam os sinais de controle que podem ser efetivamente aplicados a planta. Este fato tem motivado um grande número de trabalhos relacionados aos efeitos provenientes saturação tanto para estabilidade quanto para desempenho de sistemas de controle em malha fechada (HU; LIN, 2001; KAPILA; GRIGORIADIS, 2002; TARBOURIECH; GARCIA; GLATTFELDER, 2007; TARBOURIECH et al., 2011).

A função saturação pode ser definida como:

$$\text{sat}(u_{(i)}) = \begin{cases} u_{0(i)}, & \text{se } u_{(i)} > u_{0(i)} \\ u_{(i)}, & \text{se } -u_{0(i)} < u_{(i)} < u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, n_u, \\ -u_{0(i)}, & \text{se } u_{(i)} < -u_{0(i)}, \end{cases} \quad (54)$$

onde  $\pm u_{0(i)}$  denotam os valores limites simétricos do sinal  $u$  com  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ .

A grande maioria dos trabalhos que tratam de sistemas com saturação de atuadores considera sistemas com dinâmica linear, ou seja,

$$\dot{x} = Ax + B\text{sat}(u). \quad (55)$$

A fim de modelar o sistema (55), podem ser encontradas diversas abordagens na literatura, sendo as mais utilizadas: não-linearidade de setor (HINDI; BOYD, 1998; TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000; GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005), politópica (MOLCHANOV; PYATNITSKIY, 1989; GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 1997; HENRION; TARBOURIECH, 1999; HU; LIN; CHEN, 1999), regiões de saturação (GOMES DA SILVA Jr., 1997), incerteza paramétrica limitada em norma (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2000) e saturação homogênea (CASTELAN, 1992). Além disso, diversas técnicas são propostas para estimar a região de atração (veja, por exemplo, (HINDI; BOYD, 1998; GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 1999; HENRION; TARBOURIECH, 1999; HU; LIN; CHEN, 1999; ALAMO et al., 2006)) e para caracterizar a estabilidade  $\mathcal{L}_2$  (veja, dentre outros, (HINDI; BOYD, 1998; CASTELAN et al., 2006)). Uma visão geral sobre estas modelagens e abordagens para estimativa da região de atração podem ser encontradas em (TARBOURIECH et al., 2011).

Por outro lado, o número de trabalhos que abordam a estabilidade e estabilização de sistemas de controle com dinâmica não-linear e sujeitos a saturação é significativamente menor. Estes se referem principalmente a sistemas em tempo contínuo (veja, por exemplo, (VALMORBIDA; TARBOURIECH; GARCIA, 2010b; BARREIRO; ARACIL; PAGANO, 2006; CASTELAN; TARBOURIECH; QUEINNEC, 2005, 2008; GOMES DA SILVA Jr.; CORSO; CASTELAN, 2008; COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010)). Relacionado com a abordagem utilizada nesta tese, pode-se destacar o trabalho proposto em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010), que considera o problema de determinar uma estimativa da região de atração para sistemas racionais sujeitos a saturação. Para sistemas em tempo discreto, pode-se ainda citar as referências (CASTELAN; MORENO; PIERI, 2006; CASTELAN et al., 2010), que propõem métodos baseados em LMI para lidar com o problema de estabilização de uma classe de sistemas apresentando não-linearidades limitadas em setor.

### 2.3.1 Modelagem por Não-linearidade do Tipo Zona-morta

Conforme visto anteriormente, diversos modelos encontrados na literatura tiveram por objetivo modelar os efeitos da saturação de sistemas em malha fechada. Entretanto, atra-

vés de uma modelagem adequada, pode-se obter condições de estabilidade diretamente na forma de LMIs, evitando assim o uso de procedimentos iterativos. Nesta seção é apresentada uma modelagem por não-linearidade do tipo zona-morta, cuja abordagem é utilizada neste trabalho.

Primeiramente, considere o sistema não-linear abaixo:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (56)$$

Então, define-se a não-linearidade zona morta como:

$$\psi(u) \triangleq u - \text{sat}(u). \quad (57)$$

ou equivalentemente

$$\psi(u_{(i)}) = \begin{cases} u_{(i)} - u_{0(i)}, & \text{se } u_{(i)} > u_{0(i)}, \\ 0, & \text{se } -u_{0(i)} < u_{(i)} < u_{0(i)}, \\ u_{(i)} + u_{0(i)}, & \text{se } u_{(i)} < -u_{0(i)}, \end{cases}$$

com  $i = 1, \dots, n_u$ .

A fim de apresentar a condição que será utilizada neste trabalho, considere que a lei de controle é uma realimentação de estados  $u = Kx$  e considere ainda que uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  de forma que o seguinte conjunto possa ser definido:

$$\mathcal{S} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : |(K_{(i)} - G_{(i)})x| \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, n_u. \quad (58)$$

A partir da não-linearidade zona morta  $\psi(u)$  em (57) e do conjunto  $\mathcal{S}$  definido acima, o seguinte Lema pode ser enunciado (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005).

**Lema 4** *Se  $x \in \mathcal{S}$ , então a relação*

$$\psi(u)'T[\psi(u) - Gx] \leq 0 \quad (59)$$

*é verificada para qualquer matriz diagonal e definida positiva  $T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ .*

Considerando não-linearidades do tipo zona-morta, a relação apresentada no Lema 4 pode ser vista como uma condição de setor generalizada que engloba a condição clássica que é utilizada, como em (HINDI; BOYD, 1998) e (KIYAMA; IWASAKI, 2000). A condição de setor generalizada é conhecida por ser menos conservadora do que a clássica ao lidar com estabilidade de sistemas sujeitos a saturação no atuador (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005).

Mais informações a respeito da modelagem apresentada nesta seção, bem como, a prova formal do Lema 4 podem ser encontradas em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005) ou alternativamente em (TARBOURIECH; PRIEUR; J. M. GOMES DA SILVA Jr., 2006).

### 2.3.2 O Problema de Anti-Windup

O objetivo de utilizar técnicas de *anti-windup* é a introdução de modificações em um controlador pré-estabelecido a fim de minimizar os efeitos causados pela saturação. Apesar de existirem muitas técnicas e abordagens diferentes, a maioria dos métodos propostos

para síntese de *anti-windup* são aplicados a modelos lineares e, mesmo neste caso, o projeto *anti-windup* pode ser um problema de solução complexa (veja, por exemplo (TARBOURIECH et al., 2011; TARBOURIECH; TURNER, 2009; TEEL; KAPOOR, 1997; GALEANI et al., 2009; ZACCARIAN; TEEL, 2011; CAO; LIN; WARD, 2002; GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005)).

A ideia básica desta estratégia é apresentada na Figura 6. A compensação de *anti-windup* consiste em realimentar a diferença entre o sinal dado pelo controlador e o sinal saturado através de um ganho (*anti-windup* estático) ou de um sistema dinâmico.

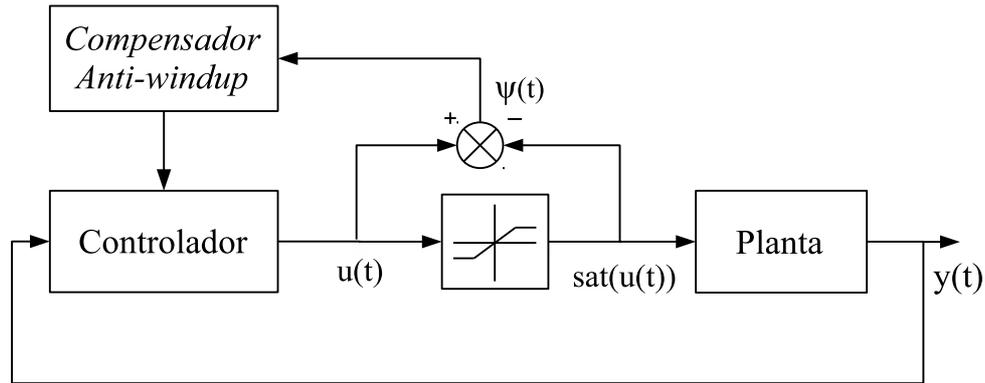


Figura 6: Compensação anti-windup.

A partir da Figura 6, por exemplo considere a planta linear dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_x x + B_x \text{sat}(u), \\ y &= C_x x, \end{aligned} \quad (60)$$

sendo que  $x$  denota o vetor de estados;  $y$  é a saída medida;  $u$  é a entrada de controle;  $\text{sat}(\cdot)$  é a função clássica de saturação.

Assume-se que um controlador estabilizante dinâmico de saída, dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_\eta \eta + B_\eta y, \\ u &= C_\eta \eta + D_\eta y, \end{aligned} \quad (61)$$

foi projetado para garantir algum desempenho desejado e a estabilidade do sistema em malha fechada (60)-(61) na ausência de saturação no controle, sendo:  $\eta$  o estado do controlador;  $y$  é a entrada do controlador;  $u$  é a saída do controlador.

Com o objetivo de minimizar os efeitos indesejáveis causados pela saturação, um ganho de *anti-windup* é adicionado ao controlador. Assim, considerando a dinâmica do controlador e a estratégia de *anti-windup*, o sistema em malha fechada é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_x x + B_x \text{sat}(u), \\ y &= C_x x, \\ \dot{\eta} &= A_\eta \eta + B_\eta y + E_c (\text{sat}(u) - u), \\ u &= C_\eta \eta + D_\eta y, \end{aligned} \quad (62)$$

sendo que  $E_c$  é uma matriz constante representando o ganho de *anti-windup*.

Note ainda que, a partir da definição da não-linearidade zona-morta (57), é possível reescrever o sistema (62) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_x x + B_x u - B_x \psi(u), \\ y &= C_x x, \\ \dot{\eta} &= A_\eta \eta + B_\eta y - E_c \psi(u), \\ u &= C_\eta \eta + D_\eta y. \end{aligned} \tag{63}$$

Sendo assim, com base nesta representação, é possível utilizar a condição de setor generalizada mesmo para síntese de compensadores *anti-windup* (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005; GRIMM et al., 2003).

Com base nas considerações apresentadas, destaca-se que comportamentos inadequados podem surgir ao aplicar o compensador *anti-windup* no sistema original, quando este é sintetizado considerando uma aproximação linear de um sistema não-linear. Além disso, como demonstrado em (CAO; LIN; WARD, 2002; GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005) para sistemas lineares, com a utilização de compensadores *anti-windup* pode-se aumentar a região de atração. Entretanto, a região de atração calculada para o sistema em malha fechada considerando uma aproximação linear pode ser significativamente modificada devido a dinâmicas não-lineares. Em geral, não pode-se garantir que uma região de estabilidade levando em conta uma aproximação linear será válida para o sistema não linear original.

Assim, ao projetar um compensador *anti-windup* é importante considerar tanto sistemas com dinâmica não-linear quanto a limitação do atuador. Neste contexto, alguns métodos têm sido propostos nos últimos anos. Por exemplo, podem ser citados: (PREMPAIN; TURNER; POSTLETHWAITE, 2009; WU; GRIGORIADIS; PACKARD, 2000) que consideram a síntese de *anti-windup* para sistemas com parâmetros variando linearmente; (MORABITO; TEEL; ZACCARIAN, 2004) que propõe métodos de *anti-windup* para sistemas Euler-Lagrange; e (KAHVECI; IOANNOU; MIRMIRANI, 2007) que considera projeto de controle adaptativo. Além disso, também pode-se citar trabalhos que lidam com uma arquitetura *anti-windup* para sistemas com inversão de dinâmica não-linear (*NDI*), como (HERRMANN et al., 2010; KENDI; DOYLE III, 1997; KAPOOR; DAOUTIDIS, 1999; DOYLE III, 1999; MENON et al., 2006). Recentemente, em (VALMORBIDA et al., 2010) é proposta uma abordagem para síntese de um compensador *anti-windup* dinâmico para a classe de sistemas quadráticos, com o objetivo de aumentar a estimativa da região de atração.

## 2.4 Considerações Finais

A estabilidade e a estabilização de sistemas utilizando métodos baseados em LMIs têm recebido cada vez mais atenção nos últimos anos pelo fato de permitir a solução de uma grande gama de problemas de controle a partir da solução de problemas de otimização convexa. Embora a maioria dos resultados sejam propostos para sistemas lineares, alguns trabalhos foram propostos para lidar com sistemas não-lineares, tanto para análise da estabilidade quanto para projeto de controladores estabilizantes, principalmente para sistemas em tempo contínuo. Além disso, o número de trabalhos que abordam a estabilidade e a síntese de *anti-windup* para sistemas de controle com dinâmica não-linear e sujeitos a saturação é significativamente menor. Entretanto, nota-se que ainda há espaço para melhorias dos métodos existentes a fim de evitar técnicas de relaxação ou mesmo

para reduzir o conservadorismo existente. Observa-se também que poucos resultados lidam diretamente ou foram estendidos para sistemas discretos.

Dentre as abordagens apresentadas neste capítulo para tratar sistemas não-lineares pode-se destacar alguns pontos importantes: uma comparação entre as abordagens condição clássica de setor (CASTELAN; TARBOURIECH; QUEINNEC, 2005) e com a representação algébrica diferencial é apresentada em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010) para estimar a região de atração. Observa-se que condições para tratar sistemas baseadas na condição clássica de setor são, em geral, mais conservadoras se comparadas com resultados baseados em DAR. No entanto, esta última pode ser aplicada apenas a sistemas racionais. Ao utilizar-se a condição clássica de setor é possível modelar qualquer classe de sistemas desde que pertençam a um setor previamente definido. Além disso, há uma relação entre a representação DAR e a LFR proposta em (TUAN; APKARIAN; NGUYEN, 2003). Por outro lado, nota-se que atualmente a abordagem *SOS* não é usualmente aplicada a sistemas racionais, que será foco deste trabalho.

Neste sentido, técnicas para calcular uma estimativa da região de atração para sistemas racionais sujeitos a saturação foi proposta em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010). Tais técnicas consideram somente a análise de estabilidade e o caso de sistemas monovariáveis. Além disso, sabe-se que através de projeto compensadores de *anti-windup* ou projeto de leis de controle, levando em conta as não-linearidades da planta e a saturação de controle, pode-se aumentar a região de atração. Assim, estes resultados foram os motivadores iniciais para esta tese.

### 3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE - CASO DISCRETO

Este capítulo apresenta o desenvolvimento de métodos para analisar a estabilidade de sistemas não-lineares racionais em tempo discreto sujeitos a saturação do atuador e perturbações limitadas. É importante ressaltar que parte dos resultados apresentados neste capítulo foram inspirados nos resultados propostos em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010), o qual focou no problema de análise de estabilidade para sistemas não lineares em tempo contínuo sujeitos a saturação. No entanto, a metodologia proposta neste artigo não pode ser diretamente aplicada à análise de sistemas em tempo discreto. Para contornar esse problema, o capítulo apresenta uma solução considerando funções de Lyapunov quadráticas por partes.

Na abordagem proposta aplica-se uma representação algébrica recursiva (RAR) do sistema racional que permite derivar as condições de estabilidade no sentido de Lyapunov com base em LMIs que são numericamente resolvidas nos vértices de um polítopo de estados admissíveis. Para lidar com a saturação, considera-se uma versão modificada da condição generalizada do setor proposta em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005). Os resultados são desenvolvidos considerando dois tipos de funções de Lyapunov: quadrática e quadrática por partes. A partir destes elementos, propõe-se condições para analisar tanto a estabilidade local assintótica, quanto a estabilidade externa (no sentido  $\ell_2$ ) do sistema em malha fechada. Estes resultados são aplicados à problemas de otimização com seguintes objetivos:

- (i) determinar uma estimativa maximizada da região de atração;
- (ii) calcular um limite superior maximizado para as perturbações admissíveis (ou seja, estimar o conjunto máximo de distúrbios para os quais as trajetórias do sistema são limitadas) e
- (iii) obter uma estimativa minimizada de um limite superior para o ganho  $\ell_2$  do sistema para um dado conjunto admissível de perturbações.

A seguir são apresentados algumas definições e conceitos referentes ao problema a ser estudado. Logo após, são apresentados resultados teóricos obtidos para caracterizar a estabilidade de sistemas não-lineares em tempo discreto sujeitos a saturação. Por fim, são propostos problemas de otimização.

#### 3.1 Apresentação do problema

Considere a seguinte classe de sistema de controle não-lineares em tempo discreto

$$\begin{aligned} x_+ &= f(x, w) + g(x) \text{sat}(u) \\ y &= h(x, w) \\ u &= K(x)x \end{aligned} \tag{64}$$

sendo que  $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados ( $x_+ = x(k+1)$ );  $w \in \mathcal{W} \subset \ell_2^{n_w}$  é o sinal de perturbação;  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída regulada;  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle;  $\text{sat}(\cdot)$  é a função clássica de saturação unitária, i.e.,  $\text{sat}(u) := \text{sign}(u) \min\{|u|, 1\}$ ;  $K(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$   $K(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é uma dada função vetorial racional em  $x$  representando uma dada lei de controle estabilizante sendo que os elementos de  $K(x)$  são não-singulares para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ ;  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_w} \mapsto \mathbb{R}^n$  e  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_w} \mapsto \mathbb{R}^{n_y}$  são funções vetoriais racionais em  $x$  e lineares em relação a  $w$ ; e  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma função vetorial racional em  $x$ .

Assume-se que as funções vetoriais  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  não possuem singularidades para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e que os termos a direita de (64) satisfazem as condições de existência e unicidade de solução para todo  $x$ ,  $u$  e  $w$ . Além disso, assume-se que:

(H1) a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema sem perturbações (i.e., para  $w \equiv 0$ ); e

(H2) o domínio  $\mathcal{B}_x$  é um dado polítopo contendo a origem.

Neste contexto, define-se o conjunto de sinais de perturbações admissíveis da seguinte forma:

$$\mathcal{W} := \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \beta\} \quad (65)$$

sendo  $\beta \in \mathbb{R}$  um parâmetro positivo que define o tamanho do conjunto  $\mathcal{W}$ . Assim, considera-se que  $w$  pertence à classe de sinais com norma  $\ell_2$  limitada, ou seja com energia limitada.

Conforme visto na Seção 2.1.1, na ausência de perturbação, ou seja para  $w \equiv 0$ , a região de atração do sistema em malha fechada é definida por um conjunto de condições iniciais denotado por  $\mathcal{R}_a$ , tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$  para toda condição inicial  $x(0) \in \mathcal{R}_a$ .

Este capítulo tem como objetivo o desenvolvimento de métodos baseados em LMIs para caracterização da estabilidade interna e externa do sistema (64). Em particular, o foco está nos seguintes problemas:

a) **Estabilidade Assintótica**

Para  $w(k) = 0, \forall k \geq 0$ , o objetivo está em calcular uma estimativa maximizada da região de atração,  $\mathcal{R}_a$ .

b) **Estabilidade  $\ell_2$  Entrada-Estado**

Para  $x(0) \in \mathcal{R}_0$ , sendo  $\mathcal{R}_0$  um certo conjunto de condições iniciais admissíveis, e  $w \neq 0$ , o objetivo está em estimar o máximo limite superior  $\beta$  para o conjunto de perturbações admissíveis  $\mathcal{W}$  tal que as trajetórias do sistema com  $w \in \mathcal{W}$  são limitadas. Além disso, quando esvanece a perturbação ( $w(k) = 0$ ), tem-se que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$ .

c) **Estimativa do Ganho  $\ell_2$**

Para  $x(0) = 0$  e  $w \in \mathcal{W}$  com um dado  $\beta$  admissível, o objetivo está em determinar um limitante superior para o ganho  $\ell_2$  da perturbação  $w$  para a saída  $y$ .

## 3.2 Preliminares

Nesta seção são apresentados alguns resultados básicos necessários para o desenvolvimento dos métodos baseados em LMIs para tratar a análise de estabilidade descrita na Seção 3.1. Neste contexto, é apresentada a RAR de sistemas não-lineares em tempo discreto sujeitos a perturbações e alguns resultados abordando a inclusão de elipsoides em

domínios politópicos. Então, uma versão modificada da condição generalizada de setor vista no capítulo 2 é apresentada, que será útil para lidar com a não-linearidade correspondente à saturação.

### 3.2.1 Representação Algébrica Recursiva – RAR

Primeiramente, considerando a definição da não-linearidade zona-morta dada em (57), isto é

$$\psi(u) \triangleq u - \text{sat}(u), \quad (66)$$

reescreve-se o sistema (64) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_+ &= f(x, w) + g(x)u - g(x)\psi(u), \\ y &= h(x, w), \\ u &= K(x)x. \end{aligned} \quad (67)$$

Considere agora a seguinte RAR (DUROLA; DANÈS; COUTINHO, 2008) para o sistema (67):

$$\begin{aligned} x_+ &= A_1(x)x + A_2(x)z + A_3(x)\psi(u) + A_4(x)w \\ y &= E_1(x)x + E_2(x)z + E_3(x)\psi(u) + E_4(x)w \\ 0 &= \Omega_1(x)x + \Omega_2(x)z + \Omega_3(x)\psi(u) + \Omega_4(x)w \end{aligned} \quad (68)$$

sendo que  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é uma função vetorial auxiliar em  $x$  contendo termos racionais e polinomiais (termos de ordem maior ou igual a dois) de  $f(x, w) + g(x)u - g(x)\psi(u)$  e de  $h(x, w)$ ; e  $A_1(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_2(x) \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$ ,  $A_3(x) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $A_4(x) \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ ,  $E_1(x) \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ ,  $E_2(x) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_z}$ ,  $E_3(x) \in \mathbb{R}^{n_y \times 1}$ ,  $E_4(x) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ ,  $\Omega_1(x) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $\Omega_2(x) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  e  $\Omega_3(x) \in \mathbb{R}^{n_z \times 1}$  são funções matriciais afins em  $x$ .

Similarmente à representação descrita acima, supõe-se que a lei de controle  $u$  pode ser decomposta da seguinte forma

$$\begin{aligned} u = K(x)x &= K_1(x)x + K_2(x)\rho(x) \\ 0 &= \Psi_1(x)x + \Psi_2(x)\rho(x) \end{aligned} \quad (69)$$

sendo que:  $\rho(x) \in \mathbb{R}^{n_\rho}$  é uma função vetorial não-linear em  $x$  contendo termos racionais e polinomiais (termos de ordem maior ou igual a dois) de  $K(x)x$ ;  $K_1(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $K_2(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n_\rho}$  são funções vetoriais linha em  $x$ ; e  $\Psi_1(x) \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n}$  e  $\Psi_2(x) \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\rho}$  são funções matriciais afins em  $x$ .

Para garantir que as representações em (68) e (69) sejam bem definidas (no sentido que a unicidade da solução  $x(k)$  seja assegurada), considera-se que:

**(H3)** as funções matriciais  $\Omega_2(x)$  e  $\Psi_2(x)$  têm posto completo para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ .

Note que se **H3** é satisfeita, os vetores auxiliares  $z(\cdot)$  e  $\rho(\cdot)$  podem ser eliminados de (68) e (69) levando a representação original do sistema (67), utilizando

$$z(x, w) = -\Omega_2(x)^{-1}(\Omega_1(x)x + \Omega_3(x)\psi(u) + \Omega_4(x)w) \quad (70)$$

$$\rho(x) = -\Psi_2(x)^{-1}\Psi_1(x)x \quad (71)$$

### 3.2.2 Teoria de Lyapunov para Estabilidade $\ell_2$

Neste capítulo é considerada uma função de Lyapunov quadrática, ou seja

$$V(k) = x'Px$$

sendo que  $P = P' > 0$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Neste caso, conforme visto no capítulo 2, a variação de  $V(k)$  é dada por  $\Delta V(k) = x'_+ P x_+ - x' P x$ . Além disso, considera-se os conjuntos  $\mathcal{R}_0$  dado por (15) e  $\mathcal{R}$  definido em (16):

$$\mathcal{R}_0 \triangleq \{x \in \mathcal{R}^n : V(x) \leq \alpha\} \quad (72)$$

e

$$\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathcal{R}^n : V(x) \leq \delta\} \subset \mathcal{B}_x \quad (73)$$

com  $\delta = \alpha + \beta$ .

A partir destas definições, considera-se que  $\mathcal{J} = \Delta V(k) - w'w + \gamma^{-2}y'y$ . Conforme visto na Seção 2.1.2, se  $x(0) \in \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{J} < 0$  ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada (67), pode-se concluir o seguinte:

- Se  $w(k) = 0$ , então  $\Delta V(k) < -\gamma^{-2}y'y \leq 0$ , o que assegura que  $x(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .
- Se  $w(k) \neq 0$ , com  $w$  satisfazendo (65), então
  - Se  $x(0) \in \mathcal{R}_0$ , as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}$ , pois neste caso  $V(T) < V(0) + \|w\|_2^2 - \gamma^{-2}\|y\|_2^2 \leq \alpha + \beta = \delta$ ;
  - A energia da saída satisfaz  $\|y\|_2^2 < \gamma^2\|w\|_2^2 + \gamma^2V(0)$  para  $T \rightarrow \infty$ .

Note que  $\mathcal{J} < 0$  assegura que  $\mathcal{R}$  inclui a região de estados que são alcançados considerando que  $x(0) \in \mathcal{R}_0$  e  $w$  satisfazendo (65). Além disso, sempre que  $w = 0$  segue que  $\Delta V(k) < 0, \forall x \in \mathcal{R}$ , o que significa que  $\mathcal{R}$  está incluída em  $\mathcal{R}_a$ . Assim,  $\mathcal{R}$  representa uma estimativa da região de atração do sistema em malha fechada.

### 3.2.3 Polítopo dos Estados Admissíveis

Considere que a região  $\mathcal{B}_x$  é dada por um polítopo contendo a origem em seu interior. Então,  $\mathcal{B}_x$  pode ser descrita por um conjunto de inequações escalares da seguinte forma:

$$\mathcal{B}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : q'_r x \leq 1, r = 1, \dots, n_e\} \quad (74)$$

com  $n_e$  sendo o número de faces de  $\mathcal{B}_x$  e  $q_r \in \mathbb{R}^n$ . De forma alternativa,  $\mathcal{B}_x$  pode ser descrita como um envelope convexo a partir de seus vértices, sendo  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$  o conjunto dos vértices de  $\mathcal{B}_x$ , isto é,  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_{\mathcal{B}_x}}\}$  tem-se  $\forall x \in \mathcal{B}_x$  que:

$$x = \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{B}_x}} d_i v_i$$

com escalares  $d_i \geq 0$ , tais que  $\sum d_i = 1$ .

Com base nas considerações apresentadas na Seção 2.1.3.3, o conjunto  $\mathcal{R}$  deve estar incluso na região  $\mathcal{B}_x$  e esta condição  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$  pode ser descrita da seguinte forma:

$$2 - q'_r x - x' q_r \geq 0, \forall x : x' P x - \delta \leq 0, r = 1, \dots, n_e.$$

A partir da generalização do *S-Procedure* (BOYD et al., 1994), a condição acima é satisfeita se:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (2\nu_r - \delta) & -\nu_r q'_r \\ -\nu'_r q_r & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \geq 0, \quad (75)$$

para  $r = 1, \dots, n_e$ , onde  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n_e}$  sendo escalares positivos a serem determinados.

### 3.2.4 Condição de Setor Generalizada

Considere uma função vetorial linha  $G(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e a definição do seguinte conjunto:

$$\mathcal{S} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : |(K(x) - G(x))x| \leq 1\}. \quad (76)$$

Considerando a não-linearidade zona-morta  $\psi(u)$  dada em (66) e o conjunto  $\mathcal{S}$  definido acima, o seguinte Lema pode ser apresentado como uma versão do Lema 4 visto no capítulo 2.

**Lema 5** *Se  $x \in \mathcal{S}$  então a relação*

$$\psi(u)' \mu [\psi(u) - G(x)x] \leq 0 \quad (77)$$

*é verificada para qualquer escalar positivo  $\mu$ .*

Neste capítulo considera-se que a matriz  $G(x)$  possui a seguinte forma:

$$G(x)x = G_1(x)x + G_2(x)\rho(x), \quad (78)$$

sendo que  $G_1(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $G_2(x) \in \mathbb{R}^{1 \times p}$  são funções matriciais afins em  $x$  a serem determinadas; e  $\rho(x)$  é o mesmo vetor considerado em (69).

Similarmente ao resultado apresentado na Seção 3.2.3, com base em (69), (76) e (78), a restrição  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  pode ser definida da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + (G_1(x) - K_1(x))x + (G_2(x) - K_2(x))\rho(x) \geq 0 \\ 1 + (K_1(x) - G_1(x))x + (K_2(x) - G_2(x))\rho(x) \geq 0 \end{array} \right\} \forall x : x'Px - \delta \leq 0.$$

Aplicando o *S-Procedure*, a condição acima é satisfeita se for verificada a seguinte relação:

$$\xi' \Xi_j(x) \xi \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad j = 1, 2 \quad (79)$$

com  $\xi = [1 \quad x' \quad \rho(x)']' \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ ,  $n_\xi = 1 + n + p$ ,

$$\Xi_j(x) = \begin{bmatrix} 2\vartheta_j - \delta & \kappa_j & \varsigma_j \\ \kappa_j' & P & 0 \\ \varsigma_j' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} \kappa_j &= (-1)^j (G_1(x) - K_1(x))\vartheta_j, \\ \varsigma_j &= (-1)^j (G_2(x) - K_2(x))\vartheta_j \end{aligned}$$

e sendo que  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  são escalares positivos a serem determinados.

## 3.3 Resultado Principal

Nesta seção, métodos baseados em LMI para tratar os problemas de estabilidade descrito na Seção 2.1.3 são apresentados. A ideia principal é obter condições na forma de LMIs que dependem de forma afim em  $x$ . Neste sentido, duas abordagens são desenvolvidas: a primeira considera uma função de Lyapunov quadrática, enquanto que a segunda emprega funções de Lyapunov quadráticas por partes.

### 3.3.1 Abordagem - Função de Lyapunov Quadrática

Considere o seguinte vetor auxiliar

$$\zeta = [ x' \quad x_+' \quad z' \quad w' \quad \psi(u) \quad \rho' ]', \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta}, \quad (80)$$

sendo  $n_\zeta = 2n + n_z + n_w + 1 + n_\rho$  e as seguintes matrizes dependentes dos estados

$$\mathcal{N}_0(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) & -I_n & A_2(x) & A_4(x) & A_3(x) & 0 \\ \Omega_1(x) & 0 & \Omega_2(x) & \Omega_4(x) & \Omega_3(x) & 0 \\ \Psi_1(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n & -x_{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_1(x) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n} \quad (81)$$

Na definição acima, segue que  $\mathcal{N}_0(x)\zeta = 0$  e a matriz  $\mathcal{N}_1(x)$  é um aniquilador linear de  $x$ <sup>1</sup>, isto é,  $\mathcal{N}_1(x)x = 0$ .

Definindo agora

$$\mathcal{N}_2(x) = \begin{bmatrix} [ \mathcal{N}_1(x) & 0 ] \\ \mathcal{N}_0(x) \end{bmatrix}, \quad (82)$$

tem-se que  $\mathcal{N}_2(x)\zeta = 0$ .

Relembrando os conceitos apresentados na Seção 3.2.2, a ideia é verificar se  $\mathcal{J} < 0$  ao longo das trajetórias do sistema (67), ou seja:

$$\Delta V - w'w + \frac{y'y}{\gamma^2} < 0, \quad \forall \zeta : \mathcal{N}_2(x)\zeta = 0 \quad (83)$$

Aplicando o Lema de Finsler apresentado no Apêndice A, a condição (83) é satisfeita se a seguinte relação for verificada:

$$\zeta' \left( \Lambda_1 + \frac{Y(x)'Y(x)}{\gamma^2} + L\mathcal{N}_2(x) + \mathcal{N}_2(x)'L' \right) \zeta < 0 \quad (84)$$

sendo que  $L$  é um multiplicador livre a ser determinado,

$$Y(x) = [ E_1(x) \quad 0 \quad E_2(x) \quad E_4(x) \quad E_3(x) \quad 0 ] \text{ e}$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n_w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{n_\rho} \end{bmatrix}.$$

Com base no Lema 5, se  $x \in \mathcal{S}$ , então a relação (77) é verificada para qualquer escalar positivo  $\mu$ . Assim, se  $\forall x \in \mathcal{B}_x$

$$\zeta' \left( \Lambda_1 + \frac{Y(x)'Y(x)}{\gamma^2} + L\mathcal{N}_2(x) + \mathcal{N}_2(x)'L' \right) \zeta - 2\psi(u)'\mu[\psi(u) - G(x)x] < 0 \quad (85)$$

<sup>1</sup>Conceitos relacionados a aniquiladores lineares em  $x$  foram aplicados em (TROFINO, 2000) para obter condições na forma de LMIs menos conservadoras. Neste caso, há a introdução de multiplicadores adicionais através do Lema de Finsler para análise de estabilidade de sistemas não-lineares.

é verificada, então (84) também é verificada para todo  $x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_x$ .

Note que pode-se reescrever (85) da seguinte forma:

$$\zeta' \left( \Lambda_2(x) + \frac{Y(x)'Y(x)}{\gamma^2} + LN_2(x) + \mathcal{N}_2(x)'L' \right) \zeta < 0 \quad (86)$$

com

$$\Lambda_2(x) = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 & \mu G_1(x)' & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n_w} & 0 & 0 \\ \mu G_1(x) & 0 & 0 & 0 & -2\mu & \mu G_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu G_2(x)' & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir da relação acima e aplicando o complemento de Schur apresentado no Apêndice A, se a seguinte desigualdade matricial

$$\Lambda_3(x) + \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(x) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(x)' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L' & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (87)$$

é verificada com

$$\Lambda_3(x) = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 & \mu G_1(x)' & 0 & E_1(x)' \\ * & P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2(x)' \\ * & * & * & -I_{n_w} & 0 & 0 & E_4(x)' \\ * & * & * & * & -2\mu & \mu G_2(x) & E_3(x)' \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I_{n_y} \end{bmatrix},$$

então (86) é satisfeita para todo  $x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_x$  e assim  $\mathcal{J} < 0$ .

Considere agora as seguintes matrizes:

$$\mathcal{N}_3(x) = \begin{bmatrix} x & -I_n \\ 0 & \mathcal{N}_1(x) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_4(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_3(x) & 0 \\ [0 \quad \Psi_1(x)] & \Psi_2(x) \end{bmatrix}.$$

A partir de (69), segue que  $\mathcal{N}_4(x)\xi = 0$ . Assim, a condição

$$\xi' (\Xi_j(x) + Q_j \mathcal{N}_4(x) + \mathcal{N}_4'(x) Q_j') \xi \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad j=1, 2, \quad (88)$$

implica em (79), sendo que  $Q_1$  e  $Q_2$  são multiplicadores livres a serem determinados.

Para desenvolver condições convexas, a partir das condições  $\mathcal{J} < 0$  e  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_x$ , considerou-se no desenvolvimento do raciocínio acima multiplicadores constantes  $L$  e  $Q_j$ , para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ , o que potencialmente é fonte de conservadorismo. Com o objetivo de desenvolver condições de estabilidade menos conservadoras, o domínio dos estados  $\mathcal{B}_x$  pode ser particionado em  $N_\Gamma$  regiões politópicas convexas  $\Gamma_1 \dots \Gamma_{N_\Gamma}$ , tal que

$$\mathcal{B}_x = \bigcup_{h=1}^{N_\Gamma} \Gamma_h \quad (89)$$

A partir da definição acima, se (87) e (88) são verificadas para cada  $\mathcal{V}(\Gamma_h)$ ,  $h = 1, \dots, N_\Gamma$ , então por convexidade, estas desigualdades são satisfeitas também para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ . Neste caso, para cada partição  $\Gamma_h$ , diferentes multiplicadores  $L_h$  e  $Q_{h,j}$ ,  $h = 1, \dots, N_\Gamma$ ,  $j=1, 2$ , são considerados.

Assim, o seguinte resultado pode ser apresentado.

**Teorema 3** Considere o sistema (64) satisfazendo **H1-H2**, a representação em (68)-(69) satisfazendo **H3** e escalares positivos  $\mu, \vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  dados. Se existirem matrizes constantes  $P = P', L_h$  e  $Q_{h,j}$  ( $h = 1, \dots, N_\Gamma; j = 1, 2$ ), matrizes afins  $G_1(x), G_2(x)$  de dimensões apropriadas, e escalares positivos  $\nu_1, \dots, \nu_{n_e}$  satisfazendo as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} (2\nu_r - \delta) & -\nu_r q'_r \\ -\nu_r q_r & P \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1, \dots, n_e \quad (90)$$

$$\Xi_j(x) + Q_{h,j} \mathcal{N}_4(x) + \mathcal{N}'_4(x) Q'_{h,j} \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}(\Gamma_h), \quad h = 1, \dots, N_\Gamma, \quad j = 1, 2 \quad (91)$$

$$\Lambda_3(x) + \begin{bmatrix} L_h \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(x) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}'_2(x)' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_h & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}(\Gamma_h), \quad h = 1, \dots, N_\Gamma \quad (92)$$

Então:

- (i) para todo  $w \in \mathcal{W}$  e qualquer  $x(0) \in \mathcal{R}_0$ , as trajetórias de (64) permanecem limitadas em  $\mathcal{R}$ , com  $\mathcal{R}$  definida em (73). Além disso,  $\|y\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w\|_2^2 + \gamma^2 V(0)$ ;
- (ii) para  $w = 0$  e todo  $x(0) \in \mathcal{R}$ , a trajetória  $x(k)$  pertence a  $\mathcal{R}$  e converge assintoticamente para a origem quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Prova.**

Suponha que as desigualdades matriciais em (90)-(92) são satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{V}(\Gamma_h)$ ,  $h = 1, \dots, N_\Gamma$ . Então, por convexidade, tais condições também são satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ .

Considere (92). Aplicando o complemento do Schur, pode-se concluir que

$$\zeta' \left( \Lambda_2(x) + \frac{Y(x)' Y(x)}{\gamma^2} + L_h \mathcal{N}_2(x) + \mathcal{N}_2(x)' L'_h \right) \zeta < 0, \quad \forall x \in \Gamma_h, \quad h = 1, \dots, N_\Gamma \quad (93)$$

Assim, considerando a definição de  $\mathcal{B}_x$  em (89) e lembrando que  $\mathcal{N}_2(x)\zeta = 0$ , segue que

$$\Delta V(x) - w'w + \gamma^{-2} y'y - 2\psi(u)' \mu [\psi(u) - G(x)x] < 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x$$

com  $V(x) = x'Px$ . Além disso, note que a condição em (90) implica em  $V(x) > 0$ .

A partir do Lema 5, se  $x \in \mathcal{S}$  então  $\psi(u)' \mu [\psi(u) - G(x)x] \leq 0$  para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ . Assim, pode-se concluir que  $\Delta V(x) - w'w + \gamma^{-2} y'y < 0$  é verificada para todo  $x \in \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$ . A partir da discussão da Seção 3.2.2, este fato assegura que (i) e (ii) são satisfeitas se  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$ . Note que, neste caso, as trajetórias estão confinadas em  $\mathcal{R}$  e, portanto, a condição de setor é válida para todo  $k \geq 0$ .

Define-se agora  $\tau = [1' \ x']'$ . Multiplicando a esquerda e a direita a condição (90) por  $\tau'$  e  $\tau$ , respectivamente, tem-se (75). Além disso, se (91) é satisfeita para todo  $x \in \mathcal{V}(\Gamma_h)$ ,  $h = 1, \dots, N_\Gamma$  e levando em consideração que  $\mathcal{N}_4(x)\xi = 0$ , segue que (79) é verificada para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ . Portanto, pode-se concluir que (90) e (91) asseguram que a inclusão  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$  é garantida, o que conclui a prova.  $\square$

### 3.3.2 Abordagem - Função de Lyapunov Quadrática por Partes

Nesta seção, um novo método para tratar os problemas de estabilidade descritos na Seção 2.1.3 é proposto. Conforme visto anteriormente, o objetivo principal é obter condições na forma de LMIs que dependem de forma afim em  $x$ . Neste sentido, a abordagem emprega funções de Lyapunov por partes (JOHANSSON, 2003), considerando diferentes

funções quadráticas associadas a partições específicas da região  $\mathcal{B}_x$ . Tal abordagem é aplicada a fim de diminuir o conservadorismo presente nos resultados apresentados anteriormente, considerando uma função de Lyapunov quadrática clássica.

Para este fim, considere a partição de  $\mathcal{B}_x$  conforme definida em (89), porém cada partição  $\Gamma_h$  agora é restrita a seguinte definição:

$$\Gamma_h = \tilde{\Gamma}_h \cap \mathcal{B}_x \quad (94)$$

$$\tilde{\Gamma}_h \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : J_h x \succeq 0\}, \quad (95)$$

sendo  $J_h \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $h = 1, \dots, N_\Gamma$  e  $J_h x \succeq 0$  denota que todos os termos do vetor  $J_h x$  são não-negativos. Note que  $\tilde{\Gamma}_h$  é na verdade um cone poliedral.

Para ilustrar as definições acima, considere a Figura 7, onde  $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_1 \cap \mathcal{B}_x$ . Neste caso, obtém-se:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.0 \\ 1.0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (96)$$

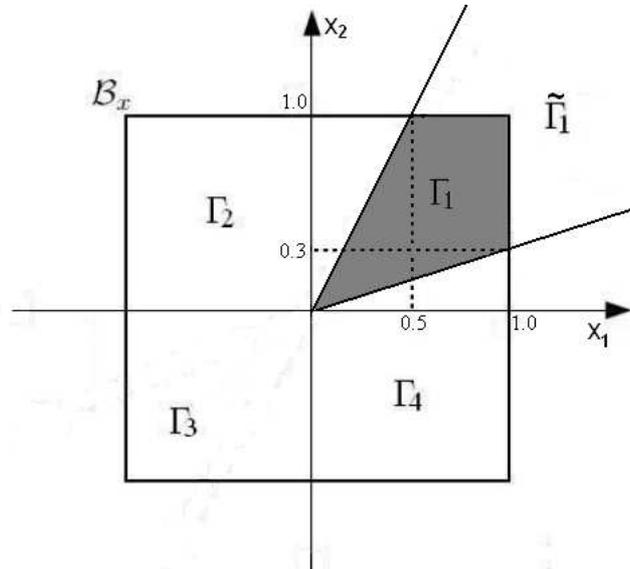


Figura 7: Exemplo de partição  $\Gamma_h$ .

Define-se agora uma função candidata de Lyapunov por partes da seguinte forma:

$$\tilde{V}(k) = x' P_h x, \text{ se } x \in \Gamma_h, h = 1, \dots, N_\Gamma. \quad (97)$$

A fim de assegurar a positividade de  $\tilde{V}(k)$ , deve-se assegurar que

$$x' P_h x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n : J_h x \succeq 0, h = 1, \dots, N_\Gamma. \quad (98)$$

Pode-se então, aplicar o *S-Procedure* apresentado no Apêndice A (como proposto em (JOHANSSON, 2003)). Segue que (98) é verificada se

$$P_h - J_h' M_h J_h > 0, h = 1, \dots, N_\Gamma \quad (99)$$

sendo que  $M_h$  é um multiplicador livre com termos não-negativos (ou seja,  $M_h \succeq 0$ ). É importante observar que a matriz  $P_h$  acima não é necessariamente definida positiva.

Associada à função de Lyapunov quadrática por partes definida em (97), consideram-se as seguintes regiões do espaço de estados:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{V}(k) \leq \delta\}, \delta = \alpha + \beta, \\ \tilde{\mathcal{R}}_h &= \{x \in \mathbb{R}^n : x'P_h x \leq \delta\}, h = 1, \dots, N_\Gamma\end{aligned}\quad (100)$$

Observe que a região  $\tilde{\mathcal{R}}$  é agora uma curva de nível da função  $\tilde{V}(k)$ . A partir destas definições, a fim de assegurar que  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_x$ , é suficiente mostrar que  $\tilde{\mathcal{R}}_h \cap \Gamma_h \subset \mathcal{B}_x$ , para  $h = 1, \dots, N_\Gamma$ . Seguindo um propósito similar ao apresentado na Seção 3.2.3, esta inclusão é satisfeita se

$$\begin{bmatrix} (2\nu_r - \delta) & -\nu_r q_r' \\ -\nu_r' q_r & P_h - J_h' M_h J_h \end{bmatrix} \geq 0, \quad (101)$$

para  $r = 1, \dots, n_e$  e  $h = 1, \dots, N_\Gamma$ , sendo que  $\nu_1, \dots, \nu_{n_e}$  são escalares positivos a serem determinados e  $M_h \succeq 0$ .

Além disso, de maneira similar ao apresentado na Seção 3.2.4, a restrição  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{S}$ , será satisfeita se  $\tilde{\mathcal{R}}_h \cap \Gamma_h \subset \mathcal{S}$ , para todo  $h = 1, \dots, N_\Gamma$ , que pode ser colocada da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} 1 + (G_1(x) - K_1(x))x + (G_2(x) - K_2(x))\rho(x) &\geq 0, \\ 1 + (K_1(x) - G_1(x))x + (K_2(x) - G_2(x))\rho(x) &\geq 0, \end{aligned} \right\} \forall x : x'P_h x - \delta \leq 0, \forall x \in \Gamma_h$$

A relação acima é satisfeita se a condição a seguir for verificada para todo  $x \in \Gamma_h$ :

$$\xi' \Xi_{h,j}(x) \xi \geq 0, \quad j = 1, 2, \quad h = 1, \dots, N_\Gamma \quad (102)$$

com  $\xi = [1 \quad x' \quad \rho(x)']'$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ ,  $n_\xi = 1 + n + p$ , e

$$\Xi_{h,j}(x) = \begin{bmatrix} 2\vartheta_j - \delta & \kappa_j & \varsigma_j \\ \kappa_j' & P_h - J_h' F_h J_h & 0 \\ \varsigma_j' & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\kappa_j = (-1)^j (G_1(x) - K_1(x))\vartheta_j$  e  $\varsigma_j = (-1)^j (G_2(x) - K_2(x))\vartheta_j$ , e sendo que  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  são escalares positivos a serem determinados e  $F_h \succeq 0$ .

Além disso, a partir de (69), segue que  $\mathcal{N}_4(x)\xi = 0$ . Assim, a condição abaixo

$$\xi' (\Xi_{h,j}(x) + Q_{h,j}\mathcal{N}_4(x) + \mathcal{N}_4'(x)Q_{h,j}') \xi \geq 0, \quad j = 1, 2, \quad h = 1, \dots, N_\Gamma \quad (103)$$

implica em (102). Observe que  $\Xi_{h,j}(x)$  e  $Q_{h,j}$  também são associados e definidos para cada partição politópica  $\Gamma_h$  do domínio dos estados.

Define-se agora

$$\tilde{\mathcal{J}} = \Delta\tilde{V}(k) - w'w + \frac{y'y}{\gamma^2} < 0 \quad (104)$$

com  $\Delta\tilde{V}(k) = \tilde{V}(k+1) - \tilde{V}(k)$ .

Com base nos resultados apresentados na Seção 2.1.3, se é possível assegurar que  $\tilde{\mathcal{J}} < 0$  ao longo das trajetórias do sistema (67) como apresentado em (83), e mostrar que  $x(0) \in \tilde{\mathcal{R}}_0$  com

$$\tilde{\mathcal{R}}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{V}(k) \leq \alpha\}, \quad (105)$$

pode-se concluir que:

- Se  $w(k) = 0$ , então  $\Delta\tilde{V}(k) < -\gamma^{-2}y'y \leq 0$ , o que assegura que  $x(k) \rightarrow 0$  com  $k \rightarrow \infty$ .
- Se  $w(k) \neq 0$ , com  $w$  satisfazendo (65), então:
  - As trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\tilde{\mathcal{R}}$ , uma vez que

$$\tilde{V}(T) < \tilde{V}(0) + \|w\|_2^2 - \gamma^{-2}\|y\|_2^2 \leq \delta,$$

$$\forall x(0) \in \tilde{\mathcal{R}}_0 \text{ e } \forall T \geq 0;$$

- A energia de saída satisfaz a relação  $\|y\|_2^2 < \gamma^2\|w\|_2^2 + \gamma^2\tilde{V}(0)$  para  $T \rightarrow \infty$ .

Diferentemente do caso em tempo contínuo, se  $x(k) \in \Gamma_h$  não é possível saber *a priori* em qual região  $\Gamma_i$  estará um estado em um instante subsequente (ou seja, onde estará  $x_+$ ). Assim, para assegurar que  $\tilde{\mathcal{J}} < 0$  seja satisfeita, qualquer salto de uma região  $\Gamma_h$  para uma região  $\Gamma_i$  deve ser analisado. Desta forma, deve-se assegurar que:

$$x_+P_i x_+ - x'P_h x - w'w + \frac{y'y}{\gamma^2} < 0, \quad \forall i, h = 1, \dots, N_\Gamma, \quad x \in \Gamma_h, \quad x_+ \in \Gamma_i. \quad (106)$$

Aplicando o *S-Procedure*, a condição acima é satisfeita se a seguinte relação for verificada:

$$x_+(P_i + J'_i \tilde{W}_{h,j} J_i)x_+ - x'(P_h - J'_h W_{h,j} J_h)x - w'w + \frac{y'y}{\gamma^2} < 0, \quad \forall i, h = 1, \dots, N_\Gamma, \quad (107)$$

com  $W_{h,j} \succeq 0$  e  $\tilde{W}_{h,j} \succeq 0$ .

Note que as partições  $\tilde{\Gamma}_h$  são definidas por

$$\tilde{\Gamma}_h \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : J_h x \succeq 0\}.$$

Assim, se (107) for verificada, tem-se que (106) é satisfeita para  $x \in \Gamma_h, x_+ \in \Gamma_i$ .

Seguindo os mesmos passos feitos na Seção 3.2.2, se a seguinte desigualdade matricial

$$\Lambda_4(x) + \begin{bmatrix} L_{h,j} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(x) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(x)' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_{h,j} & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}(\Gamma_h) \quad (108)$$

é verificada com

$$\Lambda_4(x) = \begin{bmatrix} J'_h W_{h,j} J_h - P_h & 0 & 0 & 0 & \mu G_1(x)' & 0 & E_1(x)' \\ \star & P_i + J'_i \tilde{W}_{h,j} J_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2(x)' \\ \star & \star & \star & -I_{n_w} & 0 & 0 & E_4(x)' \\ \star & \star & \star & \star & -2\mu & \mu G_2(x) & E_3(x)' \\ \star & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma^2 I_{n_y} \end{bmatrix},$$

conclui-se que (107) é satisfeita se  $x \in \mathcal{S} \cap \Gamma_h$ . Assim,  $\tilde{\mathcal{J}} < 0$  é garantida levando a  $x(0) \in \tilde{\mathcal{R}}_0$  e  $\|w\|_2^2 \leq \beta$ .

A partir das considerações acima, segue o seguinte resultado para caracterizar a estabilidade do sistema (64) em termos de funções de Lyapunov quadráticas por partes.

**Teorema 4** Considere o sistema (64) satisfazendo **H1-H2** e sua representação em (68)-(69) satisfazendo **H3**. Considere ainda que  $\mu$ ,  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  são escalares positivos dados. Se existirem matrizes constantes  $P_h = P'_h$ ,  $L_{h,j}$ ,  $Q_{h,j}$  e matrizes constantes com termos não-negativos  $F_h$ ,  $M_h$ ,  $W_{h,j}$  e  $\tilde{W}_{h,j}$ , para  $i, h = 1, \dots, N_\Gamma$  e  $j = 1, 2$ ; matrizes afins  $G_1(x)$ ,  $G_2(x)$ ; e escalares positivos  $\nu_1, \dots, \nu_{n_e}$  satisfazendo as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} (2\nu_r - \delta) & -\nu_r q'_r \\ -\nu'_r q_r & P_h - J'_h M_h J_h \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1, \dots, n_e, \quad h = 1, \dots, N_\Gamma \quad (109)$$

$$\Xi_{h,j}(x) + Q_{h,j} \mathcal{N}_4(x) + \mathcal{N}'_4(x) Q'_{h,j} \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}(\Gamma_h), \quad j = 1, 2, \quad h = 1, \dots, N_\Gamma \quad (110)$$

$$\Lambda_4(x) + \begin{bmatrix} L_{h,j} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(x) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}_2(x)' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_{h,j} & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (111)$$

$$\forall x \in \mathcal{V}(\Gamma_h), \quad i, h = 1, \dots, N_\Gamma$$

Então:

- (i) quando  $w \neq 0$ , as trajetórias de (64) permanecem limitadas em  $\tilde{\mathcal{R}}$  como definido em (100) para todo  $w \in \mathcal{W}$  e para qualquer  $x(0) \in \tilde{\mathcal{R}}_0$ . Além disso,  $\|y\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2 + \gamma^2 \tilde{V}(0)$ ;
- (ii) quando  $w = 0$ , para todo  $x(0) \in \tilde{\mathcal{R}}$ , a trajetória  $x(k) \in \tilde{\mathcal{R}}$  e converge assintoticamente para a origem quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Prova.**

Os mesmos passos apresentados na prova do Teorema 3 podem ser considerados. Em resumo, (111) assegura que  $\tilde{\mathcal{J}} < 0$ , desde que  $x \in \tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$ . As relações (109) e (110), asseguram que  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_x$  e  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{S}$ , respectivamente.  $\square$

### 3.3.3 Problemas de Otimização

Esta seção apresenta como aplicar os resultados apresentados no Teorema 3 e no Teorema 4 para caracterizar a estabilidade assintótica, a estabilidade  $\ell_2$  entrada-estado, e a estimativa do ganho  $\ell_2$  do sistema em malha fechada (64).

- Estabilidade Assintótica:

O Teorema 3 pode ser aplicado para caracterizar a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (64) considerando  $w = 0$ . Basicamente, a ideia é determinar a região de atração  $\mathcal{R}$  como uma estimativa maximizada da região de atração  $\mathcal{R}_a$ . Com este objetivo, a maximização de  $\mathcal{R}$  em determinadas direções (preferenciais) (veja Capítulo 2 em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 1999)), dada por vetores  $a_l \in \mathbb{R}$ ,  $l = 1, \dots, n_l$ , pode ser considerada. Assim, considerando uma variável de busca  $e_P$ , o seguinte problema de otimização é aplicado:

$$\min e_P - e_1 \delta \begin{cases} (90) - (92), \\ e_P - a'_l P a_l > 0, \end{cases} \quad (112)$$

sendo que  $l = 1, \dots, n_l$  e  $e_1$  é um fator de ponderação para  $\delta$ .

Similarmente, o resultado apresentado no Teorema 4 também pode ser aplicado. Neste caso, a maximização de  $\tilde{\mathcal{R}}$  em determinadas direções é realizada para cada

$P_h, h = 1, \dots, N_\Gamma$ . Então, o seguinte problema de otimização pode ser considerado:

$$\min e_P - e_1 \delta \begin{cases} (109) - (111), \\ e_P - a'_{h,l_h} P_h a_{h,l_h} > 0, \end{cases} \quad (113)$$

sendo que  $h = 1, \dots, N_\Gamma, l_h = 1, \dots, n_{lh}$  e  $e_1$  é um fator de ponderação para  $\delta$ .

**Observação 2** A minimização de  $e_P - e_1 \delta$  é um critério multiobjetivo que leva implicitamente a uma maximização do tamanho de  $\mathcal{R}$ . Como  $\mathcal{R} \triangleq \{x \in \mathcal{R}^n : V(x) \leq \delta\}$ , o critério minimiza  $e_P$  levando à maximização de  $\mathcal{R}$  em determinadas direções.

**Observação 3** Note que nos problemas de otimização (112) e (113), as respectivas relações  $e_P - a'_l P a_l > 0$  e  $e_P - a'_{h,l_h} P_h a_{h,l_h} > 0$  têm por objetivo maximizar a estimativa da região de atração  $\mathcal{R}$  em determinadas direções.

No primeiro caso, tais direções são dadas por  $a_l$  tal que  $l = 1, \dots, n_l$  e uma possível escolha é relacioná-las diretamente com os vértices do politopo onde a busca da solução será realizada. Por outro lado, o problema (113) as direções  $a_{h,l_h}$  para  $h = 1, \dots, N_\Gamma$  e  $l_h = 1, \dots, n_{lh}$  estão relacionadas com a estimativa da região de atração em determinada partição  $\tilde{\Gamma}_h$ . Desta forma, como  $\tilde{\Gamma}_h$  é dado por um cone poliedral, assim a maximização pode ser feita em direções definidas previamente.

- Estabilidade  $\ell_2$  Entrada-Estado:

A ideia aqui consiste em determinar um limitante superior  $\beta$  para a máxima perturbação  $\ell_2$  admissível  $w$ , para o qual as trajetórias em malha fechada sejam limitadas. Neste caso, assume-se que  $x(0) = 0$  de forma que  $\delta = \beta$ . Assim, os seguintes problemas de otimização podem ser aplicados para o Teorema 3 ou para o Teorema 4, respectivamente:

$$\max \delta, \begin{cases} (90) - (92) \end{cases} \quad (114)$$

$$\max \delta, \begin{cases} (109) - (111) \end{cases} \quad (115)$$

- Estimativa do Ganho  $\ell_2$ :

Dado um limite superior admissível  $\beta$ , a ideia é calcular um limite superior para o ganho  $\ell_2$  para o sistema de  $w$  para  $y$  através da aplicação dos Teoremas 3 ou 4. Neste caso, assume-se  $x(0) = 0$  e os seguintes problemas de otimização podem ser aplicados:

$$\min \gamma^2, \begin{cases} (90) - (92) \end{cases} \quad (116)$$

$$\min \gamma^2, \begin{cases} (109) - (111) \end{cases} \quad (117)$$

**Observação 4** A região  $\mathcal{B}_x$  corresponde à região onde a factibilidade das LMIs apresentadas nos Teoremas 3 e 4 devem ser verificadas. Esta região é definida a priori pelo projetista. Na prática, pode ser escolhida como um hiper-retângulo, permitindo uma descrição simples como visto em (74) e a fácil caracterização de seus vértices. Observe que a hipótese sobre a existência e unicidade das soluções em  $\mathcal{B}_x$  deve ser respeitada.

Por outro lado o tamanho da estimativa  $\mathcal{R}$  é altamente dependente do tamanho do polítopo  $\mathcal{B}_x$ . Ou seja, se  $\mathcal{B}_x$  é pequeno então a estimativa  $\mathcal{R}$ , que está contida em  $\mathcal{B}_x$ , pode ser conservadora. A combinação da maximização de  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{B}_x$  é um problema não-convexo, que é difícil de ser solucionado. Uma solução simples é a parametrização de  $\mathcal{B}_x$  como um hiper-cubo, i.e.,

$$\mathcal{B}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_{(i)}| \leq \alpha, i = 1, \dots, n\}.$$

Com esta definição, a partir de um  $\alpha$  suficientemente pequeno (sendo que seja possível encontrar uma solução), pode-se aumentar o valor de  $\alpha$  até que as condições dos Teoremas 3 e 4 não sejam mais factíveis.

Alternativamente, pode-se parametrizar  $\mathcal{B}_x$  conforme abaixo:

$$\mathcal{B}_x := \{x : |x_{(i)}| \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n_\xi\},$$

e assim, realizar uma busca nos parâmetros  $\alpha_i$  (com  $i = 1, \dots, n$ ) de forma a encontrar uma estimativa maximizada  $\mathcal{R}$  da região de atração do sistema em malha fechada.

**Observação 5** Uma questão importante é como escolher  $\mu$ , a fim de aplicar os Teoremas apresentados. Note que  $\mu$  é introduzido pela condição de setor. Sendo  $\mu$  uma variável livre, as condições de estabilidade deixarão de ser convexas. A solução proposta neste capítulo é realizar uma busca linear neste parâmetro para encontrar o valor ótimo nos problemas de otimização.

**Observação 6** Um problema semelhante ocorre se  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , introduzido pela condição de setor (79), forem parâmetros livres. Para o problema de otimização (112), pode-se restringir esses parâmetros iguais a um (isto é,  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$ ). Entretanto, se esta escolha é considerada nos problemas (114)-(117), como  $\delta = \beta$ ,  $\beta$  será limitado em 2. Neste caso, a solução proposta é a utilizar  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$  e realizar uma busca linear em  $\vartheta$  para encontrar o valor ideal. Esta solução é aplicada no seguinte exemplo numérico.

### 3.4 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned} x_{1+} &= x_2 + 0.22w, \\ x_{2+} &= (1 + x_1^2)x_1 + x_2 + 0.3w + \text{sat}(u), \\ u &= -1.5(x_1 + x_2) \\ y &= x_1 + x_2. \end{aligned} \tag{118}$$

Observe que o a origem do sistema acima é instável em malha aberta ( $u = 0$ ). A fim de avaliar as propriedades relacionadas com a estabilidade local do sistema em malha fechada, considera-se a seguinte RAR de (118):

$$\begin{aligned} x_+ &= A_1(x)x + A_2(x)z + A_3(x)\psi(u) + A_4w \\ 0 &= \Omega_1(x)x + \Omega_2(x)z + \Omega_3(x)\psi(u) \end{aligned} \tag{119}$$

com  $z = x_1^2$ , e

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.22 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_1(x) = [x_1 \ 0], \quad \Omega_2 = -1 \text{ e } \Omega_3 = 0.$$

Além disso,  $u$  pode ser descrito como  $u = K(x)x = K_1x$  com

$$K_1 = [ -1.5 \quad -1.5 ].$$

Considera-se que a região  $\mathcal{B}_x$  é um dado politopo descrito por:

$$\mathcal{B}_x := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \alpha_1, |x_2| \leq \alpha_2\}. \quad (120)$$

com  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$  (veja Observação 4).

### 3.4.1 Estabilidade Assintótica

Primeiramente, é abordado o problema de estimar a região de atração do sistema em malha fechada (ou seja, a caracterização da estabilidade assintótica). Observe que em ambos os problemas de otimização (112), e (113) pode-se usar a maximização do critério em determinadas direções. Assim, escolhe-se as seguintes direções

$$a_1 = a_3 = [1 \ 1]' \text{ e } a_2 = a_4 = [-1 \ 1]', \quad (121)$$

definidas nas direções dos vértices do politopo  $\mathcal{B}_x$ .

A partir das definições acima, três diferentes casos são considerados conforme apresentado a seguir.

#### Caso 1 - Função Quadrática, uma partição de $\mathcal{B}_x$

Este caso corresponde a  $N_\Gamma = 1$  e assim as LMIs são avaliadas somente em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$ . Solucionando o problema de otimização (112), considerando uma varredura nos termos  $\mu$  e  $e_1$ , os melhores resultados são obtidos com  $\mu = 2$  e  $e_1 = 1.1$ , o que leva à:

$$\delta = 0.4944; \quad P = \begin{bmatrix} 0.6753 & 0.0938 \\ 0.0938 & 0.7934 \end{bmatrix}.$$

A estimativa resultante  $\mathcal{R}_1$  para a região de atração do sistema corresponde à curva com linha traço e ponto na Figura 9.

Observe que, neste caso pode-se utilizar  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$ , pois  $\delta < 2$ .

#### Caso 2 - Função Quadrática, quatro partições de $\mathcal{B}_x$

Para obter uma estimativa menos conservadora, o politopo  $\mathcal{B}_x$  definido em (120) é particionado da seguinte forma:

$$\mathcal{B}_x = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_h \quad (122)$$

com

$$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}, \quad \Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 0, -1 \leq x_2 \leq 0\}, \quad \Gamma_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 0\}.$$

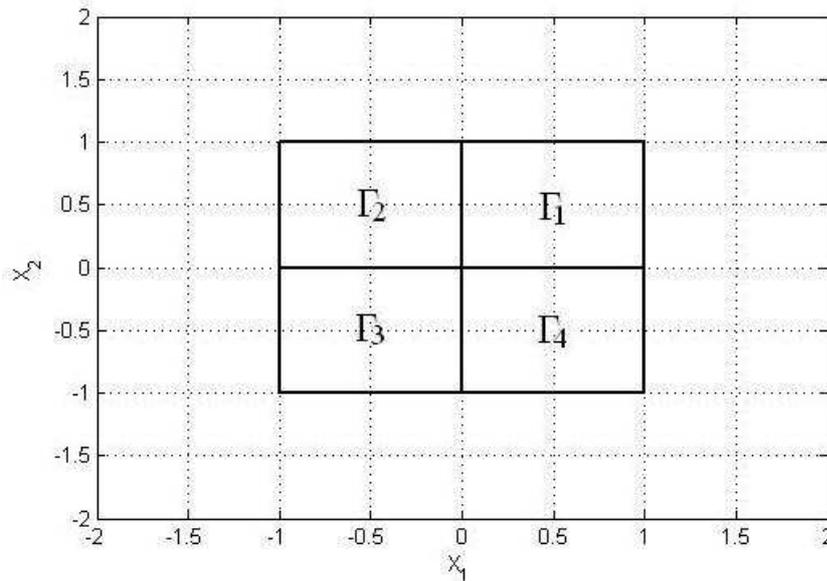


Figura 8: Regiões  $\Gamma_h$

A Figura 8 ilustra as partições politópicas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ .

A partir das considerações acima, solucionando o problema de otimização (112) com uma varredura nos termos  $\mu$  e  $e_1$ , são obtidos os seguintes resultados:

$$\mu = 2, e_1 = 2.2, \delta = 0.7590; P = \begin{bmatrix} 0.8391 & 0.1783 \\ 0.1783 & 1.2130 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a estimativa resultante  $\mathcal{R}_2$  da região de atração do sistema corresponde à curva tracejada ilustrada na Figura 9.

#### Case 3 - Quadrática por Partes, Quatro partições de $\mathcal{B}_x$

Aplica-se agora a abordagem da função de Lyapunov quadrática por partes considerando a mesma partição de  $\mathcal{B}_x$  dada em (122). Para resolver o problema de otimização (113), consideram-se os seguintes parâmetros:

$$n_{l1} = n_{l2} = n_{l3} = n_{l4} = 1,$$

$$a_{1,1} = a_1, a_{2,1} = a_2, a_{3,1} = a_3, a_{4,1} = a_4.$$

Então, aplicando (113) com  $\mu = 3$  e  $e_1 = 2.2$ , obtém-se os seguintes resultados:

$$\delta = 0.8611, P_1 = \begin{bmatrix} 0.9803 & 0.2714 \\ 0.2714 & 1.0127 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1.0030 & 0.3639 \\ 0.3639 & 1.0598 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.9528 & 0.2648 \\ 0.2648 & 1.0385 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1.0325 & 0.3982 \\ 0.3982 & 1.0941 \end{bmatrix}.$$

A estimativa quadrática por partes obtida  $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_3$  da região de atração corresponde a curva contínua da Figura 9.

Para analisar o conservadorismo das estimativas propostas, também é apresentada na Figura 9 a verdadeira região de atração do sistema representada pela região  $\mathcal{R}_a$ . Para este fim, foram realizadas simulações sendo que os pontos escuros correspondem a estados iniciais cujas trajetórias divergem.

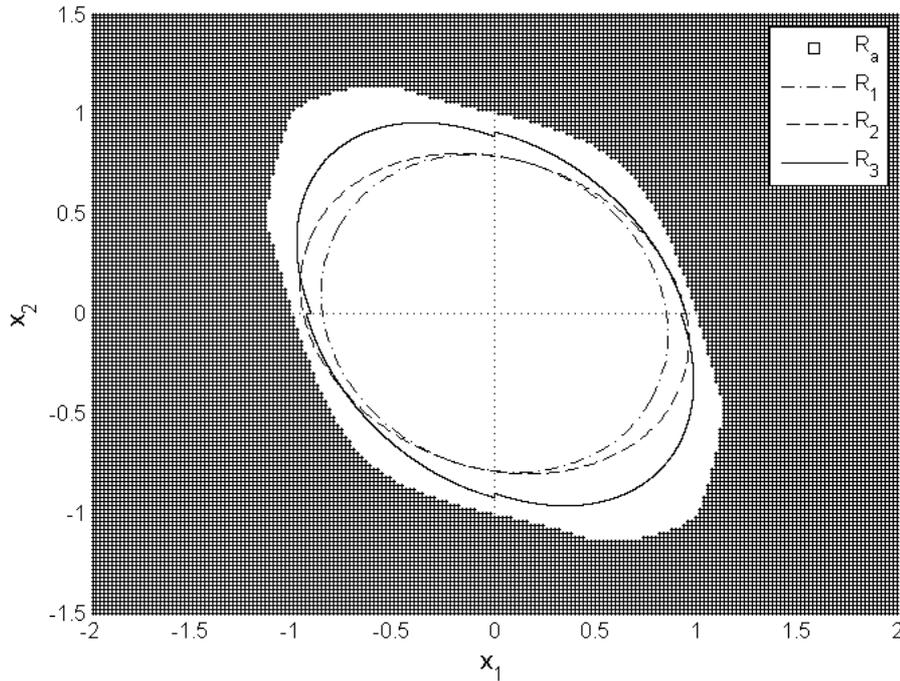


Figura 9: Estimativas da região de atração do sistema (118).

### 3.4.2 Estabilidade $\ell_2$ Entrada-Estado e Estimativa do Ganho $\ell_2$

Agora, para caracterizar a ISS  $\ell_2$ , considere que  $x(0) = 0$ . Então, aplica-se o problema de otimização descrito em (114), utilizado em todos os casos  $\mu = 48$ . Primeiramente a partir do politopo original sem partições, tem-se uma tolerância máxima a perturbação igual a  $\beta = 1,66$ . Ao considerar quatro partições, ou seja  $N_\Gamma = 4$  como definido em (122), obtém-se  $\beta = 2,59$  para uma função de Lyapunov quadrática. Por fim, com  $N_\Gamma = 4$ , obtém-se  $\beta = 2,97$  para uma função quadrática de Lyapunov por partes por meio do problema de otimização (115).

Finalmente, para estimar um limite superior para o ganho  $\ell_2$  do sistema, supondo perturbações admissíveis, resolvem-se os problemas de otimização propostos para diversos valores diferentes de  $\beta = \delta$ . Primeiramente, aplica-se o problema de otimização (116), para  $N_\Gamma = 1$ , o que leva à curva traço e ponto  $\gamma_1$  na Figura 10. Então, considera-se diferentes partições de  $\mathcal{B}_x$  com  $N_\Gamma = 4$ , conforme descritas na seção anterior, e obtivemos a curva tracejada  $\gamma_2$  da Figura 10. Da mesma forma, resolve-se o problema de otimização (117), levando à curva em linha contínua  $\gamma_3$  da Figura 10.

Pode ser observado que o conservadorismo nos limites obtidos para o valor máximo admissível da norma  $\ell_2$  do sinal de perturbação é drasticamente reduzido, considerando a partição do domínio  $\mathcal{B}_x$ , especialmente quando um abordagem quadrática por partes é considerada. Esta redução pode ser observada na Figura 10, onde para o mesmo valor de  $\delta = \beta$ , um valor menor de  $\gamma$  (ou seja, um limite menos conservador para o ganho  $\ell_2$ ) é obtido.

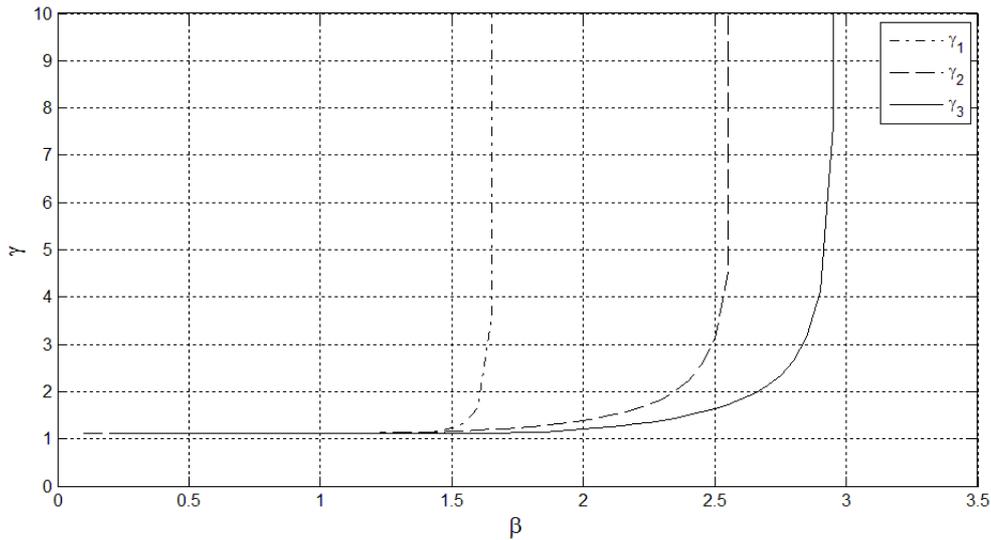


Figura 10: Estimativa do ganho  $\ell_2$  para diferentes valores de perturbação admissíveis.

### 3.5 Considerações Finais

Este capítulo apresentou uma abordagem LMI para caracterizar a estabilidade de sistemas racionais não-lineares em tempo discreto sujeitos à saturação no atuador. Este método utilizou uma representação algébrica recursiva de sistemas racionais, que pode modelar uma ampla classe de sistemas não-lineares.

Os métodos propostos podem ser aplicados para calcular estimativas da região de atração do sistema, bem como limites para uma classe de perturbações admissíveis  $\ell_2$  para os quais as trajetórias de estado são limitadas. Além disso, supondo perturbações admissíveis, a metodologia proposta permite o cálculo de estimativas do ganho  $\ell_2$  do sistema. Para obter condições menos conservadoras, foram propostas duas abordagens com base em partições do espaço de estados. A primeira considerou uma única função de Lyapunov quadrática e multiplicadores associados a cada partição. A segunda utilizou funções de Lyapunov por partes, onde para cada partição está associada a uma função quadrática diferente.

Tais abordagens foram ilustradas através de simulações numéricas demonstrando que as abordagens propostas são ferramentas sistemáticas úteis para a análise da estabilidade local para sistemas de controle não-lineares discretos sujeitos a saturação e perturbações. Percebe-se que uma redução significativa do conservadorismo pode ser alcançada através do emprego de funções de Lyapunov quadráticas por partes, sobretudo considerando a determinação de um limitante superior para o ganho  $\ell_2$ .

Os resultados apresentados aqui, considerando uma função de Lyapunov quadrática e a análise nos vértices da região  $\mathcal{B}_x$ , podem ser vistos em (OLIVEIRA; GOMES DA SILVA Jr.; COUTINHO, 2010). A extensão deste trabalho considerando partições de  $\mathcal{B}_x$  e funções de Lyapunov quadráticas por partes foi objeto do trabalho em (OLIVEIRA; GOMES DA SILVA Jr.; COUTINHO, 2011) submetido para publicação.

## 4 SÍNTESE DE COMPENSADORES ANTI-WINDUP - ABORDAGEM ITERATIVA

Conforme visto no Capítulo 2, o objetivo de utilizar técnicas de *anti-windup* é a introdução de modificações a um controlador pré-estabelecido a fim de minimizar os efeitos causados pela saturação. Neste contexto, muitos métodos para a concepção de compensadores *anti-windup* têm sido propostos, e apesar de existirem muitas técnicas e abordagens diferentes, a maioria dos resultados se concentra em modelos lineares.

Para caracterizar a estabilidade de sistemas não-lineares, o principal problema é determinar uma estimativa não conservadora da região de atração do sistema. Este problema é diretamente abordado em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010) para tratar sistemas racionais em tempo contínuo sujeitos a saturação, utilizando estimativas da região de atração a partir de domínios de Lyapunov. Neste sentido, a utilização de compensadores *anti-windup* permite aumentar a região de atração de sistemas lineares, como mostrado em (TARBOURIECH et al., 2011; CAO; LIN; WARD, 2002; GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005). Particularmente, para sistemas de controle não-linear pode-se também utilizar a síntese de um compensador *anti-windup* dinâmico com o objetivo de aumentar a estimativa da região de atração como visto em (VALMORBIDA et al., 2010). Além disso, tais compensadores também podem ser aplicados em sistemas não-lineares sujeitos a perturbações, sendo que o interesse está na caracterização da estabilidade  $\mathcal{L}_2$  entrada-estado e entrada-saída como pode ser visto em (TEEL; KAPOOR, 1997; ZACCARIAN; TEEL, 2011; GRIMM et al., 2003; HERRMANN et al., 2010) ou no Capítulo 7 de (TARBOURIECH et al., 2011).

Este capítulo tem como objetivo elaborar um método numérico para o projeto de compensadores *anti-windup* estáticos para uma classe de sistemas não-lineares sujeitos à saturação do atuador. A classe de sistemas a ser considerada abrange todos os sistemas modelados por equações diferenciais na forma racional. A abordagem proposta, que utiliza uma representação algébrica diferencial (DAR) de sistemas não-lineares, permite o desenvolvimento de condições de estabilidade de Lyapunov em termos de desigualdades matriciais dependentes dos estados. Estas são resolvidas numericamente nos vértices de um dado politopo de estados admissíveis. Para lidar com a não-linearidade de saturação, consideramos uma versão modificada da condição de setor generalizada (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005) proposta em (LOQUEN, 2010). A partir destes elementos, são desenvolvidas condições sob a forma de BMIs (desigualdades matriciais bilineares) para estabilização local do sistema em malha fechada. Tais condições são então incorporadas em um algoritmo iterativo, onde em cada passo é resolvido um problema de otimização convexo com restrições na forma de LMIs (desigualdades matriciais lineares), para o cálculo de um ganho de *anti-windup* que leve implicitamente a uma maximização

da região de atração do sistema em malha fechada. Além disso, os resultados são estendidos para lidar com sistemas incertos e sistemas sujeitos a perturbações limitadas em energia ( $\mathcal{L}_2$ ).

## 4.1 Apresentação do problema

Considere a seguinte classe de sistemas de controle não-lineares em tempo contínuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))\text{sat}(v_c(t)) \\ y(t) &= H_{y_x}x(t)\end{aligned}\quad (123)$$

sendo que  $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estados;  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é o vetor de saídas medidas;  $v_c \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle;  $\text{sat}(\cdot)$  é a função clássica de saturação normalizada, i.e.,  $\text{sat}(v_c(t)) := \text{sign}(v_c(t)) \min\{|v_c(t)|, 1\}$ ;  $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  são funções racionais em  $x$  satisfazendo as condições para a existência e unicidade de soluções para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ ; e  $H_{y_x}$  é uma matriz constante, ou seja, a(s) saída(s) são consideradas como combinação(ões) linear(es) dos estados.

Considerando o sistema (123), assume-se que o seguinte compensador dinâmico de saída

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= f_\eta(\eta(t), y(t)) \\ v_c(t) &= H_{v_\eta}\eta(t) + H_{v_y}y(t)\end{aligned}\quad (124)$$

é projetado para garantir alguns requisitos de desempenho e a estabilidade do sistema em malha fechada na ausência de saturação de controle. Em (124),  $\eta \in \mathcal{B}_\eta \subset \mathbb{R}^{n_c}$  denota o estado do controlador;  $y(t)$  é a entrada do controlador;  $v_c(t)$  é a saída do controlador;  $f_\eta : \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_y} \mapsto \mathbb{R}^{n_c}$  é uma função racional em  $\eta$  e  $y$ ; e  $H_{v_\eta}$  e  $H_{v_y}$  são matrizes constantes, ou seja, os sinais de saída de controle são supostos serem combinações lineares dos estados da planta e do controlador.

Tendo em vista os efeitos indesejáveis causados pela saturação de entrada, um ganho *anti-windup* é adicionado ao controlador. Assim, considerando o controlador dinâmico e a estratégia *anti-windup*, o sistema em malha fechada é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))\text{sat}(v_c(t)) \\ y(t) &= H_{y_x}x(t) \\ \dot{\eta}(t) &= f_\eta(\eta(t), y(t)) + E_c(\text{sat}(v_c(t)) - v_c(t)) \\ v_c(t) &= H_{v_\eta}\eta(t) + H_{v_y}y(t)\end{aligned}\quad (125)$$

onde  $E_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n_c}$  é uma matriz constante que representa o ganho de *anti-windup* a ser determinado.

A partir da configuração acima, tem-se como objetivo determinar o ganho *anti-windup*  $E_c$  tal que a região de atração do sistema malha fechada é aumentada.

## 4.2 Preliminares

Esta seção apresenta alguns resultados básicos necessários para obter um método baseado em LMIs com o objetivo de projetar o compensador *anti-windup* conforme apresentado na Seção 4.1. Neste sentido, é apresentada a representação algébrica-diferencial (DAR) com o compensador *anti-windup*, uma breve introdução da Teoria de Lyapunov e alguns resultados sobre a inclusão de elipsóides em domínios politópicos. Em seguida, apresenta-se uma versão generalizada da condição de setor modificada proposta

em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005), que será útil para lidar com a não-linearidade da saturação.

#### 4.2.1 Representação Algébrica-Diferencial – DAR

Primeiramente, sendo a não-linearidade zona morta  $\psi(v_c(t))$ , definida em (57), pode-se reescrever o sistema (125) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))v_c(t) - g(x(t))\psi(v_c(t)) \\ y(t) &= H_{yx}x(t) \\ \dot{\eta}(t) &= f_\eta(\eta(t), y(t)) - E_c\psi(v_c(t)) \\ v_c(t) &= H_{v_\eta}\eta(t) + H_{v_y}y(t).\end{aligned}\tag{126}$$

Considera-se então a seguinte representação algébrica-diferencial (DAR) para o sistema (126):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_1x(t) + A_2\eta(t) + A_3z(t) + A_4\psi(v_c(t)) \\ \dot{\eta}(t) &= C_1x(t) + C_2\eta(t) + C_3z(t) + E_c\psi(v_c(t)) \\ 0 &= \Omega_1x(t) + \Omega_2\eta(t) + \Omega_bz(t) + \Omega_c\psi(v_c(t)).\end{aligned}\tag{127}$$

sendo  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  um vetor auxiliar que contém termos polinomiais e racionais em função de  $(x, \eta, \psi)$  (termos com ordem maior ou igual a dois) das funções  $f(x) + g(x)v_c - g(x)\psi(v_c)$  e  $f_\eta(\eta, y)$ ; e  $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_c}$ ,  $A_3 \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$ ,  $A_4 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ ,  $C_3 \in \mathbb{R}^{n_c \times n_z}$ ,  $C_4 \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$ ,  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_c}$ ,  $\Omega_b \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  e  $\Omega_c \in \mathbb{R}^{n_z \times 1}$  são funções matriciais afins em  $(x, \eta)$ .

Considerando a definição  $\xi(t) = [x(t)' \ \eta(t)']' \in \mathcal{B}_\xi = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\eta$ ,  $\mathcal{B}_\xi \subset \mathbb{R}^{n_\xi}$ , com  $n_\xi = n + n_c$ , pode-se reescrever (127) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \mathcal{A}_a(\xi)\xi(t) + \mathcal{A}_b(\xi)z(t) + (\mathcal{A}_c(\xi) - \mathcal{M}E_c)\psi(v_c(t)) \\ 0 &= \Omega_a(\xi)\xi(t) + \Omega_b(\xi)z(t) + \Omega_c(\xi)\psi(v_c(t))\end{aligned}\tag{128}$$

com

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a(\xi) &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_b(\xi) = \begin{bmatrix} A_3 \\ C_3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_c(\xi) = \begin{bmatrix} A_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad \Omega_a(\xi) = [ \Omega_1 \quad \Omega_2 ].\end{aligned}$$

Além disso, considerando o vetor aumentado  $\xi(t)$  pode-se reescrever  $v_c(t)$  como

$$v_c(t) = [ \ H_{v_y}H_{yx} \quad H_{v_\eta} ] \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} = K\xi(t),$$

sendo  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n_\xi}$  uma matriz constante.

Em relação ao sistema (128), assume-se que:

**(H1)** a origem é um ponto de equilíbrio; e

**(H2)** o domínio  $\mathcal{B}_\xi$  é um dado politopo com vértices conhecidos contendo a origem.

Para garantir que a DAR em (128) seja bem definida (i.e., para que a unicidade da solução  $\xi(t)$  seja assegurada), deve-se ainda considerar a seguinte hipótese:

**(H3)** a função matricial  $\Omega_b(\xi)$  tem posto completo para todo  $\xi \in \mathcal{B}_\xi$ . Assim, elimina-se  $z(t)$  de (128) obtendo assim o sistema original (126) através de

$$z = -\Omega_b(\xi)^{-1}[\Omega_b(\xi)\xi(t) + \Omega_c(\xi)\psi(v_c(t))].$$

#### 4.2.2 Polítopo dos Estados Admissíveis

Considere que a região  $\mathcal{B}_\xi$  é dada por um polítopo contendo a origem em seu interior. Assim,  $\mathcal{B}_\xi$  pode ser descrita por um conjunto de inequações escalares como definido por

$$\mathcal{B}_\xi = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : q'_r \xi \leq 1, r = 1, \dots, n_e\}. \quad (129)$$

A partir de (11), a região  $\mathcal{R}$  deve estar incluída em  $\mathcal{B}_\xi$ . Esta condição é satisfeita se (BOYD et al., 1994):

$$\begin{bmatrix} P & q_r \\ q'_r & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{para } r = 1, \dots, n_e. \quad (130)$$

Vale lembrar que  $\mathcal{B}_\xi$  pode ser descrita como um envelope convexo de seus vértices, tal que a notação  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$  representa o conjunto de vértices de  $\mathcal{B}_\xi$ .

#### 4.2.3 Condição de Setor Generalizada

Considere o vetor linha  $G \in \mathbb{R}^{1 \times n_\xi}$  e um escalar positivo  $\theta$ . Desta forma, é definido o seguinte conjunto (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005)

$$\mathcal{S} \triangleq \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : |(K - G\theta^{-1})\xi| \leq 1\}. \quad (131)$$

A partir da não-linearidade zona morta  $\psi(v_c)$  em (57) e de  $\mathcal{S}$  como definido acima, o seguinte lema pode ser apresentado (LOQUEN, 2010).

**Lema 6** *Se  $\xi \in \mathcal{S}$ , então a relação*

$$\psi(v_c)' \theta^{-1} [\psi(v_c) - G\theta^{-1}\xi] \leq 0 \quad (132)$$

*é verificada para qualquer escalar positivo  $\theta$ .*

Observe que, a partir do Lema 1, a região

$$\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi' P \xi \leq 1\} \quad (133)$$

é uma estimativa da região de atração do sistema em malha fechada, se a função candidata de Lyapunov  $V(\xi)$ , satisfaz as condições (9)-(11). Desta forma, a fim de garantir que (132) é válida em  $\mathcal{R}$ , deve-se garantir que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ . De maneira similar ao resultado apresentado na Seção 4.2.2, esta inclusão é verificada se:

$$\begin{bmatrix} P & K' - G'\theta^{-1} \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (134)$$

### 4.3 Resultado Principal

Nesta seção, apresenta-se uma abordagem LMI para resolver o problema de síntese de *anti-windup* estático introduzido na seção 4.1.

Neste caso, considerando

$$V(\xi) = \xi' P \xi, \quad (135)$$

tem-se:

$$\dot{V}(\xi) = \xi' P \xi + \xi' P \dot{\xi}. \quad (136)$$

Considerando o vetor auxiliar  $\zeta = [\xi(t)' \quad z(t)' \quad \psi(v_c)']'$ , pode-se reescrever (136) da seguinte forma:

$$\dot{V}(\xi) = \zeta' \Lambda_1(\xi) \zeta, \quad (137)$$

com

$$\Lambda_1(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_a(\xi)P + P\mathcal{A}_a(\xi) & P\mathcal{A}_b(\xi) & P[\mathcal{A}_c(\xi) - \mathcal{M}E_c] \\ \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix}.$$

Definem-se agora as seguintes matrizes dependentes dos estados:

$$\mathcal{N}_0(\xi) = [\Omega_a(\xi) \quad \Omega_b(\xi) \quad \Omega_c(\xi)], \quad \mathcal{N}_1(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_2 & -\xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_3 & -\xi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_n & -\xi_{(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (138)$$

Observe que  $\mathcal{N}_1(\xi)\xi = 0$ , isto é, a matriz  $\mathcal{N}_1(\xi)$  é um *aniquilador linear* de  $\xi$  como proposto em (TROFINO, 2000). Com base em (128), segue que  $\mathcal{N}_0(\xi)\zeta = 0$ . Assim, definindo

$$\mathcal{N}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_1(\xi) & 0_{n_z+1} \\ \mathcal{N}_0(\xi) \end{bmatrix}, \quad (139)$$

obtem-se  $\mathcal{N}(\xi)\zeta = 0$ . A partir das definições apresentadas acima e observando o Lema 1, a ideia é satisfazer  $\dot{V}(\xi) < 0$  ao longo das trajetórias do sistema (128), isto é  $\zeta' \Lambda_1(\xi) \zeta < 0$  para qualquer  $\zeta$  tal que  $\mathcal{N}(\xi)\zeta = 0$ . Aplicando o Lema de Finsler apresentado no Apêndice A, a condição  $\dot{V}(\xi) < 0$  é satisfeita se a seguinte condição é satisfeita:

$$\zeta' (\Lambda_1(\xi) + L\mathcal{N}(\xi) + \mathcal{N}(\xi)'L') \zeta < 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{B}_\xi, \quad (140)$$

sendo  $L$  um multiplicador livre a ser determinado.

A partir do Lema 6, se  $\xi \in \mathcal{S}$ , então a relação  $\psi(v_c)' \theta^{-1} [\psi(v_c) - G\theta^{-1}\xi] \leq 0$  é verificada para qualquer escalar positivo  $\theta$ . Assim, se

$$\zeta' (\Lambda_1(\xi) + L\mathcal{N}(\xi) + \mathcal{N}(\xi)'L') \zeta - 2\psi(v_c)' \theta^{-1} [\psi(v_c) - G\theta^{-1}\xi] < 0 \quad (141)$$

é verificado, então (140) é satisfeita para todo  $\xi \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi$ .

Note que pode-se reescrever (141) da seguinte forma

$$\zeta' (\Lambda_2(\xi) + L\mathcal{N}(\xi) + \mathcal{N}(\xi)'L') \zeta < 0, \quad (142)$$

com

$$\Lambda_2(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_a(\xi)P + P\mathcal{A}_a(\xi) & P\mathcal{A}_b(\xi) & P[\mathcal{A}_c(\xi) - \mathcal{M}E_c] + G'\theta^{-2} \\ \star & 0 & 0 \\ \star & \star & -2\theta^{-1} \end{bmatrix}.$$

A partir do desenvolvimento acima, o seguinte resultado é apresentado.

**Teorema 5** *Considere o sistema (125) e sua DAR (128) com **H1**, **H2** e **H3** satisfeitas. Se existem matrizes constantes  $P = P' > 0$ ,  $\bar{L}$ ,  $E_c$  e  $G$  de dimensões apropriadas e um escalar positivo  $\theta$ , satisfazendo o seguinte conjunto de desigualdades para todo  $\xi \in \mathcal{B}_\xi$*

$$\Lambda_3(\xi) + \bar{L}\mathcal{N}(\xi) + \mathcal{N}(\xi)'\bar{L}' < 0, \quad (143)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \theta q_r \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (144)$$

$$\begin{bmatrix} Q & K'\theta - G' \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (145)$$

sendo  $Q = P\theta^2$ ,  $\Lambda_3(\xi) = \Lambda_2(\xi)\theta^2$  e  $\bar{L} = L\theta^2$ , então tem-se que  $E_c$  é tal que para todo  $\xi(0) \in \mathcal{R}$  a trajetória  $\xi(t)$  pertence a  $\mathcal{R}$  e tende assintoticamente à origem para  $t \rightarrow \infty$ , sendo  $\mathcal{R}$  definida em (133).

**Prova.**

Se as desigualdades (143)-(145) são factíveis para cada  $\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$ , então, por convexidade, também são satisfeitas para todo  $\xi \in \mathcal{B}_\xi$ . Considere agora  $Q\theta^{-2} = P > 0$  e  $V(\xi) = \xi'P\xi$ . Pré e pós-multiplicando a desigualdade (143) por  $\zeta'\theta^{-1}$  e  $\zeta\theta^{-1}$ , respectivamente, segue que  $\dot{V}(\xi) - 2\psi(v_c)'\theta^{-1}[\psi(v_c) - G\theta^{-1}]\xi < 0$ . Assim, se  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi$ , a condição (143) assegura que para todo  $\xi(0) \in \mathcal{R}$  a trajetória  $\xi(t)$  pertence a  $\mathcal{R}$  e tende assintoticamente à origem para  $t \rightarrow \infty$ . Seja agora  $\Pi = \text{diag}(I_n\theta^{-1}, 1)$ . Pré e pós-multiplicando (144) e (145) por  $\Pi$ , tem-se (130) e (134), respectivamente. Desta forma, segue que a inclusão  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\xi \cap \mathcal{S}$  é satisfeita, o que conclui a prova.  $\square$

#### 4.4 Cálculo do Ganho de Anti-windup

Observe que a relação (143) no Teorema 5 é uma desigualdade matricial bilinear (BMI), devido aos produtos  $PME_c$  e  $G'\theta^{-2}$ . Encontrar uma solução para esta BMI é uma tarefa complexa, pois trata-se de um problema não-convexo. Entretanto, uma solução alternativa pode ser encontrada através da utilização de um algoritmo iterativo baseado em LMI. Este algoritmo pode ser visto como uma adaptação do algoritmo proposto em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001) (*coordinate-descent algorithm*). Primeiramente, note que podemos obter uma nova expressão para a BMI (143) da seguinte forma

$$\mathcal{E}_1'\Lambda_4(\xi)\mathcal{E}_1 + \bar{L}\mathcal{N}(\xi) + \mathcal{N}(\xi)'\bar{L}' < 0, \quad (146)$$

com

$$\Lambda_4(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_a(\xi)Q + Q\mathcal{A}_a(\xi) & Q\mathcal{A}_b(\xi) & Q\mathcal{A}_c(\xi) + G' & -QM \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -2\theta & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} I_{n_\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & E_c \end{bmatrix}.$$

Definindo agora  $\mathcal{N}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_c & -I_{n_c} \end{bmatrix}$  com  $\mathcal{N}_a \in \mathbb{R}^{n_c \times (n_\xi + n_z + 1 + n_c)}$ , percebe-se que a partir de (146) tem-se  $\mathcal{N}_a\mathcal{E}_1 = 0$ .

Observando que

$$\mathcal{E}'_1 \begin{bmatrix} \bar{L}\mathcal{N}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{E}_1 = \bar{L}\mathcal{N}(\xi),$$

a partir da aplicação do Lema de Finsler, tem-se que (146) é equivalente à:

$$\Lambda_4(\xi) + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}(\xi) & 0 \end{bmatrix} + L_a \mathcal{N}_a \right\} < 0, \quad (147)$$

sendo  $L_a$  um multiplicador livre.

Então, se (147) for verificado, a condição (143) é satisfeita. Além disso, pode-se reescrever (147) da seguinte forma:

$$\Lambda_4(\xi) + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad L_a \right\} \begin{bmatrix} \mathcal{N}(\xi) & 0 \\ \mathcal{N}_a \end{bmatrix} \right\} < 0. \quad (148)$$

Observe que o termo  $L_a \mathcal{N}_a$  é bilinear (devido ao produto do ganho de *anti-windup*  $E_c$  com o multiplicador livre  $L_a$ ). Para solucionar este problema, propõe-se a utilização do algoritmo apresentado em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001). Neste caso, pode-se escolher

$$L'_a = [F'_s \quad F'], \quad K_s = F_s F^{-1} \quad \text{e} \quad R = F E_c,$$

com  $F \in \mathfrak{R}^{n_c \times n_c}$  e  $F_s \in \mathfrak{R}^{(n_\xi + n_z + 1) \times n_c}$ . Lembrando que  $\mathcal{N}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_c & \vdots & -I_{n_c} \end{bmatrix}$  e aplicando as definições acima tem-se que (148) é equivalente a:

$$\Lambda_4(\xi) + L_e \mathcal{N}_e(\xi) + \mathcal{N}_e(\xi)' L'_e < 0, \quad (149)$$

com

$$L_e = \begin{bmatrix} \bar{L} & K_s \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_e(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}(\xi) & 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & R \end{bmatrix} & -F \end{bmatrix}. \quad (150)$$

Observe que as matrizes  $K_s$ ,  $R$  e  $F$  são desconhecidas. Então o seguinte resultado pode ser apresentado.

**Teorema 6** *Considere o sistema (125) e sua DAR (128) com **H1**, **H2** e **H3** satisfeitas. Se existem matrizes constantes  $P = P' > 0$ ,  $\bar{L}$ ,  $K_s$ ,  $R$ ,  $F$  e  $G$  de dimensões apropriadas, e um escalar positivo  $\theta$ , satisfazendo as desigualdades matriciais (149), (144) e (145), para todo  $\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$ , então tem-se que o ganho  $E_c = F^{-1}R$  garante que para todo  $\xi(0) \in \mathcal{R}$  a trajetória  $\xi(t)$  pertence a  $\mathcal{R}$  e tende assintoticamente à origem para  $t \rightarrow \infty$ , sendo que  $\mathcal{R}$  é definida em (133).*

#### 4.4.1 Algoritmo e Problemas de Otimização

Nesta seção apresenta-se uma forma de aplicar o resultado proposto no Teorema 6 para calcular o ganho de *anti-windup* enquanto que uma estimativa da região de atração do sistema (123) é maximizada.

Para lidar com este problema, em primeiro lugar o seguinte problema de otimização é apresentado:

$$\min \text{traço}(Q) - e_1 \theta \{ (144), (145), (149), \forall \xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi) \} \quad (151)$$

sendo  $e_1$  um fator de peso escolhido para a variável  $\theta$ . Observe que  $e_1$  é utilizado devido à definição  $Q = P\theta^2$ .

Note que a minimização de traço( $Q$ ) –  $e_1\theta$  é um critério multiobjetivo que leva implicitamente a uma maximização do tamanho de  $\mathcal{R}$ . Com efeito, como  $P = \frac{Q}{\theta^2}$ , o critério minimiza o traço de  $Q$  e maximiza  $\theta$  simultaneamente, ou seja, implicitamente minimiza-se o traço da matriz  $P$ . Outros critérios clássicos para tratar a dimensão de conjuntos elipsoidais, tais como a maximização do volume, maximização menor eixo, a minimização do traço de  $P$  e na maximização em determinadas direções (ver, por exemplo, (TARBOURIECH et al., 2011)) podem também ser aplicados.

No entanto, observe que a condição (149) ainda é uma BMI se  $K_s$ ,  $R$  e  $F$  forem livres em  $L_e\mathcal{N}_e(\xi)$ . Neste caso, pode-se aplicar um algoritmo semelhante ao proposto em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001) para encontrar uma solução sub-ótima para o problema de otimização em (151) como detalhado abaixo.

### Algoritmo 1:

#### 1. (Passo $k = 1$ – inicialização )

A solução proposta neste passo é fixar os termos  $R$  e  $F$  para determinar uma solução de (149). Assim, a inicialização pode ser feita fixando  $R = 0$  e  $F = I_{n_c}$ . Como  $\mathcal{R}$  é um domínio elipsoidal, a solução do problema (151) pode ser considerada levando à determinação de  $K_s$ . Neste passo, note que  $E_c = 0$ . Assim, determina-se  $\mathcal{R}$  sem a utilização do ganho de *anti-windup*.

#### 2. (Passo $k$ – Primeira parte)

Uma vez que  $K_s$  é dado, o problema de otimização (151) pode ser considerado para encontrar  $R$  e  $F$ . Observe que neste passo encontra-se o ganho de *anti-windup* fazendo  $E_c = F^{-1}R$ .

#### 3. (Passo $k$ – segunda parte)

Fixa-se  $R$  e  $F$  e soluciona-se o problema de otimização (151) para calcular  $\bar{L}$  e  $K_s$ .

#### 4. (Passo de finalização)

Suponha que  $\epsilon > 0$  seja um escalar dado que define a precisão da solução. Se  $\|E_c(k) - E_c(k-1)\| < \epsilon$ , então o algoritmo é finalizado, caso contrário  $k \leftarrow k + 1$  e retorna-se para o passo 2.

**Observação 7** Ao utilizar o Algoritmo 1, é importante ressaltar que evita-se a iteração entre as variáveis desconhecidas de interesse  $P$  e  $E_c$ . A principal vantagem neste caso é que a matriz  $P$  é uma variável livre em cada passo de iteração. Este fato tende a reduzir o conservadorismo associado ao tamanho da região elipsoidal de estabilidade  $\mathcal{R}$ .

**Observação 8** Relembrando que a região  $\mathcal{B}_x$  corresponde a região onde a factibilidade das LMIs deve ser verificada, então os mesmos passos apresentados na Observação 4 no Capítulo 3 podem ser utilizados.

## 4.5 Extensão dos Resultados

Esta seção apresenta duas extensões dos resultados. Primeiramente são considerados sistemas não-lineares incertos, tais que os parâmetros incertos aparecem de forma racional no sistema. Em seguida, aborda-se a estabilidade  $\mathcal{L}_2$  de sistemas sujeitos a perturbações.

#### 4.5.1 Sistemas Não-lineares Incertos

Neste caso, a seguinte classe de sistemas de controle não-lineares incertos é considerada:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \delta) + g(x, \delta) \text{sat}(v_c) \\ y &= H_{y_x} x\end{aligned}\quad (152)$$

sendo que  $\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_\delta}]' \in \mathcal{B}_\delta \subset \mathbb{R}^{n_\delta}$  são os parâmetros incertos do sistema e agora  $f$  e  $g$  são funções racionais dos estados  $x$  e dos parâmetros incertos  $\delta_i, i = 1, \dots, n_\delta$ . Da mesma forma que a região  $\mathcal{B}_\xi, \mathcal{B}_\delta$  é dada por um polítopo e pode ser descrita como um envelope convexo de seus vértices, tal que a notação  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$  representa o conjunto de vértices de  $\mathcal{B}_\delta$ .

Considerando o sistema (152), assume-se que o compensador dinâmico de saída é dado por (124) e um ganho *anti-windup* é adicionado a este controlador. Assim, o sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \delta) + g(x, \delta)v_c - g(x, \delta)\psi(v_c) \\ y &= H_{y_x} x \\ \dot{\eta} &= f_\eta(\eta, y) - E_c \psi(v_c) \\ v_c &= H_{v_\eta} \eta + H_{v_y} y.\end{aligned}\quad (153)$$

onde  $E_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n_c}$  é uma matriz constante que representa o ganho de *anti-windup* a ser determinado.

Para o sistema (153), a representação algébrica-diferencial (DAR) em (128) pode ser considerada. No entanto, observe que agora o vetor auxiliar  $z$  contém termos polinomiais e racionais em função de  $(x, \eta, \delta)$  (termos com ordem maior ou igual a dois). Da mesma forma,  $A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2, C_3, C_4, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_b$  e  $\Omega_c$  são funções matriciais afins em  $(x, \eta, \delta)$ .

A partir das considerações acima, apresenta-se o seguinte resultado.

**Teorema 7** *Considere o sistema incerto (153) e sua DAR correspondente com **H1, H2** e **H3** satisfeitas  $\forall \delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Se existem matrizes constantes  $P = P' > 0, \bar{L}, K_s, R, F$  e  $G$  de dimensões apropriadas, e um escalar positivo  $\theta$ , satisfazendo as desigualdades matriciais (149), (144) e (145), para todo  $\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$  e todo  $\delta \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ , então tem-se que o ganho  $E_c = F^{-1}R$  garante que para todo  $\xi(0) \in \mathcal{R}$  a trajetória  $\xi(t)$  pertence a  $\mathcal{R}$  e tende assintoticamente à origem para  $t \rightarrow \infty$ , sendo que  $\mathcal{R}$  é definida em (133).*

É importante enfatizar que, neste caso a condição (149) será afim em  $x$  e  $\delta$ . Desta forma, por convexidade, a mesma deve ser testada para cada vértice de  $\mathcal{B}_\xi$  em todos os vértices de  $\mathcal{B}_\delta$ , i.e. em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ .

#### 4.5.2 Estabilidade $\mathcal{L}_2$

Considere a seguinte classe de sistemas de controle não-lineares

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w) + g(x) \text{sat}(v_c) \\ y &= H_{y_x} x\end{aligned}\quad (154)$$

sendo que  $w$  corresponde a um sinal de perturbação externa (ou exógeno). Neste caso, considera-se que  $f$  é racional em  $x$  e linear em  $w$ . Supõe-se ainda que  $w$  é limitado em energia, ou seja,  $w \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n_w}$  com

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \beta\} \quad (155)$$

onde

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w(t)'w(t)dt,$$

i.e.  $\|w\|_2$  denota a norma  $\mathcal{L}_2$  de  $w$ , e  $\beta \in \mathbb{R}$  é um parâmetro positivo que define o tamanho de  $\mathcal{W}$ .

Da mesma forma que apresentado anteriormente, considerando o sistema (154), assume-se que o compensador dinâmico de saída é dado por (124) e um ganho *anti-windup* é adicionado a este controlador, onde  $E_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n_c}$  é uma matriz constante que representa o ganho de *anti-windup* a ser determinado.

Neste caso, pode-se reescrever o sistema em malha fechada obtido pela interconexão de (154) e (124) com a compensação de *anti-windup* da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathcal{A}_a(\xi)\xi(t) + \mathcal{A}_b(\xi)z(t) + (\mathcal{A}_c(\xi) - \mathcal{M}E_c)\psi(v_c(t)) + \mathcal{A}_d(\xi)w(t) \\ 0 &= \Omega_a(\xi)\xi(t) + \Omega_b(\xi)z(t) + \Omega_c(\xi)\psi(v_c(t)) + \Omega_d(\xi)w(t) \end{aligned} \quad (156)$$

Conforme visto na Seção 2.1.2, para o caso de sistemas sujeitos a perturbações define-se as seguintes regiões

$$\mathcal{R}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi'P\xi \leq \alpha\} \quad (157)$$

$$\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi'P\xi \leq \sigma^{-1}\} \quad (158)$$

com  $\sigma^{-1} = \alpha + \beta$ .

Definindo agora

$$\mathcal{J}(t) = \dot{V}(\xi(t)) + \frac{y(t)'y(t)}{\gamma^2} - w(t)'w(t),$$

com  $\dot{V}(\xi)$  definida em (135), então se  $\forall T > 0$  tem-se  $\mathcal{J}(t) < 0$ , segue que

$$\int_0^T \mathcal{J}(t)dt = V(T) - V(0) + \frac{1}{\gamma^2} \int_0^T y(t)'y(t)dt - \int_0^T w(t)'w(t)dt < 0.$$

Assim, supondo que  $\xi(0) \in \mathcal{R}_0$  e  $\|w\|_2^2 \leq \beta$ :

- se  $w(t) = 0$ , segue que  $\dot{V}(\xi(t)) + \gamma^{2-1}y(t)'y(t) < 0$ . Desta forma, garante-se que  $\xi(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja a estabilidade assintótica do sistema (154) em malha fechada é garantida.
- se  $w(t) \neq 0$  com  $w$  satisfazendo (155):

- as trajetórias do sistema não saem do conjunto  $\mathcal{R}$ , pois  $\xi(0) \in \mathcal{R}_0$  e

$$V(\xi(T)) < V(\xi(0)) + \|w\|_2^2 - \gamma^{-2}\|y\|_2^2 \leq \alpha + \beta = \sigma^{-1}, \forall T > 0.$$

- a norma  $\mathcal{L}_2$  do sinal de saída é limitada, i.e.  $\|y\|_2^2 < \gamma^2\|w\|_2^2 + \gamma^2V(0)$ .

Sejam agora:

$$\Lambda_{4w}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_a(\xi)Q + Q\mathcal{A}_a(\xi) & Q\mathcal{A}_b(\xi) & Q\mathcal{A}_c(\xi) + G' & Q\mathcal{A}_d(\xi) & QH_{y_x} & -QM \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \star & \star & -2\theta & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -I_{n_w} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\lambda I_{n_y} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix},$$

com  $\lambda = \theta^2 \gamma^2$ ,  $\zeta = [\xi' \ z' \ w' \ y' \ \psi']'$ ,  $\mathcal{N}_0(\xi) = \begin{bmatrix} \Omega_a(\xi) & \Omega_b(\xi) & \Omega_d(\xi) & 0_{n_z \times n_y} & \Omega_c(\xi) \end{bmatrix}$  e

$$\mathcal{N}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_1(\xi) & 0_{n_z+n_w+1} \\ \mathcal{N}_0(\xi) \end{bmatrix}.$$

Pode-se então redefinir  $\mathcal{N}_e(\xi)$  e  $L_e$  como em (150) com matrizes  $K_s$ ,  $R$  e  $F$  de dimensões apropriadas.

A partir das definições acima o seguinte resultado pode ser enunciado.

**Teorema 8** *Considere o sistema em malha fechada obtido pela interconexão de (154) e (124) com laço de anti-windup e sua DAR dada por (156) com **H1**, **H2** e **H3** satisfeitas e  $w \in \mathcal{W}$ . Se existem matrizes constantes  $P = P' > 0$ ,  $\bar{L}$ ,  $K_s$ ,  $R$ ,  $F$  e  $G$  de dimensões apropriadas, e escalares positivos  $\lambda$  e  $\theta$ , satisfazendo as seguintes desigualdades matriciais*

$$\Lambda_{4w}(\xi) + L_e \mathcal{N}_e(\xi) + \mathcal{N}_e(\xi)' L_e' < 0, \quad (159)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \theta q_r \\ \star & \sigma \end{bmatrix} > 0, \quad (160)$$

$$\begin{bmatrix} Q & K'\theta - G' \\ \star & \sigma \end{bmatrix} \geq 0, \quad (161)$$

então, tem-se que o ganho  $E_c = F^{-1}R$  garante que:

- para todo  $w \in \mathcal{W}$  e  $\xi(0) \in \mathcal{R}_0$ , com  $\mathcal{R}_0$  definida em 157, as trajetórias do sistema em malha fechada não saem do conjunto  $\mathcal{R}$ , definida por (158). Além disto tem-se  $\|y\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2 + \gamma^2 V(0)$ .
- se  $w(t) = 0$ , para todo  $\xi(0) \in \mathcal{R}$ , as trajetórias do sistema em malha fechada pertencem a  $\mathcal{R}$  e tendem assintoticamente à origem para  $t \rightarrow \infty$ .

### Prova.

Os mesmos passos apresentados na prova do Teorema 5 podem ser aplicados considerando agora a DAR (156). Em resumo, (159) assegura que  $\mathcal{J}(t) < 0$ ,  $\forall \xi \in (\mathcal{B}_\xi \cap \mathcal{S})$ . As relações (160) e (161), asseguram que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\xi$  e  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ , respectivamente.  $\square$

#### 4.5.2.1 Problemas de Otimização

Nesta seção são apresentadas formas de aplicar o resultado do Teorema 8 para caracterizar a estabilidade  $\mathcal{L}_2$  entrada-estado e a estimação do ganho  $\mathcal{L}_2$  para o sistema em malha fechada.

- Estabilidade  $\mathcal{L}_2$  Entrada-Estado:

A ideia principal é determinar um limite superior  $\beta$  para a norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação de forma que as trajetórias do sistema em malha fechada sejam limitadas. Neste caso, assume-se que  $\xi(0) = 0$  e desta forma tem-se  $\sigma^{-1} = \beta$ . Assim, com base no Teorema 8 o seguinte problema de otimização pode ser utilizado:

$$\min \sigma \{ (159), (160), (161) \} \quad (162)$$

- Estimativa do ganho  $\mathcal{L}_2$ :

Dado um limite superior admissível  $\beta$  para a norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação  $w$ , a ideia é calcular um limite superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $y$  através da utilização do Teorema 8. Neste caso, assume-se também que  $\xi(0) = 0$  e pode-se aplicar o seguinte problema de otimização:

$$\min \gamma^2 \{ (159), (160), (161) \} \quad (163)$$

## 4.6 Exemplo Numérico

**Exemplo 6** Considere o sistema não-linear dado abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (x^2(t) - 1)x(t) + \text{sat}(v_c(t)) \\ y(t) &= x(t), \end{aligned} \quad (164)$$

e o controlador

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -x(t) \\ v_c(t) &= \eta(t) - 2y(t). \end{aligned} \quad (165)$$

Neste caso, supõe-se que o domínio dos estados é limitado pelo conjunto:  $\mathcal{B}_\xi := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| \leq \alpha_1, |\xi_2| \leq \alpha_2\}$ , sendo  $\alpha_1 = 1.3$  e  $\alpha_2 = 2.3$

Considerando a representação DAR dada em (128) para o sistema representado em (164)-(165), com  $z(t) = x^2$  tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a(\xi) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_b(\xi) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_c(\xi) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \Omega_a(\xi) &= [x \ 0], \quad \Omega_b(\xi) = -1, \quad \Omega_c(\xi) = 0, \quad K = [ -2 \ 1 ]. \end{aligned}$$

Baseado no Algoritmo 1 apresentado na Seção 4.4.1, é determinada uma estimativa da região de atração  $\mathcal{R}_1$  para  $E_c = 0$  (passo de inicialização). A Figura 11 mostra a estimativa  $\mathcal{R}_1$  obtida considerando  $e_1 = 3$  em (151). Neste caso, a matriz  $P$  é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8455 & -0.1666 \\ -0.1666 & 0.3033 \end{bmatrix}.$$

Nesta figura também é apresentado um esboço da região de atração do sistema. Note que a mesma é limitada por um ciclo-limite.

Aplicando o Algoritmo 1, com  $e_1 = 3$ , obtém-se:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6195 & -0.0808 \\ -0.0808 & 0.2353 \end{bmatrix}, \quad E_c = -1.0396.$$

A Figura 12 apresenta a nova estimativa da região de atração  $\mathcal{R}_2$  para o valor de  $E_c$  acima.

Comparando as Figuras 11 e 12, pode-se perceber que a real região de atração é aumentada graças ao laço de anti-windup. Observe que utilizando a estrutura com o ganho de anti-windup o ciclo limite que define a fronteira da região de atração do sistema é eliminado.

Para fins de comparação, são apresentadas as duas estimativas na Figura 13, onde  $\mathcal{R}_1$  está em linha tracejada e  $\mathcal{R}_2$  está em linha sólida. Nesta figura, ainda é apresentada a região onde o controle não satura denotada por  $\mathcal{R}_{ns}$ .

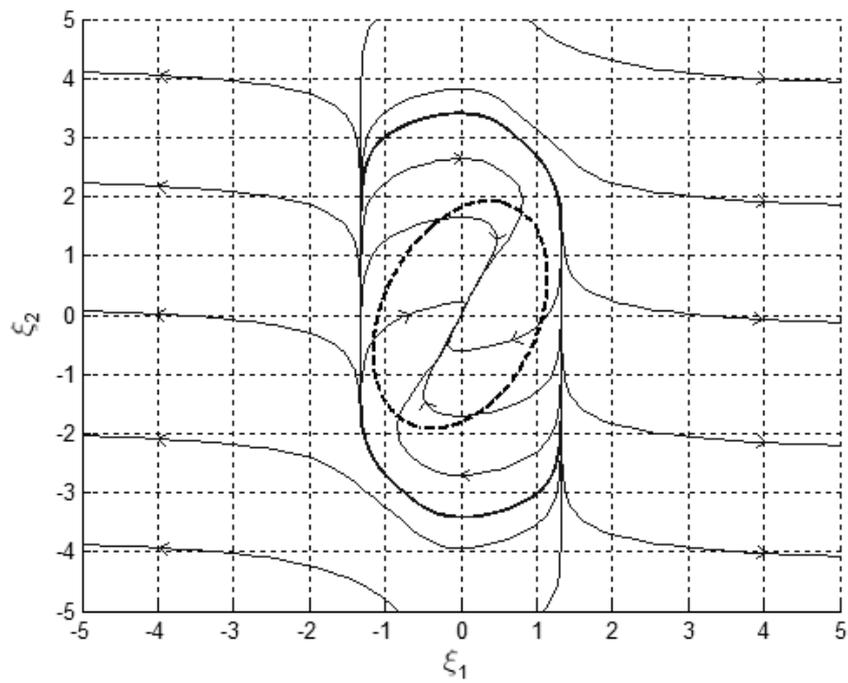


Figura 11: Estimativa da região  $\mathcal{R}_1$  sem o ganho de anti-windup.

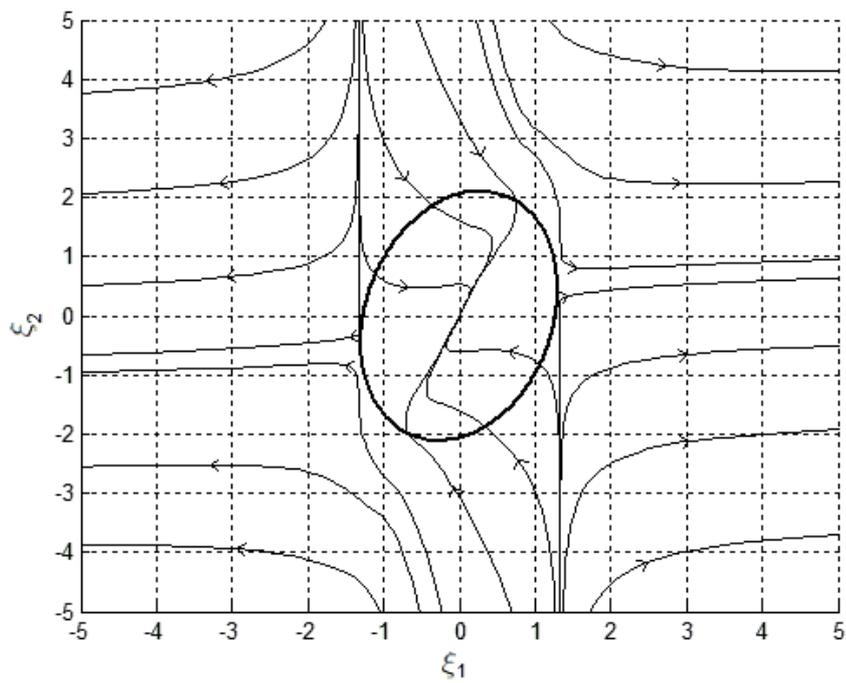


Figura 12: Estimativa da região  $\mathcal{R}_2$  com o ganho de anti-windup.

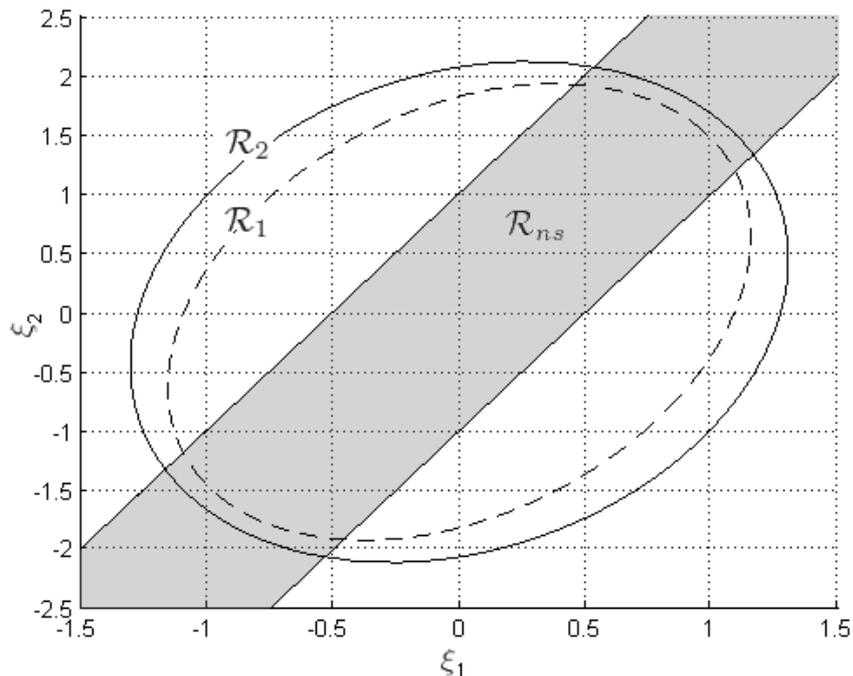


Figura 13: Comparação entre regiões  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ .

O sinal de saída e o sinal de controle obtidos a partir da condição inicial  $\xi(0) = [-1.3 \quad -0.45]'$  considerando o controlador com e sem o ganho de anti-windup são mostrados na Figura 14. Neste caso, note que, com o ganho de anti-windup (linha sólida), o controle permanece menos tempo na saturação e o tempo de acomodação (convergência do sinal para a origem) é significativamente mais rápido.

#### 4.7 Considerações Finais

Este capítulo apresentou um método para calcular ganhos de *anti-windup* para uma classe de sistemas não-lineares sujeitos à saturação do atuador. A abordagem se baseou em uma DAR de sistemas racionais e em uma versão modificada da condição generalizada do setor para lidar com a saturação. A partir destes elementos, tratou-se o problema do aumento da região de atração do sistema em malha fechada por meio de um ganho *anti-windup*. Este problema foi abordado indiretamente através de um algoritmo baseado em LMIs que permite projetar um ganho *anti-windup* levando à maximização de uma estimativa da região de atração. Extensões dos resultados são apresentadas para tratar sistemas incertos e sistemas sujeitos a perturbações. Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar a aplicação dos resultados.

Estes métodos também podem ser vistos no trabalho recentemente publicado em (OLIVEIRA et al., 2011a) para cálculo de *anti-windup* com o objetivo de aumentar a região de atração. O trabalho completo, com as extensões dos resultados, apresentado neste capítulo foi recentemente submetido em (OLIVEIRA et al., 2012).

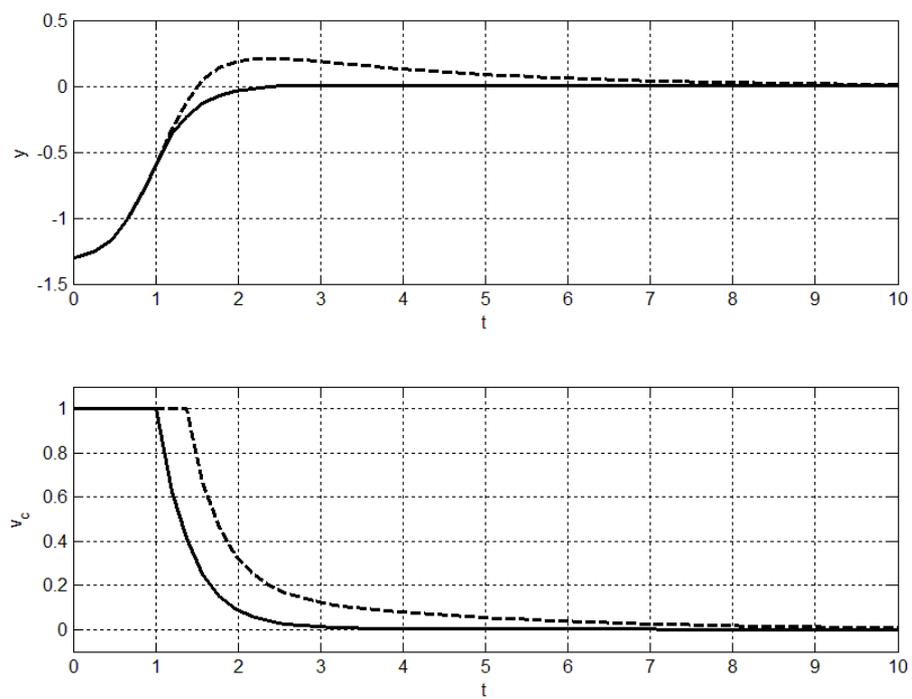


Figura 14: Sinal de saída e sinal de controle - com anti-windup (linha tracejada) e sem anti-windup (linha contínua).

## 5 SÍNTESE DE COMPENSADORES ANTI-WINDUP - ABORDAGEM CONVEXA

Neste capítulo a elaboração de uma nova técnica para sintetizar compensadores de *anti-windup* para sistemas não-lineares racionais sujeitos à saturação do atuador é apresentada. Conforme visto no capítulo anterior, com um compensador *anti-windup* é possível aumentar a região de atração do sistema em malha fechada. Entretanto, ao utilizar métodos baseados em LMIs, busca-se evitar a utilização de técnicas iterativas, ou seja, evita-se a utilização de algoritmos para encontrar uma solução. Além disto, seria interessante o desenvolvimento de métodos que permitissem tratar sistemas multivariáveis sem utilizar procedimentos como busca linear em parâmetros.

Neste sentido, propõe-se uma nova formulação do problema, onde a inclusão das matrizes dependentes dos estados é tratada diferentemente ao apresentado no capítulo anterior, permitindo assim encontrar uma solução com métodos diretos. O método aplica uma representação algébrica diferencial (DAR) de sistemas não-lineares para elaborar condições, com base na teoria de Lyapunov, que podem ser resolvidas numericamente nos vértices de um dado polítopo de estados admissíveis. Para lidar com a não-linearidade de saturação, é utilizada diretamente a versão modificada da condição de setor generalizada proposta em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005). A partir desses elementos, condições de estabilização local são desenvolvidas diretamente na forma de LMIs. Além disso, um problema de otimização baseado em LMI é proposto para calcular um ganho *anti-windup* a fim de obter uma região de estabilidade assintótica maximizada, que implicitamente leva à maximização da região de atração do sistema em malha-fechada.

Este desenvolvimento pode ser visto como uma melhoria do resultado apresentado no Capítulo 4, onde as principais diferenças e vantagens são:

- (a) as condições são diretamente tratadas em termos de LMIs evitando procedimentos iterativos de relaxamento;
- (b) permite considerar sistemas de controle não-lineares multivariáveis de uma forma simples;
- (c) permite considerar controladores com saídas racionais nos estados, ou seja, controladores na forma de realimentação linearizante podem ser tratados (MENON et al., 2006; HERRMANN et al., 2010; VALMORBIDA et al., 2010).

### 5.1 Apresentação do Problema

Considere a seguinte classe de sistemas de controle:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))\text{sat}(v_c(t)) \\ y(t) &= h_y(x(t))\end{aligned}\tag{166}$$

sendo que  $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estados;  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida;  $v_c \in \mathbb{R}^{n_v}$  é a entrada de controle;  $\text{sat}(\cdot)$  é a função clássica de saturação, com  $u_{0(i)} > 0, i = 1, \dots, n_v$  denotando o nível simétrico da saturação do  $i$ -ésimo atuador. Assume-se que  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_v}, h_y : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_y}$  são funções racionais em  $x$  satisfazendo condições de existência e unicidade da solução para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ .

Da mesma forma que no Capítulo 4, em relação aos efeitos indesejáveis causados pela saturação, um ganho de *anti-windup* é adicionado ao controlador (veja Figura 2.3.2). Assim, considerando a dinâmica do controlador e a estratégia de *anti-windup*, o sistema em malha fechada é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))\text{sat}(v_c(t)) \\ y(t) &= h_y(x(t)) \\ \dot{\eta}(t) &= f_\eta(\eta(t), y(t)) + E_c(\text{sat}(v_c(t)) - v_c(t)) \\ v_c(t) &= h_\eta(\eta(t), y(t)) \end{aligned} \quad (167)$$

sendo que  $h_\eta$  é uma função racional e  $E_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_v}$  é uma matriz constante representando o ganho de *anti-windup* a ser determinado.

Considerando a configuração acima, o objetivo está em determinar o ganho de *anti-windup*  $E_c$  tal que a região de atração do sistema em malha fechada (167) possa ser aumentada.

## 5.2 Preliminares

Esta seção apresenta alguns resultados básicos necessários para formular um método baseado em LMI para cálculo do ganho de *anti-windup* conforme apresentado na Seção 5.1.

### 5.2.1 Representação Algébrica Diferencial – DAR

Primeiramente, reescreve-se o sistema (167) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))v_c(t) - g(x(t))\psi(v_c(t)) \\ y(t) &= h_y(x(t)) \\ \dot{\eta}(t) &= f_\eta(\eta(t), y(t)) - E_c\psi(v_c(t)) \\ v_c(t) &= h_\eta(\eta(t), y(t)) \end{aligned} \quad (168)$$

com  $\psi(v_c(t))$  definida em (57).

Vale salientar que, sendo  $h_y$  e  $h_\eta$  funções racionais, o sistema em malha fechada resultante (168) é de fato racional nas variáveis correspondentes aos estados  $x$  e  $\eta$ . Assim, definindo o vetor de estados aumentado  $\xi(t) = [x(t)' \ \eta(t)']' \in \mathcal{B}_\xi \subset \mathbb{R}^{n_\xi}$ ,

$$\mathcal{B}_\xi = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} ; x \in \mathcal{B}_x \text{ e } \eta \in \mathcal{B}_\eta\},$$

com  $n_\xi = n + n_c$ , sempre será possível encontrar uma Representação Algébrica Diferencial (DAR) para (168), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathcal{A}_a \xi(t) + \mathcal{A}_b z(t) + (\mathcal{A}_c - \mathcal{W}E_c)\psi(v_c(t)) \\ 0 &= \Omega_a \xi(t) + \Omega_b z(t) + \Omega_c \psi(v_c(t)) \end{aligned} \quad (169)$$

sendo que  $\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n_c} \\ I_{n_c} \end{bmatrix}$ ;  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é um vetor auxiliar não-linear em relação à  $\xi, \psi$  contendo termos racionais e polinomiais (termos de ordem maior ou igual a dois);  $\mathcal{A}_a \in$

$\mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ ,  $\mathcal{A}_b \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_z}$ ,  $\mathcal{A}_c \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_v}$ ,  $\Omega_a \in \mathbb{R}^{n_z \times n_\xi}$ ,  $\Omega_b \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  e  $\Omega_c \in \mathbb{R}^{n_z \times n_v}$ , são funções matriciais afins em  $\xi$ .

Similarmente, como  $h_\eta$  é uma função racional em  $\xi$ , sempre é possível reescrever  $v_c(t)$  na forma apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} v_c(t) &= K_1 \xi(t) + K_2 \rho(t) \\ 0 &= \Xi_1 \xi(t) + \Xi_2 \rho(t) \end{aligned} \quad (170)$$

sendo  $\rho \in \mathbb{R}^{n_\rho}$  um vetor não-linear auxiliar função de  $(x, \eta)$  contendo termos racionais e polinomiais (termos de ordem maior ou igual a dois) de  $h_\eta$ , e  $K_1 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_\xi}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_\rho}$ ,  $\Xi_1 \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\xi}$  e  $\Xi_2 \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\rho}$  são funções matriciais afins em  $\xi$ .

Em relação ao sistema (169)-(170), assume-se que:

**(H1)** a origem ( $\xi = 0$ ) é um ponto de equilíbrio (localmente) assintoticamente estável;

e

**(H2)** o domínio  $\mathcal{B}_\xi$  é um dado politopo contendo a origem em seu interior.

Conforme visto nos capítulos precedentes, para garantir que a DAR (169)-(170) é bem definida (i.e., a unicidade da solução  $\xi(t)$  é assegurada), ainda é considerado que:

**(H3)** as funções matriciais  $\Omega_b$  e  $\Xi_2$  tem posto completo para todo  $\xi \in \mathcal{B}_\xi$ .

Nota-se que a partir de **H3** os vetores auxiliares  $z(t)$  e  $\rho(t)$  podem ser eliminados, respectivamente, de (169) e (170) levando a representação original do sistema em (168). Este procedimento pode ser realizado da seguinte forma:

$$z(t) = -\Omega_b^{-1}(\Omega_a \xi(t) + \Omega_c \psi(v_c(t))) \text{ e } \rho(t) = -\Xi_2^{-1} \Xi_1 \xi(t)$$

## 5.2.2 Resultados da Teoria de Lyapunov

Neste capítulo são utilizados os resultados apresentados no Lema 1, referentes à teoria de Lyapunov (KHALIL, 1996). Desta forma, para avaliar a estabilidade local do sistema (169), é considerada uma função de Lyapunov quadrática:

$$V(\xi) = \xi' P \xi, \quad P = P' > 0 \quad (171)$$

sendo que  $P \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ , e o seguinte conjunto de nível normalizado

$$\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi' P \xi \leq 1\}. \quad (172)$$

A partir do Lema 1, se  $V(\xi)$ , como definida acima, satisfaz as condições (9)-(11), para todo  $x \in \mathcal{B}_\xi$  e  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\xi$ , então  $\mathcal{R}$  é um conjunto contrativo e invariante contido na região de atração do sistema não-linear e pode ser visto como uma estimativa desta região (KHALIL, 1996).

## 5.2.3 Condição de Setor Generalizada

Considere que  $G_1 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_\xi}$  e  $G_2 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_\rho}$  são funções matriciais afins em  $\xi$ . Defina-se agora o seguinte conjunto

$$\mathcal{S} \triangleq \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : |(K_{1(i)} - G_{1(i)})\xi + (K_{2(i)} - G_{2(i)})\rho| \leq u_0, \quad i = 1, \dots, n_v\} \quad (173)$$

Nota-se que  $\rho$  é uma função de  $\xi$  e então o conjunto  $\mathcal{S}$  define um conjunto de vetores no domínio  $\xi$ .

A partir da não-linearidade zona-morta  $\psi(v_c)$  definida em (57) e do conjunto  $\mathcal{S}$  conforme definido acima, o seguinte Lema pode ser apresentado como uma generalização do Lema 1 em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005).

**Lema 7** Se  $\xi \in \mathcal{S}$  então a relação

$$\psi(v_c)'T[\psi(v_c) - G_1\xi - G_2\rho] \leq 0 \quad (174)$$

é verificada para qualquer matriz diagonal e definida positiva  $T \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ .

Vale destacar que as matrizes  $G_1$  e  $G_2$  podem ser afins em  $\xi$ . Como será visto posteriormente, estas matrizes serão consideradas como variáveis livres no problema de otimização.

### 5.3 Resultado Principal

Nesta seção uma abordagem LMI para tratar o problema de síntese de *anti-windup* como introduzido na Seção 5.1 é apresentada.

Inicialmente, considerando a função de Lyapunov quadrática definida em (171), segue que:

$$\dot{V}(\xi) = \dot{\xi}'P\xi + \xi'P\dot{\xi}. \quad (175)$$

Considerando o vetor auxiliar  $\zeta_0 = [\dot{\xi}(t)' \ \xi(t)']'$ , pode-se reescrever (175) da seguinte forma:

$$\dot{V}(\xi) = \zeta_0'\Lambda_1\zeta_0$$

sendo

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir do Lema 7, se  $\xi \in \mathcal{S}$ , então a relação  $\psi(v_c)'T[\psi(v_c) - G_1\xi - G_2\rho] \leq 0$  é verificada para qualquer matriz  $T$  diagonal e definida positiva. Assim, se

$$\zeta_0'\Lambda_1\zeta_0 - 2\psi(v_c)'T[\psi(v_c) - G_1\xi - G_2\rho] < 0, \forall \xi \in \mathcal{B}_\xi \quad (176)$$

é verificada, então  $\dot{V}(\xi) < 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi$ .

Considerando agora o vetor auxiliar  $\zeta = [\dot{\xi}(t)' \ \xi(t)' \ z(t)' \ \rho(t)' \ \psi(v_c(t))']'$  pode-se reescrever (176) da seguinte forma

$$\zeta'\Lambda_2\zeta < 0 \quad (177)$$

sendo

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & G_1'T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2'T \\ 0 & TG_1 & 0 & TG_2 & -2T \end{bmatrix}.$$

Sejam agora os seguintes escalares:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \dot{\xi}(t)'M_1(-\dot{\xi}(t) + \mathcal{A}_a\xi(t) + \mathcal{A}_bz(t) + (\mathcal{A}_c - \mathcal{W}E_c)\psi(v_c(t))) \\ \beta_2 &= \xi(t)'M_2(-\dot{\xi}(t) + \mathcal{A}_a\xi(t) + \mathcal{A}_bz(t) + (\mathcal{A}_c - \mathcal{W}E_c)\psi(v_c(t))) \\ \beta_3 &= z(t)'M_3(\Omega_a\xi(t) + \Omega_bz(t) + \Omega_c\psi(v_c(t))) \\ \beta_4 &= \rho(t)'M_4(\Xi_1\xi(t) + \Xi_2\rho(t)) \end{aligned} \quad (178)$$

A partir de (169) e (170), segue que as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_1 + \beta'_1 \\ 0 &= \beta_2 + \beta'_2 \\ 0 &= \beta_3 + \beta'_3 \\ 0 &= \beta_4 + \beta'_4 \end{aligned} \quad (179)$$

são satisfeitas, para quaisquer matrizes  $M_1 \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ ,  $M_2 \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ ,  $M_3 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  e  $M_4 \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\rho}$ .

A partir de (179), se

$$\zeta' \Lambda_2 \zeta + \beta_1 + \beta'_1 + \beta_2 + \beta'_2 + \beta_3 + \beta'_3 - \beta_4 - \beta'_4 < 0 \quad (180)$$

é verificada, então (177) é satisfeita. Observe que é possível reescrever (180) da seguinte forma

$$\zeta' \Lambda_3(\xi) \zeta < 0 \quad (181)$$

sendo

$$\Lambda_3(\xi) = \begin{bmatrix} -M_1 - M'_1 & P - M'_2 + M_1 \mathcal{A}_a & M_1 \mathcal{A}_b & 0 \\ * & M_2 \mathcal{A}_a + \mathcal{A}'_a M'_2 & M_2 \mathcal{A}_b + \Omega'_a M'_3 & -\Xi'_1 M'_4 \\ * & * & M_3 \Omega_b + \Omega'_b M'_3 & 0 \\ * & * & * & -M_4 \Xi_2 - \Xi_2 M'_4 \\ * & * & * & * \\ & & & & M_1 \mathcal{A}_c - M_1 \mathcal{W} E_c \\ & & & & M_2 \mathcal{A}_c - M_2 \mathcal{W} E_c + G'_1 T \\ & & & & M_3 \Omega_c \\ & & & & G'_2 T \\ & & & & -2T \end{bmatrix}.$$

Assuma agora que  $M_1$ ,  $M_3$  e  $M_4$  são não-singulares e que  $M_2 = M'_2 > 0$ . Define-se então as seguintes matrizes  $Q_1 = M_1^{-1}$ ,  $Q_2 = M_2^{-1}$ ,  $Q_3 = M_3^{-1}$ ,  $Q_4 = M_4^{-1}$ ,  $F = T^{-1}$  e

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix}. \quad (182)$$

Multiplicando a condição  $\Lambda_3(\xi) < 0$  à esquerda e a direita por  $\Pi_0$  definido em (182) e  $\Pi'_0$  respectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} -Q_1 - Q'_1 & Q_1 P Q_2 - Q_1 + \mathcal{A}_a Q_2 & \mathcal{A}_b Q'_3 & 0 \\ * & \mathcal{A}_a Q_2 + Q_2 \mathcal{A}'_a & \mathcal{A}_b Q'_3 + Q_2 \Omega'_a & -Q_2 \Xi'_1 \\ * & * & \Omega_b Q'_3 + Q_3 \Omega'_b & 0 \\ * & * & * & -\Xi_2 Q'_4 - Q_4 \Xi'_2 \\ * & * & * & * \\ & & & & \mathcal{A}_c F - \mathcal{W} E_c F \\ & & & & \mathcal{A}_c F - \mathcal{W} E_c F + Q_2 G'_1 \\ & & & & \Omega_c F \\ & & & & Q_4 G'_2 \\ & & & & -2F \end{bmatrix} < 0.$$

Observe que a desigualdade acima não é uma LMI devido ao termo  $Q_1 P Q_2$ . Entretanto, neste caso, pode-se considerar  $P = M_2$  de forma que  $P Q_2 = I_{n_\xi}$ . Além disto, para os termos  $Q_2 G'_1$ ,  $Q_4 G'_2$  e  $E_c F$ , podem ser consideradas as seguintes mudanças de variáveis:  $V'_1 = Q_2 G'_1$ ,  $V'_2 = Q_4 G'_2$  e  $E_F = E_c F$ . Neste caso, se

$$\Lambda_4(\xi) < 0, \quad (183)$$

com

$$\Lambda_4(\xi) = \begin{bmatrix} -Q_1 - Q'_1 & \mathcal{A}_a Q_2 & \mathcal{A}_b Q_3 & 0 \\ \star & \mathcal{A}_a Q_2 + Q_2 \mathcal{A}'_a & \mathcal{A}_b Q_3 + Q_2 \Omega'_a & -Q_2 \Xi'_1 \\ \star & \star & \Omega_b Q'_3 + Q_3 \Omega'_b & 0 \\ \star & \star & \star & -\Xi_2 Q'_4 - Q_4 \Xi'_2 \\ \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{A}_c F - \mathcal{W} E_F \\ \mathcal{A}_c F - \mathcal{W} E_F + V'_1 \\ \Omega_c F \\ V'_2 \\ -2F \end{bmatrix},$$

é verificada, então (177) é satisfeita.

A partir das considerações apresentadas acima, é formulado o seguinte resultado.

**Teorema 9** *Considere o sistema (168) satisfazendo **H1-H2** e sua DAR (169)-(170) satisfazendo **H3**. Se existirem matrizes constantes  $Q_1$ ,  $Q_2 = Q'_2 > 0$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$ ,  $E_F$ ,  $V_1$  e  $V_2$  de dimensões apropriadas e uma matriz diagonal definida positiva  $F$ , satisfazendo as seguintes desigualdades matriciais lineares para todo  $\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$ :*

$$\Lambda_4(\xi) < 0, \quad (184)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 q_r \\ q'_r Q_2 & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1, \dots, n_e \quad (185)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 \Xi'_1 & Q_2 K'_{1(i)} - V'_{1(i)} \\ \star & \Xi_2 Q'_4 + Q_4 \Xi'_2 & Q_4 K'_{2(i)} - V'_{2(i)} \\ \star & \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_v \quad (186)$$

então o ganho de anti-windup é dado por  $E_c = E_F F^{-1}$  é tal que para todo  $\xi(0) \in \mathcal{R}$ , com  $P = Q_2^{-1}$ , a respectiva trajetória do sistema em malha fechada  $\xi(t)$  pertence a  $\mathcal{R}$ , e converge assintoticamente para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ , sendo que  $\mathcal{R}$  é definida em (172).

### Prova.

Como definido anteriormente, considere que  $\mathcal{A}_a$ ,  $\mathcal{A}_b$ ,  $\mathcal{A}_c$ ,  $\Omega_a$ ,  $\Omega_b$ ,  $\Omega_c$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\Xi_1$  e  $\Xi_2$  são afins em  $\xi$ . Assim, se as desigualdades (184)-(186) são factíveis para cada  $\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$ , então, por convexidade, estas também são satisfeitas para todo  $\xi \in \mathcal{B}_\xi$ .

Note que, ao supor que  $\Omega_b$  e  $\Xi_2$  são não-singulares (a partir de **H3**), os termos  $\Omega_b Q'_3 + Q_3 \Omega'_b < 0$  e  $\Xi_2 Q'_4 + Q_4 \Xi'_2 > 0$  asseguram que  $Q_3$  e  $Q_4$  são não-singulares. Além disso, uma vez que (a partir de (184))  $Q_1 + Q'_1 > 0$  e (por imposição)  $Q_2 > 0$ , segue que a matriz  $\Pi_0$  definida em (182) é inversível. Assim, se  $\Lambda_4(\xi) < 0$ , segue que  $\Lambda_3(\xi) < 0$ .

Logo, a partir de (179) conclui-se que (176) é verificada com  $Q_2^{-1} = P > 0$ . Assim, se  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi$  e considerando  $V(x) = \xi' P \xi$ , segue que  $\dot{V} < 0, \forall \xi \in \mathcal{R}$ , o que garante que para todo  $\xi(0) \in \mathcal{R}$  as trajetórias resultantes do sistema em malha fechada  $\xi(t)$  pertencem à  $\mathcal{R}$  e convergem assintoticamente para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, multiplicando à esquerda e à direita (185) por  $\Pi_1 = \begin{bmatrix} Q_2^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\Pi_1'$ , respectivamente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P & q_r \\ q_r' & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall r = 1, \dots, n_e. \quad (187)$$

o que garante que  $\mathcal{R}$  está incluída na região  $\mathcal{B}_\xi$  definida em (74) (BOYD et al., 1994).

Além disso, multiplicando à esquerda e à direita (186) por  $\Pi_2 = \text{blockdiag}\{Q_2^{-1}, Q_4^{-1}, 1\}$  e  $\Pi_2'$ , respectivamente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P & \Xi_1' M_4' & K_{1(i)}' - G_{1(i)}' \\ \star & M_4 \Xi_2 + \Xi_2' M_4' & K_{2(i)}' - G_{2(i)}' \\ \star & \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_v. \quad (188)$$

Aplicando agora o complemento de Schur (vide Apêndice A) em (188) e em seguida multiplicando a esquerda e a direita a desigualdade matricial resultante respectivamente pelo vetor  $[\xi' \quad \rho']$  e seu transposto, tem-se:

$$\frac{((K_{1(i)} - G_{1(i)})\xi + (K_{2(i)} - G_{2(i)})\rho)^2}{u_{0(i)}^2} \leq \xi' P \xi + 2\rho' M_4 (\Xi_1 \xi + \Xi_2 \rho), \quad \forall i = 1, \dots, n_v$$

Assim, observando que  $\Xi_1 \xi + \Xi_2 \rho = 0$  e se  $\xi' P \xi \leq 1$ , segue que:

$$|(K_{1(i)} - G_{1(i)})\xi + (K_{2(i)} - G_{2(i)})\rho| \leq u_{0(i)}, \quad \forall i = 1, \dots, n_v$$

o que assegura que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ .

Desta forma, conclui-se que (185) e (186) garantem que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\xi \cap \mathcal{S}$ , o que conclui a prova.  $\square$

**Observação 9** No caso particular em que  $v_c$  depende linearmente ou bi-linearmente (quadraticamente) de  $x$  e  $\eta$ , tem-se que  $\rho = 0$  em (170) e assim, considera-se  $K_2 = 0$ ,  $\Xi_1 = 0$  e  $\Xi_2 = 0$ .

Neste caso, a relação (185) pode ser substituída por

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 K_{1(i)}' - V_{1(i)}' \\ \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_v. \quad (189)$$

e  $G_2 = 0$ . Além disso, a 4ª linha e a 4ª coluna de (184) devem ser eliminadas, ou seja, (184) deve ser substituída por:

$$\begin{bmatrix} -Q_1 - Q_1' & \mathcal{A}_a Q_2 & \mathcal{A}_b Q_3 & \mathcal{A}_c F - \mathcal{W} E_F \\ \star & \mathcal{A}_a Q_2 + Q_2 \mathcal{A}_a' & \mathcal{A}_b Q_3 + Q_2 \Omega_a' & \mathcal{A}_c F - \mathcal{W} E_F + V_1' \\ \star & \star & \Omega_b Q_3' + Q_3 \Omega_b' & \Omega_c F \\ \star & \star & \star & -2F \end{bmatrix} < 0$$

## 5.4 Problemas de Otimização

O resultado apresentado no Teorema 9 pode ser aplicado para calcular um ganho de *anti-windup* a fim de (tentar) maximizar a região de atração do sistema em malha fechada. Na verdade, esse objetivo é alcançado implicitamente ao maximizar a região  $\mathcal{R}$  associada ao ganho a ser calculado.

Com este objetivo, uma vez que  $\mathcal{R}$  é um domínio elipsoidal, o seguinte problema de otimização pode ser considerado:

$$\min \text{traço}(H) \left\{ \begin{array}{l} (184), (185), (186), \forall \xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi) \\ \begin{bmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{bmatrix} > 0, \end{array} \right. \quad (190)$$

Note que neste caso a minimização de  $\text{traço}(H)$  é um critério que leva a minimização de

$$\text{traço}(Q_2^{-1}) = \text{traço}(P)$$

e assim implicitamente à maximização do tamanho de  $\mathcal{R}$ . Vale salientar que outros critérios clássicos relacionados ao tamanho de conjuntos elipsoidais podem ser utilizados, tais como: maximização do volume, maximização do menor eixo, maximização em determinadas direções, (ver, como exemplo, Capítulo 2 em (TARBOURIECH et al., 2011) e suas referências) também podem ser aplicadas.

**Observação 10** *Observe que (184), (185) e (186) são LMIs para  $\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$ . Assim, o problema (190) é convexo e pode ser solucionado diretamente utilizando solvers padrão para LMIs, sem a necessidade de algoritmos iterativos como no capítulo precedente.*

**Observação 11** *Conforme dito nos capítulos anteriores, a região  $\mathcal{B}_x$  corresponde a região onde há factibilidade das LMIs. Desta forma, os mesmos passos apresentados na Observação 4 no Capítulo 3 podem ser utilizados.*

*Alternativamente, pode-se parametrizar  $\mathcal{B}_x$  conforme abaixo:*

$$\mathcal{B}_\xi := \{ \xi : |\xi_{(i)}| \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n_\xi \},$$

*então, os seguintes passos podem ser considerados:*

- *Passo 1: Soluciona-se (190) para um dado politopo suficientemente pequeno  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_\xi})$ ;*
- *Passo 2: Para matrizes  $Q_2, Q_3, Q_4$  dadas e  $F$ , maximiza-se  $\mathcal{B}_\xi$  em relação a  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_\xi}$  e matrizes livres  $Q_1, E_F, V_1$  e  $V_2$ .*

*Assim, faz-se a iteração entre estes dois passos até que não haja mudança significativa no tamanho de  $\mathcal{R}$ .*

## 5.5 Extensão - Caso Discreto

Nesta seção uma extensão dos resultados apresentados neste capítulo é desenvolvida para tratar sistemas em tempo discreto. O objetivo consiste em sintetizar compensadores de *anti-windup* para sistemas não-lineares racionais em tempo discreto sujeitos à saturação do atuador. Para tanto, um problema de otimização baseado em LMI é proposto para calcular um ganho *anti-windup* que implicitamente leva à maximização da região de atração do sistema em malha-fechada.

### 5.5.1 Apresentação do Problema

Considere a seguinte classe de sistemas de controle em tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_+ &= f(x(k)) + g(x(k))\text{sat}(v_c(k)) \\ y(k) &= h_y(x(k)) \end{aligned} \quad (191)$$

e assuma que um controlador estabilizante dinâmico de saída foi projetado para garantir algum desempenho desejado e a estabilidade do sistema em malha fechada na ausência de saturação no controle. Este controlador é dado por:

$$\begin{aligned} \eta_+ &= f_\eta(\eta(k), y(k)) \\ v_c(k) &= h_\eta(\eta(k), y(k)). \end{aligned} \quad (192)$$

com  $\eta_+ = \eta(k + 1)$ .

Novamente, para tratar aos efeitos indesejáveis causados pela saturação, um ganho de *anti-windup* é adicionado a este controlador. Utilizando a simplificação de notação na forma  $\xi(k) = \xi$ , considera-se a dinâmica do controlador e a estratégia de *anti-windup*, definindo o vetor de estados aumentado  $\xi(k) = [x(k)' \ \eta(k)']'$ , tal que o sistema em malha fechada pode ser representado por uma RAR, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \xi_+ &= \mathcal{A}_a \xi + \mathcal{A}_b z + (\mathcal{A}_c - \mathcal{W}E_c)\psi(v_c) \\ 0 &= \Omega_a \xi + \Omega_b z + \Omega_c \psi(v_c) \end{aligned} \quad (193)$$

sendo que  $\xi_+ = \xi(k + 1)$ ,  $E_c$  é uma matriz constante representando o ganho de *anti-windup* a ser determinado e  $z$  é um vetor não-linear auxiliar em relação a  $\xi$  e linear em relação a  $\psi$  contendo termos racionais e polinomiais (termos de ordem maior ou igual a dois).

Da mesma forma ao apresentado para o caso contínuo,  $v_c$  pode ser representado por:

$$\begin{aligned} v_c &= K_1 \xi + K_2 \rho \\ 0 &= \Xi_1 \xi + \Xi_2 \rho \end{aligned} \quad (194)$$

sendo  $\rho$  um vetor não-linear auxiliar função de  $(x, \eta)$  contendo termos racionais e polinomiais (termos de ordem maior ou igual a dois).

Cabe ressaltar que, para o sistema (193)-(194), as hipóteses **H1**, **H2** e **H3** são consideradas. Além disso, considera-se que as matrizes  $\Omega_b$  e  $\Xi_2$  devem ter posto completo para todo  $\xi \in \mathcal{B}_\xi$ .

A partir da configuração acima, o objetivo é determinar o ganho de *anti-windup*  $E_c$  tal que a região de atração do sistema em malha fechada, similarmente ao sistema definido em (167) para o caso contínuo, possa ser aumentada.

### 5.5.2 Resultado Teórico

Considerando a função de Lyapunov quadrática definida em (171), para sistemas em tempo discreto segue que:

$$\Delta V(\xi) = \xi_+' P \xi_+ - \xi' P \xi. \quad (195)$$

A partir do Lema 7, se  $\xi \in \mathcal{S}$ , então a relação  $\psi(v_c)' T [\psi(v_c) - G_1 \xi - G_2 \rho] \leq 0$  é verificada para qualquer matriz  $T$  diagonal e definida positiva. Assim, considerando o vetor auxiliar  $\zeta = [\xi_+' \ \xi(k)' \ z(k)' \ \rho(k)' \ \psi(v_c(k))']'$  se

$$\zeta' \Lambda_2 \zeta < 0 \quad (196)$$

sendo

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 & G_1' T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2' T \\ 0 & T G_1 & 0 & T G_2 & -2T \end{bmatrix}.$$

é verificada, então  $\Delta V(\xi) < 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi$ .

Definindo os seguintes escalares

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \xi_+' M_1 (-\xi_+ + \mathcal{A}_a \xi(k) + \mathcal{A}_b z(k) + (\mathcal{A}_c - \mathcal{W}E_c) \psi(v_c(k))) \\ \beta_2 &= \xi(t)' M_2 (-\xi_+ + \mathcal{A}_a \xi(k) + \mathcal{A}_b z(k) + (\mathcal{A}_c - \mathcal{W}E_c) \psi(v_c(k))) \\ \beta_3 &= z(k)' M_3 (\Omega_a \xi(k) + \Omega_b z(k) + \Omega_c \psi(v_c(k))) \\ \beta_4 &= \rho(k)' M_4 (\Xi_1 \xi(k) + \Xi_2 \rho(k)), \end{aligned} \quad (197)$$

a partir de (193) e (194), segue que as equações (179) são satisfeitas, para quaisquer matrizes  $M_1 \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ ,  $M_2 \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ ,  $M_3 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  e  $M_4 \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\rho}$ . Assim, se

$$\zeta' \Lambda_3(\xi) \zeta < 0 \quad (198)$$

com

$$\Lambda_3(\xi) = \begin{bmatrix} P - M_1 - M_1' & -M_2' + M_1 \mathcal{A}_a & M_1 \mathcal{A}_b & 0 \\ * & -P + M_2 \mathcal{A}_a + \mathcal{A}_a' M_2' & M_2 \mathcal{A}_b + \Omega_a' M_3' & -\Xi_1' M_4' \\ * & * & M_3 \Omega_b + \Omega_b' M_3' & 0 \\ * & * & * & -M_4 \Xi_2 - \Xi_2 M_4' \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \mathcal{A}_c - M_1 \mathcal{W}E_c \\ M_2 \mathcal{A}_c - M_2 \mathcal{W}E_c + G_1' T \\ M_3 \Omega_c \\ G_2' T \\ -2T \end{bmatrix}.$$

é verificada, então (196) é satisfeita.

Multiplicando a condição  $\Lambda_3(\xi) < 0$  à esquerda e a direita por  $\Pi_0$  (definido em (182)) e  $\Pi_0'$  respectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} Q_1' P Q_1 - Q_1 - Q_1' & -Q_1 + \mathcal{A}_a Q_2 & \mathcal{A}_b Q_3 & 0 \\ * & -Q_2' P Q_2 + \mathcal{A}_a Q_2 + Q_2 \mathcal{A}_a' & \mathcal{A}_b Q_3' + Q_2 \Omega_a' & -Q_2 \Xi_1' \\ * & * & \Omega_b Q_3' + Q_3 \Omega_b' & 0 \\ * & * & * & -\Xi_2 Q_4' - Q_4 \Xi_2' \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_c F - \mathcal{W}E_c F \\ \mathcal{A}_c F - \mathcal{W}E_c F + Q_2 G_1' \\ \Omega_c F \\ Q_4 G_2' \\ -2F \end{bmatrix} < 0.$$

Observe que, diferentemente do caso contínuo, a desigualdade acima não é uma LMI devido aos termos  $Q_1 P Q_1$  e  $Q_2' P Q_2$ . Neste caso, é possível considerar  $P = M_1 = M_2$  o que leva a  $P Q_1 = P Q_2 = I_n$ . Assim, definido  $Q = Q_1 = Q_2$ , para o termos  $Q_2 G_1'$  e

$E_c F$ , podem ser consideradas as seguintes trocas de variáveis:  $V'_1 = QG'_1$ ,  $V'_2 = Q_4 G'_2$  e  $E_F = E_c F$ . Neste caso, se

$$\Lambda_4(\xi) < 0, \quad (199)$$

com

$$\Lambda_4(\xi) = \begin{bmatrix} -Q' & -Q + \mathcal{A}_a Q & \mathcal{A}_b Q_3 & 0 \\ * & -Q + \mathcal{A}_a Q + Q\mathcal{A}'_a & \mathcal{A}_b Q_3 + Q\Omega'_a & -Q\Xi'_1 \\ * & * & \Omega_b Q'_3 + Q_3 \Omega'_b & 0 \\ * & * & * & -\Xi_2 Q'_4 - Q_4 \Xi'_2 \\ * & * & * & * \\ \mathcal{A}_c F - \mathcal{W}E_F \\ \mathcal{A}_c F - \mathcal{W}E_F + V'_1 \\ \Omega_c F \\ V'_2 \\ -2F \end{bmatrix},$$

é verificada, então (196) é satisfeita.

A partir destas considerações, o seguinte resultado é apresentado.

**Teorema 10** *Considere o sistema (168) em tempo discreto satisfazendo **H1-H2** e sua DAR (193)-(194) satisfazendo **H3**. Se existirem matrizes constantes  $Q = Q' > 0$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$ ,  $E_F$ ,  $V_1$  e  $V_2$  de dimensões apropriadas e uma matriz diagonal definida positiva  $F$ , satisfazendo as seguintes desigualdades matriciais lineares para todo  $\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$ :*

$$\Lambda_4(\xi) < 0, \quad (200)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Qq_r \\ q'_r Q & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1, \dots, n_e \quad (201)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q\Xi'_1 & QK'_{1(i)} - V'_{1(i)} \\ * & \Xi_2 Q'_4 + Q_4 \Xi'_2 & Q_4 K'_{2(i)} - V'_{2(i)} \\ * & * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_v \quad (202)$$

então o ganho de anti-windup dado por  $E_c = E_F F^{-1}$  é tal que para todo  $\xi(0) \in \mathcal{R}$ , com  $P = Q^{-1}$ , a respectiva trajetória do sistema em malha fechada  $\xi(k)$  pertence a  $\mathcal{R}$ , e converge assintoticamente para a origem quando  $k \rightarrow \infty$ , sendo que  $\mathcal{R}$  é definida em (172).

**Prova.**

Os mesmos passos apresentados na prova do Teorema 10 podem ser considerados sendo que  $Q = Q_1 = Q_2$ . Em resumo, (200) assegura que  $\Delta V(x) < 0$ , levando a  $x \in \mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$ . As relações (201) e (202), asseguram que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ , respectivamente.  $\square$

**Observação 12** *Com o objetivo de calcular um ganho de anti-windup a fim de maximizar a região de atração do sistema em malha fechada o problema de otimização (190) pode ser considerado.*

**Observação 13** *Com o objetivo de diminuir o conservadorismo imposto ao considerar  $Q = Q_1 = Q_2$ , pode-se utilizar  $\epsilon Q_1 = Q_2$ . Desta forma, é possível relaxar a solução fazendo uma busca linear no parâmetro  $\epsilon$ .*

## 5.6 Exemplos Numéricos

**Exemplo 7** Considere o mesmo sistema apresentado no Exemplo 6 utilizando a mesma representação DAR com

$$\mathcal{B}_\xi := \{ \xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| \leq \alpha_1, |\xi_2| \leq \alpha_2 \},$$

sendo que  $\alpha_1 = 1.3$  e  $\alpha_2 = 2.4$ . Neste caso, (veja Observação 9),  $\rho = 0$  e assim  $K_2 = 0$ ,  $\Xi_1 = 0$  e  $\Xi_2 = 0$ .

Com base no problema de otimização apresentado em (190), determina-se a estimativa  $\mathcal{R}$  da região de atração do sistema em malha fechada sem a compensação anti-windup, i.e. força-se  $E_c = 0$ . A Figura 15 mostra a estimativa obtida e a região que, como visto no Exemplo 6, é limitada por um ciclo limite. Neste caso a matriz  $P$  é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9826 & -0.2750 \\ -0.2750 & 0.3211 \end{bmatrix}.$$

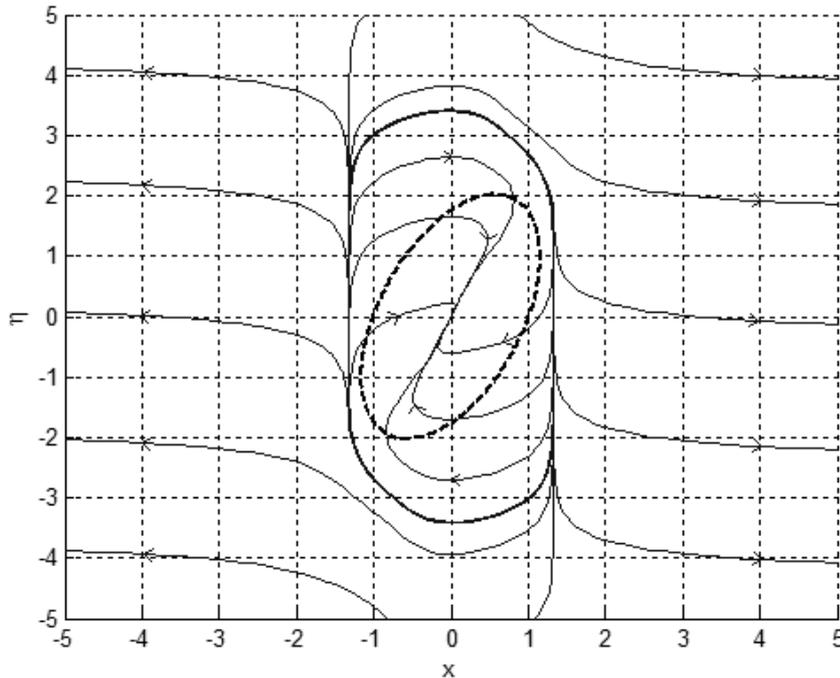


Figura 15: Estimativa da região de atração sem anti-windup.

Aplicando agora o problema de otimização (190) e considerando  $E_c \neq 0$ , obtém-se:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8514 & -0.2547 \\ -0.2547 & 0.2498 \end{bmatrix} \text{ and } E_c = 5.2464.$$

A Figura 16 mostra a nova estimativa da região de atração para o valor de  $E_c$  acima. Neste caso, a região de atração resultante também pode ser observada nesta figura. Como visto no Exemplo 6, observe que a introdução da compensação anti-windup faz com que o ciclo limite desapareça e agora a região de atração torna-se maior e é não limitada em certas direções.

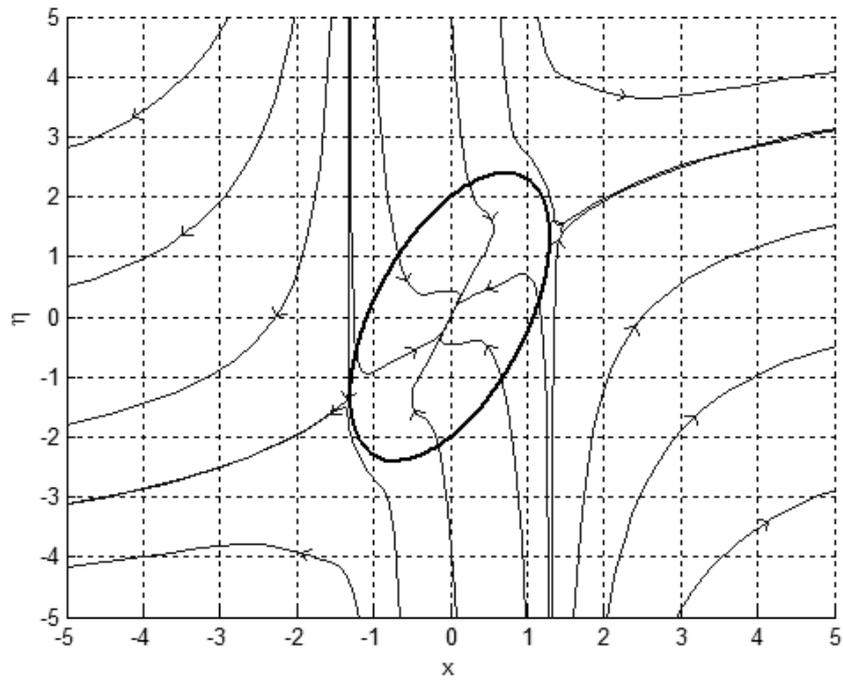


Figura 16: Estimativa da região de atração com anti-windup.

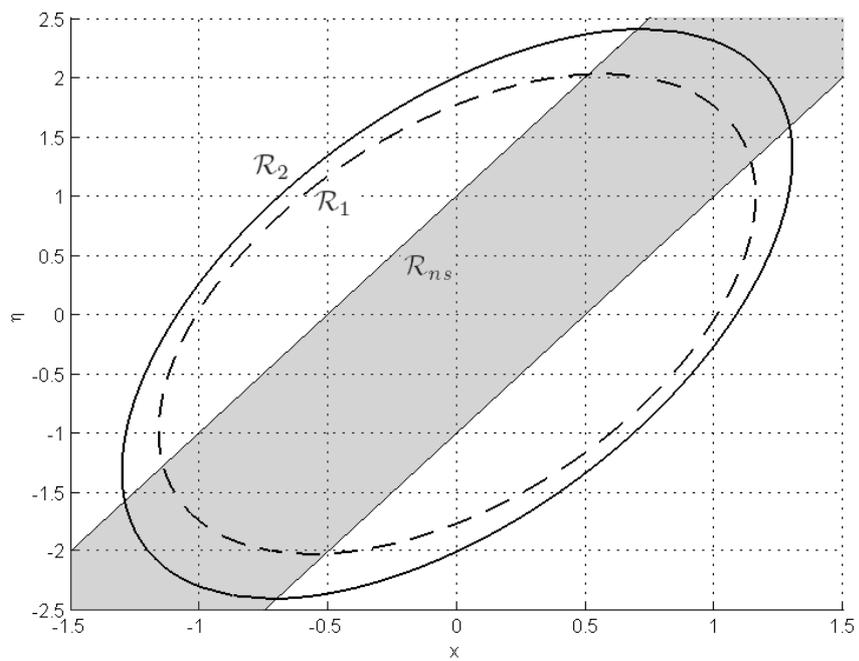


Figura 17: Comparação entre estimativas da região de atração.

Para propósitos de comparação, são apresentadas ambas estimativas da região de atração na Figura 17, onde  $\mathcal{R}_1$  é a linha tracejada (sem anti-windup) e  $\mathcal{R}_2$  é a linha contínua (com anti-windup). A região onde o sistema não satura é denotada por  $\mathcal{R}_{ns}$ .

Considerando a condição inicial  $\xi(0) = [-0.6 \ 1.16]'$ , a Figura 18 mostra as trajetórias da saída ( $y$ ) e do sinal de controle ( $v_c$ ) em três casos distintos. Primeiramente não é utilizada a estratégia de anti-windup ilustrada pelas linhas tracejadas. Em seguida, as trajetórias são ilustradas utilizando a estratégia de anti-windup apresentada neste capítulo (linha contínua) e no Capítulo 4 (linha pontilhada). Observe que utilizando a abordagem convexa, o sinal de controle permanece menos tempo saturado e há melhora no desempenho do transitório.

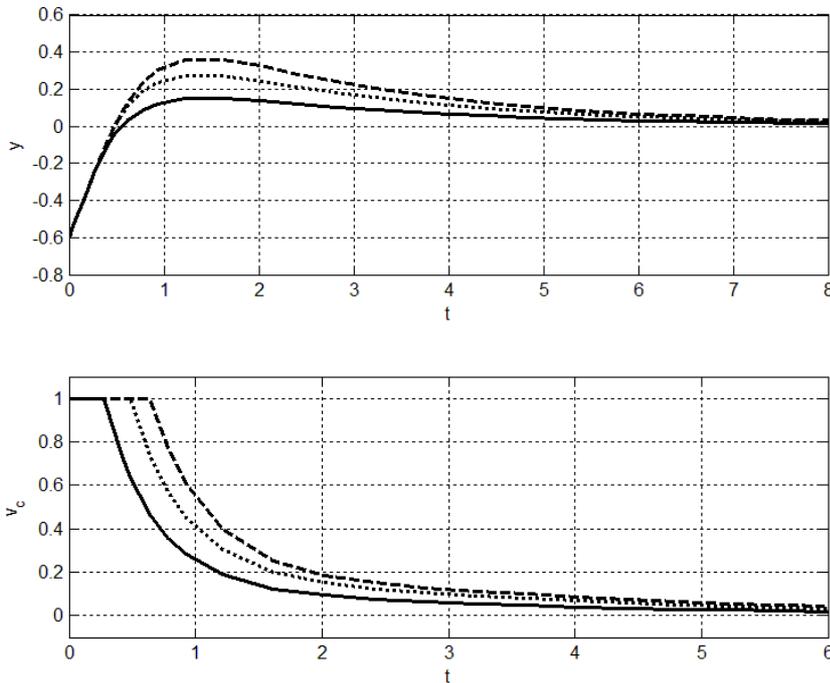


Figura 18: Trajetória da saída  $y$  e do sinal de controle  $v_c$  com anti-windup (contínua) e sem anti-windup (tracejada).

**Exemplo 8** Considere o sistema em malha fechada apresentado em (VALMORBIDA et al., 2010):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_1^2 + x_1x_2 + \text{sat}(v_c) \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ y &= x_1 + 0.5x_2,\end{aligned}\tag{203}$$

com  $u_0 = 0.6$  e o controlador NDI (do termo em inglês *Nonlinear Dynamic Inversion*)

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= x_1 + 0.5x_2 - 1.480\eta_1 + 2.450\eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= 2.450\eta_1 \\ v_c &= -2x_1^2 - x_1x_2 - 4.4x_1 - 2.2x_2 - 15.148\eta_1 - 21.449\eta_2.\end{aligned}\tag{204}$$

Considerando a DAR dada em (169), tem-se para o sistema (203)-(204) a seguinte

representação:

$$\mathcal{A}_a = \begin{bmatrix} -3.4 & -2.2 & -15.148 & -21.449 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1.480 & 2.450 \\ 0 & 0 & 2.450 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_c = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4.4 - 2x_1 & -2.2 - x_1 & -15.148 & -21.449 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o sistema em malha aberta e a saída do controlador são quadráticas em  $x$  e  $\eta$ ,  $\mathcal{A}_b$ ,  $\Omega_a$ ,  $\Omega_b$ ,  $\Omega_c$ ,  $K_2$ ,  $\Xi_1$  e  $\Xi_2$  são iguais a matrizes nulas de dimensões apropriadas.

Considere

$$\mathcal{B}_\xi := \{ \xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| \leq \alpha_1, |\xi_2| \leq \alpha_2, |\xi_3| \leq \alpha_3, |\xi_4| \leq \alpha_4, \},$$

com  $\alpha_1 = 0.35$  e  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.6$ . Baseado no problema de otimização apresentado em (190), primeiramente, determina-se a estimativa  $\mathcal{R}$  da região de atração do sistema em malha fechada sem a compensação do anti-windup, i.e. faz-se  $E_c = 0$ . Neste caso, a matriz  $P$  é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 56.3 & 23.3 & 113.2 & 154.1 \\ 23.3 & 20.8 & 76.7 & 105.4 \\ 113.2 & 76.7 & 611.2 & 834.3 \\ 154.1 & 105.4 & 834.3 & 1155.4 \end{bmatrix},$$

com  $\text{traço}(P) = 1843.71$ .

Aplicando agora o problema de otimização (190) e considerando  $E_c \neq 0$ , obtém-se a região  $\mathcal{R}$ , dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 20.0139 & 8.4749 & 36.9308 & 49.1887 \\ 8.4749 & 6.6146 & 30.3210 & 40.6876 \\ 36.9308 & 30.3210 & 220.9461 & 301.6380 \\ 49.1887 & 40.6876 & 301.6380 & 412.5945 \end{bmatrix}.$$

com  $\text{traço}(P) = 660.17$  e  $E_c = \begin{bmatrix} -5.0000 \\ 3.4285 \end{bmatrix}$ . Observe que  $\text{traço}(P)$  é significativamente reduzido utilizando a técnica de anti-windup. Isto significa que a estimativa da região de atração é implicitamente aumentada com a compensação do anti-windup.

Considere agora a condição inicial  $\xi(0) = [0.2235 \ 0 \ 0 \ 0']$ . Vale salientar que  $\xi(0)$  está no interior da região encontrada com a utilização do anti-windup, entretanto  $\xi(0)$  não pertence nem à  $\mathcal{R}$  encontrada sem anti-windup, nem a região apresentada em (VALMORBIDA et al., 2010). A Figura 19 mostra a resposta das saídas  $y$  e dos sinais de controle  $v_c$  para esta condição inicial considerando os casos com (linha contínua) e sem a estratégia de anti-windup (linha tracejada). Neste caso, pode-se observar que a trajetória do sistema em malha fechada diverge sem a compensação do anti-windup.

**Exemplo 9** Considere o seguinte sistema não-linear multivariável e assumo que as entradas estão sujeitas a saturação, com  $u_0 = [1 \ 1]'$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (x_1(t) + 2)x_1^2(t) + 10x_2(t) + 10\text{sat}(v_{c2}(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -100x_1(t) - 30x_2(t) + 10\text{sat}(v_{c1}(t)) \\ y_1(t) &= 20x_1(t) \\ y_2(t) &= 20x_2(t) \end{aligned} \quad (205)$$

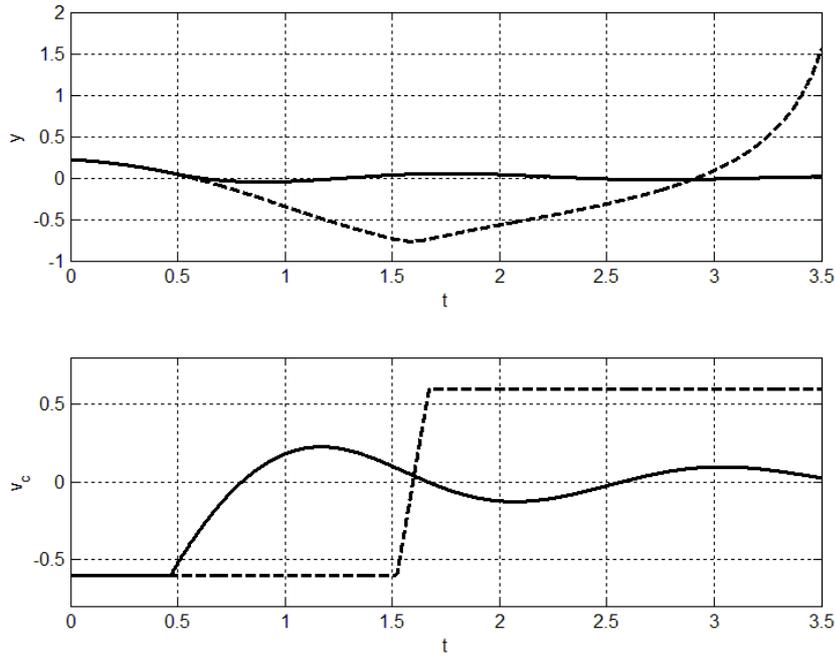


Figura 19: Trajetória da saída  $y$  e do sinal de controle  $v_c$  com anti-windup (contínua) e sem anti-windup (tracejada).

A partir do modelo linearizado do sistema (205), projetou-se um controlador multi-variável estabilizante local na forma proporcional-integral (PI) dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_\eta x(t) + B_\eta y(t) \\ v_c(t) &= C_\eta \eta(t) + D_\eta \eta(t), \end{aligned} \quad (206)$$

sendo que  $\eta(t) = [\eta_1(t)' \ \eta_2(t)']'$ ,  $v_c(t) = [v_{c_1}(t)' \ v_{c_2}(t)']'$ ,

$$A_\eta = 0_2, \quad B_\eta = I_2, \quad C_\eta = \begin{bmatrix} -0.4686 & -0.3703 \\ -0.2959 & 0.4149 \end{bmatrix}, \quad D_\eta = \begin{bmatrix} 0.0728 & 0.0516 \\ -0.0227 & 0.0176 \end{bmatrix}.$$

Considerando  $z = x_1^2$ , a seguinte DAR para (205)-(206) pode ser obtida:

$$\mathcal{A}_a = \begin{bmatrix} -4.5400 & 13.5200 & -2.9590 & 4.1490 \\ -85.4400 & -19.6800 & -4.6860 & -3.7030 \\ 20.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_b = \begin{bmatrix} x_1 + 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_c = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_a = [x_1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \Omega_b = -1$$

$$e K_1 = \begin{bmatrix} 1.4560 & 1.0320 & -0.4686 & -0.3703 \\ -0.4540 & 0.3520 & -0.2959 & 0.4149 \end{bmatrix},$$

Neste caso,  $\rho = 0$  e assim  $K_2 = 0$ ,  $\Xi_1 = 0$  e  $\Xi_2 = 0$ . Além disto, observando que as matrizes da DAR dependem somente dos estados  $x_1$ , pode-se considerar  $\mathcal{B}_\xi :=$

Tabela 1: Resultados do problema de otimização para  $E_c = 0$  e  $E_c \neq 0$ 

$E_c$	$P$	traço( $P$ )
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.9355 & 0.2987 & 0.1368 & -0.1035 \\ 0.2987 & 0.2615 & -0.0038 & 0.0397 \\ 0.1368 & -0.0038 & 0.1829 & -0.0101 \\ -0.1035 & 0.0397 & -0.0101 & 0.1119 \end{bmatrix}$	2.4917
$\begin{bmatrix} -4.3832 & -126.3203 \\ -24.5150 & 383.6112 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1682 & 0.0247 & 0.0101 & 0.0007 \\ 0.0247 & 0.0245 & -0.0032 & 0.0058 \\ 0.0101 & -0.0032 & 0.0080 & -0.0019 \\ 0.0007 & 0.0058 & -0.0019 & 0.0052 \end{bmatrix}$	0.2059

$\{\xi \in \mathbb{R}^5 : |x_1| \leq \alpha_1\}$ . Para  $\alpha_1 = 3.0$ , a Tabela 1 apresenta os resultados obtidos utilizando o problema de otimização (190), considerando os casos com e sem a compensação do anti-windup. A partir das matrizes  $P$  e seus respectivos traços, pode-se concluir que a estimativa da região de atração  $\mathcal{R}$  é significativamente aumentada com a aplicação da técnica de anti-windup.

A Figura 20 mostra as trajetórias das saídas  $y$  e dos sinais de controle  $v_c$  obtidos a partir da condição inicial  $\xi(0) = [-0.1548 \quad -1.0109 \quad -3.2397 \quad 13.0463]'$  considerando os casos com e sem a estratégia de anti-windup. Deve-se destacar que  $\xi(0)$  pertence à região  $\mathcal{R}$  obtida com anti-windup, mas não pertence à região obtida sem anti-windup. Observe que com a compensação de anti-windup (linha contínua), o sinal de controle permanece menos tempo saturado e que a convergência das trajetórias do sistema em malha fechada é significativamente mais rápida.

## 5.7 Considerações Finais

Neste capítulo foi proposta uma abordagem para calcular ganhos de *anti-windup* para uma classe de sistemas multivariáveis não-lineares sujeitos a saturação do atuador. Assim como apresentado no Capítulo 4, as condições propostas basearam-se em uma representação algébrica diferencial de sistemas racionais. Para lidar com a saturação foi considerada diretamente a versão modificada da condição de setor generalizada. A partir desses elementos, um problema de otimização baseado em LMI foi proposto para calcular um ganho *anti-windup* a fim de obter uma estimativa da região de atração do sistema em malha fechada.

Vale salientar que, diferentemente dos métodos apresentados no Capítulo 4, o problema pode ser resolvido na forma de condições de estabilização local diretamente na forma LMIs evitando procedimentos iterativos de relaxamento. Além disso, esta abordagem permitiu considerar sistemas de controle não-lineares multivariáveis evitando técnicas de relaxamento ou busca linear em parâmetros.

Vários exemplos numéricos foram apresentados para ilustrar a aplicação da aborda-

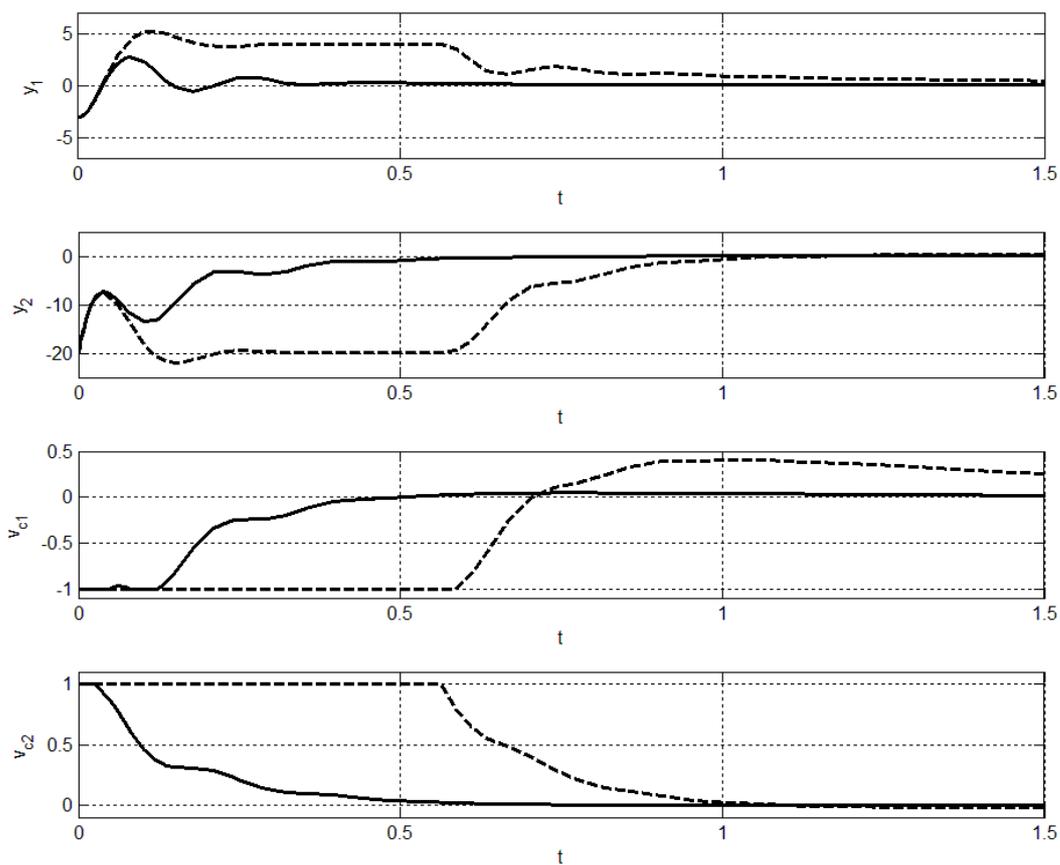


Figura 20: Trajetórias das saídas  $y$  e do sinal de controle  $v_c$  com anti-windup (contínua) e sem anti-windup (tracejada).

gem proposta e a melhoria efetiva do tamanho da região de atração do sistema em malha fechada obtida por meio de estratégias de *anti-windup* apropriadas. Por fim, uma extensão dos resultados foi apresentada para tratar sistemas não-lineares em tempo discreto sujeitos a saturação do atuador.

Estes métodos também podem ser vistos como uma generalização dos trabalhos recentemente publicados em (OLIVEIRA et al., 2011b), no sentido de que o sistema e os controladores com saídas racionais podem agora ser tratados, o que permite lidar com o importante caso dos controladores NDI, entre outros. Resultados referentes a este capítulo foram submetidos à publicação em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2011).

## 6 SÍNTESE DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Conforme visto anteriormente, comportamentos inadequados podem surgir quando o um controlador ou um compensador é projetado considerando uma aproximação linear de um sistema não-linear e é aplicado ao sistema original. Da mesma forma que visto nos capítulos 4 e 5, ao projetar o controlador para um sistema em malha fechada considerando suas não-linearidades, pode-se aumentar consideravelmente a região de atração. Neste caso, é possível considerar as curvas de nível da função de Lyapunov como regiões de estabilidade assintótica (GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985) ou “estimativas” da região de atração.

Este capítulo trata o problema de síntese de realimentação de estados para sistemas não-lineares racionais sujeitos à saturação do atuador visando aumentar a região de atração do sistema em malha fechada. Neste contexto, a abordagem depende da utilização da representação algébrica diferencial (DAR) do sistema não-linear e do uso de uma condição de setor generalizada para modelar os efeitos da saturação. A partir desses elementos, as condições de estabilização local que permitam, simultaneamente, calcular o ganho de realimentação de estados e uma função de Lyapunov quadrática levando a uma estimativa maximizada da região de atração do sistema em malha fechada são propostas. Estas condições são na forma de LMIs dependentes dos estados, que podem ser resolvidas numericamente nos vértices de um dado polítopo de estados admissíveis.

Diferentemente de outros trabalhos (COUTINHO et al., 2004; COUTINHO; FU; TROFINO, 2004; COUTINHO et al., 2008), neste caso considera-se uma abordagem similar à apresentada no Capítulo 5. A vantagem está principalmente na resolução diretamente na forma de LMIs evitando procedimentos iterativos de relaxamento e no tratamento de forma direta de sistemas de controle multivariáveis.

### 6.1 Apresentação do Problema

Considere a seguinte classe de sistemas não-lineares:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))sat(u(t)) \quad (207)$$

sendo que  $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados;  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle.  $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  são funções racionais em  $x$  satisfazendo as condições de existência e unicidade de solução para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ . É suposto que  $f(0) = 0$ .

Neste capítulo, o interesse principal está na estabilização do sistema (207) através da utilização de uma lei de realimentação de estado linear, ou seja, pode-se considerar

$$u(t) = Kx(t) \quad (208)$$

com  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ .

Assumindo que  $f(0) = 0$ , tem-se que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema não-linear em malha fechada (207)-(208). O problema fundamental neste caso é o projeto do ganho  $K$  tal que a origem seja assintoticamente estável e a região de atração do sistema em malha fechada seja maximizada.

Suponha que  $K$  é projetado tal que exista uma função contínua e diferenciável  $V : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}$  e escalares positivos  $\epsilon_1, \epsilon_2$  e  $\epsilon_3$  satisfazendo as condições (9) e (10), apresentadas no Lema 1, sendo que  $\dot{V}$  é definida como a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias do sistema (207)-(208).

A partir do Lema 1, o problema de encontrar  $K$  que maximize a região de atração do sistema em malha fechada pode ser reformulado através do cálculo de  $K$  e da função de Lyapunov  $V$ , levando a uma estimativa da região de atração tão grande quanto possível. Note que, por definição, esta estimativa está incluída na região de atração de (207)-(208)

Neste contexto, é considerada uma função quadrática como candidata de Lyapunov:

$$V(x) = x'Px, \quad (209)$$

sendo que  $P = P' > 0$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Então, a região relacionada com a função de Lyapunov é descrita pelo seguinte conjunto elipsoidal:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\}, \quad (210)$$

A partir das considerações acima, o problema que será o foco desta seção é encontrar matrizes  $K$  e  $P$  tais que as condições do Lema 1 são satisfeitas com  $V(x)$  definida em (209) e a região associada  $\mathcal{R}$  definida em (210) é tão grande quanto possível considerando algum critério relacionado ao tamanho desta região.

## 6.2 Preliminares

Nesta seção são apresentados alguns resultados instrumentais que serão úteis para o desenvolvimento de condições na forma de LMIs, permitindo solucionar o problema abordado na seção anterior.

### 6.2.1 Representação Diferencial Algébrica – DAR

Da mesma forma ao apresentado nos capítulos anteriores, para lidar com a saturação, é considerada a não-linearidade zona-morta definida por (57). Portanto, o sistema (207) pode ser descrito por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) - g(x(t))\psi(u(t)) \quad (211)$$

Considere agora a seguinte DAR para o sistema acima (COUTINHO et al., 2004, 2008):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1x(t) + A_2z(t) + A_3\psi(u(t)) + A_4u(t) \\ 0 &= \Omega_1x(t) + \Omega_2z(t) + \Omega_3\psi(u(t)) + \Omega_4u(t) \end{aligned} \quad (212)$$

sendo que  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é um vetor não-linear auxiliar em  $x, u, \psi$  contendo termos racionais e polinomiais (com ordem igual ou maior que dois) de  $f(x)$  e  $g(x)$ ; e  $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$ ,  $A_3 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $A_4 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $\Omega_3 \in \mathbb{R}^{n_z \times 1}$  e  $\Omega_4 \in \mathbb{R}^{n_z \times 1}$  são funções matriciais afins em  $x$ .

Para garantir que a DAR em (212) é bem definida (i.e., a unicidade da solução  $x(t)$  é assegurada) assume-se que a função matricial  $\Omega_2$  tem posto completo para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ .

Esta hipótese garante que o vetor auxiliar  $z(t)$  possa ser eliminado de (214), levando a representação original do sistema em (211). Isto pode ser feito utilizando a seguinte equação:

$$z = -\Omega_2^{-1}(\Omega_1 x(t) + \Omega_3 \psi(u(t)) + \Omega_4 u(t)) \quad (213)$$

Perceba que, a partir da lei de controle em (208) e da DAR em (212), o sistema (207)-(208) pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_1 + A_4 K)x(t) + A_2 z(t) + A_3 \psi(u(t)) \\ 0 &= (\Omega_1 + \Omega_4 K)x(t) + \Omega_2 z(t) + \Omega_3 \psi(u(t)) \end{aligned} \quad (214)$$

### 6.2.2 Polítipo dos Estados Admissíveis

Da mesma maneira que apresentado anteriormente,  $\mathcal{B}_x$  é uma dada região politópica contendo a origem em seu interior descrita por um conjunto de inequações escalares definido em (74).

Observando o resultado apresentado no Lema 1, o conjunto  $\mathcal{R}$  está incluído na região  $\mathcal{B}_x$  se a seguinte condição for satisfeita (BOYD et al., 1994):

$$\begin{bmatrix} P & q_r \\ q_r' & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (215)$$

para  $r = 1, \dots, n_e$ .

### 6.2.3 Condição de Setor Generalizada

Neste capítulo são utilizados conceitos apresentados na seção 2.3.1. Neste sentido, é considerada uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ . A partir da não-linearidade zona-morta  $\psi(u)$  em (57) e do conjunto  $\mathcal{S}$  definido em (58), utiliza-se o Lema 4.

Assim, como no resultado da seção 6.2.2, a relação  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  é satisfeita se as seguintes condições são verificadas:

$$\begin{bmatrix} P & K'_{(i)} - G'_{(i)} \\ \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_u. \quad (216)$$

## 6.3 Resultado Principal

Nesta seção uma abordagem LMI para lidar com o problema de síntese de realimentação estática de estados introduzido na seção 6.1 é apresentada. A ideia principal é desenvolver condições na forma de LMIs que dependam de maneira afim em  $x$ . Neste sentido, por convexidade, estas condições devem ser verificadas em um conjunto finito de pontos representados pelos vértices de  $\mathcal{B}_x$ .

Considerando a função de Lyapunov quadrática definida em (209), segue que

$$\dot{V}(x) = \dot{x}' P x + x' P \dot{x}. \quad (217)$$

Definindo agora um vetor auxiliar

$$\zeta_0 = [\dot{x}(t)' \quad x(t)']',$$

é possível reescrever (217) da seguinte forma

$$\dot{V}(x) = \zeta_0' \Lambda_1 \zeta_0, \quad (218)$$

com

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir do Lema 4, se  $x \in \mathcal{S}$ , então a relação  $\psi(u)'T[\psi(u) - Gx] \leq 0$  é verificada para qualquer matriz diagonal definida positiva  $T$ . Assim, se

$$\zeta_0' \Lambda_1 \zeta_0 - 2\psi(u)'T[\psi(u) - Gx] < 0 \quad (219)$$

é verificada, então  $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_x$ .

Considerando o vetor auxiliar

$$\zeta = [\dot{x}(t)' \quad x(t)' \quad z(t)' \quad \psi(u(t))']'$$

pode-se reescrever (219) como

$$\zeta' \Lambda_2 \zeta < 0 \quad (220)$$

com

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & G'T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & TG & 0 & -2T \end{bmatrix}.$$

Similarmente ao utilizado na seção 5.3, define-se agora os seguintes escalares:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \dot{x}(t)' M_1 [-\dot{x}(t) + (A_1 + A_4 K)x(t) + A_2 z(t) + A_3 \psi(u(t))] \\ \beta_2 &= x(t)' M_2 [-\dot{x}(t) + (A_1 + A_4 K)x(t) + A_2 z(t) + A_3 \psi(u(t))] \\ \beta_3 &= z(t)' M_3 [(\Omega_1 + \Omega_4 K)x(t) + \Omega_2 z(t) + \Omega_3 \psi(u(t))] \end{aligned} \quad (221)$$

A partir da representação do sistema apresentada em (214), segue que as seguintes equações

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_1 + \beta_1' \\ 0 &= \beta_2 + \beta_2' \\ 0 &= \beta_3 + \beta_3' \end{aligned} \quad (222)$$

são satisfeitas, para quaisquer matrizes  $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $M_3 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ .

A partir de (222), se

$$\zeta' \Lambda_2 \zeta + \beta_1 + \beta_1' + \beta_2 + \beta_2' + \beta_3 + \beta_3' < 0 \quad (223)$$

é verificada, então (220) é satisfeita.

Por outro lado, pode-se reescrever (223) da seguinte forma:

$$\zeta' \Lambda_3(x) \zeta < 0 \quad (224)$$

sendo

$$\Lambda_3(x) = \begin{bmatrix} -M_1 - M_1' & P - M_2' + M_1(A_1 + A_4 K) \\ * & M_2(A_1 + A_4 K) + (A_1 + A_4 K)' M_2' \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 A_2 & M_1 A_3 \\ M_2 A_2 + (\Omega_1 + \Omega_4 K)' M_3' & M_2 A_3 + G' T \\ M_3 \Omega_2 + \Omega_2' M_3' & M_3 \Omega_3 \\ \star & -2T \end{bmatrix}.$$

De maneira análoga ao feito na seção 5.3, assume-se ainda que  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  são matrizes não-singulares e define-se  $Q_1 = M_1^{-1}$ ,  $Q_2 = M_2^{-1}$ ,  $Q_3 = M_3^{-1}$ ,  $F = T^{-1}$  e

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix}. \quad (225)$$

Multiplicando à esquerda e à direita a condição  $\Lambda_3(x) < 0$  por  $\Pi_0$  e  $\Pi_0'$  respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -Q_1 - Q_1' & Q_1 P Q_2' - Q_1 + (A_1 + A_4 K) Q_2' \\ \star & (A_1 + A_4 K) Q_2' + Q_2 (A_1 + A_4 K)' \\ \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 Q_3' & A_3 F \\ A_2 Q_3' + Q_2 \Omega_1' + Q_2 K' \Omega_4' & A_3 F + Q_2 G' \\ \Omega_2 Q_3' + Q_3 \Omega_2' & \Omega_3 F \\ \star & -2F \end{bmatrix} < 0.$$

Observe que a condição acima não é uma LMI devido ao termo  $Q_1 P Q_2'$ . Entretanto, considera-se  $P = M_2$  e segue que  $P Q_2 = I_n$ . Além disso, para os termos  $Q_2 G'$  e  $K Q_2'$ , considera-se a seguinte troca de variáveis:  $G'_q = Q_2 G'$  e  $Q_K = K Q_2'$ . Neste caso, se

$$\Lambda_4(x) < 0, \quad (226)$$

com

$$\Lambda_4(x) = \begin{bmatrix} -Q_1 - Q_1' & A_1 Q_2' + A_4 Q_K \\ \star & A_1 Q_2' + A_4 Q_K + Q_2 A_1 + Q_K' A_4 \\ \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 Q_3' & A_3 F \\ A_2 Q_3' + Q_2 \Omega_1' + Q_K' \Omega_4' & A_3 F + G'_q \\ \Omega_2 Q_3' + Q_3 \Omega_2' & \Omega_3 F \\ \star & -2F \end{bmatrix} < 0,$$

for verificada, então (220) é satisfeita.

Por outro lado, definindo  $\Pi_1 = \begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , se

$$\Pi_1 \begin{bmatrix} P & q_r \\ q_r' & 1 \end{bmatrix} \Pi_1' \geq 0, \quad (227)$$

for verificada, então (215) é satisfeita. A condição acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 q_r \\ q_r' Q_2' & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (228)$$

Similarmente, a condição (216) é equivalente à:

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q'_{K(i)} - G_{q(i)}' \\ \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (229)$$

Com base nestas considerações, o seguinte resultado é apresentado.

**Teorema 11** *Considere o sistema (211) e sua representação DAR em (214). Se existir uma matriz constante definida positiva  $Q_2 = Q'_2$ , matrizes  $Q_3$ ,  $Q_K$  e  $G_q$  de dimensões apropriadas e uma matriz diagonal positiva definida  $F$ , satisfazendo o seguinte conjunto de desigualdades matriciais lineares  $\forall x \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$*

$$\Lambda_4(x) < 0, \quad (230)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 q_r \\ q_r' Q_2 & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (231)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q'_{K(i)} - G_{q(i)}' \\ \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_u. \quad (232)$$

então o ganho de realimentação de estados dado por  $K = Q_K(Q'_2)^{-1}$  é tal que para todo  $x(0) \in \mathcal{R}$ , com  $P = Q_2^{-1}$ , a trajetória  $x(t)$  pertence a  $\mathcal{R}$ , e converge assintoticamente para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ , sendo que  $\mathcal{R}$  é definida em (210).

#### Prova.

Considere que as matrizes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  e  $\Omega_4$  são afins em  $x$ . Assim, se as desigualdades (230)-(232) são factíveis para cada  $x \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$ , então, por convexidade, estas também são satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ .

Uma vez que (a partir de (230)-(232))  $Q_1 + Q'_1 > 0$ ,  $Q_2 > 0$  e,  $Q_3$  é não-singular (assegurado por (230)), segue que a matriz  $\Pi_0$  definida em (225) é inversível. Assim, se  $\Lambda_4(x) < 0$ , segue que  $\Lambda_3(x) < 0$ . Desta forma, a partir de (222) conclui-se que (219) é verificada com  $Q_2^{-1} = P > 0$ . Então, se  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_x$ , a partir da discussão apresentada na seção 6.1, considerando  $V(x) = x'Px$ , segue que  $\dot{V} < 0$ , o que assegura que para todo  $x(0) \in \mathcal{R}$  a trajetória  $x(t)$  pertence a  $\mathcal{R}$  e converge assintoticamente para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

Agora, considere as relações (231) e (232). Multiplicando à esquerda e à direita (231) e (232) por  $\Pi_1^{-1}$ , tem-se (215) e (216), respectivamente. Desta forma, a inclusão  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$  é satisfeita, o que conclui a prova.  $\square$

## 6.4 Problema de Otimização

Nesta seção apresenta-se como o resultado do Teorema 11 pode ser aplicado para solucionar o problema de encontrar um ganho  $K$  tal que as condições do Lema 1 sejam satisfeitas e a região  $\mathcal{R}$  seja tão grande quanto possível.

Assumindo que o número de vértices de  $\mathcal{B}_x$  é finito, as condições do Teorema 11 são de fato um conjunto de LMIs com variáveis  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_K$ ,  $G_q$  e  $F$ . Portanto, o cálculo de  $K$  que leva a maximização da região  $\mathcal{R}$  pode ser feito através da solução de um problema de otimização convexa, sendo que o critério utilizado está relacionado com o tamanho e com a forma de  $\mathcal{R}$ , o que depende diretamente da matriz  $P = Q_2^{-1}$ .

Neste caso, como na síntese de *anti-windup* apresentada no Capítulo 5, o seguinte problema de otimização pode ser considerado:

$$\min \text{traço}(N) \left\{ \begin{array}{l} (230), (231), (232), \forall x \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x), \\ \left[ \begin{array}{cc} Q_2 & I_n \\ I_n & N \end{array} \right] > 0, \end{array} \right. \quad (233)$$

Note que,  $N > Q_2^{-1}$ , o que implica que  $\text{traço}(N) > \text{traço}(P)$ . Assim, (233) implicitamente minimiza o traço de  $P$ .

Vale salientar que outros critérios relacionados ao tamanho de conjuntos elipsoidais podem ser utilizados tais como: maximização do menor eixo e a maximização em determinadas direções (veja, Capítulo 2 em (TARBOURIECH et al., 2011) e suas referências).

Além disso, a região  $\mathcal{B}_x$  corresponde à região onde há factibilidade das LMIs, conforme descrito nos capítulos anteriores (veja Observação 4 no Capítulo 3).

## 6.5 Extensão - Caso Discreto

Nesta seção, os resultados apresentados neste capítulo são estendidos para o caso de sistemas em tempo discreto. Para tal, aqui trata-se o problema de síntese de realimentação de estados para sistemas não-lineares racionais em tempo discreto sujeitos à saturação do atuador. Observe que no Capítulo 3, os métodos foram apresentados para analisar a estabilidade da mesma classe de sistemas não-lineares. No entanto, a estabilidade assintótica é caracterizada para um dado valor do ganho de realimentação e considerando funções de Lyapunov quadráticas. Embora sejam utilizadas funções de Lyapunov quadráticas por partes com o objetivo de reduzir o conservadorismo, somente o caso monovariável é considerado. Com os resultados apresentados neste capítulo, uma abordagem na forma de LMIs é apresentada permitindo calcular o ganho de realimentação de estados para sistemas em tempo discreto multivariáveis, levando a uma estimativa maximizada da região de atração.

### 6.5.1 Apresentação do Problema

Considere agora a seguinte classe de sistemas não-lineares em tempo discreto:

$$x_+ = f(x) + g(x)\text{sat}(u) \quad (234)$$

sendo que o interesse principal está na estabilização deste sistema através da utilização de uma lei de realimentação de estado linear na forma

$$u = Kx \quad (235)$$

com  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ .

Note que, o sistema (234)-(235) pode ser representado a partir de uma RAR da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_+ &= (A_1 + A_4K)x + A_2z + A_3\psi(u) \\ 0 &= (\Omega_1 + \Omega_4K)x + \Omega_2z + \Omega_3\psi(u) \end{aligned} \quad (236)$$

sendo que  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é um vetor não-linear auxiliar em  $x, u, \psi$  contendo termos racionais e polinomiais (com ordem igual ou maior que dois) de  $f(x)$  e  $g(x)$ ; e, similarmente ao apresentado para o caso contínuo, assume-se que a função matricial  $\Omega_2$  tem posto completo para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ .



Multiplicando à esquerda e à direita a condição  $\Lambda_3(x) < 0$  por  $\Pi_0$  (definido em (225)) e  $\Pi'_0$  respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} Q_1 P Q'_1 - Q_1 - Q'_1 & -Q_1 + (A_1 + A_4 K) Q'_2 \\ * & -Q_2 P Q'_2 + (A_1 + A_4 K) Q'_2 + Q_2 (A_1 + A_4 K)' \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 Q'_3 & A_3 F \\ A_2 Q'_3 + Q_2 \Omega'_1 + Q_2 K' \Omega'_4 & A_3 F + Q_2 G' \\ \Omega_2 Q'_3 + Q_3 \Omega'_2 & \Omega_3 F \\ * & -2F \end{bmatrix} < 0.$$

Observe que, a condição acima não é uma LMI devido aos termos  $Q_1 P Q_1$  e  $Q_2 P Q_2$ . Neste caso, considera-se  $P = M_1 = M_2$  e segue que  $P Q_1 = P Q_2 = I_n$ . Assim, definido  $Q = Q_1 = Q_2$ , para os termos  $Q_2 G'$  e  $K Q'_2$ , considera-se a seguinte troca de variáveis:  $G'_q = Q G'$  e  $Q_K = K Q'$ . Neste caso, se

$$\Lambda_4(x) < 0, \quad (242)$$

com

$$\Lambda_4(x) = \begin{bmatrix} -Q & -Q + A_1 Q' + A_4 Q_K \\ * & -Q + A_1 Q' + A_4 Q_K + Q A_1 + Q'_K A'_4 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 Q'_3 & A_3 F \\ A_2 Q'_3 + Q \Omega'_1 + Q'_K \Omega'_4 & A_3 F + G'_q \\ \Omega_2 Q'_3 + Q_3 \Omega'_2 & \Omega_3 F \\ * & -2F \end{bmatrix} < 0,$$

for verificada, então (220) é satisfeita.

Com base nestas considerações, o seguinte resultado é apresentado.

**Teorema 12** *Considere um sistema na forma (234)-(235) tal que possa ser representado a partir de uma representação RAR (236). Se existir uma matriz constante definida positiva  $Q = Q'$ , matrizes  $Q_3$ ,  $Q_K$  e  $G_q$  de dimensões apropriadas e uma matriz diagonal definida positiva  $F$ , satisfazendo o seguinte conjunto de desigualdades matriciais para todo  $x \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$*

$$\Lambda_4(x) < 0, \quad (243)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q q_r \\ q'_r Q & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (244)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q'_{K(i)} - G_{q(i)}' \\ * & u_0^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (245)$$

então o ganho de realimentação de estados dado por  $K = Q_K (Q')^{-1}$  é tal que para todo  $x(0) \in \mathcal{R}$ , com  $P = Q^{-1}$ , a trajetória  $x(k)$  pertence a  $\mathcal{R}$ , e converge assintoticamente para a origem quando  $k \rightarrow \infty$ , sendo que  $\mathcal{R}$  é definida em (210).

**Prova.**

Os mesmos passos apresentados na prova do Teorema 11 podem ser considerados sendo que  $Q = Q_1 = Q_2$ . Em resumo, (243) assegura que  $\Delta V(x) < 0$ , levando a  $x \in \tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$ . As relações (244) e (245), asseguram que  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_x$  e  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{S}$ , respectivamente.  $\square$

**Observação 14** Neste caso, o cálculo de  $K$  que leva a maximização da região  $\mathcal{R}$  pode ser feito através da solução do problema de otimização convexa apresentado em (233), sendo que  $Q = Q_1 = Q_2$ . Observe que esta restrição aumenta o conservadorismo presente nas condições. No entanto, uma solução que pode ser utilizada ao considerar uma busca linear no parâmetro  $\epsilon$  de forma que  $\epsilon Q_1 = Q_2$ .

## 6.6 Exemplos Numéricos

**Exemplo 10** Considere o sistema não-linear estudado no Exemplo 4 em (VALMORBIDA; TARBOURIECH; GARCIA, 2010b):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + (1 - 0.5x_2(t))\text{sat}(u(t)),\end{aligned}\quad (246)$$

com  $u_0 = 5$ .

Considere  $\mathcal{B}_x(\alpha_1, \alpha_2) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \alpha_1, |x_2| \leq \alpha_2\}$ , com  $\alpha_1 = 1.02$  e  $\alpha_2 = 1.42$

A partir da DAR dada em (214), note que é possível representar este sistema sem a utilização do vetor auxiliar  $z$ . É suficiente considerar:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - 0.5x_2 \end{bmatrix}.$$

Com base no problema de otimização apresentado em (233), determina-se um ganho estabilizante  $K$  que maximiza a estimativa da região de atração. Neste caso, a Figura 21 mostra a estimativa obtida através desta abordagem (definida por  $\mathcal{R}_1$ ), bem como a região apresentada em (VALMORBIDA; TARBOURIECH; GARCIA, 2010b) (dada por  $\mathcal{R}_2$ ). Claramente, pode-se notar que utilizando a abordagem proposta deste capítulo obtém-se melhores resultados, sendo que a estimativa da região de atração é consideravelmente maior.

A matriz  $P$  e o ganho  $K$  obtidos são dados por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9612 & 0.0022 \\ 0.0022 & 0.4959 \end{bmatrix}$$

$$K = [ 0.0176 \quad -5.3756 ]$$

**Exemplo 11** Considere o sistema não-linear analisado no Exemplo 5.1 de (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (1 + x_1^2)x_1 + (2 + 8x_2^2)x_2 + \text{sat}(u(t)) \\ u(t) &= -2x_1(t) - 4x_2(t).\end{aligned}\quad (247)$$

Observe que o resultado apresentado em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010) tem como objetivo maximizar a estimativa da região de atração do sistema para um dado

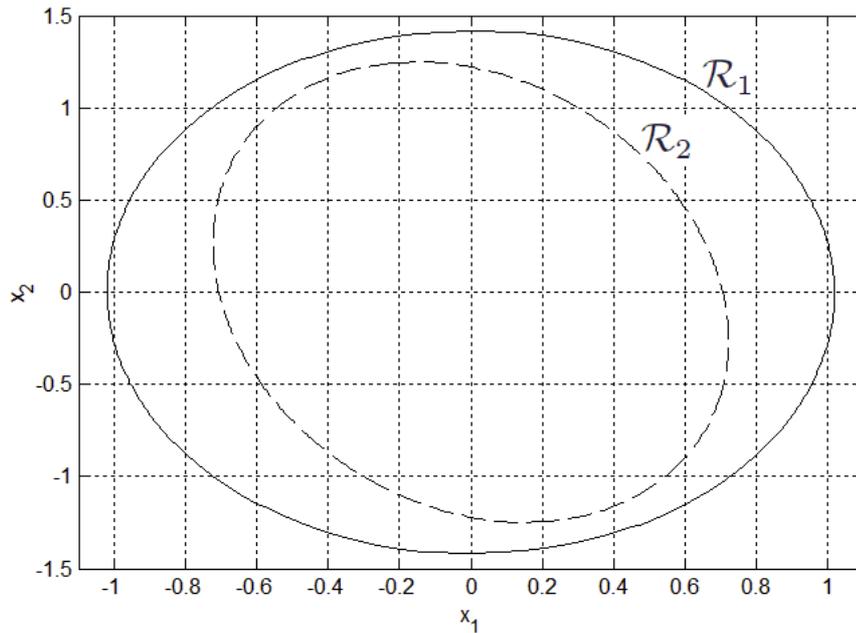


Figura 21: Estimativa da região de atração  $\mathcal{R}_1$ .

ganho  $K$ , ou seja  $K = -[2 \ 4]$ . Diferentemente, utilizando a abordagem apresentada neste capítulo, o objetivo é determinar o ganho tal que obtenha-se uma estimativa maximizada da região de atração. Com este propósito, considere

$$\mathcal{B}_x := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \alpha_3, |x_2| \leq \alpha_4\},$$

com  $\alpha_3 = 0.61$ ,  $\alpha_4 = 0.35$  e a mesma DAR proposta em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010), ou seja definindo  $z = [x_1^2 \ x_2^2]'$ , tem-se:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Baseado no problema de otimização (233), determina-se o ganho  $K$  que leva a estimativa  $\mathcal{R}_3$ . Neste caso, a matriz  $P$  e o ganho  $K$  são dados por:

$$P = \begin{bmatrix} 4.0383 & 4.1571 \\ 4.1571 & 12.7928 \end{bmatrix}$$

$$K = [ -74.6992 \quad -228.8424 ]$$

A Figura 22 apresenta a região  $\mathcal{R}_3$  e a região de atração real do sistema em malha fechada (207)-(208).

**Exemplo 12** Considere o sistema não-linear apresentado no Exemplo 5.2 em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1+x_1^2}{2}x_2 \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{2}{1+x_1^2}x_1 - x_2 - \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2}\text{sat}(u). \end{aligned} \quad (248)$$

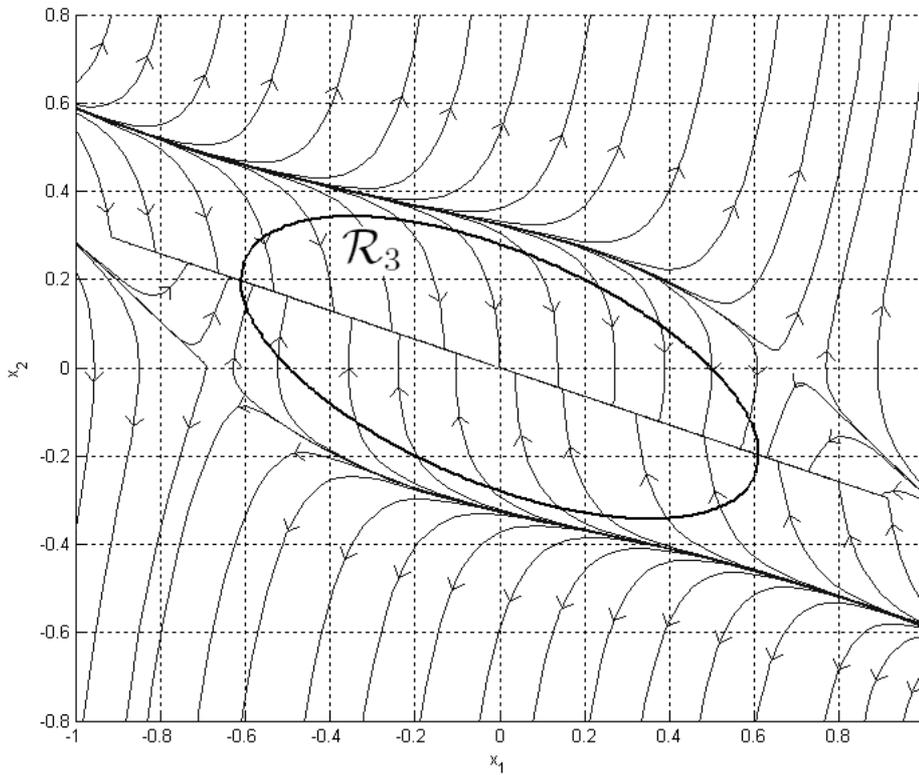


Figura 22: Estimativa da região de atração  $\mathcal{R}_3$ .

Considere

$$\mathcal{B}_x := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \alpha_5, |x_2| \leq \alpha_6\},$$

com  $\alpha_5 = 0.4$  e  $\alpha_6 = 1.0$

Considerando o sistema apresentado em (248) e a DAR dada em (214) com

$$z = \left[ x_1 x_2 \quad \frac{x_1}{1+x_1^2} \quad \frac{x_1^2}{1+x_1^2} \quad \frac{u}{1+x_1^2} \quad \frac{x_1 u}{1+x_1^2} \quad \frac{\psi}{1+x_1^2} \quad \frac{x_1 \psi}{1+x_1^2} \right]',$$

tem-se as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.5x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2x_1 & 0 & -2x_1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} -x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}',$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0]'$$

e

$$\Omega_4 = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]'$$

Baseado no problema de otimização apresentado em (233) sintetiza-se um ganho  $K$  que leva a uma estimativa elipsoidal maximizada  $\mathcal{R}_4$  da região de atração do sistema em malha fechada. A Figura 23 mostra a região  $\mathcal{R}_4$  e a região  $\mathcal{R}_5$  proposta em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010) obtida para um dado ganho  $K = [4 \ 0]$ . É importante ressaltar que  $\mathcal{R}_5$  é encontrada considerando uma função de Lyapunov polinomial enquanto que a abordagem proposta neste capítulo considera simplesmente uma função de Lyapunov quadrática para obter a estimativa  $\mathcal{R}_4$ .

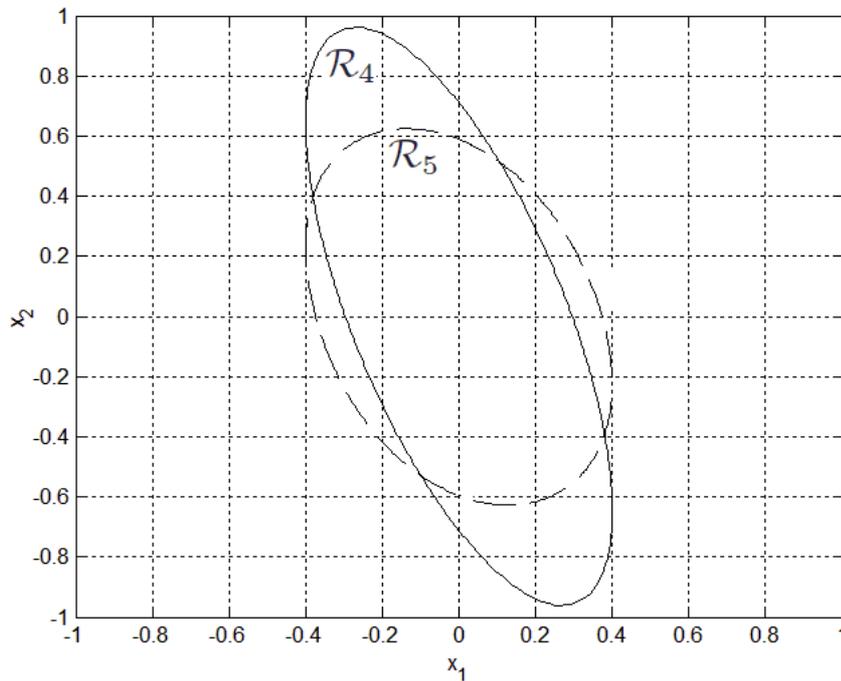


Figura 23: Estimativa da região de atração  $\mathcal{R}_5$ .

Neste caso, a matriz  $P$  e o ganho  $K$  obtidos através da solução de (233) são dados por:

$$P = \begin{bmatrix} 11.4183 & 3.1948 \\ 3.1948 & 1.9749 \end{bmatrix}$$

$$K = [19.7062 \ 12.9825]$$

## 6.7 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentada uma abordagem para calcular o ganho estático de realimentação de estados para sistemas não-lineares racionais sujeitos à saturação do atuador. Este procedimento visou implicitamente a maximização da região de atração do sistema em malha fechada. Tendo em vista os resultados anteriores relatados na literatura, as principais contribuições da abordagem pode ser resumida pelos seguintes pontos:

1. leva em conta explicitamente a saturação de entrada;

2. não é necessário fixar a priori uma função de Lyapunov, como é o caso da abordagem *SOS*. Observe que a função de Lyapunov que leva à uma melhor estimativa da região de atração é calculada a partir do procedimento de otimização;
3. se baseia em uma representação diferencial algébrica de sistemas racionais, que pode modelar uma ampla classe de sistemas não-lineares. De fato, essa representação permite tratar não apenas sistemas racionais (que engloba as classes de sistemas quadrática e polinomial), mas também não-linearidades mais complexos por meio de restrições adicionais algébricas e/ou troca de variáveis (ver, por exemplo, (COUTINHO et al., 2004, 2008));
4. as condições de estabilização são expressas em termos de LMIs, que permite determinar uma lei de controle a partir de uma otimização convexa. Adicionalmente permite considerar desempenhos adicionais e restrições associadas à robustez.

Uma extensão dos resultados também foi apresentada abordando sistemas não-lineares racionais em tempo discreto sujeitos à saturação do atuador. Diferentemente dos resultados apresentados no Capítulo 3, onde apenas o problema de análise foi considerado, neste capítulo uma abordagem na forma de LMIs é desenvolvida para calcular o ganho de realimentação de estados. Este ganho é encontrado com uma função de Lyapunov quadrática que leva a uma estimativa maximizada da região de atração do sistema em malha fechada.

Os resultados para sistemas em tempo contínuo apresentados neste capítulo foram aceitos para publicação em (OLIVEIRA; GOMES DA SILVA Jr.; COUTINHO, 2012).

## 7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O problema de determinar condições de estabilidade e estabilização de sistemas não-lineares sujeitos a saturação ainda é um desafio no cenário atual. Para contribuir neste sentido, esta tese propôs diferentes métodos. As formulações das abordagens foram baseadas em representações algébricas diferenciais e recursivas (DAR E RAR) de sistemas racionais e na versão modificada da condição de setor generalizada (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005) para lidar com a saturação.

Inicialmente, foram propostos métodos para caracterizar a estabilidade de sistemas não-lineares racionais em tempo discreto sujeitos a saturação do atuador e perturbações limitadas. Os resultados tiveram como inspiração o desenvolvimento apresentado em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010), sendo que a metodologia proposta naquele trabalho é aplicada a sistemas contínuos e sem perturbações. Neste contexto, o Capítulo 3 apresentou uma abordagem LMI para caracterizar a estabilidade de forma a calcular estimativas da região de atração do sistema, bem como limites para uma classe de perturbações admissíveis  $\ell_2$  para os quais as trajetórias de estado são limitadas e estimativas do ganho  $\ell_2$  do sistema. Vale destacar que técnicas apresentadas em (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010) utilizam funções de Lyapunov na forma racional para obter condições menos conservadoras. Como não é possível aplicar a mesma formulação para sistemas em tempo discreto com perturbações, o desenvolvimento apresentado nesta tese considerou duas abordagens diferentes com base em partições do domínio dos estados. Primeiramente, considerou-se uma única função de Lyapunov quadrática e multiplicadores associados a cada partição. Posteriormente, funções de Lyapunov por partes foram utilizadas (para cada partição uma função de Lyapunov quadrática diferente está associada). Com o objetivo de verificar a eficiência dos métodos propostos, mostrou-se através de um exemplo que as abordagens propostas são ferramentas sistemáticas úteis para a caracterização da estabilidade de sistemas de controle não-lineares discretos sujeitos a saturação e perturbações. Além disso, percebe-se que uma redução significativa do conservadorismo pode ser alcançada através do emprego de funções quadráticas de Lyapunov por partes.

Nos Capítulos 4 e 5 foram propostas novas técnicas para síntese de compensadores *anti-windup* de forma a aumentar a região de atração de sistemas não-lineares racionais em tempo contínuo sujeitos a saturação. Peculiarmente, no Capítulo 4 foram desenvolvidas condições sob a forma de BMIs e incorporadas em um algoritmo iterativo. Um ponto importante neste sentido é que a cada iteração do algoritmo é resolvido um problema de otimização convexa com restrições na forma de LMIs. Tais resultados foram estendidos para lidar com sistemas incertos e sistemas sujeitos a perturbações limitadas em energia ( $\mathcal{L}_2$ ). No entanto, evitou-se a utilização destas técnicas iterativas alterando a forma na qual o desenvolvimento é formulado a fim de obter uma formulação convexa.

Além disso, é de interesse o tratamento de sistemas multivariáveis de uma forma mais simples, i.e, sem busca linear em parâmetros. Então, o Capítulo 5 apresentou uma nova abordagem para sintetizar este tipo de compensador para sistemas multivariáveis, sendo que as condições de estabilização local foram desenvolvidas diretamente na forma LMIs. Tal desenvolvimento deu-se a partir de novas técnicas para lidar com as restrições algébricas provenientes da representação DAR, onde a inclusão das matrizes dependentes dos estados não são incluídas diretamente através do Lema de Finsler. Neste capítulo, ainda foram apresentadas extensões dos resultados para tratar sistemas não-lineares em tempo discreto sujeitos a saturação do atuador. Em ambos os casos, exemplos numéricos foram apresentados para ilustrar a aplicação das abordagens e as melhorias efetivas no tamanho da região de atração do sistema em malha fechada. Salienta-se que, para o mesmo sistema, conforme apresentado nos Exemplos 6 e 7 (Capítulos 4 e 5, respectivamente), pode-se comparar as abordagens. Embora cada abordagem tenha um respectivo problema de otimização é possível verificar similaridade nas estimativas da região de atração. Desta forma pode-se concluir que ao utilizar resultados diretamente na forma de LMI, além de evitar a utilização de procedimentos iterativos ou busca linear em parâmetros, obtém-se estratégias de *anti-windup* apropriadas. Este fato é reforçado ao realizar uma comparação com outros métodos propostos, sendo que as condições apresentadas mostram-se eficientes e menos conservadoras.

Por fim, no Capítulo 6 foi apresentada uma abordagem de projeto de um controlador estático para sistemas não-lineares racionais sujeitos à saturação do atuador em malha fechada. Neste caso, aplica-se a mesma abordagem utilizada no Capítulo 5, onde o Lema de Finsler não é utilizado implicitamente. Este fato permitiu então desenvolver condições na forma de LMIs. Novamente, utilizando esta estratégia para projetar uma realimentação estática, a estimativa da região de atração é consideravelmente aumentada. Este procedimento foi realizado com o uso de condições de estabilização local que permitam, simultaneamente, calcular o ganho de realimentação de estados e uma função de Lyapunov quadrática, levando a uma estimativa maximizada da região de atração do sistema em malha fechada. A vantagem está principalmente na resolução direta na forma de LMIs, evitando procedimentos iterativos de relaxamento e no tratamento de forma direta de sistemas de controle multivariáveis. Além disso, utilizando estes métodos destacam-se os seguintes pontos: não é necessário fixar a priori uma função de Lyapunov, como é o caso de metodologias baseadas em *SOS*, levando à uma melhor estimativa da região de atração e pode-se tratar sistemas explicitamente com saturação na entrada. Propôs-se também uma extensão dos resultados abordando sistemas não-lineares racionais em tempo discreto sujeitos à saturação do atuador. Neste sentido, a abordagem na forma de LMIs foi desenvolvida para calcular o ganho de realimentação de estados, diferentemente do apresentado no Capítulo 3, onde apenas o problema de análise foi considerado. Com o objetivo de verificar a aplicação e conservadorismo imposto pelas condições são apresentados alguns exemplos ilustrativos. Além disso, uma comparação com outros trabalhos existentes foi apresentada, reforçando a relevância das condições obtidas.

Com base nas abordagens desenvolvidas, pode-se citar algumas perspectivas de continuação deste trabalho:

- Projeto de compensadores de *anti-windup* e de leis de controle considerando também critérios de desempenho;
- Projeto de compensadores de *anti-windup* dinâmicos;
- Projeto de realimentação não-linear de estados;

- Projeto de realimentação não-linear estática e dinâmica de saída;
- Extensão de resultados apresentados nos capítulos 5 e 6 para sistemas com atrasos
- Utilização de funções de Lyapunov mais complexas (por exemplo, funções racionais).

## REFERÊNCIAS

- ALAMO, T. et al. A New Concept of Invariance for Saturated Systems. **Automatica**, Tarrytown, v.42, n.9, p.1515–1521, 2006.
- ARCAK, M.; LARSEN, M.; KOKOTOVIC, P. Circle and Popov criteria as tools for nonlinear feedback design. **Automatica**, Tarrytown, v.39, n.4, p.643–650, 2003.
- BARREIRO, A.; ARACIL, J.; PAGANO, D. Detection of Attraction Domains of Nonlinear Systems Using the Bifurcation Analysis and Lyapunov Functions. **International Journal of Control**, Bristol, v.75, n.5, p.314–327, 2006.
- BLANCHINI, F. Set invariance in control. **Automatica**, Tarrytown, v.35, n.11, p.1747 – 1767, 1999.
- BOSE, N.; LI, C. A Quadratic Form Representation of Polynomials of Several Variables and Its Applications. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.13, n.8, p.447–448, 1968.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. Philadelphia: SIAM books, 1994. 193p.
- CAO, Y.-Y.; LIN, Z.; WARD, D. G. An Antiwindup Approach to Enlarging Domain of Attraction for Linear Systems Subject to Actuator Saturation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.47, n.1, p.140–145, 2002.
- CASTELAN, E. B. **Sur l’invariance positive et la commande sous contraintes de systèmes linéaires multivariables**. 1992. 144p. Tese de Doutorado — Université Paul Sabatier, LAAS, CNRS, Toulouse, 1992.
- CASTELAN, E. B. et al.  $\mathcal{L}_2$ -Stabilization of Continuous-time Linear Systems with Saturating Actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.16, n.18, p.935–944, 2006.
- CASTELAN, E. B. et al. Synthesis of output feedback controllers for a class of nonlinear parameter-varying discrete-time systems subject to actuators limitations. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC’10), 2010, Baltimore. **Proceedings...** New York: IEEE, 2010. p.4235–4240.
- CASTELAN, E. B.; MORENO, U. F.; PIERI, E. R. de. Absolute Stabilization of Discrete-time Systems with a Sector Bounded Nonlinearity under Control Saturations. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS, 2006, Island of Kos. **Proceedings...** New York: IEEE, 2006. v.1, n.1, p.3105–3108.

CASTELAN, E. B.; TARBOURIECH, S.; QUEINNEC, I. Stability and Stabilization of a Class of Nonlinear Systems with Saturating Actuators. In: IFAC WORLD CONGRESS, 16., 2005, Praga. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2005. v.1, n.1.

CASTELAN, E. B.; TARBOURIECH, S.; QUEINNEC, I. Control Design for a Class of Nonlinear Continuous-time Systems. **Automatica**, Tarrytown, v.44, n.8, p.2034–2039, 2008.

CHESI, G. Estimating the domain of attraction for uncertain polynomial systems. **Automatica**, Tarrytown, v.40, n.11, p.1981–1986, 2004.

CHESI, G. **Domain of Attraction**: analysis and control via sos programming. Berlin: Springer, 2011. 283p.

CHESI, G. et al. An LMI-based approach for characterizing the solution set of polynomial systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 39., 2000, Sydney. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.2, p.0191–2216.

CHESI, G. et al. Robust Analysis of LFR Systems Through Homogeneous Polynomial Lyapunov Functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.49, n.7, p.1211–1216, 2004.

CHESI, G. et al. LMI-based computation of optimal quadratic Lyapunov functions for odd polynomial systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.15, n.1, p.35–49, Jan. 2005.

CHESI, G.; TESI, A.; VICINO, A. Computing optimal quadratic Lyapunov functions for polynomial nonlinear systems via LMIs. In: IFAC WORLD CONGRESS, 15., 2002, Barcelona. **Proceedings...** Kidlington: IFAC, 2002.

COUTINHO, D. F.; DE SOUZA, C. E.; BARBOSA, K. A. Improved Robust  $H_\infty$  Filter Design for Discrete-Time Linear Parameter Varying Systems. In: PREPRINTS OF THE 3RD IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM, STRUCTURE AND CONTROL, 2007, Iguassu Falls. **Anais...** Tarrytown: IFAC, 2007.

COUTINHO, D. F. et al. Linear  $H_\infty$  Filter Design for a Class of Uncertain Nonlinear Systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 42., 2003, Maui. **Proceedings...** New York: IEEE, 2003. p.380–385.

COUTINHO, D. F. et al. Stability Analysis and Control of a Class of Differential-Algebraic Nonlinear Systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.14, n.16, p.1301–1326, 2004.

COUTINHO, D. F. et al.  $\mathcal{L}_2$ -Gain Analysis and Control of Uncertain Nonlinear Systems with Bounded Disturbance Inputs. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.18, p.88–110, 2008.

COUTINHO, D. F. et al. Robust Linear  $\mathcal{H}_\infty$  Filter Design for a Class of Uncertain Nonlinear Systems: an LMI approach. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v.48, n.3, p.1452–1472, 2009.

- COUTINHO, D. F.; FU, M.; TROFINO, A. Robust Analysis and Control for a Class of Uncertain Nonlinear Discrete-time Systems. **System & Control Letters**, Amsterdam, v.53, n.5, p.377–393, 2004.
- COUTINHO, D. F.; GOMES DA SILVA Jr., J. M. Computing Estimates of the Region of Attraction for Rational Control Systems with Saturating Actuators. **IET Control Theory and Applications**, Hertford, v.4, n.3, p.315–325, 2010.
- DOYLE III, F. J. An Anti-windup Input-output Linearization Scheme for SISO Systems. **Journal of Process Control**, Amsterdam, v.9, n.3, p.213–220, 1999.
- DULLERUD, G. E.; PAGANINI, F. **A Course in Robust Control Theory**. New York: Springer-Verlag, 1999.
- DUROLA, S.; DANÈS, P.; COUTINHO, D. F. Set-membership Filtering of Uncertain Discrete-Time Rational Systems through Recursive Algebraic Representations and LMIs. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 47., 2008, Cancun. **Proceedings...** New York: IEEE, 2008. p.684–689.
- EL GHAOUI, L.; SCORLETTI, G. Control of Rational Systems Using Linear-Fractional Representations and LMIs. **Automatica**, Tarrytown, v.32, n.9, p.1273–1284, 1996.
- GAHINET, P. et al. **LMI Control Toolbox**: for use with matlab. Natick: MathWorks, 1995.
- GALEANI, S. et al. A Tutorial on Modern Anti-windup Design. **European Journal of Control**, London, v.15, n.3-4, p.418–440, 2009.
- GENESIO, R.; TARTAGLIA, M.; VICINO, A. On the Estimation of Asymptotic Stability Regions: state of the art and new proposals. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.30, n.8, p.747–755, 1985.
- GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S. **Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control**. Philadelphia: SIAM books, 2000.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M. **Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes**. 1997. 177p. Tese (Doutorado) — Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, France, 1997.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M.; CORSO, J.; CASTELAN, E. B. Output Feedback Stabilization for Systems Presenting Sector-bounded Nonlinearities and Saturating Inputs. In: IFAC WORLD CONGRESS, 17., 2008, Seoul. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2008. p.14109–14114.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M. et al. **Static Anti-windup Design for a Class of Nonlinear Systems**. Artigo submetido ao International Journal of Robust and Nonlinear Control.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S. Polyhedral regions of local stability for linear discrete-time systems with saturating controls. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 36., 1997, San Diego. **Proceedings...** New York: IEEE, 1997. v.1.

- GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S. Stability Regions for Linear Systems with Saturating Controls. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE 1999, 1999, Karlsruhe. **Proceedings...** Paris: EUCA, 1999.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S. Local stabilization of linear systems under amplitude and ratesaturating actuators. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 39., 2000, Sydney. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.4.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup Design with Guaranteed Regions of Stability: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.50, n.1, p.106–111, 2005.
- GRIMM, G. et al. Anti-windup for stable systems with input saturation: an LMI-based synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.48, n.9, p.1500–1525, 2003.
- HENRION, D.; TARBOURIECH, S. LMI Relaxations for Robust Stability of Linear Systems with Saturating Controls. **Automatica**, Tarrytown, v.35, p.1599–1604, 1999.
- HERRMANN, G. et al. Anti-windup Synthesis for Nonlinear Dynamic Inversion Control Schemes. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.20, p.1465–1482, 2010.
- HINDI, H.; BOYD, S. Analysis of Linear Systems with Saturation Using Convex Optimization. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 37., 1998, Tampa. **Proceedings...** New York: IEEE, 1998. p.903–908.
- HU, T.; LIN, Z. **Control Systems with Actuator Saturation**. Boston: Birkhauser, 2001.
- HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An Analysis and Design Method for Linear Systems Subject to Actuator Saturation and Disturbance. **Automatica**, Tarrytown, v.38, n.2, p.351–359, 1999.
- HUANG, S. et al. Analysis of Input-to-state Stability for Discrete Time Nonlinear Systems via Dynamic Programming. **Automatica**, Tarrytown, v.41, n.12, p.2055–2065, 2005.
- JIANG, Z. P.; WANG, Y. Input-to-state Stability for Discrete-time Nonlinear Systems. **Automatica**, Tarrytown, v.37, n.6, p.857–869, 2001.
- JOHANSSON, M. **Piecewise Linear Control Systems: a computational approach**. Berlin: Springer, 2003.
- KAHVECI, N.; IOANNOU, P.; MIRMIRANI, M. A Robust Adaptive Control Design for Gliders Subject to Actuator Saturation Nonlinearities. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'07), 2007, New York. **Proceedings...** New York: IEEE, 2007. p.492–497.
- KAPILA, V.; GRIGORIADIS, K. **Actuator Saturation Control**. New York: Marcel Dekker, Inc., 2002.
- KAPOOR, N.; DAOUTIDIS, P. An Observer-based Anti-windup Scheme for Non-linear Systems with Input Constraints. **International Journal of Control**, Bristol, v.72, n.1, p.18–29, 1999.

- KENDI, T. A.; DOYLE III, F. J. An Anti-windup Scheme for Multivariable Nonlinear Systems. **Journal of Process Control**, Amsterdam, v.7, n.5, p.329–343, Oct. 1997.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. New York: Prentice Hall, 1996.
- KIYAMA, T.; IWASAKI, T. Input-to-state Stability for Discrete-time Time-varying Systems with Applications to Robust Stabilization of Systems in Power Form. **System & Control Letters**, Amsterdam, v.41, n.2, p.105–114, 2000.
- LAILA, D. S.; ASTOLFI, A. Input-to-state Stability for Discrete-time Time-varying Systems with Applications to Robust Stabilization of Systems in Power Form. **Automatica**, Tarrytown, v.41, n.11, p.1891–1903, 2005.
- LOFBERG, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB . In: CACSD CONFERENCES, 2004, Taipei. **Proceedings...** North-Holland: IEEE, 2004.
- LOQUEN, T. **Some Results on Reset Control Systems**. 2010. 141p. Tese (Doutorado) — Université Paul Sabatier, LAAS, CNRS, Toulouse, 2010.
- LU, W. M.; DOYLE, J. C.  $H_\infty$  Control of Nonlinear Systems: a convex characterization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.40, n.9, p.1668–1675, 1995.
- MENON, P. et al. General Anti-windup Synthesis for Input Constrained Nonlinear Systems Controlled Using Nonlinear Dynamic Inversion. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 45., 2006, San Diego. **Anais...** New York: IEEE, 2006. p.5435–5440.
- MOLCHANOV, A. P.; PYATNITSKIY, Y. S. Criteria of Asymptotic Stability of Differential and Difference Inclusions Encountered in Control Theory. **System & Control Letters**, Amsterdam, v.13, n.1, p.59–64, 1989.
- MORABITO, F.; TEEL, A.; ZACCARIAN, L. Nonlinear Anti-windup Applied to Euler-Lagrange Systems. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, Brookline, v.20, n.3, p.526–537, 2004.
- OLIVEIRA, M. C. de; SKELTON, R. Stability Tests for Constrained Linear Systems. In: MOHEIMANI, S. O. R. (Ed.). **Perspectives in Robust Control**: lecture notes in control and information sciences 268. New York: Springer-Verlag, 2001. p.241–257.
- OLIVEIRA, M. Z. et al. Anti-windup Design for a Class of Nonlinear Control Systems. In: IFAC WORLD CONGRESS, 18., 2011, Milano. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2011. p.13432–13437.
- OLIVEIRA, M. Z. et al. Anti-windup Design for a Class of Multivariable Nonlinear Control Systems: an lmi-based approach. In: IEEE CONF. ON DECISION AND CONTROL, 2011, Orlando. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011.
- OLIVEIRA, M. Z. et al. **Anti-windup para uma Classe de Sistemas de Controle Não-lineares Sujeitos a Saturação**. Artigo submetido à SBA: Controle & Automação.
- OLIVEIRA, M. Z.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; COUTINHO, D. F. Asymptotic and  $\mathcal{L}_2$  Stability Analysis for a Class of Nonlinear Discrete-time Control Systems Subject to Actuator Saturation. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'10), 2010, Baltimore. **Proceedings...** New York: IEEE, 2010. p.5179–5184.

OLIVEIRA, M. Z.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; COUTINHO, D. F. **Stability Analysis for a Class of Nonlinear Discrete-Time Control Systems Subject to Disturbances and to Actuator Saturation**. Artigo submetido ao International Journal of Control.

OLIVEIRA, M. Z.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; COUTINHO, D. F. State Feedback Design for Rational Nonlinear Control Systems with Saturating Inputs. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'12), 2012, Montreal. **Proceedings...** New York: IEEE, 2012.

PAPACHRISTODOULOU, A. **Scalable Analysis of Nonlinear Systems Using Convex Optimization**. 2005. 162p. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, Pasadena, 2005.

PARRILO, P. A. **Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization**. 2000. 135p. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, Pasadena, 2000.

PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. An Efficient Numerical Solution for H<sub>2</sub> Static Output Feedback Synthesis. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2001, Porto. **Proceedings...** Paris: EUCA, 2001.

PREMPAIN, E.; TURNER, M.; POSTLETHWAITE, I. Coprime Factor Based Anti-windup Synthesis for Parameter-dependent Systems. **System & Control Letters**, Amsterdam, v.58, n.12, p.810–817, 2009.

SASTRY, S. **Nonlinear Systems - Analysis, Stability and Control**. New York: Springer-Verlag, 1999.

SONTAG, E. D. Smooth stabilization implies coprime factorization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.34, n.4, p.435–443, Apr. 1989.

SONTAG, E. D. Comments on integral variants of ISS. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.34, n.1-2, p.93–100, 1998.

SONTAG, E. D. The ISS Philosophy as a Unifying Framework for Stability-like Behavior. In: ISIDORI, A.; LAMNABHI-LAGARRIGUE, F.; RESPONDEK, W. (Ed.). **Nonlinear Control in the Year 2000**: vol. 2 lecture notes in control and information sciences 259. New York: Springer-Verlag, 2001. p.443–468.

SONTAG, E. D. Input to State Stability: basic concepts and results. In: **Nonlinear and Optimal Control Theory**. New York: Springer-Verlag, 2008. p.163–220. (Lecture Notes in Mathematics, v.1932).

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. In: **Optimization Methods and Software**. Oxford: Taylor & Francis, 1999. v.11–12, p.625–653.

TARBOURIECH, S. et al. **Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators**. Berlin: Springer, 2011.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; GLATTFELDER, A. **Advanced Strategies in Control Systems with Input and Output Constraints**. Berlin: Springer, 2007.

- TARBOURIECH, S.; PITTET, C.; BURGAT, C. Output tracking problem for systems with input saturations via nonlinear integrating actions. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.10, n.6, p.489–512, 2000.
- TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; J. M. GOMES DA SILVA Jr. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.51, n.8, p.1364–1371, 2006.
- TARBOURIECH, S.; TURNER, M. Anti-windup Design: an overview of some recent advances and open problems. **IET Control Theory & Applications**, Hertford, v.3, n.1, p.1–19, 2009.
- TEEL, A. R.; KAPOOR, N. The  $\mathcal{L}_2$  Anti-windup Problem: its definition and solution. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 1997, Brussels. **Proceedings...** Paris: EUCA, 1997.
- TOH, K. C.; TODD, M. J.; TUTUNCU, R. H. SDPT3 - a Matlab software package for semidefinite programming. In: **Optimization Methods and Software**. Oxford: Taylor & Francis, 1999. v.11, p.545–581.
- TROFINO, A. Robust Stability and Domain of Attraction of Uncertain Nonlinear Systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'00), 2000, Chicago. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.5, p.3707–3711.
- TROFINO, A.; DE SOUZA, C. E. Bi-quadratic Stability of Uncertain Nonlinear Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.46, n.8, p.1303–1307, 2001.
- TUAN, H. D.; APKARIAN, P.; NGUYEN, T. Q. Robust Filtering for Uncertain Nonlinearly Parameterized Plants. **IEEE Transactions on Signal Processing**, Amsterdam, v.51, n.7, p.1806–1815, 2003.
- VALMORBIDA, G. et al. Anti-windup for NDI Quadratic Systems. In: IFAC SYMPOSIUM ON NONLINEAR CONTROL SYSTEMS, 8., 2010, Bologna. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2010. v.1, p.1175–1180.
- VALMORBIDA, G.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Region of attraction estimates for polynomial systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 2010, Shanghai. **Anais...** New York: IEEE, 2010. p.5947–5952.
- VALMORBIDA, G.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. State feedback design for input-saturating quadratic systems. **Automatica**, Tarrytown, v.46, p.1196–1202, 2010.
- VIDYASAGAR, M. **Nonlinear Systems Analysis**. 2nd. ed. Heidelberg, DE: LNCIS: Prentice Hall, 1993.
- WU, F.; GRIGORIADIS, K. M.; PACKARD, A. Anti-windup Controller Design Using Linear Parameter-varying Control Methods. **International Journal of Control**, Bristol, v.73, n.12, p.1104–1114, 2000.
- ZACCARIAN, L.; TEEL, A. **Modern Anti-windup Synthesis: control augmentation for actuator saturation**. Princeton: Princeton University Press, 2011.

## APÊNDICE A DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Vários esforços têm sido realizados para o desenvolvimento de teorias de controle através da abordagem LMI, tendo como principal vantagem a solução de forma convexa (BOYD et al., 1994). Entretanto, como uma LMI pode ser representada de diversas formas, dificilmente ela está representada em sua forma afim. Tais representações são contornadas através de manipulações algébricas com o intuito de convertê-las em LMIs sendo que o complemento de Schur é largamente aplicado neste sentido. Outras ferramentas úteis para se trabalhar com LMIs são: o *S-procedure* onde a definição em sinal de um função quadrática deve verificar-se sempre que a definição em sinal de outra função quadrática for verificada e o Lema de Finsler que permite obter formulações equivalentes para testes de LMIs. Tais conceitos são apresentados a seguir.

**Definição 14** *Uma LMI é uma desigualdade da forma*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_{(i)} F_{(i)} > 0$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é a variável de interesse e  $F_{(i)} = F_{(i)}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes conhecidas. Desde que o cone de matrizes definidas positivas seja convexo e a matriz  $F(x)$  seja uma função afim em  $x$ , então a restrição  $F(x) > 0$  é uma restrição convexa em  $x$ . Esta é uma das propriedades fundamentais das LMIs. Com isso, o seguinte problema de otimização pode ser formulado:

$$\min c^T x \quad \{F(x) > 0\}$$

no qual  $c \in \mathbb{R}^m$ . O problema acima é uma generalização do problema de programação linear clássico em um cone de matrizes definidas positivas.

### Complemento de Schur

Algumas desigualdades matriciais não-lineares convexas podem ser convertidas para a formulação LMI usando o complemento de Schur, sendo esta, uma ferramenta básica na manipulação de desigualdades matriciais (BOYD et al., 1994).

**Lema 8** (Complemento de Schur (DULLERUD; PAGANINI, 1999)) *Supondo que  $Q = Q'$ ,  $M = M'$  e  $R$  são matrizes reais de dimensões apropriadas. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$i) Q > 0 \quad e \quad M - RQ^{-1}R' > 0$$

$$ii) \begin{bmatrix} M & R \\ R' & Q \end{bmatrix} > 0$$

### S-procedure

Um problema comum em programação convexa é o caso onde a definição em sinal de um função quadrática deve verificar-se sempre que a definição em sinal de outra função quadrática for verificada. Assim, pode-se utilizar *S-procedure* para aproximar esta relação através de uma LMI. A seguir será apresentado o *S-procedure* para funções quadráticas e desigualdades estritas (BOYD et al., 1994).

Sejam  $T_0, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas sujeitas à seguinte condição (BOYD et al., 1994):

$$\xi^T T_0 \xi > 0, \text{ para todo } \xi \neq 0 \text{ tal que } \xi^T T_{(i)} \xi \geq 0, i = 1, \dots, p.$$

Pode-se demonstrar que, se existem  $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$  tais que

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_{(i)} T_{(i)} > 0,$$

então a relação  $\xi^T T_0 \xi > 0$  se verifica, para todo  $\xi \neq 0$  tal que  $\xi^T T_{(i)} \xi \geq 0, i = 1, \dots, p$ . Vale destacar que a condição (A) é uma LMI nas variáveis  $T_0$  e  $\tau_1, \dots, \tau_p$ .

### Lema de Finsler

Através da utilização do Lema de Finsler é possível obter formulações equivalentes para testes de LMIs sujeitas a restrições de igualdade. Portanto, este lema é bastante útil para inserir as restrições de igualdade presentes na representação DAR levando a desigualdades matriciais sem restrições de igualdade.

**Lema 9** (*Lema de Finsler (OLIVEIRA; SKELTON, 2001)*) Sendo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma função simétrica,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz tal que o posto de  $B < n$  e  $B_0$  é uma base para o espaço nulo de  $B$  ( $BB_0 = 0$ ), as seguintes condições são equivalentes:

- i)  $x' Q x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0, x \neq 0$ ;
- ii)  $Q + LB + B' L' < 0, L \in \mathbb{R}^{m+n}$ ;
- iii)  $B'_0 Q B_0 < 0$ ;
- iv)  $Q - \alpha B' B < 0, \alpha \in \mathbb{R}$ .