

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução da Equação S_N Multigrupo de
Transporte Dependente do Tempo em Meio
Heterogêneo**

por

Fernanda Krüger Tomaszewski

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Cynthia Feijó Segatto
Orientadora

Porto Alegre, 20 de janeiro de 2012.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Tomaschewski, Fernanda Krüger

Solução da Equação S_N Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo / Fernanda Krüger Tomaschewski.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2012.

61 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2012.

Orientadora: Segatto, Cynthia Feijó

Dissertação: Matemática Aplicada
Equações S_N , multigrupo, multiregião, Transformada inversa de laplace

Solução da Equação S_N Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo

por

Fernanda Krüger Tomaszewski

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientadora: Profa. Cynthia Feijó Segatto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de
Vilhena
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros
UERJ

Prof. Dr. Fabio Souto de Azevedo
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
20 de janeiro de 2012.

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço

A Deus que possibilitou que eu estivesse aqui para realizar este trabalho;

A minha família, pela compreensão e incentivo permanente;

A minha orientadora, Cynthia Feijó Segatto, pela amizade, confiança e pelo compartilhamento de seus conhecimentos no auxílio da elaboração desta dissertação;

Aos membros da comissão examinadora por suas valiosas contribuições ao trabalho;

Ao CNPQ pelo suporte financeiro e ao PPGMAp representado em seu corpo de funcionários e docentes;

Aos meus colegas, especialmente o Igor e a Milena, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

| | |
|---|-------------|
| LISTA DE FIGURAS | vii |
| LISTA DE TABELAS | viii |
| LISTA DE SÍMBOLOS | ix |
| RESUMO | xiii |
| ABSTRACT | xiv |
| | |
| 1 INTRODUÇÃO | 1 |
| | |
| 2 O MÉTODO TLTS_N | 5 |
| 2.1 Equação de Transporte Dependente do Tempo | 5 |
| 2.1.1 O Método da Diagonalização | 11 |
| 2.1.2 Tratamento do Caráter Exponencial da Solução | 12 |
| | |
| 3 APLICAÇÃO DO MÉTODO TLTS_N PARA PROBLEMAS DE MULTIGRUPPO E MULTIREGIÃO | 15 |
| 3.1 O Método TLTS_N em Domínio Homogêneo Multigrupo | 15 |
| 3.2 O Método TLTS_N em Domínio Heterogêneo com k Regiões | 19 |
| 3.3 O Método TLTS_N para Domínio Heterogêneo Multigrupo | 23 |
| | |
| 4 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE | 25 |
| 4.1 Métodos de Inversão Numérica da Transformada de Laplace | 26 |
| 4.1.1 Quadratura Gaussiana | 26 |
| 4.1.2 Séries de Fourier | 28 |
| 4.1.3 Algoritmo de Gaver | 28 |
| 4.1.3.1 Acelerador Wynn-Rho | 29 |
| 4.1.3.2 Acelerador Stehfest | 30 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 4.2 | Avaliação dos Métodos de Inversão | 31 |
| 4.3 | Conclusões do Capítulo | 37 |
| 5 | RESULTADOS NUMÉRICOS | 39 |
| 5.1 | Problemas Monoenergéticos e em Meio Homogêneo | 39 |
| 5.1.1 | Problema 1 | 40 |
| 5.1.2 | Problema 2 | 41 |
| 5.1.3 | Problema 3 | 42 |
| 5.1.4 | Problema 4 | 43 |
| 5.1.5 | Problema 5 | 44 |
| 5.2 | Problema Multigrupo e Multiregião | 45 |
| 6 | CONCLUSÕES | 48 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 50 |

Lista de Figuras

| | | |
|-------------|---|----|
| Figura 3.1 | <i>Esquema multigrupo de energia.</i> | 15 |
| Figura 3.2 | <i>Placa dividida em k regiões para problema dependente do tempo.</i> | 19 |
| Figura 4.1 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = 1$.</i> | 32 |
| Figura 4.2 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = 1$ nos extremos.</i> | 32 |
| Figura 4.3 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = e^{-t}$.</i> | 33 |
| Figura 4.4 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = e^{-t}$ nos extremos.</i> | 33 |
| Figura 4.5 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \sin(t)$.</i> | 34 |
| Figura 4.6 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \sin(t)$ nos extremos.</i> | 34 |
| Figura 4.7 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{\pi t}}$.</i> | 35 |
| Figura 4.8 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{\pi t}}$ nos extremos.</i> | 35 |
| Figura 4.9 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \frac{e^{-1/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$.</i> | 36 |
| Figura 4.10 | <i>Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \frac{e^{-1/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$ nos extremos.</i> | 36 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------------|---|----|
| Tabela 4.1 | Transformada de Laplace de algumas funções elementares. . . . | 31 |
| Tabela 5.1 | Fluxo escalar $(\int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu')$ por meio do método TLTS ₄₀ sem fonte. | 40 |
| Tabela 5.2 | Fluxo escalar por meio do método TLTS ₄₀ com fonte unitária. . | 41 |
| Tabela 5.3 | Fluxo escalar por meio do método TLTS ₄₀ com fonte e^{-x} | 42 |
| Tabela 5.4 | Fluxo escalar por meio do método TLTS ₄₀ com fonte e^{-t} | 43 |
| Tabela 5.5 | Fluxo escalar por meio do método TLTS ₄₀ com fonte $e^{-x} + e^{-t}$ | 44 |
| Tabela 5.6 | Fluxo escalar para primeira região. | 46 |
| Tabela 5.7 | Fluxo escalar para segunda região. | 47 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------------|--|
| S_N | Sistema de ordenadas discretas |
| LTS_N | Transformada de Laplace de S_N |
| $TLTS_N$ | Transformada dupla de Laplace de S_N |
| \mathcal{L}^{-1} | Operador da transformada inversa de Laplace |
| \mathcal{L} | Operador da transformada de Laplace |
| ψ | Fluxo |
| ψ_g | Fluxo do grupo g |
| ψ_n | Fluxo, na direção discreta μ_n |
| ψ_n^k | Fluxo na região k , na direção discreta μ_n |
| $\psi_{n,g}^k$ | Fluxo do grupo g na região k , na direção discreta μ_n |
| Ψ_n | Fluxo transformado, na direção discreta μ_n |
| $\Psi_{n,g}$ | Fluxo transformado do grupo g , na direção discreta μ_n |
| Ψ | Vetor do fluxo transformado |
| Ψ_1 | Vetor do fluxo na direção positiva |
| Ψ_2 | Vetor do fluxo na direção negativa |
| Ψ_g | Vetor do fluxo transformado do grupo g |
| Ψ^k | Vetor do fluxo transformado na região k |
| Ψ_g^k | Vetor do fluxo transformado do grupo g na região k |
| $\bar{\Psi}$ | Transformada de Laplace do vetor do fluxo transformado |

| | |
|--------------------|--|
| S | Termo fonte |
| S_g | Termo fonte do grupo g |
| S_n | Termo fonte, direção discreta μ_n |
| S_n^k | Termo fonte na região k , direção discreta μ_n |
| $S_{n,g}^k$ | Termo fonte do grupo g na região k , direção discreta μ_n |
| \bar{S}_n | Termo fonte transformado, direção discreta μ_n |
| \mathbf{Q} | Vetor fonte |
| $\bar{\mathbf{Q}}$ | Transformada de Laplace do vetor fonte |
| ϕ | Condição inicial |
| ϕ_g | Condição inicial do grupo g |
| ϕ_n^k | Condição inicial na região k , direção discreta μ_n |
| $\phi_{n,g}^k$ | Condição inicial do grupo g na região k , direção discreta μ_n |
| f | Fluxo incidente em $x = 0$ |
| g | Fluxo incidente em $x = x_0$ |
| f_g | Fluxo incidente do grupo g em $x = 0$ |
| g_g | Fluxo incidente do grupo g em $x = x_0$ |
| $f_{n,g}$ | Fluxo incidente do grupo g em $x = 0$, direção discreta μ_n |
| $g_{n,g}$ | Fluxo incidente do grupo g em $x = x_0$, direção discreta μ_n |
| F_n | Fluxo transformado incidente em $x = 0$, direção discreta μ_n |
| G_n | Fluxo transformado incidente em $x = x_0$, direção discreta μ_n |

| | |
|------------------|--|
| A | Matriz dependente da aproximação considerada |
| $a(i, j)$ | Elementos da matriz A |
| I | Matriz identidade |
| D | Matriz de autovalores de A |
| X | Matriz de autovalores de A |
| H | Vetor convolução da matriz B com o vetor Q |
| \mathbf{H}_g | Vetor convolução da matriz B com o vetor Q do grupo g |
| \mathbf{H}^k | Vetor convolução da matriz B com o vetor Q na região k |
| \mathbf{H}_g^k | Vetor convolução da matriz B com o vetor Q do grupo g na região k |
| B | Matriz da transformada inversa de Laplace de $(sI - \mathbf{A})^{-1}$ |
| \mathbf{B}^+ | Decomposição da matriz B nos autovalores positivos |
| \mathbf{B}^- | Decomposição da matriz B nos autovalores negativos |
| E | Matriz da transformada inversa de Laplace de $(sI - \mathbf{D})^{-1}$ |
| \mathbf{E}^+ | Decomposição da matriz diagonal E nos autovalores positivos |
| \mathbf{E}^- | Decomposição da matriz diagonal E nos autovalores negativos |
| \mathbf{E}_g | Matriz da transformada inversa de Laplace de $(sI - \mathbf{D})^{-1}$ do grupo g |
| \mathbf{E}^k | Matriz da transformada inversa de Laplace de $(sI - \mathbf{D})^{-1}$ na região k |
| \mathbf{E}_g^k | Matriz da transformada inversa de Laplace de $(sI - \mathbf{D})^{-1}$ do grupo g na região k |

| | |
|-------------------|---|
| ζ | Vetor auxiliar para a mudança de base |
| ζ_g | Vetor auxiliar para a mudança de base do grupo g |
| ζ^k | Vetor auxiliar para a mudança de base na região k |
| ζ_g^k | Vetor auxiliar para a mudança de base do grupo g na região k |
| w_i | Peso da quadratura de Gauss-Legendre |
| x | Espessura |
| x_0 | Espessura máxima |
| μ_n | Direção discreta |
| t | Variável temporal |
| v | Velocidade dos nêutrons |
| σ_t | Seção de choque macroscópica total |
| σ_{tg} | Seção de choque macroscópica total do grupo g |
| σ_t^k | Seção de choque macroscópica total na região k |
| σ_{tg}^k | Seção de choque macroscópica total do grupo g na região k |
| σ_s | Seção de choque macroscópica de espalhamento |
| $\sigma_{sg'g}$ | Seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g |
| σ_s^k | Seção de choque macroscópica de espalhamento na região k |
| $\sigma_{sg'g}^k$ | Seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g na região k |
| s | Parâmetro complexo proveniente da transformada de Laplace |
| p | Parâmetro complexo proveniente da transformada de Laplace |

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma solução analítica para a aproximação S_N da equação de transporte dependente do tempo com fonte, tanto para uma placa homogênea quanto heterogênea, assumindo modelo de multigrupo. A ideia principal envolve os seguintes passos: construção da solução para a equação mencionada em uma placa homogênea pela aplicação da técnica da dupla transformada de Laplace. Para tal, inicialmente aplicamos a transformada de Laplace na variável tempo, resolvendo, na sequência, a equação resultante pelo método LTS_N . Finalmente determinamos a solução procurada para o fluxo angular usando o teorema de inversão da transformada de Laplace. Por este procedimento a solução é escrita em termos de uma integral de linha na variável tempo, a qual aqui é avaliada pelos seguintes esquemas numéricos: quadratura Gaussiana, Série de Fourier, Gaver-Stehfest e Gaver-Wynn-Rho. Uma vez que a solução para o problema homogêneo é conhecida, determinamos a solução para a placa de multi-camadas usando a solução encontrada para uma placa genérica, o que nos possibilita obtermos a solução global para uma placa heterogênea aplicando a condição de contorno e também impondo a condição de continuidade para o fluxo angular nas interfaces. Concluimos apresentando comparações entre os resultados numéricos obtidos pela inversão numérica da transformada de Laplace considerada, bem como o comportamento assintótico desta solução quando o tempo vai para o infinito.

ABSTRACT

In this dissertation is presented an analytical solution for the approximation S_N transport equation with the time dependent power, to homogeneous plates as to heterogeneous, assuming a multigroup model with isotropic scattering. The main idea involves the following steps, in this order: construction of a solution to the equation mentioned in a homogeneous plate by applying the technique of the double Laplace transform. In order to do this, is applied the Laplace transform in time variable, solving the resulting equation by the LTS_N method. Finally is determined the solution sought for the angular flux using the theorem of inverted Laplace transform. By this procedure the solution is written in terms of a line integral in the time variable, which here is measured by the following numerical schemes: Gauss quadrature, Fourier series, Gaver-Stehfest and Gaver-Wynn-Rho. Once the solution for the homogeneous problem is known, is determined the solution for the multilayered slab assigning this homogeneous solution for a generic slab, which allow us to obtain the global solution for the one that is heterogeneous applying the boundary condition, and also imposing the continuity condition for the angular flux at interface. Finally is concluded, reporting numerical comparisons among the results attained by the Laplace transform inversion approaches considered, as well the asymptotic behavior of this solution when time goes to infinity.

1 INTRODUÇÃO

Ao longo do tempo, muitas aproximações para a equação de transporte têm sido desenvolvidas. Entre estas aproximações, destacamos a aproximação em ordenadas discretas ou aproximação S_N proposta por Chandrasekhar na década de 60 [1]. Esta aproximação consiste na discretização da variável angular. Para este fim, primeiramente aproximamos o termo integral por uma fórmula de quadratura de Gauss-Legendre de ordem N , logo após aplicamos o método da colocação, considerando como função teste $\delta(\mu - \mu_n)$ na qual os μ_n , $n = 1, \dots, N$ são raízes do polinômio de Legendre de ordem N . Este procedimento resulta em um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares para o fluxo angular nas N direções discretas consideradas. Existem muitos métodos que procuram uma solução analítica para as equações de ordenadas discretas (equações S_N) em geometria cartesiana unidimensional, entre eles podemos citar o método de Chandrasekhar [1] e o método S_N desenvolvido por Siewert e colaboradores [2, 3, 4, 5], bem como o método spectral-Green's-function S_N [6, 7]. Na década de 90, surgiu na literatura o método LTS_N , cuja ideia principal é a aplicação da transformada de Laplace no conjunto de equações S_N , resultando em um sistema de equações dependente do parâmetro complexo “ s ”. Este sistema algébrico é então resolvido para o fluxo transformado e a transformada inversa é feita de forma analítica, obtendo assim uma expressão para o fluxo angular de partículas.

O método LTS_N tem sido aplicado a uma classe abrangente de problemas de transporte de partículas neutras, entre os quais destacamos: problemas de transporte unidimensionais em meio homogêneo [8], que foi um dos primeiros problemas resolvidos pelo método LTS_N e, também, em meio heterogêneo, quando o domínio é subdividido em regiões de tal forma que possamos considerar o problema homogêneo em cada uma dessas regiões [9] ou quando o meio é composto por dois materiais em mistura aleatória [10], modelos com um grupo [11] e com

multigrupo de energia [12], problemas anisotrópicos com ou sem simetria azimutal [13, 14, 15, 16], sendo que, neste último, foi resolvido um problema de transferência radiativa utilizando um método recursivo, que combina a decomposição de Schur e o método de particionamento, para a inversão da matriz associada ao problema [17]. Problemas com elevada ordem de quadratura e para grandes espessuras já foram resolvidos pelo método LTS_N [18, 19] e nesse caso foi utilizada a técnica da diagonalização [20] para a inversão da matriz associada e uma mudança de variáveis que elimina o problema de *overflow* para esse tipo de placa. O método LTS_N já foi estendido para modelos de variável angular contínua [21], para o caso onde N é inteiro (par ou ímpar) [22] e para o caso onde a razão de espalhamento é igual a um ($c = 1$) [23]. Além disso, o método LTS_N já foi implementado computacionalmente com um algoritmo em paralelo [24] e também já foi implementado utilizando uma abordagem multi-grid [25, 26]. O método LTS_N já foi combinado com o método da decomposição de Adomian para resolver problemas lineares e não lineares [27, 28, 29].

Ainda é importante citar que o método LTS_N foi utilizado em diversas aplicações, dentre as quais podemos citar: problema de transferência radiativa com polarização [30, 31], no qual os autovalores da matriz associada são complexos, solução da equação adjunta de nêutrons [32], solução da equação de transferência radiativa condutiva [33] e determinação de parâmetros radiantes [34]. O método também tem aplicações em problemas de engenharia nuclear [35]. E problemas de criticalidade [36, 37, 38, 39]. Além disso, o método foi utilizado na resolução de problemas de aplicação na área de ótica hidrológica [40, 41, 42], onde é resolvido um problema inverso não-linear. Devemos ressaltar que esta metodologia não está limitada a problemas unidimensionais. A formulação LTS_N também foi estendida a problemas de transporte multidimensionais em geometria cartesiana, tanto aplicada a nêutrons [43, 44, 45] quanto a fótons e elétrons [46, 47], bem como a problemas em geometrias bidimensionais convexas [48]. Finalmente precisamos chamar a atenção que a convergência deste método foi mostrada por Hauser et al. [49].

Devemos observar que já foi provada, por Pazos e Vilhena [50, 51] a convergência da solução LTS_N para a solução exata desenvolvida por Case [52]. A ideia central deste método também já foi aplicada a problema de transporte em geometria cilíndrica usando a transformada de Hankel [53] e na esfera utilizando a ideia desenvolvida por Mitsis [54].

Nos últimos anos, atenção especial tem sido dada à solução da equação unidimensional de transporte de nêutrons dependente do tempo em geometria cartesiana, de forma analítica e semi-analítica. Há uma vasta literatura sobre o assunto quando se trata de soluções numéricas; dentre elas podemos citar: solução da equação de transporte S_N unidimensional dependente do tempo em domínio finito pelo método nodal [55], obtenção de *benchmark* numérico em geometria plana e esférica para problemas unidimensionais através de métodos clássicos para solução de equações integrais [56] e solução de problemas multidimensionais através de elementos ou volumes finitos [57, 58, 59]. Também devemos citar a extensa contribuição de Ganapol na obtenção de soluções analíticas para problemas unidimensionais dependentes do tempo em domínio infinito ou semi-infinito, usualmente pelo método *multiple collision*. Dentre os trabalhos de Ganapol podemos citar: problemas em coordenadas cilíndricas e esféricas [60], problemas com reflexão especular [61] e problemas anisotrópicos [62, 63]. Além das soluções obtidas por Ganapol, encontramos, na literatura, outras soluções analíticas ou semi-analíticas para problemas de transporte dependentes do tempo em domínio infinito ou semi-infinito como, por exemplo, soluções pelo método da máxima entropia [64, 65] e solução para problemas em meio estocástico [66, 67]. Porém, para problemas em domínio finito, as soluções analíticas ou semi-analíticas são poucas, onde podemos citar os trabalhos de Tureci et al. [68, 69], que utiliza o método H_N , para o problema de ordenadas discretas S_N encontramos a solução pelas aproximações de Pomraning-Endington [70, 71] e também pelo método SP- LTS_N [72, 73], que é uma combinação dos métodos spectral e LTS_N .

Recentemente, Gonzalez et al. desenvolveram uma solução analítica em forma integral para a equação unidimensional de ordenadas discretas dependente do tempo para o domínio limitado e ilimitado. Este método, que recebeu o nome de $TLTS_N$, aplica a transformada de Laplace na variável temporal t transformando assim o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, na variável espacial. A solução deste sistema é então encontrada, de forma analítica pelo método LTS_N . Para mais detalhes veja: An Analytical Integral Formulation for the Time-Dependent S_N Transport Equation in a Slab by the Double Laplace Transform Technique [74], An analytical solution for the one-dimensional time-dependent S_N transport equation for bounded and unbounded domain in cartesian geometry [75] e A Closed Form Solution for the One-Group Time-Dependent Transport equation in a Slab by the LTS_N Method [76]. Neste trabalho estendemos a formulação $TLTS_N$ para a resolução de problemas de transporte S_N considerando multigrupo e meio heterogêneo. Para alcançarmos nosso objetivo, resolvemos o problema de multigrupo resolvendo um sistema acoplado de equações de um grupo e o problema em meio heterogêneo subdividindo nosso domínio em subconjuntos homogêneos. Em cada uma destas sub-placas, encontramos a solução pelo método $TLTS_N$ para cada grupo G e por fim aplicamos as condições de continuidade e contorno ao problema acoplado. Com esta finalidade dividimos esta dissertação da seguinte forma: no capítulo 2, aplicamos o método $TLTS_N$ para o problema de transporte unidimensional dependente do tempo para domínio homogêneo; no capítulo 3, apresentamos a extensão do método $TLTS_N$ para o problema de multigrupo de transporte considerando G grupos de energia e também consideramos o domínio heterogêneo com K regiões; no capítulo 4, apresentamos e implementamos quatro conhecidos métodos da literatura para inversa da transformada de Laplace e comparamos sua “performance” usando algumas funções testes. No capítulo 5, apresentamos resultados numéricos e no capítulo 6, relatamos nossas conclusões e nossa proposta para futuros trabalhos.

2 O MÉTODO TLTS_N

Neste capítulo, desenvolvemos o método TLTS_N que encontra a solução de ordenadas discretas unidimensional dependente do tempo por meio da aplicação da transformada dupla de Laplace nas variáveis temporal e espacial em uma placa.

2.1 Equação de Transporte Dependente do Tempo

A formulação TLTS_N desenvolvida por Gonzalez et al. [76] consiste, primeiramente na aplicação da transformada de Laplace na variável temporal t . A seguir resolvemos a equação resultante na variável espacial x através do método LTS_N e reconstruímos o fluxo angular na variável tempo através de inversão numérica. Afim de elucidar o procedimento, consideramos o seguinte problema de transporte unidimensional dependente do tempo em uma placa de comprimento x_0 com simetria azimutal e espalhamento isotrópico:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x, \mu) + \sigma_t \psi(t, x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu' + S(t, x, \mu), \quad (2.1)$$

cuja condição inicial

$$\psi(0, x, \mu) = \phi(x, \mu), \quad (2.2)$$

e condições de contorno

$$\psi(t, 0, \mu) = f(t, \mu) \quad t > 0, \quad \mu > 0, \quad (2.3)$$

e

$$\psi(t, x_0, \mu) = g(t, \mu) \quad t > 0, \quad \mu < 0, \quad (2.4)$$

na qual $f(t, \mu)$ e $g(t, \mu)$ são os fluxos angulares incidentes na fronteira do domínio. Na equação acima temos que:

- x é a variável espacial que pertence a $[0, x_0]$;
- $\mu = \cos \theta$ onde θ é o ângulo polar, portanto $\mu \in [-1, 1]$;
- t é a variável temporal que pertence a $[0, \infty)$;
- $\psi(t, x, \mu)$ é o fluxo angular;
- $S(t, x, \mu)$ é uma fonte externa;
- v é a velocidade dos nêutrons;
- σ_t é a seção de choque macroscópica total;
- σ_s é a seção de choque macroscópica de espalhamento isotrópico.

Para obtermos a aproximação S_N da equação (2.1), inicialmente aproximamos seu termo integral por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N , em seguida usamos o método da colocação na variável angular μ , consideramos como função teste a Delta de Dirac e como pontos de colocação as raízes dos polinômios de Legendre de grau N . Desta forma temos a aproximação S_N como

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(t, x) + \mu_n \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(t, x) + \sigma_t \psi_n(t, x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i(t, x) w_i + S_n(t, x). \quad (2.5)$$

Para simplificar a notação, denotamos $\psi_n(x)$ e $S_n(t, x)$, respectivamente como o fluxo angular e o termo fonte na direção discreta μ_n . Na equação acima os μ_i com $i = 1, \dots, N$ representam as raízes dos polinômios de Legendre de grau N , $(P_N(\mu))$, que consideramos ordenadas de forma decrescente, isto é,

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_1 < 1,$$

sendo N um número par e os w_i são os pesos da quadratura Gaussiana respectivos a cada raiz μ_i . Os pesos da quadratura de Gauss-Legendre podem ser calculados

através de

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(\mu) d\mu, \quad (2.6)$$

em que $L_i(\mu)$ é o polinômio de Lagrange definido por

$$L_i(\mu) = \prod_{k=0, k \neq i}^N \frac{(\mu - \mu_k)}{(\mu_i - \mu_k)}, \quad (2.7)$$

ou através da seguinte fórmula:

$$w_i = \frac{2(1 - \mu_i^2)}{N^2(P_{N-1}(\mu_i))^2}. \quad (2.8)$$

Aplicamos a técnica de Transformada de Laplace na variável temporal em (2.5), assim obtemos a equação

$$\mu_n \frac{d}{dx} \Psi_n(p, x) + \sigma_t^p \Psi_n(p, x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{i=1}^N \Psi_i(p, x) w_i + Q_n(p, x), \quad (2.9)$$

sujeita às seguintes condições de contorno

$$\Psi_n(p, 0) = F_n(p) \quad \text{e} \quad \Psi_{\frac{n}{2}+1}(p, x_0) = G_n(p), \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (2.10)$$

na qual $\Psi_n(p, x)$ denota a transformada de Laplace de $\Psi_n(t, x)$, $t \rightarrow p$,

$$\sigma_t^p = \sigma_t + \frac{p}{v}, \quad (2.11)$$

e

$$Q_n(p, x) = \frac{1}{v} \phi_n(x) + \bar{S}_n(p, x). \quad (2.12)$$

Em seguida, reescrevemos a equação (2.9) como uma equação diferencial ordinária matricial de primeira ordem,

$$\frac{d}{dx}\Psi(p, x) - \mathbf{A}(p)\Psi(p, x) = \mathbf{Q}(p, x), \quad (2.13)$$

na qual $\mathbf{A}(p)$ é uma matriz quadrada de ordem N definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} - \frac{\sigma_t^p}{\mu_i} & \text{se } i = j \\ \frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (2.14)$$

e o vetor $\mathbf{Q}(p, x)$ de ordem N definimos por

$$\mathbf{Q}(p, x) = \left[\frac{Q_1(p, x)}{\mu_1}, \dots, \frac{Q_N(p, x)}{\mu_N} \right]^T. \quad (2.15)$$

O vetor fluxo angular transformado definimos por

$$\Psi(p, x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(p, x) \\ \Psi_2(p, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1(p, x) \\ \vdots \\ \Psi_{N/2}(p, x) \\ \Psi_{N/2+1}(p, x) \\ \vdots \\ \Psi_N(p, x) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

com $\Psi_1(p, x)$ e $\Psi_2(p, x)$ sendo dois sub-vetores, do vetor fluxo angular transformado $\Psi(p, x)$, de ordem $N/2$. O primeiro desses contendo somente os fluxos das direções positivas, e o segundo os fluxos das direções negativas de μ . Com essa notação, as condições de contorno podem ser escritas como

$$\Psi_1(p, 0) = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{N/2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_2(p, x_0) = \begin{bmatrix} G_{N/2+1} \\ \vdots \\ G_N \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Afim de resolvermos a equação matricial (2.13), usamos o método LTS_N . Para tanto aplicamos a transformada de Laplace sobre a variável espacial x dessa equação. Dessa forma na aproximação S_N geramos um sistema linear de N incógnitas e N equações, que representamos por:

$$(sI - \mathbf{A}(p))\bar{\Psi}(p, s) = \Psi(p, 0) + \bar{\mathbf{Q}}(p, s), \quad (2.18)$$

na qual $\bar{\Psi}(p, s) = \mathcal{L}[\Psi(p, x), x \rightarrow s]$ e $\bar{\mathbf{Q}}(p, s) = \mathcal{L}[\mathbf{Q}(p, x), x \rightarrow s]$ são as transformadas de Laplace, s é um parâmetro complexo e I é uma matriz identidade de ordem N . Reescrevemos a equação (2.18) em função de $\bar{\Psi}(p, s)$, dessa forma obtemos:

$$\bar{\Psi}(p, s) = (sI - \mathbf{A}(p))^{-1}\Psi(p, 0) + (sI - \mathbf{A}(p))^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(p, s). \quad (2.19)$$

Para obtermos o fluxo angular transformado $\Psi(p, x)$, basta aplicarmos a transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} \Psi(p, x) &= \mathcal{L}^{-1}[\bar{\Psi}(p, s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - \mathbf{A}(p))^{-1}\Psi(p, 0) + (sI - \mathbf{A}(p))^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(p, s)]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para simplificarmos a representação da equação (2.20), estabelecemos que:

$$\Psi(p, x) = \mathbf{B}(p, x)\Psi(p, 0) + \mathbf{H}(p, x), \quad (2.21)$$

na qual

$$\mathbf{B}(p, x) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - \mathbf{A}(p))^{-1}], \quad (2.22)$$

o vetor $\mathbf{H}(p, x)$ definimos como

$$\mathbf{H}(p, x) = \mathbf{B}(p, x) * \mathbf{Q}(p, x) = \int_0^x \mathbf{B}(p, x - \xi) \mathbf{Q}(p, \xi) d\xi, \quad (2.23)$$

e o sinal $*$ representa a convolução entre vetores.

Notemos que parte do vetor $\Psi(p, 0)$ na solução dada pela equação (2.21) não conhecemos. Afim de encontrarmos o valor do fluxo angular transformado do ponto zero para as direções negativas, $\Psi_2(p, 0)$, reescreveremos a solução (2.21) na forma particionada,

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(p, x) \\ \Psi_2(p, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}(p, x) & \mathbf{B}_{12}(p, x) \\ \mathbf{B}_{21}(p, x) & \mathbf{B}_{22}(p, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(p, 0) \\ \Psi_2(p, 0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(p, x) \\ \mathbf{H}_2(p, x) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Subsequentemente aplicamos $x = x_0$ nas $N/2$ últimas linhas da equação(2.24), obtemos

$$\Psi_2(p, x_0) = \mathbf{B}_{21}(p, x_0) \Psi_1(p, 0) + \mathbf{B}_{22}(p, x_0) \Psi_2(p, 0) + \mathbf{H}_2(p, x_0), \quad (2.25)$$

e notemos que os vetores $\Psi_1(p, 0)$, $\Psi_2(p, x_0)$ e $\mathbf{H}_2(p, x_0)$ são conhecidos, assim

$$\Psi_2(p, 0) = \mathbf{B}_{22}(p, x_0)^{-1} [\Psi_2(p, x_0) - \mathbf{B}_{21}(p, x_0) \Psi_1(p, 0) - \mathbf{H}_2(p, x_0)]. \quad (2.26)$$

Desta forma, a solução (2.21) fica totalmente determinada e é solução analítica do sistema de equações diferenciais descrito pela equação (2.13). Devemos observar

que nesta dissertação apenas consideramos o caso de condições de contorno de fluxo incidente prescrito, contudo o método TLTS_N é facilmente adaptado para outros tipos de condições de contorno como por exemplo, condição de contorno reflexiva.

2.1.1 O Método da Diagonalização

Nesta subseção fazemos uma descrição do método da diagonalização e, para tanto, observemos que os autovalores da matriz $\mathbf{A}(p)$ são todos simétricos não-nulos e distintos, quando $\sigma_s \neq \sigma_t$. Neste caso, a matriz pode ser decomposta em seu espectro como

$$\mathbf{A}(p) = \mathbf{X}D(p)\mathbf{X}^{-1}, \quad (2.27)$$

na qual $D(p)$ é a matriz diagonal formada pelos autovalores de $\mathbf{A}(p)$, \mathbf{X} a matriz cujas colunas são autovetores associados. Assim,

$$\mathbf{B}(p, x) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - \mathbf{A}(p))^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}D\mathbf{X}^{-1})^{-1}]. \quad (2.28)$$

Colocamos em evidência a matriz dos autovetores \mathbf{X} à esquerda e \mathbf{X}^{-1} à direita, temos

$$\mathbf{B}(p, x) = \mathcal{L}^{-1}[(\mathbf{X}(sI - D)\mathbf{X}^{-1})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[(\mathbf{X}(sI - D)^{-1}\mathbf{X}^{-1})], \quad (2.29)$$

e como \mathbf{X} é uma matriz constante então podemos escrever,

$$\mathbf{B}(p, x) = \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1}[(sI - D)^{-1}]\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.30)$$

Desta forma, a matriz simbólica $(sI - D(p))$ é uma matriz diagonal, na qual os d_i são os autovalores de $\mathbf{A}(p)$ e sua inversa é dada por

$$(sI - D(p))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s-d_N} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Assim, aplicamos a transformada inversa de Laplace na equação (2.31) obtemos,

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI - D(p))^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{d_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2 x} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_N x} \end{bmatrix} = e^{D(p)x}. \quad (2.32)$$

Deste modo, podemos escrever a matrix $\mathbf{B}(p, x)$ como:

$$\mathbf{B}(p, x) = \mathbf{X}e^{D(p)x}\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.33)$$

2.1.2 Tratamento do Caráter Exponencial da Solução

Conforme vimos nas subseções anteriores, a solução possui caráter exponencial. O comportamento exponencial da solução, combinado com o fato de que os autovalores d_i crescem em magnitude com N , mostrando que esta formulação não é apropriada para resolver problemas de grandes espessuras ou altos graus de anisotropia, pois existe uma falha computacional com o uso de operações aritméticas finitas, o chamado *overflow*. Para contornar esta dificuldade, inicialmente, Barichello [87] propôs uma mudança de base na solução do problema homogêneo, porém, para problemas não-homogêneos, o *overflow* é repassado para o termo de fonte externa. Em 2000 o problema de *overflow* foi completamente eliminado por

Gonçalves [88], que usou simultaneamente a propriedade de invariância de direções discretas e a mudança de variáveis sugerida por Barichello [87]. A propriedade de invariância de projeção consiste em estabelecer a equivalência de condições entre as coordenadas (x, μ) e $(-x, -\mu)$, ou alternativamente o tratamento equivalente a fluxos nas direções μ e $-\mu$. O par $(-x, -\mu)$ pode ser recolocado por $(x_0 - x, -\mu)$ como resultado do deslocamento do ponto de reflexão de 0 para x_0 . Na solução LTS_N , a propriedade de invariância de projeção está representada pela assimetria das raízes do determinante da matriz \mathbf{A} . Usando esta propriedade, Gonçalves, Vilhena e Segatto [89] eliminaram o *overflow* originado pelos termos de exponencial positivas para N grande, separando as soluções homogênea e particular em componentes que contem apenas os expoentes positivos e outra os negativos. Deste modo, obtiveram uma decomposição da matriz $\mathbf{B}(x)$ como

$$\mathbf{B}(p, x) = \mathbf{X}[\mathbf{E}^+(p, x - x_0) + \mathbf{E}^-(p, x)]\mathbf{X}^{-1}, \quad (2.34)$$

na qual $\mathbf{E}^+(x)$ e $\mathbf{E}^-(x)$ são matrizes diagonais cujos elementos da diagonal são dados por

$$\mathbf{E}^+(p, x) = \begin{cases} e^{d_i x} & \text{se } d_i > 0 \\ 0 & \text{se } d_i < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}^-(p, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } d_i > 0 \\ e^{d_i x} & \text{se } d_i < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Reescrevemos a matriz $\mathbf{B}(p, x)$ como $\mathbf{B}(p, x) = \mathbf{B}^+(p, x) + \mathbf{B}^-(p, x)$, na qual a matriz $\mathbf{B}^+(p, x)$ contém apenas os autovalores positivos e a matriz $\mathbf{B}^-(p, x)$ somente os negativos. Desta forma, podemos reescrever a solução como:

$$\Psi(p, x) = \mathbf{B}^+(p, x - x_0)\Psi(p, x_0) + \mathbf{B}^-(p, x)\Psi(p, 0) + \mathbf{H}(p, x), \quad (2.36)$$

na qual definimos o vetor $\mathbf{H}(p, x)$ como

$$\mathbf{H}(p, x) = \int_{x_0}^x \mathbf{B}^+(p, x - \xi) \mathbf{Q}(p, \xi) d\xi + \int_0^x \mathbf{B}^-(p, x - \xi) \mathbf{Q}(p, \xi) d\xi. \quad (2.37)$$

Afim de facilitar a resolução do sistema linear, observemos que podemos escrever a equação (2.36) como:

$$\mathbf{\Psi}(p, x) = \mathbf{X}\mathbf{E}(p, x)\zeta + \mathbf{H}(p, x), \quad (2.38)$$

em que $\mathbf{E}(p, x) = [\mathbf{E}^+(p, x - x_0) + \mathbf{E}^-(p, x)]$, $\mathbf{H}(p, x)$ descrevemos pela equação (2.37) e o vetor ζ é formado pelas $\frac{N}{2}$ componentes desconhecidas de $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(x_0)$ e pelas $\frac{N}{2}$ componentes desconhecidas de $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(0)$.

Finalmente é possível reconstruir o fluxo angular usando a definição da transformada inversa de Laplace para o fluxo angular transformado

$$\psi_n(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Psi_n(p, x) e^{pt} dp. \quad (2.39)$$

Devido à dificuldade de resolver analiticamente a integral da equação (2.39), resolvemos numericamente. Por isso analisamos alguns métodos de inversão numérica no capítulo (4), tendo em conta o comportamento exponencial da nossa solução.

3 APLICAÇÃO DO MÉTODO TLTS_N PARA PROBLEMAS DE MULTIGRUPO E MULTIREGIÃO

Apresentamos, inicialmente, a aplicação do método para o problema unidimensional, homogêneo, multigrupo. A seguir é derivada a mesma formulação TLTS_N considerando a existência de um meio heterogêneo modelado pela definição de K -regiões. Finalmente fazemos a extensão do método TLTS_N para um problema de ordenadas discretas S_N unidimensional em domínio heterogêneo, multigrupo.

3.1 O Método TLTS_N em Domínio Homogêneo Multigrupo

Para incluirmos a dependência da energia na equação de transporte de nêutrons, nesta dissertação, usamos o modelo de multigrupo. O modelo de multigrupo consiste na discretização do espectro contínuo de energia em G grupos. Considere um típico grupo de energia g , conforme Fig. 3.1.

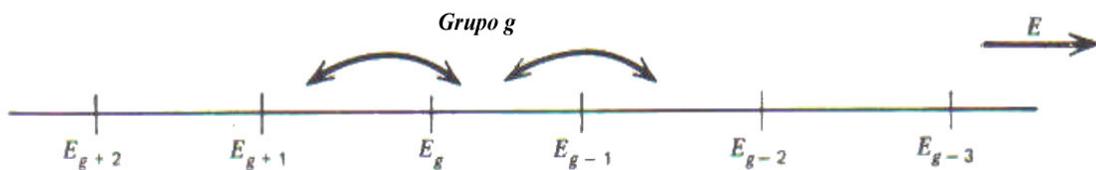


Figura 3.1: *Esquema multigrupo de energia.*

Na figura os índices estão ordenados de forma decrescente, pois correspondem fisicamente ao fato que usualmente os nêutrons perdem energia no processo migratório.

Devido às colisões geradas pelo espalhamento, a energia do nêutron pode mudar e, portanto, ou ele é removido do grupo g , ou espalhado dentro do mesmo grupo de energia g . A probabilidade de um nêutron sofrer espalhamento de um grupo g' para um grupo g está relacionada com a seção de choque macroscópica de espalhamento $\sigma_{sg'g}$. Deste modo a seção de choque macroscópica de espalhamento no grupo g é dada por

$$\sigma_{sg} = \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}. \quad (3.1)$$

Para se escrever as equações para o fluxo angular $\psi_g(t, x, \mu)$, tomamos um conjunto de equações de transporte para descrever os nêutrons em cada grupo de energia. Desta forma, a equação de transporte de nêutrons para multigrupo de energia com espalhamento isotrópico é dada por:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_g(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_g(t, x, \mu) + \sigma_{tg} \psi_g(t, x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g} \int_{-1}^1 \psi'_g(t, x, \mu') d\mu' + S_g(t, x, \mu) \quad (3.2)$$

para $g = 1 : G$ na qual:

- $\psi_g(t, x, \mu)$ representa o fluxo angular de nêutrons do grupo g ;
- σ_{tg} representa a seção de choque macroscópica de total de nêutrons na posição x do grupo g ;
- $\sigma_{sg'g}$ representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição x do grupo g' para o grupo g ;
- $S_g(t, x, \mu)$ representa a fonte de nêutrons do grupo g .

Com condição inicial

$$\psi_g(0, x, \mu) = \phi_g(x, \mu), \quad (3.3)$$

e condições de contorno

$$\psi_g(t, 0, \mu) = f_g(t, \mu) \quad t > 0, \quad \mu > 0, \quad (3.4)$$

e

$$\psi_g(t, x_0, \mu) = g_g(t, \mu) \quad t > 0, \quad \mu < 0. \quad (3.5)$$

Analogamente ao capítulo anterior obtemos as equações S_N para o fluxo na direção n e grupo g em x ($\psi_{n,g}(x)$) e aplicamos a técnica de Transformada de Laplace na variável temporal, assim temos

$$\mu_n \frac{d}{dx} \Psi_{n,g}(p, x) + \sigma_{tg}^p \Psi_{n,g}(p, x) = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g} \sum_{i=1}^N \Psi_{i,g'}(p, x) w_i + Q_{n,g}(p, x), \quad (3.6)$$

na qual $\Psi_n(p, x)$ denota a transformada de Laplace de $\Psi_n(t, x)$, $t \rightarrow p$, $\sigma_{tg}^p = \sigma_{tg} + \frac{p}{v_g}$ e $Q_{n,g}(p, x) = \frac{1}{v_g} \phi_g(x, \mu) + \bar{S}_g(p, x)$ é o termo fonte. Assim a equação (3.6) pode ser escrita na forma matricial como

$$\frac{d}{dx} \Psi(p, x) - \mathbf{A}(p) \Psi(p, x) = \mathbf{Q}(p, x), \quad (3.7)$$

na qual o vetor fluxo angular transformado $\Psi(p, x)$ e o vetor fonte $\mathbf{Q}(p, x)$ são de ordem NG e definidos

$$\Psi(p, x) = (\Psi_{1,1}, \Psi_{2,1}, \dots, \Psi_{N,1}, \Psi_{1,2}, \Psi_{2,2}, \dots, \Psi_{N,2}, \dots, \Psi_{1,G}, \Psi_{2,G}, \dots, \Psi_{N,G})^T, \quad (3.8)$$

e

$$\mathbf{Q}(p, x) = \left(\frac{Q_1}{\mu_1}, \frac{Q_1}{\mu_2}, \dots, \frac{Q_1}{\mu_N}, \frac{Q_2}{\mu_1}, \frac{Q_2}{\mu_2}, \dots, \frac{Q_2}{\mu_N}, \dots, \frac{Q_G}{\mu_1}, \frac{Q_G}{\mu_2}, \dots, \frac{Q_G}{\mu_N} \right)^T. \quad (3.9)$$

A matriz $\mathbf{A}(p)$ é uma matriz quadrada de ordem NG , cujos elementos podem ser descritos por submatrizes $\mathbf{A}_g(p)$ de ordem N

$$a_{ml}(i, j) = \begin{cases} \frac{\sigma_{slm} w_j}{2\mu_i} & -\frac{\sigma_{tl}^p}{\mu_i} & \text{se } l = m \text{ e } i = j \\ \frac{\sigma_{slm} w_j}{2\mu_i}, & & \text{se } l \neq m \text{ e } i \neq j \end{cases}, \quad (3.10)$$

com $m = 1 : G$, $l = 1 : G$, $i = 1 : N$ e $j = 1 : N$. Resolvemos a equação matricial (3.7), conforme visto no capítulo anterior. Deste modo, obtemos de forma analítica o fluxo angular transformado no tempo, assim temos,

$$\Psi_g(p, x) = \mathbf{X} \mathbf{E}_g(p, x) \zeta_g + \mathbf{H}_g(p, x), \quad (3.11)$$

na qual $\mathbf{E}_g(p, x)$, $\mathbf{H}_g(p, x)$ são definidos idênticos ao capítulo anterior, \mathbf{X} é a matriz dos autovetores de $\mathbf{A}(p)$ e ζ_g é o vetor definido e determinado utilizando as condições de contorno análogo ao capítulo anterior.

O fluxo angular $\psi_{n,g}(t, x)$ para $g = 1, \dots, G$ obtemos por meio da aplicação da transformada inversa de Laplace em $\Psi_{n,g}(p, x)$.

3.2 O Método TLTS_N em Domínio Heterogêneo com k Regiões

Nesta seção, apresentamos a solução TLTS_N em uma placa heterogênea. Consideramos uma placa de k regiões, subdivida, de forma que, em cada uma delas consideramos o meio homogêneo conectadas por uma condição de continuidade em suas fronteiras comuns, como mostra a Figura (3.2).

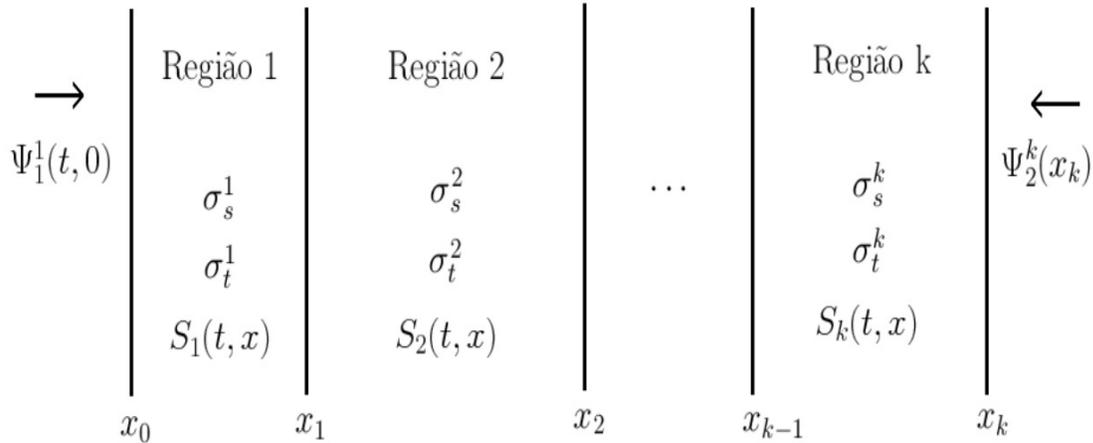


Figura 3.2: Placa dividida em k regiões para problema dependente do tempo.

As equações S_N que descrevem o problema unidimensional, com simetria azimutal e espalhamento isotrópico para cada região são dadas por

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi_n^k(t, x) + \mu_n \frac{\partial}{\partial x} \psi_n^k(t, x) + \sigma_t^k \psi_n^k(t, x) = \frac{\sigma_s^k}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i^k(t, x) w_i + S_n^k(t, x), \quad (3.12)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$, na qual v é a velocidade dos nêutrons, σ_s^k é a seção de choque macroscópica de espalhamento na região k , σ_t^k é a seção de choque macroscópica

total na região k , $\psi_n^k(t, x)$ e $S_n^k(t, x)$ denotam, respectivamente o fluxo angular e a fonte na direção discreta μ_n , no instante t , na posição x do material k , N é a ordem da quadratura e w_i são os pesos da quadratura. Sujeita à seguinte condição inicial

$$\psi_n^k(0, x) = \phi_n^k(x), \quad (3.13)$$

e condições de contorno,

$$\psi_n^1(t, x_0) = f_n(t) \quad \text{e} \quad \psi_{n+\frac{N}{2}}^K(t, x_k) = g_n(t), \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.14)$$

além das condições de continuidade na interface das regiões

$$\psi_n^k(t, x_k) = \psi_n^{k+1}(t, x_k), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad \text{e} \quad k = 1, 2, \dots, K - 1. \quad (3.15)$$

Por simplicidade de aplicação do método TLTS $_N$ realizamos uma mudança na variável espacial x , da seguinte forma, $x = x - x_{k-1}$ na região k , para $k = 1, 2, \dots, K$. As espessuras de cada placa são dadas por $L_k = x_k - x_{k-1}$. Desta forma, as condições de contorno e de continuidade nas interfaces são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \psi_n^1(t, 0) &= f_n(t), & \psi_{n+\frac{N}{2}}^K(t, L_k) &= g_n(t), \\ \psi_n^k(t, L_k) &= \psi_n^{k+1}(t, 0). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Aplicando o método TLTS $_N$, conforme descrito no capítulo anterior, para cada região k , obtemos a solução transformada da equação (3.12), como sendo

$$\Psi^k(p, x) = \mathbf{XE}^k(p, x)\zeta^k + \mathbf{H}^k(p, x), \quad (3.17)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$, onde $\Psi^k(p, x)$ é o fluxo angular transformado na região k , $\mathbf{X}\mathbf{E}^k(p, x)$ é definido de forma similar a (2.38), ζ^k é um vetor desconhecido e $\mathbf{H}^k(p, x)$ é o vetor que contém os termos de convolução na variável x .

Para que a solução do fluxo transformado (3.17) fique completamente determinada, precisamos determinar o vetor ζ^k . Para isto aplicamos as condições de contorno e de continuidade (3.23) e montamos o sistema matricial

$$\mathbf{M}\zeta^k = \mathbf{V}, \quad (3.18)$$

sendo

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1^1 \\ \vdots \\ \zeta_N^1 \\ \vdots \\ \zeta_1^k \\ \vdots \\ \zeta_N^k \\ \vdots \\ \zeta_1^K \\ \vdots \\ \zeta_N^K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Psi_1^1(p, 0) - \mathbf{H}_1^1(p, 0) \\ \vdots \\ \Psi_{\frac{N}{2}}^1(p, 0) - \mathbf{H}_{\frac{N}{2}}^1(p, 0) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^k(p, L_k) - \mathbf{H}_1^{k+1}(p, 0) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_N^k(p, L_k) - \mathbf{H}_N^{k+1}(p, 0) \\ \vdots \\ \Psi_{\frac{N}{2}+1}^K(p, L_K) - \mathbf{H}_{\frac{N}{2}+1}^K(p, L_K) \\ \vdots \\ \Psi_N^K(p, L_K) - \mathbf{H}_N^K(p, L_K) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
 \mathbf{X}\mathbf{E}_{11}(p, 0) & \mathbf{X}\mathbf{E}_{12}(p, 0) & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 \\
 \mathbf{X}\mathbf{E}^1(p, L_1) & -\mathbf{X}\mathbf{E}^2(p, 0) & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & \mathbf{X}\mathbf{E}^{k-1}(p, L_{k-1}) & -\mathbf{X}\mathbf{E}^k(p, 0) & 0 & \vdots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{X}\mathbf{E}^{K-1}(p, L_{K-1}) & -\mathbf{X}\mathbf{E}^K(p, 0) & \dots & 0 \\
 0 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & \vdots & \mathbf{X}\mathbf{E}_{21}(p, L_K) & \mathbf{X}\mathbf{E}_{22}(p, L_K) & 0 \\
 0 & 0 & \dots & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0
 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Resolvendo tal sistema, a solução para o fluxo transformado (3.17) é totalmente determinada. Para a solução final, aplicamos a transformada inversa de Laplace na variável temporal t , utilizando a integral de contorno como em (4.3) para cada região k , encontrando assim, a solução para o problema de ordenadas discretas unidimensional dependente do tempo na forma integral.

3.3 O Método TLTS_N para Domínio Heterogêneo Multigrupo

Por fim as equações S_N que descrevem o problema unidimensional, com simetria azimutal e isotrópico em uma placa heterogênea de K regiões e sujeita a G grupos de energia são definidas por:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{n,g}^k(t, x) + \mu_n \frac{\partial}{\partial x} \psi_{n,g}^k(t, x) + \sigma_{tg}^k \psi_{n,g}^k(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^k \sum_{i=1}^N \psi_{i,g'}^k(t, x) w_i + S_{n,g}^k(t, x) \quad (3.21)$$

com condição inicial

$$\psi_{n,g}^k(0, x) = \phi_{n,g}^k(x), \quad (3.22)$$

sujeita respectivamente às seguintes condições de contorno e de continuidade nas interfaces

$$\begin{aligned} \psi_{n,g}^1(t, 0) &= f_{n,g}(t), & \psi_{n+\frac{N}{2},g}^K(t, L_K) &= g_{n,g}(t), \\ \psi_{n,g}^k(t, L_k) &= \psi_{n,g}^{k+1}(t, 0). \end{aligned} \quad (3.23)$$

A generalização da aplicação do método TLTS_N na equação (3.21) determina uma solução que pode ser expressa por

$$\Psi_g^k(p, x) = \mathbf{X} \mathbf{E}_g^k(p, x) \zeta_g^k + \mathbf{H}_g^k(p, x), \quad (3.24)$$

com $0 < x < (x_k - x_{k-1})$, $k = 1, \dots, K$, $g = 1, \dots, G$, onde ζ_g^k é o vetor desconhecido que é determinado similarmente à seção anterior, $\mathbf{E}_g^k(p, x)$, $\mathbf{H}_g^k(p, x)$ são definidos de modo semelhante ao capítulo anterior, \mathbf{X} é a matrix dos autovetores de $\mathbf{A}(p)$ e $\mathbf{\Psi}_g^k(p, x)$ é o vetor de NG componentes que representam o fluxo angular transformado nas n direções e g grupos na região k , definido por

$$\mathbf{\Psi}_g^k(p, x) = (\Psi_{1,1}^k, \Psi_{2,1}^k, \dots, \Psi_{N,1}^k, \Psi_{1,2}^k, \Psi_{2,2}^k, \dots, \Psi_{N,2}^k, \dots, \Psi_{1,G}^k, \Psi_{2,G}^k, \dots, \Psi_{N,G}^k)^T, \quad (3.25)$$

O vetor fluxo angular para cada região k e sujeita a G grupos de energia, $\psi_g^k(t, x, \mu)$, obtemos através da aplicação da transformada inversa de Laplace.

4 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ definida para todo número real $t > 0$ é a função $F(s)$, definida por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (4.1)$$

se a integral converge. O termo e^{-st} é o núcleo da transformada e s é um parâmetro complexo. A condição suficiente para existência da transformada de Laplace é dada por:

Teorema 1. *Se $f(t)$ é contínua por partes no intervalo $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial γ para $t > N$, então sua transformada de Laplace $F(s)$ existe para todo $s > \gamma$.*

Em ordem para aplicação da transformada de Laplace em problemas físicos, é necessário obter sua transformada inversa. Então temos o teorema de inversão

Teorema 2 (O Teorema de Inversão). *Se $f(t)$ tem uma derivada contínua e $|f(t)| < Ke^{\gamma t}$ onde K e γ são constantes positivas. Definimos*

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{Re}\{s\} > \gamma. \quad (4.2)$$

Então

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (4.3)$$

onde a integral de contorno deve ser efetuada ao longo de uma reta $\text{Re}\{s\} = c$ no plano complexo. O número real c é escolhido de modo que $\text{Re}\{s\} = c$ esteja à esquerda de todas as singularidades de $F(s)$. Às vezes, uma solução analítica

desta integral é difícil de ser obtida, assim, um método de inversão numérica deve ser usado. Existem vários algoritmos numéricos na literatura que podem ser usados para proceder à transformada inversa de Laplace da função $F(s)$. Cada método individual tem a sua própria aplicação e é adequado para um determinado tipo de função. Todos os métodos de inversão são baseados em aproximações utilizados para avaliar a integral dada na equação (4.3).

4.1 Métodos de Inversão Numérica da Transformada de Laplace

Apresentamos quatro métodos para a inversão numérica da transformada de Laplace, que posteriormente serão avaliados em funções teste das quais conhecemos a solução exata, com o objetivo de estudar qual modelo é o mais apropriado para o problema apresentado no capítulo 2. Na seção (4.1.1) apresentamos a fórmula de inversão da Quadratura Gaussiana, na seção (4.1.2) apresentamos a fórmula de inversão pelas Séries de Fourier e na seção (4.1.3) a inversão pelo algoritmo de Gaver com os aceleradores de convergência Wynn-Rho e Stehfest.

4.1.1 Quadratura Gaussiana

Esta inversão aproxima a integral de contorno pela Quadratura Gaussiana, sendo dada pela seguinte fórmula de Stroud [77]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p \frac{U(p)}{p} dp = \sum_{n=1}^N A_n U(p_n), \quad (4.4)$$

onde c é um número positivo arbitrário e $U(p)$ é uma função analítica no semiplano direito do plano complexo. Segundo Heydarian [78], podemos calcular as abscissas p_n como sendo as raízes do seguinte polinômio:

$$(-1)^n \sum_{r=0}^N \frac{(-1)^{N-r} N(N+r-1)!}{r!(N-r)!} p^{N-r} = 0. \quad (4.5)$$

Os pesos A_n , da equação (4.4) podem ser encontrados através da solução do seguinte sistema de equações:

$$\sum_{n=1}^N A_n p_n^{-r} = \frac{1}{r!}; \quad 0 \leq r \leq (N-1). \quad (4.6)$$

Portanto, se desejamos a transformada inversa de Laplace de uma função $F(s)$, dada pela integral de contorno na equação (4.3) fazemos a mudança de variável $st = p$ para usarmos a quadratura Guassiana e desta forma temos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p \frac{F(p/t)}{t} dp. \quad (4.7)$$

Podemos reescrever a equação (4.7) como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p \frac{U(p)}{p} dp, \quad (4.8)$$

onde

$$U(p) = \frac{p}{t} F(p/t),$$

ou seja, a função $U(p)$ que aparece na fórmula de quadratura Gaussiana (4.4) está relacionada com a função a ser invertida $F(s)$, sendo que t é o tempo em que desejamos obter a inversão.

4.1.2 Séries de Fourier

Este método é fundamentado na discretização da integral de contorno (4.3) usando a regra do trapézio com o tamanho do passo $h = \pi/T$ e $t \in]0, T[$ [79]. Isto é

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{T} \left[\frac{F(c)}{2} + Re \sum_{k=1}^n F \left(c + \frac{ik\pi}{T} \right) e^{\frac{ik\pi t}{T}} \right], \quad (4.9)$$

onde os parâmetros c e n devem ser otimizados para maior precisão, para ct os valores sugeridos são entre 4 e 5.

4.1.3 Algoritmo de Gaver

Segundo Abate [80], o algoritmo de Gaver é uma técnica numérica para inversão da transformada de Laplace baseado no teorema de Post-Widder:

Teorema 3 (O teorema Post-Widder [81]). *Se a integral*

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (4.10)$$

converge para todo $s > \gamma$, então

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t} \right)^{k+1} F^{(k)} \left(\frac{k}{t} \right), \quad (4.11)$$

para todo ponto $t > 0$ de continuidade de $f(t)$.

A vantagem da fórmula (4.11) está no fato de que $f(t)$ é expressa em termos do valor de $F(s)$ e suas derivadas sobre o eixo real. Como podemos observar

a fórmula (4.11) envolve derivadas de altas ordens, o que é difícil de ser avaliado numericamente. Na década de 60, Gaver [82] apresentou uma fórmula discreta descrita por:

$$f_k(t) = \frac{\alpha k}{t} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} F((k+j)\alpha/t), \quad (4.12)$$

onde $\alpha = \ln(2)$. Os funcionais de Gaver ($f_k(t)$) também podem ser calculados através do seguinte algoritmo recursivo

$$\begin{aligned} G_0^{(n)} &= \frac{n\alpha}{t} F(n\alpha/t), & 1 \leq n \leq 2M \\ G_k^{(n)} &= \left(1 + \frac{n}{k}\right) G_{k-1}^{(n)} - \binom{n}{k} G_{k-1}^{(n+1)}, & k \geq 1, n \geq k \\ f_k(t) &= G_k^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Infelizmente, a grande desvantagem deste algoritmo é a sua convergência muito lenta, no sentido que só é atingido para N grande. Na verdade, a sequência de funcionais de Gaver apresenta convergência de ordem logarítmica, necessitando desta forma ser associado a um acelerador. Neste trabalho vamos usar os métodos de Gaver-Stefest e Gaver-Whynn-Rho. O método de Gaver-Stehfest utiliza o somatório de Salzer, que é um caso particular da extrapolação de Richardson e é considerado o melhor entre os métodos lineares de aceleração. Já o método de Gaver Wynn-Rho faz uso de um acelerador não linear, que conforme Valkó e Abate [83], é o único método não linear que apresenta resultados superiores ao somatório de Salzer.

4.1.3.1 Acelerador Wynn-Rho

O algoritmo de Wynn-Rho [80] é dado pelo seguinte algoritmo recursivo:

$$\begin{aligned}
\rho_{-1}^{(n)} &= 0, & n \geq 0 \\
\rho_0^{(n)} &= f_n(t), & n \geq 0 \\
\rho_k^{(n)} &= \rho_{k-2}^{(n+1)} + \frac{k}{\rho_{k-1}^{(n+1)} - \rho_{k-1}^{(n)}}, & k \geq 1.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

A aproximação $f(t)$ é dada por $f(t, M) = \rho_M^{(0)}$, onde M é um inteiro par. Sabemos que o cálculo de (4.12) – (4.14) estão propensos à propagação de erros de arredondamento e, portanto, são instáveis. Em outras palavras, dada uma precisão computacional fixa do software utilizado na programação, com o aumento de M a precisão de $f(t, M)$ também aumenta, mas apenas até certo ponto, depois, a precisão diminui rapidamente. Portanto, devemos aumentar a precisão computacional conforme aumentamos M , assim conforme Valkó, temos a seguinte exigência de precisão computacional,

$$\text{número de dígitos decimais de precisão} = (2.1)M.$$

4.1.3.2 Acelerador Stehfest

O algoritmo de Gaver-Stehfest [84, 85] produz um valor aproximado para a solução usando a seguinte equação

$$f(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i F\left(\frac{\ln 2}{t} i\right), \tag{4.15}$$

sendo N um número par e V_i é definido por

$$V_i = (-1)^{N/2+i} \sum_{k=\lceil \frac{i+1}{2} \rceil}^{\text{Min}(i, N/2)} \frac{k^{N/2}(2k)!}{(N/2 - k)!(k)!(k - 1)!(i - k)!(2k - i)!}. \tag{4.16}$$

O parâmetro N é o número de termos usados no somatório da equação (4.15) e pode ser otimizado para evitar erros de arredondamento.

4.2 Avaliação dos Métodos de Inversão

Nesta seção, usamos uma série de funções de teste para examinar a precisão dos algoritmos citados acima. Em todos os casos, comparamos as soluções numéricas com a solução analítica.

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1 | $\frac{1}{s}$ |
| e^{-t} | $\frac{1}{s+1}$ |
| $\sin(t)$ | $\frac{1}{s^2+1}$ |
| $\frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{\pi t}}$ | $\frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ |
| $\frac{e^{-1/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$ | $e^{-\sqrt{s}}$ |

Tabela 4.1: Transformada de Laplace de algumas funções elementares.

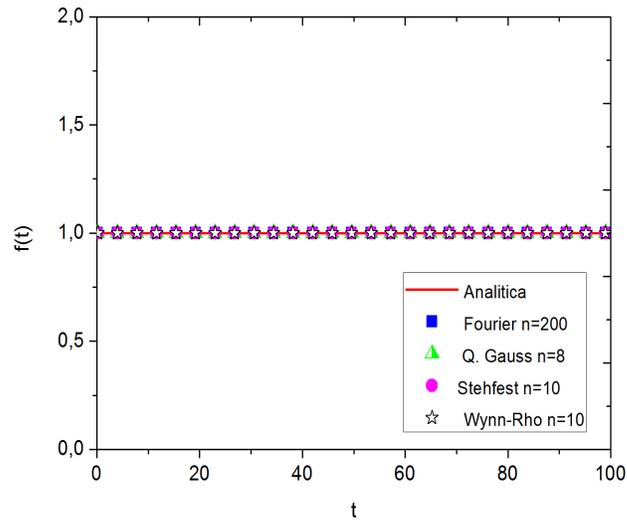


Figura 4.1: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = 1$.

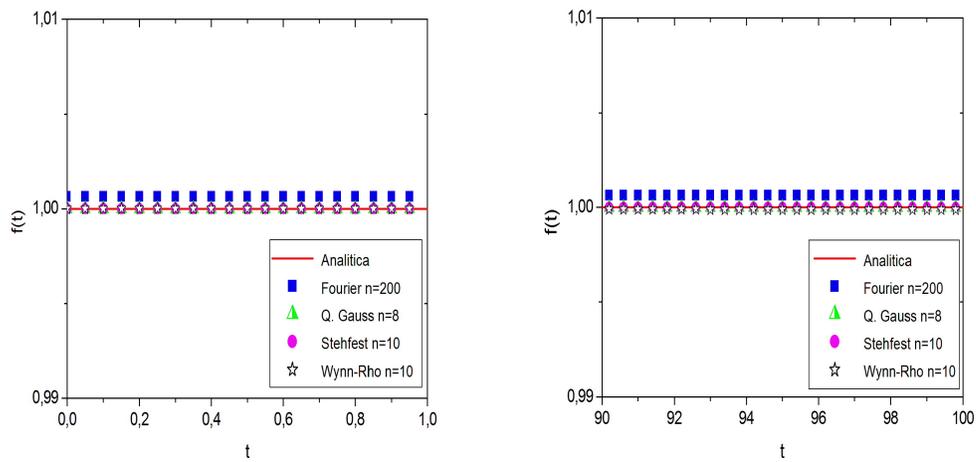


Figura 4.2: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = 1$ nos extremos.

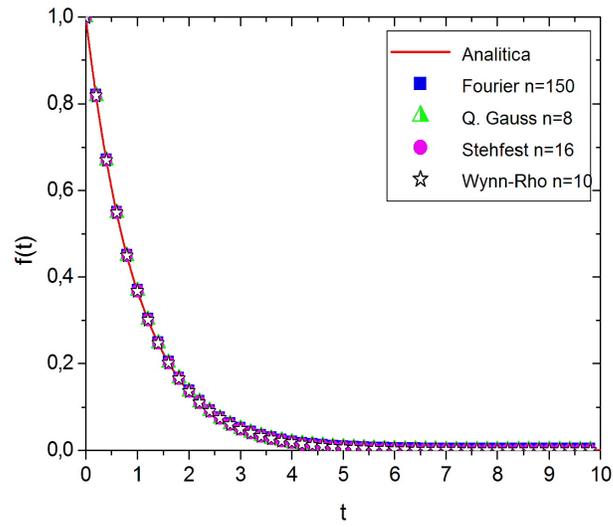


Figura 4.3: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = e^{-t}$.

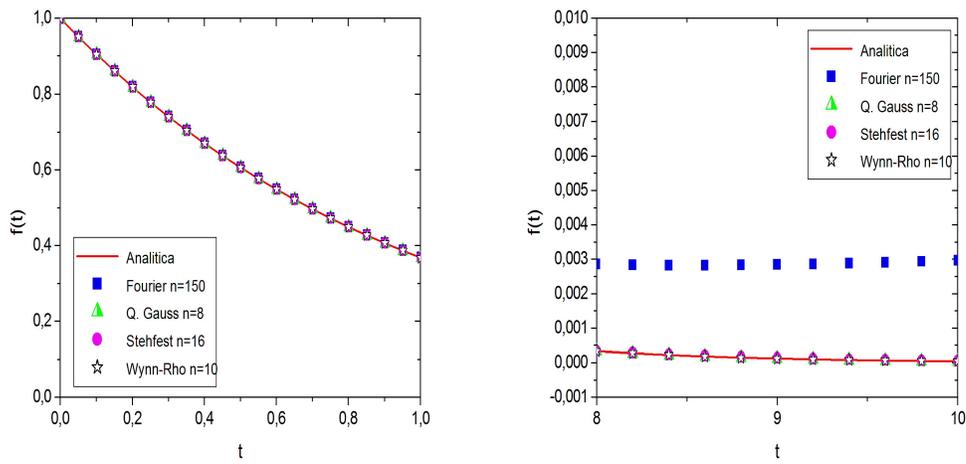


Figura 4.4: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = e^{-t}$ nos extremos.

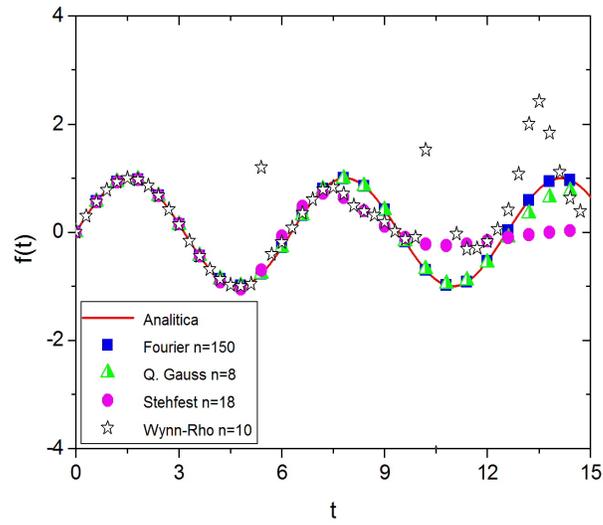


Figura 4.5: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \sin(t)$.

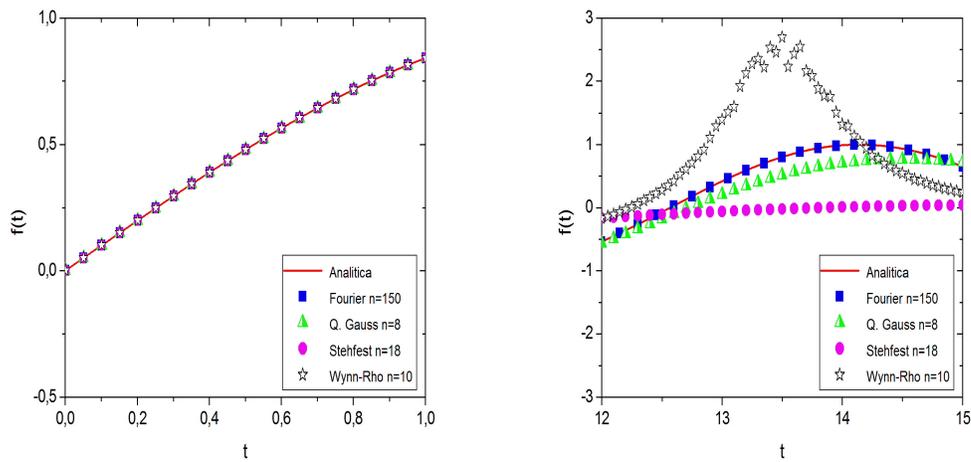


Figura 4.6: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \sin(t)$ nos extremos.

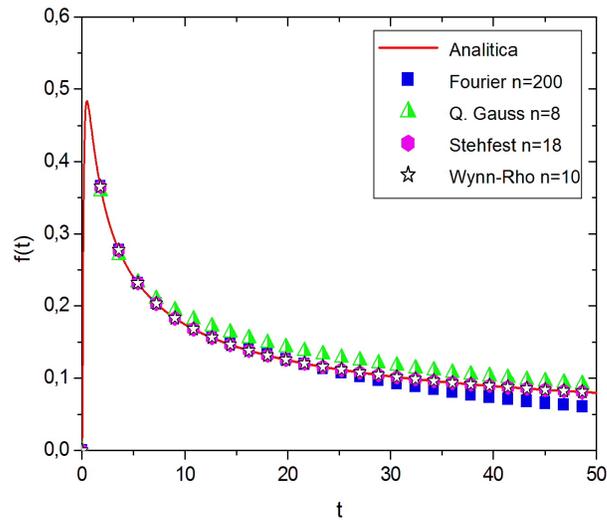


Figura 4.7: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{\pi t}}$.

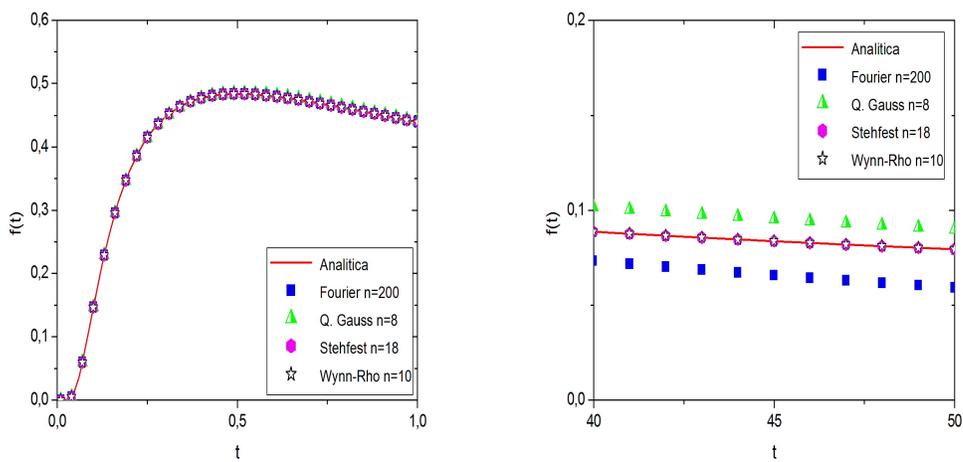


Figura 4.8: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \frac{e^{-1/4t}}{\sqrt{\pi t}}$ nos extremos.

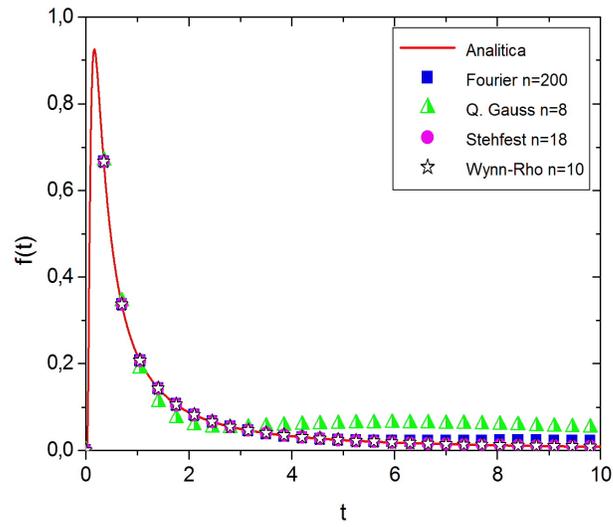


Figura 4.9: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \frac{e^{-1/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$.

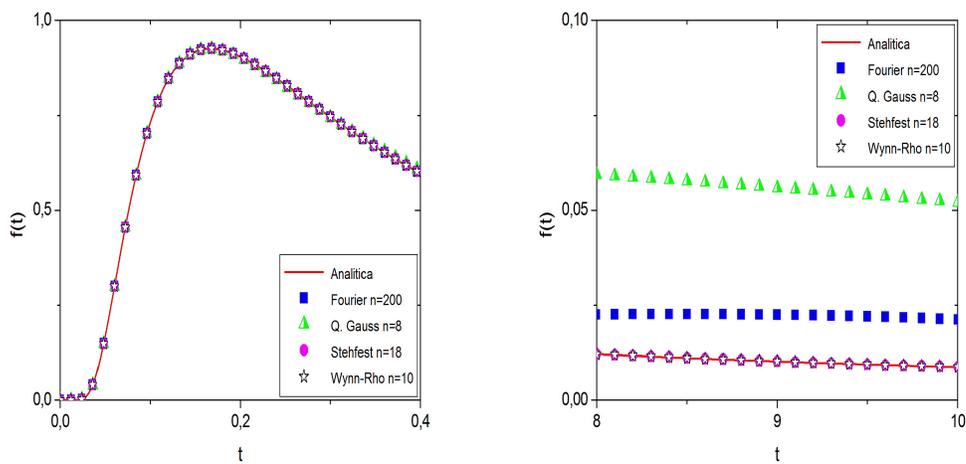


Figura 4.10: Comparação de diferentes métodos de inversão numérica para $f(t) = \frac{e^{-1/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$ nos extremos.

4.3 Conclusões do Capítulo

Com base nos resultados apresentados, as seguintes conclusões podem ser tiradas:

O método da quadratura Gaussiana não apresentou resultados precisos quando o número de termos da série é maior que oito, por isso, todos os resultados foram gerados para $n = 8$. Apesar de ser um método clássico e que pode ser aplicado a diversas funções, podemos observar pelas figuras (4.7, 4.9) que não apresenta bons resultados quando trata-se de elevados valores para t e funções transformadas para forma exponencial decrescente.

Como era esperado, a técnica da série de Fourier teve as melhores aproximações, entre os métodos testados, para funções oscilatórias como podemos observar na figura (4.5) ou em [86] onde temos mais algumas funções testes, embora seu comportamento para funções do tipo exponenciais decrescentes conforme visto nas figuras (4.7, 4.9) não seja tão precisa. A grande desvantagem deste método é necessitar de muitos termos na série da equação (4.9) para atingir a precisão desejada.

Segundo Valkó [83], não existe um melhor algoritmo de aceleração para uma sequência de ordem logarítmica. No algoritmo de aceleração não linear de Wynn-Rho, para garantir precisão e para que a subtração “catastrófica” que aparece no denominador da fórmula seja controlada necessita uso de aritmética estendida. Em seu trabalho Valkó usou o software *Matemática* com 50 dígitos decimais de precisão. Nós usamos *FORTRAN 90* com precisão dupla, assim este método começa a apresentar erros de arredondamento devido à subtração “catastrófica” contida na sua formulação.

O método de inversão Gaver-Stehfest para os casos testados apresenta bons resultados quando aplicado a funções exponenciais com argumento negativo

como pode ser observado nas figuras (4.3, 4.7, 4.9). No entanto, este método não se aplica a funções com uma resposta oscilatória, ilustrado pela função seno na figura (4.5). A grande vantagem deste método é que apresenta boa convergência para poucos termos na série ($10 \leq N \leq 18$) e sua programação é feita apenas usando aritmética real.

Nesta dissertação escolhemos o algoritmo de Gaver com o acelerador Stehfest para resolução dos problemas apresentados nos capítulos 2, 3, pois entre todos os algoritmos testados, é o mais preciso com relação a funções transformadas para a forma de exponencial decrescente e com grande estabilidade para valores de t elevados. O que também é sustentado por Segatto [74] onde o método de inversão Stehfest apresentou melhores resultados para o problema apresentado no capítulo 2.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de validar o algoritmo proposto mostramos que quando o t cresce a solução da aproximação S_N dependente do tempo obtida pelo método $TLTS_N$ se aproxima da solução do problema S_N estacionário obtida pelo método LTS_N . Primeiramente testamos os resultados gerados pelo nosso programa em meio homogêneo e um grupo de energia com diferentes tipos de fonte. Em continuidade, para analisar a formulação proposta para o problema multigrupo e em meio heterogêneo, consideraremos um problema com dois grupos de energia e em duas regiões.

5.1 Problemas Monoenergéticos e em Meio Homogêneo

Nestes problemas vamos analisar o comportamento do método $TLTS_N$ quando t cresce. Para isso resolvemos o problema de transporte dependente do tempo pelo método $TLTS_N$ para valores de $t = 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}, 1, 10, 100$ s e resolvemos o problema de transporte estacionário pelo método LTS_N . Assumindo que $\sigma_t = 1\text{cm}^{-1}$, $\sigma_s = 0.1, 0.5, 0.9\text{cm}^{-1}$, $v = 10^6\text{cm/s}$, que a espessura da placa é $x_0 = 1\text{cm}$, que a condição inicial é $\psi(0, x, \mu) = 1$ e que as condições de contorno são fluxo incidente igual a um e vácuo em $x = 0$ e $x = x_0$, respectivamente. Os dados foram gerados em $x = 0, 0.5, 1$ para $N = 40$. Resolvemos esses problemas de transporte usando a forma de inversão numérica para a transformada de Laplace de Gaver-Stehfest com o número de termos usados no somatório da equação (4.15) igual a 16. Consideraremos os seguintes problemas de transporte isotrópico unidimensional dependente do tempo em uma placa

5.1.1 Problema 1

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x, \mu) + \sigma_t \psi(t, x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu', \quad (5.1)$$

| $\sigma_s = 0.1$ | | | |
|------------------|-------------------|------------------------|------------------------|
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 1.397686942627315 | 6.773575910313685E-001 | 3.966111123516454E-001 |
| 10^{-4} | 1.025654128780834 | 3.528078454393667E-001 | 1.605758106856358E-001 |
| 10^{-2} | 1.025654769986398 | 3.528084145836711E-001 | 1.605760599832190E-001 |
| 1 | 1.025654797718208 | 3.528084090626930E-001 | 1.605760523522118E-001 |
| 10 | 1.025654311093688 | 3.528082923987119E-001 | 1.605761800835331E-001 |
| 100 | 1.025654788823722 | 3.528084161363140E-001 | 1.605759803028115E-001 |
| LTS _N | 1.025654566338268 | 3.528081197995837E-001 | 1.605759506270497E-001 |
| $\sigma_s = 0.5$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 1.611657673033223 | 9.867558130441841E-001 | 5.391802396365760E-001 |
| 10^{-4} | 1.161891770637382 | 5.074955659319433E-001 | 2.342114704992510E-001 |
| 10^{-2} | 1.161892008015648 | 5.074957541208185E-001 | 2.342114528867554E-001 |
| 1 | 1.161892283429964 | 5.074958486649263E-001 | 2.342113972539098E-001 |
| 10 | 1.161892427880753 | 5.074960065183662E-001 | 2.342118265110236E-001 |
| 100 | 1.161892453440555 | 5.074957491874754E-001 | 2.342114108393238E-001 |
| LTS _N | 1.161892348057106 | 5.074959077593817E-001 | 2.342115368994538E-001 |
| $\sigma_s = 0.9$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 1.897863803929194 | 1.455791916236250 | 7.396068723532621E-001 |
| 10^{-4} | 1.411888579450633 | 8.449220607597755E-001 | 4.035009282863451E-001 |
| 10^{-2} | 1.411888837155776 | 8.449228040459259E-001 | 4.035014359294509E-001 |
| 1 | 1.411888848515030 | 8.449227283175658E-001 | 4.035013290794846E-001 |
| 10 | 1.411888666428515 | 8.449216845353856E-001 | 4.035005208251966E-001 |
| 100 | 1.411889346254273 | 8.449226953389225E-001 | 4.035010791877418E-001 |
| LTS _N | 1.411888813555132 | 8.449223353923208E-001 | 4.035010194636356E-001 |

Tabela 5.1: Fluxo escalar ($\int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu'$) por meio do método TLTS₄₀ sem fonte.

5.1.2 Problema 2

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x, \mu) + \sigma_t \psi(t, x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu' + 1, \quad (5.2)$$

| $\sigma_s = 0.1$ | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.050186874165081 | 1.852572373399344 | 1.049110657208785 |
| 10^{-4} | 1.929842658250878 | 1.791012219894296 | 1.064764087825591 |
| 10^{-2} | 1.929843547477398 | 1.791013672357105 | 1.064765368022246 |
| 1 | 1.929843341826248 | 1.791013027058402 | 1.064764772454653 |
| 10 | 1.929843223639238 | 1.791012565276169 | 1.064764879743548 |
| 100 | 1.929843270643282 | 1.791012805386685 | 1.064764379053014 |
| LTS _N | 1.929842880821246 | 1.791012298022727 | 1.064764265110026 |
| $\sigma_s = 0.5$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.357034777351608 | 2.385437180108260 | 1.284557664144595 |
| 10^{-4} | 2.369684015972161 | 2.477511367949255 | 1.442003732463233 |
| 10^{-2} | 2.369683996835149 | 2.477511633190217 | 1.442003643719061 |
| 1 | 2.369684881460854 | 2.477512232332696 | 1.442004115604050 |
| 10 | 2.369684308260627 | 2.477511564907774 | 1.442003526022805 |
| 100 | 2.369684841117522 | 2.477512465349283 | 1.442003281471815 |
| LTS _N | 2.369684578143983 | 2.477512276721851 | 1.442003766986332 |
| $\sigma_s = 0.9$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.758291122801476 | 3.144037905860575 | 1.600033943014023 |
| 10^{-4} | 3.257990371970644 | 3.946474951907653 | 2.249602599340869 |
| 10^{-2} | 3.257989723295365 | 3.946475412914621 | 2.249604937526704 |
| 1 | 3.257990760393143 | 3.946476481488321 | 2.249603077655100 |
| 10 | 3.257990163095221 | 3.946474890228172 | 2.249600910893260 |
| 100 | 3.257990499921429 | 3.946476690244757 | 2.249603370266099 |
| LTS _N | 3.257990483367411 | 3.946475627545845 | 2.249602689275914 |

Tabela 5.2: Fluxo escalar por meio do método TLTS₄₀ com fonte unitária.

5.1.3 Problema 3

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x, \mu) + \sigma_t \psi(t, x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu' + e^{-x}, \quad (5.3)$$

| $\sigma_s = 0.1$ | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 1.936184241982612 | 1.405527597907866 | 6.997623090483288E-001 |
| 10^{-4} | 1.723255095092054 | 1.247129774100787 | 6.224965877641060E-001 |
| 10^{-2} | 1.723256044142392 | 1.247130612774527 | 6.224975661231569E-001 |
| 1 | 1.723255953543352 | 1.247130608036217 | 6.224971821507565E-001 |
| 10 | 1.723255396588762 | 1.247130134340517 | 6.224973161772620E-001 |
| 100 | 1.723256149628190 | 1.247130279359903 | 6.224970282504214E-001 |
| LTS _N | 1.723255486852152 | 1.247129822053000 | 6.224968854714986E-001 |
| $\sigma_s = 0.5$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.222704315586930 | 1.854134925280191 | 8.878140465418523E-001 |
| 10^{-4} | 2.066227802175948 | 1.735259773749362 | 8.727589703292669E-001 |
| 10^{-2} | 2.066228094618568 | 1.735260004583365 | 8.727585965460853E-001 |
| 1 | 2.066228804645981 | 1.735260363785400 | 8.727589027699978E-001 |
| 10 | 2.066227740150614 | 1.735259812787544 | 8.727587937211592E-001 |
| 100 | 2.066228751062455 | 1.735259673941499 | 8.727584294939765E-001 |
| LTS _N | 2.066228539519117 | 1.735260321201890 | 8.727587487863617E-001 |
| $\sigma_s = 0.9$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.598588150813801 | 2.503587229264517 | 1.144641650760403 |
| 10^{-4} | 2.738457364132031 | 2.783013494350756 | 1.424335119802759 |
| 10^{-2} | 2.738456737171807 | 2.783014397888720 | 1.424336460021542 |
| 1 | 2.738457294050246 | 2.783013796630924 | 1.424335807509607 |
| 10 | 2.738457117514324 | 2.783012459073474 | 1.424334113766565 |
| 100 | 2.738458231315199 | 2.783015638236339 | 1.424335764323289 |
| LTS _N | 2.738457501829576 | 2.783013622849957 | 1.424335427737022 |

Tabela 5.3: Fluxo escalar por meio do método TLTS₄₀ com fonte e^{-x} .

5.1.4 Problema 4

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x, \mu) + \sigma_t \psi(t, x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu' + e^{-t}, \quad (5.4)$$

| $\sigma_s = 0.1$ | | | |
|------------------|-------------------|------------------------|------------------------|
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 1.779699757450694 | 1.332629523010058 | 7.786238045217372E-001 |
| 10^{-4} | 1.025653962695372 | 3.528075060383548E-001 | 1.605755988440425E-001 |
| 10^{-2} | 1.025654410911282 | 3.528083861590945E-001 | 1.605760817974289E-001 |
| 1 | 1.025655008911489 | 3.528084667685495E-001 | 1.605760497292183E-001 |
| 10 | 1.025654439975742 | 3.528082404126733E-001 | 1.605761710807425E-001 |
| 100 | 1.025654794022325 | 3.528082665681490E-001 | 1.605759508440563E-001 |
| LTS _N | 1.025654566338268 | 3.528081197995837E-001 | 1.605759506270497E-001 |
| $\sigma_s = 0.5$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.059345947059309 | 1.795445103356407 | 9.868684439439511E-001 |
| 10^{-4} | 1.161891803276067 | 5.074955409364945E-001 | 2.342114943585431E-001 |
| 10^{-2} | 1.161892428963796 | 5.074956478261230E-001 | 2.342114321302042E-001 |
| 1 | 1.161892282753062 | 5.074958530647863E-001 | 2.342114186609211E-001 |
| 10 | 1.161892354775386 | 5.074960717716750E-001 | 2.342118112130487E-001 |
| 100 | 1.161892549614727 | 5.074957935922166E-001 | 2.342114114891492E-001 |
| LTS _N | 1.161892348057106 | 5.074959077593817E-001 | 2.342115368994538E-001 |
| $\sigma_s = 0.9$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.428466669701856 | 2.468495372386847 | 1.270209762011038 |
| 10^{-4} | 1.411890277488562 | 8.449241000578827E-001 | 4.035023606701655E-001 |
| 10^{-2} | 1.411888539953692 | 8.449223474017986E-001 | 4.035012355031345E-001 |
| 1 | 1.411888532402009 | 8.449221543050569E-001 | 4.035010977483821E-001 |
| 10 | 1.411888212633720 | 8.449212940985754E-001 | 4.035003521413320E-001 |
| 100 | 1.411888977586616 | 8.449228374340945E-001 | 4.035011504519362E-001 |
| LTS _N | 1.411888813555132 | 8.449223353923208E-001 | 4.035010194636356E-001 |

Tabela 5.4: Fluxo escalar por meio do método TLTS₄₀ com fonte e^{-t} .

5.1.5 Problema 5

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x, \mu) + \sigma_t \psi(t, x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \psi(t, x, \mu') d\mu' + e^{-x} + e^{-t}, \quad (5.5)$$

| $\sigma_s = 0.1$ | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.318197678464494 | 2.060798696489747 | 1.081774993794669 |
| 10^{-4} | 1.723255357027832 | 1.247129430774870 | 6.224964545239035E-001 |
| 10^{-2} | 1.723256172647920 | 1.247131055933507 | 6.224975402105197E-001 |
| 1 | 1.723255864192348 | 1.247130703479334 | 6.224972312261183E-001 |
| 10 | 1.723255693342398 | 1.247130160333536 | 6.224974150048874E-001 |
| 100 | 1.723256025728132 | 1.247130645861475 | 6.224970464455349E-001 |
| LTS _N | 1.723255486852152 | 1.247129822053000 | 6.224968854714986E-001 |
| $\sigma_s = 0.5$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 2.670392928523414 | 2.662823386714410 | 1.335502416753937 |
| 10^{-4} | 2.066227711283407 | 1.735259479588047 | 8.727588389482300E-001 |
| 10^{-2} | 2.066227837607513 | 1.735260116166354 | 8.727585775082295E-001 |
| 1 | 2.066228596160306 | 1.735260127546761 | 8.727587768663107E-001 |
| 10 | 2.066228265426211 | 1.735259690403745 | 8.727586247665339E-001 |
| 100 | 2.066228735466643 | 1.735260263116602 | 8.727584368586653E-001 |
| LTS _N | 2.066228539519117 | 1.735260321201890 | 8.727587487863617E-001 |
| $\sigma_s = 0.9$ | | | |
| t | $x = 0$ | $x = 0.5$ | $x = 1$ |
| 10^{-6} | 3.129191468466996 | 3.516290356187870 | 1.675244831558350 |
| 10^{-4} | 2.738459245607635 | 2.783015473329268 | 1.424336689764834 |
| 10^{-2} | 2.738456960337785 | 2.783014189529963 | 1.424336641410003 |
| 1 | 2.738457905969242 | 2.783013949610673 | 1.424335855569617 |
| 10 | 2.738458131242076 | 2.783012320444038 | 1.424333861959191 |
| 100 | 2.738457626544284 | 2.783013693958498 | 1.424335641722881 |
| LTS _N | 2.738457501829576 | 2.783013622849957 | 1.424335427737022 |

Tabela 5.5: Fluxo escalar por meio do método TLTS₄₀ com fonte $e^{-x} + e^{-t}$.

Podemos observar, pelas tabelas (5.1, 5.2, 5.3) que conforme o t cresce a solução do problema S_N dependente do tempo obtida através do método TLTS_N se aproxima da solução do problema de transporte estacionário obtida pelo método

LTS_N. Nas tabelas (5.4, 5.5) percebemos que quando $t \rightarrow \infty$ temos $e^{-t} \rightarrow 0$, logo estes problemas devem convergir para solução do problema de transporte estacionário obtida pelo método LTS_N sem fonte e com fonte e^{-x} , respectivamente. Os testes foram realizados de $t = 10^{-6}$ s até $t = 100$ s. Podemos, então, concluir que a inversão dada pelo algoritmo de Gaver-Stehfest é robusta tanto para os valores iniciais utilizados em t quanto para elevados valores de t .

5.2 Problema Multigrupo e Multiregião

Para mostrarmos a aplicação do método TLTS_N na solução de problemas de transporte com multigrupo de energia e meio heterogêneo, nós mostramos o comportamento assintótico da solução com o crescimento do tempo e comparamos com o resultado obtido pelo método LTS_N para o problema estacionário. Consideramos um problema estilizado em uma placa composta de duas regiões com dois grupos de energia, onde a velocidade dos nêutrons rápidos é de $v_1 = 10^7$ cm/s e dos térmicos é $v_2 = 2 \times 10^5$ cm/s, na primeira região temos $L_1 = 7.8663$ cm, $\sigma_{t1}^1 = 1$ cm⁻¹, $\sigma_{t2}^1 = 1.2$ cm⁻¹, $\sigma_{s11}^1 = 0.9$ cm⁻¹, $\sigma_{s12}^1 = 0.2$ cm⁻¹, $\sigma_{s21}^1 = 0.05$ cm⁻¹, $\sigma_{s22}^1 = 0.8$ cm⁻¹, e na segunda temos $L_2 = 1.2549$ cm, $\sigma_{t1}^2 = 0.9$ cm⁻¹, $\sigma_{t2}^2 = 1.5$ cm⁻¹, $\sigma_{s11}^2 = 0.75$ cm⁻¹, $\sigma_{s12}^2 = 0.35$ cm⁻¹, $\sigma_{s21}^2 = 0.10$ cm⁻¹, $\sigma_{s22}^2 = 0.99$ cm⁻¹. Na primeira região a fonte externa é nula e na segunda região temos uma fonte unitária apenas no grupo 1 e nula no grupo 2. Consideramos ainda uma condição inicial unitária e condições de contorno reflexivas em $x = 0$ e $x = x_0$. Isto é:

$$\begin{aligned}
 \psi_{n,g}(0, x) &= 1, \quad n = 1, 2, \dots, N \\
 \psi_{n,g}^1(t, 0) &= \psi_{n+\frac{N}{2},g}^1(t, 0) \\
 \psi_{n,g}^2(t, L_2) &= \psi_{n+\frac{N}{2},g}^2(t, L_2), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Na tabela apresentamos os valores obtidos pelo método TLTS_N para o fluxo escalar com a ordem de quadratura $N = 10$, para primeira e segunda região, nos instantes $t = 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}, 1, 10, 100$ s. E resolvemos esse problema de transporte usando

a forma de inversão numérica para a transformada de Laplace de Gaver-Stehfest
similarmente aos problemas homogêneos.

| x | t | Grupo 1 | Grupo 2 |
|--------|-----------|----------------------|----------------------|
| 0 | 10^{-6} | 6.760881942555956E-1 | 9.542959383600768E-1 |
| | 10^{-4} | 2.267682488494119E-1 | 1.331866070970184E-1 |
| | 10^{-2} | 2.264048995498734E-1 | 1.323122490007483E-1 |
| | 1 | 2.264025314285916E-1 | 1.323110680669593E-1 |
| | 10 | 2.264018295612942E-1 | 1.323105523663717E-1 |
| | 100 | 2.264052463978362E-1 | 1.323124352750823E-1 |
| | LTS_N | 2.264032561206425E-1 | 1.323113466877578E-1 |
| 7.8663 | 10^{-6} | 3.210328764452683 | 1.030556311758454 |
| | 10^{-4} | 4.229963790669918 | 2.180072441979879 |
| | 10^{-2} | 4.230130771936888 | 2.180447044069191 |
| | 1 | 4.230119687791601 | 2.180445538580784 |
| | 10 | 4.230117092448044 | 2.180441971823192 |
| | 100 | 4.230132320253886 | 2.180448168628766 |
| | LTS_N | 4.230122544624169 | 2.180444878223420 |

Tabela 5.6: Fluxo escalar para primeira região.

| x | t | Grupo 1 | Grupo 2 |
|--------|------------------|-------------------|-------------------|
| 0 | 10^{-6} | 3.210328882655249 | 1.030556311758454 |
| | 10^{-4} | 4.229964707921835 | 2.180072392334802 |
| | 10^{-2} | 4.230130580291126 | 2.180447492923737 |
| | 1 | 4.230120066080160 | 2.180446098912643 |
| | 10 | 4.230118313300132 | 2.180442158772624 |
| | 100 | 4.230131717057931 | 2.180447917434834 |
| | LTS _N | 4.230122544624169 | 2.180444878223419 |
| 1.2549 | 10^{-6} | 4.295245867409935 | 1.094364499419694 |
| | 10^{-4} | 5.490428233317706 | 2.879121760987863 |
| | 10^{-2} | 5.490626778830675 | 2.879535022975963 |
| | 1 | 5.490615054790278 | 2.879528816759977 |
| | 10 | 5.490618713215064 | 2.879532218000185 |
| | 100 | 5.490628080930883 | 2.879532909403221 |
| | LTS _N | 5.490621214315709 | 2.879533108496728 |

Tabela 5.7: Fluxo escalar para segunda região.

Podemos observar, nas tabelas (5.6, 5.7) que obtivemos resultados satisfatórios com a aplicação do método TLTS_N para domínio heterogêneo e com dois grupos de energia. Podemos afirmar isso, pois foi proposto que conforme o t cresce a solução do problema S_N dependente do tempo em uma placa composta de duas regiões com dois grupos de energia converge para a solução do problema de transporte estacionário e nos resultados obtidos podemos observar essa convergência.

6 CONCLUSÕES

Concluimos, afirmando que o objetivo proposto nesta dissertação foi alcançado, uma vez que mostramos a aptidão do método TLTS_N para resolver problemas de transporte incluindo modelo de multigrupo e meio heterogêneo, através do caráter analítico da solução, sendo que, a solução para o fluxo angular transformado é uma solução analítica na forma integral das equações S_N. Assim, para encontrarmos o valor de $\psi_n(t, x)$ a única aproximação feita é no método de inversão numérica da transformada de Laplace usada. Levando em conta que, conforme mostrado por Gonzalez et al. o método TLTS_N apresenta bons resultados na resolução de problemas unidimensionais de transporte em meios finito e seminfinito. Além disto, devemos mencionar que para encontrar a solução do problema transiente em meio infinito podemos usar o lema de Placzek [90] que estabelece que a solução do problema de transporte dependente do tempo para $0 < x < \infty$ está relacionado com a solução do problema transiente para $-\infty < x < \infty$. Desta forma, acreditamos que a formulação TLTS_N é uma técnica bastante robusta para a resolução de problemas unidimensionais de transporte dependente do tempo em geometria cartesiana.

Pela análise dos bons resultados obtidos no capítulo anterior e também na própria formulação do método TLTS_N apresentada nos capítulos 2 e 3, podemos fazer algumas considerações: a aplicação do método TLTS_N a cada uma das regiões, reduz um problema mais complexo em problemas simples, que pode ser resolvido acoplando todas as soluções obtidas ao seu término e pela resolução de um sistema linear para encontrar as constantes de integração; o método mostrou-se eficiente tanto na resolução de problemas de transporte dependente do tempo com um grupo ou multigrupo de energia, em meios homogêneo tanto quanto heterogêneo; face à complexidade dos problemas resolvidos, vale salientar a simplicidade da formulação proposta, o que facilita a implementação de códigos computacionais; com facilidade essa formulação pode ser adequada para resolver outros tipos de problemas, tais

como, problemas anisotrópicos, problemas envolvendo outros tipos de condições de contorno e iniciais. Mais ainda, como a convergência do método já foi provada, garantindo que a solução proposta converge para a solução exata quando N cresce ao infinito, podemos gerar resultados “benchmark” para este tipo de problema.

Desta forma, estimulados pelos bons resultados obtidos iremos, em trabalhos futuros, focar nossa atenção na aplicação desta metodologia na solução de problemas de cinética de reatores nucleares.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Chandrasekhar. Radiative transfer. *Dover Publications Inc.* Oxford University Press, London, 1950.
- [2] R. Garcia, C. Siewert. The Linearized Boltzmann Equation: Sound-Wave Propagation in a Rarefied Gas. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik.* **57**, pp. 94-122, 2005.
- [3] C. Siewert, D. Valougeorgis. An Analytical Discrete-Ordinates Solution of the s-Model Kinetic Equations for Flow in a Cylindrical Tube. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* **72**, pp. 531-550, 2002.
- [4] L. Barichello, P. Rodrigues, C. Siewert. An analytical Discrete-Ordinates Solution for Dual-Mode Heat Transfer in a Cylinder. *Journal of Quantitative Spectros and Radiative Transfer.* **73**, pp. 583-602, 2002.
- [5] L. Barichello, C. Siewert. On the Equivalence Between the Discrete Ordinates and the Spherical Harmonics Methods in Radiative Transfer. *Nuclear Science and Engineering.* **130**, pp. 79-84, 1998.
- [6] R. C. Barros, E. W. Larsen. A Numerical Method for One-Group Slab-Geometry Discrete Ordinates Problems with no Spatial Truncation Error. *Nuclear Science and Engineering* , EUA, v. 104, **3**, pp. 199-208, 1990.
- [7] R. C. Barros, E. W. Larsen. A Numerical Method for Multigroup Slab-Geometry Discrete Ordinates Problems with no Spatial Truncation Error. *Transport Theory and Statistical Physics*, EUA, v. 20, **5,6**, pp. 441-462, 1991.
- [8] L. B. Barichello, M. T. Vilhena. A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation. *Kerntechnik.*, **58**, pp. 182-184, 1993.

- [9] L. Tavares. Cálculo dos Parâmetros Superficiais de Radiação pelo Método LTS_N . Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.
- [10] R. Vasques. A Review of Particle Transport Theory in a Binary Stochastic Medium. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- [11] L. B. Barichello. Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
- [12] M. Vilhena, L. Barichello. An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinates Problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, **24**, pp. 1337-1352, 1995.
- [13] C. Segatto, M. Vilhena. Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem Without Azimutal Symmetry. *Annals of Nuclear Energy*, **21**, pp. 701-710, 1994.
- [14] C. Segatto. Extensão da Formulação LTS_N para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.
- [15] M. Vilhena, C. Segatto. A New Iterative Method to Solve the Radiative Transfer Equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **55**, pp. 493-498, 1996.

- [16] J. Brancher, C. Segatto, M. Vilhena. The LTS_N Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimutal Symmetry with Severe Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **62**, pp. 743-753, 1999.
- [17] C. Segatto, M. Vilhena, J. Brancher. The One-Dimensional LTS_N Formulation for High Degree of Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **61**, pp. 39-43, 1999a.
- [18] G. A. Gonçalves. Solução LTS_N da Equação Adjunta de Transporte de Nêutron com Fonte Arbitrária para Elevada Ordem de Quadratura numa Placa Homogênea. Dissertação de Mestrado pelo Programade Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMECA), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999.
- [19] G. A. Gonçalves, C. F. Segatto, M. T. Vilhena. The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **66**, pp. 271-276, 2000.
- [20] C. Segatto, M. Vilhena, M. Gomes. The One-Dimensional LTS_N Solution in a Slab with High Degree of Quadrature. *Annals of Nuclear Energy*. **26**, pp. 925-934, 1999b.
- [21] C. Segatto, M. Vilhena. Solução Genérica da Equação de Transporte Unidimensional para Elevadas Ordens de Quadratura. *In Anais do XI Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*. Minas Gerais, Brasil, volume 1, pp. 238-242, 1997.
- [22] N. H. Bonemberger. Método LTS_N para N Inteiro. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.

- [23] D. Marona, C. Segatto, M. Vilhena. On the LTS_N Solution of the Transport Equation in a Slab for $c = 1$. In *Anais do XV ENFIR- Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*, Santos, SP, Brasil, 2007.
- [24] R. Souto, H. Vello, S. Stephany, A. Preto, C. Segatto, M. Vilhena. A Parallel Implementation of the LTS_N Method for a Radiative Transfer Problem. In *Proceedings of the 15th Symposium on Computer Architecture and High Performance Computing*. São Paulo, SP, Brazil, pp. 116-128, 2003.
- [25] M. A. Santos. $MGLTS_N^M$ Aproximação Angular Multigrid em uma Placa Plana. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- [26] C. F. Segatto, M. T. Vilhena, S. Leite. The LTS_N Angular Multigrid Approach in a Slab. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **95**, pp. 415-442, 2005.
- [27] R. Vargas, M. Vilhena. Analytical Solution of the Discrete Ordinates Problem by the Decomposition Method. *Annals of Nuclear Energy*. **24**, pp.785-791, 1997.
- [28] R. Vargas, M. Vilhena. A Closed-Form Solution for the One-Dimensional Radiative Conductive Problem by the Decomposition and LTS_N Methods. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **61**, pp. 303-308, 1999.
- [29] M. Vilhena, L. Barichello. A Closed-Form Solution to the One-Dimensional Linear and Nonlinear Radiative Transfer Problem. *Hybrid Methods In Engineering*. **1**, pp. 1-17, 1999.

- [30] M. Simch. Solução LTS_N para Problemas de Transferência Radiativa com Polarização em Geometria Plana. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.
- [31] M. Simch, C. Segatto, M. Vilhena. An Analytical Solution for the S_N Radiative Transfer Equations with Polarization in a Slab by the LTS_N Method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **97**, pp. 424-435, 2006.
- [32] G. Gonçalves, G. Oliveira, M. Vilhena. The LTS_N Solution of the Adjoint Neutron Transport Equation with Arbitrary Source for High Order of Quadrature in a Homogeneous Slab. *Annals of Nuclear Energy*. **29**, pp. 561-569, 2002.
- [33] R. Vargas, C. Segatto, M. Vilhena. Solution of the Radiative Heat Transfer Equation with Internal Energy Sources in a Slab by the LTS_N Method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **105**, pp. 1-7, 2007.
- [34] C. F. Segatto, M. T. Vilhena, L. S. Tavares. The Determination of Radiant Parameters by the LTS_N Method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **70**, pp. 227-236, 2001.
- [35] V. Borges, M. Vilhena. Uso do Método LTS_N Aplicado a Problemas de Engenharia Nuclear. In INAC - *International Nuclear Atlantic Conference-XIII ENFIR*, 2002.
- [36] C. Batistela, M. Vilhena. Cálculo de Criticalidade pelo Método LTS_N . In XI ENFIR-*Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*. Poços de Caldas, M. G., Brasil. volume 1, pp. 226-231, 1997a.

- [37] C. Batistela, M. Vilhena. Criticality by the LTS_N Method. *Journal of Nuclear Science and Tecnology*. **34**, pp. 603-606, 1997b.
- [38] C. Batistela, M. Vilhena, V. Borges. Determination of the Effective Multiplication Factor in a Slab by the LTS_N Method. *Annals of Nuclear Science*. **26**, pp. 761-676, 1999.
- [39] G. Orenge, M. Vilhena, G. C. O., G. Caldeira, G. G. A.. Recent Advances in the LTS_N Method for Criticality Calculations in a Slab Geommetry. *Annals of Nuclear Energy*. **31**, pp. 2195-2202, 2004.
- [40] M. Retamoso, M. Vilhena, H. Velho, F. Ramos. Estimation of Boundary Condition in Hydrologic Optics. *Applied Numerical Mathematics*. **40**, pp. 87-100, 2002.
- [41] H. Velho, M. Retamoso, M. Vilhena. Inverse Problems for Estimating Bottom Boundary Conditions of Natural Waters in Engineering. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **54**, pp. 1357-1368, 2002.
- [42] H. Velho, M. Vilhena, M. Retamoso, R. Pazos. An Application of the LTS_N Method on Inverse Problem in Hydrological Optics. *Progress in Nuclear Energy*. **40**, pp. 457-468, 2003.
- [43] J. Zabadal, M.T. Vilhena, L.B. Barichello. Solution of the Three-Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the LTS_N Method. *Annals of Nuclear Energy*., **22**, pp. 131-134, 1995.
- [44] E. Hauser, M. Vilhena, R. Pazos. Solution and Study of The Two Dimensional Nodal Neutron Transport Equation. *Proceedings Of Icone 10*. **1**, pp. 1-5, 2002.
- [45] E. Hauser, R. Pazos, R. Barros, M. Vilhena. Solution and Study of Nodal Neutron Transport Equation Applying the LTS_N Diagexp Method. *In An-*

- nals of 18th International Conference on Transport Theory.* Rio de Janeiro, RJ, Brasil, pp. 303-307, 2003.
- [46] B. Amaral Rodriguez, M. Vilhena, V. Borges. Determination of the Exposure Build-up Factor in a Slab Using the LTS_N Method. *Kerntechnik.* **4**, pp. 182-184, 2006.
- [47] B. Amaral Rodriguez, M. Vilhena, V. Borges, C. Malamut. The Exposure Buildup Factor Formulation in a Slab and Rectangle Geometry by the LTS_N Method. *International Journal of Low Radiation.* **4**, pp. 102-116, 2007.
- [48] J. Zabadal, M. Vilhena, L. Barichello. An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem in a Convex Domain. *Progress in Nuclear Energy.* **31**, pp. 225-228, 1997.
- [49] E. Hauser, R. Pazos, M. Vilhena. An Error Estimate of the Nodal LTS_N Solution in Cartesian Geometry. *Annals of Nuclear Energy.* **32**, pp. 1146-1156, 2005.
- [50] R. P. Pazos, M. T. M. B. Vilhena. Convergence in Transport Theory. *Applied Numerical Mathematics.* **30**, pp. 79-92, 1999a.
- [51] R. P. Pazos, M. T. M. B. Vilhena. Convergence of the LTS_N Method: Approach of c_0 Semi-Groups. *Progress in Nuclear Energy.* **30**, pp. 77-86, 1999b.
- [52] K.M. Case. Elementary Solution of Transport Equation and Their Applications. *Annals of Physic.* **9**, pp. :1-23, 1960.
- [53] M. Vilhena, H. Velho, C. Segatto, G. Gonçalves. Analytical Solution of the One-Dimensional Discrete Ordinates Equation by the Laplace and Hankel Integral Transform. *In Integral Methods in Science and Engineering.* Ed.

- Birkhauser, Editors: C. Constanda and M. Ahues and A. Largillier, pp. 267-272, 2004.
- [54] R. Vasques, C. Segatto, M. Vilhena. The LTS_N Solution for the Neutron Transport Equation in Spherical Geometry. *In 18th International Conference in Transport Theory*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [55] R. Barros, M.D.A.M. Yavuz, H. Filho, e J. Mello. Progress in Spectral Nodal Methods Applied to Discrete Ordinates Transport Problems; *Progress in Nuclear Energy*. **33**, pp. 117-154, 1998.
- [56] K. Olson, D. Herderson. Numerical Benchmark Solutions for Time-Dependent Neutral Particle Transport in One-Dimensional Homogeneous Media Using Integral Transport. *Annals of Nuclear Energy*. **31**, pp. 2195-2202, 2004.
- [57] E. Aydin, S. Katsimichas, C. de Oliveira. Time-Dependent Diffusion and Transport Calculations Using a Finite-Element-Spherical Harmonics Method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **4**, pp. 102-116, 2005.
- [58] J.C. Chai, H. P., Y. Lama. Three-Dimensional Transient Radiative Transfer Modeling Using the Finite-Volume Method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **86**, pp. 299-313, 2004.
- [59] J. Chai. Transient Radiative Transfer in Irregular Two-Dimensional Geometries. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **84**, pp. 281-294, 2004.
- [60] B. Ganapol. Time-Dependent Moments of the Monoenergetic Transport Equation in Spherical and Cylindrical Geometry. *Nuclear Science and Engineering*, **60**, pp. 103, 1976.

- [61] B. Ganapol. Time-dependence Surface Angular Flux for a Semi-Infinite Medium with Specular Reflection. *Nuclear Science and Engineering*, **80**, pp. 412-415, 1982.
- [62] B. Ganapol, W. Filippone. Time-Dependent Emergent Intensity from an Anisotropically Scattering Semi-Infinite Atmosphere. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.*, **27**, pp. 15-21, 1982.
- [63] B. Ganapol. Solution of the One-Group Time-Dependent Neutron Transport Equation in an Infinite Medium by Polynomial Reconstruction. *Nuclear Science and Engineering*, **92**, pp. 272-279, 1986.
- [64] M. Abdou. On the Solution of Time-Dependent Transport Equation with Time-Varying Cross Sections. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **94**, pp. 189-199, 2005.
- [65] M. Abdou. Chapman-Enskog-Maximum Entropy Method on Time-Dependent Neutron Transport Equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **101**, pp. 210-225, 2006.
- [66] S. El-Wakil, A. Degheidy, M. Sallah. Time-Dependent Radiation Transfer in a Semi-Infinite Stochastic Medium with Rayleigh Scattering. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **85**, pp. 13-24, 2004.
- [67] S. El-Wakil, A. Degheidy, M. Sallah. Time-Dependent Polarized Radiation Transfer in Semi-Infinite Binary Markovian Media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **90**, pp. 259-273, 2005.
- [68] R. G. Tureci, C. Tezcan. H_N Solutions of the Time Dependent Linear Neutron Transport Equation for a Slab and a Sphere. *Kerntechnik*, **72**, pp. 66-73, 2007.
- [69] R. G. Tureci, D. Tureci. Time-Dependent Albedo Problem for Quadratic Anisotropic Scattering, *Kerntechnik*, **72**, pp. 59-65, 2007.

- [70] S. El-Wakil, A. Degheidy, M. Sallah. Time-Dependent Neutron Transport in Finite Media Using Pomraning-Eddington Approximation. *Annals Nuclear Energy*, **85**, pp. 13-24, 2004.
- [71] S. El-Wakil. Time-Dependent Radiation Transfer With Rayleigh Scattering Infinite Slab Media. *Journal of Quantitative Spectroscopy e Radiative Transfer*, **102**, pp. 152-161, 2006.
- [72] J. Oliveira, A. Cardona, M. Vilhena. Solution of the One-Dimension Time-Dependent Discrete Ordinates Problem in a Slab by the Spectral and LTS_N Methods, *Annals of Nuclear Energy*, **29**, pp. 13-20, 2002a.
- [73] J. Oliveira, A. Cardona, M. Vilhena, R. Barros. A Semi-Analytical Numerical Method for Time-Dependent Radiative Transfer Problems in a Slab Geometry with Coherent Isotropic Scattering. *Journal of Quantitative Spectroscopy e Radiative Transfer*, **73**, pp. 55-62, 2002b.
- [74] C.F. Segatto, M.T. Vilhena, T.T. Gonçalvez. An Analytical Integral Formulation for the Time-Dependent S_N Transport Equation in a Slab by The Double Laplace Transform Techique, *Kerntechnik*, **73**, pp. 176-178, 2008.
- [75] C. Segatto, M. Vilhena, T. Gonçalvez. An Analytical Solution for the One-dimensional Time-Dependent S_N Transport Equation for Bounded and Unbounded Domains in Cartesian Geometry, *Kerntechnik*, **75**, pp. 53-57, 2010c.
- [76] T. Gonçalvez, C. Segatto, M. Vilhena. A Closed Form Solution for the One-Group Time-Dependent Transport Equation in a Slab by the LTS_N Method. *In Anais do XV ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*, Santos, SP, Brazil, 2007.
- [77] A. Stroud, D. Secrest. Gaussian Quadrature Formulas, *Prendice-Hall Inc.*, New Jersey, 1966.

- [78] M. Heydarian, N. Mullineux, J. Reed. Solution of Parabolic Partial-Differential Equations, *Applied Mathematical Modeling*, **5**, pp. 448-449, 1981.
- [79] L. D'Amore, G. Laccetti, A. Murli. An Implementation of a Fourier Series Method for Numerically Inverting a Laplace Transform Function, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **25**, pp. 279-305, 1999.
- [80] J. Abate, P. P. Valkó. Multi-precision Laplace Transform Inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **60**, pp. 979-993, 2004.
- [81] A. M. Cohen. Numerical Methods for Laplace Transform Inversion, *Springer*, New York, **5**, pp 37, 2007.
- [82] D. P. Gaver, Jr., Observing Stochastic Processes and Approximate Transform Inversion, *Operations Research*, **14**, pp 444-459, 1966.
- [83] P. P. Valkó, J. Abate. Comparison of Sequence Accelerators for the Gaver Method of Numerical Laplace Inversion. *Computers and Mathematics with Applications*. **48** pp. 629-636, 2004.
- [84] H. Stehfest. Numerical Inversion of Laplace Transforms Algorithm 368, *Communications of the ACM*, **13**(1), pp.47-49, 1970.
- [85] H. Stehfest. Numerical Inversion of Laplace Transforms Remark on Algorithm 368, *Communications of the ACM*, **13**(10), pp.624, 1970.
- [86] H. Hassanzadeh, M. Pooladi-Daarvish. Comparison of Different Numerical Laplace Inversion methods for Engineering Applications, *Applied Mathematics and Computation*, **189**, pp. 1966-1981, 2007.
- [87] L.B. Barichello, R.D.M. Garcia, C.E. Siewert. A Spherical-Harmonics Solution for Radiative-Transfer Problems with Reflecting Boundaries and In-

- ternal Sources, *Journal Quantative Spectroscopy e Radiative Transfer.*, **60**, pp. 247-260, 1998.
- [88] G.A. Gonçalves, G. Orengo, M.T. Vilhena, C.O. Graça. LTS_N Solution of the Adjoint Neutron Transport Equation with Arbitrary Source for High Order of Quadrature in a Homogeneous Slab, *Journal Quantative Spectroscopy e Radiative Transfer.*, **66**, pp. 271-276, 2000.
- [89] G.A. Gonçalves, C.F. Segatto, M.T. Vilhena. The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Quadrature, *Annals of Nuclear Energy*, **29**, pp. 561-569, 2002.
- [90] K. M. Case, F. Hoffmann, G. Placzek, "Introduction to the Theory of Neutron Diffusion". Vol 1, US Govenment Printing Office, Washington DC, 1953.