Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Estudo das Propriedades de algumas Dinâmicas em $\mathcal{P}(X)$: o push forward e a convolução

Fagner Bernardini Rodrigues

Tese de doutorado

Tese submetida por Fagner Bernardini Rodrigues como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador: Alexandre T. Baraviera
Dr. (UFRGS)

Banca Examinadora:
Professor Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira (IMPA)
Professor Dr. Artur Oscar Lopes (PPG-MAT/UFRGS)
Professor Dr. Eduardo Garibaldi (UNICAMP)
Professor Dr. Luiz Fernando Rocha(PPG-MAT/UFRGS)

Data da Apresentação: 23/10/2012.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos os meus grandes amigos que torceram muito por mim. Também agradeço ao Alexandre, que aceitou me orientar e sempre foi muito prestativo e além de tudo um amigo. Agradeço também ao Elismar, professor que tive o prazer de conhecer ao longo deste trabalho, que também me ajudou muito e sempre esteve disposto a respoder minhas perguntas, além de propor muitas outras que foram fundamentais para a realização deste trabalho. Agradeço a todos os professores da banca examinadora, pois fizeram correções e observações importantes.

Agradeço à minha família, pois sempre me incentivaram a estudar tentar sempre melhorar.

Por último agradeço à Pati, minha namorada, que acredita sempre em mim, sempre me apoia, escuta as minhas reclamações, assiste aos ensaios de apresentações, é minha companheira de corrida, caminhada, futebol, cozinha. Muito obrigado meu amor, te amo muito!

RESUMO

Este trabalho contitui-se de duas partes: na primeira consideramos X espaço métrico compacto e uma aplicação $T : X \to X$. Esta induz uma aplicação $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dada por $\Phi(\mu) = T_\sharp(\mu)$, e chamada de push forward de T. Temos então que Φ é contínua, e assim, obtemos um sistema dinâmico. Nosso objetivo então é estudar as propriedades topológicas desta dinâmica, assim como as propriedades ergódicas.

Na segunda parte passamos a estudar dinâmicas que não são do tipo push forward. Os nossos principais resultados são a respeito da dinâmica dada pela convolução de medidas em um grupo topológico. Mais precisamente, dado G grupo topológico e $\nu \in \mathcal{P}(G)$ temos uma aplicação $\Theta_\nu : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ dada por $\Theta_\nu(\mu) = \nu * \mu$. Nossos principais resultados concentram-se no caso em que G é um grupo abeliano finito. De fato, caraterizamos as órbitas da dinâmica.

ABSTRACT

This work is about two dynamics: the first one is the dynamic given by the push forward of a continuous map $T : X \to X$ on a compact metric space. The push forward map is a map on $\mathcal{P}(X)$ and is given by $\Phi(\mu) = T_\sharp(\mu)$. The map Φ is continuous, then we have a topological dynamical system $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$. We studied the properties of this dynamic and proved, for example, we proved that if the entropy of the map T is positive the the entropy of Φ is infinity. We also studied the ergodic properties of the map Φ.

The second dynamic is given by the convolution of measures on a topological group G. The main results were obtained when G is a finite abelian group. The dynamic is defined as follows: take $\nu \in \mathcal{P}(G)$ and define the map $\mu \in \mathcal{P}(G) \mapsto \nu * \mu$. When G is a finite abelian group is possible to characterize completely the orbits of this dynamic.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Ao longo dos últimos anos alguns autores dedicaram-se a tentar munir o espaço de probabilidade (de um espaço métrico) com uma estrutura de veriedade Riemanniana. Entender como esta estrutura é definida passa por entender o espaço tangente de tal variedade, que precisa ser deifinido neste caso, e isto motivou, por exemplo, o trabalho de Kloeckner [10]. Este autor fixa um certo espaço métrico (o círculo $\mathbb{S}^1$) e uma aplicação sobre este conjunto ($\Phi_d : x \mapsto dx \text{ mod } 1$); esta aplicação induz uma transformação no espaço de probabilidade $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$, conhecida como a aplicação *push forward*. Definida tal aplicação este autor passa a estudar certas propriedades do sistema dinâmico como, por exemplo, a entropia deste sistema e ele dá, para este caso especial, uma descrição do espaço tangente em uma probabilidade do círculo.

Motivados por este trabalho, boa parte do nosso consiste em tentar entender a relação um sistema dinâmico sobre o espaço métrico e o sistema dinâmico induzido no espaço de probabilidades pelo push forward. Nosso objetivo é ver quais propriedades são comuns aos dois sistemas dinâmicos e quais não são exatamente as mesmas.

Algumas propriedades topológicas são herdadas pela dinâmica dada pelo push forward, mas sob hipóteses muito fortes sobre a dinâmica no espaço métrico: por exemplo, para obtermos recorrência por cadeias no caso probabilístico é necessário assumir que a aplicação no espaço métrico é topologicamente transitiva.

A entropia topológica, por outro lado, pode ser limitada, por baixo, pela entropia da aplicação original, e se esta for positiva, então a entropia no mundo probilístico será infinita.

Além de estudarmos propriedades topológicas da dinâmica dada pelo push forward também dedicamos uma parte deste trabalho ao estudo das propriedades ergódicas desta aplicação. Mais uma vez tentamos ver a relação entre as propriedades ergódicas da dinâmica no espaço métrico com a dinâmica no mundo probabilístico. Para tanto, obtivemos algumas medidas invariantes para o push forward e em seguida passamos a estudar a estrutura do conjunto das medidas invariantes para esta aplicação.

A última coisa que fizemos com respeito a dinâmica dada pelo push forward foi tentar definir uma nova entropia para esta aplicação, uma vez que se a entropia da aplicação no espaço métrico for positiva teremos que a aplicação do caso probabilístico será infinita. À esta nova entropia damos o nome de *entropia fraca em medida*, e esta nomenclatura é justificada pelo fato de ser inspirada pela entropia em medida da aplicação no espaço métrico.

Por último, nos concentramos em construir e estudar dinâmicas sobre $\mathcal{P}(X)$ que não são induzidas por push forward de aplicações no espaço métrico. De fato o que fazemos é construir duas dinâmicas, para a primeira delas, usando um resultado muito interessante de Bowen [2] , mostramos que possui entropia positiva. A outra é obtida pela convolução de medidas em um grupo topológico compacto. Para esta temos um estudo mais detalhado.

Este trabalho está organizado do seguite modo: primeiramente introduzimos os principais conceitos e provamos alguns resultados básicos com o objetivo de mostrar que $\mathcal{P}(X)$ é um espaço métrico e que a aplicação induzida é contínua.

No capítulo 3 temos uma parte que pode ser considerada como de motivação onde exploramos o caso em que X é um conjunto enumerável, onde mostramos que a aplicação $T \to X$ tem ponto periódico se somente se seu push forward tem ponto fixo.

No capítulo 4 passamos a estudar a propriedades topológicas da aplicação push forward, neste capítulo provamos que o fato de T ser transitiva não implica em transitividade para Φ, mas supondo que T é topologicamente misturador concluimos que seu push forward é topologicamente misturador. Neste capítulo também mostramos que se T é equiconínuo, então Φ satisfaz a mesma propriedade.

O capítulo 5 inicia-se com resultados que tratam de atratores. Nesta parte mostramos que se T tem um atrator ponto então o delta de Dirac neste ponto é um atrator para Φ. Logo em seguida definimos o conceito e atrator uniforme para um sistema dinâmico e então mostramos que se T possui um atrator uniforme, então Φ possui um atrator uniforme.

No capítulo 6 provamos o nosso pricipal resultado, que trata da entropia da aplicação push forward. Mostramos que a entropia de Φ é sempre maior ou igual do que a entropia de T, e que se a entropia de T for positiva então a entropia de Φ é infinita.

No capítulo 7 passamos a estudar as propriedades ergódicas da aplicação push forward. Vimos que dado um sistema dinâmico topológico (X, T) é possível estabelecer uma espécie de projeção do espaço $\mathcal{M}(\mathcal{P}(X), \Phi)$ no espaço $\mathcal{M}(X, T)$, com Φ sendo o push forward da aplicação T. Também, devido ao fato de a entropia topológica ser infinita em muitos casos, introduzimos o conceito de entropia fraca em medida. Vimos que esta nova entropia é menor ou igual do que a entropia topológica, e que esta entropia é invariante por conjugações.

O capítulo 8 é dedicado a estudar dinâmicas em $\mathcal{P}(X)$ que não sejam push forward de uma aplicação $T : X \to X$. Fixamos um grupo topológico compacto G e uma medida $\nu \in \mathcal{P}(G)$ e consideramos $\Theta_\nu = \nu * \mu$. Nossos principais resultados sobre essa dinâmica concentram-se no caso em que G é abeliano finito. Neste caso caracterizamos as órbitas da dinâmicas.

No último capítulo são apresentados duas aplicações sobre $\mathcal{P}(X)$ que não são dadas por push forward. Neste capítulo apresentamos alguns resultados interessantes sobre a entropia e conjunto ω-limite da dinâmica da pela convolução de medidas.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Uma topologia para $\mathcal{P}(X)$

Neste capítulo estudaremos o espaço $\mathcal{P}(X)$, sendo X um espaço métrico. Veremos algumas métricas sobre $\mathcal{P}(X)$ e alguns resultados básicos.
Começamos considerando X um espaço métrico compacto separável e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das medidas de probalidade de Radom sobre X. Nós estamos interessados em três métricas particulares. A primeira delas é conhecida na literatura como *métrica de Prokhorov* e é definida por

$$d_P(\nu,\mu) = \inf\{\alpha > 0 : \mu(A) \leq \nu(A_\alpha)+\alpha \text{ and } \nu(A) \leq \mu(A_\alpha)+\alpha, \ \forall A \in \mathcal{B}(X)\},$$

onde $A_\alpha := \{x \in X : d(x,A) < \alpha\}$. A segunda é a *distância fraca-$*$* e é definida por

$$d(\mu,\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\Big| \int_X g_i(x)d\mu - \int_X g_i(x)d\nu\Big|,$$

onde $g_i : X \to [0,1]$ é contínua para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é conjunto enumerável denso em $C(X,[0,1])$. Finalmente temos a *métrica de Wasserstein* dada por

$$W_p(\mu,\nu) = \Big(\inf_{\Pi}\Big\{\int_{X\times X} d^p(x,y)d\Pi\Big\}\Big)^{\frac{1}{p}}, \ p \in [1,\infty)$$

onde Π é um transporte de μ para ν, isto é, sendo $p_1 : X^2 \to X$ e $p_2 : X^2 \to X$ as projeções na primeira e segunda componente respctivamente, temos que

$$(p_1)_\sharp\Pi = \mu \text{ e } (p_2)_\sharp(\Pi) = \nu,$$

onde $(p_i)_\sharp\Pi(A) = \Pi(p_i^{-1}(A))$.

No que segue veremos que as três métricas geram a mesma topologia, ou seja, são equivalentes. De fato, elas geram a topologia fraca em $\mathcal{P}(X)$.

Definição 2.1.1. Seja $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{P}(X)$. Dizemos que $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge para μ na topologia fraca se

$$\Big| \int_X g(x)d\mu_j - \int_X g(x)d\mu \Big| \to 0, \quad \forall g \in C(X).$$

Lema 2.1.2. *As três métricas acima geram a topologia fraca, ou seja, são equivalentes.*

Demonstração. Ver [8] e [9]. □

O Lema 2.1.2 será útil ao longo deste texto, pois em certos momentos uma das três métricas torna-se mais interessante para uma demonstração que as outras duas.

Como o nosso objetivo é estudar o sistema dinâmico sobre $\mathcal{P}(X)$, ou seja, uma aplicação contínua $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, é importante sabermos sob quais hipóteses o espaço métrico $\mathcal{P}(X)$ é compacto, separável, completo, etc.

Lema 2.1.3. *Se (X, d) é um espaço métrico compacto então o espaço métrico $\mathcal{P}(X)$, munido com qualquer uma das três métricas acima, é separável.*

Demonstração. Seja X espaço métrico completo . Então existe $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência densa em X. Consideramos o conjunto

$$\mathcal{A} = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{a_i} : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_1, ..., \alpha_k \in [0,1] \cap \mathbb{Q},\ a_i \in A,\ k = 1, 2, ... \Big\}.$$

Nós afirmamos que $\mathcal{A}$ é denso em $\mathcal{P}(X)$. De fato, seja $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Para cada $m \geq 1$, $\cup_{j=1}^{\infty} B(a_j, \frac{1}{m}) = X$. Tomamos k_m tal que

$$\mu\Big(\cup_{j=1}^{k_m} B\Big(a_j, \frac{1}{m}\Big)\Big) \geq 1 - \frac{1}{m}.$$

Agora modificamos as bolas $B(a_j, \frac{1}{m})$ de modo a obtermos conjuntos disjuntos. Definimos então

$$A_1^m = B\Big(a_1, \frac{1}{m}\Big),$$
$$A_2^m = B\Big(a_2, \frac{1}{m}\Big) \backslash B\Big(a_1, \frac{1}{m}\Big),$$
$$\vdots$$
$$A_j^m = B\Big(a_j, \frac{1}{m}\Big)\Big) \Big\backslash \Big[\cup_{i=1}^{k_m} B\Big(a_i, \frac{1}{m}\Big)\Big].$$

Então $A_1^m, A_2^m, ..., A_{k_m}^m$ são disjuntos e $\cup_{i=1}^{j} A_i^m = \cup_{i=1}^{j} B(a_i, \frac{1}{m})$ para todo j. Em particular, $\mu(\cup_{i=1}^{k_m} A_i^m) \geq 1 - \frac{1}{m}$, logo

$$\sum_{i=1}^{k_m} \mu(A_i^m) \in \Big[1 - \frac{1}{m}, 1\Big].$$

Agora nós aproximamos

$$\mu(A_1^m)\delta_{a_1} + ... + \mu(A_{k_m}^m)\delta_{a_{k_m}}$$

por

$$\mu_m = \alpha_1^m \delta_{a_1} + ... + \alpha_{k_m}^m \delta_{a_{k_m}},$$

onde nós escolhemos os $\alpha_j^m \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ de modo que $\sum_{j=1}^{k_m} \alpha_j^m = 1$ e

$$\sum_{j=1}^{k_m} |\mu(A_j^m) - \alpha_j^m| < \frac{2}{m}.$$

Notamos que para cada m, $\mu_m \in \mathcal{A}$. Vamos então mostrar que $\mu_m \to \mu$. Tomamos então $g \in C(X, \mathbb{R})$. Então

$$\begin{aligned}
&\Big|\int g d\mu_m - \int g d\mu\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{k_m} \alpha_j^m g(a_j) - \int g d\mu\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{j=1}^{k_m} \mu(A_j^m) g(a_j) - \int g d\mu\Big| + \frac{2}{m}\sup_j |g(a_j)| \\
&\leq \Big|\int \sum_{j=1}^{k_m} g(a_j)\mathcal{X}_{A_j^m} d\mu - \int g d\mu\Big| + \frac{2}{m}\|g\|_\infty \\
&\leq \Big|\sum_{j=1}^{k_m} \int \Big(g(a_j)\mathcal{X}_{A_j^m} - g\mathcal{X}_{A_j^m}\Big) - \int g\mathcal{X}_{(\cup_{j=1}^{k_m} A_j^m)^c} d\mu\Big| + \frac{2}{m}\|g\|_\infty \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_m} |g(a_j) - g(x)|\mu(A_j^m) + \|g\|_\infty \mu\Big((\cup_{j=1}^{k_m} A_j^m)^c\Big) + \frac{2}{m}\|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Então observamos que cada A_j^m está contido em uma bola de centro a_j e raio $1/m$. Como X é compacto e g é contínua, segue que g é uniformemente contínua. Logo dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$. Com isto temos que $|g(x) - g(a_j)| < \varepsilon$ para todo $x \in A_j^m$ para todo j. Então para $m > 1/\delta$ segue dos cálculos acima que

$$\Big|\int g d\mu_m - \int g d\mu\Big| \leq \varepsilon + \|g\|_\infty \Big(\frac{1}{m} + \frac{2}{m}\Big).$$

Assim $\int g d\mu_m \to \int g d\mu$, quando $m \to \infty$. Então $\mu_m \to \mu$. $\square$

O lema 2.1.3 mostra que, muitas vezes, quando queremos provar alguma propriedade para uma medida, basta provar tal propriedade para uma sequência de medidas, que converge para a primeira, mas que são muito mais simples, já que são combinações convexas de *deltas de Dirac*. Uma observação importante é que se X é apenas um espaço métrico mas não é compacto, então o mesmo resultado ainda é válido, com a diferença de que devemos tomar $g \in C_b(X,\mathbb{R}) := \{g : X \to \mathbb{R} : g \text{ é contínua e limitada }\}$. Outro resultado importante diz respeito à compacidade de $\mathcal{P}(X)$.

Como sabemos, todo conjunto compacto é separável, assim o resultado acima é apenas uma consequência se $\mathcal{P}(X)$ for compacto.

Lema 2.1.4. *Se (X,d) é um espaço métrico compacto então o espaço métrico $\mathcal{P}(X)$ é compacto na topologia fraca.*

Demonstração. Como X é compacto temos que $C(X,\mathbb{R})$, munido com a norma do supremo definida por

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

é um espaço de Banach. Seja $C(X,\mathbb{R})'$ o dual de $C(X,\mathbb{R})$, e consideramos

$$\mathcal{M} := \{\varphi \in C(X,\mathbb{R})' : \|\varphi\| \leq 1,\ \varphi(1) = 1,\ \varphi(f) \geq 0\ \forall f \in C(X,\mathbb{R}) \text{ com } f \geq 0\}.$$

Para $\mu \in \mathcal{P}(X)$ definimos $\varphi_\mu(f) := \int f d\mu$, $f \in C(X,\mathbb{R})$. Pelo Teorema de representação de Riesz, a correspondência $T : \mu \mapsto \varphi_\mu$ é uma bijeção de $\mathcal{P}(X)$ sobre $\mathcal{M}$. Mais ainda, temos que T é homeomorfismo, onde estamos considerando sobre $\mathcal{M}$ a topologia fraca-$*$. Pelo Teorema de Alaoglu temos que a bola fechada no dual $B = \{\varphi \in C(X,\mathbb{R})' : \|\varphi\| \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca-$*$ e portanto $\mathcal{M}$ é compacto na topologia fraca-$*$, sendo que é fechado em B na topologia fraca-$*$. Como T é homeomorfismo, segue que $\mathcal{P}(X)$ é compacto.

$\square$

Com os resultados anteriores já temos que $\mathcal{P}(X)$ é um espaço métrico separável se X o é e compacto se X o é. Um resultado topológico importante é o que diz respeito à completude de $\mathcal{P}(X)$. Este resultado apenas enunciaremos.

Lema 2.1.5 (Ver [8] e [9])**.** *Se (X,d) é um espaço métrico completo então o espaço métrico $\mathcal{P}(X)$ é completo.*

2.2 A aplicação $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$

O objetivo desta seção é mostrar que o push-forward de uma aplicação contínua $T : X \to X$, define uma aplicação contínua denotada por $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$. Começamos considerando X espaço métrico compacto, uma aplicação contínua $T : X \to X$ e $\mu \in \mathcal{P}(X)$. A medida $T_\sharp\mu \in \mathcal{P}(X)$, chamada de o *push forward de μ por T* é definida por

$$T_\sharp\mu(E) = \mu(T^{-1}(E)),\ \forall E \subset X \text{ Boreliano}.$$

Temos então definida uma aplicação $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, dada por

$$\Phi : \mu \in \mathcal{P}(X) \mapsto \Phi(\mu) := T_\sharp\mu \in \mathcal{P}(X).$$

A seguir mostraremos que a função Φ é contínua, mas antes precisamos do seguinte Lema:

Lema 2.2.1. *(Mudança de Variáveis) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $T : X \to X$ funções contínuas. Então*

$$\int_X f d(\Phi^i(\mu)) = \int_X (f \circ T^i)(x) d\mu.$$

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{B}(X)$ um conjunto mensurável e $\varphi = \mathcal{X}_A$ a função característica de A. Então nós temos que

$$\int_X \varphi d(\Phi^i(\mu)) = \int_X \mathcal{X}_A d(\mu(T^{-i})) = \mu(T^{-i}(A)).$$

Por outro lado temos que

$$\int_X \mathcal{X}_A \circ T^i d\mu = \int_X \mathcal{X}_{T^{-i}(A))} d\mu = \mu(T^{-i}(A)).$$

Agora se tomamos uma função simples $\varphi = \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{X}_{A_j}$, por linearidade, nós temos que

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi d(\Phi^i(\mu)) &= \int_X \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{X}_{A_j} d(\Phi^i(\mu)) = \sum_{j=1}^k a_j \int_X \mathcal{X}_{A_j} d(\Phi^i(\mu)) \\
&= \sum_{j=1}^k a_j \int_X (\mathcal{X}_{A_j} \circ T^i) d\mu = \int_X \sum_{j=1}^k a_j (\mathcal{X}_{A_j} \circ T^i) d\mu \\
&= \int_X \varphi \circ T^i d\mu.
\end{aligned}$$

Como a integral de uma função f é o supremo de integrais de funções simples que são menores do que f, o resultado segue. □

Lema 2.2.2. *Seja X espaço métricos compacto , $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Então $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é contínua. Mais ainda, se $T : X \to X$ é homeomorfismo, então $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ também é homeomorfismo.*

Demonstração. Começamos supondo que T seja contínua. Tomamos $\mu \in \mathcal{P}(X)$ e suponhamos que exista uma sequência $\{\mu_n\}_n$ em $\mathcal{P}(X)$, tal que $\mu_n \to \mu$ quando $n \to \infty$. Então dada $g \in C(X, \mathbb{R})$ temos, pelo Lema 2.2.1, que

$$\lim_{n\to\infty} \int g(x) d\Phi(\mu_n) = \lim_{n\to\infty} \int (g \circ T)(x) d\mu_n = \int (g \circ T)(x) d\mu = \int g(x) d\Phi(\mu),$$

(a terceira igualdade vem do fato de que $g \circ T \in C(X, \mathbb{R})$). Logo temos que Φ é contínua, pois o fato de $\mu_n \to \mu$ implica $\Phi(\mu_n) \to \Phi(\mu)$.
Para vermos que se T é homeormorfismo, então Φ é homeomorfismo basta observamos que $\Phi^{-1}(\mu)(A) = \mu(T(A))$, e então aplicarmos o mesmo raciocínio anterior. □

Capítulo 3

Caso Discreto

O objetivo deste capítulo é estudar as príncipais propriedades da dinâmica dada pelo push forward de uma aplicação $T : X \to X$, onde X é um conjunto enumerável discreto. Neste caso o espaço $\mathcal{P}(X)$ pode ser idetentificado com um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ (se X for finito) e com um subconjunto de $\mathbb{R}^\infty$ (se X for infinito). O resultado mais importante provado neste capítulo trata da relação entre pontos periódicos de T e pontos fixos do seu push forward.

3.1 O Caso Finito

Nesta seção consideraremos X como sendo um espaço discreto e finito. Note que neste caso X não é conexo. Suponhamos então que $X = \{x_1, ..., x_n\}$, e identificamos cada função $f : X \to \mathbb{R}^n$ com um vetor em $\mathbb{R}^n$ pelo isomorfismo linear $\mathcal{L} : C^0(X) \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{L}(f) = (f(x_1), ..., f(x_n)).$$

Então

$$C^0(X) = \{f : X \to X |\ f \text{ é contínua}\} \cong \mathbb{R}^n,$$

e isto implica que $C^0(X)' \cong (\mathbb{R}^n)^*$ cuja base será a dual da base canônica

$$\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_1}\},$$

isto é,

$$\int f d\delta_{x_i} = f(x_i), \text{ for } i = 1, ..., n.$$

pela identificação

$$\mathcal{L}^*(\nu) = \mathcal{L}^*(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{xi}) = (p_1, ..., p_n).$$

Como sabemos o conjuntos das medidas com sinal em X, denotado por $\mathcal{M}(X)$, satisfaz $\mathcal{M}(X) \cong C^0(X)'$, então

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X) &= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{xi} : 0 \leq p_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Big\} \\ &\cong \Big\{ (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq p_i \leq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Big\}.\end{aligned}$$

Então, neste caso, o push-forward de T, digamos Φ, é uma aplicação sobre o simplexo

$$\Delta_n := \Big\{ (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq p_i \leq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Big\},$$

$\Phi : \Delta_n \to \Delta_n$.

Dada $T : X \to X$ contínua, nós podemos coniderar uma matriz $n \times n$ de entradas de zeros e uns $[T]$, que representa T como segue:

$$[T] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(x_1) \\ \vdots \\ T(x_n) \end{pmatrix}$$

onde

$$[T]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x_i) = x_j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Nós também podemos identificar as integrais no espaço original com o produto interno:

$$\int f d\nu = \langle \mathcal{L}(f), \mathcal{L}^*(\nu) \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

Para calcularmos a matriz da aplicação push forward de T nós lembramos a fórmula da mudança de variáveis (ver Lema 2.2.1),

$$\int f \circ T d\nu = \int f d\Phi(\nu).$$

Afirmamos então que $\mathcal{L}(f \circ T) = [T]\mathcal{L}(f)$. De fato, para qualquer $1 \leq i \leq n$ nós temos a i-ésima coordenada dada por

$$(\mathcal{L}(f \circ T))_i = f(x_j) \text{ if } T(x_i) = x_j,$$

isto é,

$$(\mathcal{L}(f \circ T))_i = f(x_j) = f(T(x_i)) = ([T]\mathcal{L}(f))_i,$$

provando a igualdade.

Com isto, nós provamos o seguinte.

Proposição 3.1.1. *Seja Φ o push forward associado à T e $[\Phi]$ sua matriz como acima, isto é, se $\nu = \sum_{i=1}^{n} p_i\delta_{xi}$ então*

$$\Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\delta_{xi}\Big) = \sum_{i=1}^{n} q_i\delta_{xi} \Leftrightarrow [\Phi]\mathcal{L}^*(\nu) = \mathcal{L}^*(\Phi(\nu)).$$

Então, $[\Phi] = [T]^t$ (a matriz adjunta).

Demonstração. Nós apenas observamos que, a mudança de variáveis

$$\int f \circ T d\nu = \int f d\Phi(\nu),$$

é equivalente à

$$\langle \mathcal{L}(f \circ T), \mathcal{L}^*(\nu)\rangle = \langle \mathcal{L}(f), \mathcal{L}^*(\Phi(\nu))\rangle.$$

Nós mostramos que $\mathcal{L}(f \circ T) = [T]\mathcal{L}(f)$, então

$$\langle \mathcal{L}(f \circ T), \mathcal{L}^*(\nu)\rangle = \langle [T]\mathcal{L}(f), \mathcal{L}^*(\nu)\rangle = \langle \mathcal{L}(f), [T]^t\mathcal{L}^*(\nu)\rangle,$$

assim

$$\langle \mathcal{L}(f), [T]^t\mathcal{L}^*(\nu)\rangle = \langle \mathcal{L}(f), \mathcal{L}^*(\Phi(\nu))\rangle,\ \forall f(\text{ i.e } \forall f \in \mathbb{R}^n),$$

então nós obtemos $[\Phi] = [T]^t$. □

Exemplo 3.1.2. Seja $X = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$ e considere a aplicação $T : X \to X$ dada por

$$T(x_i) = x_{i+1 \text{ mod n}}.$$

Então a matriz de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado $\nu = \sum_{i=0}^{n-1} p_i\delta_{x_i} \in \mathcal{P}(X)$, se $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é o push forward de T, então

$$\Phi(\nu) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i\delta_{x_i+1 \text{ mod n}}.$$

Se nós consideramos ν como sendo o vetor $\nu = (p_0, ..., p_{n-1})$, vemos que $\Phi(p_0, ..., p_{n-1}) = (p_{n-1}, p_1, p_2, ..., p_0)$. Assim nós concluimos que

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para o análogo da aplicação de grau d sobre S^1 nós temos:

Exemplo 3.1.3. Seja $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ e considere $T : X \to X$, dada por

$$T(x_i) = x_{2i \text{ mod } 4}.$$

Então nós temos que $T(X) = \{x_0, x_2\}$. Dado $\nu = \sum_{i=0}^{3} p_i \delta_{x_i} \in \mathcal{P}(X)$, se $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é o push forward of T, nós podemos ver que

$$\Phi(\nu) = (p_0 + p_2)\delta_{x_0} + (p_1 + p_3)\delta_{x_2}.$$

Se consideramos a medida ν como o vetor $[\nu] = (p_0, p_1, p_2, p_3)^t$ então

$$\Phi(\nu) = [\Phi][\nu],$$

onde

$$[\Phi][\nu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Então temos que $[\Phi]$ é igual a transposta $[T]^t$.

Exemplo 3.1.4. Seja $X = \left\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, ..., \frac{8}{9}\right\}$ e $T : X \to X$ definida por

$$T(x) = 2x \text{ mod } 1.$$

Não é difícil de ver que os pontos $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ são periódicos de período 6. Por outro lado os pontos $\frac{3}{9}, \frac{6}{9}$ são também periódicos, mas de período 2, e 0 é um ponto fixo. Seja $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ o push forward de T e tome $\nu = \sum_{i=0}^{8} p_i \delta_{\frac{i}{9}} \in \mathcal{P}(X)$. Então

$$\begin{aligned} \Phi(\nu) = \sum_{i=0}^{8} p_i \delta_{T(\frac{i}{9})} &= p_0\delta_0 + p_1\delta_{\frac{2}{9}} + p_2\delta_{\frac{4}{9}} + p_3\delta_{\frac{6}{9}} \\ &+ p_4\delta_{\frac{8}{9}} + p_5\delta_{\frac{1}{9}} + p_6\delta_{\frac{3}{9}} + p_7\delta_{\frac{5}{9}} + p_8\delta_{\frac{7}{9}}. \end{aligned}$$

Se escrevermos ν como o vetor $[\nu]^t = (p_0, ..., p_8)$, então

$$\Phi(\nu) = [\Phi][\nu],$$

onde,

$$[\Phi][\nu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_5 \\ p_1 \\ p_6 \\ p_2 \\ p_7 \\ p_3 \\ p_8 \\ p_4 \end{bmatrix}.$$

então $[\Phi]$ é uma matriz 9×9 estocástica.

Consideraremos sobre o conjunto $\mathcal{P}(X)$ a distância dada por $d((p_1, ..., p_n), (q_1, ..., q_n)) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$.

Proposição 3.1.5. *Seja $T : X \to X$ uma aplicação qualquer e X é finito. Valem as seguintes afirmações:*
(i) Se T é bijetiva, então Φ é uma isometria.
(ii) Se T não é bijeção, então Φ é uma contração.

Demonstração. (i) Para facilitar a notação assumiremos que $X = \{1, ..., n\}$. Como $T : X \to X$ é uma bijeção e $X = \{1, .., n\}$ é finito, T é uma permutação. Assim dada $\mu = \sum_i p_i \delta_i$

$$\Phi(\mu) = \sum_i p_i \delta_{T(i)} = \Phi(p_1, ..., p_n) = (p_{T^{-1}(1)}, ..., p_{T^{-1}(n)}).$$

Logo se $\mu = \sum_i p_i \delta_i$ e $\nu = \sum_i q_i \delta_i$, então

$$d(\Phi(p_1, ..., p_n), \Phi(q_1, ..., q_n)) = \sum_{i=1}^{n} |p_{T^{-1}(i)} - q_{T^{-1}(i)}| = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|^2 = d(\mu, \nu).$$

(ii) Se T não é bijeção então, se aplicamos, na soma que envolve a distância, desigualdade triângular segue que Φ é uma contração. □

Corolário 3.1.6. *Dada $T : X \to X$ uma aplicação qualquer e X é finito, então $h(T) = h(\Phi) = 0$, onde h é a entropia topológica.*

Demonstração. Basta observar que a entropia de uma contração ou de uma isometria são sempre nulas. □

Observação 3.1.7. Se é definida como no exemplo 3.1.3 então temos que $h(\Phi) = 0$. De fato, se consideramos (p_1, p_2, p_3, p_4), temos que

$$\Phi^n(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, 0, 0, 0) \text{ for } n > 1, \text{ i.e., } \Phi^n\Big(\sum_{i=0}^{3} p_i \delta_{x_i}\Big) = \delta_{x_0} \text{ for } n > 1,$$

então $\Phi^n \equiv \delta_{x_0}$, para $n > 1$. Assim $h(\Phi) = 0$.

3.2 O Caso Infinito

Nesta seção assumiremos que X é um conjunto infinito, enumerável e discreto. Neste caso $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Se munimos X com a topologia discreta, então a distância em X dada por

$$d(x_n, x_m) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \neq m \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases},$$

gera a topologia discreta em X, e com esta topologia X não é compacto. Não é difícil de ver que o conjunto das probabilidades sobre X é dado por

$$\mathcal{P}(X) = \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{x_i} : x_i \in X,\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \Big\},$$

e que este também não é compacto.

Consideramos então $T : X \to X$ e $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ seu push forward. Como no caso finito, nós podemos associar a T uma matriz de entradas de zeros e uns, mas agora esta matriz será infinita. Novamente, se $[T]$ é a matriz associada à aplicação T, então a matriz associada à Φ satisfaz a condição $[\Phi] = [T]^t$. Como $\mathcal{P}(X)$ é convexo mas não é compacto, não podemos aplicar o *Teorema do Ponto Fixo de Schauder*, mas nós temos o seguinte:

Teorema 3.2.1. *Seja $T : X \to X$ uma aplicação e $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ seu push forward. Então T tem ponto periódico se e somente se Φ tem ponto fixo.*

Demonstração. Se existe $p \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(p) = p$, então nós temos que

$$\mu = \frac{1}{n}\Big(\delta_x + \delta_{T(x)} + ... + \delta_{T^{n-1}(x)}\Big) \in \mathcal{P}(X)$$

é um ponto fixo para Φ. Para a recíproca, dividiremos a demonstração em dois casos e para o primeiro nós suporemos que T é uma bijeção $\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ (note que isto não muda em nada a demonstração, sendo que X é enumerável), isto é, $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Se $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_i$ é tal que $\Phi(\mu) = \mu$, então

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{T(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{T^{-1}(i)} \delta_i$$

Logo nós temos que $p_i = p_{T^{-1}(i)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Como μ é uma medida de probabilidade, existe $p_j \neq 0$. Sendo que $\Phi(\mu) = \mu$, então $\Phi^k(\mu) = \mu$ e isto implica que $p_j = p_{T^{-k}(j)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $T^{-k}(j) \neq j$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então o conjunto $\{T^{-k}(j) = j_k : k \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, e nós podemos escrever μ como segue

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p_{j_k} \delta_{j_k} + \sum_{i \neq j_k\ \forall k}^{\infty} p_i \delta_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{T^{-k}(j)} \delta_{j_k} + \sum_{i \neq j_k\ \forall k}^{\infty} p_i \delta_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_j \delta_{j_k} + \sum_{i \neq j_k\ \forall k}^{\infty} p_i \delta_i.$$

Assim $\mu(\mathbb{N}) = \infty$, o que nos dá uma contradição.

Para o segundo caso seja T uma aplicação qualquer e pensamos T como uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Seja $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_i \in \mathcal{P}(X)$ ponto fixo de Φ. Como $\Phi^k(\mu) = \mu$ para todo $k \in \mathbb{N}$, nós temos que

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_i = \Phi^k(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^k \delta_i,$$

onde $p_i^k = \sum_{l=1}^{\infty} p_{i_l^k} = p_i$ é dado pelo conjunto $T^{-k}(i) = \{i_1^k, i_2^k, i_3^k, ...\}$. Como μ é uma medida de probabilidade, existe p_j tal que $p_j \neq 0$. Se $T^{-n}(j) \cap T^{-m}(j) \neq \emptyset$ com $m < n$, então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(i) = T^m(i)$, e isto implica $T^{n-m}(T^m(i)) = T^m(i)$, isto é, $T^m(i)$ é um ponto periódico para T. Se $T^{-n}(j) \cap T^{-m}(j) = \emptyset$ com $m \neq n$, então nós podemos escrever μ como segue

$$\mu = \sum_{j_l^1 \in T^{-1}(j)}^{\infty} p_{j_l^1}^1 \delta_{j_l^1} + \sum_{j_l^2 \in T^{-2}(j)}^{\infty} p_{j_l^2}^2 \delta_{j_l^2} + \sum_{j_l^3 \in T^{-3}(j)}^{\infty} p_{j_l^3}^3 \delta_{j_l^3} + ... + \sum_{i \notin T^{-k}(j),\ \forall k \in \mathbb{N}}^{\infty} p_i \delta_i.$$

Esta igualdade implica $\mu(X) = \infty$, pois $\displaystyle\sum_{j_l^k \in T^{-k}(j)}^{\infty} p_{j_l^k}^k = p_j$ para todo $k \in \mathbb{N}$, mas isto é uma contradição. Então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(j) \cap T^{-m}(j) \neq \emptyset$, e disto segue que T tem ponto periódico. $\square$

Exemplo 3.2.2. Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, e $T : X \to X$ dada por $T(x_i) = x_{i+1}$. Note que T não possui ponto periódico, assim, pelo Teorema 3.2.1, segue que Φ não tem ponto fixo.

Se consideramos sobre

$$\mathcal{P}(X) = \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{x_i} : x_i \in X,\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \Big\},$$

a distância dada por

$$d((p_1, p_2, ...), (q_1, q_2, ...)) = \sum_{i=1}^{\infty} |p_i - q_i|,$$

temos então uma distância bem definida em $\mathcal{P}(X)$ e vale o seguinte resultado:

Proposição 3.2.3. *Seja $X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ infinito, discreto e $T : X \to X$ uma aplicação qualquer, então*
(i) Se T é uma bijeção, Φ é uma isometria,
(ii) Se não é bijetiva, Φ é uma contração.

Demonstração. Análoga à demonstração do Lema 3.1.5. □

Corolário 3.2.4. *Seja* $X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *infinito, discreto e* $T : X \to X$ *uma aplicação qualquer, então* $h(\Phi) = 0$.

Capítulo 4

Propriedades Topológicas da Aplicação Push Forward

Neste capítulo iremos estudar propriedades topológicas da aplicação push forward. Também mostraremos que algumas dessas propriedades são provenientes da aplicação T. De agora em diante assumiremos que X é um espaço métrico compacto.

Proposição 4.0.5. *Se T é uma aplicação contínua, então Φ tem um ponto fixo.*

Demonstração. Notamos que Φ é uma aplicação contínua e $\mathcal{P}(X)$ é um conjunto compacto convexo. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schowder, nós temos que Φ tem um ponto fixo. $\square$

Uma observação importante a ser feita é que a Proposição 4.0.5 poderia ser provada usando o fato de que todo homeomorfismo sobre um compacto tem medida invariante.

Proposição 4.0.6. *Sejam $T : X \to X$ e $S : Y \to Y$ sistemas dinâmicos topológicos conjugados. Então $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ e $\Psi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(Y)$ são sistemas dinâmicos topológicos conjugados, onde Φ é o push forward de T e Ψ é o push forward de S.*

Demonstração. Seja $H : X \to Y$ a conjugação entre T e S. Então nós temos

$$H \circ T = S \circ H.$$

Consideramos a aplicação $\Sigma : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, dada por $\Sigma(\mu)(A) = \mu(H^{-1}(A))$. Então Σ é um homeomorfismo. Tomamos $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ e vemos que

$$\begin{aligned}\Sigma \circ \Phi \circ \Sigma^{-1}(\mu) &= \Sigma \circ \Phi(\mu \circ H) = \Sigma(\mu \circ H \circ T) \\ &= \mu \circ H \circ T \circ H^{-1} = \mu \circ S \circ H \circ H^{-1} \\ &= \mu \circ S = \Psi(\mu).\end{aligned}$$

Logo
$$\Sigma \circ \Phi \circ \Sigma^{-1} = \Psi,$$
o que implica o resultado. $\square$

O próximo resultado trata da "*construção de uma grade* "em um espaço métrico compacto.

Lema 4.0.7. *Dado X um espaço métrico compacto e $\delta > 0$, existe uma cobertura mensurável de X, $\{P_j\}_{j=1}^N$, tal que P_j é aberto para todo j, $int(P_i) \cap int(P_j) = \emptyset$ e $d(x,y) < \delta$ para todo $x, y \in P_j$, para todo j. Mais ainda existem $\varepsilon > 0$ e pontos $p_i \in P_i$ tais que $B_\varepsilon(p_i) \subset P_i$.*

Demonstração. Dado $\delta > 0$, existem $x_1, ..., x_k \in X$ tais que $X = \cup_{j=1}^k B_{\frac{\delta}{2}}(x_j)$. Definimos então
$$\begin{aligned} P_1 &= B_{\frac{\delta}{2}}(x_1), \\ P_2 &= (B_{\frac{\delta}{2}}(x_2)) - (B_{\frac{\delta}{2}}(x_1)) \\ &\vdots \\ P_k &= (B_{\frac{\delta}{2}}(x_k)) - (\cup_{j=1}^{k-1} B_{\frac{\delta}{2}}(x_j)). \end{aligned}$$
Então nós temos que $X = \cup_{j=1}^k P_j$, e $\operatorname{int}(P_i) \cap \operatorname{int}(P_j) = \emptyset$, se $i \neq j$. Como $P_j \subset B_{\frac{\delta}{2}}(x_j)$, $d(x,y) < \delta$ para todo $x, y \in P_j$.
Como a cobertura $X = \cup_{j=1}^k B_{\frac{\delta}{2}}(x_j)$ é finita e, por construção de cada P_i, nós podemos tomar $\varepsilon > 0$ adequado e escolher pontos $p_i \in P_i$ tais que $B_\varepsilon(p_i) \subset P_i$. $\square$

Definição 4.0.8. Dizemos que $T : X \to X$ é topologicamente transitiva, (ou transitiva) se existe $x \in X$ tal que a semi-órbita $O_T^+(x) := \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, é um conjunto denso em X.

Observação 4.0.9. T transitiva não implica Φ transitiva.

Demonstração. Se $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é a rotação irracional no círculo dada por $T(x) = x + \alpha$, α é um número irracional, nós temos que T é transitivo. Como T é uma translação, segue que Φ é 1-Lipschitz, se considerarmos sobre $\mathcal{P}(X)$ a distância de Prokhorov. Suponhamos, por absurdo, que Φ é transitiva. Logo existe $\mu \in \mathcal{P}(X)$ tal que a semi-órbita $\{\Phi^n(\mu) : n \in \mathbb{N}\}$ é densa em $\mathcal{P}(X)$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $0 \notin A = \Big(\varepsilon, 1 - \varepsilon\Big)$ e $1 - 2\varepsilon > \varepsilon$. Assim dada a medida de Lebesgue $\lambda \in \mathcal{P}(X)$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $d_P(\Phi^n(\mu), \lambda) < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Seja $p = 0 \in \mathbb{S}^1$. Pela densidade da sequência $\{\Phi^k(\mu)\}_{k \in \mathbb{N}}$, existe $l \in \mathbb{N}$, tal que $d_P(\Phi^{n+l}(\mu), \delta_0) < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Como Φ é 1-Lipschitz e λ é Φ-invariante, vemos que
$$d_P(\Phi^{n+l}(\mu), \lambda) = d_P(\Phi^{n+l}(\mu), \Phi^l(\lambda)) \le d_P(\Phi^n(\mu), \lambda) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Pela desigualdade triangular, segue que

$$d_P(\lambda, \delta_0) \leq d_P(\Phi^{n+l}(\mu), \lambda) + d_P(\Phi^{n+l}(\mu), \delta_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto implica que

$$\lambda(A) \leq \delta_0(A_{\frac{\varepsilon}{2}}) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ and } \delta_0(A) \leq \lambda(A_{\frac{\varepsilon}{2}}) + \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1).$$

Em particular, se $A = \Big(\varepsilon, 1-\varepsilon\Big)$, $0 \notin A_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Então

$$1 - 2\varepsilon = \lambda(A) \leq \delta_0(A_{\frac{\varepsilon}{2}}) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

o que é uma contradição. □

Definição 4.0.10. Dizemos que $T : X \to X$ é um misturador topológico, se dados U, V conjuntos abertos em X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n > N$. Notamos que, T^{-1} é também um misturador topológico, desde que T seja bijetiva.

Lema 4.0.11. *Suponhamos que $T : X \to X$ é um misturador topológico. Seja $P = \{P_1, ..., P_l\}$ uma grade finita de X. Dado $\varepsilon > 0$ e $p \in X$, existem $N \in \mathbb{N}$ e pontos $p_i \in P_i$ tais que se $K \geq N$, então $d(T^K(p_i), p) < \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Consideramos conjuntos abertos U e $V_i \subset P_i$, onde $p \in U$, e U tem diâmetro menor do que ε. Então existem inteiros $N(U, V_i)$, tais que, $T^n(V_i) \cap U \neq \emptyset$, para todo $n > N(U, V_i)$. Agora tomamos N o máximo sobre os $N(U, V_i)$ e fixamos $K \geq N$. Logo, existe no mínimo uma pré-imagem $p_i \in V_i \subset P_i$ de T^K contida em U, para cada elemento da grade, e assim o resultado segue. □

Pela observação 4.0.9 nós não podemos concluir que T transitiva implica Φ transitiva, mas temos *Transitividade por Cadeias* como o seguinte mostra.

Definição 4.0.12. Seja $T : X \to X$ um homeomorfismo sobre um espaço métrico compacto. Nós dizemos que T é *Transitiva por Cadeias* se dados $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$, existem $x = x_1, x_2, ..., x_k = y \in X$ e $n_1, ..., n_{k-1} \in \mathbb{N}$, $n_i > N$ para todo $i \in \{1, ..., k-1\}$, tais que $d(T^{n_i}(x_i); x_{i+1}) < \varepsilon$

Proposição 4.0.13. *Sejam $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $p \in X$, $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$. Então existem $N \leq K \in \mathbb{N}$ e $\mu' \in \mathcal{P}(X)$ tais que $d(\mu, \mu') < \varepsilon$ e $d(\Phi^K(\mu'), \delta_p) < \varepsilon$.*

Demonstração. Nós usaremos a distância fraca-$*$ para provar a Proposição. Seja $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência densa de funções contínuas em $C(X, [0,1])$ usada para definir a distância fraca-$*$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Como cada g_i é contínua, existe $0 < \delta < \varepsilon$, tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |g_i(x) - g_i(y)| < \varepsilon, \ \forall i \in \{1, ..., n_0\}.$$

Tomamos então uma δ-grade $P = \{P_1, ..., P_l\}$. Então, pelo Lema 4.0.11 , existe $K \in \mathbb{N}$ e pontos $p_i \in P_i$, tais que $d(T^K(p_i), p) < \delta$. Então nós consideramos a medida $\mu' = \mu(P_1)\delta_{p_1} + ... + \mu(P_l)\delta_{p_l}$, e notamos que

$$\begin{aligned}
d(\mu, \mu') &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \sum_{j=1}^{l} \int_{P_j} (g_i(x) - g_i(p_j) d\mu \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} \int_{P_j} |g_i(x) - g_i(p_j)| d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} \int_{P_j} |g_i(x) - g_i(p_j)| d\mu \\
&+ \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} \int_{P_j} |g_i(x) - g_i(p_j)| d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} \frac{\varepsilon}{2} \mu(P_j) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} \mu(P_j) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato de que P é uma δ-grade de X. Nós também temos que

$$\begin{aligned}
d(\delta_p, \Phi^k(\mu')) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \sum_{j=1}^{l} \int_{P_j} (g_i(p) - g_i(T^k(p_j)) d\mu \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} |g_i(p) - g_i(T^k(p_j))| \mu(P_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} |g_i(p) - g_i(T^k(p_j))| \mu(P_j) \\
&+ \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} |g_i(p) - g_i(T^k(p_j))| \mu(P_j) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} \frac{\varepsilon}{2} \mu(P_j) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{l} \mu(P_j) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

Assim segue o resultado. □

Observação 4.0.14. Como dissemos antes, se T é um misturador topológico então T^{-1} é um misturador topológico. Logo a Proposição 4.0.13 aplica-se à Φ^{-1}.

Teorema 4.0.15. *(Transitividade por Cadeias) Seja $T \to X$ um homeomorfismo. Se T é um misturador topológico então seu push forward $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é Transitivo por Cadeias.*

Demonstração. Tomamos $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 4.0.13 existem $N \geq K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ e $\mu', \nu' \in \mathcal{P}(X)$ tais que

$$d(\mu, \mu') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(\Phi^{K_1}(\mu'), \delta_p) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d(\nu, \nu') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(\Phi^{-K_2}(\nu'), \delta_p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideramos então $\mu_0 = \mu, \mu_1 = \mu', \mu_2 = \Phi^{-K_2}(\nu'), \mu_3 = \nu$ e $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ e assim o resultado segue. □

Proposição 4.0.16. *Se $T : X \to X$ é um misturador topológico, então Φ é um misturador topológico.*

Demonstração. Notamos que dado $k \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$T^{(k)} := (T, ..., T) : X^k \to X^k$$

é um misturador topológico se e somente T é. Se nós tomamos $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ e $\varepsilon > 0$ e consideramos as bolas abertas $B(\mu, \varepsilon)$ e $B(\nu, \varepsilon)$ em $\mathcal{P}(X)$, então existem $\mu' = \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i} \in B(\mu, \varepsilon)$ e $\nu' = \sum_{i=1}^{k} b_i \delta_{y_i} \in B(\nu, \varepsilon)$. Seja $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência densa de funções contínuas em $C(X, [0, 1])$ usada para definir a distância fraca-$*$. Tomando os pontos $(x_1, ..., x_k), (y_1, ..., y_k) \in X^k$ e $\delta > 0$ tal que

$$d((u_1, ..., u_k), (v_1, ..., v_k)) < \delta \Rightarrow \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^j} \sum_{i=1}^{k} |f_j(u_i) - f_j(v_i)| \leq \varepsilon_0,$$

onde ε_0 é tal que $d(\mu, \mu') + \varepsilon_0 \leq \varepsilon$ e $d(\nu, \nu') + \varepsilon_0 \leq \varepsilon$.
Consideramos então as bolas abertas $B((x_1, ..., x_k), \delta)$ e $B((y_1, ..., y_k), \delta)$ em X^k. Como T^k um misturador, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow (T^{(k)})^n (B((x_1, ..., x_k), \delta)) \cap B((y_1, ..., y_k), \delta) \neq \emptyset.$$

Logo existe $(z_1, ..., z_k) \in B((x_1, ..., x_k), \delta)$, tal que $(T^{(k)})^n (z_1, ..., z_k)$ pertence à $B((y_1, ..., y_k), \delta)$. Por último consideramos a medida $\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{z_i}$. Como

$$d((x_1, ..., x_k), (z_1, ..., z_k)) < \delta \Rightarrow \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^j} \sum_{i=1}^{k} |f_j x_i) - f_j(z_i)| \leq \varepsilon_0,$$

e

$$d((T^n(z_1),...,T^n(z_k)),(y_1,...,y_k)) < \delta \Rightarrow \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^j} \sum_{i=1}^{k} |f_j(T(z_i)) - f_j(y_i)| \leq \varepsilon_0,$$

nós obtemos

$$d(\bar{\mu}, \mu) \leq \varepsilon, \text{ and } d(\nu, \Phi^n(\bar{\mu})) \leq \varepsilon.$$

Isto implica que $\Phi^n(B(\mu,\varepsilon)) \cap B(\nu,\varepsilon) \neq \emptyset$. □

Outro fato interessante, e que provaremos a seguir, é que se T é Lipschitz, então Φ Lipschitz.

Proposição 4.0.17. *Se $T : X \to X$ é C-Lipschitz, então $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é C-Lipschitz com respeito á métrica de Wasserstein . Se nós consideramos a métrica de Prokhorov ou a distância fraca-$*$ Φ é Lipschitz, mas C pode mudar.*

Demonstração. Começamos considerando a aplicação $(T,T) : X \times X \to X \times X$ definida por $(T,T)(x,y) = (T(x),T(y))$. Nós temos que (T,T) é continua, então o push-forward de (T,T) sobre $\mathcal{P}(X \times X)$, o qual denotamos por Ψ, é uma aplicação contínua. Logo se Π é uma medida sobre $X \times X$ nós temos, pelo Lema 2.2.1

$$\int_{X\times X} d^p(x,y) d(\Psi(\Pi)) = \int_{X\times X} d^p(T(x),T(y)) d\Pi.$$

Observamos então que se $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ e Π é um transporte paralelo de μ para ν, então $\Psi(\Pi)$ é um transporte paralelo de $\Phi(\mu)$ para $\Phi(\nu)$. Então, se T é C-Lipschitz nós temos

$$\begin{aligned}
W_p^p(\Phi(\mu),\Phi(\nu)) &= \inf_{\Pi'} \left\{ \int_{X\times X} d^p(x,y) d\Pi' : \Pi' \text{ é transp. de } \Phi(\mu) \text{ para } \Phi(\nu) \right\} \\
&= \inf_{\Pi} \left\{ \int_{X\times X} d^p(x,y) d(\Psi(\Pi)) : \Pi \text{ é transp. de } \mu \text{ para } \nu \right\} \\
&= \inf_{\Pi} \left\{ \int_{X\times X} d^p(T(x),T(y)) d(\Pi) : \Pi \text{ é transp. de } \mu \text{ para } \nu \right\} \\
&\leq C \inf_{\Pi} \left\{ \int_{X\times X} d^p(x,y) d(\Pi) : \Pi \text{ é transp. de } \mu \text{ para } \nu \right\} \\
&= C W_p^p(\mu,\nu).
\end{aligned}$$

Sendo que a métrica de Prokhorov e a métrica fraca-$*$ são equivalentes à métrica de Wasserstein, o resultado segue. □

Observação 4.0.18. Para uma consulta sobre a equivalência entre as normas em $\mathcal{P}(X)$ ver [8].

No que segue nós assumiremos que T é um homeomorfismo cujos pontos periódicos são densos em X, isto é: dado $\delta > 0$, existe um ponto $p \in X$ de período K, tal que sua órbita é $\delta-$densa. Nós também podemos falar a respeito de medidas periódicas, isto é, medidas que são pontos periódicos da dinâmica Φ.

Proposição 4.0.19. *Seja $T : X \to X$ um homeomorfismo com pontos periódicos densos, então os pontos periódicos de Φ são densos em $\mathcal{P}(X)$.*

Demonstração. Para esta demonstração usaremos a métrica fraca-$*$. Dada uma medida qualquer $\mu \in \mathcal{P}(X)$, precisamos mostrar como ela pode ser aproximada por uma medida periódica. Tomamos $\varepsilon > 0$, logo existe n_0 tal que

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Usando a continuidade das g_i, existe $\delta = \delta(n_0, \varepsilon)$, tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(g_i(x), g_i(y)) < \varepsilon, \ \forall i \in \{1, ..., n_0\}.$$

Consideramos uma $\delta-$grade de X, $P = \{P_1, ..., P_K\}$, e tomamos uma órbita periódica em X, $\{p, T(p), ..., T^{N-1}(p)\}$, a qual é $\delta-$densa. Claramente, existe no mínimo um ponto da órbita em cada elemento P_i da grade (e então $K \geq N$). Vamos então renomear os pontos da órbita como segue: seja q_1 um ponto da órbita em P_1 (qualquer ponto da órbita pode ser escolhido); q_i algum ponto da órbita em P_i e assim seguimos até $q_N \in P_N$. Então definimos a medida

$$\mu' = \sum_{i=1}^{N} \mu(P_i)\delta_{q_i}.$$

Então nós temos que

$$\begin{aligned}
d(\mu, \mu') &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \int_X g_i(x) d\mu - \int_X g_i(x) d\mu' \Big| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \sum_{j=1}^{K} \int_{P_j} (g_i(x) - g_i(q_j)) d\mu \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{K} \int_{P_j} |g_i(x) - g_i(q_j)| d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{K} \int_{P_j} |g_i(x) - g_i(q_j)| d\mu + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{K} \int_{P_j} |g_i(x) - g_i(q_j)| d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{K} \varepsilon \mu(P_j) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{K} \varepsilon \mu(P_j) < 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

Onde a última desigualdade vem do fato $\mu(X) = \sum_{j=1}^{K} \mu(P_j) = 1$ $\square$

Definição 4.0.20. Seja $T : X \to X$ um homeomorfismo de um espaço métrico compacto. Dizemos que T é equicontínuo se a sequência de iteradas de T, $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é uma sequência equicontínua de homeomorfismos.

Proposição 4.0.21. *Se T é equicontinua, então Φ é equicontinua.*

Demonstração. Suponhamos T equicontínua e consideramos a sequência $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tomamos $\varepsilon > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T^n(x), T^n(y)) < \varepsilon.$$

Considerando a métrica de Prokhorov nós temos que

$$d_P(\mu, \nu) < \delta \Rightarrow d_P(\Phi^n(\mu), \Phi^n(\nu)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para ver isto suponhamos que $d_P(\mu, \nu) < \delta$ e notamos que

$$T^{-n}(A)_\delta \subset T^{-n}(A_\varepsilon),$$

onde $A_\gamma = \{x \in X : d(x, A) < \gamma\}$, para qualquer $A \subset X$. De fato, se $x \in T^{-n}(A)_\delta$, então existe $z \in T^{-n}(A)$ tal que $d(x, z) < \delta$, mas isto implica $d(T^n(x), T^n(z)) < \varepsilon$. Como $z \in T^{-n}(A)$, $T^n(z) \in A$, então $T^n(x) \in A_\varepsilon$, logo $x \in T^{-n}(A_\varepsilon)$. Então temos que

$$\Phi^n(\mu)(A) = \mu(T^{-n}(A)) \leq \nu(T^{-n}(A)_\delta) + \delta \leq \nu(T^{-n}(A_\varepsilon)) + \varepsilon = \Phi^n(\nu)(A_\varepsilon) + \varepsilon$$
$$\Phi^n(\nu)(A) = \nu(T^{-n}(A)) \leq \mu(T^{-n}(A)_\delta) + \delta \leq \mu(T^{-n}(A_\varepsilon)) + \varepsilon = \Phi^n(\mu)(A_\varepsilon) + \varepsilon,$$

e isto implica $d_P(\Phi^n(\mu), \Phi^n(\nu)) < \varepsilon$. $\square$

Capítulo 5

Conjuntos Limites

O objetivo deste capítulo é estudar alguns conjuntos limites da apliacação Φ e a relação destes conjuntos com os conjuntos limites de T.

5.1 Conjunto não-errante

Definição 5.1.1. Dado $p \in X$, dizemos que p é não-errante se para toda vizinhança U de p, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

Proposição 5.1.2. *Se $p \in X$ é não-errante, então δ_p é não-errante.*

Demonstração. Seja p não-errante. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(B_\varepsilon(p)) \cap B_\varepsilon(p)$, i.e., existe $q \in T^n(B_\varepsilon(p)) \cap B_\varepsilon(p)$. Agora tomamos δ_q e notamos que

$$d_P(\delta p, \delta q) \leq d(p, q) \Rightarrow \delta_q \in B_\varepsilon(\delta_p),$$

e como $q \in T^n(B_\varepsilon(p))$, existe $x \in B_\varepsilon(p)$, tal que $q = T^n(x)$. Então

$$\delta_q = \delta_{T^n(x)} = \Phi^n(\delta_x) \in \Phi^n(B_\varepsilon(\delta_p)).$$

Finalmente nós concluimos que $\delta_q \in B_\varepsilon(\delta_p) \cap \Phi^n(B_\varepsilon(\delta_p)) \neq \varnothing$. $\square$

5.2 ω-limite

Definição 5.2.1. Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Seja $x \in X$. Um ponto $y \in X$ é um ponto $\omega-$limite se existe uma sequência de números naturais $n_k \to \infty$ (quando $k \to \infty$) tal quet $T^{n_k}(x) \to y$. O conjunto $\omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos $\omega-$limite.

Proposição 5.2.2. *Se $q \in \omega(p)$, então $\delta_q \in \omega(\delta_p)$.*

Demonstração. Nós precisamos mostrar que existe uma sequência $\{\Phi^{n_k}(\delta_p)\}_{n_k \in \mathbb{N}}$, tal que, $n_k \to \infty$ e $\Phi^{n_k}(\delta_p) \to \delta_q$. Sendo que $q \in \omega(p)$, existe uma sequência $\{T^{n_k}(p)\}_{n_k \in \mathbb{N}}$, tal que, $T^{n_k}(p) \to q$. Dado $g \in C(X)$ nós temos que

$$\Big| \int_X g(x) d(\Phi^{n_k}(\delta_p)) - \int_X g(x) d(\delta_q) \Big| = |g(T^{n_k}(p)) - g(q)|.$$

Como g é contínua e $T^{n_k}(p) \to q$, $g(T^{n_k}(p)) \to g(q)$. Assim obtemos que

$$\int_X g(x) d(\Phi^{n_k}(\delta_p)) \to \int_X g(x) d(\delta_q), \quad \forall g \in C(X).$$

Consequentemente

$$d(\Phi^{n_k}(\delta_p), \delta_q) \to 0.$$

□

Definição 5.2.3. Um ponto $x \in X$ é dito recorrente se $x \in \omega(x)$. O conjunto $\mathcal{R}(T)$ de pontos recorrentes é T-invariante.

Logo, pela Proposição 5.2.2, dado $x \in \mathcal{R}(T)$, temos que $\delta_x \in \omega(\delta_x)$. Então

$$x \in \mathcal{R}(T) \Rightarrow \delta_x \in \mathcal{R}(\Phi).$$

5.3 Atratores

5.3.1 Atrator pontual

Lema 5.3.1. *Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua tal que $T : X \to T(X)$ é um homeomorfismo . Se $\lim_{n \to \infty} T^n(x) = p$, para todo $x \in X$, então a sequência de aplicações $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a aplicação constante $F : X \to X$, $F(x) = p$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Consideramos a seguinte sequência de aplicações contínuas $G_n = T^n : X \to X$ e a aplicação $F : X \to X$ dada por $F(x) = p$ para todo $x \in X$. Notamos que $G_n(x) \to P$ para todo $x \in X$, i.e, G_n converge to F pointwise. Como X é compacto segue que $G_n \to F$, uniformemente. □

Proposição 5.3.2. *Seja $T : X \to X$ contínua tal que $T : X \to T(X)$ é um homeomorfismo. Se $\lim_{n \to \infty} T^n(x) = p$, $\forall x \in X$, então $\lim_{n \to \infty} \Phi^n(\mu) = \delta_p$, $\forall \mu \in \mathcal{P}(X)$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Nós precisamos mostrar mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(\Phi^n(\mu), \delta_p) < \varepsilon.$$

Agora pelo Lemma 5.3.1 vemos que dade $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(T^n(x), p) < \delta$, para todo $x \in X$ e $n > n_0$. Tomamos então $g \in C(X)$ e vemos que

$$\begin{aligned}\Big|\int_X g(x)d(\Phi^n(\mu)) - \int_X g(x)d\delta_p\Big| &= \Big|\int_X (g(T^n(x)) - g(p))d\mu\Big| \\ &\leq \int_X |(g(T^n(x)) - g(p))|d\mu \\ &\leq \sup_{x\in X} |(g(T^n(x)) - g(p))|.\end{aligned}$$

Como $g \in C(X)$ nós obtemos $\Big|\int_X g(x)d(\Phi^n(\mu)) - \int_X g(x)d\delta_p\Big| \to 0$, para todo $g \in C(X)$. Logo $d(\Phi^n(\mu), \delta_p) \to 0$. □

Observação 5.3.3. A demonstração acima, como a de outros resultados ficariam menos extensas se usassemos ideias probabilísticas, mas devido ao nosso objetivo neste trabalho de estudarmos propriedades dinâmicas do push forward, nossas demonstrações são em sua maioria feitas com ideias de dinâmica.

5.3.2 Atrator Uniforme

Nesta seção definiremos o conceito de atrator uniforme e veremos o que acontece com a dinâmica Φ quando T possui um atrator uniforme.

Definição 5.3.4. Seja $\Lambda \subseteq X$ conjunto compacto tal que $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$. Nós dizemos que Λ é atrator uniforme para T, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(T^n(x), \Lambda) < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Para provarmos que se T possui um atrator uniforme então Φ também precisamos de algumas lemas.

Lema 5.3.5. *Sejam $T : X \to X$ um homeomorfismo X em $T(X)$ e $A = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ denso em X. Então $T^n(A)$ é denso em T^nX, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, nós devemos mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $a_i \in A$ tal que $d(T^n(x), T^n(a_i)) < \varepsilon$. Sendo que T^n é uma aplicação contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(y, a_i) < \delta \Rightarrow d(T^n(y), T^n(a_i)) < \varepsilon.$$

Usando a densidade de A em X obtemos o desejado. □

Lema 5.3.6. *Se $\mu = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\delta_{a_i}$ e $\nu = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\delta_{b_i}$, então*

$$d_P(\nu, \mu) \leq \min\{d(a_i, b_i)\}.$$

Demonstração. Tomamos $\gamma > \min\{d(a_i, b_i)\}$ e $A \in \mathcal{B}(X)$. Notamos que

$$\exists a_i \in A \Rightarrow b_i \in A_\gamma, \text{ e } \exists b_i \in A \Rightarrow a_i \in A_\gamma.$$

para todo $A \in \mathcal{B}(X)$. Então, pela definição de d_P, nós concluimos que

$$d_P(\nu, \mu) \leq \min\{d(a_i, b_i)\}.$$

□

Teorema 5.3.7. *Seja $\Lambda \subseteq X$ um atrator uniforme para T. Dado*

$$\mathcal{D} := \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{q_i} : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \quad q_i \in \Lambda \ e \quad \alpha_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \ k \in \mathbb{N} \Big\},$$

então $\overline{\mathcal{D}}$ é um atrator uniforme. é um atrator uniforme para Φ.

Demonstração. Sabemos que se A é um conjunto enumerável denso em X então

$$\mathcal{A} = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{a_i} : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \quad a_i \in A \quad \text{e} \quad \alpha_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \Big\}$$

também é um conjunto enumerável denso em $P(X)$. Afirmamos então que

$$\lim_{n \to \infty} d(\Phi^n(\nu), \mathcal{D}) = 0,$$

uniformemente, para todo $\nu \in \mathcal{A}$. De fato, se nós tomamos $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(T^n(a_i), \Lambda) < \varepsilon, \quad \forall \ a_i \in A.$$

Dado $a_i \in A$, existe $q_i \in \Lambda$, tal que $d(T^n(a_i), q_i) < \varepsilon$. Logo se $\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{a_i}$ e nós consideramos $\nu' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{q_i}$, onde $d(T^n(a_i), q_i) < \varepsilon$, nós vemos que, pelo Lema 5.3.6,

$$d_P(\Phi^n(\nu), \nu') < \min\{d(T^n(a_i), q_i)\} < \max\{d(T^n(a_i), q_i)\} < \varepsilon.$$

Tomamos então $\mu \in P(X)$ e $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d_P(\Phi^n(\nu), \mathcal{D}) < \varepsilon, \ \forall \nu \in \mathcal{A},$$

então, usando a continuidade de Φ^n, temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$d_P(\mu, \nu) < \delta \Rightarrow d_P(\Phi^n(\mu), \Phi^n(\nu)) < \varepsilon.$$

Como $\mathcal{A}$ é denso em X, existe $\nu \in \mathcal{A}$, tal que $d_P(\nu, \mu) < \delta$. Finalmente nós obtemos

$$n > n_0 \Rightarrow d_P(\Phi^n(\mu), \mathcal{D}) \leq d_P(\Phi^n(\nu), \mathcal{D}) + d_P(\Phi^n(\mu), \Phi^n(\nu)) < 2\varepsilon.$$

Note que a desigualdade acima é independente de $\mu \in P(X)$. □

Exemplo 5.3.8. Seja $X = [0,1] \times [0,1]$ e $T : X \to X$ dada por $T(x,y) = (x, (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x)y)$, se $\Lambda = \{(x,y) : x = 1, \text{ ou } y = 0\}$, então $\overline{\Lambda}$ é um atrator uniforme para T. De fato, $(x,y) \in X$,

$$d(T^n(x,y), \Lambda) = d((x, \frac{(1+x)^n}{2^n}y), \Lambda) = \min\{1-x, \frac{(1+x)^n}{2^n}y\}.$$

Se tomamos $0 < \varepsilon < 1$, temos que $x \leq \varepsilon$ ou $\varepsilon < x$. Se $\varepsilon < x$, então $1 - x < \varepsilon$. Se $x \leq \varepsilon$, vemos que

$$\frac{(1+x)^n}{2^n} \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{2^n} \to 0.$$

Isto implica a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{(1+x)^n}{2^n}y \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{2^n}y < \varepsilon.$$

Logo obtemos que

$$n > n_0 \Rightarrow d(T^n(x,y), \Lambda) = \min\{1-x, \frac{(1+x)^n}{2^n}y\} < \varepsilon.$$

Por outro lado, se aplicamos Teorema 5.3.7, obtemos que se

$$\begin{aligned}\mathcal{D} := \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{(x_i,y_i)} : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \\ (x_i, y_i) = (x_i, 0) \text{ or } (x_i, y_i) = (1, y_i), \text{ e } \alpha_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \Big\},\end{aligned}$$

então $\overline{\mathcal{D}}$ é um atrator uniforme para Φ.

Exemplo 5.3.9. (Um atrator hiperbólico uniforme) Seja $\mathcal{T} = S^1 \times D^2$ o toro sólido, onde $S^1 = [0,1] \mod 1$ e $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Fixamos $\lambda \in (0\frac{1}{2})$ e definimos $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ por

$$T(\phi, x, y) = (2\phi, \lambda x + \frac{1}{2}\cos(2\pi\phi), \lambda y + \frac{1}{2}\sin(2\pi\phi)).$$

A aplicação T é injetiva, dilata por fator de ordem 2 na direção S^1, contrai por um fator de ordem λ na direção D^2, e enrola a imagem duas vezes dentro de $\mathcal{T}$.

A imagem $F(\mathcal{T})$ está contida no interior de $int(\mathcal{T})$ e $F^{n+1}(\mathcal{T}) \subset int(F^n(\mathcal{T}))$. Uma fatia $F(\mathcal{T}) \cap \{\phi = c\}$ consiste em dois discos de raio λ centrados em pontos opostos pelo diâmetro a uma dsitância de $\frac{1}{2}$ do centro da fatia. Uma fatia $F^n(\mathcal{T}) \cap \{\phi = c\}$ consiste em 2^n discos de raio λ^n: cada dois dentro de 2^{n-1} discos de $F^{n-1}(\mathcal{T}) \cap \{\phi = c\}$.

O conjunto $S = \cap_{n=0}^{\infty} F^n(\mathcal{T})$ é chamado de *solenóide*. Ele é um subconjunto fechado e T-invariante $\mathcal{T}$, sobre o qual T é bijetiva. O solenóide é um atrator uniforme para T. Mais ainda S é um conjunto hiperbólico (para a definição de conjunto hiperbólico ver [15]), então S é dito um atrator hiperbólico uniforme.

Então, pelo Teorema 5.3.7,

$$\overline{\mathcal{D}} := \overline{\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{q_i} : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \quad q_i \in S \quad \text{e} \quad \alpha_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \right\}},$$

é um atrator uniforme para Φ.

Capítulo 6

Entropia Topológica

Neste capítulo estudaremos a entropia da aplicação Φ e a relação desta entropia com a entropia de T. Veremos que se $h(T) > 0$, então $h(\Phi) = \infty$.

6.1 O caso $h(\Phi) = 0$

Nesta seção mostraremos que a existência de um atrator pontual para T implica $h(\Phi) = 0$. Para tanto nós relembramos aqui as definições básicas necessárias para o cálculo da entropia de uma aplicação.

Definição 6.1.1. Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Um subconjunto $A \subset X$ é dito $(n, \varepsilon)-$separado se quaisquer dois pontos distintos x, y satisfazem

$$d_n(x, y) := \max_{0 \leq k \leq n-1} d(T^k(x), T^k(y)).$$

Cada d_n é uma métrica para X, mais ainda as métricas d_i são todas equivalentes. Um conjunto $A \subset X$ é dito (n, ε)-separado, se para todo $x, y \in A$, tem-se $d_n(x, y) \geq \varepsilon$.

Lema 6.1.2. *Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua tal que $T : X \to T(X)$ é um homeomorfismo . Se $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = p$, para todo $x \in X$, então $h(T) = 0$.*

Demonstração. Notamos que se $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = p$, pelo Lema 5.3.1, temos que a sequência de aplicações $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a aplicação constante $G \equiv p$. Tomamos então $A \subset X$ $(N_\varepsilon, \varepsilon)$-separado com cardinalidade máxima e observamos que A é (n, ε)-separado para todo $n \geq N_\varepsilon$. Mais ainda, se B é (n, ε)-separado, a cardinalidade de B é no máximo igual á caridnalidade de A. Logo

$$h_\varepsilon(T) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log \ sep(T, n, \varepsilon) = 0,$$

o que implica

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(T) = 0.$$

$\square$

Se nós aplicamos a Proposição 5.3.2 e depois aplicamos o Lema 5.3.1 obtemos o seguinte:

Teorema 6.1.3. *Se* $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = p$*, então* $h(\Phi) = 0$*, onde* $h(\Phi)$ *é a entropia topológica de* Φ*.*

Corolário 6.1.4. *Se* T *is C-Lipschitz com* $C < 1$*, então* $h(\Phi) = 0$*.*

Demonstração. Como T é C-Lipschitz, então Φ é C-Lipschitz, com $C < 1$. Logo temos que $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\mu) = \delta_p$, onde p é o ponto fixo para T, para todo $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Logo, pelo Lema 5.3.1 $h(\Phi) = 0$. $\square$

Exemplo 6.1.5. Consideramos a aplicação $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $T(x) = x+\alpha$, α irracional, então $h(\Phi) = 0$. De fato, como T é uma isometria nós temos que Φ é também isometria , então $h(\Phi) = 0$.

6.2 O caso $h(\Phi) = \infty$

Nesta seção nós veremos que o fato de a aplicação T ter entropia positiva implica entropia infinita para o seu push forward.

Definição 6.2.1. O conjunto de medidas de probabilidade com suporte finito é dado pela união $\mathcal{D} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{D}_n$, onde

$$\mathcal{D}_n = \Big\{\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i\delta_{x_i} : (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ e } x_i \in X\Big\}.$$

Para um $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ fixado tal que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ nós definimos o conjunto

$$\mathcal{D}_n(p) = \Big\{\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i\delta_{x_i} : x_i \in X\Big\}.$$

É possível obter uma cópia do espaço X dentro de $\mathcal{P}(X)$ como segue:

$$j : X \to \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}(X)$$

$$x \mapsto \delta_x.$$

Se consideramos $\mathcal{D}_1$, então $\Phi(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$, isto é, $\mathcal{D}_1$ é Φ-invariante.

Lema 6.2.2. *(Ver [6]e [8]) A aplicação* j *é um homeomorfismo sobre* $\mathcal{D}_1$*. Se nós consideramos a distância de Wasserstein ,* j *é uma isometria.*

Lema 6.2.3. *Seja $S : Z \to Z$ uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto. Se $F \subset Z$ é um subconjunto fechado de X e invariante por S, então*

$$h(S|_F) \leq h(S).$$

Demonstração. Ver [15]. □

Proposição 6.2.4. *$h(\Phi) \geq h(T)$.*

Demonstração. Nós sabemos que $j \circ T(x) = \delta_{T(x)} = \Phi \circ j(x)$, i.e,

$$j \circ T = \Phi \circ j.$$

Logo T é topologicamente conjugada á Φ restrita ao conjunto $\mathcal{D}_1$, o que implica

$$h(\Phi) \geq h(\Phi|_{\mathcal{D}_1}) = h(T),$$

pois $\mathcal{D}_1$ é Φ-invariante. □

Nós temos uma outra importante relação entre $h(T)$ e $h(\Phi)$. Para provar esta relação precisamos de alguns resultados, os quais omitiremos as demonstrações.

Lema 6.2.5. *(Goodwin, 1971)Sejam X e Y espaços Haussdorf e sejam $T : X \to X$ e $S : Y \to Y$ aplicações contínuas. Então*

$$h(T \times S) = h(T) + h(S),$$

onde h denota a entropia topológica e $T \times S : X \times Y \to X \times Y$ é definida por

$$(T \times S)(x, y) = (T(x), S(y)), \text{ para } (x, y) \in X \times Y.$$

Teorema 6.2.6. *Se $h(T) > 0$ então $h(\Phi) = \infty$.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}^n$, tais que $p = (p_1, .., p_n)$ e $p_i = \dfrac{2^{i-1}}{2^n - 1}$. Notamos então que $\mathcal{D}_n(p)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{P}(X)$, sendo que

$$\mathcal{D}_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathcal{D}_1.$$

Consideramos a aplicação $\delta_p : X^n \to \mathcal{D}_n(p)$ definida por

$$\delta_p(x_1, ..., x_n) := \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}.$$

Também considarmos a aplicação $T^{(n)} : X^n \to X^n$ dada por

$$T^{(n)}(x_1, .., x_n) := (T(x_1), ..., T(x_n))$$

Não é difícil de ver que δ_p e $T^{(n)}$ são contínuas, e elas satisfazem

$$\Phi \circ \delta_p = \delta_p \circ T^{(n)}.$$

Afirmamos que δ_p é injetiva. De fato, se $\delta_p(x) = \delta_p(y)$ e $y \neq x$, então

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}\Big)(A) = \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{y_i}\Big)(A), \text{ para todo aberto } A \subset X.$$

Logo existe k tal que $x_k \neq y_k$. Seja A um conjunto aberto tal que $x_k \in A$ mas $y_k \notin A$ (estamos assumindo X Haussdorf). Consideramos então o conjunto de pontos x_i que estão em A, o qual denotaremos por $\{x_{i_1}, ..., x_{i_l}\} \subset \{x_1, ..., x_n\}$. Usando a mesma idéia consideramos o conjunto de pontos $y_j \in A$, seja $\{y_{j_1}, ..., y_{j_s}\} \subset \{y_1, ..., y_n\}$ este conjunto (observe que $y_k \notin \{y_{j_1}, ..., y_{j_s}\}$). Então nós temos que

$$\sum_{t=1}^{l} \frac{2^{i_t - 1}}{2^n - 1} = \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}\Big)(A) = \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{y_i}\Big)(A) = \sum_{m=1}^{s} \frac{2^{j_m - 1}}{2^n - 1},$$

e isto implica

$$\sum_{t=1}^{l} 2^{i_t - 1} = \alpha = \sum_{m=1, j_m \neq k+1}^{s} 2^{j_m - 1}.$$

Logo temos que $\alpha \in \mathbb{N}$ tem duas representações diferentes em base 2, o que é uma contradição, e assim δ_p injetiva. Claramente δ_p é sobrejetiva, e então δ_p é uma bijeção. Como δ_p é contínua e X^n e $\mathcal{D}_n(p)$ são compactos (pois X é compacto e $\mathcal{D}_n(p)$ é um subconjunto fechado de um conjunto fechado de um conjunto compacto) temos que δ_p é um homeomorfismo. Como $\Phi \circ \delta_p = \delta_p \circ T^{(n)}$ e δ_p é um homeomorfismo, δ_p é uma conjugação. então

$$nh(T) = h(T^{(n)}) = h(\Phi|_{\mathcal{D}_n(p)}) \leq h(\Phi),$$

como $h(T) > 0$, nós obtemos $h(\Phi) = \infty$. □

Corolário 6.2.7. *Se T é contínua e $h(T) > 0$ então $h(\Phi) = \infty$.*

Demonstração. Na demonstração acima não usamos o fato de T ser um homeomorfismo. Com isto obtemos um homeomorfismo $\delta_p : X^n \to \mathcal{D}_n(p)$ tal que $\Phi \circ \delta_p = \delta_p \circ T^{(n)}$. Isto implica $h(T^{(n)}) \geq h(\Phi|_{\mathcal{D}_n(p)})$. Por outro lado temos que $\delta_p^{-1} \circ \Phi = T^{(n)} \delta_p^{-1}$. E disto segue $h(T^{(n)}) \leq h(\Phi|_{\mathcal{D}_n(p)})$. Finalmente obtemos

$$nh(T) = h(T^{(n)}) = h(\Phi|_{\mathcal{D}_n(p)}) \leq h(\Phi).$$

□

Exemplo 6.2.8. Seja $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e considere a aplicação $\phi_d : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$\phi_d(x) = dx \bmod 1.$$

Sabemos que $h(\phi) = \log d$. Então se Φ é o push-forward de ϕ_d, segue que $h(\Phi) = \infty$.

Capítulo 7

Teoria Ergódica

O objetivo deste capítulo é estudar as propriedades ergódicas da aplicação push forward. Mais uma vez tentaremos ver as propriedades que passam de T para o seu push forward Φ. Inicialmente construiremos algumas medidas que são Φ-invariantes.

Seja $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ o push forward de uma aplicação contínua $T : X \to X$. Tomamos então uma medida de probabilidade $\Pi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ $\Phi-$invariante, isto é,

$$\Pi(\Phi^{-1}(\mathcal{A})) = \Pi(\mathcal{A}), \ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(X)),$$

onde $\mathcal{B}(\mathcal{P}(X))$ é o conjunto de Borelianos $\mathcal{P}(X)$. Podemos então considerar $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ como sendo o conjunto de medidas invariantes para Φ. Pelo *Teorema de Krylov-Bogolubov* (ver [15]), temos que $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ é não-vazio, pois $\mathcal{P}(X)$ é compacto e Φ é uma aplicação contínua.

Exemplo 7.0.9. Seja $x \in X$ tal que $T(x) = x$. Então temos que $\Phi(\delta_x) = \delta_x$ e $\delta_x \in \mathcal{M}(T, X)$. Agora considermos a medida dada por δ_{δ_x}. Então vemos que

$$\delta_{\delta_x}(\Phi^{-1}(\mathcal{A})) = \delta_{\delta_x}(\mathcal{A}),$$

isto é, $\delta_{\delta_x} \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$. De fato, se $\mu \in \mathcal{M}(T, X)$ então $\delta_\mu \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$. Então nós podemos identificar $\mathcal{M}(T, X)$ como um subconjunto de $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$.

Outro exemplo de medida invariante para Φ pode ser obtido se nós supomos que T é periodica de período K, isto é, $T^K(x) = x$ para todo $x \in X$. Então nós temos que

$$T^K(x) = x \ \forall x \in X \Rightarrow \Phi^K(\mu) = \mu \ \forall \mu \in \mathcal{P}(X).$$

Definimos então $\Pi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ por

$$\Pi = \frac{1}{K}(\delta_\mu + ... + \delta_{\Phi^{K-1}(\mu)}).$$

Logo temos que Π é Φ-invariante. Logo obtemos uma medida em $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ que não é induzida por uma medida em $\mathcal{M}(T, X)$.

O teorema abaixo, em geral, é enunciado para $T : X \to X$ aplicação contínua e X espaço métrico compacto. Como o nosso objetivo é estudar $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, e esta satisfaz a hipótese de continuidade e $\mathcal{P}(X)$ a de compacidade, enunciaremos o *Teorema Ergódico de Birkhoff* para este caso.

Teorema 7.0.10. *(Teorema Ergódico de Birkhoff) Seja Π uma medida Φ-invariante e $\Psi : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$, tal que $\Psi \in L^1(\mathcal{P}(X), \Pi)$. Então o limite*

$$\overline{\Psi}(\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(\Phi^k(\nu))$$

existe para quase todo $\nu \in \mathcal{P}(X)$, é Π-integrável e Φ-invariante e

$$\int_{\mathcal{P}(X)} \overline{\Psi}(\nu) d\Pi(\nu) = \int_{\mathcal{P}(X)} \Psi(\nu) d\Pi(\nu)$$

Demonstração. Ver [15]. □

Definição 7.0.11. Dizemos que uma medida $\Pi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, Φ-invariante é ergódica se para todo $\psi \in L^1(\mathcal{P}(X), \mathcal{B}, \mu)$ o limite

$$\overline{\psi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\Phi^k(\nu)),$$

é constante Π-q.t.p. $\nu \in \mathcal{P}(X)$.

Proposição 7.0.12. *São equivalentes*

(i) Π *é ergodica,*
(ii) $\Phi^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \Rightarrow \Pi(\mathcal{A}) = 0$ *or* $\Pi(\mathcal{A}) = 1$,
(iii) $\psi \in L^1(\mathcal{P}(X), \mathcal{B}, \Pi)$ *e* $\psi \circ \Phi = \psi \Rightarrow \psi$ *é constante* Π-*q.t.p.* $\nu \in \mathcal{P}(X)$.

Demonstração. Ver [15]. □

Exemplo 7.0.13. *(Um caso particular)* Dada $\varphi \in C^0(X, \mathbb{R})$, definimos

$$\Psi(\nu) = \int_X \varphi(x) d\nu(x).$$

Então dada $\Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ o limite

$$\overline{\Psi}(\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(\Phi^k(\nu)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X \varphi(T^k(x)) d\nu(x),$$

existe Π-q.t.p. $\nu \in \mathcal{P}(X)$, e

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}(X)} \Psi(\nu) d\Pi(\nu) &= \int_{\mathcal{P}(X)} \overline{\Psi}(\nu) d\Pi(\nu) = \int_{\mathcal{P}(X)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(\Phi^k(\nu)) d\Pi(\nu) \\ &= \int_{\mathcal{P}(X)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X \varphi(T^k(x)) d\nu(x) d\Pi(\nu),\end{aligned}$$

mas

$$\int_{\mathcal{P}(X)} \Psi(\nu) d\Pi(\nu) = \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X \varphi(x) d\nu(x) d\Pi(\nu),$$

assim

$$\int_{\mathcal{P}(X)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X \varphi(T^k(x)) d\nu(x) d\Pi(\nu) = \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X \varphi(x) d\nu(x) d\Pi(\nu).$$

7.1 Medidas Definidas Dinamicamente

Seja $\nu \in \mathcal{P}(X)$ e considere a sequencia $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$\Pi_n(\mathcal{A}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\Phi^k(\nu)}(\mathcal{A}), \ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(X)).$$

Observe que $\Pi_n \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{P}(X)$ é um conjunto compacto, existe uma subsequência $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $\{\Pi_{n_j}\}_{n_j\in\mathbb{N}}$, que é convergente. Seja Π_ν o limite de $\{\Pi_{n_j}\}_{n_j\in\mathbb{N}}$, então temos o seguinte:

Lema 7.1.1. *(Outra medida Φ-invariante) Π_ν é uma medida Φ-invariante.*

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}\int (\psi(\Phi) - \psi) d\Pi_\nu &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} [\psi(\Phi^{k+1}(\nu)) - \psi(\Phi^k(\nu))] \\ &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} [\psi(\Phi^{n_j}(\nu)) - \psi(\nu)] = 0,\end{aligned}$$

pois $\mathcal{P}(X)$ é compacto e $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ é contínua. □

Observação 7.1.2. Se existe $p \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = p$ para todo $x \in X$, então $\Pi_\nu = \Pi_\mu$ para todo $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$. Neste caso Φ é ergodica com respeito à medida Π_ν.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}(X))$ um conjunto aberto. então temos que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = p, \ \forall x \in X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Phi^n(\mu) = \delta_p, \ \forall \mu \in \mathcal{P}(X).$$

Logo se $\delta_p \in \mathcal{A}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow \Phi^n(\mu) \in \mathcal{A}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ and } \forall \mu \in \mathcal{P}(X).$$

Então

$$\Pi_\mu(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\Phi^k(\mu)}(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-N}{n},$$

por outro lado

$$\Pi_{\delta_p}(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\Phi^k(\delta_p)}(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-N}{n}.$$

Se $\delta_p \notin \mathcal{A}$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow \Phi^n(\mu) \notin \mathcal{A}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ and } \forall \mu \in \mathcal{P}(X),$$

então $\Pi_\mu(\mathcal{A}) = 0 = \Pi_{\delta_p}(\mathcal{A})$. Consequentemente $\Pi_\mu(\mathcal{A}) = \Pi_{\delta_p}(\mathcal{A})$, para todo aberto $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}(X))$. Como Π_μ e Π_{δ_p} são medidas de Borel nós obtemos que $\Pi_\mu = \Pi_{\delta_p}$.

Lembramos que Φ é dita ergódica, com respeito a uma medida Π_ν, se e somente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{X}_A(\Phi^k(\nu)) = \frac{\Pi_\nu(\mathcal{A})}{\Pi_\nu(\mathcal{P}(X))}.$$

Como a igualdade é verdadeira nós concluimos que Φ é ergódica. $\square$

7.2 Medidas definidas por conjuntos

Considere $\nu \in \mathcal{P}(X)$ e $A \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\nu(A) > 0$. Definimos então o seguinte operador linear: $\Lambda : C^0(\mathcal{P}(X)) \to \mathbb{R}$, onde

$$\Lambda(\psi) = \frac{1}{\nu(A)} \int_A \psi(\delta_x) d\nu(x).$$

Note que Λ é operador linear contínuo e positivo sobre $C^0(\mathcal{P}(X))$ tal que $\Lambda(1) = 1$. Pelo Teorema de Representação de Riesz existe $\Pi_A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ tal que

$$\Lambda(\psi) = \frac{1}{\nu(A)} \int_A \psi(\delta_x) d\nu(x) = \int_{\mathcal{P}(X)} \psi(\mu) d\Pi(\mu).$$

Observação 7.2.1. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(X))$, temos que

$$\Pi_A(\mathcal{U}) = \frac{1}{\nu(A)} \int_A \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\delta_x) d\nu(x) = \frac{1}{\nu(A)} \nu(\delta^{-1}(\mathcal{U}) \cap A).$$

Logo,

$$\operatorname{supp}(\Pi_A) = \delta(\operatorname{supp}(\nu) \cap A).$$

Lema 7.2.2. *Se ν é T-invariante, então Π_X é Φ-invariante.*

Demonstração. Notamos que

$$\begin{aligned}\Lambda(\psi \circ \Phi) &= \int_X (\psi \circ \Phi)(\delta_x) d\nu(x) = \int_X \psi(\delta_{T(x)}) d\nu(x) \\ &= \int_X \psi(\delta_x) d\Phi(\nu)(x) = \int_X \psi(\delta_x) d\nu(x) = \Lambda(\psi),\end{aligned}$$

e que isto implica $\Pi_X = \Pi_X(\Phi^{-1})$.

□

Observação 7.2.3. Seja $J : X \to \mathcal{P}(X)$ uma aplicação definida por $J(x) = \delta_x$. Então temos que

$$\Pi_X = J_\sharp \nu,$$

onde $J_\sharp \nu$ é o push forward da medida ν pela aplicação J.

Lema 7.2.4. *$J_\sharp \nu$ é Φ-invariante se e só se ν é T-invariante.*

Demonstração. Note que dado $\mathcal{A}$ boreliano de $\mathcal{P}(X)$, temos

$$\begin{aligned}\Phi_\sharp(J_\sharp \nu)(\mathcal{A}) &= J_\sharp \nu(\Phi^{-1}(\mathcal{A})) = \nu(J^{-1} \circ (T_\sharp)^{-1}(\mathcal{A})) \\ &= \nu((T_\sharp \circ J)^{-1}(\mathcal{A})) = \nu(T^{-1} \circ J^{-1}(\mathcal{A})) \\ &= T_\sharp \nu(J^{-1}(\mathcal{A})) = T_\sharp J_\sharp \nu(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Assim, se ν é T-invariante então $T_\sharp J_\sharp \nu(\mathcal{A}) = J_\sharp \nu(\mathcal{A})$, e isto implica $J_\sharp \nu$ Φ-invariante. Por outro lado se $J_\sharp \nu$ é Φ-invariante, então $T_\sharp J_\sharp \nu(\mathcal{A}) = J_\sharp \nu(\mathcal{A})$, e pela definição da aplicação J obtemos que ν é T-invariante. □

Lema 7.2.5. *$J_\sharp \nu$ é ergódica se e somente se ν é ergódica.*

Demonstração. Suponhamos que ν seja ergódica. Lembramos então que

$$\Lambda(\psi) = \int_X \psi(\delta_x) d\nu(x).$$

Considere $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(X))$, tal que $\Phi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, e observe que

$$\Pi_X(\mathcal{U}) = \Lambda(\mathcal{X}_{\mathcal{U}}) = \int_X \mathcal{X}_{\mathcal{U}}(\delta_x) d\nu(x) = \nu(\delta(X) \cap \mathcal{U}),$$

como $\Phi(j(X) \cap \mathcal{U}) = j(X) \cap \mathcal{U}$, temos que

$$\nu(j(X) \cap \mathcal{U}) = 0 \text{ ou } \nu(\delta(X) \cap \mathcal{U}) = 1,$$

e isto implica $\Pi_X(\mathcal{U}) = 0$ ou $\Pi_X(\mathcal{U}) = 1$.
Agora suponhamos que $j_\sharp \nu$ seja ergódica. Se ν não é ergódica, então existem $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}(T, X)$ and $t \in (0,1)$ tais que$\nu = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$. Assim temos que

$$\int_X \psi(\delta_x) d\nu(x) = t \int_X \psi(\delta_x) d\nu_1(x) + (1-t) \int_X \psi(\delta_x) d\nu_2(x),$$

e disto decorre que $J_\sharp \nu = t\delta_\sharp \nu_1 + (1-t)\delta_\sharp \nu_2$, contradizendo o fato de $j_\sharp \nu$ ser ergódica. □

Definição 7.2.6. Seja $\Psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ uma aplicação contínua. Nós dizemos que Ψ é atrativo se existe $\nu \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \Psi^n(\mu) = \nu$ para todo $\mu \in \mathcal{P}(X)$.

Note que se Φ é atrativa e é o push forward de um homeomorfismo T, então teremos que $\nu = \delta_p$ where $p \in X$ é o ponto fixo de T. Mais ainda, T terá apenas um ponto fixo.

Observação 7.2.7. Se Φ é atrativa, então T tem apenas uma medida invariante. De fato, se $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\mu) = \nu \ \forall \mu \in \mathcal{P}(X)$, então

$$\Phi(\nu) = \Phi(\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\nu)) = \lim_{n\to\infty} \Phi^{n+1}(\nu) = \nu.$$

Então ν é T-invariante. Se ν' é T-invariante então

$$\nu' = \lim_{n\to\infty} \Phi^n(\nu') = \nu,$$

e assim obtemos a unicidade. Como ν é única, T é ergódica.

Observação 7.2.8. Seja $T : X \to X$ contínua com um ponto fixo p, isto é, $T(p) = p$. Se Φ é atrativa, existe $\nu \in \mathcal{P}(X)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\mu) = \nu, \ \ \forall \mu \in \mathcal{P}(X).$$

Então vemos que

$$\delta_p = \lim_{n\to\infty} \Phi^n(\delta_p) = \nu \Rightarrow \nu = \delta_p.$$

Agora se tomamos $x \in X$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\delta_x) = \delta_p \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} T^n(x) = p, \ \forall x \in X.$$

Assim concluimos que T não pode ser um homeomorfismo, logo temos o seguinte:

Proposição 7.2.9. *Se $T : X \to X$ é um homeomorfismo, então $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ não é atrativa.*

Proposição 7.2.10. *Se $T : X \to X$ é uma contração e T é unicamente ergódica, então $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é atrativa.*

Demonstração. Apenas observamos que toda contração em um conjunto compacto tem apenas um ponto fixo. □

Exemplo 7.2.11. Consideramos $X = S^1$ e $T : S^1 \to S^1$ uma rotação irracional. Temos que T é unicamente ergódica. Considere δ_x, com $x \in S^1$ tal que $\omega(x) = S^1$ (isto é possível porque T é uma rotação irracional). Então temos que $\Phi(\nu) = \delta_{T(x)}$. Se Φ é atrativa, existe $\mu \in \mathcal{P}(S^1)$, tal que, $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\nu) = \mu$ para todo $\nu \in \mathcal{P}(S^1)$. Assim

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(\delta_x) = \lim_{n\to\infty} \delta_{T^n(x)} = \mu.$$

Mas, se p é um ponto fixo de T, a última igualdade implica que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = p,$$

o que é um absurdo.

7.3 A Estrutura de $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$

Para estudarmos o conjunto $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ iremos considerar uma espécie de projeção sobre o conjunto $\mathcal{M}(T, X)$. Com isto teremos um meio de relacionar as propriedades ergódicas de T com o seu push forward Φ. Consideramos a aplicação $p : \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X)) \to \mathcal{M}(T, X)$, onde nós temos que

$$\int_X f(x)dp(\Pi)(x) := \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X f(x)d\nu(x)d\Pi(\nu).$$

Devemos mostrar que p está bem definida, isto é, dada $\Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$, $p(\Pi) \in \mathcal{M}(T, X)$. De fato, se $\Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X)$ então

$$\begin{aligned}\int_X f(x)d\Phi(p(\Pi)) &= \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X (f \circ T)(x)d\nu(x)d\Pi(\nu) = \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X f(x)d\Phi(\nu)d\Pi(\nu) \\ &= \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X f(x)d\nu d(\Pi \circ \Phi^{-1})(\nu) = \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X f(x)d\nu d\Pi(\nu) \\ &= \int_X f(x)dp(\Pi).\end{aligned}$$

Assim concluimos que $p(\Pi) \in \mathcal{M}(T, X)$. Note que se $f = \mathcal{X}_A$, onde $A \in \mathcal{B}(X)$, temos

$$p(\Pi)(A) = \int_X \mathcal{X}_A(x) dp(\Pi)(x) = \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X \mathcal{X}_A(x) d\nu(x) d\Pi(\nu)$$
$$= \int_{\mathcal{P}(X)} \nu(A) d\Pi(\nu).$$

Lema 7.3.1. *A aplicação p é contínua.*

Demonstração. Começamos observando que dado $f \in C(X, \mathbb{R})$, a aplicação $\Psi : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi(\mu) = \int_X f(x) d\mu,$$

é contínua e limitada. Suponhamos que $\Pi_n \to \Pi$ na topologia fraca. Então temos que

$$\int_X f(x) dp(\Pi_n)(x) = \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X f(x) d\nu(x) d\Pi_n(\nu)$$
$$= \int_{\mathcal{P}(X)} \Psi(\mu) d\Pi_n(\mu) \to \int_{\mathcal{P}(X)} \Psi(\mu) d\Pi(\mu)$$
$$= \int_X f(x) dp(\Pi)(x).$$

Logo $p(\Pi_n) \to p(\Pi)$. □

Lema 7.3.2. *A aplicação p é uma contração se considerarmos a métrica de Wasserstein sobre $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ e sobre $\mathcal{M}(T, X)$.*

Demonstração. Por [6], temos que dados X espaço métrico compacto, $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, então

$$W_p(\mu, \nu) = \sup_{f(x)+g(y) \leq d^p(x,y)} \left\{ \int_X f(x) d\mu - \int_X g(y) d\nu \right\},$$

onde $f \in L^1(\mu)$ e $g \in L^1(\nu)$. Assim temos que dados $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$,

$$W_p(p(\Pi_1), p(\Pi_2)) = \sup_{f(x)-g(y) \leq d^p(x,y)} \left\{ \int_X f(x) dp(\Pi_1) - \int_X g(y) dp(\Pi_2) \right\}$$
$$= \sup_{f(x)-g(y) \leq d^p(x,y)} \left\{ \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X f(x) d\mu(x) d\Pi_1(\mu) - \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X g(y) d\nu(y) d\Pi_2(\nu) \right\}$$
$$= \sup_{f(x)-g(y) \leq d^p(x,y)} \left\{ \int_{\mathcal{P}(X)} \overline{\psi}(\mu) d\Pi_1(\mu) - \int_{\mathcal{P}(X)} \overline{\varphi}(\nu) d\Pi_2(\nu) \right\},$$

onde

$$\overline{\psi}(\mu) = \int_X f(x)d\mu(x) \text{ e } \overline{\varphi}(\nu) = \int_X g(y)d\nu(y).$$

Como $f(x) - g(y) \leq d^p(x,y)$, tomando um transporte plano π de μ para ν, vemos que

$$\begin{aligned} f(x) - g(y) \leq d^p(x,y) &\Rightarrow \int_{X\times X} f(x) - g(y)d\pi \leq \int_{X\times X} d^p(x,y)d\pi \\ &\Rightarrow \int_X f(x)d\mu(x) - \int_X g(y)d\nu(y) \leq \int_{X\times X} d^p(x,y)d\pi \\ &\Rightarrow \overline{\psi}(\mu) - \overline{\varphi}(\nu) \leq W_p(\mu,\nu). \end{aligned}$$

Também temos que como $f \in L^1(p(\Pi_1))$ e $g \in L^1(p(\Pi_2))$, então

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{P}(X)} \int_X f(x)d\mu(x)d\Pi_1(\mu) < \infty \text{ e } \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X g(y)d\nu(y)d\Pi_2(\nu) < \infty \\ &\Rightarrow \int_{\mathcal{P}(X)} \overline{\psi}(\mu)d\Pi_1(\mu) < \infty \text{ e } \int_{\mathcal{P}(X)} \overline{\varphi}(\nu)d\Pi_2(\nu) < \infty \\ &\Rightarrow \overline{\psi} \in L^1(\Pi_1) \text{ e } \overline{\varphi} \in L^1(\Pi_2). \end{aligned}$$

Finalmente observamos o conjunto da funções $\overline{\psi} \in L^1(\Pi_1)$ e $\overline{\varphi} \in L^1(\Pi_2)$, que satisfazem $\overline{\psi}(\mu) - \overline{\varphi}(\nu) \leq W_p(\mu,\nu)$ e que são induzidas por aplicações $f \in L^1(p(\Pi_1))$ e $g \in L^1(p(\Pi_2))$, que satisfazem $f(x) - g(y) \leq d^p(x,y)$ é um subconjunto das aplicações $\psi \in L^1(\Pi_1)$ e $\varphi \in L^1(\Pi_2)$ que satisfazem $\psi(\mu) - \varphi(\nu) \leq W_p(\mu,\nu)$. Assim

$$\begin{aligned} W_p(p(\Pi_1), p(\Pi_2)) &= \sup_{f(x)-g(y)\leq d^p(x,y)} \left\{ \int_{\mathcal{P}(X)} \overline{\psi}(\mu)d\Pi_1(\mu) - \int_{\mathcal{P}(X)} \overline{\varphi}(\nu)d\Pi_2(\nu) \right\} \\ &\leq \sup_{\psi(\mu)-\varphi(\nu)\leq W_p(\mu,\nu)} \left\{ \int_{\mathcal{P}(X)} \psi(\mu)d\Pi_1(\mu) - \int_{\mathcal{P}(X)} \varphi(\nu)d\Pi_2(\nu) \right\} \\ &= W_p(\Pi_1, \Pi_2). \end{aligned}$$

□

Também iremos considerar a aplicação $J : \mathcal{M}(T,X) \to \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$, dada por $J(\nu) = \delta_\nu$. Claramente J está bem definida e se estivermos trabalhando com a distância de Wasserstein , J é uma isometria. Nós podemos pensar em p como uma projeção e em J como uma inclusão de $\mathcal{M}(T,X)$ em $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$.

Lema 7.3.3. *Sejam p e J como acima, então*
(i) $p \circ J = Id$,
(ii) p é sobrejetiva (e preserva a invariância mas não preserva ergodicidade, veja Obervação 7.3.7),
(iii) J é injetiva.

Demonstração. (i) Tome $\nu \in \mathcal{M}(T, X)$, então

$$\int_X f(x) d((p \circ J)(\nu)) = \int_{\mathcal{P}(X)} \int_X f(x) d\mu d\delta_\nu = \int_X f(x) d\nu(x),$$

disto segue que $p \circ J = Id$.
(ii) Seja $\nu \in \mathcal{M}(T, X)$, pelo ítem (i), temos que $p(j(\nu)) = \nu$. Então p é sobrejetiva.
(iii) Claramente J é injetiva (δ_ν é ergódica para todo $\nu \in \mathcal{M}(T, X)$, pois ν é ponto fixo para Φ). $\square$

Definição 7.3.4. Sejam X espaço métrico e $T : X \to X$ aplicação contínua. Dizemos que T é unicamente ergódica se existe uma única medida de probabilidade T-invariante.

Proposição 7.3.5. *Se Φ é unicamente ergódica, então T é unicamente ergódica. Se T é unicamente ergódica então $p(\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))) = \mu$, onde μ é a única medida T-invariante.*

Demonstração. Seja Π a única medida Φ-invariante. Como sabemos, $p(\Pi) = \mu$ é T-invariante. Suponhamos então que ν seja uma probabilidade T-invariante. Então temos que δ_ν é Φ-invariante, logo $\Pi = \delta_\nu$. Assim

$$\mu = p(\Pi) = p(\delta_\nu) = \nu.$$

Se T é unicamente ergódica com μ sendo a única medida T-invariante, então

$$p(\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))) = p(\mathcal{M}(T, X)) = \mu.$$

$\square$

Definimos então uma relação de equivalência em $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$, usando a projeção p. Dados $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$

$$\Pi_1 \sim \Pi_2 \Leftrightarrow p(\Pi_1) = p(\Pi_2).$$

Não é difícil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência. Consideramos então o conjunto quociente $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))/\sim$.

Proposição 7.3.6. *O quociente $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))/\sim$ é isomorfo á $\mathcal{M}(T, X)$ e*

$$\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))/\sim = \big\{[\delta_\nu] : \nu \in \mathcal{M}(T, X)\big\},$$

onde $[\Pi_1] = \big\{\Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X)) : p(\Pi_1) = p(\Pi)\big\}$.

Demonstração. Defina a aplicação $\bar{p} : (\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))/\sim) \to \mathcal{M}(T, X)$ por $\bar{p}([\Pi]) = p(\Pi)$. Claramente $\bar{p}$ é bijetiva. Para ver que

$$(\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))/\sim) = \big\{[\delta_\nu] : \nu \in \mathcal{M}(T, X)\big\},$$

observe que $p \circ J = Id$. $\square$

Observação 7.3.7. Observe que, para qualquer $\nu \in \mathcal{M}(T, X)$, temos que $j(\nu) = \delta_\nu \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$, é ergódica. De fato, de [8] estes são sempre pontos extremos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, logo também são pontos extremos de $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ o qual é um subconjunto convexo de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, cujo os extremos são medidas ergódicas para Φ.

Então, se $\sharp\mathcal{M}(T, X) > 1$ existe uma medida não ergódica $\nu \in \mathcal{M}(T, X)$ e $j(\nu) = \delta_\nu \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ é uma medida ergódica com projeção não-ergódica ν. Logo nós concluimos que a projeção não preserva ergodicidade.

Sendo que j é injetiva, uma outra consequência é a que

$$J(\mathcal{M}(T, X)) \subset \{\Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X)) \mid \Pi \text{ é ergodica para } \Phi\},$$

isto é, o conjunto de medidas ergódicas para Φ tem no mínimo a cardinalidade de $\mathcal{M}(T, X)$.

O próximo passo é analizar cada fibra $[\delta_\nu]$.

Lema 7.3.8. *A projeção p é linear, em particular cada fibra $[\delta_\nu]$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$.*

Demonstração. Tomamos $\Pi_1, \Pi_2 \in [\delta_\nu]$ e $t \in [0, 1]$, então $t\Pi_1 + (1-t)\Pi_2 \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ e

$$p(t\Pi_1 + (1-t)\Pi_2) = tp(\Pi_1) + (1-t)p(\Pi_2) = \nu,$$

isto é, $t\Pi_1 + (1-t)\Pi_2 \in [\delta_\nu]$. $\square$

Observe que pelo Lema 7.3.3 (ii), necessitamos do seguinte corolário:

Corolário 7.3.9. *Seja $\nu \in \mathcal{M}(T, X)$ uma medida de probabilidade T-ergódica. Os vértices de $[\delta_\nu]$ estão contidos no conjunto de vértices de $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$, em particular eles são ergódicos. Mais ainda, se $[\delta_\nu] \neq \{\delta_\nu\}$, então existe $\Pi \in [\delta_\nu]$ não-ergódica (existe Π não-ergódica que é projetada em uma medida ergódica ν, veja Exemplo 7.4.3).*

Demonstração. Para provarmos a afirmação, consideramos o vértice $\Pi_0 \in [\delta_\nu]$ e suponhamos que Π_0 não é ergódica. Então existem $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ e $t \in (0, 1)$ tais que $\Pi_0 = t\Pi_1 + (1-t)\Pi_2 \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ e Π_1 ou $\Pi_2 \notin [\delta_\nu]$, sendo que que Π_0 é um vértice de $[\delta_\nu]$. Se necessário $1-t=s$ e $t=1-s$ então nós podemos assumir que $\Pi_2 \notin [\delta_\nu]$.

Tomando a projeção de Π_0 nós obtemos:

$$p(\Pi_0) = p(t\Pi_1 + (1-t)\Pi_2) = tp(\Pi_1) + (1-t)p(\Pi_2)$$

$$\nu = tp(\Pi_1) + (1-t)p(\Pi_2)$$

o que contradiz a ergodicidade de ν pois $p(\Pi_1) \neq p(\Pi_2)$.

Se $\Pi_1 \neq \Pi_2$ são probabilidades ergódicas em $[\delta_\nu]$ então o segmento $(\Pi_1, \Pi_2) = \{t\Pi_1 + (1-t)\Pi_2 \mid t \in (0,1)\}$ é formado por probabilidades não ergódicas com projeção ν. $\square$

Exemplo 7.3.10. Tomamos $\nu \in \mathcal{M}(T, X)$ e consideramos seu push forward $j_\sharp\nu$ pela aplicação j. Temos que $p(j_\sharp\nu) = \nu$. Se ν é tal que existem $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}(T, X)$ e $t \in (0,1)$ tais que $\nu = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$, então temos que a medida definida pelo funcional linear positivo

$$\Lambda(\psi) = t\nu_1(\psi \circ j) + (1-t)\int_{\mathcal{P}(X)} \psi d\eta,$$

onde $p(\eta) = \nu_2$, está na fibra $[\delta_\nu]$.

7.4 Decomposição Ergódica

Um outro caminho para entendermos melhor o conjunto $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ é usar o *Teorema da Decomposição Ergódica.*

Um conjunto boreliano $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tem **medida total** se

$$\Pi(\mathcal{P}(X)/\mathcal{A}) = 0, \ \forall \Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X)).$$

Em [5] temos o seguinte resultado:

Lema 7.4.1. *(Mañé) Para qualquer medida de probabilidade invariante* $\Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ *temos*

$$\int_{\mathcal{P}(X)} \psi(\nu) d\Pi(\nu) = \int_{\mathcal{P}(X)} \int_{\Sigma} \psi(\mu) d\Pi_\nu(\mu) d\Pi(\nu),$$

onde $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ *tem medida total e, para qualquer* $\overline{\nu} \in \Sigma$, *nós temos uma medida ergódica* $\Pi_{\overline{\nu}}$ *dada por*

$$\Pi_{\overline{\nu}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\Phi^k(\overline{\nu})},$$

que contém $\overline{\nu}$ *em seu suporte.*

Demonstração. Ver [5]. $\square$

Assim voltamos nossa atenção para as medidas ergódicas $\Pi_{\overline{\nu}}$. Considerando a projeção $p : \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X)) \to \mathcal{M}(T, X)$, onde nós temos que

$$\int_X f(x)dp(\Pi)(x) := \int_{\mathcal{P}(X)} \nu(f)\ d\Pi(\nu),$$

onde $\nu(f) = \displaystyle\int_X f(x)d\nu(x)$, obtemos o teorema seguinte.

Teorema 7.4.2. *sejam $\overline{\nu} \in \Sigma$ medidas de probabilidade, temos três possibilidades para $\Pi_{\overline{\nu}}$:*
a) Se $\overline{\nu} \in \mathcal{M}(T, X)$, então $p(\Pi_{\overline{\nu}}) = \overline{\nu}$;
b) Se $\overline{\nu} \notin \mathcal{M}(T, X)$ e $B \subset X$ é invariante e por T ($T^{-1}(B) = B$), então $p(\Pi_{\overline{\nu}})(B) = \overline{\nu}(B)$;
c) Sem hipóteses sobre $\overline{\nu}$ nós temos que para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $B \subset X$, existe $c_\varepsilon = \Pi_{\overline{\nu}}(\mathcal{A}_B^\varepsilon) > 0$, onde $\mathcal{A}_B^\varepsilon$ é uma vizinhança de $\overline{\nu}$ na topologia fraca-$*$, dada por

$$\mathcal{A}_B^\varepsilon = \{\nu \in \mathcal{P}(X) \,|\, \|\nu(B) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon\},$$

tal que, para qualquer $0 < \delta < \varepsilon$ existe $N = N_{\delta,\varepsilon}$ tal que $\forall n \geq N$

$$\sharp\{k \leq n \mid \|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon\} \geq n(c_\varepsilon - \delta).$$

Em particular, $c_\varepsilon = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sharp\{k \leq n \mid \|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon\}$.

Demonstração. Para provarmos (a) e (b) obervamos que a projeção $p(\Pi_{\overline{\nu}})$ é dada por:

$$\begin{aligned}
p(\Pi_{\overline{\nu}})(B) &= \int_B dp(\Pi_{\overline{\nu}}) = \int_{\mathcal{P}(X)} \nu(\chi_B)\ d\Pi_{\overline{\nu}}(\nu) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\Phi^k(\overline{\nu})}(\nu(\chi_B)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^k(\overline{\nu})(\chi_B) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\nu}(\chi_B \circ T^k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\nu}(\chi_{T^{-k}(B)}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\nu}(T^{-k}(B)).
\end{aligned}$$

Desta equação, podemos concluir os ítens (a) e (b), pois se $\overline{\nu} \in \mathcal{M}(T, X)$ então $\overline{\nu}(T^{-k}(B)) = \overline{\nu}(B)$ e mesmo que $\overline{\nu} \notin \mathcal{M}(T, X)$ mas $T^{-1}(B) = B$, então $p(\Pi_{\overline{\nu}})(B) = \overline{\nu}(B)$.

Para o ítem (c) nós usaremos a definição da medida $\Pi_{\overline{\nu}}$ para a função $\psi(\nu) = \chi_{\mathcal{A}_B^\varepsilon}(\nu)$:

$$\int_{\mathcal{P}(X)} \chi_{\mathcal{A}_B^\varepsilon}(\nu)\, d\Pi_{\overline{\nu}}(\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\mathcal{A}_B^\varepsilon}(\Phi^k(\overline{\nu}))$$

Sendo que $\overline{\nu} \in \mathrm{supp}\Pi_{\overline{\nu}}$, nós temos

$$c_\varepsilon = \Pi_{\overline{\nu}}(\mathcal{A}_B^\varepsilon) = \int_{\mathcal{P}(X)} \chi_{\mathcal{A}_B^\varepsilon}(\nu)\, d\Pi_{\overline{\nu}}(\nu) > 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}_B^\varepsilon}(\Phi^k(\overline{\nu})) &= \begin{cases} 1, & \|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon \\ 0, & \|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| \geq \varepsilon \end{cases} \\ &= \chi_{\|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon}(k). \end{aligned}$$

Substituindo , equações na fómula acima, obtemos,

$$\begin{aligned} c_\varepsilon &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon}(k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sharp\{k \leq n \mid \|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Este limite implica que, para qualquer $0 < \delta < \varepsilon$ existe $N = N_{\delta,\varepsilon}$ tal que $\forall n \geq N$,

$$\frac{1}{n}\sharp\{k \leq n \mid \|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon\} \geq c_\varepsilon - \delta,$$

o que conclui nossa demonstração. $\square$

Exemplo 7.4.3. Este exemplo mostrará que nós podemos ter, na mesma fibra, duas medidas ergódicas para Φ, sendo que uma contém a projeção em seu suporte e outra que não. Nós também podemos concluir, através do presente exemplo, que nossos resultados anteriores estão próximos dos otimais.

Suponhamos que $T : X \to X$ tem no mínimo um ponto periódico de período 2, seja x_0 este ponto. Definimos então duas medidas de probabilidade dadas por

$$\nu_0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{T(x_0)} \text{ and } \nu_1 = \delta_{x_0}.$$

Disto, nós podemos podemos construir duas medidas de probabilidade em $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$,

$$\Pi_0 = \delta_{\nu_0} \text{ e } \Pi_1 = \frac{1}{2}\delta_{\delta_{x_0}} + \frac{1}{2}\delta_{\delta_{T(x_0)}}.$$

Note que Π_0 é ergódica, pois ela é um extremal em $\mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$,e $\Pi_1 \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ é também ergódica pois é suportada na órbita de ν_1, um ponto periódico de período 2 para Φ.

Notamos então que $\Pi_0 \neq \Pi_1$ mas $p(\Pi_0) = p(\Pi_1)$. De fato, se tomamos uma vizinhança U de δ_{x_0} que não contém $\delta_{T(x_0)}$ e uma função ψ suportada nesta vizinhança temos que

$$\int \psi(\nu) d\delta_{\nu_0}(\nu) = \psi(\delta_{x_0}) \neq \int \psi(\nu) d\delta_{\nu_1}(\nu) = \frac{1}{2}\psi(\delta_{x_0}),$$

assim $\Pi_0 \neq \Pi_1$ Para vermos que $p(\Pi_0) = p(\Pi_1)$ usamos a definição de p:

$$p(\Pi_0)(f) = \int \nu(f) d\Pi_0(\nu) = \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(T(x_0))$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} p(\Pi_1)(f) &= \int \nu(f) d\Pi_1(\nu) \\ &= (\frac{1}{2}\delta_{\delta_{x_0}} + \frac{1}{2}\delta_{\delta_{T(x_0)}})(\nu(f)) \\ &= \frac{1}{2}\delta_{x_0}(f) + \frac{1}{2}\delta_{T(x_0)}(f) \\ &= \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(T(x_0)). \end{aligned}$$

Então $p(\Pi_0) = p(\Pi_1)$, isto é $[\Pi_0] = [\Pi_1]$.

Como, $\Pi_0 = \delta_{\nu_0}$ sabemos que $\nu_0 \in \mathrm{supp}\Pi_0$ e necessariamente $\nu_0 \notin \mathrm{supp}\Pi_1$, pois $\Pi_0 \neq \Pi_1$ são ergódicas e distintas, o que implica que seus suportes são disjuntos.

Do último exemplo concluimos que na mesma fibra, mesmo que esta tenha projeção ergódica, nós podemos ter medidas ergódicas que podem ou não conter a projeção em seu suporte. Mais ainda, a fibra deste tipo, pode ter cardinalidade um somente se T não possui pontos periódicos exceto os pontos fixos, também temos que toda medida no segmento (Π_0, Π_1) é uma combinação convexa não-trivial, obviamente não-ergódica, que projeta-se em uma medida ergódica ν_0.

Observação 7.4.4. O Teorema 7.4.2 é provavelmente a melhor resposta para esta questão, pois se $\overline{\nu}$ não é T-invariante ($\Phi(\overline{\nu}) \neq \overline{\nu}$), mas $\Phi^N(\overline{\nu}) = \overline{\nu}$, então $\Pi_{\overline{\nu}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta_{\Phi^k(\overline{\nu})}$ é ergódica, tem $\overline{\nu}$ em seu suporte e $p(\Pi_{\overline{\nu}}) \neq \overline{\nu}$.

De fato, tomando $\overline{\nu} = \delta_{x_0}$, e $T(x_0) \neq x_0$, $T^2(x_0) = x_0$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno ($\varepsilon < \frac{1}{2}$, neste caso) e para qualquer B, vizinhança de x_0 que não contenha $T(x_0)$, então $c_\varepsilon = \frac{1}{2}$. De fato,

$$\begin{aligned}
c_\varepsilon &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp\{k \leq n \mid \|\overline{\nu}(T^{-k}(B)) - \overline{\nu}(B)\| < \varepsilon\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp\{k \leq n \mid \|\delta_{x_0}(T^{-k}(B)) - \delta_{x_0}(B)\| < \varepsilon\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp\{k \leq n \mid \|\delta_{T^k(x_0)}(B) - \delta_{x_0}(B)\| < \varepsilon\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp\{k \leq n \mid \|\chi_{_B}(T^k(x_0)) - \chi_{_B}(x_0)\| < \varepsilon\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{n}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Como $[\delta_\nu]$ é um subconjunto compacto convexo de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, nós podemos aplicar o Teorema de Representação de Choquet (ver [8]) a este conjunto:

Teorema 7.4.5. *(Choquet) Para toda $\mu \in M(T, X)$ e $\Pi \in [\delta_\mu]$, existe uma medida de probabilidade $\rho_{_\Pi}$ suportada no fecho de*

$$ex([\delta_\mu]) = \{\Gamma \in [\delta_\mu] \text{ que é extremal em } [\delta_\mu]\},$$

tal que, todo funcional linear contínuo λ é representado por

$$\lambda(\Pi) = \int_{\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))} \lambda(\Gamma) d\rho_{_\Pi}(\Gamma).$$

Existem escolhas óbvias para λ nos quais podemos aplicar o teorema acima,
1- $\lambda(\Gamma) = \int_{\mathcal{P}(X)} \psi(\nu) d\Gamma(\nu)$, $\psi \in C^0(\mathcal{P}(X))$;
2- $\lambda(\Gamma) = \int_{\mathcal{P}(X)} \nu(f) d\Gamma(\nu)$, $f \in C^0(X)$;
3- $\lambda(\Gamma) = \int_{\mathcal{P}(X)} \nu(E) d\Gamma(\nu)$, $E \subset X$ mensurável.
Cada uma é um caso particular da anterior.

Substituindo na primeira nós obtemos

$$\int_{\mathcal{P}(X)} \psi(\nu) d\Pi(\nu) = \int_{\mathrm{cl}(ex([\delta_\mu])} \left[\int_{\mathcal{P}(X)} \psi(\nu) d\Gamma(\nu)\right] d\rho_{_\Pi}(\Gamma),\ \psi \in C^0(\mathcal{P}(X)).$$

Este teorema mostra que nós podemos nos restringir ao estudo das propriedades ergódicas apenas para as medidas ergódicas na fibra.

7.5 Entropia Fraca em Medida

Como vimos anteriormente, a entropia topológica da aplicação push forward Φ é infinita, desde que a entropia de T seja não-nula. Assim, pelo pricípio variacional da entropia, nós podemos encontrar medidas Φ-invariantes com entropia em medida arbitrariamente grandes. Isto nos motiva a tentarmos uma formulação mais fraca para a entropia em medida para a aplicação $\Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$ ao invés de considerarmos a de Kolmogorov. Nosso desejo é conseguirmos uma cota superior para esta nova entropia em medida.

Definição 7.5.1. Nós dizemos que $\{A_i\}_{1\leq i\leq k}$ é uma partição do sistema dinâmico (X, T) se

(i) $X = \cup_{i=1}^{k} A_i$,

(ii) Existe um conjunto $\Sigma_\alpha \subset X$ de medida total tal que $A_i \cap A_j \subset X\backslash\Sigma_\alpha$ para todo $i \neq j$.

Lema 7.5.2. *Sejam (X, T) e (Y, S) dois sistemas dinâmicos conjugados. Se h é a conjugação entre T e S e α é uma partição de (X, T), então $h(\alpha)$ é uma partição de (Y, S).*

Demonstração. Como $X = \cup_{i=1}^{k} A_i$, então $Y = h(X) = \cup_{i=1}^{k} h(A_i)$. Por outro lado temos que $\hat{h}^{-1}(\mathcal{M}(T, X)) = \mathcal{M}(S, Y)$, onde $\hat{h}$ é o push forward de h. Então dada $\nu \in \mathcal{M}(S, Y)$, existe $\mu \in \mathcal{M}(T, X)$ tal que $\hat{h}^{-1}(\nu) = \mu$, e isto implica

$$\nu(h(A_i \cap A_j)) = \hat{h}^{-1}(\nu)(A_i \cap A_j) = \mu(A_i \cap A_j) = 0,$$

estão contidas em $X\backslash\Sigma_\alpha$, onde Σ_α tem medida total em (X, T). $\square$

Agora consideramos o sistema dinâmico (X, T), nós tentaremos extender o conceito de entropia em medida para a aplicação Φ.

Dadas $\nu \in \mathcal{P}(X)$ e α eβ partições do espaço de probabilidade nós temos que a *entropia* de α, com respeito a medida ν, é dada por

$$H(\alpha)(\nu) = -\sum_{A\in\alpha} \rho(\nu(A)),$$

e a *entropia condicional*, com respeito a medida ν,

$$H(\alpha|\beta)(\nu) = -\sum_{A\in\alpha, B\in\beta} \rho(\nu(A \cap B)),$$

onde $\rho : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = 0 \\ x \log x, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Definição 7.5.3. Dadas Π um medida sobre $\mathcal{P}(X)$ e α, β partições do espaço de probabilidade, nós definimos a *entropia fraca em medida* da partição α por

$$\mathcal{H}(\alpha) = \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha)(\nu) d\Pi(\nu).$$

e a *entropia fraca condicional* por

$$\mathcal{H}(\alpha|\beta) = \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha|\beta)(\nu) d\Pi(\nu).$$

Lema 7.5.4. *Se $p(\Pi) = \bar{\nu}$, então $\mathcal{H}(\alpha) \leq H(\alpha)(\bar{\nu})$.*

Demonstração. Começamos observando que, com ρ é uma função convexa, pela desigualdade de Jensen,

$$\int_X \rho(g(x)) d\bar{\nu} \geq \rho\Big(\int_X g(x) d\bar{\nu}\Big).$$

Isto implica

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\alpha) &= \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha)(\nu) d\Pi(\nu) = -\sum_{A\in\alpha} \int_{\mathcal{P}(X)} \rho(\nu(A)) d\Pi(\nu) \\ &\leq -\sum_{A\in\alpha} \rho\Big(\int_{\mathcal{P}(X)} \nu(A) d\Pi(\nu)\Big) = -\sum_{A\in\alpha} \rho(p(\Pi)(A)) = H(\alpha)(\bar{\nu})\end{aligned}$$

□

Definição 7.5.5. (i) Dadas α, β partições, nós definimos seus refinamentos por

$$\alpha \vee \beta := \{A_i \cap B_j : A_i \in \alpha \text{ e } B_j \in \beta\}.$$

(ii) Nós escrevemos $\alpha < \beta$ se todo elemento de α é uma união de elementos de β. Neste caso temos que $\alpha \vee \beta = \beta$.

Lema 7.5.6. *Dadas α, β, γ partições do espaço de probabilidade, nós temos que*

(i) $\mathcal{H}(\alpha \vee \beta|\gamma) = \mathcal{H}(\alpha|\beta \vee \gamma) + \mathcal{H}(\beta|\gamma)$,
(ii) $\mathcal{H}(T^{-1}\alpha|T^{-1}\beta) = \mathcal{H}(\alpha|\beta)$, se Π é Φ-invariante.

Demonstração. (i) Como $H(\alpha \vee \beta|\gamma) = H(\alpha|\beta \vee \gamma) + H(\beta|\gamma)$, nós obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\alpha \vee \beta|\gamma) &= \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha \vee \beta|\gamma)(\nu) d\Pi(\nu) \\ &= \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha|\beta \vee \gamma)(\nu) d\Pi(\nu) + \int_{\mathcal{P}(X)} H(\beta|\gamma)(\nu) d\Pi(\nu) \\ &= \mathcal{H}(\alpha|\beta \vee \gamma) + \mathcal{H}(\beta|\gamma).\end{aligned}$$

(ii) Primeiro nós notamos que

$$\begin{aligned}
H(T^{-1}\alpha|T^{-1}\beta)(\nu) &= -\sum_{A\in\alpha,B\in\beta} \nu(T^{-1}A\cap T^{-1}B)\log\Big(\frac{\nu(T^{-1}A\cap T^{-1}B)}{\nu(T^{-1}B)}\Big) \\
&= -\sum_{A\in\alpha,B\in\beta} \nu(T^{-1}(A\cap B))\log\Big(\frac{\nu(T^{-1}(A\cap B))}{\nu(T^{-1}B)}\Big) \\
&= -\sum_{A\in\alpha,B\in\beta} \Phi(\nu)(A\cap B)\log\Big(\frac{\Phi(\nu)(A\cap B)}{\Phi(\nu)(B)}\Big) \\
&= H(\alpha|\beta)(\Phi(\nu)).
\end{aligned}$$

Então nós obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(T^{-1}\alpha|T^{-1}\beta) &= \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha|\beta)(\Phi(\nu))d\Pi(\nu) \\
&\underset{\Pi\in\mathcal{M}(\Phi,\mathcal{P}(X))}{=} \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha|\beta)(\nu)d\Pi(\nu) \\
&= \mathcal{H}(\alpha|\beta).
\end{aligned}$$

□

Corolário 7.5.7. *(Monotonicidade da Entropia para Partições) Dadas partições α,β,γ, com $\alpha<\beta$, nós temos que*

$$\mathcal{H}(\alpha|\gamma)\le\mathcal{H}(\beta|\gamma) \text{ and } \mathcal{H}(\alpha)\le\mathcal{H}(\beta).$$

Demonstração. Ver [15]. □

Considere $T:X\to X$ e uma partição $\alpha=\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Definimos

$$\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha=\{A_{r_0}\cap T^{-1}A_{r_1}\cap ...\cap T^{-(n-1)}A_{r_{n-1}}: A_{r_i}\in\alpha,\ i=0,...,n-1\},$$

e escrevemos $H_n(\alpha)=H(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha)$. Então definimos

$$\mathcal{H}_n(\alpha)=\mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha)=\int_{\mathcal{P}(X)} H_n(\alpha)d\Pi(\nu).$$

Como $\mathcal{H}(\alpha\vee\beta)\le\mathcal{H}(\alpha)+\mathcal{H}(\beta)$ e $\mathcal{H}(T^{-1}\alpha)=\mathcal{H}(\alpha)$, temos que

$$\mathcal{H}_{n+m}(\alpha)\le\mathcal{H}_n(\alpha)+\mathcal{H}_m(\alpha).$$

Isto implica que a sequência $\{\mathcal{H}_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é subaditiva.

Definição 7.5.8. A entropia fraca da partição α relativa a transformação $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é definida como o limite

$$h^w(\Phi, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{H}_n(\alpha)}{n} = \inf_n \frac{\mathcal{H}_n(\alpha)}{n}.$$

Observação 7.5.9. Note que $0 \leq h^w(\Phi, \alpha) \leq \mathcal{H}(\alpha)$.

Lema 7.5.10. *Se $p(\Pi) = \bar{\nu}$, então*

$$h^w(\Phi, \alpha) \leq h_{\bar{\nu}}(T, \alpha),$$

onde $h_{\bar{\nu}}(T, \alpha)$ é a entropia da partição α.

Demonstração. Pelo Lema 7.5.4, temos que

$$h^w(\Phi, \alpha) = \inf_n \frac{\mathcal{H}_n(\alpha)}{n} \leq \inf_n \frac{H_n(\alpha)}{n} = h_{\bar{\nu}}(T, \alpha).$$

□

Lema 7.5.11. *Dadas partições α, β, temos que*

$$h^w(\Phi, \alpha) \leq h^w(\Phi, \beta) + \mathcal{H}(\alpha|\beta).$$

Demonstração. Como $\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha < (\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \vee (\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta)$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) &\leq \mathcal{H}((\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \vee (\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta)) \\ &= \mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta) + \mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha | \vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta).\end{aligned}$$

Note então que

$$\mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha | \vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta) \leq \mathcal{H}(\alpha|\beta) + \mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-2} T^{-i}\alpha | \vee_{i=0}^{n-2} T^{-i}\beta),$$

e por indução, obtemos

$$\mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha | \vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta) \leq n\mathcal{H}(\alpha|\beta),$$

e isto implica

$$\frac{1}{n}\mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \leq \frac{1}{n}\mathcal{H}(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta) + \mathcal{H}(\alpha|\beta).$$

Assim

$$h^w(\Phi, \alpha) \leq h^w(\Phi, \beta) + \mathcal{H}(\alpha|\beta).$$

□

Exemplo 7.5.12. Seja $\Pi = \delta_\mu$, onde $\mu \in \mathcal{M}(T, X)$. Então segue que

$$\mathcal{H}(\alpha) = \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha)(\nu) d\Pi(\nu) = H(\alpha)(\mu),$$

assim,

$$h^w(\Phi, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{H}(\alpha)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha)(\mu)}{n} = h(T, \alpha).$$

Neste caso a entropia fraca da partição α, para a medida $\Pi = \delta_\mu$, e a entropia da partição α, para a medida μ, coincidem.

Definição 7.5.13. Dada $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ e $\Pi \in \mathcal{M}(\Phi, \mathcal{P}(X))$, definimos a entropia fraca em medida da aplicação Φ por

$$h_\Pi^\omega(\Phi) = \sup_{\{\alpha : \mathcal{H}(\alpha) < +\infty\}} h^w(\Phi, \alpha).$$

Teorema 7.5.14. *Seja $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ o push forward de uma aplicação $T : X \to X$. Se Π é uma medida Φ-invariante , então $h_\Pi^\omega(\Phi) \leq h(T)$, onde $h(T)$ denota a entropia topológica de T.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} h_\Pi^\omega(\Phi) &= \sup_{\{\alpha : \mathcal{H}(\alpha) < +\infty\}} h^w(\Phi, \alpha) \\ &\leq \sup_{\{\alpha : H(\alpha) < +\infty\}} h_{\bar\nu}(T, \alpha) = h_{\bar\nu}(T) \\ &\leq \sup_{\nu \in \mathcal{M}(T,X)} h_\nu(T) = h(T). \end{aligned}$$

□

Como um exemplo, nós calcularemos a entropia fraca em medida da aplicação Φ com respeito a medida Π_A, a qual é induzida por um conjunto $A \in \mathcal{B}(X)$, definida na seção 7.2.

Exemplo 7.5.15. A entropia fraca de uma aplicação $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ com respeito a medida Π_A, é zero. Dada uma partição α de X, temos que

$$H(\alpha)(\delta_x) = -\sum_{A\in\alpha} \delta_x(A) \log(\delta_x(A)) = 0,$$

pois se $x \in A$, então $\delta_x(A) = 1$ e $\log(\delta_x(A)) = 0$. Se $x \notin A$ então

$$\delta_x(A) \log(\delta_x(A)) = 0.$$

Assim segue o resultado.

Definição 7.5.16. (Isomorfismo entre sistemas dinâmicos) Sejam $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ para $i = 1, 2$ dois espaços de probabilidades; então um isomorfismo entre duas transformações que preservam medida $T_1 : X_1 \to X_1$ e $T_2 : X_2 \to X_2$ é uma aplicação $h : X_1 \to X_2$ tal que
(i) h é uma bijeção,
(ii) h e h^{-1} são mensuráveis,
(iii) $h_\sharp \mu_1 = \mu_2$ e $h_\sharp^{-1} \mu_2 = \mu_1$,
(iv) $h \circ T_1 = T_2 \circ h$.

Proposição 7.5.17. *Sejam $T : X \to X$ e $S : Y \to Y$ são dois sistemas dinâmicos conjugados tais que push forward da conjugação $h : X \to Y$, digamos $\hat{h}$, é um isomorfismo entre $(\mathcal{P}(X), \Phi_T, \Pi_1)$ e $(\mathcal{P}(Y), \Phi_S, \Pi_2)$. Se Φ_T é o push forward de T, Φ_S é o push forward de S, $\Pi_1 \in \mathcal{M}(\Phi_T, \mathcal{P}(X))$ e $\Pi_2 \in \mathcal{M}(\Phi_S, \mathcal{P}(Y))$, então $h^\omega_{\Pi_1}(\Phi_T) = h^\omega_{\Pi_1}(\Phi_S)$.*

Demonstração. Dada α partição de (X, T), temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(\Phi_T, \alpha) &= \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha)(\nu) d\Pi_1(\nu) = \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha)(\nu) d(\Pi_1 \circ \Phi_T^{-1})(\nu) \\
&= \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha)(\nu) d(\Pi_1 \circ \hat{h}^{-1} \circ \Phi_S^{-1} \circ \hat{h})(\nu) \\
&= \int_{\mathcal{P}(X)} H(\alpha)(\nu) d(\Pi_2 \circ \hat{h})(\nu) \\
&= \int_{\mathcal{P}(Y)} H(\alpha)(\hat{h}^{-1}(\mu)) d\Pi_2(\mu) \\
&= \int_{\mathcal{P}(Y)} H(\hat{h}(\alpha))(\mu) d\Pi_2(\mu) \\
&= \mathcal{H}(\hat{h}(\Phi_S, h(\alpha)).
\end{aligned}
$$

Assim segue que

$$
h^\omega(\Phi_T, \alpha) = \inf_n \frac{\mathcal{H}_n(\Phi_T, \alpha)}{n} = \inf_n \frac{\mathcal{H}_n(\Phi_S, \hat{h}(\alpha))}{n} = h^\omega(\Phi_S, \hat{h}(\alpha)).
$$

Agora observamos que

$$
\begin{aligned}
h^\omega_{\Pi_1}(\Phi_T) &= \sup_{\{\alpha : \mathcal{H}(\alpha) < +\infty\}} h^w(\Phi_T, \alpha) = \sup_{\{\alpha : \mathcal{H}(\hat{h}(\alpha), \Phi_S) < +\infty\}} h^\omega(\Phi_S, \hat{h}(\alpha)) \\
&\leq \sup_{\{\beta : \mathcal{H}(\beta, \Phi_S) < +\infty\}} h^w(\Phi_S, \beta) = h^\omega_{\Pi_2}(\Phi_S).
\end{aligned}
$$

Se fizermos os mesmos cálculos usando a aplicação h^{-1} obtemos a outra desigualdade. $\square$

Capítulo 8

Outras Dinâmicas em $\mathcal{P}(X)$

O objetivo deste capítulo é abordar dinâmicas em $\mathcal{P}(X)$ que não sejam dadas por aplicações do tipo push forward. Inicialmente construiremos uma dinâmica com entropia positiva finita. Logo após este exemplo estudaremos algumas propriedades do sistema dinâmico obtido a partir da convolução de medidas.

8.1 Uma Dinâmica com Entropia Positiva

Consideramos um subconjunto $A \subset X$ e dois pontos p, q tais que $p \in A$ e $q \notin A$. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma aplicação contínua com entropia positiva. Definimos então uma aplicação $\Psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dada por

$$\Psi(\mu) = (1 - f(\mu(A)))\delta_q + f(\mu(A))\delta_p.$$

Como a aplicação push forward preserva combinações convexas e Ψ não satisfaz isto, temos que a aplicação Ψ, definida acima não é dada por um push forward de uma aplicação contínua $T : X \to X$.

Observação 8.1.1. Notamos que a partir da segunda iterada Ψ passa ser uma aplicação de $[\delta_p, \delta_q] := \{t\delta_p + (1-t)\delta_q : t \in [0,1]\}$ em $[\delta_p, \delta_q]$.

Lema 8.1.2. *As aplicações $\Psi|_{[\delta_p,\delta_q]}$ e f são topologicamente conjugadas .*

Demonstração. Consideramos $H : [\delta_p, \delta_q] \to [0,1]$ dada por

$$H(t\delta_p + (1-t)\delta_q) = t.$$

Então temos que

$$H(\Psi(t\delta_p + (1-t)\delta_q)) = H(f(t)\delta_p + (1 - f(t))\delta_q) = f(t) = f(h(t\delta_p + (1-t)\delta_q)).$$

Logo $H \circ \Psi = f \circ H$. Claramente temos que H é contínua e bijetiva, assim um hoemomorfismo. Com isto temos que $\Psi|_{[\delta_p, \delta_q]}$ e f são topologicamente conjugadas. □

Corolário 8.1.3. *$h(\Psi|_{[\delta_p,\delta_q]}) = h(f)$, onde h denota a entropia topológica.*

Lema 8.1.4. *O cojunto não-errante de Ψ é dado por*

$$\Omega_\Psi = \{t\delta_p + (1-t)\delta_q \in [\delta_p, \delta_q] : t \in \Omega_f\}$$

onde Ω_f é o conjunto não-errante de f.

Demonstração. De fato, se $\mu = t_0\delta_p + (1-t_0)\delta_q \in \Omega_\Psi$ então existe $n_k \to \infty$ tal que

$$\lim_{n_k\to\infty} \Phi^{n_k}(\mu) = \lim_{n_k\to\infty} f^{n_k}(t_0)\delta_p + (1 - f^{n_k}(t_0))\delta_q = t_0\delta_p + (1-t_0)\delta_q.$$

Isto implica $\lim_{n_k\to\infty} f^{n_k}(t_0) = t_0$, e assim $t_0 \in \Omega_f$. A recíproca é trivial. □

Teorema 8.1.5. *(Bowen) Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico topológico, onde X é um espaço métrico compacto. Então temos que*

$$h(T) = h(T|_{\Omega_T}),$$

onde Ω_T é o conjunto não-errante de T e h é a entropia topológica.

Demonstração. Ver [2]. □

Corolário 8.1.6. *$h(\Phi) = h(\Psi|_{\Omega_\Psi})$.*

Observamos então que $h(f) = h(\Psi|_{[\delta_p,\delta_q]}) = h(\Psi|_{\Omega_\Psi})$. Com isto se $0 < h(f) < 0$, então construimos uma aplicação $\Psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que $0 < h(\Psi) < \infty$.

8.2 A Dinâmica dada pela Convolução

O objetivo desta seção é abordar o sistema dinâmico obtido a partir da operação de convolução entre medidas. Começamos então com $(G, *)$ um grupo abeliano topológico compacto e seja $\mathcal{P}(G)$ o espaço métrico compacto das medidas de probabilidade sobre G. Dada $\nu \in \mathcal{P}(G)$ definimos a aplicação de convolução $\Theta_\nu : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ por $\Theta_\nu(\mu) = \nu * \mu$, onde

$$\nu * \mu(E) = \int_G \int_G \chi_E(x * y)d\nu(x)d\mu(y).$$

Lema 8.2.1. *Sejam $f \in C(G, \mathbb{R})$ e $\mu \in \mathcal{P}(G)$. Então*

$$\int f d(\Theta_\nu(\mu)) = \int_G f d\nu * \mu = \int_G \int_G f(x * y) d\nu(x) d\mu(y).$$

Demonstração. Mostraremos o resultado para uma função simples $f(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}$. Assim

$$\begin{aligned}\int f d(\Theta_\nu(\mu)) &= \int_G f d\nu * \mu = \sum_{i=1}^k a_i \int_G \int_G \chi_{E_i}(x * y) d\nu(x) d\mu(y) \\ &= \int_G \int_G f(x * y) d\nu(x) d\mu(y).\end{aligned}$$

Logo o resultado é válido para f função simples. Como qualquer função contínua é o limite de uma sequência de funções simples o resultado segue. □

O Lema 8.2.1 será útil em muitas situações, a primeira delas será para mostrar que de fato a convolução induz um sistema dinâmico topológico.

Proposição 8.2.2. *A aplicação $\Theta_\nu : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$, onde*

$$\Theta_\nu(\mu)(E) = \nu * \mu(E) = \int_G \int_G \chi_E(x * y) d\nu(x) d\mu(y),$$

é contínua na topologia fraca.

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{P}(G)$ e considere uma sequência $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\mu_n \to \mu$ quando $n \to \infty$. Então tomamos $f \in C(G, \mathbb{R})$ e pelo Lema 8.2.1 temos que

$$\int_G f d\nu * \mu_n = \int_G \int_G f(x * y) d\nu(x) d\mu_n(y).$$

Como f é contínua, segue que a aplicação

$$\phi : y \in G \mapsto \int_G f(x * y) d\nu(x),$$

é também contínua. Assim, se $\mu_n \to \mu$ na topologia fraca, então

$$\int_G \int_G f(x * y) d\nu(x) d\mu_n(y) \to \int_G \int_G f(x * y) d\nu(x) d\mu(y).$$

□

Com a Proposição acima temos então o sistema dinâmico topológico $\Theta_\nu : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$. Outro aspecto importante de se observar diz respeito à existência ou não de ponto fixo. Assim se Θ_ν possuir ponto fixo, teremos que existe $\mu \in \mathcal{P}(G)$ tal que $\nu * \mu = \mu$.

Teorema 8.2.3. *Dada $\nu \in \mathcal{P}(G)$, a aplicação $\Theta_\nu : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ tem um ponto fixo.*

Demonstração. Sabemos que $\mathcal{P}(G)$ é um conjunto compacto convexo e que Θ_ν é contínua. Pelo *Teorema do Ponto Fixo de Schowder* temos que Θ_ν tem um ponto fixo. $\square$

Observação 8.2.4. Pelo Teorema 8.2.3 nós vemos que sempre existe uma medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{P}(G)$ tal que $\nu * \mu = \mu$.

Nosso próximo passo é entender como são as órbitas da aplicação Θ_ν. O próximo resultado dá uma caracterização das órbitas de Θ_ν e mostra uma relação da órbita de um elemento com a médida ν.

Lema 8.2.5. *Dada $\mu \in \mathcal{P}(G)$, a órbita de μ pela aplicação Θ_ν é dada por*

$$\mathcal{O}(\mu) = \{\nu^n * \mu : \nu^n = \underbrace{\nu * \nu * ... * \nu}_{n},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\Theta_\nu^2(\mu)(E) = (\nu * (\nu * \mu))(E) &= \int_G \int_G \chi_E(x * y) d\nu(x) d(\nu * \mu)(y) \\ &= \int_G \int_G \int_G \chi_E(x * y * z) d\nu(x) d\nu(z) d\mu(x).\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(\nu * \nu) * \mu(E) &= \int_G \int_G \chi_E(x * y) d(\nu * \nu)(x) d\mu(y) \\ &= \int_G \int_G \int_G \chi_E(x * y * z) d\nu(x) d\nu(z) d\mu(x).\end{aligned}$$

Assim obtemos que $\Theta_\nu^2(\mu) = (\nu * \nu) * \mu = \nu^2 * \mu$. Por indução o resultado segue. $\square$

8.2.1 Classificação Topológica

Uma questão interessante é: dados $(G_1, \circ)$ e $(G_2, \cdot)$ grupos topológicos isomorfos, $\nu_i \in \mathcal{P}(G_i)$, sob quais condicôes os sistemos dinâmicos $\Theta_{\nu_1} : \mathcal{P}(G_1) \to \mathcal{P}(G_1)$ e $\Theta_{\nu_2} : \mathcal{P}(G_2) \to \mathcal{P}(G_{12})$ são topologicamente conjugados?

Para responder esta pergunta consideramos $(G_1, *)$ e $(G_2, \circ)$ dois grupos topológicos compactos e $\varphi : G_1 \to G_2$ um isomorfismo de grupos entre G_1 e G_2.

Lema 8.2.6. *Seja $\varphi_\sharp : \mathcal{P}(G_1) \to \mathcal{P}(G_2)$ o push forward do ismorfismo $\varphi : G_1 \to G_2$. Então temos que*

$$\varphi_\sharp(\nu * \mu) = \varphi_\sharp(\nu) * \varphi_\sharp(\mu), \text{ para quaisquer } \nu, \mu \in \mathcal{P}(G_1).$$

Demonstração. Tomamos $\nu, \mu \in \mathcal{P}(G_1)$, $f \in C(G_2, \mathbb{R})$ e notamos que

$$\begin{aligned}
\varphi_\sharp(\nu * \mu)(f) &= \int_{G_2} f(g) d\varphi_\sharp(\nu * \mu)(g) = \int_{G_1} (f \circ \varphi)(x) d(\nu * \mu)(x) \\
&= \int_{G_1} \int_{G_1} (f \circ \varphi)(x * y) d\nu(x) d\mu(y) \\
&= \int_{G_2} \int_{G_2} f(g * h) d\varphi_\sharp(\nu)(g) d\varphi_\sharp(\mu)(h) \\
&= (\varphi_\sharp(\nu) * \varphi_\sharp(\mu))(f) \quad \forall f \in C(G_2, \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Assim $\varphi_\sharp(\nu * \mu) = \varphi_\sharp(\nu) * \varphi_\sharp(\mu)$. □

A aplicação push forward tem um papel importante na classificação topológica dos sistemas dinâmicos obtidos a partir da convolução. Seja $\nu_1 \in G_1$ e $\nu_2 = \varphi(\nu_1) \in G_2$ e considere as aplicações

$$\Theta_{\nu_1} : \mathcal{P}(G_1) \to \mathcal{P}(G_1) \text{ e } \Theta_{\nu_2} : \mathcal{P}(G_2) \to \mathcal{P}(G_2).$$

Então nós definimos a aplicação

$$H : \mathcal{P}(G_1) \to \mathcal{P}(G_2)$$

$$\mu \mapsto \varphi_\sharp \mu.$$

Lema 8.2.7. *A aplicação $H : \mathcal{P}(G_1) \to \mathcal{P}(G_2)$, onde $H(\mu) = \varphi_\sharp \mu$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Como φ é um isomorfismo de grupos topológicos o resultado segue. □

Lema 8.2.8. *Se $\varphi_\sharp(\nu_1) = \nu_2$, então $H \circ \Theta_{\nu_1} = \Theta_{\nu_2} \circ H$.*

Demonstração. Tomamos $\mu \in G_1$ e notamos que

$$H \circ \Theta_{\nu_1}(\mu) = \varphi_\sharp(\nu_1 * \mu) = \varphi_\sharp(\nu_1) * \varphi_\sharp(\mu) = \nu_2 * \varphi_\sharp(\mu) = \Theta_{\nu_2} \circ H(\mu).$$

□

Proposição 8.2.9. *Seja $\varphi : G_1 \to G_2$ entre grupos topológicos. Considere $\nu_1 \in \mathcal{P}(G_1)$, $\nu_2 \in \mathcal{P}(G_2)$ tais que $\varphi_\sharp(\nu_1) = \nu_2$, então as aplicações $\Theta_{\nu_i} : \mathcal{P}(G_i) \to \mathcal{P}(G_i)$ para $i = 1, 2$ são topologicamente conjugadas.*

Demonstração. Seja H como no Lema 8.2.7 e então aplicamos Lema 8.2.8. □

Para um grupo topológico $(G, *)$ nós definimos o conjunto de G como sendo

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ é isomorfismo contínuo com inversa contínua}\},$$

o qual é obviamente um grupo com a operação de composição de funções, $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$.

O próximo resultado mostra como este grupo classifica os sistemas $\Theta_\nu : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ por meio da conjugação topológica.

Proposição 8.2.10. *Seja $\sim$ a relação sobre $\mathcal{P}(G)$ dada por*

$$\nu_1 \sim \nu_2 \Longleftrightarrow \exists \varphi \in Aut(G) \ s.t. \ \varphi_\sharp(\nu_1) = \nu_2.$$

Então $\sim$ é uma relação de equivalência e , para cada $\nu \in \mathcal{P}(G)$ o conjunto

$$\{\Theta_{\nu'} \mid \nu' \in [\nu] \in \mathcal{P}(G)/\sim\},$$

é tal que qualquer dois sistemas Θ_{ν_1} e Θ_{ν_2} são topologicamente conjugados.

Demonstração. Para provarmos que $\sim$ é uma relação de equivalência, nós observamos que $Id \in \mathrm{Aut}(G)$, todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ tem uma inversa em $\mathrm{Aut}(G)$ e $\mathrm{Aut}(G)$ é fechado para a composição, logo $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Por outro lado, dada $\nu \in \mathcal{P}(G)$ nós aplicamos 8.2.8 para mostrar que $\Theta_{\nu'}$ é topologicamente conjugada à Φ_ν para cada $\nu' \in [\nu]$. □

Observamos que se $\Theta_{\nu'}$ é topologicamente conjugada à Θ_ν nós não podemos afirmar que $[\nu'] \neq [\nu]$.

8.2.2 ω-limite

É usual em probabilidade, estudar as pontências da convolução de uma dada medida, isto é, a convergêcia da sequência

$$\{\nu^n \,|\, n \in \mathbb{N}\},$$

e seus pontos de acumulação $\Gamma_\nu = \overline{\{\nu^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}$. Em [18], Chakraborty considerou ν uma uma probabilidade sobre o conjunto das matrizes $d \times d$ não-negativas, S_ν o suporte de ν e provou um resultado interessante sobre a convergência da sequência $\{\nu^n\}$ baseado no conceito de ciclicidade, o qual é definido como segue: Sejam $A_1, ..., A_k$ subconjuntos disjuntos dois a dois de $\{1, ..., d\}$, então S_ν é cíclico com respeito à $A_1, ..., A_k$ se para cada $x \in S_\nu$, com $A_{k+i} = A_i$, $1 \leq i \leq k$, temos

$$\sum_{j \in A_{m+1}} x_{ij} > 0, \quad \sum_{j \in A^c_{m+1}} x_{ij} = 0, \ i \in A_m, \ 1 \leq k \leq m.$$

Teorema 8.2.11 (Ver [18]). *Seja ν uma medida de probabilidade sobre o conjunto das matrizes $d \times d$ não-negativas e S_ν o suporte de ν. Denote por S o semigrupo gerado por S_ν. Suponhamos que a sequência $\{\nu^n\}$ é tight e o posto mínimo das matrizes em S é 2. Também suporemos que nenhuma das matrizes em S tem uma linha nula. Então a sequência $\{\nu^n\}$ não converge se e somente se S_ν cíclico.*

Proposição 8.2.12. *Dado $g \in G$, temos que $\omega(\delta_g) = (R_g)_\sharp(\Gamma_\nu)$.*

Demonstração. Nós sabemos que, pelo Lema 8.2.15, $\Phi_\nu(\delta_g) = (R_g)_\sharp \nu$. Agora se $\bar{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$, temos que

$$\begin{aligned}
\Theta_\nu^{n-1}(\Theta\nu(\delta_g))(E) &= \int_G \int_G \chi_E(x_1 * ... * x_n) d\nu^{n-1}(\bar{x}) d(R_g)_\sharp \nu(x_n) \\
&= \int_G \int_G \chi_E(R_g(x_1 * ... * x_n)) d\nu^{n-1}(\bar{x}) d\nu(x_n) \\
&= \int_G \int_G \chi_{(R_g)^{-1}(E)}(x_1 * ... * x_{n-1} * x_n) d(R_g)_\sharp(\nu)(x) d\nu(y) \\
&= \nu^n(R_g^{-1}(E)) = (R_g)_\sharp(\nu^n)(E).
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\Theta_\nu^n(\delta_g) = (R_g)_\sharp \nu^n.$$

Logo

$$\bar{\nu} = \lim_{n\to\infty} \Theta_\nu^n(\delta_g) = \lim_{n\to\infty} (R_g)_\sharp \nu^n = (R_g)_\sharp \Big(\lim_{n\to\infty} \nu^n\Big).$$

Logo, se $\nu' \in \Gamma_\nu$, então $(R_g)_\sharp \nu' = \bar{\nu} \in \omega(\delta_g)$. □

Corolário 8.2.13. $\omega(\delta_e) = (R_e)_\sharp(\Gamma_\nu) = \Gamma_\nu$.

Proposição 8.2.14. *Seja $\mu \in \mathcal{P}(G)$ e considere o conjunto Γ_ν, então*

$$\Gamma_\nu * \mu := \{\bar{\nu} * \mu : \bar{\nu} \in \Gamma_\nu\} \subset \omega(\mu).$$

Demonstração. Se $\bar{\nu} \in \Gamma_\nu$, então existe uma sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_\nu^{n_k}(\nu) = \lim_{k\to\infty} \nu^{n_k+1} = \bar{\nu}.$$

Logo, pela continuidade de Θ_ν, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \Theta_\nu^{n_k+1}(\mu) = \lim_{k\to\infty} \nu^{n_k+1} * \mu = \bar{\nu} * \mu.$$

Assim $\bar{\nu} * \mu \in \omega(\mu)$. □

8.2.3 Entropia Topológica

Veremos nesta seção que sob certas condições o sistema dinâmico $\Theta_\nu : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ tem entropia zero.

Lema 8.2.15. *Se $g \in G$, então $\Theta_\nu(\delta_g) = (R_g)_\sharp \nu$, onde $(R_g)_\sharp$ é o push forward da translação á direita definida por g.*

Demonstração. Dado $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned}\Theta_\nu(\delta_g)(E) &= \int_G \int_G \chi_E(x * y) d\nu(x) d\delta_g(y) = \int_G \chi_E(x * g) d\nu(x) \\ &= \int_G \chi_E(x) d((R_g)_\sharp \nu)(x) = (R_g)_\sharp \nu(E)\end{aligned}$$

□

Lema 8.2.16. *Dada $\mu, \mu' \in \mathcal{P}(G)$, temos que*

$$d(\Theta_\nu(\mu), \Theta_\nu(\mu')) \leq \sup_{y \in G} d((R_y)_\sharp \mu, (R_y)_\sharp \mu'),$$

onde d representa a métrica fraca-$*$.

Demonstração. Sabemos, pelo Teorema de Fubini e pelo Lema 8.2.1, que

$$\begin{aligned}d(\Theta_\nu(\mu), \Theta_\nu(\mu')) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \int_G g_i(x) d(\nu * \mu)(x) - \int_G g_i(x) d(\nu * \mu')(x) \Big| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \int_G \int_G g_i(x * y) d\nu(x) d\mu(y) - \int_G g_i(x * y) d\nu(x) d\mu'(y) \Big| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \int_G \int_G g_i(x * y) d\mu(x) d\nu(y) - \int_G g_i(x * y) d\mu'(x) d\nu(y) \Big| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \int_G \Big[\int_G g_i(x * y) d\mu(x) - \int_G g_i(x * y) d\mu'(x) \Big] d\nu(y) \Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sup_{y \in G} \Big| \int_G g_i(x * y) d\mu(x) - \int_G g_i(x * y) d\mu'(x) \Big| \\ &= \sup_{y \in G} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big| \int_G g_i(x) d((R_y)_\sharp \mu)(x) - \int_G g_i(x * y) d((R_y)_\sharp \mu')(x) \Big| \\ &\leq \sup_{y \in G} d((R_y)_\sharp \mu, (R_y)_\sharp \mu') = \sup_{y \in G} d(\Theta_\mu(\delta_y), \Theta_{\mu'}(\delta_y)).\end{aligned}$$

□

Definição 8.2.17. Uma métrica $d : G \times G \to \mathbb{R}_+$ sobre um grupo topológico G é dita invariante à direita (ou esquerda) se $d(x*y, z*y) = d(x, z)$ (ou $d(y*x, y*z) = d(x, z)$) para todo $y \in G$.

Corolário 8.2.18. *Se G é metrizável, e a métrica compatível com a topologia é invariante à direita, então Θ_ν é não-expansiva.*

Demonstração. Neste caso temos que

$$d(\Theta_\nu(\mu), \Theta_\nu(\mu')) \leq \sup_{y \in G} d((R_y)_\sharp \mu, (R_y)_\sharp \mu') = d(\mu, \mu'),$$

e isto implica $d(\Theta_\nu(\mu), \Theta_\nu(\mu')) \leq d(\mu, \mu')$. □

Teorema 8.2.19. *Se G é metrizável, e a distância compatível com a topologia é invariante à direita, então $h(\Theta_\nu) = 0$, onde $h(\Theta_\nu)$ é a entropia topológica de Θ_ν.*

Demonstração. Pelo Corolário 8.2.18 Θ_ν é não-expansiva e isto implica $h(\Theta_\nu) = 0$. □

Em particular, temos que se G é um grupo de Lie existe uma métrica comptível com a topologia de G que é invariante à direita. Logo o Teorema 8.2.19 é verdadeiro para o caso em que G é um grupo de Lie.

8.2.4 Grupos Finitos

A partir de agora consideraremos G como sendo um grupo abeliano e finito. Nosso objetivo é entender como a dinâmica dada pela convolução atua no espaço $\mathcal{P}(G)$.

Consideramos então $(G = \{g_0, g_1, ..., g_{n-1}\}, *)$ um grupo finito de ordem n, onde $g_0 = e$ é o elemento neutro da operação $*$.
Relembramos então que o espaço de funções contínuas sobre G, a saber $C(G, \mathbb{R})$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^n$, onde

$$f(G) = (f(g_0), f(g_1), ..., f(g_{n-1})) \in \mathbb{R}^n.$$

Como é usual, temos que o dual de $C(G, \mathbb{R})$, que está identificado com o espaço $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$, é o espaço das medidas com sinal sobre G,

$$C(G, \mathbb{R})' = \left\{ \mu = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \delta_{g_i},\ p = (p_0, p_1, ..., p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Assim temos que,

$$\int_G f d\mu = \sum_{i=0}^{n-1} p_i f(g_i) = \langle f(G), p \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual.

Neste setting, se $\Delta_n = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p_i \in [0,1],\ \text{e}\ \sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1\}$, então

$$\mathcal{P}(g) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} p_i \delta_{g_i} \in C(G, \mathbb{R})' \mid p \in \Delta_n \right\}.$$

Se $\mu = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \delta_{g_i}$ e $\nu = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \delta_{g_i}$, definimos a convolução entre estas medidas por

$$(\mu * \nu)(f) = \int_G \int_G f(g * h) d\mu(g) d\nu(h).$$

Definindo $f(G^2)$ por

$$f(G^2) = \begin{bmatrix} f(g_0 * g_0) & \cdots & f(g_0 * g_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(g_{n-1} * g_0) & \cdots & f(g_{n-1} * g_{n-1}) \end{bmatrix},$$

obtemos uma caracterização da convolução em coordenadas, como segue:

Teorema 8.2.20. *Se $\nu = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \delta_{g_i} \simeq p$ e $\mu = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \delta_{g_i} \simeq q$, então*

$$(\nu * \mu)(f) = \langle q, f(G^2) p \rangle.$$

Demonstração. De fato, note que

$$\begin{aligned}
(\nu * \mu)(f) &= \int_G \int_G f(g * h) d\nu(g) d\mu(h) \\
&= \int_G \sum_{i=0}^{n-1} p_i f(g_i * h) d\nu(h) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} q_i \int_G f(g_i * h) d\nu(h) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} q_i \sum_{j=0}^{n-1} p_j f(g_i * h_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} q_j \sum_{j=0}^{n-1} p_i f(g_i * h_j) \\
&= \langle q, f(G^2) p \rangle.
\end{aligned}$$

□

Do Teorema 8.2.20 nós definimos a aplicação convexa $\Theta_\nu : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$, onde

$$\Theta_\nu(\mu)(E) = \nu * \mu(E),$$

para qualquer $E \subset G$.

Como, $\mathcal{P}(G)$ é um subespaço afim de codimensão 1 de $C(G,\mathbb{R})'$, temos que Θ_ν é dada por uma matriz biestocástica:

Lema 8.2.21. $\Theta_\nu(\mu) = \nu * \mu = \mu \cdot \nu(G^{-1} * G)$.

Demonstração. Sejam $\mu = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \delta_{g_i}$ e $\nu = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \delta_{g_i}$, sabemos que

$$\Theta_\nu(\mu) = \nu * \mu = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \delta_{g_k}.$$

Pelo Teorema 8.2.20 sabemos que,

$$a_k = \sum_{g_i * g_j = g_k} p_i q_j = \sum_{i=0}^{n-1} \{p_i q_j \mid g_j = g_i^{-1} * g_k\}.$$

Como a equação $g_i * g_j = g_k$ tem uma única solução para um k fixado e para cada i, nós temos $j(i,k)$ bem determinado. Isto nos permite escrever,

$$a_k = p_0 \cdot q_{j(0,k)} + ... + p_{n-1} \cdot q_{j(n-1,k)}.$$

Usando matrizes nós temos

$$\begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & \cdots & p_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{j(0,0)} & \cdots & q_{j(n-1,0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{j(0,n-1)} & \cdots & q_{j(n-1,n-1)} \end{bmatrix}.$$

Se denotamos,

$$G^{-1} * G = \begin{bmatrix} g_0^{-1} * g_0 & \cdots & g_0^{-1} * g_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{-1} * g_{n-1} & \cdots & g_{n-1}^{-1} * g_{n-1} \end{bmatrix},$$

então

$$\nu(G^{-1} * G) = \begin{bmatrix} q_{j(0,0)} & \cdots & q_{j(0,n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{j(n-1,0)} & \cdots & q_{j(n-1,n-1)} \end{bmatrix},$$

nós obtemos assim a fórmula

$$\nu * \mu = \mu \cdot \nu(G^{-1} * G).$$

□

Por exemplo, se nós desejamos calcular as iteradas de $\Theta_\nu(\mu)$, temos

$$\Theta_\nu^m(\mu) = \mu \cdot \nu(G^{-1} * G)^m,$$

e assim nós podemos estimar o comportamento a longo prazo de Θ_ν.

Lema 8.2.22. *A aplicação Θ_ν é não-expansiva.*

Demonstração. Como em $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes, consideraremos em $\mathbb{R}^n$ a norma dada por

$$\|p\|_\infty = \max_{i=0,1,\ldots,n} |p_i|,$$

com $p = (p_0, ..., p_{n-1})$. Como $\nu(G^{-1} \times G)$ é uma matriz bi-estocástica bistochastic sua norma é 1, i.e.,

$$\|\nu(G^{-1} \times G)\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1.$$

Por outro lado, se $\mu_1 \simeq q_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\mu_2 \simeq q_2 \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} \|\Theta_\nu(\mu_1) - \Phi_\nu(\mu_2)\|_\infty &= \|(q_1 - q_2) \cdot \nu(G^{-1} \times G)\|_\infty \\ &\leq \|q_1 - q_2\|_\infty \|\nu(G^{-1} \times G)\|_\infty = \|q_1 - q_2\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Definição 8.2.23. Uma matriz estocástica $A = (a_{ij})$ é chamada semi- positiva se todas as entradas de alguma potência de A, digamos A^m, são positivas.

Definição 8.2.24. Uma matriz A é dita bi-estocástica se suas linhas e suas colunas somam 1.

Teorema 8.2.25. *Se A é uma matriz $m \times m$, semi-positiva e bi-estocástica, então*

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \frac{1}{m} J,$$

onde $J = (a_{ij})$, $a_{ij} = 1$ para todo i, j.

Demonstração. Ver [17]. □

Aplicaremos então o Teorema 8.2.25 para obter um resultado interessante sobre as órbitas da aplicação Θ_ν.

Definição 8.2.26. Seja G be um grupo abeliano de ordem n. Dizemos que G é finitamente gerado se existem $g_1, ..., g_k \in G$ tais que para todo $g \in G$, temos $g = g_1^{r_1} \cdots g_k^{r_k}$, com $r_j \in \{0, 1, ..., n\}$.

Agora relembramos a definição de suporte de uma medida, que usaremos em seguida. Seja G um grupo abeliano finito e $\nu = (p_0, ..., p_{n-1}) \in \mathcal{P}(G)$. O suporte de ν é o conjunto

$$\mathrm{supp}(\nu) =: \{g_i \in G : \nu(g_i) = p_i > 0\}.$$

Denotaremos por H o subgrupo de G gerado por supp(ν), i.e., $H = \langle \mathrm{supp}(\nu) \rangle$. Para o próximo resultado nós precisaremos de uma uma definição e um lema, comecemos com a definição:

Definição 8.2.27. (Probabilidade Acíclica) Dada $\nu = p \in \mathcal{P}(G)$, defininos o conjunto $Z_+(p)^m$ por

$$Z_+(p)^m := \{g_{i_1}...g_{i_m} : g_{i_k} \in \operatorname{supp}(\nu)\}.$$

Seja H o subgrupo de G gerado por $\operatorname{supp}(\nu)$. Dizemos que ν é uma probabilidade acíclica se existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $Z_+(p)^N = H$. Em particular, $Z_+(p) := Z_+(p)^1 = \operatorname{supp}(\nu)$.

Exemplo 8.2.28. (a) Sejam $g \in G$ um elemento de ordem 2 e $\nu = \delta_g$. Neste caso $H = \{e, g\}$ e

$$Z_+(p)^m = \begin{cases} e, & \text{if } m \text{ é par} \\ g, & \text{if } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Então ν não é uma probabilidade acíclica.
(b) Seja H um grupo cíclico gerado por g e $\nu = \alpha\delta_e + (1-\alpha)\delta_g$, $\alpha > 0$. Então ν é uma probabilidade acíclica. De fato, se $H = \{e, g, ..., g^{n-1}\}$, então

$$Z_+(p)^n = \{e^n, e^{n-1}g, e^{n-2}g^2, ...e^1g^{n-1}\} = H.$$

Exemplo 8.2.29. Seja G um grupo abeliano de ordem n e $\nu = p \in \mathcal{P}(G)$. Se $Z_+(p) = \{g, h\}$ e $H = \langle g^{-1}h \rangle$, então ν é uma probabilidade acíclica. De fato, para ver isto notamos apenas que

$$g^{n-k}h^k = (g^{-1}h)^k.$$

Exemplo 8.2.30. Seja $H = \langle g_1, ..., g_k \rangle$ um subgrupo abeliano finitamente gerado de G G e $\nu \in \mathcal{P}(G)$. Se $\nu = p \in \mathcal{P}(G)$ é tal que

$$Z_+(p) = \{e, g_1, ..., g_k\},$$

então ν é uma probabilidade acíclica.

Observação 8.2.31. Seja $\nu = p \in \mathcal{P}(G)$ uma probabilidade acíclica e H subgrupo gerado por $Z_+(p)^1$. Consideramos então as classes de equivalência determinadas por H em G, i.e,

$$gH = \{g * h : h \in H\}.$$

Sabemos que G pode ser escrito como uma união disjunta das classes de equivalência determinadas por H. Assim escrevemos G como segue

$$\begin{aligned} G &= \{e, h_1, ..., h_k, g_1h_1, ..., g_1, g_1h_k, g_2h_1, ..., g_2, g_2h_k, ..., g_l, g_lh_1, ..., g_lh_k\} \\ &= \{H, g_1H, ..., g_lH\}, \end{aligned}$$

onde $g_iH \cap g_jH = \emptyset$ for $i \neq j$. Então temos que a matriz $A = p(G^{-1} \times G)$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} p(H^{-1} \times H) & p(H^{-1} \times g_1H) & \dots & p(H^{-1} \times g_lH) \\ p(g_1^{-1}H^{-1} \times H) & p(g_1^{-1}H^{-1} \times g_1H) & \dots & p(g_1^{-1}H^{-1} \times g_lH) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(g_l^{-1}H^{-1} \times H) & \dots & \dots & p(g_l^{-1}H^{-1} \times g_lH) \end{pmatrix},$$

onde os blocos na diagonal são sempre a matriz $p(H^{-1} \times H)$.

Lema 8.2.32. *Os blocos* $p(g_i^{-1}H^{-1} \times g_jH)$, $p(g_i^{-1}H^{-1} \times H)$ *e* $p(H^{-1} \times g_jH)$ *são todos iguais à matriz nula.*

Demonstração. Tomamos o bloco $p(g_1^{-1}H^{-1} \times g_2H)$ e notamos que

$$\begin{aligned} p((g_1^{-1} * h_i^{-1}) * (g_2 * h_j)) > 0 &\Leftrightarrow (g_1^{-1} * h_i^{-1}) * (g_2 * h_j) \in Z_+(p) \subset H \\ &\Rightarrow g_1^{-1} * g_2 \in H \Rightarrow g_1H = g_2H, \end{aligned}$$

mas isto é uma contradição, pois $g_1H \cap g_2H = \emptyset$. Por um raciocínio análogo ao anterior obtemos o resultado para os outros blocos. $\square$

Pelo Lema 8.2.32, nós que a matriz $p(G^{-1} \times G)$ é dada por

$$p(G^{-1} \times G) = \begin{pmatrix} p(H^{-1} \times H) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(H^{-1} \times H) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & p(H^{-1} \times H) \end{pmatrix}.$$

Isto implica que as potências da matriz $p(G^{-1} \times G)$ são dadas por

$$p(G^{-1} \times G)^n = \begin{pmatrix} p(H^{-1} \times H)^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(H^{-1} \times H)^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & p(H^{-1} \times H)^n \end{pmatrix}.$$

Lema 8.2.33. *A matriz* $p(H^{-1} \times H)$ *é semi-positiva.*

Demonstração. Consideramos a matriz $A = (a_{ij})_{i,j} := (p(h_i^{-1} * h_j))_{i,j}$. Então temos

$$\begin{aligned} a_{ij} > 0 &\Leftrightarrow h_i^{-1} * h_j \in Z_+(p) \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{h} \in Z_+(p) \text{ such that } h_i^{-1} * h_j = \bar{h} \\ &\Leftrightarrow h_j = h_i * \bar{h},\ \bar{h} \in Z_+(p). \end{aligned}$$

Isto implica que $a_{ij} > 0$ se e somente se $h_j \in L_{h_i}(Z_+(p))$. Como L_{h_i} é uma bijeção, em cada linha nós temos $|Z_+(p)|$ coeficintes positivos. Tomamos agora A^2, a qual denotaremos por $A^2 = (a_{ij}^2)_{i,j}$. Assim temos que

$$\begin{aligned} a_{ij}^2 > 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} p(h_i^{-1} * h_k)p(h_k^{-1} * h_j) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{0, ..., n-1\} \text{ such that } p(h_i^{-1} * h_k)p(h_k^{-1} * h_j) > 0 \\ &\Leftrightarrow p(h_i^{-1} * h_k) > 0 \text{ and } p(h_k^{-1} * h_j) > 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h', h'' \in Z_+(p) \text{ such that } h_k = h_i * h',\ h_j = h_k * h'' \\ &\Leftrightarrow h_j = h_i * h' * h'' \\ &\Leftrightarrow h_j \in L_{h_i}(Z_+(p)^2). \end{aligned}$$

Novamente, podemos ver que A^2 tem $|Z_+(p)^2|$ coeficientes positivos em cada linha. Seguindo por indução, se $A^n = (a_{ij}^n)_{i,j}$, então

$$a_{ij}^n > 0 \Leftrightarrow h_j \in L_{h_i}(Z_+(p)^n).$$

Como ν é uma probabilidade acíclica nós obtemos, da Definição 8.2.27 que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n > N$

$$a_{ij}^n > 0 \Leftrightarrow h_j \in L_{h_i}(Z_+(p)^n) = h_i H = H.$$

Isto implica que para $n > N$ a matriz $A^n = (a_{ij}^n)_{i,j}$ tem $|H|$ coeficientes positivos em cada linha (e em cada coluna). Como a matriz A tem ordem H nós temos que A é semi-positiva. □

Teorema 8.2.34. *Seja $G = \{g_0, ..., g_{n-1}\}$ um grupo finito, $\nu = p \in \mathcal{P}(G)$ e $H = \langle Z_+(p) \rangle$. a matriz $p(G^{-1} \times G) = (p(g_i^{-1} * g_j))_{i,j}$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} p(G^{-1} \times G)^n = B$, onde B é a matriz dada por*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{|H|}J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{|H|}J & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{|H|}J \end{pmatrix},$$

com 0 sendo a matriz nula de ordem $|H|$ e J a matriz de ordem $|H|$, com todas as entradas iguais a 1.

Lema 8.2.35. *Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{P}(G)$ e σ uma permutação dos elementos de G. Então temos que*

$$\mu \cdot \nu((\sigma(G))^{-1} \times \sigma(G)) = \mu \cdot \nu(G^{-1} \times G).$$

Demonstração. Basta observar que a convolução não depende da enumeração dos elementos de G, logo

$$\mu \cdot \nu((\sigma(G))^{-1} \times \sigma(G)) = \mu * \nu = \mu * \nu(G^{-1} \times G).$$

□

Observação 8.2.36. O fato principal usado no Lema 8.2.35 foi que que a integral não depende da enumeração dos elementos de G.

Usando o Lema 8.2.35, o Teorema 8.2.34, e fazendo uma permutação nos elementos de G obtemos o

Teorema 8.2.37. *Seja $G = \{g_0, ..., g_{n-1}\}$ um grupo abeliano finito e $\nu = p \in \mathcal{P}(G)$ uma probabilidade acíclica para $H = \langle Z_+(p) \rangle$. A matriz $p(G^{-1} \times G) = (p(g_i^{-1} * g_j))_{i,j}$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} p(G^{-1} \times G)^n = B$, onde B é a matriz dada por*

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ g_i^{-1} * g_j \notin H \\ \frac{1}{|H|}, & se\ g_i^{-1} * g_j \in H \end{cases}$$

Exemplo 8.2.38. Considere $\bar{G}$ um grupo finito, $a, b \in \bar{G}$ tais que $a^2 = e$ $b^3 = e$, $G = \{e, a, b^2, ab, b, ab^2\}$ e seja $\nu = p = \alpha\delta_e + (1-\alpha)\delta_b$ com $0 \leq \alpha \leq 1$. Então temos que

$$\nu(G^{-1} \times G) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & (1-\alpha) & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & (1-\alpha) & 0 & 0 \\ (1-\alpha) & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & (1-\alpha) \\ 0 & 0 & (1-\alpha) & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & (1-\alpha) & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Neste caso $Z_+(p) = \{e, b, b\}$ e $\langle Z_+(p) \rangle = \{e, b, b^2\}$, e pelo Teorema 8.2.37 segue que

$$\lim_{n\to\infty} \nu(G^{-1} \times G)^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

assim dada $\mu = (q_0, ..., q_5)$,

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_\nu^n(\mu) = \frac{1}{3}\Big(q_0+q_2+q_4, q_1+q_3+q_5, q_0+q_2+q_4, q_+q_3+q_5, q_0+q_2+q_4, q_1+q_3+q_5\Big).$$

8.2.5 Uma análise do conjunto ω-limite

Icialmente observamos que a propriedade de ser acíclica é densa em $\mathcal{P}(G)$.

Teorema 8.2.39. *Seja $\nu_0 \in \mathcal{P}(G)$, onde G é um grupo finito. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\bar{\nu} \in \mathcal{P}(G)$ tal que $\bar{\nu}$ é uma probabilidade acíclica e $d(\bar{\nu}, \nu_0) < \varepsilon$, i.e., das probabilidades que são acíclicas é denso em $\mathcal{P}(G)$.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\nu_0 = p = \sum_{i=0}^{k-1} p_i \delta_{h_i}$ com

$$Z_+(p) = \{g \in G : \nu(g) > 0\} \text{ e } H = \langle Z_+(p) \rangle = \{h_0, ..., h_{k-1}\}.$$

Então definimos $a = \min\{p_i : p_i > 0\}$ e $\bar{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\min\{\varepsilon, a\}$. Assim consideramos a probabilidade $\bar{\nu} = \bar{p} = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{p}_i \delta_{h_i}$, onde

$$\bar{p}_i = \begin{cases} \frac{\bar{\varepsilon}}{k-|Z_+(p)|}, & \text{if } p_i = 0 \\ p_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{|Z_+(p)|}, & \text{if } p_i > 0. \end{cases}$$

Obviamente $\bar{\nu} \in \mathcal{P}(G)$ e como

$$d(\nu_0, \bar{\nu}) = \sum_i |p_i - \bar{p}_i| = \sum_{p_i=0} \frac{\bar{\varepsilon}}{k - |Z_+(p)|} + \sum_{p_i>0} \frac{\bar{\varepsilon}}{|Z_+(p)|} = 2\bar{\varepsilon} < \varepsilon,$$

nós obtemos o desejado. □

Observação 8.2.40. Da prova do Teorema acima pode-se concluir que, o valor do limite das entradas da matriz é instável, isto é, próxima a uma probalidade fixada podemos ter probabilidades convergindo para muitas outras, sob a perturbação dos pesos desta probabilidade fixada. Mais ainda, o valor máximo é uma propriedade aberta. De fato, pelo nosso teorema, a matriz limite B é formada por blocos da forma $\frac{1}{|H|}J$ (além dos blocos nulos), assim se nós aumentamos o conjunto $Z_+(p)$ nós decrescemos o valor de $\frac{1}{|H|}$.

Usando o Teorema 8.2.34, tentaremos encontrar condições para duas medidas terem o mesmo conjunto $\omega-$limite, onde $\nu = \sum_i p_i \delta_{g_i}$ é uma probabilidade acíclica. Primeiro nós observamos que se $\mu = \sum_i q_i \delta_{g_i} \in \mathcal{P}(G)$, então $\omega(\mu) = \{\mu \cdot B\}$. Identificando μ com o vetor $q = \sum_i q_i e_i$ in $\mathbb{R}^n$, onde $\{e_i\}_{0 \le i \le n-1}$ é a base canõnica do $\mathbb{R}^n$, temos que

$$q \cdot B = \Big(\sum_i q_i e_i\Big) \cdot B = \sum_i q_i \Big(e_i \cdot B\Big).$$

Isto implica $\omega(\mu) = \sum_i q_i \omega(\delta_{g_i})$. Logo, para determinar o conmjunto $\omega-$limite de uma medida é suficiente determinar o $\omega-$limite das medidas δ_{g_i}, para todo $g_i \in G$. Então notamos que se $H = Z_+(p)$, $|H| = k$, $|G| = |H|l$, $\bar{\mu} = (q_0, ..., q_{n-1})$, $\mu = \delta_{g_0}$, e se escrevemos

$$\alpha_0 = \sum_{i=0}^{k-1} q_i,\ \alpha_1 = \sum_{i=k}^{2k-1} q_i, ...,\ \alpha_l = \sum_{i=n-k-1}^{n-1} q_i$$

$$\begin{aligned} &\mu \cdot B = \bar{\mu} \cdot B \\ &\Leftrightarrow \Big(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, ..., \frac{1}{k}}_{k}, 0, ..., 0\Big) = \Big(\underbrace{\frac{1}{k}\alpha_0, ..., \frac{1}{k}\alpha_0}_{k}, \underbrace{\frac{1}{k}\alpha_1, ..., \frac{1}{k}\alpha_1}_{k}, ..., \underbrace{\frac{1}{k}\alpha_l, ..., \frac{1}{k}\alpha_l}_{k}\Big) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1,\ \sum_{i=k}^{2k-1} q_i = 0,\ ....,\ \sum_{i=n-k-1}^{n-1} q_i = 0. \end{aligned}$$

Isto implica que $\omega(\delta_{g_0}) = \omega(\mu)$, se e somente se $\sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1$, onde $\mu = (1, 0, ..., 0)$. Pelo mesmo argumento usado acima podemos ver que

$$\begin{aligned}&\omega(\delta_{g_i}) = \omega(\delta_{g_0}) \text{ for } 0 \leq i \leq k-1, \ \omega(\delta_{g_i}) = \omega(\delta_{g_k}) \text{ for } k \leq i \leq 2k-1, ...,\\ &\omega(\delta_{g_i}) = \omega(\delta_{g_{n-k-1}}) \text{ for } n-k-1 \leq i \leq n-1,\end{aligned}$$

e disto segue que $\omega(\mu) = \sum_i q_i \omega(\delta_{g_i}) = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j \omega(\delta_{g_{jk}})$, e se $\bar{\mu} = (q_0, ..., q_{n-1})$ e tomamos $\mu = \delta_{g_i}$, com $mk \leq i \leq mk-1$,

$$\omega(\bar{\mu}) = \omega(\delta_{g_i}) \Leftrightarrow \alpha_m = \sum_{i=mk}^{mk-1} q_i = 1, \ \text{e } \alpha_j = 0 \text{ for } j \neq m.$$

Finalmente, dadas $\mu = (q_0, ..., q_{n-1})$ e $\mu' = (q'_0, ..., q'_{n-1})$,

$$\omega(\mu) = \omega(\mu') \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} q_i = \sum_{i=0}^{k-1} q'_i, \ \sum_{i=k}^{2k-1} q_i = \sum_{i=k}^{2k-1} q'_i, ..., \ \sum_{i=n-k-1}^{n-1} q_i = \sum_{i=n-k-1}^{n-1} q'_i.$$

Definição 8.2.41. Seja $\nu \in \mathcal{P}(G)$ uma probabilidade acíclica e $\eta \in \mathcal{P}(G)$. Nós chamamos de bacia de atração de η o conjunto

$$\{\mu \in \mathcal{P}(G) : \lim_{n \to \infty} \Theta_\nu^n(\mu) = \eta\}.$$

Exemplo 8.2.42. Voltamos agora ao Exemplo 8.2.38 onde

$$G = \{e, a, b^2, ab, b, ab^2\},$$

nesta situação particular, $\nu = p = \alpha\delta_e + (1-\alpha)\delta_b$, $0 < \alpha < 1$ e podemos escrever $G = \{e, b, b^2, a, ab, , ab^2\}$ como no Lema 8.2.32. Então, dados $\mu = (q_0, ..., q_5)$ e $\mu' = (q'_0, ..., q'_5)$, nós temos

$$\omega(\mu) = \omega(\mu') \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2} q_i = \sum_{i=0}^{2} q'_i, \text{ e } \sum_{i=3}^{5} q_i = \sum_{i=3}^{5} q'_i.$$

Logo, se $\mu' = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8})$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} \Phi_\nu^n(\mu') &= \frac{1}{3}\Big(q'_0 + q'_1 + q'_2, ..., q'_0 + q'_1 + q'_2, q'_3 + q'_4 + q'_5, ..., q'_3 + q'_4 + q'_5\Big)\\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)\\ &= \omega(\mu') = \eta.\end{aligned}$$

Assim, a bacia de atração de $\eta = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$, isto é, o conjunto

$$\{\mu = (q_0, ..., q_5) \mid \lim_{n \to \infty} \Phi_\nu^n(\mu) = \eta\}$$

é dado por

$$\begin{cases} q_0 + q_1 + q_2 & = \frac{3}{4} \\ q_3 + q_4 + q_5 & = \frac{1}{4} \\ q_0, ..., q_5 & \in [0,1] \end{cases}$$

o qual é um subconjunto convexo de um hiperplano de dimensão 4 em $\mathbb{R}^6$, mais precisamente

$$\begin{cases} q_0 = \frac{3}{4} - a - b \\ q_1 = a, q_2 = b \\ q_3 = \frac{1}{4} - c - d \\ q_4 = c, q_5 = d \\ a + b \leq \frac{3}{4},\ c + d \leq \frac{1}{4} \\ a, b, c, d \in [0,1] \end{cases}$$

é a bacia de atração de $\eta = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$.

O fato de a bacia de atração de uma probabilidade ser um subconjunto convexo de um hiperplano vale em geral, como mostra o

Teorema 8.2.43. *Seja $\nu = p \in \mathcal{P}(G)$ uma probabilidade acíclica para $H = \langle Z_+(p) \rangle$, com $|H| = k$ e $|G| = |H| l$. Dada $\eta \in \mathcal{P}(G)$ onde*

$$\eta = (\underbrace{q_0, ..., q_0}_{k}, \underbrace{q_1, ..., q_1}_{k}, ..., \underbrace{q_{l-1}, ..., q_{l-1}}_{k}),$$

a bacia de atração de η é um subconjunto convexo de um hiperplano de dimensão $\frac{n(k-1)}{k}$ em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Para provarmos a convexidade da bacia de atração de uma certa medida η apenas notamos que que se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(G)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, então

$$\begin{aligned} \Theta_\nu(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) &= (\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) \cdot \nu(G^{-1} \times G) \\ &= \alpha\mu \cdot \nu(G^{-1} \times G) + (1-\alpha)\mu_2 \cdot \nu(G^{-1} \times G). \end{aligned}$$

Assim, se μ_1, μ_2 estão na bacia de atração de η segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Theta_\nu^n(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) &= \alpha \lim_{n\to\infty} \Theta_\nu^n(\mu_1) + (1-\alpha) \lim_{n\to\infty} \Theta_\nu^n(\mu_2) \\ &= \alpha\eta + (1-\alpha)\eta = \eta. \end{aligned}$$

Para provarmos a segunda afirmação do teorema observamos que se $\mu = (q'_0, q'_1, ..., q'_{n-1})$

está na bacia de atração de η, então $\lim_{n\to\infty}\Theta_\nu^n(\mu)=\eta$ se e somente se

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} q'_i = q_0 \\ \frac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=k}^{2k-1} q'_i = q_1 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=n-k-1}^{n-1} q'_i = q_{l-1} \\ q_0,...,q_{n-1}\in[0,1]. \end{cases} \tag{8.2.1}$$

Se esquecemos a restrição $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} q'_i = 1$ e $q_0,...,q_{n-1}\in[0,1]$, temos um sistema linear com n variáveis e l equações linearmente independentes. Logo o espaço de soluções deste sistema é um hiperplano de dimensão

$$n-l=n-\frac{n}{k}=\frac{n(k-1)}{k}.$$

Então a solução de (1) é um conjunto convexo dado pela interseção de um hiperplano de dimensão $\frac{n(k-1)}{k}$ com o simplexo $\Delta_n=\{(x_0,...,x_{n-1}):\sum_i x_i = 1,\ x_i\in[0,1]\}$. $\square$

Bibliografia

[1] C. Robinson, "Dynamical Systems - Stability, Symbolic Dynamics and Chaos. second edition." Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Londres 2003.

[2] L. W. Goodwyn, *The Product Theorem for Topological Entropy*, Transactions of the American Mathematical Socyet, **vol. 158** (1971.), 445–451.

[3] L. W. Goodwyn, *The Product Theorem for Topological Entropy*, Transactions of the American Mathematical Socyet, **vol. 158** (1971.), 445–451.

[4] Yu.V. Prokhorov, *Convergence of Random processes and limit theorems in probability theory*, in Theory Probab. Appl., **vol 1** (1956), 177–238.

[5] R. Mañé , " Introdução à teoria ergódica. " Projeto Euclides , 14. IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[6] N. Gigli, "Introduction to Optimal Transport: Theory and Applications," Publicações Matemáticas. Impa, Rio de Janeiro, 2011.

[7] M. Pollicott and M. Yuri, "Dynamical Systems and Ergodic Theory" Cambridge University Press, London, 1998.

[8] C. D. Aliprantis and K. C. Border, "Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhikers Guide, third edition" Springer, 2005.

[9] C. Vilanni, "Optimal Transport, Old and New," Springer, New York 2008.

[10] B. Kloeckner, *Optimal transport and dynamics of expanding circle maps acting on measures*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Available on CJO 2012 doi:10.1017/S014338571100109X.

[11] Seung-il Baik and Keumseong Bang, "Limit theorem of the doubly stochastic matrices" Kangweon-Kyungki Math. Jour. 11 (2003), No. 2, pp. 155-160.

[12] A.Mukherjea and N.A.Tserpes, *Measures on Topological Semigroups: Convolution Products and Randon Walks*, Springer Verlag, Berlin Heildelberg New York,1976.

[13] E. Cureg and A. Mukherjea, *Weak Convergence in Circulant Matrices*, Journal of Theoretical Probability, Vol. 18, No. 4, October 2005.

[14] S.Rubistein-Salzedo *On the Existence and Uniqueness of Invariant Measures on Locally Compact Groups*, 2004.

[15] M. Brin and G. Stuck, "Introduction to Dynamical Systems," Cambridge University Press, New York, 2002.

[16] M. P. do Carmo, "Geometria Riemanniana," Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[17] Seung-il Baik and Keumseong Bang, "Limit theorem of the doubly stochastic matrices" Kangweon-Kyungki Math. Jour. 11 (2003), No. 2, pp. 155-160.

[18] Santanu Chakraborty, "Cyclicity and Weak Convergnce for Convolution of Measures on Non-negative Matrices" The Indian Journal of Statistics. 2007, volume 69, Part 2, pp. 304-313.