UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Equações de Advecção-Difusão: Propriedades e Comportamento Assintótico

por

Graciela Moro

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano
Orientador

Porto Alegre, março de 2005.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Moro, Graciela

Equações de Advecção-Difusão: Propriedades e Comportamento Assintótico / Graciela Moro.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2005.

98 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005.
Orientador: Zingano, Paulo Ricardo de Ávila

Dissertação: Matemática Aplicada
equação de advecção-difusão, equação do calor, equação de Burgers, limites assintóticos

Equações de Advecção-Difusão: Propriedades e Comportamento Assintótico

por

Graciela Moro

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano

Banca examinadora:

Profa. Dra. Vanilde Bisognin
UNIFRA

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva
PPGMAP/IM/UFRGS

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo
PPGMAP/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
30 de março de 2005.

Prof[a]. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS . . . . **vi**

RESUMO . . . . **vii**

ABSTRACT . . . . **viii**

1 INTRODUÇÃO **1**

2 EXEMPLOS PARTICULARES **6**

2.1 Equação do Calor 6

2.2 Equação de Burgers 15

3 EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO **24**

3.1 Introdução 24

3.2 Alguns resultados básicos 28

3.3 Decaimento em $L^p(\mathbb{R}^n),\ n = 1$ 36

3.4 Decaimento em $L^p(\mathbb{R}^n),\ n > 1$ 48

3.5 Comportamento assintótico, $n = 1$ 56

3.6 Comportamento assintótico, $n > 1$ 64

4 COMPORTAMENTO DE $t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ **69**

4.1 Introdução 69

4.2 Caso particular: Equação do Calor 70

4.3 Caso particular: Equação de Burgers 78

4.4 Comportamento de $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ 80

4.5 Comportamento de $t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p > 1$ 82

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS **85**

APÊNDICE A **87**

APÊNDICE B **95**

BIBLIOGRAFIA **97**

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 (a) Solução $u(\cdot, t)$ para alguns valores de t da equação $u_t+10uu_x = u_{xx}$ correspondente ao perfil inicial $u_0 = -x(x+1,5)(1-x)$ *para* $-1,5 \leq x \leq 1$ *e* 0 *para* $x < -1,5$ *ou* $x > 1$. (b) Normas L^p para o problema descrito em (a). 30

Figura 3.2 Soluções $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t)$ para alguns valores de t da equação $u_t + 10uu_x = u_{xx}$ correspondentes a estados iniciais $u_0 = x+1$ *para* $-1 \leq x < 0$, $1 - x$ *para* $0 \leq x \leq 1$ *e* 0 *para* $x < -1$ *ou* $x > 1$ e $\hat{u}_0 = x + 1,5$ *para* $-1,5 \leq x < 0$, $1,5 - x$ *para* $0 \leq x \leq 1,5$ *e* 0 *para* $x < -1,5$ *ou* $x > 1,5$. 36

RESUMO

Neste trabalho, examinamos em detalhe resultados recentes apresentados em [Zingano, 1999], [Zingano, 2004], [Zingano, 1996a] [T. Hagstrom, 2004] sobre o comportamento de soluções para equações (escalares) de advecção-difusão não-lineares, da forma

$$u_t + div(\mathbf{f}(u)) = div(A(u)\nabla u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

correspondentes a estados iniciais $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aqui, $A(\mathsf{u}) \in \mathbb{R}^n$ é uniformemente positiva definida para todos os valores de u em questão, e $\mathbf{f}(\mathsf{u}) = (f_1(\mathsf{u}), \ldots, f_n(\mathsf{u}))$ corresponde ao fluxo advectivo, com $A, \mathbf{f}$ suaves. Entre os vários resultados, tem-se em particular os limites assintóticos

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}},$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$, uniformemente em p, bem como

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0, \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

para duas soluções $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ quaisquer correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a mesma massa, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{x},0)d\mathbf{x}$$

Outra propriedade fundamental, válida em dimensão $n \geq 2$, é

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$, se $v(\cdot,t)$ é solução da equação de advecção-difusão linear

$$v_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla v = div(A(0)\nabla v), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

com $u(\cdot,0), v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tendo a mesma massa.

Outros resultados de interesse são também discutidos.

ABSTRACT

In this work we give a detailed discussion of some recent results obtained in [Zingano, 1999], [Zingano, 2004], [Zingano, 1996a] [T. Hagstrom, 2004] concerning the behavior (particularly for large time) of solutions $u(\cdot, t)$ to (scalar) advection-diffusion equations of the form

$$u_t + div(\mathbf{f}(u)) = div(A(u)\nabla u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0$$

with bounded, integrable initial profiles, i.e., $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Here, $A(\mathsf{u}) \in \mathbb{R}^n$ is a uniformly positive definite matrix for all u concerned, and $\mathbf{f}(\mathsf{u}) = (f_1(\mathsf{u}), \ldots, f_n(\mathsf{u}))$ gives the advective flux, with $A, \mathbf{f}$ smooth. In particular, we obtain the following asymptotic limits,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}},$$

for each $1 \leq p \leq \infty$, uniformly in p, and we show

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0, \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

for an arbitrary pair $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t)$ of solutions associated with initial states $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ having the same mass, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x}$$

Another fundamental property which we examine in detail is that, when $n \geq 2$, we have

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

for all $1 \leq p \leq \infty$, uniformly in p, where $v(\cdot, t)$ is the solution of the linear advection-diffusion equation

$$v_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla v = div(A(0)\nabla v), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

provided only that $u(\cdot, 0), v(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ have the same mass.

Other results of interest are also discussed.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, examinamos diversas propriedades das soluções $u(\cdot, t)$ de equações parabólicas da forma

$$u_t + div(\mathbf{f}(u(\mathbf{x}, t))) = div(A(u(\mathbf{x,t}))\nabla u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \tag{1.1}$$

correspondendo a estados iniciais $u(\cdot, 0)$ limitados e integráveis, i.e., $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Em (1.1), $A, \mathbf{f}$ são funções dadas, suaves, com $A(\mathsf{u})$ matriz $n \times n$ positiva definida com

$$\langle \mathbf{v}, A(\mathsf{u})\mathbf{v} \rangle \geq \mu |\mathbf{v}|^2 \qquad \forall \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

para todo u envolvido, onde μ é uma constante positiva (fixa). Nestas condições, é sabido existir uma única solução $u(\cdot, t) \in C^0([0, +\infty[, L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0, +\infty[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$, e são certas propriedades desta solução que estudamos em detalhe nos capítulos a seguir. Por exemplo, uma propriedade que desempenha papel fundamental nesta discussão é o comportamento da norma L^1 de $u(\cdot, t)$, i.e.,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x}. \tag{1.3}$$

Tem-se para cada $t \geq t_0 \geq 0$,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.4}$$

i.e., $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ decresce com t; ademais, para um par qualquer de soluções $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t)$ do problema acima, tem-se

$$\|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0) - \hat{u}(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{1.5}$$

para todo $t > 0$, uma importante propriedade de contratividade com diversas consequências, e.g.

$$u(\cdot, 0) \leq \hat{u}(\cdot, 0) \Rightarrow u(\cdot, t) \leq \hat{u}(\cdot, t), \tag{1.6}$$

ou seja, se no instante inicial tivermos $u(\mathbf{x},0) \leq \hat{u}(\mathbf{x},0)$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, então teremos a mesma relação entre as soluções correspondentes $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ em qualquer instante t posterior.

Outras propriedades básicas são revistas, preparando o caminho para a questão central que examinamos, referente ao comportamento quando $t \to +\infty$ das normas L^p de $u(\cdot,t)$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.7}$$

inclusive $p = \infty$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)|. \tag{1.8}$$

Para $p = 1$, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \geq \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right| = |m| \tag{1.9}$$

para todo $t > 0$, onde m é a massa de $u(\cdot,t)$, invariante em t,

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}. \tag{1.10}$$

Em particular se $m \neq 0$ não podemos ter $u(\cdot,t)$ decaindo a zero em $L^1(\mathbb{R}^n)$, enquanto, para $p > 1$, é bem sabido que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty. \tag{1.11}$$

De fato, vamos mostrar, detalhando a análise em [Zingano, 1996a], [Zingano, 1999], [T. Hagstrom, 2004], [Zingano, 2004], que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \gamma_{p,n}(m) t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty, \tag{1.12}$$

onde $\gamma_{p,n}(m)$ é uma certa constante (positiva sempre que $m \neq 0$) que depende de p, n, m, e que computamos em detalhe. No caso $p = 1$, tem-se $\gamma_{p,n}(m) = |m|$, i.e.,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow |m| \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty \tag{1.13}$$

onde m é a massa da solução, ver (1.10). Além disso, sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ um par qualquer de soluções com mesma massa, temos

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty \tag{1.14}$$

e também,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty \tag{1.15}$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$, uniformemente em p. Este fato está relacionado com a seguinte propriedade fundamental, que derivamos em detalhe neste texto: as soluções $u(\cdot,t)$ de (1.1) podem ser bem aproximadas quando $t \to +\infty$ por soluções $v(\cdot,t)$ de equações mais simples: quando $n \geq 2$, temos

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty \tag{1.16}$$

e, mais geralmente, para cada $1 \leq p \leq \infty$,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty \tag{1.17}$$

onde $v(\cdot,t)$ é qualquer solução da equação *linear*

$$v_t + div\left(v\mathbf{f}'(0)\right) = div(A(0)\nabla u) \tag{1.18}$$

tendo a mesma massa de $u(\cdot,t)$, e, no caso $n = 1$, o mesmo vale para $v(\cdot,t)$ dada pela equação de Burgers

$$v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x = a(0)v_{xx}. \tag{1.19}$$

Intuitivamente podemos explicar este comportamento como segue: escrevendo (1.1) na forma

$$u_t + \mathbf{f}'(0)\cdot\nabla u + u\mathbf{f}''(0)\cdot\nabla u + \ldots = div(A(0)\nabla u) + div\left(uA'(0)\nabla u\right) + \ldots,$$

e, observando as taxas de decaimento de $u(\cdot,t)$ e suas derivadas discutidas no Cap. 3, temos

$$\|\mathbf{f}'(0)\cdot\nabla u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O\left(t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.20}$$

$$\|u(\cdot,t)\mathbf{f}^{''}(0)\cdot\nabla u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O\left(t^{-n-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.21}$$

$$\|div\left(A(0)\nabla u\right)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O\left(t^{-\frac{n}{2}-1}\right) \tag{1.22}$$

$$\|div\left(u(\cdot,t)A^{'}(0)\nabla u\right)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O\left(t^{-n-1}\right); \tag{1.23}$$

em particular, retendo o termo linear difusivo $div(A(0)\nabla u)$ na equação, precisamos apenas manter o termo $\mathbf{f}^{'}(0)\cdot\nabla u$ no caso $n \geq 2$, visto que os demais termos tem tamanho insignificante perto de $div(A(0)\nabla u)$; isso sugere a equação (1.18) acima. Quando $n = 1$, precisamos ainda manter o segundo termo na expansão do termo advectivo, visto que é da mesma ordem de $a(0)u_{xx}$; isso nos dá a equação (1.19).

Pelo papel desempenhado nestas aproximações, e dada a importância especial das equações (1.18), (1.19), começamos a discussão revisando no Capítulo 2 alguns resultados destas equações, em particular a representação explícita de $v(\cdot,t)$,

$$v(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{f}^{'}(0)t-\mathbf{y},A^{-1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{f}^{'}(0)t-\mathbf{y}\right)\right\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \tag{1.24}$$

no caso da equação do calor (1.18), e

$$v(x,t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left(x-f^{'}(0)t-y\right)^2}{4a(0)t}} e^{-\frac{f^{''}(0)}{2a(0)}\int_{\mathbb{R}} u(\xi,0)d\xi} u(y,0)dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left(x-f^{'}(0)t-y\right)^2}{4a(0)t}} e^{-\frac{f^{''}(0)}{2a(0)}\int_{\mathbb{R}} u(\xi,0)d\xi} dy} \tag{1.25}$$

no caso de (1.19). Em particular, denotando genericamente por $D^\ell v(\cdot,t)$ as demais derivadas (com relação à variável espacial $\mathbf{x}$) de v de ordem ℓ, derivamos estimativas para $\|D^\ell v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, onde

$$\|D^\ell v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i_1,\ldots,i_\ell=1}^{n} \left\|\frac{\partial^\ell v}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\cdot,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

De forma semelhante, para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, escrevemos

$$\|D^\ell v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i_1,\ldots,i_\ell=1}^{n} \left\|\frac{\partial^\ell v}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\cdot,t)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

e analogamente para $u(\cdot,t)$.

Nos capítulos 3 e 4, estendemos a discussão para a equação geral (1.1), estabelecendo os resultados indicados e outros relacionados. Por conveniência, resumimos no Apêndice A algumas desigualdades utilizadas ao longo do texto, particularmente a desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Niremberg, e no Apêndice B computamos algumas identidades úteis referentes à expressão (1.24) acima.

2 EXEMPLOS PARTICULARES

Neste capítulo, abordaremos alguns exemplos particulares importantes da equação de advecção-difusão

$$u_t + div(\mathbf{f}(u)) = div(A(u)\nabla u), \tag{2.1}$$

estabelecendo alguns resultados que serão investigados em detalhe nos Capítulos 3 e 4 para a equação (2.1).

2.1 Equação do Calor

Consideremos a equação do calor dada por

$$u_t + \mathbf{a}\cdot\nabla u = div(A\nabla u), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0, \tag{2.2}$$

onde $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ é constante e $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz real constante, positiva definida e simétrica, com a condição inicial

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_0\in L^1(\mathbb{R}^n) \tag{2.3}$$

Na equação (2.2), ∇u denota o gradiente de $u(\mathbf{x},t)$ com respeito à variável $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, e div é o operador divergente $div\ \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$. Neste caso, a solução do problema (2.2), (2.3) é dada por

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{a}t-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a}t-\mathbf{y})\rangle}u_0(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \tag{2.4}$$

onde λ é a média geométrica dos autovalores $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de A, i.e.,

$$\lambda = (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{detA}. \tag{2.5}$$

Mais geralmente, considerando $1\le p\le\infty$, a expressão (2.4) define também uma solução da equação (2.2) quando $u_0\in L^p(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \infty, \tag{2.6}$$

sendo a condição $u(\cdot,0) = u_0$ satisfeita no sentido de se ter $u(\cdot,t) \longrightarrow u_0$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0^+$, i.e.,

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0^+, \tag{2.7}$$

onde $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ denota a norma

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.8}$$

Ademais, a solução $u(\cdot,t)$ dada em 2.4 acima satisfaz $u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^n))$, i.e., $\|u(\cdot,t) - u(\cdot,\hat{t})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ quando $t \to \hat{t}$, para cada $\hat{t} \geq 0$ dado, e satisfaz (2.2) no sentido clássico, sendo de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times\,]0,\infty[)$. É sabido que (2.4) é a única solução da equação (2.2) com $u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^n))$, $u(\cdot,0) = u_0$, ver e.g. [O. A. Ladyzhenskaia e Uracelva, 1968], [Taylor, 1996] e teorema (2.1) a seguir.

Nesta seção derivamos algumas propriedades assintóticas para a solução $u(\cdot,t)$ do problema (2.2), (2.3), usando a representação explícita dada em (2.4). Claramente, mudando $\mathbf{x}$ para $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$, é suficiente para considerar o caso $\mathbf{a} = 0$, o qual será assumido nas derivações abaixo.

Teorema 2.1. *Sendo $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u(\cdot,t)$ solução (clássica) de (2.2), (2.3) em $\mathbb{R}^n \times\,]0,T[$ com $u(\cdot,t) \in C^0([0,T[, L^p(\mathbb{R}^n))$, $u(\cdot,0) = u_0$, então*

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle} u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \tag{2.9}$$

para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < T$.

Demonstração: Seja $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{t} \in\,]0,T[$ dados, fixos no que segue e $u(\mathbf{x},t)$ em $C^0([0,T[\,, L^p(\mathbb{R}^n))$, solução de (2.2), (2.3), mostremos que

$$u(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\hat{\boldsymbol{x}} - \mathbf{x}, t) u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{2.10}$$

onde

$$K(\boldsymbol{\xi},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{4t}\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle}. \tag{2.11}$$

Considere $v : \mathbb{R}^n \times\ ]-\infty, \hat{t}[\ \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(\mathbf{x}, t) = K(\hat{\boldsymbol{x}} - \mathbf{x}, \hat{t} - t). \tag{2.12}$$

Em particular

$$v_t = -div(A\nabla v), \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t < \hat{t}$$

sendo que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times\ ]-\infty, \hat{t}[\ )$.

Para cada $R \geq 1$, seja $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que
$(i)\zeta_R(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall\ |\mathbf{x}| \leq R$
$(ii)\zeta_R(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall\ |\mathbf{x}| \geq R + 1$
$(iii)0 \leq \zeta_R(\mathbf{x}) \leq 1 = 0 \quad \forall\ R \leq |\mathbf{x}| \leq R + 1$
$(iv)|\frac{\partial \zeta_R}{\partial x_j}(\mathbf{x})| \leq M \quad \forall\ \mathbf{x} \leq \mathbb{R}^n,\ \forall\ i \leq j \leq n$
$(v)|\frac{\partial \zeta_R}{\partial x_i x_j}(\mathbf{x})| \leq M \quad \forall\ \mathbf{x} \leq \mathbb{R}^n,\ \forall\ 1 \leq i, j \leq n$
com $M > 0$ independente de R.

Como $v_t = -div(A\nabla v)$ e $u_t = div(A\nabla u)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in\ ]0, \hat{t}[$, obtemos

$$(u\zeta_R v)_t - div(\zeta_R v A\nabla u - uA\nabla(\zeta_R v)) = uvdiv(A\nabla\zeta_R) + 2u\langle A\nabla v, \nabla\zeta_R\rangle. \tag{2.13}$$

Tomando $\epsilon \in\ ]0, \frac{\hat{t}}{2}[$, e integrando (2.13) em $\mathbf{x} \in B_{R+1}(0)$, $t \in [\epsilon, \hat{t} - \epsilon]$, obtemos

$$\int_{|\mathbf{x}| \leq R+1} \int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon} (u\zeta_R v)_t dt d\mathbf{x} = \int_{|\mathbf{x}| \leq R+1} \int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon} div(\zeta_R v A\nabla u - uA\nabla(\zeta_R v)) dt d\mathbf{x} +$$
$$+ \int_{|\mathbf{x}| \leq R+1} \int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon} uvdiv(A\nabla\zeta_R) dt d\mathbf{x} + \int_{|\mathbf{x}| \leq R+1} \int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon} 2u\langle A\nabla v, \nabla\zeta_R\rangle dt d\mathbf{x}$$

visto que $\zeta_R(\mathbf{x}) = \frac{\partial \zeta_R}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0$ se $|\mathbf{x}| \geq R + 1$, como tem-se também $\frac{\partial \zeta_R}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \zeta_R}{\partial x_i x_j}(\mathbf{x}) = 0$ se $|\mathbf{x}| \leq R$. Então, por Fubini

$$\int_{|\mathbf{x}| \leq R+1} \int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon} (u\zeta_R v)_t dt d\mathbf{x} = \int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon} \int_{|\mathbf{x}| \leq R+1} div(\zeta_R v A\nabla u - uA\nabla(\zeta_R v)) d\mathbf{x} dt +$$
$$+ \int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon} \int_{R \leq |\mathbf{x}| \leq R+1} uvdiv(A\nabla\zeta_R) d\mathbf{x} dt + 2\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon} \int_{R \leq |\mathbf{x}| \leq R+1} u\langle A\nabla v, \nabla\zeta_R\rangle d\mathbf{x} dt.$$

Agora,

$$\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1}\int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}(u\zeta_R v)_t dtd\mathbf{x} = \int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} u(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)\zeta_R(x)v(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)d\mathbf{x} -$$
$$- \int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} u(\mathbf{x},\epsilon)\zeta_R(x)v(\mathbf{x},\epsilon)d\mathbf{x}.$$

Pelo teorema do Divergente, e utilizando os argumentos acima,

$$\int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} div(\zeta_R vA\nabla u - uA\nabla(\zeta_R v))d\mathbf{x}dt =$$
$$= \int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}\int_{|\mathbf{x}|=R+1} (\zeta_R vA\nabla u - uA\nabla(\zeta_R v))\mathbf{n}(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x})dt = 0.$$

Quando $R\to+\infty$, temos

$$\int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}\int_{R\leq|\mathbf{x}|\leq R+1} uv div(A\nabla\zeta_R)d\mathbf{x}dt = 0,$$

e também

$$2\int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}\int_{R\leq|\mathbf{x}|\leq R+1} u\langle A\nabla v,\nabla\zeta_R\rangle d\mathbf{x}dt = 0.$$

Assim, obtemos

$$\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} u(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)\zeta_R(\mathbf{x})v(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)d\mathbf{x} - \int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} u(\mathbf{x},\epsilon)\zeta_R(\mathbf{x})v(\mathbf{x},\epsilon)d\mathbf{x} = 0.$$

Fazendo $R\to+\infty$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)v(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},\epsilon)v(\mathbf{x},\epsilon)d\mathbf{x} = 0$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

E então, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)K(\hat{\boldsymbol{x}}-\mathbf{x},\epsilon)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},\epsilon)K(\hat{\boldsymbol{x}}-\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)d\mathbf{x}$$

visto que, $v(\mathbf{x},t)$ é dado por (2.12).

Fazendo $\epsilon\to 0^+$, obtém-se

$$u(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{x})K(\hat{\boldsymbol{x}}-\mathbf{x},\hat{t})d\mathbf{x}, \qquad (2.14)$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 2.2. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.2) com $u(\cdot,0)=u_0\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le\infty$, então $u(\cdot,t)\in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $t>0$, tendo-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\quad\forall\ t>0. \tag{2.15}$$

Demonstração: Sendo $u(.,t)$ dada por (2.4), temos os seguintes casos:

Caso $p=1$:

Usando o Teorema de Fubini, tem-se:

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x},t)|d\mathbf{x}\ \le\ \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}\\ &= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{x}\right)|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Introduzindo $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}-\mathbf{y}$ e usando (B.1), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ \le\ \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{4t}\langle\boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle}d\boldsymbol{\xi}\right)|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y}=\int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y},$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\le\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\qquad\forall\ t>0. \tag{2.16}$$

Caso $p=\infty$:

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x},t)|=\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\left|\int_{R^n}e^{\frac{-1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|\\ &\le \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n}e^{\frac{-1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y}\\ &\le \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n}e^{\frac{-1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{y}\|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\ &= \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

para cada $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, dado que (B.1) vale.

Portanto, para todo $t>0$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.17}$$

Caso $1<p<\infty$:

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x},t)|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n}e^{\frac{-1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{-1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}\right)^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Tomando $q \in]1,+\infty[$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tem-se pela desigualdade de Hölder e por (B.1) que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{\frac{-1}{4tp}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}\right)\left(e^{\frac{-1}{4tq}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}\right)|u(\mathbf{y},0)|\, d\mathbf{y} \\
\leq &\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|^p\, d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{p}} \\
= &\ (4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|^p\, d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Então, usando Teorema de Fubini, (B.1) e (2.18) obtemos,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left((4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)p}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|^p\, d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|^p\, d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{x}\right)|u(\mathbf{y},0)|^p\, d\mathbf{y}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u(\mathbf{y},0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\mathbf{y},0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\ t>0$$

como afirmado.

□

O caso $p=\infty$ acima, i.e., $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\mathbf{y},0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, corresponde ao *Princípio do Máximo*. Observe que, de acordo com o Teorema (2.2), $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ decresce com t. Mostramos no resultado a seguir que a solução $u(\cdot,t)$ de (2.2), (2.3) decai a zero em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para cada $1<p\leq\infty$.

Teorema 2.3. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.2), (2.3) tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(\lambda,p,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \quad \forall\ t>0 \qquad (2.19)$$

para cada $1\leq p\leq\infty$, onde $C(\lambda,p,n)$ denota uma constante positiva cujo valor depende de λ,p,n.

Demonstração: Para $p = 1$, obtemos a desigualdade (2.16), a qual já foi provada. Para $p = \infty$:

Dado $t > 0$, tem-se, por (2.4),

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x},t)| &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{\frac{-1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u(\mathbf{y},0)| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} |u(\mathbf{y},0)| \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, de modo que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(\lambda,p,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \, t^{\frac{-n}{2}} \quad \forall\, t > 0, \tag{2.20}$$

onde $C(\lambda,p,n) = \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}$.

Para $1 < p < \infty$:

Usando a desigualdade de Interpolação (A.8), (2.16) e (2.20)

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/p} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-1/p} \\ &\leq \left(\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \, t^{\frac{-n}{2}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}} \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \, t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\forall\, t > 0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(\lambda,p,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \, t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)},$$

onde $C(\lambda,p,n) = \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}}$, como afirmado.

$\square$

No que segue, obtemos estimativas para as derivadas da solução $u(\cdot,t)$ do problema (2.2), (2.3).

Teorema 2.4. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.2), (2.3) temos que*

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(\lambda,p,n)\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{\ell}{2}} \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.21}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ *e todo* ℓ*, onde* $C_\ell(\lambda, p, n)$ *é uma constante positiva dependendo de* ℓ, λ, p, n.

Demonstração: Sendo $u(\cdot, t)$ dada por (2.4), por diferenciação, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{-1}{4t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle\right) e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} u(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y},$$

isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-1}{2t} \left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}\vec{e}_i\right\rangle e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} u(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y},$$

e então, por (A.4)

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t)\right| &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{2\sqrt{t}} \left|A^{-1}\vec{e}_i\right| e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} |u(\mathbf{y}, 0)| d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{|A^{-1}\vec{e}_i|}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-1}{8t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} |u(\mathbf{y}, 0)| d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{C\,|A^{-1}\vec{e}_i|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-n}{2}-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, onde $C = \max_{x>0} \boldsymbol{\xi} e^{\frac{-\boldsymbol{\xi}^2}{8\lambda_{\max(A)}}} < \infty$ tal que $\boldsymbol{\xi} = \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{t}}$.

Portanto,

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-1}{2}}, \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.22}$$

e,

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-n}{2}-\frac{1}{2}}, \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.23}$$

e então, pela desigualdade de Interpolação (A.8)

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}, \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.24}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Mais geralmente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{-1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\langle \vec{e}_j, A^{-1}\vec{e}_i\rangle}{2} - \frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}\vec{e}_j\rangle^2}{2t}\right) e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} u(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}$$

de modo que

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x},t)\right| \leq \frac{t^{-1}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} P_2 \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{t}} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} |u(\mathbf{y},0)| d\mathbf{y}.$$

Mais geralmente ainda, obtém-se de modo análogo

$$\left|\frac{\partial^\ell u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)\right| \leq \frac{t^{\frac{-\ell}{2}}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} P_{2\ell} \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{t}} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} |u(\mathbf{y},0)| d\mathbf{y}$$

para todos $\ell \geq 1$ e $i_1, i_2, \ldots, i_\ell \in \{i, \ldots, n\}$, onde $p_{2\ell}(Z) = a_0^{[\ell]} + a_1^{[\ell]} Z + \ldots + a_{2\ell}^{[\ell]} Z^{2\ell}$ é um certo polinômio de grau 2ℓ.

Sendo $C_\ell := \max_{x>0} p_{2\ell}(\boldsymbol{\xi}) e^{\frac{-\boldsymbol{\xi}^2}{8\lambda_{max(A)}}} < \infty$ onde $\boldsymbol{\xi} = \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{t}}$ tem-se

$$\left|\frac{\partial^\ell u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)\right| \leq \frac{C_\ell t^{\frac{-\ell}{2}}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{8t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} |u(\mathbf{y},0)| d\mathbf{y}$$

de modo que

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}_\ell \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-\ell}{2}}, \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.25}$$

e,

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}_\ell \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-n}{2}-\frac{\ell}{2}}, \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.26}$$

e então, pela desigualdade de Interpolação (A.8)

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}_\ell \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{\ell}{2}}, \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.27}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ e todo $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.

$\square$

De modo inteiramente análogo, quando $u_0 \in L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq \hat{p} < \infty$, tem-se que $u(\cdot,t)$ dada em (2.4) satisfaz

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell \|u(\cdot,0)\|_{L^{\hat{p}}(\mathbb{R}^n)} t^{\frac{-n}{2}(\frac{1}{\hat{p}}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.28}$$

para cada $\ell \geq 0$, onde $C_\ell > 0$ é uma constante que depende de λ, n, p.

2.2 Equação de Burgers

Nesta seção, vamos derivar algumas propriedades das soluções $u(\cdot,t)$ da Equação de Burgers (viscosa)

$$u_t + (au + bu^2)_x = \mu u_{xx} \tag{2.29}$$

onde a, b, μ são constantes com $\mu > 0$, ou, mais geralmente, a equação de Burgers generalizada

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx} \tag{2.30}$$

onde f é uma função (suave) dada. À equação (2.29) ou (2.30) acrescentamos a condição inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}). \tag{2.31}$$

A equação de Burgers (2.29) tem inúmeras aplicações [Fletcher, 1982], por se tratar de um modelo muito simples envolvendo difusão (linear) e advecção não linear, podendo ser usado como uma versão simplificada para diversos fenômenos, incluindo as equações de Navier-Stokes em dinâmica de fluidos. Com efeito, como será mostrado no Cap. 3 (Seção 3.5), as soluções de (2.30) podem ser bem aproximadas para $t \gg 1$ por soluções da equação de Burgers (2.29): sendo $v(\cdot,t)$ dada por

$$v_t + \left(f'(0)v + \frac{f''(0)}{2}v^2\right)_x = \mu v_{xx} \tag{2.32}$$

$$v(\cdot,0) = u_0, \tag{2.33}$$

tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{2.34}$$

para cada $1 \le p \le \infty$, uniformemente em p, onde $u(\cdot,t)$ é solução de (2.30). Para (2.29), a transformação (não linear)

$$\varphi(x,t) = e^{-\frac{b}{\mu}\int_0^x u(\xi,t)d\xi}, \tag{2.35}$$

descoberta independentemente por E. Hopf [Hopf, 1950] e J. Cole [Cole, 1951], transforma (2.29) na equação (linear) do calor

$$\varphi_t + a\varphi_x = \mu\varphi_{xx}, \tag{2.36}$$

tendo-se

$$u(x,t) = -\frac{\mu}{b}\frac{\varphi_x}{\varphi}, \tag{2.37}$$

de modo que a solução de (2.29) com $u(\cdot,0) = u_0$ é dada por

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-at-y)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) u_0(y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-at-y)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) dy} \tag{2.38}$$

onde

$$\varphi_0(y) = e^{-\frac{b}{\mu}\int_0^y \varphi_0(\xi) d\xi}. \tag{2.39}$$

Ao contrário do exemplo anterior (equação do calor), obtemos os resultados a seguir sem utilizar a representação explícita (2.38) para $u(\cdot,t)$ derivando desigualdades de energia apropriadas. Este procedimento se aplica igualmente à equação mais geral (2.30). Estes resultados serão obtidos no Capítulo 3 para equações ainda mais gerais que (2.30).

Teorema 2.5. *(Desigualdade de Energia 1) Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.30), (2.31), tem-se*

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq 2\sqrt{2}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \tag{2.40}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Os argumentos usados nesta demonstração são baseados em [Zingano, 1999].

Multiplicando (2.30) por tu e integrando em $[0,T]\times\mathbb{R}$, $T > 0$ dado, obtém-se

$$\int_0^T t\int_{\mathbb{R}} uu_t dxdt + \int_0^T t\int_{\mathbb{R}} uf'(u)u_x dxdt = \mu\int_0^T t\int_{\mathbb{R}} uu_{xx} dxdt.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T t\int_{\mathbb{R}} uu_t dxdt &= \frac{T}{2}\int_{\mathbb{R}} u(x,T)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2 dxdt \\ &= \frac{T}{2}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{2}\int_0^T \|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)f'(u(x,t))u_x(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} g(u(x,t))dx = 0, \qquad (2.42)$$

onde $g(\mathsf{u}) = \int_0^{\mathsf{u}} v f'(v)dv$.

Finalmente, integrando por partes , obtém-se

$$\mu \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(x,t)u_{xx}dxdt = -\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \qquad (2.43)$$

Portanto, por (2.41), (2.42) e (2.43), obtém-se

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt = \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.$$

Pela desigualdade de Sobolev (A.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt &\leq \sqrt[3]{4} \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})} \|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
&\leq \sqrt[3]{4}\ \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})} \int_0^T \|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
&\leq 2^{\frac{2}{3}}\ \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})} \left(2\sqrt{T}\right)^{\frac{2}{3}} (2\mu)^{\frac{-1}{3}} \left(2\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt\right)^{\frac{1}{3}},
\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Hölder (A.5).

Portanto, sendo $E(T) = T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$, obtemos

$$E(T) \leq 2\|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-1}{3}}\ T^{\frac{1}{3}}\ E(T)^{\frac{1}{3}},$$

o que implica

$$E(T) \leq 2\sqrt{2}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-1}{2}}\ T^{\frac{1}{2}},$$

como queríamos demonstrar. □

Em particular, resulta

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}(\mu T)^{\frac{-1}{4}} \qquad \forall\ T > 0, \qquad (2.44)$$

e

$$\int_0^T t\|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \sqrt{2}\ \mu^{\frac{-3}{2}}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ T>0. \tag{2.45}$$

Segue que, dado $t_* > 0$, temos

$$2\mu\int_{\frac{t_*}{2}}^{t_*} t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}t_*^{\frac{1}{2}},$$

de modo que tem de existir $t_0 \in [\frac{t_*}{2}, t_*]$ tal que

$$\mu t_0\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2}{t_*}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}t_*^{\frac{1}{2}},$$

isto é,

$$t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}}\frac{t_0}{t_*}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}t_*^{\frac{1}{2}},$$

isto é, para cada $t_* > 0$, existe $t_0 \in [\frac{t_*}{2}, t_*]$ tal que

$$t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}t_*^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, tomando uma sequência de valores t_*^n tendendo a zero, podemos, formar uma sequência $(t_0^{(n)})_n$ com $t_0^n \to 0^+$ tal que

$$t_0^{(n)^2}\|u_x(\cdot,t_0^n)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \qquad \textit{quando} \quad n\to\infty. \tag{2.46}$$

Uma consequência importante dos resultados acima á dada a seguir.

Teorema 2.6. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.30), (2.31) então*

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-1}{2}}\ T^{\frac{-1}{2}} \qquad \forall\ T>0. \tag{2.47}$$

Demonstração: Dado $T > 0$, temos, por (2.44),

$$\int_{\frac{T}{2}}^T t\|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \sqrt{2}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-3}{2}}\ T^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall\ T>0,$$

e então, pelo teorema (A.9), existe $\hat{t} \in [\frac{T}{2}, T]$ tal que

$$\hat{t}\|u_x(\cdot,\hat{t})\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2}\ \mu^{\frac{-3}{2}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-1}{2}},$$

isto é,

$$\|u_x(\cdot,\hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}\,\mu^{\frac{-3}{4}}\,\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\,T^{\frac{-1}{4}}\,\hat{t}^{\frac{-1}{2}}, \tag{2.48}$$

e então, pela desigualdade de Sobolev (A.10), por (2.44) e (2.48), temos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2}\,\|u(\cdot,\hat{t})\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\,\|u_x(\cdot,\hat{t})\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\leq 2\sqrt[4]{2}\,\mu^{\frac{-1}{2}}\,\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\,T^{\frac{-1}{8}}\,\hat{t}^{\frac{-3}{8}}\\
&\leq 2^{\frac{13}{8}}\,\mu^{\frac{-1}{2}}\,\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\,T^{\frac{-1}{2}},
\end{aligned}$$

visto que $\frac{T}{2} \leq \hat{t}$. Portanto,

$$\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\,\mu^{\frac{-1}{2}}\,\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\,T^{\frac{-1}{2}},$$

e o resultado segue, visto que $\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pelo Princípio do Máximo. □

Vamos obter também estimativas para $\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$, para isto será conveniente introduzirmos constantes $k_1, k_\infty > 0$ tais que

$$\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq k_1, \qquad \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq k_\infty. \tag{2.49}$$

Teorema 2.7. *(Desigualdade de Energia 2) Sendo $u(\cdot,t)$ solução do problema (2.30), (2.31), tem-se*

$$T^2\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_0^T t^2\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu,k_1,k_\infty)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}} \tag{2.50}$$

para todo $T > 0$ e para alguma constante $C(\mu,k_1,k_\infty) > 0$ que depende apenas da constante positiva μ e dos parâmetros k_1, k_∞ dados em (2.49) acima.

Demonstração: Seja $T > 0$ dado. Diferenciando (2.30) em relação a x, multiplicando o resultado por t^2u_x e integrando em $\mathbb{R}\times[t_0,T]$, onde $t_0 \in\,]0,T[$ é arbitrário, obtemos, integrando por partes

$$\begin{aligned}
T^2\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_{t_0}^T t^2\|u_{xx}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dxdt &\leq t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} +\\
+\ 2\int_{t_0}^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt &+ 2\int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}}|f'(u)-f'(0)|\;|u_x|\;|u_{xx}|dxdt. \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (A.1), com $\epsilon = \mu$, tem-se

$$
\begin{aligned}
& 2\int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |f^{'}(u) - f^{'}(0)|\ |u_x|\ |u_{xx}| dx dt \leq \\
\leq\ & \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dx dt + \frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |f^{'}(u) - f^{'}(0)|^2\ |u_x|^2 dx dt \\
\leq\ & \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + C(\mu, k_\infty) \int_{t_0}^{T} t^2 \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\
\leq\ & \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + C(\mu, k_1, k_\infty) \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt, \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

pelo teorema (2.6).

Substituindo (2.52) em (2.51), obtemos

$$
\begin{aligned}
& T^2 \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|u_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dx dt \\
\leq\ & t_0^2 \|u_x(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C(\mu, k_1, k_\infty) \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt,
\end{aligned}
$$

de modo que, fazendo $t_0 \to 0^+$ como em (2.46) e usando (2.45), obtemos

$$
T^2 \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu \int_{0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, k_1, k_\infty) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}},
$$

como afirmado.

□

Em particular, resulta

$$
\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, k_1, k_\infty) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{-3}{4}}, \qquad \forall\, T > 0, \qquad (2.53)
$$

e

$$
\int_{0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, k_1, k_\infty) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall\, T > 0. \qquad (2.54)
$$

Obtemos ainda que, para $t_* > 0$ dado qualquer,

$$
\int_{\frac{t_*}{2}}^{t_*} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, k_1, k_\infty) t_*^{\frac{1}{2}},
$$

de modo que tem de existir $t_0 \in [\frac{t_*}{2}, t_*]$ tal que

$$
\frac{t_*}{2} t_0^2 \|u_{xx}(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C(\mu, k_1, k_\infty) t_*^{\frac{1}{2}},
$$

isto é,

$$t_0^2 \|u_{xx}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C(\mu, k_1, k_\infty) t_*^{\frac{-1}{2}},$$

e daí

$$\begin{aligned} t_0^3 \|u_{xx}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq C(\mu, k_1, k_\infty) \left(\frac{t_0}{t_*}\right)^{\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\mu, k_1, k_\infty) t_*^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

e então, existe sequência $(t_0^{(n)})_n$ com $t_0^{(n)} \to 0^+$ quando $n \to \infty$ e

$$t_0^{(n)^3} \|u_{xx}(\cdot, t_0^{(n)})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \longrightarrow 0 \qquad quando \quad n \to \infty. \tag{2.55}$$

Teorema 2.8. *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (2.30), (2.31), então*

$$T^3 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu \int_0^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, k_1, k_\infty) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \tag{2.56}$$

para todo $T > 0$ e para alguma constante $C(\mu, k_1, k_\infty) > 0$ que depende apenas da constante $\mu > 0$ e dos parâmetros k_1, k_∞ definidos em (2.49) acima.

Demonstração: Seja $T > 0$ dado. Derivando (2.30) duas vezes em relação a x, multiplicando o resultado por $t^3 u_{xx}$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, onde $t_0 \in]0, T[$ é escolhido de modo a estar na sequência $(t_0^n)_n$ dada em (2.55), obtemos

$$\begin{aligned} T^3 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_{t_0}^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq t_0^3 \|u_{xx}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \\ + \ 3 \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + 2 \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)| \ |u_{xx}| \ |u_{xxx}| dx dt + \\ + \ 2 \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} f''(u) u_x^2 u_{xxx} dx dt. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Usando a desigualdade (A.1), com $\epsilon = \frac{\mu}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned} & 2 \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)| \ |u_{xx}| \ |u_{xxx}| dx dt \leq \\ \leq \ & \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}(\cdot, t)|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dx dt + \frac{2}{\mu} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|^2 \ |u_{xx}|^2 dx dt \\ \leq \ & \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + C(\mu, k_\infty) \int_{t_0}^T t^3 \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\ \leq \ & \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + C(\mu, k_1, k_\infty) \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt, \end{aligned} \tag{2.58}$$

pelo teorema (2.6).

Por outro lado, pela desigualdade (A.1), com $\epsilon = \frac{\mu}{2}$, tem-se

$$2\int_{t_0}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} f''(u) u_x^2 u_{xxx} dx dt \leq \frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{T} t^3 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^3 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R})} dt$$

de modo que, usando a desigualdade de Sobolev (A.15), obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T} t^3 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R})} dt &\leq C\int_{t_0}^{T} t^3 \|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq C(\mu, k_1, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt,\end{aligned}$$

pelo teorema (2.6).

Portanto,

$$2\int_{t_0}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} f''(u) u_x^2 u_{xxx} dx dt \leq \frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{T} t^3 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_1, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \tag{2.59}$$

Substituindo (2.58), (2.59) em (2.57), obtém-se

$$\begin{aligned}&T^3 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{t_0}^{T} t^3 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq \\ &\leq t_0^3 \|u_{xx}(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu, k_1, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt.\end{aligned}$$

Fazendo $t_0 \to 0^+$ como em (2.55), obtém-se então

$$T^3 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{t_0}^{T} t^3 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, k_1, k_\infty) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}},$$

como afirmado. □

Em consequência,

$$\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, k_1, k_\infty) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{-5}{4}}, \qquad \forall\, T > 0. \tag{2.60}$$

Procedendo desta forma sucessivamente para derivadas de ordem mais alta, obtemos

$$T^{\ell+1} \|D^\ell u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{0}^{T} t^{\ell+1} \|D^{\ell+1} u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C_\ell(\mu, k_1, k_\infty) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} \tag{2.61}$$

para todo $T > 0$ e cada $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$, onde $C_\ell(\mu, k_1, k_\infty)$ denota uma constante positiva cujo valor depende de ℓ, μ, k_1, k_∞.

Segue de (2.61) que

$$\|D^\ell u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_\ell(\mu, k_1, k_\infty)\|u(\cdot, 0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{-1}{4} - \frac{\ell}{2}}, \qquad \forall\, T > 0 \tag{2.62}$$

para todo $\ell \geq 0$.

3 EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO

3.1 Introdução

Neste capítulo, examinamos o comportamento das soluções $u(\cdot,t)$ do problema de Cauchy para a equação escalar de advecção-difusão

$$u_t + div(\mathbf{f}(u)) = div(A(u)\nabla u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{3.1}$$

onde o estado inicial $u(\cdot,0)$ é um pulso arbitrário limitado e integrável em $\mathbb{R}^n$, isto é

$$u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Na equação (3.1), as funções $A, \mathbf{f}$ são supostas conhecidas, com $A, \mathbf{f}$ suaves na região considerada, $div\ \mathbf{f}(u)$ é o divergente da função fluxo $\mathbf{f}(u)$ com respeito à variável espacial $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, isto é, $div\ \mathbf{f}(u) = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(u(\mathbf{x},t)) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(u(\mathbf{x},t))$, ∇u é o gradiente espacial de $u(\mathbf{x},t)$, e $A(u)$ denota a matriz positiva definida de ordem n descrevendo a dissipação viscosa no sistema, com

$$\langle \mathbf{v}, A(\mathsf{u})\mathbf{v} \rangle \geq \mu |\mathbf{v}|^2 \qquad \forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

para alguma constante $\mu > 0$ e para todo u envolvido com k_1, k_∞ tais que

$$\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq k_1, \qquad \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq k_\infty. \tag{3.4}$$

Sob estas condições, (3.1) e (3.2) admitem uma única solução clássica $u(\mathbf{x},t)$ com $u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0,+\infty[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$, ver [O. A. Ladyzhenskaia e Uracelva, 1968], [Taylor, 1996], [Zingano, 1996a], [T. Hagstrom, 2004].

Na Seção 3.2, derivamos algumas propriedades básicas das soluções $u(\cdot,t)$; em particular, vemos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ decresce monotonicamente com t, quando $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t \geq t_0 \geq 0, \tag{3.5}$$

e, mais geralmente, quando $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, o mesmo vale para $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t \geq t_0 \geq 0, \tag{3.6}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. Em particular, para $p = \infty$, tem-se o *Princípio do Máximo*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t \geq t_0 \geq 0. \tag{3.7}$$

Mostramos também que, quando $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a massa de $u(\cdot,t)$, i.e., a quantidade m dada por

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} \tag{3.8}$$

é invariante no tempo, ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} \quad \forall\ t > 0. \tag{3.9}$$

Ademais, mostramos que as soluções são contrativas em $L^1(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0) - \hat{u}(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > 0 \tag{3.10}$$

para soluções $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ com estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Uma consequência importante é a seguinte propriedade de monotonicidade: sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, tem-se

$$u(\cdot,0) \leq \hat{u}(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq \hat{u}(\cdot,t) \qquad \forall\ t > 0. \tag{3.11}$$

Na Seção 3.3, estendemos os resultados obtidos no Capítulo 2 para a equação de Burgers a equações de advecção-difusão mais gerais da forma

$$u_t + f(u)_x = (a(u)u_x)_x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{3.12}$$

com $u(\cdot,t)$ satisfazendo a condição inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}). \tag{3.13}$$

Na equação (3.12), as funções a, f são dadas, com a, f duas vezes diferenciáveis (i.e., $a, f \in C^2$), e

$$a(\mathsf{u}) \geq \mu > 0, \qquad \forall\ \mathsf{u} \in [-k_\infty, k_\infty] \tag{3.14}$$

com k_1, k_∞ tal que

$$\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq k_1, \qquad \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq k_\infty. \tag{3.15}$$

Para alguns resultados, é preciso supor também que $f^{''}(u)$ é Hölder contínua em $u = 0$, i.e.,

$$|f^{''}(u) - f^{''}(0)| \leq \Gamma |u|^\alpha, \qquad |u| \leq \Omega \tag{3.16}$$

para algum $\Omega > 0$, onde $\Gamma, \Omega, \alpha > 0$ são constantes.

Em particular, mostramos, seguindo [Zingano, 2004], que $u(\cdot,t)$ satisfaz a estimativa

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} (\mu t)^{\frac{-1}{2}} \qquad \forall\ t > 0 \tag{3.17}$$

e, mais geralmente

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} (\mu t)^{\frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \qquad \forall\ t > 0 \tag{3.18}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. Outros resultados são também obtidos nesta seção, em particular

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, k_1, k_\infty) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{\frac{-3}{4}}, \qquad \forall\ t > 0 \tag{3.19}$$

onde $C(\mu, k_1, k_\infty) > 0$ denota uma constante cujo valor depende das magnitudes de $\mu,\ k_1,\ k_\infty$ definidos em (3.14) e (3.15), respectivamente.

Os resultados da Seção 3.3 são estendidos na Seção 3.4 a $n \geq 2$ dimensões, conforme [Zingano, 1996a], [T. Hagstrom, 2004], mostrando-se que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, \mu, k_1, k_\infty) t^{\frac{-n}{2}}, \qquad \forall\ t > 0 \tag{3.20}$$

e, mais geralmente,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty) t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad \forall\, t > 0 \tag{3.21}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ onde $C(n,\mu,k_1,k_\infty) > 0$ depende de n, μ dados em (3.3) e das dimensões de $k_1,\ k_\infty$ definidos em (3.4). Entre outros resultados, obtém-se em particular

$$\|D^k u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty) t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad \forall\, t > 0. \tag{3.22}$$

Na Seção 3.5 usamos os resultados obtidos na Seção 3.3 para mostrar, seguindo [Zingano, 2004], que as soluções de (3.1), (3.2) são bem aproximadas quando $t \to +\infty$ pelas soluções $v(\cdot,t)$ da equação de Burgers

$$v_t + f^{'}(0) v_x + f^{''}(0) v v_x = a(0) v_{xx} \tag{3.23}$$

com o mesmo perfil inicial, i.e., $v(\cdot,0) = u(\cdot,0)$ (mais geralmente, basta que $u(\cdot,0), v(\cdot,0)$ tenham a mesma massa). Entre outros resultados, nas condições acima obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0, \tag{3.24}$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$.

Finalmente, na Seção 3.6 usamos os resultados obtidos na Seção 3.4 para mostrar, seguindo [Zingano, 1996a], [T. Hagstrom, 2004], que para $n \geq 2$ as soluções $u(\cdot,t)$ de (3.1), (3.2) podem ser aproximadas pelas soluções $v(\cdot,t)$ da equação linear do calor

$$v_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla v = div(A(0)\nabla v) \tag{3.25}$$

com o mesmo perfil inicial, i.e., $v(\cdot,0) = u(\cdot,0)$ (ou, mais geralmente, com $u(\cdot,0), v(\cdot,0)$ tendo a mesma massa), tendo-se neste caso

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{3.26}$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$. Outros resultados relacionados são também analisados.

3.2 Alguns resultados básicos

Nesta seção, derivamos algumas propriedades básicas das soluções $u(\cdot,t)$ de (3.1), (3.2) que serão utilizadas posteriormente. Para isso, vamos utilizar as chamadas *funções sinal regularizadas*, ver [Kreiss e Lorenz, 1989], [Zingano, 1999]: tomando $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ uma função crescente e ímpar verificando

$$\varphi(x) = 1 \quad se \quad x \geq 1 \tag{3.27}$$

$$\varphi(0) = 0 \quad se \quad x = 0 \tag{3.28}$$

$$\varphi(x) = -1 \quad se \quad x \leq 1 \tag{3.29}$$

e, para cada $\delta > 0$, seja $\varphi_\delta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ dada por

$$\varphi_\delta(x) = \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Definindo $L_\delta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ via

$$L_\delta(x) = \int_0^x \varphi_\delta(\xi)d\xi \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{3.31}$$

temos $L_\delta \geq 0,\ L_\delta^{''} \geq 0$ e

$$L_\delta(x) \to |x| \qquad quando \qquad \delta \to 0 \tag{3.32}$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}$, com ademais

$$L_\delta^{'}(x) \to sgn(x) \qquad quando \qquad \delta \to 0, \tag{3.33}$$

onde sgn denota a *função sinal*.

Aproximando $|\cdot|$ por meio destas funções L_δ, mostramos algums propriedades que serão de grande importância para obter os resultados das próximas seções.

Teorema 3.1. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução do problema (3.1), (3.2), tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, t > 0 \tag{3.34}$$

Demonstração: Para $T > 0$ dado, tomando $t_0 > 0$ com $t_0 < T$, multiplicando (3.1) por $L_\delta'(u(\mathbf{x}, t))$, conforme (3.31), e integrando o resultado em $\mathbb{R}^n \times [t_0, T]$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^{T} L_\delta'(u)u_t d\mathbf{x}dt + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^{T} L_\delta'(u)div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}dt = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^{T} L_\delta'(u)div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x}dt.$$

Agora, usando teorema de Fubini, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{t_0}^{T} L_\delta'(u)u_t dt\right]d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x}, T))d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x}, t_0))d\mathbf{x}. \tag{3.35}$$

Ora, pelo teorema do Divergente

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(u)div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} div(\mathbf{F}(u(\mathbf{x}, t)))d\mathbf{x} = 0$$

para cada $t_0 \leq t \leq T$ onde $(\mathbf{F}(\mathsf{u})) = (F_1(\mathsf{u}), \ldots, F_n(\mathsf{u}))$ é dado por

$$F_j(\mathsf{u}) = \int_0^{\mathsf{u}} L_\delta'(v)f_j'(\mathsf{u})dv,$$

e assim

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^{T} L_\delta'(u)div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}dt = 0. \tag{3.36}$$

Integrando por partes e novamente usando o teorema do Divergente, tem-se,

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(u)div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(u)\langle\nabla u, A(u)\nabla u\rangle d\mathbf{x} \leq 0 \tag{3.37}$$

para todo $t \in [t_0, T]$, pois $L_\delta'' \geq 0$.

Portanto, por (3.35), (3.36), (3.37), obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x}, T))d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x}, t_0))d\mathbf{x} \leq 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x}, T))d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x}, t_0))d\mathbf{x} \qquad \forall\ t_0 < t < T.$$

Fazendo $\delta \to 0$, obtém-se, por (3.32),

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, T)|d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, t_0)|d\mathbf{x} \qquad \forall\ t_0 < t < T$$

e, quando $t \to 0^+$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, T)| d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, 0)| d\mathbf{x} \qquad \forall\, T > 0.$$

Mais geralmente,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, t_0 < t < T.$$

$\square$

Este comportamento é ilustrado na figura a seguir.

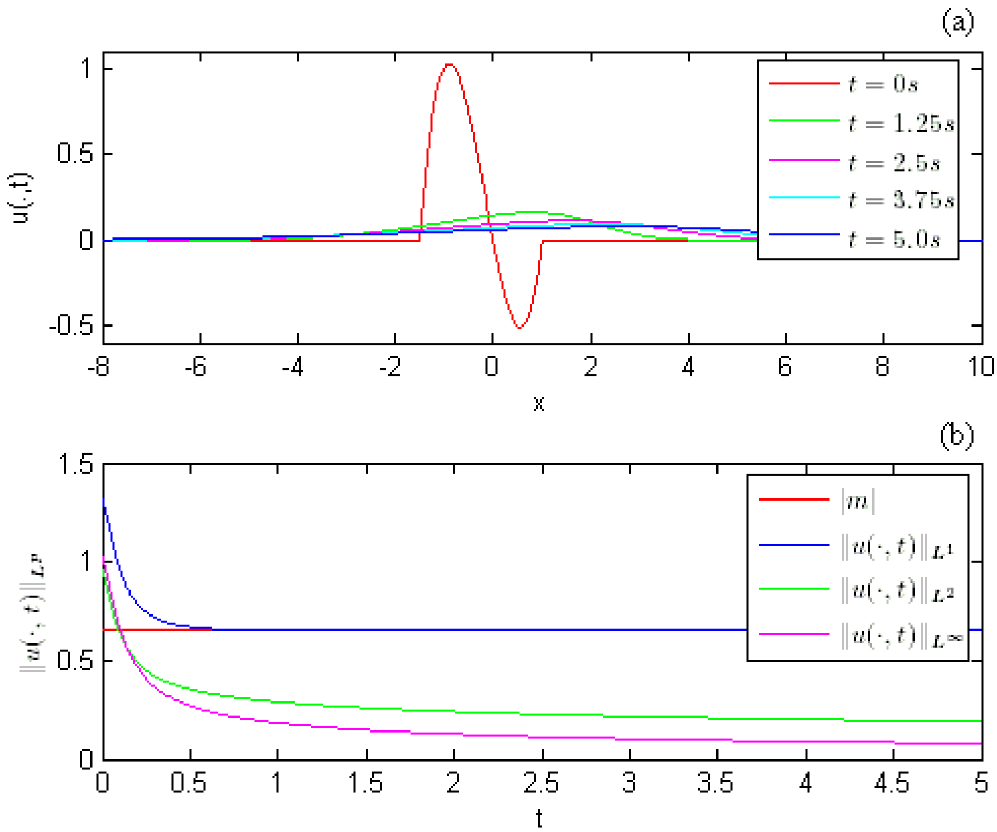

Figura 3.1: (a) Solução $u(\cdot, t)$ para alguns valores de t da equação $u_t + 10uu_x = u_{xx}$ correspondente ao perfil inicial $u_0 = -x(x + 1,5)(1 - x)$ *para* $-1,5 \leq x \leq 1$ *e* 0 *para* $x < -1,5$ *ou* $x > 1$. (b) Normas L^p para o problema descrito em (a).

Outra propriedade importante é o *Princípio do Máximo*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad t > 0, \tag{3.38}$$

o qual pode ser incluído no seguinte resultado mais geral.

Teorema 3.2. *Sendo* $u(\cdot,t)$ *a solução de (3.1) com* $u(\cdot,0)\in L^p(\mathbb{R}^n)$, *tem-se, para cada* $1\le p\le\infty$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le\|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\qquad\forall\ t\ge t_0\ge 0. \tag{3.39}$$

Demonstração: O caso $p=1$ já foi visto no teorema (3.1). Para $1<p<\infty$ procedemos da seguinte forma: multiplicando (3.1) por $pL_\delta(u)^{p-1}L'_\delta(u)$, conforme (3.31), e integrando o resultado em $\mathbb{R}^n\times[t_0,T]$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^T pL_\delta(u)^{p-1}L'_\delta(u)u_t d\mathbf{x}dt+\int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^T pL_\delta(u)^{p-1}L'_\delta(u)div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}dt=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^T pL_\delta(u)^{p-1}L'_\delta(u)div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x}dt.$$

Agora, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^T pL_\delta(u)^{p-1}L'_\delta(u)u_t d\mathbf{x}dt &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{t_0}^T\frac{\partial}{\partial t}L_\delta(u)^p dt\right]d\mathbf{x}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}L_\delta(u(\mathbf{x},T))^p d\mathbf{x}-\int_{\mathbb{R}^n}L_\delta(u(\mathbf{x},t_0))^p d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo $S_\delta(\mathsf{u})=p(p-1)L_\delta(\mathsf{u})^{p-2}L'_\delta(\mathsf{u})^2+pL_\delta(\mathsf{u})^{p-1}L''_\delta(\mathsf{u})$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n}pL_\delta(u)^{p-1}L'_\delta(u)div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}=-\int_{\mathbb{R}^n}S_\delta(u)\mathbf{f}(u)\cdot\nabla u d\mathbf{x}=\int_{\mathbb{R}^n}div(\mathbf{g}_\delta(u(\mathbf{x},t)))d\mathbf{x},$$

onde $\mathbf{g}_\delta(\mathsf{u})=\int_0^{\mathsf{u}}S_\delta(\mathsf{v})\mathbf{f}(\mathsf{v})d\mathsf{v}$. Assim, pelo teorema do Divergente

$$\int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n}pL_\delta(u)^{p-1}L'_\delta(u)div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}dt=0.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}pL_\delta(u)^{p-1}L'_\delta(u)div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x}=-\int_{\mathbb{R}^n}S_\delta(u)\langle A(u)\nabla u,\nabla u\rangle d\mathbf{x}\le 0$$

para todo $t\in[t_0,T]$, $\delta>0$, usando o fato (3.3).

Portanto, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x},T))^p d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x},t_0))^p d\mathbf{x}.$$

Fazendo $\delta \to 0$, $t_0 \to 0^+$, obtém-se (3.39) em virtude de (3.32). Finalmente, fazendo $p \to \infty$, obtemos (3.39) para $p = \infty$, isto é, o princípio do máximo (3.38), o que completa a demonstração.

□

Outra propriedade importante das soluções $u(\cdot,t)$ de (3.1), (3.2) é dada a seguir.

Teorema 3.3. *(Conservação da massa) Sendo $u(\cdot,t)$ a solução de (3.1), (3.2), tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} \tag{3.40}$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Para $T > 0$ dado, tomando $0 < t_0 < T$ e integrando (3.1) em $[t_0,T] \times \mathbb{R}^n$, obtemos

$$\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} u_t d\mathbf{x}dt + \int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}dt = \int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x}dt.$$

Ora, pelo teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{t_0}^{T} u_t dt d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},T)d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t_0)d\mathbf{x} \tag{3.41}$$

e,

$$\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}dt = \int_{t_0}^{T} \left[\int_{\mathbb{R}^n} div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}\right] dt = 0 \qquad \forall\ t \in [t_0,T] \tag{3.42}$$

pois, pelo teorema do Divergente, $\int_{\mathbb{R}^n} div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x} = 0$,
e ainda,

$$\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x}dt = \int_{t_0}^{T} \left[\int_{\mathbb{R}^n} div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x}\right] dt = 0. \tag{3.43}$$

Logo, por (3.41), (3.42) e (3.43), obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},T)d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t_0)d\mathbf{x} = 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},T)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t_0)d\mathbf{x}.$$

Fazendo $t_0 \to 0^+$, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},T)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x}$$

o que mostra (3.40).

□

Uma propriedade especial da norma $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ é dada abaixo.

Teorema 3.4. *(Contratividade em $L^1(\mathbb{R}^n)$) Sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, tem-se*

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0) - \hat{u}(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > 0 \tag{3.44}$$

Demonstração: Seja $T > 0$ dado, e $0 < t_0 < T$ qualquer. Tomando as funções $L_\delta,\ \delta > 0$, dadas em (3.31) e sendo $w = u - \hat{u}$, temos de

$$\begin{aligned} u_t + div(\mathbf{f}(u)) &= div(A(u)\nabla u) \\ \hat{u}_t + div(\mathbf{f}(\hat{u})) &= div(A(\hat{u})\nabla \hat{u}), \end{aligned}$$

que $w(\cdot,t)$ satisfaz

$$u_t + div[\mathbf{f}] = div(A(u)\nabla w) + div([A]\nabla \hat{u}),$$

onde

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}] &= \mathbf{f}(\hat{u}+w) - \mathbf{f}(\hat{u}) \\ [A] &= A(\hat{u}+w) - A(\tilde{u}), \end{aligned}$$

e daí, multiplicando por L_δ' e integrando em $[t_0,T]\times\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(w)w_t d\mathbf{x}dt + \int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(w)div[\mathbf{f}]d\mathbf{x}dt$$
$$= \int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(w)div(A(u)\nabla w)d\mathbf{x}dt + \int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(w)div([A]\nabla u)d\mathbf{x}dt,$$

isto é, pelo teorema de Fubini e teorema do Divergente, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(w(\mathbf{x},T))d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(w(\mathbf{x},t_0))d\mathbf{x}$$
$$+\int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(w)div[\mathbf{f}]d\mathbf{x}dt \le \int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(w)div([A]\nabla u)d\mathbf{x}dt. \tag{3.45}$$

Ora,

$$\int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(w)div[\mathbf{f}]d\mathbf{x}dt = -\int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(w)\langle\nabla w,[\mathbf{f}]\rangle d\mathbf{x}dt$$

então, para cada $(\hat{x},\hat{t})$ fixado temos

$$L_\delta''(w(\hat{x},\hat{t}))\langle\nabla w(\hat{x},\hat{t}),[\mathbf{f}](\hat{x},\hat{t})\rangle \longrightarrow 0 \quad quando \quad \delta\to 0^+.$$

Como

$$\begin{aligned} |L_\delta''(w(x,t))\langle\nabla w,[\mathbf{f}]\rangle| &\le L_\delta''(w(x,t))|\nabla w(\mathbf{x},t)|_2\,|\mathbf{f}(\hat{u}+w)-\mathbf{f}(\hat{u})|_2 \\ &\le EC_f|\nabla w(\mathbf{x},t)| \qquad \forall\ \mathbf{x},t \end{aligned}$$

obtemos, pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(w)\langle\nabla w,[\mathbf{f}]\rangle d\mathbf{x}dt \longrightarrow 0 \quad quando \quad \delta\to 0^+. \tag{3.46}$$

Da mesma forma,

$$\int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(w)\langle\nabla w,[A]\nabla\hat{u})d\mathbf{x}dt \longrightarrow 0 \quad quando \quad \delta\to 0^+. \tag{3.47}$$

Portanto, usando (3.46), (3.47) em (3.45), quando $\delta\to 0^+$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}|w(\mathbf{x},T)|d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n}|w(\mathbf{x},t_0)|d\mathbf{x} \le 0$$

em virtude de (3.32). Isso implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |w(\mathbf{x},T)|d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |w(\mathbf{x},t_0)|d\mathbf{x} \qquad \forall\ 0 < t_0 < T.$$

Fazendo $t_0 \to 0^+$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |w(\mathbf{x},T)|d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |w(\mathbf{x},0)|d\mathbf{x},$$

donde segue o resultado. □

Dado que valem os resultados (3.40), (3.44) acima, podemos usar o argumento de M.Crandall e L.Tartar [Crandall e Tartar, 1980] para estabelecer a seguinte propriedade de monotonicidade.

Teorema 3.5. *(Monotonicidade do operador solução) Sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, tem-se*

$$u(\cdot,0) \leq \hat{u}(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq \hat{u}(\cdot,t) \qquad \forall\ t > 0 \tag{3.48}$$

Demonstração: Dado $t > 0$, tem-se pelos teoremas (3.3) e (3.4) acima,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} (|u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t)| + u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t))d\mathbf{x} \\ = &\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t)|d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} \\ \leq &\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},0) - \hat{u}(\mathbf{x},0)|d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

e portanto, como $|u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t)| + u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t) \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$, segue que

$$|u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t)| + u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t) = 0$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Logo, temos de ter $u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, donde segue o resultado.

□

Este comportamento é ilustrado na figura a seguir.

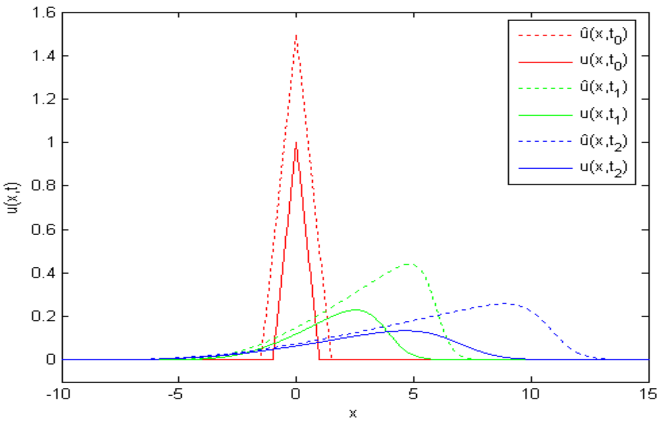

Figura 3.2: Soluções $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ para alguns valores de t da equação $u_t + 10uu_x = u_{xx}$ correspondentes a estados iniciais $u_0 = x+1$ *para* $-1 \leq x < 0$, $1-x$ *para* $0 \leq x \leq 1$ *e* 0 *para* $x < -1$ *ou* $x > 1$ e $\hat{u}_0 = x+1,5$ *para* $-1,5 \leq x < 0$, $1,5-x$ *para* $0 \leq x \leq 1,5$ *e* 0 *para* $x < -1,5$ *ou* $x > 1,5$.

3.3 Decaimento em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $n = 1$

Nesta seção, obtemos estimativas e algumas derivadas para a solução $u(\cdot,t)$ da equação de advecção-difusão (3.12), que serão utilizados na Seção 3.5.

Teorema 3.6. *(Desigualdade de Energia 1) Supondo $a, f \in C^1$, e sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.12), (3.13), tem-se*

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq 2\sqrt{2}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \tag{3.49}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Os argumentos usados nesta demonstração são baseados em [Zingano, 1999].

Multiplicando (3.12) por t e integrando em $[0,T] \times \mathbb{R}$, $T > 0$ dado, obtém-se

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} uu_t dxdt + \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} uf'(u)u_x dxdt = \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(a(u)u_x)_x dxdt$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T t\int_{\mathbb{R}} uu_t dxdt &= \frac{T}{2}\int_{\mathbb{R}} u(x,T)^2dx - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2dxdt\\ &= \frac{T}{2}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{2}\int_0^T \|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \qquad (3.50)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)f^{'}(u(x,t))u_x(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} g(u(x,t))dx = 0, \qquad (3.51)$$

onde $g(\mathsf{u}) = \int_0^{\mathsf{u}} vf^{'}(v)dv$.

Integrando por partes e usando o fato de que $a(\mathsf{u}) \geq \mu > 0 \quad \forall\ \mathsf{u}$, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T t\int_{\mathbb{R}} u(x,t)(a(u)u_x)_x dxdt &= -\int_0^T t\int_{\mathbb{R}} a(u)u_x^2dxdt\\ \leq -\mu\int_0^T t\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxdt &= -\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \qquad (3.52)\end{aligned}$$

Portanto, por (3.50), (3.51) e (3.52), obtém-se

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.$$

Pela desigualdade de Sobolev (A.11), obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt &= \sqrt[3]{4}\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R})}dt\\ &\leq \sqrt[3]{4}\ \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}\int_0^T \|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R})}dt\\ &\leq 2^{\frac{2}{3}}\ \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}\left(2\sqrt{T}\right)^{\frac{2}{3}}(2\mu)^{\frac{-1}{3}}\left(2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt\right)^{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Hölder (A.5).

Portanto, sendo $E(T) = T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$, obtemos

$$E(T) \leq 2\|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-1}{3}}\ T^{\frac{1}{3}}\ E(T)^{\frac{1}{3}},$$

o que implica

$$E(T) \leq 2\sqrt{2}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-1}{2}}\ T^{\frac{1}{2}}$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Em particular, resulta

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}(\mu T)^{\frac{-1}{4}} \qquad \forall\, T>0, \tag{3.53}$$

e

$$\int_0^T t\|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \sqrt{2}\ \mu^{\frac{-3}{2}}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, T>0. \tag{3.54}$$

Então, dado $t_* > 0$, temos

$$2\mu\int_{\frac{t_*}{2}}^{t_*} t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}t_*^{\frac{1}{2}},$$

de modo que tem de existir $t_0 \in [\frac{t_*}{2}, t_*]$ tal que

$$\mu t_0\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2}{t_*}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}t_*^{\frac{1}{2}},$$

isto é,

$$t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}}\frac{t_0}{t_*}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}t_*^{\frac{1}{2}},$$

isto é, para cada $t_* > 0$, existe $t_0 \in [\frac{t_*}{2}, t_*]$ tal que

$$t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}t_*^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, existe sequência $(t_0^{(n)})_n$ com $t_0^n \to 0^+$ tal que

$$t_0^{(n)^2}\|u_x(\cdot,t_0^n)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \qquad \textit{quando} \quad n\to\infty. \tag{3.55}$$

Uma consequência importante dos resultados acima é dada a seguir.

Teorema 3.7. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.12), (3.13) então*

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-1}{2}}\ T^{\frac{-1}{2}} \qquad \forall\, T>0. \tag{3.56}$$

Demonstração: Dado $T > 0$, temos, por (3.54),

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T} t\|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \sqrt{2}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ \mu^{\frac{-3}{2}}\ T^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, T > 0.$$

e então, pelo teorema (A.9), existe $\hat{t} \in [\frac{T}{2}, T]$ tal que

$$\hat{t}\|u_x(\cdot,\hat{t})\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2}\ \mu^{\frac{-3}{2}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-1}{2}},$$

isto é,

$$\|u_x(\cdot,\hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}\ \mu^{\frac{-3}{4}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-1}{4}}\ \hat{t}^{\frac{-1}{2}}, \tag{3.57}$$

e então, pela desigualdade de Sobolev (ver [Friedman, 1969], [da Silva, 2003]), (3.53) e (3.57), temos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2}\ \|u(\cdot,\hat{t})\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\ \|u_x(\cdot,\hat{t})\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq 2\sqrt[4]{2}\ \mu^{\frac{-1}{2}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-1}{8}}\ \hat{t}^{\frac{-3}{8}} \\
&\leq 2^{\frac{13}{8}}\ \mu^{\frac{-1}{2}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-1}{2}}
\end{aligned}$$

visto que $\frac{T}{2} \leq \hat{t}$. Portanto,

$$\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\ \mu^{\frac{-1}{2}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-1}{2}},$$

e o resultado segue, visto que $\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pelo Princípio do Máximo. $\square$

Teorema 3.8. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.12), (3.13), tem-se*

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left(2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ (\mu T)^{\frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad \forall\, T > 0 \tag{3.58}$$

para cada $1 < p < \infty$.

Demonstração: Para todo $T > 0$, usando a desigualdade de Interpolação (A.8), tem-se

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,T)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,T)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u(\cdot,T)\|^{1-\frac{1}{p}}_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq \|u(\cdot,0)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}\left(2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\ \mu^{\frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,0)\|^{1-\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}
\end{aligned}$$

usando (3.34) e (3.56), donde segue o resultado.

$\square$

Na Seção 3.5, precisamos também de estimativas para $\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$; estabelecê-las será o objetivo dos resultados a seguir.

Teorema 3.9. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.12), (3.13), e sendo $t_0>0$ dado, tem-se*

$$\|u_x(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu,K_1,K_\infty)\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-3}{4}} \qquad \forall\ T\geq 0 \tag{3.59}$$

onde $C(\mu,K_1,K_\infty)>0$ é uma constante que depende de μ,K_1,k_∞ definidos em (3.14), (3.15) acima.

Demonstração: Introduzindo $\psi(\cdot,t)$ via

$$\psi(x,t) := \int_0^{u(x,t)} a(v)dv, \tag{3.60}$$

obtemos

$$\psi_t + \tilde{f}(\psi)_x = \tilde{a}(\psi)\psi_{xx} \tag{3.61}$$

onde

$$\tilde{f}(v) := \int_0^v f^{'}(\Phi(\xi))d\xi \qquad e \qquad \tilde{a}(v) := a(\Phi(v)).$$

onde $\Phi(\cdot)$ denota a função inversa de $\Psi(\cdot)$ dada por

$$\Psi(v) := \int_0^v a(\xi)d\xi.$$

Em particular, de (3.60) obtém-se

$$|\psi(x,t)| \leq C(k_\infty)|u(x,t)| \qquad \forall\ x\in\mathbb{R}, \tag{3.62}$$

e então de (3.58), segue que

$$\|\psi(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu,K_1,K_\infty)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}t^{\frac{-1}{2}} \qquad \forall\ t>0. \tag{3.63}$$

Dado $T>0$, tomando $t_0\in\,]0,T[\,\cap\,(t_0^{(n)})_n : n\in\mathbb{N}$, derivando (3.61) em relação a x, multiplicando por $t^2\psi_x$ e integrando em $\mathbb{R}\times[t_0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned} T^2\|\psi_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}}\tilde{a}(\psi)\psi_{xx}^2dxdt &\leq t_0^2\|\psi_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \\ +\ 2\int_{t_0}^T t\|\psi_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + 2\int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}}|\tilde{f}^{'}(\psi)-\tilde{f}^{'}(0)|\ |\psi_x|\ |\psi_{xx}|dxdt \end{aligned} \tag{3.64}$$

em virtude de (3.14).

Como $\psi_x = a(u)u_x$, tem-se por (3.62),

$$\|\psi_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \tilde{C}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.65}$$

Pela Desigualdade (A.1), com $\epsilon = \mu$, tem-se

$$\begin{aligned} & 2\int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}^{'}(\psi) - \tilde{f}^{'}(0)| \; |\psi_x| \; |\psi_{xx}| dxdt \\ \leq \; & \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|\psi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + \frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}^{'}(\psi) - \tilde{f}^{'}(0)|^2 \; \psi_x^2 dxdt \end{aligned}$$

de modo que por (3.54), (3.63) e (3.65), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}^{'}(\psi) - \tilde{f}^{'}(0)|^2 \; \psi_x^2 dxdt & \leq C(\mu, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 \; |\psi_x|^2 dxdt \\ & \leq C(\mu, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^2 \|\psi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \; \|\psi_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ & \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t \|\psi_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ & \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t \|u_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ & \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

de modo que obtemos, de (3.64)

$$T^2\|\psi_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_0^T t^2 \|\psi_{xx}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq t_0^2 \|\psi_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu, K_1, K_\infty)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}}.$$

Fazendo $t_0 \to 0^+$, conforme (3.55) acima, obtemos daí

$$T^2\|\psi_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_0^T t^2 \|\psi_{xx}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, K_1, K_\infty)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}}$$

para todo $T > 0$.

Em particular, resulta

$$\|\psi_x(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \; \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \; T^{\frac{-3}{4}}, \qquad \forall \, T > 0. \tag{3.66}$$

Como

$$\psi_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{u(x,t)} a(v)dv = a(u(x,t))u_x(x,t)$$

fornece

$$|\psi_x(\cdot,t)| \geq \mu |u_x(x,t)|,$$

resulta de (3.66) que

$$\mu \|u_x(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, K_1, K_\infty)\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\ T^{\frac{-3}{4}},$$

e o resultado está mostrado. □

Teorema 3.10. *(Desigualdade de Energia 2) Supondo $a, f \in C^2$, e sendo $u(\cdot,t)$ solução do problema (3.12), (3.13), tem-se*

$$T^4 \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_0^T t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, k_1, k_\infty) \|u_x(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} (1 + T^2) \tag{3.67}$$

para todo $T > 0$ e para alguma constante $C(\mu, k_1, k_\infty) > 0$ que depende apenas dos parâmetros μ, k_1, k_∞ dados em (3.14), (3.15) acima .

Demonstração: Seja $T > 0$ dado. Diferenciando (3.12) em relação a x, multiplicando o resultado por $t^4 u_x$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, onde $t_0 \in]0, T[$ é arbitrário, obtemos, integrando por partes e usando (3.14)

$$\begin{aligned} & T^4 \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_0}^T t^4 \int_{\mathbb{R}} u_x (a(u) u_{xx})_x dx dt \leq \\ \leq\ & t_0^4 \|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 4T^2 \int_{t_0}^T t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + \\ +\ & 2 \int_{t_0}^T t^4 \int_{\mathbb{R}} |f^{'}(u) - f^{'}(0)|\ |u_x|\ |u_{xx}| dx dt + \\ +\ & 2 \int_{t_0}^T t^4 \int_{\mathbb{R}} |a^{'}(u)| u_x^2 |u_{xx}| dx dt. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Usando a desigualdade (A.1), com $\epsilon = \frac{\mu}{3}$, tem-se

$$\begin{aligned} & 2\int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |f^{'}(u) - f^{'}(0)|\ |u_x|\ |u_{xx}| dxdt \leq \\ \leq\ & \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + \frac{3}{\mu}\int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |f^{'}(u) - f^{'}(0)|^2\ |u_x|^2 dxdt \\ \leq\ & \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^4 \|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ \leq\ & \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_1, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^3 \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ \leq\ & \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_1, k_\infty) T^2 \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt, \end{aligned} \tag{3.69}$$

pelo teorema (3.7).

Por outro lado, pela desigualdade (A.1), tem-se

$$\begin{aligned} & 2\int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |a^{'}(u)|\ u_x^2\ |u_{xx}| dxdt \leq 2C(k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 |u_{xx}| dxdt \leq \\ \leq\ & \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R})} dt \end{aligned}$$

de modo que, usando a desigualdade de Sobolev (A.12)

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R})} \leq \widehat{C} \|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R})},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R})} dt\ &\leq\ \widehat{C}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_x(\cdot,t)\|^3_{L^2(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq\ \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + \frac{3}{\mu}\widehat{C}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_x(\cdot,t)\|^6_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq\ \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_1, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \end{aligned}$$

usando (A.1) e (3.9).

Portanto,

$$2\int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |a^{'}(u)|\ u_x^2\ |u_{xx}| dxdt \leq \frac{2\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_1, k_\infty)\int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \tag{3.70}$$

Substituindo (3.69), (3.70) em (3.68), obtém-se

$$\begin{aligned} & T^4\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{t_0}^T t^4\int_{\mathbb{R}} u_x(a(u)u_{xx})_x dxdt \leq \\ \leq\ & t_0^4\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu,k_1,k_\infty)(1+T^2)\int_{t_0}^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt, \end{aligned}$$

de modo que, fazendo $t_0 \to 0^+$ como em (3.55) e usando (3.54), obtemos

$$T^4\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_0^T t^4\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu,k_1,k_\infty)\|u_x(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}}(1+T^2)$$

como afirmado.

$\square$

De (3.67), obtemos em particular que, para $t_* > 0$ dado qualquer,

$$\int_{\frac{t_*}{2}}^{t_*} t^4\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu,k_1,k_\infty)(1+t_*^2)t_*^{\frac{1}{2}},$$

de modo que tem de existir $t_0 \in [\frac{t_*}{2}, t_*]$ tal que

$$\frac{t_*}{2}t_0^4\|u_{xx}(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu,k_1,k_\infty)(1+t_*^2)t_*^{\frac{1}{2}},$$

isto é,

$$t_0^4\|u_{xx}(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu,k_1,k_\infty)(1+t_*^2)t_*^{\frac{-1}{2}},$$

e daí

$$\begin{aligned} t_0^7\|u_{xx}(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C(\mu,k_1,k_\infty)(1+t_*^2)\left(\frac{t_0}{t_*}\right)^{\frac{1}{2}} t_0^{\frac{5}{2}} \\ &\leq C(\mu,k_1,k_\infty)(1+t_*^2)t_*^{\frac{5}{2}}; \end{aligned}$$

em particular, existe sequência $(t_0^{(n)})_n$ com $t_0^{(n)} \to 0^+$ quando $n \to \infty$ e

$$t_0^{(n)^7}\|u_{xx}(\cdot,t_0^{(n)})\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \qquad \textit{quando} \quad n\to\infty. \tag{3.71}$$

Teorema 3.11. *Sendo $a, f \in C^3$, e sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.12), (3.13), então*

$$T^7\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_0^T t^7\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu,k_1,k_\infty)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}(1+T^2)T^{\frac{5}{2}} \tag{3.72}$$

para todo $T > 0$ e para alguma constante $C(\mu,k_1,k_\infty) > 0$ que depende apenas dos parâmetros μ, k_1, k_∞ dados em (3.14) e (3.15).

Demonstração: Seja $T > 0$ dado. Derivando (3.12) duas vezes em relação a x, multiplicando o resultado por $t^7 u_{xx}$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, onde $t_0 \in]0, T[$ é escolhido de modo a estar na sequência $(t_0^{(n)})_n$ dada em (3.71), obtemos integrando por partes e usando (3.14)

$$\begin{aligned}
& T^7 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_0}^T t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq t_0^7 \|u_{xx}(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \\
+ \;& 7T^2 \int_{t_0}^T t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + 2\int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|\; |u_{xx}|\; |u_{xxx}| dx dt + \\
+ \;& 2\int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} f''(u) u_x^2 u_{xxx} dx dt + 2\int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |a''(u)|\; |u_x^3|\; |u_{xxx}| dx dt + \\
+ \;& 6\int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |a'(u)|\; |u_x|\; |u_{xx}|\; |u_{xxx}| dx dt. \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (A.1), com $\epsilon = \frac{\mu}{5}$, tem-se

$$\begin{aligned}
& 2\int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|\; |u_{xx}|\; |u_{xxx}| dx dt \leq \\
\leq \;& \frac{\mu}{5} \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}(\cdot,t)|^2_{L^2(\mathbb{R})} dx dt + \frac{5}{\mu} \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|^2 \; |u_{xx}|^2 dx dt \\
\leq \;& \frac{\mu}{5} \int_{t_0}^T t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_\infty) \int_{t_0}^T t^7 \|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\
\leq \;& \frac{\mu}{5} \int_{t_0}^T t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_1, k_\infty) \int_{t_0}^T t^6 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\
\leq \;& \frac{\mu}{5} \int_{t_0}^T t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_1, k_\infty) T^2 \int_{t_0}^T t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt, \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

pelo teorema (3.7).

Por outro lado, pela desigualdade (A.1), com $\epsilon = \frac{\mu}{5}$, tem-se

$$2\int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} f''(u) u_x^2 u_{xxx} dx dt \;\leq\; \frac{\mu}{5} \int_{t_0}^T t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, k_\infty) \int_{t_0}^T t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R})} dt$$

de modo que, usando a desigualdade de Sobolev (A.15), obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^T t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R})} dt \;&\leq\; \sqrt{3} \int_{t_0}^T t^7 \|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\
&\leq\; C(\mu, k_1, k_\infty) \int_{t_0}^T t^6 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\
&\leq\; C(\mu, k_1, k_\infty) T^2 \int_{t_0}^T t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt,
\end{aligned}$$

pelo teorema (3.7).

Portanto,

$$2\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} f^{''}(u)u_x^2 u_{xxx} dxdt \leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_1,k_\infty)T^2\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \tag{3.75}$$

Da mesma forma, usando a desigualdade (A.1) com $\epsilon = \frac{\mu}{5}$ e a desigualdade de Sobolev (A.13)

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^6(\mathbb{R})} \leq C\|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R})}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\mathbb{R})},$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
& 2\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} |a^{''}(u)|\ |u_x^3|\ |u_{xxx}| dxdt \leq \\
\leq\ & \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7\|u_x(\cdot,t)\|^6_{L^6(\mathbb{R})}dt \\
\leq\ & \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7\|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^2(\mathbb{R})}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
\leq\ & \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_1,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^4\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt,
\end{aligned} \tag{3.76}$$

pelo teorema (3.9).

Finalmente, pela desigualdade (A.1) com $\epsilon = \frac{\mu}{5}$, e a desigualdade de Sobolev (A.13)

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^6(\mathbb{R})} \leq C\|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R})}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\mathbb{R})},$$

obtém-se

$$
\begin{aligned}
& 6\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} |a^{'}(u)|\ |u_x|\ |u_{xx}|\ |u_{xxx}| dxdt \leq \\
\leq\ & \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 u_{xx}^2 dxdt \\
\leq\ & \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} u_x^3 u_{xxx} dxdt \\
\leq\ & \frac{2\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^6_{L^6(\mathbb{R})}dt \\
\leq\ & \frac{2\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^2(\mathbb{R})}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
\leq\ & \frac{2\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu,k_1,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt, \qquad (3.77)
\end{aligned}
$$

usando o teorema (3.9).

Substituindo (3.74), (3.75), (3.76), (3.77) em (3.73), obtém-se

$$
\begin{aligned}
& T^7\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \\
\leq\ & t_0^7\|u_{xx}(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu,k_1,k_\infty)T^2\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.
\end{aligned}
$$

Fazendo $t_0 \to 0^+$ como em (3.71), obtém-se então

$$
\begin{aligned}
& T^7\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \\
\leq\ & C(\mu,k_1,k_\infty)T^2\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt
\end{aligned}
$$

e então, por (3.67) acima,

$$
T^7\|u_{xx}(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\mu\int_{0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu,k_1,k_\infty)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^2(1+T^2)T^{\frac{1}{2}},
$$

como afirmado.

□

Em particular,

$$
\|u_{xx}(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu,k_1,k_\infty)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{-9}{4}}, \qquad \forall\ 0 < T \leq 1 \qquad (3.78)
$$

e,

$$
\|u_{xx}(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu,k_1,k_\infty)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{-5}{4}}, \qquad \forall\ T \geq 1. \qquad (3.79)
$$

3.4 Decaimento em $L^p(\mathbb{R}^n),\ n > 1$

Nesta seção derivamos uma desigualdade de energia básica para $n \geq 1$, a qual mostra o decaimento L^2 das soluções para o problema de Cauchy (3.1), (3.2) e representa um papel fundamental na derivação de outras estimativas, em particular

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{3.80}$$

Os resultados aqui obtidos serão utilizados na Seção 3.6.

Teorema 3.12. *(Desigualdade de Energia) Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2), tem-se*

$$T^n\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu\int_0^T t^n\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \left(\frac{n}{2\mu}\right)^{\frac{n}{2}} 2C_n^{n+2}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R}^n)}T^{\frac{n}{2}} \tag{3.81}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Multiplicando (3.1) por $t^n u(\mathbf{x},t)$ e integrando em $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $T > 0$ dado, obtém-se

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t^n u u_t d\mathbf{x}dt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t^n u\ div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x}dt = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} t^n u\ div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x}dt.$$

Integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^T t^n u u_t dt\right]d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{T^n}{2}u(\mathbf{x},T)^2 - \frac{n}{2}\int_0^T t^{n-1}u(\mathbf{x},t)^2dt\right]d\mathbf{x}\\ &= \frac{T^n}{2}\|u(\mathbf{x},T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{n}{2}\int_0^T t^{n-1}\|u(\mathbf{x},t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt.\end{aligned}$$

Pelo teorema do Divergente,

$$\int_{\mathbb{R}} u(\mathbf{x},t)div(\mathbf{f}(u))d\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}}\mathbf{f}(u)\cdot\nabla u d\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}} div(\mathbf{F}(u))d\mathbf{x} = 0$$

onde $\mathbf{F}(\mathsf{u}) = (F_1(\mathsf{u}),\ldots,F_n(\mathsf{u}))$ com $F_j(\mathsf{u}) = \int_0^{\mathsf{u}} f_j(\mathsf{v})d\mathsf{v}$, $\qquad j = 1,\ldots,n$, de modo que

$$\int_0^T t^n\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)div(\mathbf{f}(u(\mathbf{x},t)))d\mathbf{x}dt = 0.$$

Novamente usando o teorema do Divergente, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x} &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle A(u)\nabla u, \nabla u\rangle d\mathbf{x} \leq -\mu\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq -\mu\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

em virtude de (3.3). Portanto,

$$\int_0^T t^n \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)div(A(u)\nabla u)d\mathbf{x}dt \leq -\mu\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim, obtemos

$$T^n\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu\int_0^T t^n\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq n\int_0^T t^{n-1}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt.$$

Usando a desigualdade de Sobolev, (ver [Friedman, 1969])

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n\|u(\cdot,t)\|^{\frac{2}{n+2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|Du(\cdot,t)\|^{\frac{n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

onde $C_n > 0$ é uma constante que depende somente da dimensão n, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T t^{n-1}\ \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt &\leq C_n^2\int_0^T t^{n-1}\ \|u(\cdot,t)\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ \|Du(\cdot,t)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \\ &\leq C_n^2\ \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\int_0^T t^{n-1}\ \|Du(\cdot,t)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \\ &\leq C_n^2\ \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n+2}} T^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_0^T t^n\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt\right)^{\frac{n}{n+2}},\end{aligned}$$

usando (3.34) e a desigualdade de Hölder (A.5).

Definindo

$$E_n(T) = T^n\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu\int_0^T t^n\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt,$$

tem-se então

$$\begin{aligned}E_n(T) &\leq n\ C_n^2\ \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n+2}} T^{\frac{n}{n+2}}\ (2\mu)^{\frac{-n}{n+2}}\left(2\mu\int_0^T t^n\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt\right)^{\frac{n}{n+2}} \\ &\leq n\ C_n^2\ \|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n+2}} T^{\frac{n}{n+2}}\ (2\mu)^{\frac{-n}{n+2}}\ E_n(T)^{\frac{n}{n+2}},\end{aligned}$$

isto é,

$$E_n(T) \leq \left(\frac{n}{2\mu}\right)^{\frac{n}{2}} 2C_n^{n+2}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ T^{\frac{n}{2}}$$

para todo $T > 0$, como afirmado. $\square$

Em particular,

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{2}\left(\frac{n}{2\mu}\right)^{\frac{n}{4}} 2C_n^{\frac{n+2}{2}}\ \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ T^{\frac{-n}{4}} \qquad \forall\, T>0 \tag{3.82}$$

e,

$$\int_0^T t^n \|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \mu^{\frac{-n}{2}+1}\, C_n^{n+2}\ \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ T^{\frac{n}{2}} \qquad \forall\, T>0 \tag{3.83}$$

Uma consequência imediata de (3.82) é a seguinte estimativa preliminar do tamanho $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, a qual será importante mais tarde.

Proposição 3.1. *Dado $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, a solução $u(\cdot,t)$ da equação (3.1) satisfaz*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)t^{\frac{-\alpha}{2}\frac{n}{n+2\alpha}} \tag{3.84}$$

para todo $t>0$ e alguma constante $C(n,\mu,k_1,k_\infty)>0$, $\alpha>0$ que depende somente das dimensões n,μ,k_1 e k_∞ dadas em (3.3), (3.4).

Demonstração: Seguindo [O. A. Ladyzhenskaia e Uracelva, 1968], Ch. 4, $u(\cdot,t)$ é Hölder contínua em $\mathbb{R}^n\times]\delta,\infty[$, $\delta>0$, com

$$|u(\mathbf{x},t)-u(\mathbf{y},t)| \leq E|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^\alpha, \qquad \forall\, t\geq\delta$$

para todo $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ e uma constante $E>0$, $\alpha>0$. Portanto, fixando $\delta=1$, obtemos, dado $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ arbitrário,

$$|u(\mathbf{x},t)| \geq |u(\mathbf{x}_0,t)| - E|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^\alpha,$$

para todo $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ e $t\geq 1$. Tomando $r_0 = \left(\frac{|u(\mathbf{x}_0,t)|}{E}\right)\frac{1}{\alpha}$, tem-se

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\leq r_0} \left(|u(\mathbf{x}_0,t)-E|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^\alpha\right)^2 d\mathbf{x} \leq \int_{R^n} |u(\mathbf{x},t)|d\mathbf{x}, \tag{3.85}$$

para todo $t\geq 1$, de modo que

$$\begin{aligned}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\leq r_0} \left(|u(\mathbf{x}_0,t)-E|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^\alpha\right)^2 d\mathbf{x} &= nv_n \int_0^{r_0} \left(|u(\mathbf{x}_0,t)-Er^\alpha\right)^2 r^{n-1}dr \\ = \frac{2\alpha^2 v^n}{E^{\frac{n}{\alpha}}}\frac{1}{(n+\alpha)(n+2\alpha)}|u(\mathbf{x}_0,t)|^{2+\frac{n}{\alpha}} &= \frac{A(\alpha,n)v_n}{(n+\alpha)(n+2\alpha)}|u(\mathbf{x}_0,t)|^{2+\frac{n}{\alpha}}\end{aligned}$$

onde v_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, dado em (B.2).

Portanto,

$$|u(\mathbf{x}_0,t)|^{2+\frac{n}{\alpha}}\frac{A(\alpha,n)v_n}{(n+\alpha)(n+2\alpha)}\leq \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

e, pela desigualdade (3.82), obtemos

$$|u(\mathbf{x}_0,t)|^{2+\frac{n}{\alpha}}\leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)t^{\frac{-n}{2}}\frac{(n+\alpha)(n+2\alpha)}{A(\alpha,n)}v_n,$$

de forma que

$$|u(\mathbf{x}_0,t)|\leq \widetilde{C}(n,\mu,k_1,k_\infty)t^{\frac{-\alpha}{2}\frac{n}{n+2\alpha}},\qquad \forall\, t\geq 1$$

isto é,

$$\|u(\mathbf{x}_0,t)\|\leq \widetilde{C}(n,\mu,k_1,k_\infty)t^{\frac{-\alpha}{2}\frac{n}{n+2\alpha}},\qquad \forall\, t\geq 1$$

para alguma constante $\widetilde{C}(n,\mu,k_1,k_\infty)>0$ que depende apenas de n,μ,k_1 e k_∞. Portanto obtemos (3.84) para $t\geq 1$, e então para $t>0$ em vista de (3.38). $\square$

Mais tarde, vamos melhorar (3.84), ver proposição (3.2), antes que possamos derivar a taxa $O(t^{\frac{-n}{2}})$ para $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Vamos ainda usar os resultados acima, em particular o teorema (3.12), para estimar $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ e outras quantidades. Um caminho para estudar $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para $p>1$ arbitrário é iniciar por (3.81) e derivar as correspondentes desigualdades de energia para as derivadas espaciais de $u(\cdot,t)$, usando a desigualdade de Sobolev

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C_n\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|D^n u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

para estimar a norma-L^∞ de $u(\cdot,t)$. Uma vez $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ bem estimado, se pode facilmente estimar $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para algum $p>1$ usando a desigualdade de Interpolação (A.8). O resultado deverá ser

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)t^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \tag{3.86}$$

para todo $t>0$ e $p\geq 1$, onde $C(n,\mu,k_1,k_\infty)$ é constante positiva que depende apenas das dimensões n, μ, k_1 e k_∞ definidas em (3.3), (3.4).

Iniciamos, diferenciando (3.1) em relação a x_i, multiplicando o resultado por $t^\gamma u_{x_i}$ e integrando sobre $\mathbb{R}^n \times [t_0, T]$, obtendo

$$
\begin{aligned}
& T^\gamma \left\| \frac{\partial u(\cdot,T)}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), A(u)\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\rangle d\mathbf{x}dt = \\
= \;& t_0^\gamma \left\| \frac{\partial u(\cdot,t_0)}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \;\gamma \int_{t_0}^T t^{\gamma-1} \left\| \frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt - \\
- \;& 2\int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} div\left(\left(\mathbf{f}'(u) - \mathbf{f}'(0)\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) d\mathbf{x}dt - \\
- \;& 2\int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left\langle \nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), A'(u)\nabla u\right\rangle d\mathbf{x}dt
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
& T^\gamma \left\| \frac{\partial u(\cdot,T)}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu \int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 d\mathbf{x}dt = t_0^\gamma \left\| \frac{\partial u(\cdot,t_0)}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\
+ \;& \gamma \int_{t_0}^T t^{\gamma-1} \left\| \frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt + 2\int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \left(\mathbf{f}'(u) - \mathbf{f}'(0)\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\rangle d\mathbf{x}dt - \\
- \;& 2\int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left\langle \nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), A'(u)\nabla u\right\rangle d\mathbf{x}dt,
\end{aligned}
$$

em vista de (3.3).

Somando para $i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se

$$
\begin{aligned}
& T^\gamma \|Du(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu \int_{t_0}^T t^\gamma \|D^2 u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt = t_0^\gamma \|Du(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\
+ \;& \gamma \int_{t_0}^T t^{\gamma-1} \|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt + 2\int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathbf{f}'(u) - \mathbf{f}'(0)\right|_2 \sum_{i=1}^n \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_2 \right) d\mathbf{x}dt + \\
+ \;& 2\int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \left|A'(u)\nabla u\right|_2 \sum_{i=1}^n \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_2 \right) d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.1), obtém-se

$$
\begin{aligned}
& 2\int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathbf{f}'(u) - \mathbf{f}'(0)\right|_2 \sum_{i=1}^n \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_2 \right) d\mathbf{x}dt \leq \\
\leq \;& \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_2^2 d\mathbf{x}dt + \frac{3}{\mu} \int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \left|\mathbf{f}'(u) - \mathbf{f}'(0)\right|_2^2 d\mathbf{x}dt \\
\leq \;& \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \|D^2 u(\cdot,t)|^2_{L^2(R)^n} d\mathbf{x}dt + C(\mu, k_\infty) \int_{t_0}^T t^\gamma \|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} dt.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma,

$$2\int_{t_0}^{T} t^{\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}\left|A'(u)\nabla u\right|_2\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_2\right)d\mathbf{x}dt \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^{\gamma}\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2\mathbb{R}^n}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{\gamma}\|Du(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^n)}dt$$

de modo que, usando a desigualdade de Sobolev (ver [Friedman, 1969])

$$\|Du(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R}^n)} \leq \|D^2u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

obtém-se

$$2\int_{t_0}^{T} t^{\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}\left|A'(u)\nabla u\right|_2\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|_2\right)d\mathbf{x}dt \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{3}\int_{t_0}^{T} t^{\gamma}\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2\mathbb{R}^n}dt + C(\mu,k_\infty)C_n\int_{t_0}^{T} t^{\gamma}\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}dt.$$

Portanto, para $t_0 \geq 1$ suficientemente grande, obtemos, pela Proposição (3.1),

$$T^{\gamma}\|Du(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu\int_{t_0}^{T} t^{\gamma}\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty) +$$

$$+\ \gamma\int_{t_0}^{T} t^{\gamma-1}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{\gamma}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}dt.$$

Procedendo de modo análogo, podemos obter, mais geralmente,

$$T^{\gamma_\ell}\|D^\ell u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu\int_{t_0}^{T} t^{\gamma_\ell}\|D^{\ell+1}u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty) +$$

$$+\ \gamma_\ell\int_{t_0}^{T} t^{\gamma_\ell-1}\|D^\ell u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt + C(\mu,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{\gamma_\ell}\|D^\ell u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}dt \tag{3.87}$$

para cada $\ell \geq 1$.

Tomando inicialmente $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = n$ em (3.87) acima, resulta

$$T^{n}\|D^\ell u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu\int_{t_0}^{T} t^{n}\|D^{\ell+1}u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq$$

$$\leq C(n,\mu,k_1,k_\infty) + n\int_{t_0}^{T} t^{n}\|D^\ell u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{n}{2}},$$

para $0 \leq \ell \leq n$, em vista de (3.81).

Em particular,

$$\|D^\ell u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-n}{4}} \qquad \forall\, T \geq t_0. \tag{3.88}$$

E então, para $n \geq 2$ podemos observar o seguinte resultado preliminar.

Proposição 3.2. *Dado $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, a solução da equação (3.1) satisfaz*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-1}{2}} \tag{3.89}$$

para todo $T > 0$ e alguma constante $C(n,\mu,k_1,k_\infty) > 0$ que depende apenas das dimensões n, μ, k_1 e k_∞.

Demonstração: Pela desigualdade de Sobolev, (ver [Friedman, 1969]), obtemos

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C_n \|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|D^n u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_n C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-n}{4}}, \qquad \forall\, T \geq t_0 \end{aligned}$$

usando as desigualdades (3.82) e (3.88).

Recaindo em (3.38), obtemos (3.89) para todo $T > 0$ desde que $n \geq 2$.

□

Uma importante consequência de (3.89) é que podemos reescrever (3.87) como

$$\begin{aligned} & T^{\gamma_l}\|D^\ell u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu \int_{t_0}^{T} t^{\gamma_\ell}\|D^{\ell+1}u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \\ \leq\ & C(n,\mu,k_1,k_\infty) + C(n,\mu,k_1,k_\infty)\gamma_\ell \int_{t_0}^{T} t^{\gamma_\ell - 1}\|D^\ell u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \end{aligned} \tag{3.90}$$

para $1 \leq \ell \leq n$.

Então, para $\ell = 1$, $\gamma_\ell = n+1$

$$\begin{aligned} & T^{n+1}\|Du(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu\int_{t_0}^T t^{n+1}\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \\ \leq\ & C(n,\mu,k_1,k_\infty) + \ C(n,\mu,k_1,k_\infty)\int_{t_0}^T t^n\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \\ \leq\ & C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \tag{3.91}$$

pela desigualdade (3.83).

Analogamente para $\ell = 2$, $\gamma_\ell = n+2$, tem-se

$$\begin{aligned} & T^{n+2}\|D^2u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu\int_{t_0}^T t^{n+2}\|D^3u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \\ \leq\ & C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \tag{3.92}$$

pela desigualdade anterior.

Seguindo desta forma sucessivamente, obtemos para $\ell = n$ e $\gamma_\ell = 2n$

$$\begin{aligned} & T^{2n}\|D^nu(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu\int_{t_0}^T t^{2n}\|D^3u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \\ \leq\ & C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{n}{2}}. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Como consequência, temos

$$\|D^nu(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-3n}{4}}, \qquad \forall\ T \geq t_0. \tag{3.94}$$

Generalizando os resultados obtidos, tem-se, para $\ell = k$ e $\gamma_n = n+k$

$$\begin{aligned} & T^{n+k}\|D^ku(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu\int_{t_0}^T t^{n+k}\|D^{k+1}u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \\ \leq\ & C_k(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \tag{3.95}$$

para todo $T \geq t_0$ e todo k.

Em particular, obtemos, para $T \geq t_0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-n}{4}} \tag{3.96}$$

$$\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-n}{4}-\frac{1}{2}} \tag{3.97}$$

$$\|D^2u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-n}{4}-1} \tag{3.98}$$

e, mais geralmente,

$$\|D^k u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_k(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-n}{4}-\frac{k}{2}}, \tag{3.99}$$

para todo $T \geq t_0$ e todo k, contanto que $\mathbf{f}$ e A sejam $k+1$ vezes continuamente diferenciáveis.

Podemos agora concluir a derivação de (3.86), que agora se torna fácil.

Teorema 3.13. *Dado $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, a solução da equação (3.1) satisfaz*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \tag{3.100}$$

para todo $T > 0$ onde $C(n,\mu,k_1,k_\infty) > 0$ que depende apenas de n, μ, k_1 e k_∞.

Demonstração: Para $p = \infty$, usando a desigualdade de Sobolev (ver [Friedman, 1969])

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|D^n u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

e a estimativa (3.99), obtém-se

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\mu,k_1,k_\infty)T^{\frac{-n}{2}}, \tag{3.101}$$

para todo $T > 0$

Para $p \geq 1$, (3.100) segue da desigualdade de Interpolação (A.8), (3.34) e (3.101).

$\square$

3.5 Comportamento assintótico, $n = 1$

Nesta seção, investigamos o comportamento das soluções $u(\cdot,t)$ do problema (3.12), (3.13). Iniciamos substituindo a equação (3.12) por outra, mais simples, que aproxima (3.12) suficientemente bem (quando $t \to +\infty$). Intuitivamente, na equação (3.12),

$$u_t + f^{'}(u)u_x = a(u)u_{xx} + a^{'}(u)u_x^2 \tag{3.102}$$

temos, para $t \gg 1$, que

$$\begin{aligned} & u_t + \Big(f^{'}(0) + f^{''}(0)u + O(u^2)\Big)\, u_x = \\ = \quad & \Big(a(0) + a^{'}(0)u + O(u^2)\Big)\, u_{xx} + \Big(a^{'}(0) + a^{''}(0)u + O(u^2)\Big)\, u_x^2 \end{aligned}$$

tem a forma

$$u_t + \Big(f^{'}(0) + f^{''}(0)u\Big)\, u_x + O\left(t^{-2}\right) = a(0)u_{xx} + O\left(t^{-2}\right)$$

visto que, de (3.56), (3.59) e (3.72) temos, para a, f, suaves

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-1/2}) \\ \|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-1}) \\ \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-3/2}). \end{aligned}$$

Em particular, sendo $v(\cdot,t)$ definida por

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = a(0)v_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{3.103}$$

esperamos ter $v(\cdot,t)$ próxima de $u(\cdot,t)$ para $t \gg 1$, para $v(\cdot,0)$ adequada. Este fato é estabelecido no teorema (3.14) abaixo, tendo como referência [Zingano, 2004]. É preciso, aqui, assumir que $f^{''}$(u) seja Hölder contínua em u = 0, isto é, que se tenha

$$|f^{''}(\mathrm{u}) - f^{''}(0)| \leq \Gamma|\mathrm{u}|^{\alpha} \quad |u| \leq \Omega \tag{3.104}$$

para algum $\Omega > 0$, e constantes Γ, $\alpha > 0$. Antes de obter o teorema (3.14) , precisamos observar o seguinte resultado.

Lema 3.1. *Para cada $\epsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\epsilon; \mu, K_1, K_\infty, \alpha, \Gamma, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon \qquad \forall\ t \geq t_0 \tag{3.105}$$

onde $w(\cdot,t)$ *é dada por*

$$w_t + f^{'}(0)w_x + f^{''}(0)ww_x = a(0)w_{xx}, \qquad t > t_0 \tag{3.106}$$

$$w(\cdot .0) = u(\cdot, t_0) \tag{3.107}$$

Demonstração: Seja $\hat{t}_0 \geq 1$ suficientemente grande de modo a se ter

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \Omega \qquad t \geq \hat{t}_0 \tag{3.108}$$

e $t_0 \geq \hat{t}_0$ a ser escolhido abaixo (ver (3.111)).

Como $u(\cdot,t)$ satisfaz

$$u_t + f^{'}(u)u_x = (a(u)u_x)_x,$$

isto é,

$$u_t + f^{'}(0)u_x + f^{''}(0)uu_x + [f^{'}(u) - f^{'}(0) - f^{''}(0)u]u_x = a(0)u_{xx} + ([a(u) - a(0)]u_x)_x,$$

e $w(\cdot,t)$ satisfaz

$$w_t + f^{'}(0)w_x + f^{''}(0)ww_x = a(0)w_{xx},$$

obtemos que $\theta(\cdot,t) := u(\cdot,t) - w(\cdot,t)$ satisfaz

$$\theta_t + f^{'}(0)\theta_x + f^{''}(0)\left(\frac{\theta^2}{2} + \theta w\right)_x = a(0)\theta_{xx} - \mathcal{F}(u)u_x + ([a(u)u_x])_x \tag{3.109}$$

onde $\mathcal{F} := f^{'}(u) - f^{'}(0) - f^{''}(0)u$ e $[a(u)] := a(u) - a(0)$.

Sendo L_δ, $\delta > 0$ dada em (3.31),multiplicando (3.109) por $L^{'}_\delta(\theta)$ e integrando por partes em $[t_0,T] \times \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x,T))dx &= f^{''}(0)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L^{'}_\delta(\theta)\left(\frac{\theta^2}{2} + \theta w\right)_x dxdt - a(0)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L^{''}_\delta(\theta)\theta_x^2 dxdt \\ &- \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L^{'}_\delta(\theta)\mathcal{F}(u)u_x dxdt + \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L^{'}_\delta(\theta)([a(u)]u_x)_x dxdt.\end{aligned}$$

Como $L^{''}(\delta) \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x,T))dx &\leq f^{''}(0)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L^{'}_\delta(\theta)\left(\frac{\theta^2}{2} + \theta w\right)_x dxdt - \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |L^{'}_\delta(\theta)|\,|\mathcal{F}(u)|\,|u_x| dxdt \\ &+ \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |L^{'}_\delta(\theta)|\,|a(u) - a(0)|\,|u_{xx}| dxdt + \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |L^{'}_\delta(\theta)|\,|a^{'}(u)|u_x^2 dxdt.\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{'}(\theta)\left(\frac{\theta^2}{2}+\theta w\right)_x dxdt = -\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{''}(\theta)\left(\frac{\theta^2}{2}+\theta w\right)\theta_x dxdt \longrightarrow 0 \qquad quando \quad \delta \to 0,$$

portanto, fazendo $\delta \to 0^+$

$$\begin{aligned}\|\theta(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)|\,|u_x|dxdt + \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |a(u)-a(0)|\,|u_{xx}|dxdt \\ &+ \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |a^{'}(u)|u_x^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.110}$$

em virtude de (3.32) e (3.33).

Observe que

$$|\mathcal{F}(u)| = |f^{'}(u)-f^{'}(0)-f^{''}(0)u| = |u|\,|f^{''}(\xi)-f^{''}(0)| \leq |u|\,\Gamma|\xi|^\alpha \leq \Gamma\,|u|^{1+\alpha} \qquad \forall\, t \geq \hat{t}_0,$$

então

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)|\,|u_x|dxdt &\leq \Gamma\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |u|^{1+\alpha}\,|u_x|dxdt \\ &\leq \Gamma\int_{t_0}^{T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\alpha}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}dt \\ &\leq \Gamma C(\mu,k_1,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{\frac{-\alpha}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}dt \\ &\leq \frac{\Gamma}{\alpha}\,C(\mu,k_1,k_\infty)t_0^{\frac{-\alpha}{2}},\end{aligned}$$

pelas estimativas (3.53), (3.56) e (3.59).

Por outro lado, lembrando que $[a(u)] = a(u)-a(0) = a^{'}(\xi)u$, para $|\xi| \leq u$, de modo que $|[a(u(\cdot,t))]| \leq C(k_\infty)|u(x,t)|$, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |a(u)-a(0)|\,|u_{xx}|dxdt &\leq C(k_\infty)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |u|\,|u_{xx}|dxdt \\ &\leq C(k_\infty)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} t^{-1}|u|^2dxdt + C(k_\infty)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} t|u_{xx}|^2dxdt \\ &\leq C(k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{-1}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2dt + C(k_\infty)\int_{t_0}^{T} t\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2dt \\ &\leq C(\mu,k_1,k_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{\frac{-3}{2}}dt \\ &\leq C(\mu,k_1,k_\infty)t_0^{\frac{-1}{2}},\end{aligned}$$

pela desigualdade (A.1), (3.53) e (3.79).

Finalmente por (3.59), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}}|a^{'}(u)|u_x^2dxdt &\leq C(k_\infty)\int_{t_0}^{T}\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt\\ &\leq C(\mu,k_1,k_\infty)\int_{t_0}^{T}t^{\frac{-3}{2}}dt\\ &\leq C(\mu,k_1,k_\infty)t_0^{\frac{-1}{2}}.\end{aligned}$$

Portanto, de (3.110) e as estimativas acima, obtemos

$$\|\theta(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(\mu,k_1,k_\infty,\alpha,\Gamma)(t_0^{\frac{-\alpha}{2}}+t_0^{-1}),\quad \forall\, T\geq t_0, \tag{3.111}$$

de onde segue o resultado. □

Teorema 3.14. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.12) e (3.13), e $v(\cdot,t)$ solução de*

$$v_t+f^{'}(0)v_x+f^{''}(0)vv_x=a(0)v_{xx}$$

correspondente ao estado inicial $v(\cdot,0)\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$, com $\int_{\mathbb{R}}u(x,0)dx = \int_{\mathbb{R}}v(x,0)dx$, então

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}=0. \tag{3.112}$$

Demonstração: Dado $\epsilon>0$, pelo lema (3.1) acima existe $\hat{t}_0=\hat{t}_0(\epsilon;\mu,k_1,k_\infty,\alpha,\Gamma,\delta)>0$ tal que $\|w(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}\leq\frac{\epsilon}{2}\quad\forall\, t\geq\hat{t}_0$, onde $w(\cdot,t)$ é solução de

$$\begin{aligned}w_t+f^{'}(0)w_x+f^{''}(0)ww_x &= a(0)w_{xx},\quad t>\hat{t}_0\\ w(\cdot,\hat{t}_0) &= u(\cdot,\hat{t}_0)\end{aligned}$$

Ora, $v(\cdot,t)$ é a solução de

$$v_t+f^{'}(0)v_x+f^{''}(0)vv_x=a(0)v_{xx}\quad t>\hat{t}_0$$

com $v(\cdot,\hat{t}_0)=v_0$, onde $v_0(x)=v(x,\hat{t}_0)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, e tem a mesma massa que $w(\cdot,\hat{t}_0)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}}v_0(x)dx=\int_{\mathbb{R}}v(x,\hat{t}_0)dx=\int_{\mathbb{R}}v(x,0)dx=\int_{\mathbb{R}}u(x,0)dx=\int_{\mathbb{R}}u(x,\hat{t}_0)dx=\int_{\mathbb{R}}w(x,\hat{t}_0)dx.$$

Daí, por [Zingano, 2004],

$$\|w(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad quando \quad t\to+\infty$$

de modo que existe $t_0 \geq \hat{t}_0$ tal que $\|w(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, t \geq t_0$.

Segue então que, $\forall\, t \geq t_0$

$$\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t)-w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|w(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon$$

para todo $t \geq t_0$, o que mostra (3.112). □

Teorema 3.15. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.12) e (3.13), e $v(\cdot,t)$ solução de*

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = a(0)v_{xx}$$

correspondente ao estado inicial $v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, com $\int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx = \int_{\mathbb{R}} v(x,0)dx$, tem-se, para cada $1 \leq p \leq \infty$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \tag{3.113}$$

uniformemente em p.

Demonstração: O caso $p=1$ foi considerado no teorema anterior (3.14). Para $p=2$, obtemos, pela desigualdade de Interpolação (A.8)

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + t^{\frac{1}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\mu,k_1,k_\infty)\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

usando (A.7) e (3.56).

Segue então, pelo teorema (3.14)

$$t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t\to+\infty.$$

Analogamente, para $p=\infty$, usando a desigualdade de Sobolev (A.10), obtemos

$$\begin{aligned}
&t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\left(t\|u_x(\cdot,t)-v_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \sqrt{2}\, t^{\frac{1}{8}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\left(t^{\frac{3}{4}}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}+t^{\frac{3}{4}}\|v_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C(\mu,k_1,k_\infty)\left(t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

pelas desigualdades (A.7) e (3.59), e então, pelo caso $p=2$

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t\to+\infty.$$

Finalmente, para $1<p<\infty$, tem-se pela desigualdade de Interpolação (A.8)

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}\left(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

de modo que quando $t\to+\infty$

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$$

pelo caso $p=1$ (teorema 3.14) e o caso $p=\infty$. □

Teorema 3.16. *Sendo $u(\cdot,t),\hat{u}(\cdot,t)$ solução de (3.12) com $u(\cdot,0),\hat{u}(\cdot,0)\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ tendo a mesma massa, então*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}=0 \tag{3.114}$$

para cada $1\leq p\leq+\infty$.

Demonstração: Caso $p=1$: Pelo teorema (3.14), sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned}
v_t+f'(0)v_x+f''(0)vv_x &= a(0)v_{xx}\\
v(\cdot,0) &= u(\cdot,0)
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t\to+\infty\\
\|\hat{u}(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t\to+\infty
\end{aligned}$$

de modo que

$$\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|v(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

e portanto,

$$\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty.$$

Caso $p=2$:

Pela desigualdade de interpolação (A.8), obtém-se

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}\left(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + t^{\frac{1}{2}}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\mu,k_1,k_\infty)\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

usando (A.7) e (3.56), e então, pelo caso $p=1$

$$t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty.$$

Consideremos agora caso $p=\infty$: Usando a desigualdade de Sobolev (A.10), obtém-se

$$\begin{aligned} & t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\left(t\|u_x(\cdot,t)-\hat{u}_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \sqrt{2}\, t^{\frac{1}{8}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\left(t^{\frac{3}{4}}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + t^{\frac{3}{4}}\|\hat{u}_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C(\mu,k_1,k_\infty)\left(t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pelas desigualdades (A.7) e (3.59).

Então, pelo caso $p=2$

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty.$$

Finalmente, no caso $1<p<\infty$, tem-se por (A.8)

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{1-\frac{1}{p}}_{L^\infty(\mathbb{R})}t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \\ &\leq \|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}\left(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

de modo que quando $t \to +\infty$

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$$

pelos resultados anteriores $(p = 1)$ e $(p = \infty)$. □

3.6 Comportamento assintótico, $n > 1$

Nesta seção, investigamos o comportamento das soluções $u(\cdot,t)$ do problema (3.1), (3.2). Para isto, iniciamos lembrando as estimativas obtidas na Seção (3.4)

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C(n,\mu,k_1,k_\infty) t^{\frac{-n}{2}},$$

$$\|Du(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C(n,\mu,k_1,k_\infty) t^{\frac{-n}{2}-\frac{1}{2}},$$

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C(n,\mu,k_1,k_\infty) t^{\frac{-n}{2}-\frac{\ell}{2}}.$$

Daí, intuitivamente, na equação (3.1), temos para $t \gg 1$ que

$$u_t + \left\langle \mathbf{f}'(0), \nabla u \right\rangle + u(\mathbf{x},t) \left\langle \mathbf{f}''(0), \nabla u \right\rangle + \ldots = div(A(0)\nabla u) + div\left(uA'(0)\nabla u\right) + \ldots$$

tem a forma

$$u_t + \left\langle \mathbf{f}'(0), \nabla u \right\rangle + O\left(t^{-n-1}\right) = div(A(0)\nabla u) + O\left(t^{-n-1}\right).$$

Portanto, pelas taxas de decaimento é natural esperar que as soluções da equação não- linear (3.1) sejam bem aproximadas (para t suficientemente grande) pelas soluções da equação abaixo: $(t \gg 1)$

$$v_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla u = div(A(0)\nabla u). \tag{3.115}$$

De fato, isto é comprovado de modo preciso nos teoremas (3.17) e (3.18). Antes de obter os teoremas (3.17) e (3.18), vamos observar o resultado abaixo que será útil para obter as provas dos referidos teoremas.

Lema 3.2. *Dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\epsilon, \mu, k_1, k_\infty, n) \geq 1$ suficientemente grande tal que a solução $v(\cdot, t)$, $t \geq t_0$, de*

$$v_t + \boldsymbol{f}'(0) \cdot \nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad t \geq t_0 \tag{3.116}$$

$$v(\cdot, t_0) = u(\cdot, t_0) \tag{3.117}$$

satisfaz

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \qquad \forall\ t \geq t_0. \tag{3.118}$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, temos para $t_0 \geq 1$ escolhido em (3.122), (3.123), a seguir, que

$$\theta(\cdot, t) := u(\cdot, t) - v(\cdot, t), \quad t \geq t_0,$$

satisfaz

$$\theta_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla\theta = div(A(0)\nabla\theta) + \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0 \tag{3.119}$$

$$\theta(\cdot, t_0) = 0, \tag{3.120}$$

onde

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) := -(\mathbf{f}'(u) - \mathbf{f}'(0)) \cdot \nabla u + div((A(u) - A(0))\nabla u). \tag{3.121}$$

Sendo $L_\delta, \delta > 0$ dada em (3.31), multiplicando (3.119) por $L_\delta'(\theta)$ e integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, T]$, para todo $T > t_0$ qualquer, obtemos, integrando por partes

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(\mathbf{x}, t))d\mathbf{x} + \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta(\mathbf{x}, t))\langle\nabla\theta, A(0)\nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt = \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta'(\mathbf{x}, t)\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}dt.$$

Fazendo $\delta \to 0^+$, obtemos

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)|d\mathbf{x}dt,$$

uma vez que $L_\delta''(\theta(\mathbf{x}, t))\langle\nabla\theta(\mathbf{x}, t), A(0)\nabla\theta(\mathbf{x}, t)\rangle \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$ e $\delta > 0$.

Lembrando (3.121), observamos que

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)|d\mathbf{x}dt \leq \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathbf{f}'(u) - \mathbf{f}'(0)\right| |\nabla u|d\mathbf{x}dt + \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} |div((A(u) - A(0)))\nabla u|d\mathbf{x}dt$$

de forma que, por (3.96), (3.97), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{f}^{'}(u)-\mathbf{f}^{'}(0)|\ |\nabla u| d\mathbf{x}dt \leq C(k_\infty)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)|\ |\nabla u| d\mathbf{x}dt \\
\leq\ & C(k_\infty)\int_{t_0}^{T} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq C(\mu,k_1,k_\infty,n)\int_{t_0}^{T} t^{\frac{-n}{2}-\frac{1}{2}}dt \\
\leq\ & C(\mu,k_1,k_\infty,n)t_0^{\frac{-n+1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad se \quad t_0 >> 1. \qquad (3.122)
\end{aligned}
$$

De forma semelhante, por (3.96), (3.97), (3.98), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |div(A(u)-A(0))\nabla u| d\mathbf{x}dt \\
\leq\ & \sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |a_{ij}(u)-a_{ij}(0)| \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| d\mathbf{x}dt + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |a_{ij}^{'}(u)|\ \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\ \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| d\mathbf{x}dt \\
\leq\ & C(k_\infty)\sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_0}^{T} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt + \\
+\ & C(k_\infty)\sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_0}^{T} \|u_{x_i}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u_{x_j}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \\
\leq\ & C(k_\infty)n^2\int_{t_0}^{T} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|D^2u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt + C(k_\infty)n^2\int_{t_0}^{T} \|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \\
\leq\ & C(\mu,k_1,k_\infty,n)\int_{t_0}^{T} t^{\frac{-n}{2}-1}dt \leq C(\mu,k_1,k_\infty,n)t_0^{\frac{-n}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}, \qquad se \quad t_0 >> 1 \qquad (3.123)
\end{aligned}
$$

Assim, por (3.122), (3.123), obtemos que

$$
\|\theta(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \qquad \forall\ t \geq t_0,
$$

como afirmado. □

Teorema 3.17. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2), e $v(\cdot,t)$ solução de*

$$
v_t + \boldsymbol{f}^{'}(0)\cdot\nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad t>0 \qquad (3.124)
$$

correspondente ao estado inicial $v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} v(\boldsymbol{x},0)$, então

$$
\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t\to+\infty. \qquad (3.125)
$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, pelo lema (4.1) existe $\hat{t}_0 = \hat{t}_0(\mu, k_1, k_\infty, n, \epsilon) \geq 1$ tal que $\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, t \geq \hat{t}_0$ onde $w(\cdot,t)$ é dado por

$$\begin{aligned} w_t + \mathbf{f}' \cdot \nabla w &= div(A(0)\nabla w), \quad t > \hat{t}_0 \\ w(\cdot, \hat{t}_0) &= u(\cdot, \hat{t}_0) \end{aligned}$$

Por [Zingano, 1996a], temos que

$$\|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty$$

e então existe $t \geq \hat{t}_0$ tal que $\|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, t \geq \hat{t}_0$.

Segue então,

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon$$

para todo $t \geq t_0$, para algum $t_0 \geq \hat{t}_0$ suficientemente grande. □

Teorema 3.18. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2), e $v(\cdot,t)$ solução de*

$$v_t + \boldsymbol{f}'(0) \cdot \nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad t > 0 \tag{3.126}$$

correspondente ao estado inicial $v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} v(\boldsymbol{x},0)$, então

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty. \tag{3.127}$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: O caso $p = 1$ foi considerado no teorema anterior. Para $p = 2$, obtemos, pela desigualdade de interpolação (A.8)

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t^{\frac{n}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\mu, k_1, k_\infty, n)\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

usando a estimativa (3.101).

Segue então, pelo teorema (3.17)

$$t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t\to+\infty.$$

Analogamente, para $p=\infty$, usando a desigualdade de Sobolev (ver [Friedman, 1969])

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|D^n u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left(t^n\|D^n u(\cdot,t)-D^n v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
\leq\ & t^{\frac{n}{8}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left(t^{\frac{3n}{4}}\|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+t^{\frac{3n}{4}}\|D^n v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & C(\mu,k_1,k_\infty,n)\left(t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

usando a estimativa (3.94), e então, pelo caso $p=2$

$$t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t\to+\infty.$$

Finalmente, para $1<p<\infty$, temos, pela desigualdade de Interpolação (A.8),

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left(t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

e então, pelo caso $p=1$ (teorema 3.17) e o caso $p=\infty$,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t\to+\infty.$$

como afirmado. $\square$

4 COMPORTAMENTO DE $t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

4.1 Introdução

Neste capítulo, verificamos o comportamento assintótico de alguns limites para a equação do calor, equação de Burgers e equação de advecção-difusão em geral.

Nas Seções 4.2, 4.4 e 4.5, tendo como referência [Zingano, 1996a], [T. Hagstrom, 2004], mostramos para os problemas (2.2), (2.3) e (3.1), (3.2) que a quantidade γ_p dada pelo limite

$$\gamma_p = \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.1}$$

está bem definida para todo $1 \leq p \leq \infty$, e é dada por

$$\gamma_p = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}} \tag{4.2}$$

quando $n \geq 2$, onde m é a massa de $u(\cdot,t)$

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}, \tag{4.3}$$

e $\lambda > 0$ é a média geométrica dos autovalores $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ da parte simétrica $\mathcal{A}$ de $A(u)$ em $u = 0$, isto é,

$$\lambda = \sqrt[n]{det\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A} = \frac{A(0)+A(0)^T}{2}, \tag{4.4}$$

onde $A(0)^T$ denota a transposta de $A(0)$. Em particular, obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |m|, \tag{4.5}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}. \tag{4.6}$$

Na Seção 4.5, usando os resultados das seções 3.2 e 4.2, mostramos ainda que se $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ são soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a mesma massa, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} \tag{4.7}$$

então obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=0 \tag{4.8}$$

para todo $1\leq p\leq\infty$, uniformemente em p. O caso $p=1$,

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=0 \tag{4.9}$$

mencionamos na Seção 4.4.

Os resultados das Seções 4.4 e 4.5 são obtidos a partir do teorema (3.18): a solução $u(\cdot,t)$ dada em (3.1), (3.2) pode ser aproximada em tempos grandes pela solução $v(\cdot,t)$ da equação do calor linear

$$v_t+\mathbf{f}'(0)\cdot\nabla v=div(A(0)\nabla v) \tag{4.10}$$

com o mesmo perfil inicial, i.e., $v(\cdot,0)=u(\cdot,0)$.

Para a equação de Burgers (2.30), obtemos na Seção 4.3 que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}=\frac{|m|}{\sqrt{(4\pi\mu)}}(4\mu)^{\frac{1}{2p}}\left|\frac{2\mu}{bm}\left(1-e^{\frac{-bm}{2\mu}}\right)\right|\|\mathcal{F}\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{4.11}$$

para todo $1\leq p\leq\infty$, e em particular

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}=|m|, \tag{4.12}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=\frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}}\left|\frac{2\mu}{bm}\left(1-e^{\frac{-bm}{2\mu}}\right)\right|\|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{4.13}$$

Lembrando os resultados da Seção 3.5, estendemos (4.11), (4.12), (4.13) à equação mais geral (3.12).

4.2 Caso particular: Equação do Calor

Nesta seção computamos os limites dados em (4.1), (4.5) e (4.6) para as soluções $u(\cdot,t)$ do problema de Cauchy (2.2) e (2.3). Sem perda de generalidade, podemos supor $\mathbf{a}=0$, visto que se pode usar a mudança de variável $\boldsymbol{\xi}$=**x**-**a**t.

Iniciamos com o caso $p=1$.

Teorema 4.1. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.2), (2.3) com $p=1$, tem-se $u(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $t>0$ e*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\to|m| \quad \textit{quando } t\to+\infty \tag{4.14}$$

onde m é a massa de $u(\cdot,t)$, i.e.,

$$m=\int_{\mathbb{R}^n}u(\boldsymbol{y},0)d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^n}u(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} \quad \forall\ t>0.$$

Demonstração: Por (2.4), temos que $u(\cdot,t)$ é dada por

$$u(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}$$

para todo $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $t>0$.

Como

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x},t)|\,d\mathbf{x}\;\geq\;\left|\int_{\mathbb{R}^n}u(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}\right|=|m| \quad \forall\ t>0,$$

temos, em particular

$$\liminf_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\geq|m|. \tag{4.15}$$

Dado $\epsilon>0$, seja $R>0$ tal que $\int_{|\mathbf{y}|>R}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}\leq\epsilon$. Então,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|d\mathbf{x}\\ &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|d\mathbf{x}\\ &+ \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{|\mathbf{y}|>R}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini e (B.1), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;=\; \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|d\mathbf{x}\;+\;\int_{|\mathbf{y}|>R}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y},$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;=\; \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|d\mathbf{x}\;+\;\epsilon.$$

Agora, escrevendo $\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{4t}$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \epsilon \;+\; \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}},A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|d\boldsymbol{\xi}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
-\left\langle \boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}},A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle &= -\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{4t}}\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{4t}}\left\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle \\
&\leq -\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{t}}\left|\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle\right| \\
&\leq -\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle + \left(\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}\left\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq -\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle + \frac{1}{2t}\left\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle,
\end{aligned}$$

pelas desigualdades (A.1) e (A.4).

Então, para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}},A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| &\leq e^{-\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle}\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\frac{1}{2t}\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y} \\
&\leq e^{-\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle}C,
\end{aligned}$$

onde

$$C = \int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}$$

visto que $t = \frac{1}{2}$.

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue quando $t \to +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \epsilon + \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|d\boldsymbol{\xi} \\
&= \epsilon + \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|d\boldsymbol{\xi} \\
&= \epsilon + \left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|,
\end{aligned}$$

por (B.1).

Note que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} - \int_{|\mathbf{y}|>R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| \\
&= \left|m - \int_{|\mathbf{y}|>R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| \\
&\leq |m| + \int_{|\mathbf{y}|>R} |u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y} \\
&\leq |m| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\limsup_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq |m| + 2\epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\limsup_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq |m| \quad \forall\, \epsilon > 0 \tag{4.16}$$

e juntamente com (4.15), obtemos (4.14).

□

Antes de derivar (4.1), (4.6) para $p > 1$, vamos considerar o seguinte resultado.

Lema 4.1. *Se $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tem massa nula, i.e., $\int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = 0$, então tem-se*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{4.17}$$

uniformemente em $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: O Caso $p = 1$ já foi considerado acima. Consideremos agora, $p = 2$: neste caso tem-se, pela desigualdade de Interpolação (A.8),

$$\begin{aligned}
t^{\frac{n}{4}} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq t^{\frac{n}{4}} \left(\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right) \\
&\leq \|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left(t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

logo, por (2.20) e pelo teorema (4.1) obtém-se

$$t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t \to +\infty.$$

Consideremos agora $p = \infty$: Usando a Desigualdade de Sobolev (ver [Friedman, 1969])

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ \|D^n u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

tem-se, por (2.16), (2.27)

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C_n\left(t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(t^{\frac{3n}{4}}\|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C^n\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left(t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

logo, pelo caso $p = 2$

$$t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t \to +\infty.$$

Finalmente, no caso $1 < p < \infty$, tem-se por (A.8) e (2.16),

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left(t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \|u(\cdot,0)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left(t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

de modo que quando $t \to +\infty$

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$$

pelo resultado anterior ($p = \infty$).

□

Agora, estamos em condições para derivar (4.1) para $p \geq 1$ arbitrário.

Teorema 4.2. *Sendo $1 \leq p < \infty$, tem-se*

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}} \tag{4.18}$$

quando $t \to +\infty$, onde m é a massa de $u(\cdot,t)$ e λ é dado por (2.5).

Demonstração: Caso $p = 1$: já visto no teorema (4.1). Consideremos então $1 < p < \infty$:

Seja $u(\cdot, t)$ dada por

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= div(A \cdot \nabla \hat{u}), \quad t > 0 \\ \hat{u}(\mathbf{x}, 0) &= \hat{u}_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

onde

$$\hat{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{m}{v_n}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

sendo que v_n é dado por (B.2).

Dado $1 < p < \infty$, temos

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}(p-1)} \|\hat{u}(\cdot, t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= t^{\frac{n}{2}(p-1)} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\mathbf{x}, t)|^p d\mathbf{x} \\ &= t^{\frac{n}{2}(p-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}p}} \frac{|m|^p}{v_n^p} \left(\int_{|\mathbf{y}| \leq 1} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right\rangle} d\mathbf{y} \right)^p d\mathbf{x} \\ &= \frac{t^{\frac{-n}{2}}}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}p}} \frac{|m|^p}{v_n^p} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\mathbf{y}| \leq 1} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right\rangle} d\mathbf{y} \right)^p d\mathbf{x} \\ &= \frac{t^{\frac{-n}{2}}}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}p}} \frac{|m|^p}{v_n^p} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\mathbf{y}| \leq 1} e^{-\left\langle \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{4t}} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{4t}} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}) \right\rangle} d\mathbf{y} \right)^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Introduzindo $\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{4t}}$, obtemos

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}(p-1)} \|\hat{u}(\cdot, t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \frac{t^{\frac{-n}{2}}}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}p}} \frac{|m|^p}{v_n^p} (4t)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\mathbf{y}| \leq 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}) \right\rangle} d\mathbf{y} \right)^p d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{2^n}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}p}} \frac{|m|^p}{v_n^p} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\mathbf{y}| \leq 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}) \right\rangle} d\mathbf{y} \right)^p d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Ora, para cada $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ dado,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{|\mathbf{y}| \leq 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}) \right\rangle} d\mathbf{y} = e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi} \right\rangle} \int_{|\mathbf{y}| \leq 1} d\mathbf{y} = e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi} \right\rangle} v_n$$

e

$$\int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}})\right\rangle} d\mathbf{y} \leq Ce^{-\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

onde $C = e^{\frac{1}{4}\|A^{-1}\|_E}$.

Pelo teorma da convergência dominada de Lebesgue, obtemos então

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}(p-1)}\|\hat{u}(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{2^n}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}p}}\frac{|m|^p}{v_n^p}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}})\right\rangle} d\mathbf{y}\right)^p d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{2^n}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}p}}\frac{|m|^p}{v_n^p}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-p\left\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{2^n}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}p}}|m|^p\left(\frac{\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\right)^p\left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}}.$$

□

Teorema 4.3. *Quando $t \to +\infty$, tem-se*

$$t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \tag{4.19}$$

onde m é a massa de $u(\cdot,t)$ e $\lambda > 0$ é dado em (2.5).

Demonstração: Pelo lema (4.1), é suficiente mostrar este resultado para a solução $\hat{u}(\cdot,t)$ dada por

$$\begin{aligned}
\hat{u}_t &= div(A\cdot\nabla\hat{u}), \quad t>0 \\
\hat{u}(\mathbf{x},0) &= \hat{u}_0(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

onde

$$\hat{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{m}{v_n}, & |x|\leq 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$

sendo que v_n é dado por (B.2).

De fato, $w_0 = u_0 - \hat{u}_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ tem massa zero, e daí pelo lema (4.1)

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}} \|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

onde $w(\cdot,t)$ é a solução de

$$\begin{aligned} w_t &= div(A \cdot \nabla w) \\ w(\mathbf{x},0) &= w_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

de modo que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Como

$$\hat{u}(\mathbf{x},t) = \frac{m}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} d\mathbf{y},$$

temos

$$t^{\frac{n}{2}} \|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{m}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} d\mathbf{y}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}} \|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\ge t^{\frac{n}{2}} |\hat{u}(0,t)| = \frac{|m|}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{y}, A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle} d\mathbf{y} \\ &\ge \frac{|m|}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{\frac{-1}{4t}\|A^{-1}\|_E} d\mathbf{y} \\ &= \frac{|m|}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\, e^{\frac{-1}{4t}\|A^{-1}\|_E} \int_{|\mathbf{y}|\le 1} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

ou seja, por (B.2) tem-se $\forall\ t > 0$ que

$$t^{\frac{n}{2}} \|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \ge \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\ e^{\frac{-1}{4t}\|A^{-1}\|_E}$$

e fazendo $t \to +\infty$, obtém-se

$$\liminf_{t\to+\infty}\ t^{\frac{n}{2}} \|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \ge \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}.$$

Analogamente,

$$|\hat{u}(\mathbf{x},t)| = \frac{1}{v_n}\frac{|m|}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{\frac{-1}{4t}\left\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\rangle} d\mathbf{y} \leq \frac{1}{v_n}\frac{|m|}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{|\mathbf{y}|\leq 1} d\mathbf{y}$$

assim, novamente usando (B.2), obtemos

$$t^{\frac{n}{2}}|\hat{u}(\mathbf{x},t)| \leq \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \qquad \forall\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0,$$

e daí

$$t^{\frac{n}{2}}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \qquad \forall\ t>0,$$

isto é,

$$\limsup_{t\to+\infty}\ t^{\frac{n}{2}}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}},$$

completando assim a demonstração.

$\square$

4.3 Caso particular: Equação de Burgers

Nesta seção vamos apenas descrever os resultados correspondentes aos limites acima quando $u(\cdot,t)$ é solução da equação de Burgers (2.29), referindo [Zingano, 1996b] para os detalhes.

Utilizando a transformação de Hopf-Cole [Hopf, 1950], [Cole, 1951], é mostrado em [Zingano, 1996b] que

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}=0 \tag{4.20}$$

para quaisquer soluções $u(\cdot,t),\hat{u}(\cdot,t)$ de (2.29) com $u(\cdot,0),\hat{u}(\cdot,0)\in L^1(\mathbb{R})$ tendo a mesma massa; segue deste fato que, mais geralmente,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}=0 \tag{4.21}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$, e este fato é utilizado em [Zingano, 1996b] para obter os seguintes resultados:

1. $\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m|$ (4.22)
2. $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{(4\pi\mu)}}(4\mu)^{\frac{1}{2p}}\left|\frac{2\mu}{bm}\left(1-e^{\frac{-bm}{2\mu}}\right)\right| \|\mathcal{F}\|_{L^p(\mathbb{R})}$ (4.23)
3. $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}}\left|\frac{2\mu}{bm}\left(1-e^{\frac{-bm}{2\mu}}\right)\right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$ (4.24)

onde $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ é dada por

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\mu - h\ erf(\xi)}$$

onde $erf(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2}ds$, $\mu = \frac{1+e^{\frac{-f''(0)m}{2a(0)}}}{2}$, $h = \left|1-e^{\frac{-f''(0)m}{2a(0)}}\right|$, e $m = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$.

Como vimos em Seção 3.5 que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{4.25}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$, e para soluções $u(\cdot,t), v(\cdot,t)$ das equações (3.12) e (2.29), respectivamente, com a mesma massa, resulta imediatamente o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.12) correspondente a um estado inicial $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ com massa m, então*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \gamma_p(m)$$

onde $\gamma_p(m)$ é dado por

$$\gamma_1(m) = |m|$$

$$\gamma_p(m) = \begin{cases} \frac{|m|}{\sqrt{4\pi a(0)}}\left|\frac{2a(0)}{f''(0)m}\left(1-e^{\frac{-f''(0)m}{2a(0)}}\right)\right| \|\mathcal{F}\|_{L^p(\mathbb{R})}, & se \quad f''(0) \neq 0 \\ \frac{|m|}{\sqrt{4\pi a(0)}}\left(\frac{4\pi a(0)}{p}\right)^{\frac{1}{2p}}, & se \quad f''(0) = 0 \end{cases}$$

se $1 < p < \infty$, e

$$\gamma_\infty(m) = \begin{cases} \frac{|m|}{\sqrt{4\pi a(0)}} \left| \frac{2a(0)}{f''(0)m} \left(1 - e^{\frac{-f''(0)m}{2a(0)}}\right) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, & se \quad f''(0) \neq 0 \\ \frac{|m|}{\sqrt{4\pi a(0)}}, \quad se \quad f''(0) = 0 \end{cases}$$

onde $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *é dada por*

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\mu - h\ erf(\xi)}$$

onde $erf(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds$, $\mu = \frac{1+e^{\frac{-f''(0)m}{2a(0)}}}{2}$, $h = \left|1 - e^{\frac{-f''(0)m}{2a(0)}}\right|$, *e* $m = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx$.

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ dada por

$$\begin{aligned} v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x &= a(0)v_{xx}, \quad t > 0 \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

temos, pelo teorema (3.16)

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad para\ cada\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Como

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} - t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} + t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

obtemos o resultado pelo teorema (3.16) e o fato de se ter

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \gamma_p(m),$$

conforme (4.22), (4.23), (4.24). □

4.4 Comportamento de $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

Nesta seção, consideramos as soluções de (3.1), (3.2), obtendo neste caso

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow |m| \quad quando \quad t \to +\infty,$$

onde m é a massa de $u(\cdot,t)$, ou seja,

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} \qquad \forall\ t > 0.$$

Ademais, sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondendo a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tendo a mesma massa, tem-se

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty.$$

Os argumentos a seguir são adaptados de [Zingano, 1996a], [T. Hagstrom, 2004].

Teorema 4.5. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2) então*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |m| \tag{4.26}$$

onde $m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}$ é a massa de $u(\cdot,t)$.

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}'(0)\cdot\nabla v &= div(A(0)\nabla v) \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

temos, pelo teorema (3.17),

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

enquanto

$$\lim_{t\to+\infty} \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |m|,$$

pelo teorema (4.1), de modo que o resultado segue de

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} - \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

Teorema 4.6. *Sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a mesma massa, então*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{4.27}$$

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}'(0)\cdot\nabla v &= div(\mathcal{A}\nabla v) \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A} = \frac{A(0)+A(0)^T}{2}$, temos pelo teorema (3.18),

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t\to+\infty \\ &\lim_{t\to+\infty} \|\hat{u}(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t\to+\infty \end{aligned}$$

de modo que o resultado segue de

$$\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\hat{u}(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

□

4.5 Comportamento de $t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p>1$

Nesta seção, computamos os limites

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \gamma_p, \qquad 1<p\leq\infty \tag{4.28}$$

para as soluções $u(\cdot,t)$ de (3.1), (3.2) quando $n\geq 2$. Além disso, sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a mesma massa, mostramos que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{4.29}$$

Iniciamos com o caso $p=\infty$.

Teorema 4.7. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2), então*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}, \tag{4.30}$$

onde $m=\int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}$ é a massa de $u(\cdot,t)$ e $\lambda = (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ onde $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ são autovalores de $\frac{A(0)+A(0)^T}{2} = \mathcal{A}$.

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}'(0)\cdot\nabla v &= div(\mathcal{A}\nabla v) \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A} = \frac{A(0)+A(0)^T}{2}$, temos pelo teorema (4.3)

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}} \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}},$$

onde $\lambda = (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}$, $spec(\mathcal{A}) = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$, enquanto, pelo teorema (3.18),

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

de modo que o resultado segue de

$$\begin{aligned} & t^{\frac{n}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} - t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ \leq\ & t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.8. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.2), então*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: Os casos $p = 1,\ p = \infty$ já foram considerados. Seja, então, $1 < p < \infty$.

Sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}'(0)\cdot\nabla v &= div(\mathcal{A}\nabla v) \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A} = \frac{A(0)+A(0)^T}{2}$, temos pelo teorema (4.3)

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}},$$

onde $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}$, $spec(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, enquanto, pelo teorema (3.18),

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

de modo que o resultado segue de

$$\begin{aligned} & t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} - t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \\ \leq \; & t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.9. *Sendo $u(\cdot,t), \hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a mesma massa, então*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{4.31}$$

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla v &= div(\mathcal{A} \nabla v) \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A} = \frac{A(0)+A(0)^T}{2}$, temos pelo teorema (3.18),

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t \to +\infty \\ &\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|\hat{u}(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad quando \quad t \to +\infty \end{aligned}$$

de modo que o resultado segue de

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|\hat{u}(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, investigamos um grande número de propriedades básicas das soluções $u(\cdot,t)$ da equação (escalar) de advecção-difusão dada por

$$u_t + div(\mathbf{f}(u(\mathbf{x},t))) = div(A(u(\mathbf{x,t}))\nabla u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{5.1}$$

associados a estados iniciais $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A ênfase maior foi dada ao comportamento de $u(\cdot,t)$ e suas derivadas (em várias normas) quando $t \to +\infty$; em particular, mostramos que as soluções $u(\cdot,t)$ de (5.1) são bem descritas para $t \gg 1$ por soluções $v(\cdot,t)$ de equações mais simples,

$$v_t + \mathbf{f}^{'}(0) \cdot \nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

para cada $n \geq 2$, e a equação de Burgers

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = a(0)v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

no caso unidimensional (i.e., n=1). Estes resultados foram obtidos a partir do exame detalhado destas questões na norma L^1, e em particular da propriedade

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |m| \tag{5.2}$$

onde m é a massa (invariante em t) da solução $u(\cdot,t)$.

Seria interessante examinar a validade destes resultados para equações de advecção mais gerais, particularmente

$$u_t + div(\mathbf{f}(\mathbf{x},t,u)) = div(A(\mathbf{x},t,u)\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

onde, normalmente, se supõe $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em geral, porém, os resultados (como descritos para o caso (5.1)) não serão válidos, e novas investigações (tipicamente mais complicadas tecnicamente) serão necessárias. Estas observações se aplicam mesmo no caso linear: considerando, por exemplo, a equação

$$v_t + \left(\frac{cx}{1+x^2}v\right)_x = v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é constante, podemos mostrar sem dificuldade, de modo análogo ao argumento usado na derivação do Teorema (3.1), que $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ decresce monotonicamente quando $t \to +\infty$; e assim $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \searrow \gamma$ para algum $\gamma \geq 0$ a ser obtido. Quando $c \leq 1$, segue dos resultados em [Rudnicki, 1993] que (5.2) é válido, de modo que $\gamma = |m|$, sendo m a massa de $u(\cdot,t)$; no caso $c > 1$, o valor de γ (exceto em casos triviais) não é conhecido, tendo-se em geral $\gamma > |m|$. No caso da equação

$$u_t + div(\mathbf{a}(\mathbf{x},t)u) = div(A(\mathbf{x},t)\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

para $A^{n\times n}$ constante (positiva definida), tem-se novamente $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ decrescente no tempo, mas quase nada é conhecido a respeito do valor limite de $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ (quando $t \to +\infty$) neste caso.

APÊNDICE A

Teorema A.1 (Desigualdade de Cauchy). *Sendo $a, b \geq 0$, tem-se*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2 \qquad \forall\ \epsilon > 0. \tag{A.1}$$

Demonstração: Tem-se, para todo $\epsilon > 0$ dado,

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{2\epsilon}a)\frac{b}{\sqrt{2\epsilon}} \leq \frac{2\epsilon a^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{2\epsilon} \\ &= \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \end{aligned}$$

visto que $2ab \leq a^2 + b^2$. $\square$

Teorema A.2 (Desigualdade de Young: Primeira Versão). *Sendo $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$ab \leq \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q \qquad \forall\ a, b \geq 0. \tag{A.2}$$

Demonstração: Se $a = 0$ ou $b = 0$, (A.2) vale trivialmente. Basta então considerar $a, b > 0$. Como e^x é convexa, tem-se

$$\begin{aligned} ab &= exp\ (\frac{1}{p}\ ln(a^p) + \frac{1}{q}\ ln(b^q)) \\ &\leq \frac{1}{p}\ exp\ (ln(a^p)) + \frac{1}{q}\ exp\ (ln(b^q)) \\ &= \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q, \end{aligned}$$

como afirmado. $\square$

Teorema A.3 (Desigualdade de Young: Segunda Versão). *Sendo $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$ab \leq\ \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \qquad \forall\ a, b \geq 0,\ \epsilon > 0 \tag{A.3}$$

onde $C(\epsilon) = \frac{1}{q(p\epsilon)^{\frac{p}{q}}}$.

Demonstração: Tem-se para $\epsilon > 0$ dado,

$$ab = (p\epsilon)^{\frac{1}{p}} \ a \frac{b}{(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}} \leq \epsilon a^p + \frac{b^q}{q(p\epsilon)^{\frac{q}{p}}}$$

em virtude de (A.2). □

Teorema A.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$). *Sendo $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica e positiva definida, tem-se*

$$|\langle \boldsymbol{x}\,, B\boldsymbol{y}\rangle| \leq \sqrt{\langle \boldsymbol{x}\,, B\boldsymbol{x}\rangle}\ \sqrt{\langle \boldsymbol{y}\,, B\boldsymbol{y}\rangle} \qquad \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \tag{A.4}$$

Demonstração: Se $\mathbf{x} = 0$ ou $\mathbf{y} = 0$, a desigualdade é obvia; caso contrário, podemos proceder como segue:

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \neq 0$, seja $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $q(t) := \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, B(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\rangle$. Como B é PD, temos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, B(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\rangle &= \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle + t\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y}\rangle + t\langle \mathbf{y}, B\mathbf{x}\rangle + t^2\langle \mathbf{y}, B\mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle + 2t\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y}\rangle + t^2\langle \mathbf{y}, B\mathbf{y}\rangle \end{aligned}$$

visto que B é simétrica.

Em particular segue que $\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, B\mathbf{y}\rangle$, que é equivalente a (A.4). □

Teorema A.5 (Desigualdade de Hölder). *Sendo Ω mensurável $\subseteq \mathbb{R}^n$, e sendo $1 \leq p,\ q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\ \|g\|_{L^q(\Omega)} \tag{A.5}$$

para toda $f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$.

Demonstração: Se $p = 1$, $q = \infty$ ou $p = \infty$, $q = 1$, a desigualdade é óbvia; se $p, q > 1$ finitos são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, procede-se so seguinte modo: se $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|g\|_{L^q(\Omega)} = 0$, (A.5) é obvia; assim, vamos supor $\|f\|_{L^p(\Omega)} > 0$ e $\|g\|_{L^q(\Omega)} > 0$.

Definindo $\widetilde{f} \in L^p(\Omega)$, $\widetilde{g} \in L^q(\Omega)$, via

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(x) &:= \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \\
\widetilde{g}(x) &:= \frac{g(x)}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, obtém-se

$$\|\widetilde{f}\|_{L^p(\Omega)} = 1, \qquad \|\widetilde{g}\|_{L^q(\Omega)} = 1$$

e, pela Desigualdade de young (A.2),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\widetilde{f}(x)|\ |\widetilde{g}(x)|\ dx &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{p} |\widetilde{f}(x)|^p + \frac{1}{q} |\widetilde{g}(x)|^q \right) dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega |\widetilde{f}(x)|^p\ dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |\widetilde{g}(x)|^q\ dx \\
&= \frac{1}{p}\ \|\widetilde{f}\|^p_{L^p(x)} + \frac{1}{q}\ \|\widetilde{g}\|^q_{L^q(x)} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\ \|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_\Omega |f(x)|\ |g(x)|\ dx \leq 1$$

que é a desigualdade (A.5), como afirmado. □

Teorema A.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável, então*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{A.6}$$

para toda $f, g \in L^2(\Omega)$.

Demonstração: Resulta de (A.5) tomando $p = q = 2$. □

Teorema A.7 (Desigualdade de Minkowsky). *Sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável e f, g em $L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$, tem-se*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \tag{A.7}$$

Demonstração: Se $p = 1$ ou $p = \infty$, (A.7) é óbvia;se $1 < p < \infty$, procedemos do seguinte modo: se $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} = 0$, a desigualdade é óbvia; se $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} > 0$ tomando $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se, pela Desigualdade de Hölder (A.5),

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p \, dx = \int_\Omega \frac{|f(x)+g(x)|^p}{|f(x)+g(x)|}|f(x)+g(x)| \, dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1} \left(|f(x)|+|g(x)|\right) dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)| \, dx + \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)| \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= \|f+g\|_{L^p(\Omega)}^{p/q} \left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|f+g\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-p/q} \leq |f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)},$$

que é a Desigualdade (A.7) visto que $p - \frac{p}{q} = 1$. □

Teorema A.8 (Desigualdade de Interpolação). *Sendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem-se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para cada $1 < p < \infty$, com*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \tag{A.8}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| \, |f(\mathbf{x})|^{p-1} d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| \, \|f(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{p-1} d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

o que mostra (A.8), como afirmado. □

Teorema A.9. *Se* $f \in C^0([a,b])$ *e* $\int_a^b f(t)dt \leq M$*, para* $a,\ b,\ M \in \mathbb{R},\ a < b$*, então existe* $t_* \in [a,b]$ *tal que*

$$f(t_*) \leq \frac{M}{b-a}. \tag{A.9}$$

Demonstração: Se não houvesse tal t_*, teríamos

$$f(t) > \frac{M}{b-a} \qquad \textit{para todo } t \in [a,b]$$

e então teríamos de ter

$$\int_a^b f(t)dt > \int_a^b \frac{M}{b-a}dt = M,$$

contradizendo a hipótese sobre f. □

Teorema A.10 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 1). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, *tem-se* $\mathrm{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ *e*

$$\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\ \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \tag{A.10}$$

Demonstração: Tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.6),

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(\bar{x})^2 &= 2\int_{-\infty}^{\bar{x}} \mathrm{u}(x)\mathrm{u}_x(x)dx \\
&\leq 2\left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} (\mathrm{u}(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} (\mathrm{u}_x(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{u}(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{u}_x(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\ \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\ \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$|\mathrm{u}(\bar{x})| \leq \sqrt{2}\ \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \qquad \forall \bar{x} \in \mathbb{R},$$

de onde segue (A.10) □

Teorema A.11 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 2). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt[3]{2}\ \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^{2/3} \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/3} \tag{A.11}$$

Demonstração: Tem-se que,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \|u\|^{1/2}_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|u\|^{1/2}_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

o que implica, por (A.10),

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|u\|^{1/2}_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R})}\\ &\leq 2^{1/4}\ \|u\|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R})}\|u_x\|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R})}\|u\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Dividindo por $\|u\|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R})}$ e elevando ambos os lados a $\frac{4}{3}$, segue o resultado. □

Teorema A.12 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 3). *Sendo* $u \in H^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R})} \leq \sqrt[4]{2}\ \|u\|^{3/4}_{L^2(\mathbb{R})}\|u_x\|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R})} \tag{A.12}$$

Demonstração: Tem-se

$$\begin{aligned}\|u\|^4_{L^4(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^4 dx\\ &\leq \|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

e, então, por (A.10),

$$\|u\|^4_{L^4(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|^3_{L^2(\mathbb{R})}\|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

o que mostra (A.12), como afirmado. □

Teorema A.13 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 4). *Sendo* $u \in H^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|u\|_{L^6(\mathbb{R})} \leq \sqrt[3]{2}\ \|u\|^{2/3}_{L^2(\mathbb{R})}\|u_x\|^{1/3}_{L^2(\mathbb{R})} \tag{A.13}$$

Demonstração: Por (A.10) tem-se,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^6(\mathbb{R})} &\leq \|u\|^{2/3}_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u\|^{1/3}_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leq \left(\sqrt{2}\ \|u\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}\|u_x\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{2/3}\|u\|^{1/3}_{L^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

que é a desigualdade (A.13). □

Teorema A.14 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 5). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathrm{u}\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \|\mathrm{u_{xx}}\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \tag{A.14}$$

Demonstração: Integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathrm{u}_x\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x \mathrm{u}_x dx = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}\mathrm{u}_{xx} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{u}|\ |\mathrm{u}_{xx}|\ dx \leq \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \|\mathrm{u_{xx}}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

pela desigualdade (A.6). □

Teorema A.15 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 6). *Sendo* $u \in H^2(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|u_x\|_{L^4(\mathbb{R})} \leq \sqrt{3} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_{xx}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \tag{A.15}$$

Demonstração: Pela desigualdade (A.1) tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u_x^3 u_x dx &= -3 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 u_{xx} u dx \leq 3 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 |u_{xx}|\ |u| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^4 dx + \frac{9}{2} \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 u^2 dx, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u_x^4 dx &\leq 9 \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 u^2 dx \leq 9 \|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dx \\ &\leq 9 \|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_{xx}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|u_x\|_{L^4(\mathbb{R})} \leq \sqrt{3} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_{xx}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \tag{A.16}$$

como afirmado. □

Teorema A.16 (Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg). *Sejam* $1 \leq p,\ q, r \leq \infty$ *e* $j, m \in \mathbb{Z}$ *com* $0 \leq j < m$ *tais que*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{q} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{r}$$

para $a \in \left[\frac{j}{m}, 1\right[$. *Então, existe constante* $C > 0$ *dependendo apenas de* m, j, n, p, q, r *tal que*

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R})^n} \leq C \|D^m u\|^a_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-a}_{L^r(\mathbb{R}^n)} \tag{A.17}$$

para toda $u \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$. *Quando* $m < j + \frac{n}{q}$, *(A.16) vale também no caso de se ter* $a = 1$.

Demonstração: Ver [Friedman, 1969], PDEs, pp. 22-27 (Seção 1.9). □

APÊNDICE B

Teorema B.1. *Sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica e positiva definida, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} d\boldsymbol{\xi} = (4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}} \quad \forall\ t > 0 \tag{B.1}$$

onde $(\lambda = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ *tal que* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in spec(A)$.

Demonstração: Seja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base *ortonormal* de $\mathbb{R}^1$ formada por autovetores de A com $A\mathbf{u}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j$, $1 \leq j \leq n$. Então, sendo: $Q = [\mathbf{u}_1 \vdots \mathbf{u}_2 \vdots \ldots \vdots \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ temos Q *ortogonal* e AQ = QΛ, $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Em particular, Λ $= Q^TAQ$ e $\Lambda^{-1} = Q^TA^{-1}Q$, e daí fazendo a mudança de variável $\boldsymbol{\xi} = Q^T\mathbf{x}$ e usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\langle\ \mathbf{x}\ ,\ A^{-1}\mathbf{x}\ \rangle} d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\langle\ Q\boldsymbol{\xi}\ ,\ A^{-1}Q\boldsymbol{\xi}\ \rangle} |detQ| d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\langle\boldsymbol{\xi}\ ,\ \Lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}\ \rangle} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha}{\lambda_j}\boldsymbol{\xi}_j^2} d\boldsymbol{\xi} = \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\alpha}{\lambda_j}\boldsymbol{\xi}_j^2} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} (\lambda_1\ \lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{\pi\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{4t}$, segue o resultado. □

Teorema B.2. *O volume V_n da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ é dado por*

$$v_n = \int_{|\boldsymbol{\xi}|\leq 1} d\boldsymbol{\xi} = \frac{2}{n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \tag{B.2}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ *denota a função Gama de Euler.*

Demonstração: De B.1, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\boldsymbol{\xi}|^2} d\boldsymbol{\xi} = 1$$

e, escrevendo $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\omega} r,\ \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|},\ r = |\boldsymbol{\xi}|$,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\boldsymbol{\xi}|^2} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^{+\infty} \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} e^{-\pi r^2} r^{n-1} d\boldsymbol{\omega} dr \\ &= \sigma_n \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r^{n-1} dr \end{aligned}$$

onde σ_n é a área da superfície esférica de raio 1 em $\mathbb{R}^n$.

Introduzindo $t = \pi r^2$, temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r^{n-1} dr = \frac{\pi^{\frac{-n}{2}}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t}\ t^{-1+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

de modo que

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Segue daí

$$v_n = \int_{|\boldsymbol{\xi}|\leq 1} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^1 \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} r^{n-1} d\boldsymbol{\omega} dr = \sigma_n \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{\sigma_n}{n},$$

o que prova B.2. □

BIBLIOGRAFIA

[Cole, 1951] Cole, J. D. (1951). On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, (9):225–236.

[Crandall e Tartar, 1980] Crandall, M. e Tartar, L. (1980). Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (78):385–390.

[da Silva, 2003] da Silva, A. M. C. (2003). Equações de advecção-difusão: Propriedades e comportamento assintótico em 1-D. Dissertação de mestrado, UFRGS, Porto Alegre.

[Fletcher, 1982] Fletcher, C. A. J. (1982). Burgers equation: a model for all reasons. In *Numerical solutions of partial differential equations (Parkville, 1981)*, pages 139–225. North-Holland, Amsterdam.

[Friedman, 1969] Friedman, A. (1969). *Partial Differential Equations.* Holt, Rinehart and Winston, New York.

[Hopf, 1950] Hopf, E. (1950). The partial differencial equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.*, (3):201–230.

[Kreiss e Lorenz, 1989] Kreiss, H. O. e Lorenz, J. (1989). *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations.* Academic Press, New York.

[O. A. Ladyzhenskaia e Uracelva, 1968] O. A. Ladyzhenskaia, V. A. S. e Uracelva, N. N. (1968). Linear and quasilinear equations of parabolic type. *Amer. Math. Soc.*

[Rudnicki, 1993] Rudnicki, R. (1993). Asymptotic stability in L^1 of parabolic equations. *J. Diff. Equations*, (102):391–401.

[T. Hagstrom, 2004] T. Hagstrom, J. Lorenz, P. R. Z. (2004). On finite energy solutions of advection-diffusion equations (submitted).

[Taylor, 1996] Taylor, M. (1996). *Partial Differential Equations*, volume 3 vols. springer, New York.

[Zingano, 1996a] Zingano, P. R. (1996a). On bounded, integrable solutions of nonlinear advection-diffusion equations. *Instituto de Matemática, UFRGS.*

[Zingano, 1996b] Zingano, P. R. (1996b). Some asymptotic limits for burgers equation. *Instituto da Matemática, UFRGS.*

[Zingano, 1999] Zingano, P. R. (1999). Nonlinear L^2 stability under large disturbances. *J. Comp. Appl. Math*, (103):207–219.

[Zingano, 2004] Zingano, P. R. (2004). Asymptotic behavior of the L^1 norm of solutions to nonlinear parabolic equations. *Comm. Pure Appl. Anal.*, 3(1):151–159.