

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Movimento de Partículas
Carregadas em Fluidos
Ionizados: Fundamentos
Matemáticos da Teoria de
Eletroforese Capilar**

por

Luciano Bedin

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Ciências

Prof. Dr. Mark Thompson
Orientador

Porto Alegre, Maio de 2005.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Bedin, Luciano

Movimento de Partículas Carregadas em Fluidos Ionizados: Fundamentos Matemáticos da Teoria de Eletroforese Capilar / Luciano Bedin.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2005.

128 p.: il.

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005.

Orientador: Thompson, Mark

Tese: Matemática Aplicada

Eletroforese, equação de Poisson-Boltzmann, problema de Stokes

III

Movimento de Partículas
Carregadas em Fluidos Ionizados:
Fundamentos Matemáticos da
Teoria de Eletroforese Capilar

por

Luciano Bedin

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Ciências

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Banca examinadora:

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda
UFRJ

Prof. Dr. Laurent Emmanuel Dardenne
LNCC

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano
PPGMAp-UFRGS

Tese apresentada e aprovada em
27 de maio de 2005.

Prof^a. Dr^a. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

Conteúdo

LISTA DE SÍMBOLOS	1
RESUMO	3
ABSTRACT	4
1 INTRODUÇÃO	5
2 A EQUAÇÃO DE POISSON-BOLTZMANN	17
2.1 Formulação do Problema Eletrostático	18
2.2 Teoria de Existência	22
2.3 Regularidade Adicional	27
2.3.1 Caso 1: Domínios Lipschitz	27
2.3.2 Caso 2: Domínios de Classe $C^{1,1}$	34
2.4 Teoria de Aproximação	38
3 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS PARA O MOVIMENTO HIDRO-ELÉTRICO	45
3.1 Equações Governantes	46
3.2 A noção de solução fraca	50
3.3 Existência de Soluções Aproximadas	53
3.4 Convergência para as soluções aproximadas	64
4 TEORIA DE EXISTÊNCIA PARA O MOVIMENTO HIDROELÉTRICO: A VELOCIDADE DE DESLIZAMENTO	71
4.1 Campo Elétrico e Interação com o Fluido	73
4.2 Formulação Fraca e Existência de Soluções Aproximadas	77
4.3 Limites para as Soluções Aproximadas	85
4.4 Existência de Soluções Fortes	104
4.5 Formulação no Caso de Região Infinita	108

BIBLIOGRAFIA **117**

LISTA DE SÍMBOLOS

D	domínio aberto e limitado do \mathbb{R}^n
∂D	contorno do domínio D
I_A	função característica do conjunto A
$D \setminus \overline{K}$	$\{\mathbf{x} \in D : \mathbf{x} \notin \overline{K}\}$
$C^0(D), C^0(\overline{D}), C^0(\partial D)$	espaços usuais de funções contínuas
$C^m(D), C^m(\overline{D}), C^m(\partial D)$	espaços usuais de funções m -vezes continuamente diferenciáveis
$C^{k+\alpha}(D), C^{k+\alpha}(\overline{D}), C^{k+\alpha}(\partial D)$	espaços usuais de funções cujas derivadas parciais de ordem k são Hölder contínuas com expoente α
$L^p(D)$	espaços de classes de funções Lebesgue mensuráveis em D tais que $x \rightarrow u(x) ^p$ é integrável sobre D
$L^p(\partial D)$	espaços de classes de funções Lebesgue mensuráveis em ∂D tais que $x \rightarrow u(x) ^p$ é integrável sobre ∂D
$W^{m,p}(D), H^s(D), H^s(\partial D)$	espaços usuais de Sobolev
$\ \cdot\ _{m,p,D}$	norma do espaço $W^{m,p}(D)$
$\ \cdot\ _{s,2,D}$	norma do espaço $H^s(D)$
$\ \cdot\ _{s,2,\partial D}$	norma do espaço $H^s(\partial D)$
$\ \cdot\ _{0,p,D}$	norma do espaço $L^p(D)$
$\ \cdot\ _{0,p,\partial D}$	norma do espaço $L^p(\partial D)$
$\ \cdot\ _X$	norma do espaço vetorial normado X

$L^p(s, \tau; X)$	espaço de classes de funções $u(., t) \in X$ tais que $t \rightarrow \ u(., t)\ _X^p$ é integrável em (s, t)
$L^\infty(s, \tau; X)$	espaço de classes de funções $u(., t) \in X$ tais que $t \rightarrow \ u(., t)\ _X$ é essencialmente limitada em (s, t)
Δ	operador de Laplace
∇	operador gradiente
$\partial_\nu f$	$\nu \cdot \nabla f$
P_h	projeção ortogonal
V'	espaço dual de V
$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$	$\{v_i v_j\} \in M^{n \times n}$
$A : B$	$tr(A^t B), tr A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$
$\text{supp } f$	suporte da função f

RESUMO

Neste trabalho, discutimos o movimento de uma macromolécula carregada em um fluido ionizado. A interação do campo elétrico é descrita pela equação de Poisson-Boltzmann acoplada às equações governantes para a dinâmica do fluido e às equações dinâmicas da partícula. Uma formulação fraca é introduzida no caso em que o domínio ocupado pelo fluido é finito e um teorema de existência de soluções fracas, local em tempo, é estabelecido. Dois modelos são considerados: fluxos não-estacionários e estacionários. No primeiro caso, a hidrodinâmica do sistema é governada pelas equações de Navier-Stokes, considerando-se um termo forçante relacionado ao potencial elétrico; no segundo caso, uma velocidade de deslizamento, a qual depende não linearmente sobre os potenciais, é introduzida como uma condição de contorno para um problema estacionário de Stokes. O caso de um fluido ocupando uma região infinita é também discutido supondo-se uma hipótese de aproximação sobre o campo elétrico.

ABSTRACT

We discuss the motion of a charged macromolecule in an ionized fluid. The interaction of the electrical field is described by the Poisson-Boltzmann equation coupled with the governing equations for the fluid dynamics and the dynamic equations for the particle. A weak formulation is introduced in the case of a finite enclosure and a local in time existence theorem for the weak solutions is established. Two models are considered for stationary and non-stationary flows. In the first case, the hydrodynamics of the system is governed by the Navier-Stokes' equations and a electrical forcing term is considered; in the second case, a slip velocity, depending non-linearly on the potentials, is introduced as a boundary condition for a stationary Stokes' problem. The case of a fluid occupying an infinite region is also discussed supposing an approximation hypothesis on the electrical field.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata da modelagem e análise do movimento hidrolétrico de uma partícula carregada. Fenômenos desse tipo são comuns em experimentos biológicos, onde macromoléculas carregadas (tais como proteínas e fragmentos de DNA) são imersas numa solução eletrolítica e passam a se mover quando um campo elétrico externo é aplicado a esse sistema. Isso constitui o que se denomina de movimento eletroforético (ou eletroforese) e é objeto central de estudo em algumas áreas, por suas diversas aplicações. Em modernos laboratórios, técnicas de eletroforese são largamente utilizadas para separação, isolamento e identificação de biomoléculas [91]. Isso fornece informações relacionadas à estrutura dessas partículas, dadas por uma relação entre o seu tamanho e sua mobilidade [15]. Mais recentemente algumas dessas técnicas tem sido aplicadas ao design de micro-chips e micro-bombas [76], [44], [81], [2].

A eletroforese pode ser classificada, em termos práticos, em duas maneiras: a do tipo zona e a do tipo fronteira móvel. A característica principal do primeiro tipo é o uso de uma matriz (em geral, um gel) através da qual uma camada fina de uma molécula de interesse (uma zona) sofre eletroforese. No segundo tipo, uma solução proteica e um solvente (eletrólito) são cuidadosamente colocados juntos tais que um contorno se forma na sua interface. O solvente age como uma espécie de reservatório de cargas que neutraliza (isto é, forma uma camada de contra-íons ao redor) qualquer carga estática em torno de 10^{-6} a 10^{-8} segundos [41]. Um potencial externo ao sistema é então aplicado e irá fazer com que esse contorno se movimente. Esse movimento pode ser visualizado por um sistema ótico usando-se, por exemplo, um interferômetro, e o campo elétrico dentro do aparato pode ser determinado; isso fornece dados sobre mobilidade; todavia, ao contrário da eletroforese zonal, pouca informação sobre estrutura pode ser obtida. Isso tornou os métodos de fronteira móvel pouco populares (ver discussão em [15]). Entretanto, no começo dos anos noventa, um novo método de eletroforese, sem a utilização de qualquer tipo

de matriz, foi desenvolvido: a eletroforese capilar. Esse método, remanescente dos métodos de fronteira móvel, tem sido largamente utilizado para análise de misturas altamente complexas. A separação ocorre num buffer de amostra; o método é muito rápido, tem alta resolução e, na separação de macromoléculas, tem a capacidade de separar pequenos solutos iônicos. Assim como no caso da eletroforese de fronteira móvel, técnicas especiais de laboratório permitem a determinação da velocidade da partícula, bem como do potencial elétrico na superfície da macromolécula (o conhecido potencial zeta, ou potencial eletrocinético), que dá informação sobre a distribuição de cargas na região próxima à interface macromolécula/solvente. Esses efeitos eletrocinéticos são importantes para o estudo da estrutura de interfaces em sistemas coloidais [27]. Macromoléculas e organelas da célula têm muitas das características desses sistemas e seu estudo é essencial na compreensão da natureza da região interfacial associada a membranas biológicas [15].

Conforme observado em [69], outras contribuições não "eletroforéticas" devem ser levadas em consideração para uma descrição apurada do movimento de partículas coloidais, como por exemplo, o movimento Browniano e, em menor escala, forças gravitacionais. Além disso, no caso de eletroforese capilar, dado o pequeno tamanho do enclosure, a interação do solvente com a capilaridade dá origem ao chamado efeito eletro-osmótico (ver detalhes em [2]). Tal fenômeno acontece quando um campo elétrico é aplicado a uma solução eletrolítica contida numa região limitada, nesse caso, uma indução de transporte de carga ocorre. A carga será deslocada principalmente pelos íons na solução que deslocarão também moléculas de água, dando origem a um fluxo hidrodinâmico, de caráter irreversível [15].

A discussão acima dá um indício de que a análise teórica dos fenômenos envolvidos em eletroforese é complexa, pois combina características específicas da física e da estrutura da macromolécula, a complexidade intrínseca dos fenômenos eletrocinéticos e a hidrodinâmica do sistema [80], [79]. Dessa forma equações descrevendo a concentração de espécies iônicas, o potencial elétrico e os campos de velocidade e pressão do solvente, todas dependendo sobre a posição da partícula e

tempo, devem ser consideradas [41]. Há uma literatura considerável versando sobre esses diversos aspectos e aplicações. A maioria dos trabalhos trata do movimento de partículas com propriedades de simetria geométrica induzido por campos elétricos externos estacionários (em algumas situações particulares, soluções analíticas podem ser obtidas [108]). Citamos, como exemplo [41], [68], [69], [116], [38], [103], [5] que tratam o movimento eletroforético de partículas carregadas (uniformemente ou não) na forma de esferóides, halteres, cilindros ou partículas coloidais delgadas. Os modelos estudados, nesses casos, são baseados em mecânica newtoniana para corpos rígidos, embora estudos (teóricos e numéricos) envolvendo deformação vêm sendo desenvolvidos, especialmente no caso de polieletrólitos flexíveis em solução (ver [80], [106], [79]). Em muitos dos trabalhos citados acima, linearizações das equações do modelo eletrostático, bem como da difusão de íons e das equações hidrodinâmicas têm sido propostas. O uso de teoria linear, em particular, a teoria de condensação de contra-íons, para a descrição de eletroforese de cadeias de polieletrólitos, são somente consistentes se o poli-íon é fracamente carregado (ver [6] para críticas dos modelos lineares do continuum).

Em contraste com o vulto de pesquisa desenvolvida, observa-se a falta de estudos envolvendo formulações matemáticas rigorosas na descrição de tais fenômenos. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é investigar matematicamente, questões relacionadas à modelagem e à análise do acoplamento elétrico-hidrodinâmico (não linear) envolvido. Tratamos somente da eletroforese do tipo fronteira móvel, nos casos de fluxos estacionários e não estacionários, englobando a eletroforese capilar. Nossa investigação se dá no âmbito da eletrostática e hidrodinâmica do continuum. Embora tais modelos teóricos são reconhecidamente inconsistentes na descrição detalhada de alguns fenômenos relacionados [6], [99], têm sido bastante utilizados. Como observado em [5], os modelos de continuum têm descrito com certa precisão sedimentação, constantes de difusão e equilíbrio eletrostático de soluções iônicas e têm contribuído para a compreensão da atividade de soluções dilutas de sais simples (teoria de Debye-Huckel) bem como de problemas complexos envolvendo estados de ionização de modelos detalhados de proteínas [8].

Consideramos uma idealização da situação descrita acima onde uma partícula rígida carregada, ocupando uma região compacta $\overline{K} \subset \mathbb{R}^3$, está imersa em uma solução ionizada (um fluido viscoso incompressível) ocupando uma região $D \subset \mathbb{R}^3$. Supomos que a solução é composta de um solvente e um sal monovalente. Somente uma partícula é considerada, e portanto os resultados são limitados a suspensões diluídas (para o caso de uma suspensão concentrada de partículas coloidais ver [67]). No contorno da região ocupada pelo recipiente consideramos a presença de um campo elétrico externo Φ o qual induz o potencial elétrico ϕ dentro da região, que será determinado pela equação de Poisson-Boltzmann

$$\nabla \cdot [k(r)\nabla\phi(r)] - I_{D \setminus \overline{K}} \kappa^2 \sinh(e\phi(r)/T) + \rho(r) = 0, \quad (1.1)$$

onde ϕ é o potencial eletrostático do sistema (solvente e macromolécula), k é a constante dielétrica, e é a carga do elétron, T e κ são variáveis físicas (mais precisamente T é o produto da constante de Boltzmann pela temperatura do sistema), ρ é uma distribuição de cargas fixas em D e $\sinh(e\phi(r)/T)$ é a distribuição de Boltzmann [53] de íons livres no solvente. Condições de transmissão e de continuidade completam esse modelo eletrostático, conforme pode ser visto no Capítulo 2 desse trabalho, onde é apresentada uma derivação da equação acima.

Com relação à hidrodinâmica do sistema e ao movimento da partícula, discutimos dois modelos: o primeiro considera a ação do campo elétrico em toda a região externa à partícula (como tratado em [108], [69] ou em [5]). Nesse caso, vamos considerar o fluxo não estacionário e a hidrodinâmica do sistema será então governada pelas equações de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_f(\partial_t \mathbf{v}^f + \operatorname{div}(\mathbf{v}^f \otimes \mathbf{v}^f)) - \eta \Delta \mathbf{v}^f + \nabla p &= \bar{\nu}_f \mathbf{F}, \quad \text{em } D \setminus \overline{K(t)} \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^f &= 0, \quad \text{em } D \setminus \overline{K(t)} \\ \mathbf{v}^f &= 0, \quad \text{em } \partial D \\ \mathbf{v}^f|_{t=0} &= \mathbf{v}_0^f \quad \text{em } D \setminus \overline{K(t)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

para todo $t \in (0, \tau)$, para um determinado $\tau > 0$. Aqui $\eta > 0$, $\bar{\nu}_f > 0$, \mathbf{v}^f e p representam a viscosidade do fluido, densidade de massa, velocidade e pressão, respectivamente; $K(t)$ é a posição ocupada pela partícula no tempo t e $\mathbf{F} = (C_1 I_{D \setminus \overline{K(t)}} \rho +$

$C_2 I_{D \setminus \overline{K(t)}} \sinh\left(\frac{e\phi}{T}\right) \nabla \phi$ é a força elétrica sobre o domínio do fluido; $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ são constantes físicas. O movimento da partícula é descrito pelas equações dinâmicas,

$$m \frac{d\mathbf{v}^p}{dt} = \mathbf{F}^{total}, \quad A \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{T}^{total} + \mathbf{w} \times (A \cdot \mathbf{w}) \quad (1.3)$$

onde m , A , \mathbf{v}^p e \mathbf{w} representam a massa, a matriz inercial e as velocidades linear e angular da partícula, respectivamente; \mathbf{F}^{total} e \mathbf{T}^{total} representam a força e torque totais (elétricos e hidrodinâmicos) sobre a partícula. Por levar em consideração fluxos não estacionários (irreversíveis) o modelo acima é mais adequado para descrever eletroforese capilar, embora não considerarmos nesse modelo o processo de difusão de íons, que modela o efeito eletro-osmótico [104], [5]. Maiores detalhes podem ser vistos no Capítulo 3.

O segundo modelo envolve uma aproximação para o efeito do campo elétrico sobre a partícula baseada na teoria da camada limite de Prandtl. Nessa aproximação, a velocidade tangencial do fluido no contorno da partícula não é nulo, sendo dada por

$$\mathbf{v}_s = C I_{D \setminus \overline{K(t)}} \phi \nabla_{tan} \phi, \quad (1.4)$$

uma condição que depende não linearmente do potencial elétrico. Tal derivação está associada aos efeitos de difusão da nuvem de contra-íons presentes na interface elétrica entre a partícula e o fluido [7]. Esse modelo é derivado para movimento eletroforético de partículas em fluxos governados pelas equações estacionárias de Stokes

$$\begin{aligned} \eta \Delta \mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) &= \nabla p(\mathbf{x}, t), \quad \text{em } D \setminus \overline{K(t)} \\ \text{div } \mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \text{em } D \setminus \overline{K(t)} \\ \mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \text{em } \partial D \\ \mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}^p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t), \quad \text{em } \partial K(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde \mathbf{v}^p é a velocidade da partícula e $t \in [0, \tau)$. O movimento da partícula é governado pelas equações (1.3), salvo que a contribuição elétrica da força e torque sobre a partícula são nulas, já que o efeito do campo elétrico se dá através da aproximação acima descrita. No Capítulo 4 fundamentamos matematicamente as idéias envolvidas na discussão acima.

Algumas observações com relação a esses modelos devem ser levadas em consideração. A primeira delas diz respeito a eletrostática do sistema. Em eletroforese, uma partícula deve ser grande o suficiente para possuir uma interface elétrica associada a ela; muitas macromoléculas, organelas, e células preenchem esse requerimento [15]. No caso particular em que uma macromolécula de DNA (ou seus fragmentos) está imersa num solvente (tipicamente água e NaCl), sabe-se que, sob condições fisiológicas adequadas, cada milhão de torções de hélice envolvendo 10 pares de nucleotídeos de DNA ocupam uma distância linear de menos de $3.4 \times 10^5 \mu\text{m}$ (0.034 cm) e um volume total de 10^6 nm^3 (10^{-15} cm^3) (de acordo com [4]). Isso significa que filamentos de DNA podem ser fortemente compactados e assim, pode-se considerar a macromolécula como sendo um corpo rígido tendo área de superfície relativamente grande com respeito ao seu diâmetro. Isso evidencia a existência de uma interface elétrica representada por uma superfície que, em geral, tem pouca regularidade (ver discussão em [22]). Não obstante o fato de que a determinação dessa interface não é uma tarefa trivial [117], em geral se assume que esta ocupa uma região do espaço que configura uma superfície Lipschitz. Evidentemente questões de existência, unicidade e regularidade de soluções para os sistemas de equações envolvidos nos modelos descritos aqui, dependem do grau de regularidade do domínio ocupado pela macromolécula. Em especial, em se tratando da equação de Poisson-Boltzmann (1.1), técnicas analíticas e geométricas têm sido usadas para investigar essas questões, no caso de hipóteses fracas sobre ∂K (ver [13]). A existência e unicidade de soluções variacionais no caso em que ∂K é regular foi discutido em [62]. Nesse trabalho assumimos, no primeiro modelo (envolvendo (1.1), (1.2) e (1.3)) o caso em que ∂K ocupa uma região Lipschitz do espaço. Isso permite, além do uso de técnicas variacionais para estabelecer existência e unicidade de soluções, obter maior regularidade ($H^{3/2}$ -regularidade) para a solução de (1.1), estabelecida por meio da utilização de modernas técnicas de teoria de operadores integrais singulares em domínios Lipschitz (abordadas, por exemplo, em [114], [24] ou [109]), conforme detalhado no Capítulo 2. Esse resultado de regularidade é essencial

para o estudo de soluções para (1.2) acoplado a (1.3), devido à dependência do movimento sobre o potencial [12].

A questão é mais delicada com relação ao segundo modelo, já que a derivação da condição (1.4) é baseada na teoria da camada limite de Prandtl, cuja validade é condicionada a hipóteses restritivas de regularidade sobre ∂K [103]. Dentre essas hipóteses está a de que o raio de curvatura da região deve ser suficientemente grande (uma relação que depende sobre o raio de Debye [100]) e a de que o fluxo deve ser estacionário [7]. Conforme discussão no Capítulo 4 dessa tese, isso leva-nos a considerar, para esse modelo, superfícies de classe $C^{1,1}$. Com essa hipótese (e com hipóteses adicionais sobre a distribuição de cargas) resultados de regularidade sobre os potenciais, usando teoria clássica de operadores integrais, são obtidos [11]. Matematicamente, isso nos permite demonstrar que a condição (1.4) é bem definida sob essas hipóteses. Cabe observar a falta de resultados similares se supormos que ∂K é Lipschitz, o que, em um certo sentido, ratifica a necessidade de se impor hipóteses similares para se obter a derivação física do modelo. É importante ressaltar que muitas vezes, na literatura, o potencial ϕ restrito a ∂K é determinado diretamente através do chamado potencial zeta. Tal potencial está envolvido em diversos fenômenos em ciência dos colóides e, em geral, não é determinado pela equação (1.1) e sim por uma relação envolvendo a densidade superficial de cargas da partícula, nos casos em que a dupla camada elétrica é fina [100], [61]. Entretanto, camadas duplas finas são inconsistentes para modelos descrevendo eletroforese de proteínas [102], por exemplo.

Uma segunda observação diz respeito ao fato de estarmos considerando, em ambos os modelos, fluxos em regiões limitadas. A teoria eletrocinética clássica se ocupa com a descrição do comportamento de suspensões dilutas ou partículas isoladas localizadas longe de fronteiras rígidas. Nesses casos as equações padrões para fluxos não limitados são utilizadas, como é comum na literatura corrente (para exemplos, citamos novamente [7], [108], [103] ou [79]). Entretanto, como observado em [102], a necessidade de se considerar os efeitos da presença da fronteira rígida

aparece quando a partícula se encontra nas suas proximidades; em algumas dessas situações (ver [113] ou [68]) os modelos que tratamos aqui são inadequados. Os efeitos dessa proximidade têm sido estudados para o caso de camadas duplas finas; soluções analíticas ou numéricas foram obtidas para o caso de uma esfera movendo-se perto de uma parede planar [68]. Uma análise, considerando situações mais gerais, dos efeitos da proximidade partícula-fronteira rígida é feita em [102], onde se discutem generalizações dos resultados estabelecidos em [108] para fluxos não limitados. No presente trabalho consideramos o caso limitado, mas não analisamos esses efeitos físicos. Todavia é importante observar que a validade da teoria de existência estabelecida aqui está condicionada ao fato de que a partícula se mantém sempre a uma determinada distância da fronteira (ver Capítulos 3 e 4). No Capítulo 4 tratamos também da situação envolvendo fluxos estacionários não limitados baseados nas derivações de expressões para força e torque sobre a partícula desenvolvidas por Teubner [108]. A linearidade e a invariância translacional e rotacional dos campos de velocidade e pressão para fluxos não limitados de Stokes (considerando determinadas hipóteses sobre os potenciais) são consideradas no tratamento do sistema acoplado (1.1), (1.5) e (1.3), juntamente com a condição (1.4). É importante observar que, nesse caso, diferentemente dos trabalhos pesquisados onde o potencial no contorno da macromolécula é definido pelo conhecido potencial zeta, estamos considerando o potencial sendo calculado através de (1.1), numa região grande, mas finita.

Um tratamento matemático rigoroso dos problemas aqui expostos deve levar em conta a dependência do domínio ocupado pelo fluido com o tempo (domínios não cilíndricos). Diversas técnicas analíticas têm sido desenvolvidas com o intuito de se formular corretamente tais problemas, bem como se estabelecer uma teoria de existência adequada (ver o trabalho precursor de Fujita e Sauer [45]). A técnica básica envolvida em muitos dos trabalhos tratando desse tema consiste em reduzir o problema não cilíndrico ao caso cilíndrico, através da hipótese de existência de uma transformação suave (mais precisamente um difeomorfismo), previamente conhecida, que permite tratar o problema em um domínio fixo. Problemas similares aparecem quando se estuda o movimento de corpos rígidos em fluxos incompressíveis viscosos.

Recentemente, esse tópico vem recebendo uma maior atenção e sendo tratado rigorosamente: Desjardins e Esteban [31], [32], [33] discutiram a existência local em tempo, mais especificadamente, até a primeira colisão (para o caso bidimensional) ou até o "blow-up" do gradiente de velocidade em uma certa norma de Sobolev; a existência, até a primeira colisão, de soluções globais no caso de um corpo rígido em três dimensões foi obtida em [54]; soluções para o movimento de vários corpos, considerando-se a distância entre eles tendendo a zero, no caso bidimensional foram tratados em [83]; o mesmo resultado em três dimensões foi obtido por Feireisl [39]. Problemas similares foram tratados em [51] e em [21]. É importante observar que a abordagem nos trabalhos acima não considera que a variação em tempo do domínio do fluido é conhecida a priori. Nesse sentido, técnicas especiais (da teoria de transporte [78]) foram utilizadas para a obtenção de existência e propriedades de soluções fracas e fortes. Em particular, em [31] uma formulação fraca é introduzida e a existência de soluções (local em tempo) é estabelecida quando uma força de corpo L^2 e domínios $C^{1,1}$ são considerados. Evidentemente, no estudo do movimento eletroforético não podemos usar diretamente esses resultados devido à presença do campo elétrico externo interagindo com a solução ionizada, o que implica numa força externa dependente da posição da partícula e da configuração espacial das cargas. Nossos esforços se deram no sentido de mostrar que é possível formular adequadamente o problema nesses contextos, nos moldes da discussão em [31] e [32], se supormos determinadas hipóteses sobre a distribuição de cargas. Com isso, um resultado de existência local para soluções fracas é obtido, para os dois modelos, depois do estudo das propriedades do vínculo entre o potencial elétrico e o movimento.

A distribuição de cargas no solvente e na macromolécula é outra aspecto relevante que deve ser estudada na derivação e análise dos modelos de eletroforese aqui propostos. Cabe observar que essa não é uma questão trivial e tem sido discutida, por exemplo, em trabalhos computacionais envolvendo cálculos quânticos de estrutura eletrônica (ver [26], [25]). Não estamos considerando aqui a dependência da concentração de íons no solvente com o tempo, isso significa que o campo exercido não altera a configuração dos íons na dupla camada [100]. Caso contrário, uma

equação de conservação (não linear) deveria ser considerada acoplada às equações eletrostáticas e dinâmicas. Outra hipótese é a de que a rede de força e torque exercidas sobre a superfície da partícula por efeitos de polarização no eletrólito são negligenciados [100]. Suporemos hipóteses discutíveis com relação à distribuição de cargas fixas no solvente e na partícula, dentre essas hipóteses, a invariância dessa distribuição com relação a fluxos Lagrangeanos que preservam volume (ver hipóteses **H7** e **H8** na Seção 3.3). Hipóteses similares, para o problema eletrostático, têm sido assumidas. Por exemplo, em sua monografia, Holst [62] assume que a distribuição espacial de cargas pontuais da macromolécula pode ser aproximada por uma seqüência de funções em L^2 ; Long e Ajdari [3] estudaram movimento eletroforético de cilindros com distribuição superficial de cargas periódica. Algumas observações sobre a inconsistência dessas hipóteses podem ser vistas em [5].

A estruturação e os resultados principais da tese são discutidas abaixo.

No Capítulo 2 abordamos a derivação do modelo eletrostático que estamos tratando, baseado na equação de Poisson-Boltzmann (1.1). Estabelecemos, no Teorema 2.1, a existência e unicidade de soluções para o problema variacional associado, admitindo que ∂K e ∂D são superfícies Lipschitz e algumas hipóteses sobre a distribuição espacial de cargas. A regularidade adicional $H^{3/2}$ é demonstrada na Proposição 2.1 enquanto que resultados de regularidade C^α e $C^{1+\alpha}$ são demonstrados nos Lemas 2.3 e Proposição 2.2, para o caso em que maior regularidade dos dados é assumida. O capítulo encerra com uma seção dedicada à obtenção de uma estimativa de erro $O(h)$, para o método de elementos finitos, utilizando o resultado de regularidade obtido na Proposição 2.1.

O Capítulo 3 da tese aborda o primeiro modelo, já discutido aqui, para o estudo do movimento eletroforético de uma partícula, envolvendo as equações (1.1), (1.2) acopladas à (1.3). Introduzimos uma formulação fraca para o problema (Definição 3.16), através de uma adaptação daquela dada em [31], [32]. Utilizando argumentos adaptados desse último trabalho, estabelecemos um resultado de existência de soluções aproximadas para (3.16). Com esse intuito, demonstramos

alguns resultados técnicos auxiliares, especialmente tratando do termo fonte \mathbf{F} e sua dependência com o potencial elétrico e o movimento: no Lema 3.1 mostramos que a solução variacional ψ de (1.1) pertence $L^\infty(0, \tau; H^1(D))$, com norma dependendo sobre os dados do problema eletrostático, no tempo inicial. Assumindo hipóteses adicionais sobre a distribuição de cargas, estabelecemos, no Teorema 3.1, a limitação na norma $H^{3/2}$ de potenciais associados a (1.1), quando a partícula ocupa posições as quais distam de uma certa constante fixada $d > 0$ da fronteira do enclosure. Como conseqüência, no Corolário 3.1, um resultado de limitação, na norma L^2 , para o termo forçante \mathbf{F} é obtida. Demonstramos, no Lema 3.4, a convergência na norma H^1 de uma seqüência apropriada de potenciais $\psi^{(m)}$ a um determinado potencial ψ . Isso implica, como demonstrado no Teorema 3.2, num resultado especial de convergência para uma seqüência de termos forçantes $\mathbf{F}^{(m)}$. Aliando-se esses resultados às propriedades de compacidade para a seqüência de soluções aproximadas demonstradas em [32], obtemos no Teorema 3.3 a existência local (em tempo) de soluções para o problema.

Como já mencionado, o segundo modelo de eletroforese, envolvendo (1.1), (1.5), (1.3) e a condição (1.4), é discutido no Capítulo 4. Nesse caso, hipóteses mais restritivas sobre os dados são impostas e os resultados de regularidade para a solução de (1.1), demonstrados na Subseção 2.3.2, são utilizados; especialmente para demonstrar que a velocidade de deslizamento (1.4) é matematicamente bem definida, pertencendo a $H^{1/2}(\partial K(t))^3$ para todo $t \in (0, \tau)$ para algum $\tau > 0$, no caso de domínios $C^{1,1}$, conforme pode ser visto no Lema 4.1. No caso de domínios de classe $C^{2+\alpha}$, $1/2 < \alpha < 1$, demonstramos no Lema 4.2, considerando hipóteses adicionais sobre σ , que $\mathbf{v}_s \in H^{3/2}(\partial K(t))^3$, $\forall t \in (0, \tau)$. Nos moldes do modelo tratado no capítulo anterior, uma formulação fraca é introduzida (Definição 4.12), contemplando o fato de tratarmos agora com fluxos estacionários de Stokes. Nesse caso, um termo fonte é introduzido nas equações de Stokes, conforme pode ser visto no sistema (4.6) e, dessa forma, através de adaptações das técnicas de regularização utilizadas em [31], um resultado de existência de soluções fracas, local em tempo, é estabelecido no Teorema 4.3. Assim como no caso anterior, uma série de resultados

técnicos relativos ao referido termo fonte foram demonstrados. No Teorema 4.1 é estabelecido um resultado de limitação de determinados termos forçantes relacionados a determinadas possíveis configurações da partícula. Isso é decorrente do Lema 4.3, referente à limitação de ψ em determinadas normas. No Teorema 4.2 demonstramos um resultado de convergência para uma seqüência de termos forçantes, usando de forma auxiliar resultados de convergência de ψ_1^m a ψ na norma $C^{1+\alpha}(\partial K_0)$, demonstrados no Lema 4.6. Como conseqüência, obtemos no Corolário 4.1 a convergência de \mathbf{v}_s a $\mathbf{v}_s^{(m)}$, como funções pertencentes a $H^{3/2}(\partial K_0)^3$, na norma desse espaço.

Um estudo sobre a existência de soluções fortes para esse modelo é feito na Seção 4.3, todavia com uma hipótese adicional de dependência Lipschitz (com relação a uma norma adequada) do potencial como uma função da velocidade da partícula. Com essa hipótese resultados padronizados de equações diferenciais ordinárias garantem a existência local em tempo de soluções clássicas para o sistema (1.3), conforme demonstrado no Teorema 4.4. A Seção 4.4 se refere ao estudo do movimento eletroforético considerando fluxos não limitados de Stokes. Nesse caso, seguimos uma formulação tensorial dada por Teubner [108] no sentido de se obter expressões para força e torque que podem ser decompostas em termos dependentes do campo elétrico e outros que dependem exclusivamente da hidrodinâmica do sistema. Novamente, hipóteses de regularidade sobre os dados são assumidas. Com relação ao potencial, considera-se que este pode ser determinado pela equação (1.1) numa região grande quando comparada com as dimensões da partícula, entretanto finita. Nesse sentido, demonstramos no Teorema 4.5 e Corolário 4.2 a existência de soluções fortes para esse sistema.

Agradecemos a C. Thompson e ao Prof. T. Kist que chamaram nossa atenção para os papers [3] e [80], os quais motivaram parte do presente trabalho.

2 A EQUAÇÃO DE POISSON-BOLTZMANN

O estudo de fenômenos de ionização de macromoléculas em solventes é central em físico química, especialmente no estudo de sistemas biológicos [89]. Biomoléculas tais como DNA e algumas proteínas têm um número grande de grupos ionizáveis e, como estão naturalmente imersas em solvente, tornam-se altamente carregadas (ver [4], [27], [53]). Suas propriedades eletrostáticas podem ser determinantes para a caracterização de uma variedade de mecanismos funcionais, como, por exemplo, estabilidade e estrutura [25]. Uma descrição apurada de potenciais eletrostáticos e campos elétricos na região de sítios ativos de enzimas é de maior importância na elucidação de mecanismos catalíticos e pode desempenhar um papel central em estudos de afinidade entre drogas e receptores [27], [70], [64].

Um método que tem sido utilizado com sucesso na simulação desses processos é o que utiliza a equação de Poisson-Boltzmann, o qual considera o solvente e sais num modelo continuum [105], [42], [43], [82], [98], [62], [18]. Embora modelos mais detalhados, computacionalmente mais caros, baseados no tratamento explícito de átomos usando métodos Monte Carlo ou dinâmica molecular são existentes, modelos baseados na equação de Poisson-Boltzmann continuam sendo úteis (uma discussão crítica sobre as limitações desses modelos na descrição de interações elétricas envolvidas em sistemas biológicos pode ser vista em [53]). Isso devido aos avanços numéricos os quais permitem que essa equação seja resolvida para geometrias arbitrárias e dielétricos não uniformes [101]. Nesse contexto simulações de grande escala têm sido realizadas [9], [10], [85], [22], [23].

Nesse capítulo abordamos a formulação do problema eletrostático relacionado a uma macromolécula carregada imersa num solvente, levando ao estudo da equação de Poisson-Boltzmann (1.1). Em seguida, demonstramos o Teorema 2.1, garantindo a existência e unicidade de soluções generalizadas para essa equação (com as devidas condições de contorno) baseado em princípios variacionais, considerando o caso em que a macromolécula ocupa uma região do espaço cujo contorno é uma

superfície Lipschitz (o caso mais geral foi discutido em [13]). Com a existência e unicidade de soluções variacionais estabelecida utilizamos a teoria de operadores singulares integrais em duas situações: no caso Lipschitz (conforme teoria abordada em [109] e [114]) e no caso em que o contorno da macromolécula tem maior regularidade (nesse caso a teoria de operadores integrais clássica é utilizada [20], [72], [87]). No primeiro caso estabelecemos, na Proposição 2.1, um resultado de $H^{3/2}$ -regularidade para os potenciais, admitindo que as distribuições de cargas fixas no interior e na superfície da macromolécula, bem como no solvente são funções L^2 ; no segundo caso, demonstramos, para o caso de distribuições de cargas em C^α , $0 < \alpha < 1$, potencial externo em $C^{1+\alpha}$ e domínios de classe $C^{1,1}$, um resultado de $C^{1+\alpha}$ regularidade (Proposição 2.2). Como será visto em capítulos posteriores, esses resultados de regularidades sobre os potenciais serão essenciais para o desenvolvimento de uma formulação matemática adequada para o movimento da macromolécula sob a ação do campo elétrico externo. A regularidade da força exercida sobre o fluido (dependente do potencial) ou a própria consistência matemática da definição da velocidade de deslizamento (1.4), estão diretamente relacionadas a esses resultados.

O capítulo encerra com uma abordagem da teoria de aproximação para o problema acima, na Seção 2.4, considerando-se o método de elementos finitos. Uma estimativa de erro é $O(h)$ é estabelecida usando a regularidade $H^{3/2}$ sobre o potencial elétrico, no caso Lipschitz. Isso é demonstrado usando a representação da solução do problema variacional associado a (1.1) e da solução do respectivo problema aproximante, em termos de integrais singulares.

2.1 Formulação do Problema Eletrostático

Consideremos a situação em que uma macromolécula (suposta como sendo um corpo rígido) carregada está imersa numa solução eletrolítica. Admitimos, seguindo as hipóteses da teoria de Debye-Hückel (ver [62]), que a solução é um continuum com uma constante dielétrica k_2 (a constante dielétrica ser considerada

como uma medida da capacidade de polarização do meio) e é composta por um solvente (água, por exemplo) e um sal monovalente (NaCl, por exemplo). Também admitimos que a solução ocupa uma região aberta limitada $D \subset \mathbb{R}^3$ e a partícula ocupa uma região compacta $\bar{K} \subset D$, com constante dielétrica k_1 . Um campo elétrico externo Φ é induzido em ∂D , o que, como já abordado na introdução do presente trabalho, vai induzir o movimento da partícula. Nesse momento estamos considerando a partícula em repouso.

O campo elétrico desse sistema é representado pelas funções vetoriais reais $\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = -\nabla\phi_1(\mathbf{x})$ em K e $\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) = -\nabla\phi_2(\mathbf{x})$ em $D \setminus \bar{K}$; onde ϕ_1 e ϕ_2 são funções escalares reais que representam o potencial eletrostático. Supomos também a presença de uma distribuição de cargas fixas no solvente e na macromolécula, a qual denotamos ρ^0 . Como observado em [101], o que se define como sendo cargas fixas está relacionado àquelas cujas posições são conhecidas exatamente, não sendo afetadas por movimento termal; ao contrário de íons móveis, cuja distribuição depende de cálculos de média termodinâmica. A questão da determinação de quais cargas são fixas ou móveis depende do sistema a ser modelado. Em aplicações em biofísica, a fonte de cargas fixas é usualmente proteínas, ácidos nucleicos, e outras macromoléculas ou membranas (ver também [89]). Não entramos no mérito da questão e assumimos que a distribuição de cargas fixas ρ^0 provém de fontes no solvente e no interior da macromolécula.

A hipótese fundamental na teoria de Debye-Hückel é a de que a densidade de íons livres no solvente $\rho^{ions}(\mathbf{x})$ satisfaz a distribuição de Boltzmann (Grosberg e Khokhlov [53])

$$\rho^{ions}(\mathbf{x}) = -ne \sinh\left(\frac{e\phi_2(\mathbf{x})}{T}\right), \quad (2.1)$$

onde n é a concentração total de íons livres, e é a carga do elétron e T é o produto da temperatura do sistema (a qual supomos constante) pela constante de Boltzmann.

Nessa formulação tratamos com um problema electrostático envolvendo uma interface entre regiões com diferentes constantes dielétricas constantes. Então

as seguintes condições de contorno de transmissão são válidas [63]

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{em } \partial K, \quad (2.2)$$

$$k_1 \partial_\nu \phi_1 - k_2 \partial_\nu \phi_2 = 4\pi\sigma \quad \text{em } \partial K, \quad (2.3)$$

where ν é o vetor normal exterior à ∂K e σ é a distribuição superficial de cargas que a partícula adquire pelo processo de ionização.

Fazendo a mudança de variáveis $\psi_i(\mathbf{x}) = \frac{\phi_i(\mathbf{x})e}{T}$, $i = 1, 2$, usando (2.1), (2.2) e (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x})) - b(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \\ \psi_2(\mathbf{x}) &= \psi_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K, \\ \psi_2(\mathbf{x}) &= \Psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D, \\ k_1 \partial_\nu \psi_1(\mathbf{x}) - k_2 \partial_\nu \psi_2(\mathbf{x}) &= \frac{4\pi e}{T} \sigma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde

- $\mathbf{k} : D \rightarrow \mathbf{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ é definido como $k_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}k_1$ se $\mathbf{x} \in K$, $k_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}k_2$ se $\mathbf{x} \in D \setminus \overline{K}$.
- $b : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) = k_2 r_D^{-2} \sinh \psi(\mathbf{x})$ se $\mathbf{x} \in D \setminus \overline{K}$, $b(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) = 0$ se $\mathbf{x} \in K$; $r_D^{-2} = \frac{4\pi n e^2}{k_2 T}$, onde r_D é o raio de Debye (ver Observação 2.1).
- $\Psi(x) = \frac{e\Phi(x)}{T}$, $\psi_1(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})|_K$ e $\psi_2(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})|_{D \setminus \overline{K}}$.
- $\rho(\mathbf{x}) = (\rho_1(\mathbf{x}), \rho_2(\mathbf{x})) = (-\frac{4\pi e}{T} \rho_1^0(\mathbf{x}), -\frac{4\pi e}{T} \rho_2^0(\mathbf{x}))$, $\rho_1^0 = \rho^0|_K$, $\rho_2^0 = \rho^0|_{D \setminus \overline{K}}$.

Observação 2.1. O raio de Debye r_D fornece uma medida da distância na qual a influência de um campo elétrico perturbativo é sentido no interior do solvente (ver discussão em [53] ou [52]).

Observação 2.2. Conforme observado em [101], a grande simplificação da teoria de Debye-Hückel, e de modelos baseados na equação de Poisson-Boltzmann como um todo, é o uso de potenciais eletrostáticos médios para estimar os potenciais de força

média (ver também [27]). A vantagem dessa aproximação é que o potencial médio é obtido diretamente da distribuição iônica média através da equação de Poisson, evitando a complexa mecânica estatística envolvida.

Observação 2.3. Questões complexas estão envolvidas no que tange à determinação da constante dielétricas da macromolécula. Geralmente, em simulações, tem sido assumido que biomacromoléculas tem baixa constante dielétrica (variando de 2 a 5, conforme [53]). Mas algum cuidado tem de ser tomado nesse contexto pois as propriedades físicas de proteínas são, no mínimo, curiosas. A compressibilidade de uma proteína é em torno de 10% a de um fluido mas sua densidade de ocupação (quociente do volume de Van der Waals ao volume realmente ocupado) indica valores, para a maioria das proteínas globulares, entre 0.7 a 0.75, comparável aos valores de 0.7 a 0.8 de cristais de moléculas orgânicas. Não obstante, a dinâmica interna e viscosidade aparente de uma proteína não são de um cristal. A termodinâmica de desnaturação de proteínas indica um fenômeno similar à transição de uma fase orgânica à água ou que o interior de uma proteína é semelhante a um solvente líquido orgânico. Assim uma proteína pode ser melhor descrita como sendo um líquido denso (detalhes podem ser vistos no livro de Daune [27]). As propriedades elétricas de proteínas também são complexas. A utilização de polarizações eletrônicas e atômicas indicaria para a constante dielétrica um valor de 2 mas levando em conta a estrutura cristalina, isto pode se aproximar de 4. O trabalho de Antosiewicz et al. [8] indica valores de aproximadamente 20, os quais compatibilizam melhor simulação e experimentos! Em [85], o valor 2 é utilizado. Do nosso ponto de vista analítico o valor da constante dielétrica é imaterial, mas claramente, em simulações, valores experimentais adequados tem de ser assumidos.

Observação 2.4. Naturalmente, a constante dielétrica do solvente é alta e, como a interface entre as regiões dielétricas de baixa e alta intensidade tem forma irregular (para resultados em biopolímeros no caso cilíndrico ver [82] e [110]), isso nos leva a uma situação inviável às teorias de esferas carregadas [19]. Como observado na introdução desse trabalho, a própria determinação dessa interface é uma questão delicada. De acordo com [22], qualquer modelo de superfície molecular deve ser

determinado, em algum sentido, a partir da caracterização da região do espaço onde outras moléculas são excluídas. Isso porque a proximidade de dois átomos pode excluir a presença de uma molécula em uma dada área devido a interações repulsivas. Em geral, se considera como superfície molecular (ou superfície de acessibilidade ao solvente) a região descrita por um ponto no centro de uma esfera de prova idealizada do solvente, quando se rola esta esfera sobre a molécula solvatada. Como consequência, a superfície construída é de classe C^0 e pode ser uma região simplesmente ou multiplamente conexa do espaço. A presença de cúspides e da ocasional multi-conexidade são dificuldades, tanto para as abordagens analíticas como para as numéricas (ver [117] ou [50]). Técnicas computacionais têm sido desenvolvidas para gerar superfícies Lipschitz próximas daquelas contendo eventuais cúspides [22], [23]. Nesse trabalho consideraremos situações em que ∂K e ∂D são, pelo menos, superfícies Lipschitz.

2.2 Teoria de Existência

Nessa seção trataremos da teoria de existência para (2.4). Discutiremos o problema considerando as seguintes hipóteses

- **H1:** ∂K e ∂D são superfícies Lipschitz;
- **H2:** $\sigma \in L^2(\partial K)$, $\rho \in L^2(D)$ e $\Psi \in H^1(\partial D) \cap C^0(\partial D)$.

A teoria de existência em regiões suaves tem sido previamente estabelecida por Holst [62]. Por outro lado em [13] um resultado de existência e unicidade é estabelecido, considerando-se hipóteses mais fracas sobre ∂K e σ . Nesse caso a teoria de espaços de Sobolev em espaços métricos (ver [56], [57]) e a teoria de geometria simplicial (ver [59], [58]) foi combinada para se obter uma formulação matemática adequada quando se considera a macromolécula ocupando uma região irregular do

espaço (com a única restrição de que a dimensão *box – counting* da superfície da macromolécula seja finita).

Consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla \widehat{\Psi}(\mathbf{x})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D \\ \widehat{\Psi}(\mathbf{x}) &= \Psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D.\end{aligned}\tag{2.5}$$

É bem conhecido (ver Teoremas 8.3 e 8.30 em [47]) que o problema acima tem uma única solução $\widehat{\Psi} \in H^1(D) \cap C^0(\overline{D})$. Além disso, se ν é a normal exterior a ∂K , $k_1 \partial_\nu \widehat{\Psi}_1 - k_2 \partial_\nu \widehat{\Psi}_2 \in (H_0^{1/2}(\partial K))'$, onde

$$H_0^{1/2}(\partial K) = \{v \in L^2(\partial K); \exists w \in H_0^1(D), w|_{\partial K} = v\}.$$

Isso foi demonstrado em [28] (Capítulo VII, §2, Seção 4).

Estabelecemos, inicialmente, a existência e unicidade de soluções generalizadas para o seguinte problema

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla \widehat{\psi}(\mathbf{x})) - b(\mathbf{x}, \widehat{\psi}(\mathbf{x}) + \widehat{\Psi}(\mathbf{x})) &= \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \\ \widehat{\psi}_2(\mathbf{x}) &= \widehat{\psi}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K, \\ \widehat{\psi}_2(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \\ k_1 \partial_\nu \widehat{\psi}_1(\mathbf{x}) - k_2 \partial_\nu \widehat{\psi}_2(\mathbf{x}) &= \frac{4\pi e}{T} \sigma(\mathbf{x}) - \\ &+ (k_1 \partial_\nu \widehat{\Psi}_1(\mathbf{x}) - k_2 \partial_\nu \widehat{\Psi}_2(\mathbf{x})) = \widehat{\sigma}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Com isso, podemos ver que $\psi = \widehat{\psi} + \widehat{\Psi}$ é a única solução para o problema (2.4). Das observações anteriores, denotando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como a antidualidade entre $(H_0^{1/2}(\partial K))'$ e $H_0^{1/2}(\partial K)$, $l(v) = \langle \widehat{\sigma}, v \rangle$ define um funcional linear contínuo em $H_0^1(D)$.

Vamos introduzir a formulação variacional para (2.6) (ver [62] ou [13]): Encontrar $u \in V = H_0^1(D)$ tal que $b(\mathbf{x}, u + \widehat{\Psi}) \in L^2(D)$, e satisfazendo

$$a(u, v) + (N(u), v) = L(v),\tag{2.7}$$

$\forall v \in H_0^1(D)$, onde $a(u, v) = \int_D k(\mathbf{x}) \nabla u \nabla v d\mathbf{x}$, $(N(u), v) = \int_D b(\mathbf{x}, u + \widehat{\Psi}) v d\mathbf{x}$, $L(v) = l(v) - \int_D \rho v d\mathbf{x}$ (l foi definido no parágrafo anterior). Aqui $k(\mathbf{x}) = k_1$ se $\mathbf{x} \in K$, $k(\mathbf{x}) = k_2$ se $\mathbf{x} \in D \setminus \overline{K}$.

A forma bilinear $a(u, v)$ definida acima é contínua, simétrica e V -elíptica. Do teorema da representação de Riesz, existe $A \in \mathbf{L}(V, V')$ tal que

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle,$$

$\forall u, v \in V$, onde agora $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a antidualidade entre V e V' . Um cálculo simples mostra que $Au = \nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla u)$ e segue-se então, através de argumentos padronizados envolvendo as condições de contorno de transmissão (detalhes em [28], Capítulo VII, §2, Seção 4 ou em [13]) que (2.7) corresponde à formulação variacional adequada para (2.6).

Para demonstrarmos a existência e unicidade de soluções para (2.7) vamos considerar o seguinte problema padrão de minimização

$$F(u) = \min!, \quad u \in V \tag{2.8}$$

onde o funcional F é definido como

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_D k(\mathbf{x}) |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - L(u) + J(u), \tag{2.9}$$

e $J(\cdot)$ é dado por

$$\begin{aligned} J(u) &= k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \bar{K}} (\cosh(u + \widehat{\Psi}) - \cosh(\widehat{\Psi})) d\mathbf{x}, \\ \text{se } \int_{D \setminus \bar{K}} |\cosh(u + \widehat{\Psi}) - \cosh(\widehat{\Psi})|^2 d\mathbf{x} &< \infty, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$J(u) = +\infty$ se a integral quadrada for $+\infty$.

O teorema de Eklund-Temam (ver [37], p.10) garante que esse problema tem um única solução se F é próprio, estritamente convexo, semi-contínuo inferiormente e coercivo em V . Do fato que $\widehat{\Psi} \in C^0(\bar{D})$, da positividade de $\cosh(u + \widehat{\Psi})$, do fato que L é um funcional linear limitado em V e da desigualdade de Schwarz temos

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \frac{1}{2} \int_D k(\mathbf{x}) |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - C \|\widehat{\sigma}\|_{-1/2, 2, \partial K} \|u\|_{1, 2, D} \\ &\quad - \|\rho\|_{0, 2, D} \|u\|_{0, 2, D} - C, \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|_{-1/2,2,\partial K}$ é a norma em $(H_{00}^{1/2}(\partial K))'$. Pelo Lema de Poincaré, existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\lambda_1 \|u\|_{1,2,D}^2 \leq \|\nabla u\|_{0,2,D}^2$, logo, por meio de um cálculo padrão usando a desigualdade de Young obtemos

$$F(u) \geq C' \|u\|_{1,2,D}^2 - C' \rightarrow +\infty$$

quando $\|u\|_{1,2,D} \rightarrow +\infty$. Isto estabelece a coercividade de F . Também observamos que $J(u) \geq -k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \bar{K}} \cosh(\widehat{\Psi}) d\mathbf{x} > -\infty$ e evidentemente F não é identicamente igual a $+\infty$, ou seja F é um funcional próprio sobre V . A convexidade (estrita) de F pode ser demonstrada facilmente.

Com relação à propriedade de semi-continuidade inferior temos de mostrar que $\forall a \in \mathbb{R}$, $B = \{f \in L^2(D) : F(f) \leq a\}$ é um conjunto fechado. Isso foi demonstrado no trabalho de Jerome [66], para um problema diferente, mas relacionado. Vamos reproduzir abaixo a demonstração desse resultado. Iniciamos enunciando, sem prova, o seguinte lema

Lema 2.1. ([66], Lema 2.2) *As normas definidas por*

$$\|f\|_{\theta}^2 = \int_D \theta |\nabla f|^2 + \left(\int_{\partial D} \gamma_0 f \right)^2,$$

onde $\theta \in L^\infty(D)$, $\theta \geq \theta_0 > 0$, são equivalentes à norma usual em $H^1(D)$. Aqui $\gamma_0 f = f|_{\partial D}$.

O resultado de semi-continuidade inferior é demonstrado tomando-se uma seqüência $f_k \rightarrow f$ em $L^2(D)$ com $F(f_k) \leq a$. Podemos assumir convergência puntual quase sempre. Usando o fato de que $\widehat{\Psi} \in C^0(\bar{D})$, (2.9) e a positividade do \cosh , concluímos que $\{f_k\}$ é limitado em $H^1(D)$. Pela propriedade de compacidade fraca de conjuntos limitados no espaço de Hilbert $H^1(D)$, e pela injeção compacta de $H^1(D)$ em $L^2(D)$ (válida em domínios Lipschitz [1], p.150-190), toda subseqüência de $\{f_k\}$ tem uma subseqüência fracamente convergente em $H^1(D)$ com limite igual a f . Em particular, $f_k \rightarrow f$ (fracamente em $H^1(D)$). Logo, pela semi-continuidade inferior fraca de $\|\cdot\|_{\epsilon}$,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|\sqrt{\epsilon} \nabla f_k\|_{0,2,D}^2 \geq \|\sqrt{\epsilon} \nabla f\|_{0,2,D}^2. \quad (2.11)$$

Definindo $G(u(\mathbf{x})) = \cosh(u(\mathbf{x}) + \widehat{\Psi}(\mathbf{x})) - \cosh(\widehat{\Psi}(\mathbf{x}))$ obtemos, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_D G(f_k(\mathbf{x})) d\mathbf{x} &\geq \int_D \liminf_{k \rightarrow +\infty} G(f_k(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &\geq \int_D G(\liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \int_D G(f(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde usamos a semicontinuidade inferior de $G(\cdot)$ para \mathbf{x} fixo e o fato que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (\text{q. s.}).$$

Portanto, por (2.11) e (2.12),

$$\begin{aligned} F(f) &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_D k(\mathbf{x}) |\nabla f_k|^2 d\mathbf{x} + \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_D G(f_k) d\mathbf{x} - L(f) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} F(f_k) \leq a, \end{aligned} \quad (2.13)$$

o que prova que B é fechado e portanto F é semi-contínuo inferiormente.

Assim, da discussão acima, o problema (2.8) admite uma única solução à qual corresponde a uma solução para (2.7). Essa correspondência é consequência de uma série de resultados técnicos demonstrados em [49] (Teorema 2.2, Capítulo 4, Seção 2) relacionados a um problema variacional semelhante a (2.7). Usando a monotonicidade do termo $\sinh(u + \widehat{\Psi})$ pode-se demonstrar a unicidade de soluções para (2.7). Temos assim estabelecido

Teorema 2.1. *Assumindo as hipóteses (H1) e (H2), o problema variacional (2.7) associado a (2.6) possui uma única solução $\widehat{\psi} \in V$. Portanto, o problema (2.4) possui uma única solução (generalizada) que é dada por $\psi = \widehat{\psi} + \widehat{\Psi} \in V$.*

Observação 2.5. No trabalho de Reiner e Radke [98] pode se ver que o funcional $F(\cdot)$ definido em (2.9) pode ser considerado como o negativo do grande potencial

$$\Omega = -pV + \bar{\gamma}S,$$

onde p é a pressão osmótica da concentração eletrólita, S é a área da superfície e $\bar{\gamma}$ é a tensão superficial média (ou excesso de densidade de energia livre na superfície)

da interface entre solução/molécula e V é o volume da solução eletrolítica. Na literatura, muitas vezes, esse processo é referido como a minimização da energia livre eletrostática de Gibbs. Isso é na melhor das hipóteses um abuso de nomenclatura crasso (referimos o leitor aos trabalhos de Fogolari et al. [42] e Reiner e Radke [98] e Fogolari et al. [43] para uma discussão desta situação confusa e ao livro de Greiner et al. [52] para as noções elementares de Mecânica Estatística).

Observação 2.6. No caso em que $D \subset \mathbb{R}^2$ todas as funções $u \in H^1(D)$ têm a propriedade $\int_D \exp(2u) d\mathbf{x} < \infty$ como pode ser visto por estimativas baseada na desigualdade de Trudinger ([111], [13]). A restrição sobre o funcional $J(\cdot)$ dado em (2.10) não é necessária e podemos considerar diretamente o problema de minimização:

Encontrar $u \in V = H_0^1(D)$ tal que

$$F(u) = \min!,$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_D k(\mathbf{x}) |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - L(u) + J(u),$$

onde $J(\cdot)$ é definido como $J(u) = k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \bar{K}} (\cosh(u + \hat{\Psi}) - \cosh(\hat{\Psi})) d\mathbf{x}$.

Observação 2.7. Em Kuhn e Barbosa [73], Kuhn et al. [74] uma teoria relacionada ao estudo de soluções surfactantes polieléctrolíticas iônicas é apresentada usando os elementos da teoria de Poisson-Boltzmann. Observamos que, em dimensão dois, a presente técnica pode ser estendida a esse caso usando princípios variacionais clássicos com restrições (ver [14]).

Observação 2.8. É possível demonstrar que $\hat{\sigma} \in L^2(\partial K)$. Isso é uma consequência de uma combinação dos resultados demonstrados em [65] com os de [24] (Lema 3.7).

2.3 Regularidade Adicional

2.3.1 Caso 1: Domínios Lipschitz

Como observado na introdução desse trabalho é muito difícil, considerando hipóteses gerais de regularidade sobre ∂K , obter maior regularidade da

solução variacional de (2.4) (ver [94], [93]). Observamos também que as condições de transmissão em (2.4) mostram que a solução $u \notin H^2(D)$, para qualquer domínio K (ver [112]). Entretanto, se supormos que ∂K é uma superfície Lipschitz com constante arbitrariamente grande é possível obter maior regularidade da solução restrita a cada região. Mais precisamente, mostraremos que os potenciais restritos às regiões K e $D \setminus \overline{K}$ pertencem ao espaço de Sobolev $H^{3/2}$. Essa regularidade é optimal, mesmo em domínios de classe C^1 (veja os comentários e resultados negativos em [65]). Para demonstrar esse resultado é necessário levar as condições de transmissão a sério, usando uma reformulação em termos da recente teoria de operadores integrais singulares em domínios Lipschitz [24], [114], [109].

Vamos considerar $\psi \in H^1(D)$ a solução de (2.4). Inicialmente observamos que, se escrevermos $h(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \psi_2(\mathbf{x})) + \rho(\mathbf{x})$, teremos $h \in L^2(D)$; logo, estendendo h a ser zero afora de D e colocando $w(\mathbf{x}) = -(G * h)(\mathbf{x})$ onde G é o potencial Newtoniano $\frac{-1}{4\pi|\mathbf{x}|}$, temos, usando a teoria de Calderón-Zygmund (ver Teorema 9.9 em [47]) que $\Delta w = h$ q.s. em D e $w \in H^2(D)$. Colocando $w_1 = w|_K$, $w_2 = w|_{D \setminus \overline{K}}$, teremos $w_1|_{\partial K} \in H^1(\partial K)$, $w_2|_{\partial D} \in H^1(\partial D)$ (para maiores detalhes ver a prova do Teorema B em [65]). Também, $\partial_\nu w_1(\mathbf{x}) - \partial_\nu w_2(\mathbf{x}) = 0$ e $w_1(\mathbf{x}) = w_2(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in \partial K$ e ν o vetor normal exterior a ∂K . A técnica que utilizamos para estabelecer a desejada regularidade para ψ consiste em demonstrar que este pode ser escrito como a combinação linear de w com a solução de um problema auxiliar (ver (2.14) abaixo), o qual pode ser tratado utilizando operadores integrais. Nesse sentido, vamos provar o seguinte lema

Lema 2.2. *Sejam $f_1 \in H^1(\partial K)$, $f_2 \in H^1(\partial D)$, $g_1 \in L^2(\partial K)$, $\mu_1, \mu_2 > 0$ constantes arbitrárias. Assumindo a validade de **H1**, o problema*

$$\begin{aligned}
 \Delta v_1(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in K, \\
 \Delta v_2(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K}, \\
 \mu_2 v_2(\mathbf{x}) - \mu_1 v_1(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial K, \\
 v_2(\mathbf{x}) &= f_2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial D, \\
 \partial_\nu v_2(\mathbf{x}) - \partial_\nu v_1(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial K,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

possui uma única solução $v = (v_1, v_2)$ tal que $v_1 \in H^{3/2}(K)$, $v_2 \in H^{3/2}(D \setminus \overline{K})$.

Demonstração. Seguimos aqui técnicas usadas no tratamento de problemas de difração, nesse casos a equação de Helmholtz é considerada [72], [109]. Procuramos por soluções de (2.14) da forma

$$\begin{aligned} v_1 &= D\zeta + \mu_1 \mathcal{S}\varphi \\ v_2 &= D\zeta + \mu_2 \mathcal{S}\varphi + D_0\chi, \end{aligned} \tag{2.15}$$

para $\zeta \in H^1(\partial K)$, $\varphi \in L^2(\partial K)$ e $\chi \in H^1(\partial D)$. Aqui,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\partial K} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})ds(\mathbf{y}), \\ D\zeta(\mathbf{x}) &= \int_{\partial K} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})}\zeta(\mathbf{y})ds(\mathbf{y}), \\ D_0\chi(\mathbf{x}) &= \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})}\chi(\mathbf{y})ds(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

onde $\nu(\mathbf{y})$ representa a normal exterior no ponto \mathbf{y} pertencente à região sob integração. Podemos escrever (2.15) na forma

$$(v_1, v_2)^t = \mathcal{H} \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \\ \chi \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

onde $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} D & \mu_1 \mathcal{S} & 0 \\ D & \mu_2 \mathcal{S} & D_0 \end{bmatrix}$.

É bem conhecido o fato que, se $s \in (0, 1]$, existem operadores traço contínuos [88]

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(1)} &: H^s(K) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial K), \\ \gamma_e^{(1)} &: H^s(D \setminus \overline{K}) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial K), \\ \gamma_i^{(2)} &: H^s(D) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial D), \\ \gamma_e^{(2)} &: H^s(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial D) \end{aligned}$$

onde, para uma função u definida em D ,

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(1)}u(\mathbf{y}) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \Gamma_i(\mathbf{y})} u(\mathbf{x}), \quad \text{q.s. } \mathbf{y} \in \partial K \\ \gamma_e^{(1)}u(\mathbf{y}) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \Gamma_e(\mathbf{y})} u(\mathbf{x}), \quad \text{q.s. } \mathbf{y} \in \partial K \end{aligned}$$

Aqui $\Gamma_i(\mathbf{y})$ e $\Gamma_e(\mathbf{y})$ representam as componentes internas e externas a K do cone (aberto, circular, duplamente truncado) centrado em $\mathbf{y} \in \partial K$ (para detalhes ver [114]). A definição é similar para $\gamma_i^{(2)}$, $\gamma_e^{(2)}$.

Observamos que $\mathcal{S}\varphi$ e $D\zeta$ são funções harmônicas em $\mathbb{R}^3 \setminus \partial K$ e $D_0\chi$ é harmônica em $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$. De acordo com os resultados de Costabel [24], para $s \in [-1/2, 1/2]$, os operadores abaixo são contínuos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &: H^{-1/2+s}(\partial K) \rightarrow H^{1+s}(K), \\
D &: H^{1/2+s}(\partial K) \rightarrow H^{1+s}(K), \\
D_0 &: H^{1/2+s}(\partial D) \rightarrow H^{1+s}(D), \\
\gamma_i^{(1)}\mathcal{S} &: H^{-1/2+s}(\partial K) \rightarrow H^{1/2+s}(\partial K), \\
\gamma_i^{(1)}D &: H^{-1/2+s}(\partial K) \rightarrow H^{1/2+s}(\partial K), \\
\gamma_i^{(2)}D_0 &: H^{-1/2+s}(\partial D) \rightarrow H^{1/2+s}(\partial D), \\
\gamma_i^{(1)}\partial_\nu\mathcal{S} &: H^{1/2+s}(\partial K) \rightarrow H^{1/2+s}(\partial K), \\
\gamma_i^{(1)}\partial_\nu D &: H^{1/2+s}(\partial K) \rightarrow H^{-1/2+s}(\partial K).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Os dois primeiros desses resultados permanece válido se K for substituído por $D \setminus \bar{K}$. Trocando-se o sub-índice (i) por (e) os resultados permanecem válidos. Além disso, os traços de \mathcal{S} , D e D_0 tem as seguintes propriedades (ver também [114] e [24]),

$$\begin{aligned}
\gamma_i^{(1)}\mathcal{S} &= \gamma_e^{(1)}\mathcal{S} = \mathcal{S}, \\
\gamma_i^{(1)}D &= \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D} \right), \\
\gamma_e^{(1)}D &= \left(-\frac{1}{2}I + \mathbb{D} \right), \\
\gamma_i^{(2)}D_0 &= \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D}_0 \right), \\
\gamma_i^{(1)}(\partial_\nu\mathcal{S}) &= \left(-\frac{1}{2}I + \mathbb{D}^* \right), \\
\gamma_e^{(1)}(\partial_\nu\mathcal{S}) &= \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D}^* \right), \\
\gamma_i^{(1)}(\partial_\nu D) &= \gamma_e^{(1)}(\partial_\nu D),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\zeta(\mathbf{x}) &= \text{p.v.}(D\zeta)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K \\
\mathbb{D}_0\chi(\mathbf{x}) &= \text{p.v.}(D_0\chi)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D \\
(\mathbb{D}^*\varphi)(\mathbf{x}) &= \text{p. v.} \left(\int_{\partial K} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right), \quad \mathbf{x} \in \partial K
\end{aligned} \tag{2.19}$$

e p. v. indica o valor principal de Cauchy.

Definindo os seguintes operadores

$$\begin{aligned}
T_1\chi &= \gamma_e^{(1)}(\partial_\nu D_0\chi), \\
T_2\chi &= \gamma_e^{(1)}(D_0\chi), \\
T_3\zeta &= \gamma_i^{(2)}(D\zeta), \\
T_4\varphi &= \gamma_i^{(2)}(\mathcal{S}\varphi),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde ν é a normal exterior a ∂K , e usando as relações acima vemos que (v_1, v_2) é solução de (2.14) se as densidades (ζ, φ, χ) satisfazem o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}
(\mu_2 v_2 - \mu_1 v_1)|_{\partial K} &= f_1 = \left(\mu_2 \left(-\frac{1}{2}I + \mathbb{D} \right) - \mu_1 \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D} \right) \right) \zeta + \\
&\quad + (\mu_2^2 - \mu_1^2)S\varphi + \mu_2 T_2\chi, \\
(\partial_\nu v_2 - \partial_\nu v_1)|_{\partial K} &= g_1 = \left(\mu_2 \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D}^* \right) - \mu_1 \left(-\frac{1}{2}I + \mathbb{D}^* \right) \right) \varphi + T_1\chi, \\
v_2|_{\partial D} &= f_2 = T_3\zeta + \mu_2 T_4\varphi + \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D}_0 \right) \chi.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Reescrevemos as equações acima na forma

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \mathcal{J} \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + \mathcal{L} \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \\ \chi \end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

onde

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mu_2 \left(-\frac{1}{2}I + \mathbb{D} \right) - \mu_1 \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D}^* \right) - \mu_1 \left(-\frac{1}{2}I + \mathbb{D}^* \right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}I + \mathbb{D}_0 \right) \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

e

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & (\mu_2^2 - \mu_1^2)S & \mu_2 T_2 \\ 0 & 0 & T_1 \\ T_3 & \mu_2 T_4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Como demonstrado em [109], \mathcal{J}^{-1} existe em

$$X = H^1(\partial K) \times L^2(\partial K) \times H^1(\partial D)$$

e S é compacto. Os operadores

$$T_1 : H^1(\partial D) \rightarrow L^2(\partial K)$$

$$T_2 : H^1(\partial D) \rightarrow H^1(\partial K)$$

$$T_3 : H^1(\partial K) \rightarrow H^1(\partial D)$$

$$T_4 : L^2(\partial K) \rightarrow H^1(\partial D)$$

são limitados e compactos. Isso pode ser demonstrado observando que $\|\nabla v\|_{0,2,\partial K} + \|(\nu \cdot \nabla v)\nu\|_{0,2,\partial K}$ é uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{1,2,\partial K}$ (ver [114], Definição 1.9) e usamos o fato de que, por hipótese, $\text{dist}(\partial K, \partial D) > 0$. Logo, pela teoria de Riesz-Schauder

$$\mathcal{J}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + \mathcal{J}^{-1} \mathcal{L} \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \\ \chi \end{bmatrix},$$

terão uma única solução se a única solução de

$$(I + \mathcal{J}^{-1} \mathcal{L}) \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

for $(\zeta, \varphi, \chi)^t = \mathbf{0}$. Entretanto, observamos que, nesse caso, da unicidade de soluções para (2.14), teremos $v_1, v_2 \equiv 0$. Definindo $v'_2(\mathbf{x}) = \mu_1^{-1}v_1(\mathbf{x})$, $v'_1(\mathbf{x}) = -\mu_2^{-1}v_2(\mathbf{x})$ nós observamos que, pelos resultados de traço, v'_1 e v'_2 satisfazem (2.14) com $g_1 = f_2 = f_1 = 0$. Pela unicidade, $v'_1 \equiv 0, v'_2 \equiv 0$. Então, usando (2.18), observamos que $-\zeta = \gamma_e^{(1)}(\mu_1 v'_2) - \gamma_i^{(1)}v_1 = 0$ e $\varphi = \partial_\nu v'_2 - \mu_1^{-1}\partial_\nu v_1 = 0$ e isso implica

$$((1/2)I + \mathbb{D}_0)\chi = 0.$$

Como $((1/2)I + \mathbb{D}_0) : H^1(\partial D) \rightarrow H^1(\partial D)$ é inversível (Seção 3 em [109]), obtemos que $\chi = 0$. Usando os resultados em (2.17), concluímos que $v_1 \in H^{3/2}(K)$ e $v_2 \in H^{3/2}(D \setminus \bar{K})$. \square

Podemos agora estabelecer o resultado de regularidade para ψ

Proposição 2.1. *Se $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in H^1(D)$ é a solução de (2.4), então*

$$\psi_1 = k_1^{-1}(v_1 + w_1), \quad \psi_2 = k_2^{-1}(v_2 + w_2).$$

Aqui $w = -G * h$, onde $G(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi|\mathbf{x}|}$, $h(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \psi_2(\mathbf{x})) + \rho(\mathbf{x})$ e $v = (v_1, v_2)$ é a solução de (2.14) considerando-se $\mu_1 = k_1^{-1}$, $\mu_2 = k_2^{-1}$, $f_1 = (\mu_1 - \mu_2)w$, $f_2 = k_2\Psi(\mathbf{x}) - w_2$ e $g_1 = -\frac{4\pi e}{T}\sigma(\mathbf{x})$. Como conseqüência, $\psi_1 \in H^{3/2}(K)$ e $\psi_2 \in H^{3/2}(D \setminus \bar{K})$.

Demonstração. Observamos que, pelas propriedades de Ψ e de w , as funções f_1 , f_2 e g_1 satisfazem as hipóteses do Lema 2.2. Denotando

$$u_1 = k_1^{-1}(v_1 + w_1), \quad u_2 = k_2^{-1}(v_2 + w_2),$$

é imediato que $u_1 = u_2$ em ∂K , $u_2 = \Psi$ em ∂D e que

$$k_1\partial_\nu u_1 - k_2\partial_\nu u_2 = \frac{4\pi e}{T}\sigma$$

em ∂K . Por um cálculo elementar (ver Proposição 3.2.1 em [97]), $u \in H^1(D)$ e $\vartheta = u - \psi \in H_0^1(D)$ satisfaz (no sentido generalizado)

$$\begin{aligned} k_1\Delta\vartheta_1 &= 0, & \text{em } K, \\ k_2\Delta\vartheta_2 &= 0, & \text{em } D \setminus \bar{K}, \\ \vartheta_1 &= \vartheta_2, & \text{em } \partial K, \\ k_1\partial_\nu\vartheta_1 - k_2\partial_\nu\vartheta_2 &= 0, & \text{em } \partial K, \\ \vartheta_2 &= 0, & \text{em } \partial D. \end{aligned}$$

Como conseqüência, $\vartheta \equiv 0$ e $\psi = u$. \square

Observação 2.9. Notamos que, por imersão de Sobolev, $H^{3/2}(D) \subset W^{1,3}(D)$ [16]. Com isso, devido a um resultado de Trudinger [111], se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio com a propriedade do cone e se $u \in W^{1,n}(D)$, existem constantes $C_1 = C_1(n, D)$, $C_2 = C_2(n, D) > 0$ tais que $\int_D \exp\left(\frac{C_1|u|}{\|u\|_{1,n,D}}\right)^{\frac{n}{n-1}} d\mathbf{x} \leq C_2$. Então, se $0 < p < +\infty$, escrevendo

$$\int_D \exp p|u| d\mathbf{x} = \int_D \exp\left(p \frac{C_1 \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)/n} \|u\|_{1,n,D} |u|}{C_1 \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)/n} \|u\|_{1,n,D}}\right) d\mathbf{x}$$

e usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \int_D \exp p|u| d\mathbf{x} &\leq \int_D \exp\left[\left(\frac{C_1|u|}{\|u\|_{1,n,D}}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{p^n \|u\|_{1,n,D}^n}{n(n/(n-1))^{(n-1)} C_1^n}\right] d\mathbf{x} \\ &\leq C_2 \exp\left(\frac{p^n \|u\|_{1,n,D}^n}{n(n/(n-1))^{(n-1)} C_1^n}\right) < +\infty. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Um cálculo simples mostra-nos que

$$\int_D \cosh^p u d\mathbf{x} \leq \int_D \frac{\exp(p|u|) + 1}{2} d\mathbf{x} \leq C_3 < +\infty,$$

onde $C_3 > 0$ depende somente sobre $n, p, \|u\|_{1,n,D}, |D|$.

Observação 2.10. Conforme observado em [109], as normas dos operadores definidos em (2.17) dependem unicamente da constante Lipschitz dos domínios envolvidos. Por sua vez, os operadores definidos em (2.20) de X para X tem norma dependendo sobre $[\text{dist}(\partial K, \partial D)]^{-1}$ e sobre as constantes Lipschitz de ∂K e ∂D . Isso também é verdade com relação à norma de $(\mathcal{L} + \mathcal{J})^{-1} : X \rightarrow X$.

2.3.2 Caso 2: Domínios de Classe $C^{1,1}$

Nessa seção, vamos considerar hipóteses mais restritivas com relação aos domínios K e D e com relação aos dados ρ , Ψ e σ para obter, através do uso de operadores integrais clássicos, maior regularidade para a solução ψ de (2.4). Dessa forma, assumimos as seguintes hipóteses

H3: K e D são domínios de classe $C^{1,1}$.

H4: $\sigma \in C^\alpha(\partial K)$, $\rho \in C^\alpha(\overline{D})$, $\Psi \in C^{1+\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$.

Lema 2.3. *Considerando-se as hipóteses **H3** e **H4**, a solução $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in H^1(D)$ de (2.4) é tal que $\psi_1 \in C^\alpha(\overline{K})$ e $\psi_2 \in C^\alpha(\overline{D \setminus K})$.*

Demonstração. Denotemos

$$X = C(\partial K) \times C(\partial K) \times C(\partial D)$$

e

$$Y = C^\alpha(\partial K) \times C^\alpha(\partial K) \times C^\alpha(\partial D)$$

equipados com a norma usual do produto. Consideramos, como no Lema 2.2 as funções $h(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) + \rho(\mathbf{x})$ e $w(\mathbf{x}) = -(G * h)(\mathbf{x})$, estendendo h a ser zero fora de D . Por um cálculo semelhante ao da Observação 2.9 e, pela regularidade de ρ , é possível demonstrar que $h \in L^p(D)$, $\forall 1 \leq p < +\infty$. Usando o Teorema 9.2 em [46], para uma escolha adequada de p , temos $w \in C^\alpha(\overline{D})$. Consideramos novamente o problema (2.14) com f_1 , f_2 e g_1 como na Proposição 2.1. De acordo com as hipóteses, $f_1 \in C^\alpha(\partial K)$, $f_2 \in C^\alpha(\partial D)$ e $g_1 \in C^\alpha(\partial K)$. Como na prova do Lema 2.2, procuramos soluções da forma (2.15); entretanto com densidades $(\zeta, \varphi, \chi) \in Y$.

Seguindo a discussão no Capítulo II de [87] (ver também Capítulo 11 em [86]), no contexto clássico, os seguintes operadores são contínuos,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &: C(\partial K) \rightarrow C^\alpha(\overline{K}), \\ D &: C^\alpha(\partial K) \rightarrow C^\alpha(\overline{K}), \\ D_0 &: C^\alpha(\partial D) \rightarrow C^\alpha(\overline{D}), \\ \gamma_i^{(1)} \mathcal{S} &: C(\partial K) \rightarrow C^\alpha(\partial K), \\ \gamma_i^{(1)} D &: C(\partial K) \rightarrow C^\alpha(\partial K), \\ \gamma_i^{(2)} D_0 &: C(\partial D) \rightarrow C^\alpha(\partial D), \end{aligned} \tag{2.26}$$

$\forall 0 < \alpha < 1$. Os dois primeiros resultados permanecem válidos considerando-se $\overline{D \setminus K}$ ao invés de \overline{K} . Além disso, se $\varphi \in C(\partial K)$, $\mathbb{D}^* \varphi \in C^\alpha(\partial K)$, onde \mathbb{D}^* foi definido em (2.19). Considerando os operadores T_1 , T_2 , T_3 e T_4 como aqueles definidos em (2.20) e usando (2.18), as densidades (ζ, φ, χ) devem satisfazer (2.21) ou, na forma matricial,

a equação (2.22) com \mathcal{J} e \mathcal{L} definidas como em (2.23) e em (2.24). Definindo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_1 + \mu_2)} D & 2(\mu_2 - \mu_1) S & \frac{2\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)} T_2 \\ 0 & \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_1 + \mu_2)} \mathbb{D}^* & \frac{-2}{(\mu_1 + \mu_2)} T_1 \\ -2T_3 & -2\mu_2 T_4 & -2\mathbb{D}_0 \end{bmatrix},$$

obtemos o sistema

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_1 \\ g'_1 \\ f'_2 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

onde $f'_1 = \frac{-2f_1}{\mu_1 + \mu_2}$, $g'_1 = \frac{2g_1}{\mu_1 + \mu_2}$, $f'_2 = 2f_2$. Como por hipótese, $\delta = \text{dist}(\partial K, \partial D) > 0$, os operadores

$$\begin{aligned} T_1 : C(\partial D) &\rightarrow C^\alpha(\partial K), & T_2 : C(\partial D) &\rightarrow C^\alpha(\partial K) \\ T_3 : C(\partial K) &\rightarrow C^\alpha(\partial D), & T_4 : C(\partial K) &\rightarrow C^\alpha(\partial D). \end{aligned}$$

são compactos. Isso segue de argumentos análogos àqueles dados em [20] (Teoremas 1.6, 1.7 e 1.10) se observarmos que, nesse caso, os núcleos não são singulares. Os operadores

$$\begin{aligned} \mathbb{D} : C(\partial K) &\rightarrow C(\partial K) \\ \mathbb{D}^* : C(\partial K) &\rightarrow C(\partial K) \\ \mathbb{D}_0 : C(\partial D) &\rightarrow C(\partial D) \end{aligned}$$

são também compactos (ver Capítulo II em [55]), então \mathbf{A} é um operador compacto de X para X . Usando a teoria de Riesz-Fredholm o sistema (2.27) tem uma única solução $(\zeta, \varphi, \chi) \in X$, como pode ser visto, usando argumentos semelhantes àqueles usados na demonstração do Lema 2.2, envolvendo a unicidade de soluções para (2.14) (detalhes podem ser vistos também na demonstração do Teorema 4.1 em [72]). Utilizando (2.26) obtemos que $\mathbf{A} : X \rightarrow Y$ e, por (2.27), $(\zeta, \varphi, \chi) \in Y$; conseqüentemente, $v_1 \in C^2(K) \cap C^\alpha(\overline{K})$, $v_2 \in C^2(D \setminus \overline{K}) \cap C^\alpha(\overline{D \setminus K})$. A Proposição 2.1 juntamente com a regularidade de w dá-nos o resultado para ψ . \square

Proposição 2.2. *Considerando-se as hipóteses do Lema 2.3 se $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ é a solução de (2.4), então $\psi_1 \in C^{1+\alpha}(\overline{K})$ e $\psi_2 \in C^{1+\alpha}(\overline{D \setminus K})$.*

Demonstração. Vamos considerar os espaços de funções X, Y como aqueles definidos no Lema 2.3 e denotamos $Z = C^{1+\alpha}(\partial K) \times C^\alpha(\partial K) \times C^{1+\alpha}(\partial D)$. Observamos que, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{D \setminus K}$

$$\begin{aligned} |\sinh \psi_2(\mathbf{x}) - \sinh \psi_2(\mathbf{y})| &= \left| \int_{\psi_2(\mathbf{x})}^{\psi_2(\mathbf{y})} \cosh \tau d\tau \right| \\ &\leq C |\psi_2(\mathbf{x}) - \psi_2(\mathbf{y})|, \end{aligned}$$

o que mostra, usando o Lema 2.3 juntamente com a regularidade de ρ , que $h \in C^\alpha(\overline{D \setminus K})$. Portanto, os sub-problemas

$$\begin{aligned} \Delta w_1(\mathbf{x}) &= \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K, \\ w_1(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial K \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \Delta w_2(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K}, \\ w_2(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial K \cup \partial D. \end{aligned} \tag{2.29}$$

tem únicas soluções clássicas $w_1 \in C^{1+\alpha}(\overline{K}) \cap C^2(K)$, $w_2 \in C^{1+\alpha}(\overline{D \setminus K}) \cap C^2(D \setminus \overline{K})$ [47].

Consideramos novamente o problema (2.14), com $\mu_1 = k_1^{-1}$, $\mu_2 = k_2^{-1}$, $f_1 = 0$, $f_2 = k_2 \Psi$ e $g_1 = -\frac{4\pi e}{T} \sigma + (\partial_\nu w_1 - \partial_\nu w_2)$. Da regularidade de w_1 e w_2 , $g_1 \in C^\alpha(\partial K)$. Como conseqüência, a solução $v = (v_1, v_2)$ de (2.14) é tal que $v_1 \in C^2(K) \cap C^{1+\alpha}(\overline{K})$ e $v_2 \in C^2(D \setminus \overline{K}) \cap C^{1+\alpha}(\overline{D \setminus K})$. Isso segue de argumentos similares àqueles dados antes: de fato, assumindo que v tem uma representação em termos de integrais singulares como (2.15), então as densidades (ζ, φ, χ) tem de satisfazer o sistema (2.21); como afirmado em (2.26), $\mathbf{A} : X \rightarrow Y$. Além disso,

$\mathbf{A} : Y \rightarrow Z$ já que os operadores abaixo são contínuos [87]

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &: C^\alpha(\partial K) \rightarrow C^{1+\alpha}(\overline{K}), \\
D &: C^{1+\alpha}(\partial K) \rightarrow C^{1+\alpha}(\overline{K}), \\
D_0 &: C^{1+\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{1+\alpha}(\overline{D}), \\
\gamma_i^{(1)} \mathcal{S} &: C^\alpha(\partial K) \rightarrow C^{1+\alpha}(\partial K), \\
\gamma_i^{(1)} D &: C^\alpha(\partial K) \rightarrow C^{1+\alpha}(\partial K), \\
\gamma_i^{(2)} D_0 &: C^\alpha(\partial D) \rightarrow C^{1+\alpha}(\partial D), \\
\mathbb{D}^* &: C^\alpha(\partial K) \rightarrow C^{1+\alpha}(\partial K).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

O resultado para ψ segue por argumentos similares ao da Proposição 2.1, observando que $\psi_1 = k_1^{-1}(w_1 + v_1)$ e $\psi_2 = k_2^{-1}(w_2 + v_2)$. \square

Observação 2.11. Do Lema 2.3 e do resultado de regularidade $\mathbf{A} : X \rightarrow Y$ o operador linear $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} : Y \rightarrow Y$ é limitado com norma de operador dependendo somente sobre $K, D, \delta^{-1}, \alpha$. Para o operador $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} : Z \rightarrow Z$ isso também é válido se recordarmos o Lema 2.2 e o fato que $\mathbf{A} : Y \rightarrow Z$.

2.4 Teoria de Aproximação

As observações feitas por Holst [62] parecem reticentes quanto à possibilidade da obtenção de estimativas de erro via métodos de elementos finitos. Isso certamente não é o caso se reformularmos o problema em termos da teoria de integrais singulares. Como comentado no livro de Dautray e Lions [30], em problemas biofísicos, no caso de grandes e complexas macromoléculas com superfície de acessibilidade Lipschitz, tal formulação é muito razoável.

Consideremos (J_h^i, J_h^e) como triangularizações regulares (uniformes) de \overline{K} e $D \setminus \overline{K}$ respectivamente, e definimos

$$S_h = \{v_h = (v_h^i, v_h^e), v_h^i \in C^0(\overline{K}), v_h^e \in C^0(D \setminus \overline{K}), v_h^i|_M, v_h^e|_{M'} \in \mathbb{P}^1, \forall (M, M') \in (J_h^i, J_h^e)\}.$$

Similarmente, sejam $(\check{J}_h^i, \check{J}_h^e)$ triangularizações regulares de ∂K e ∂D , respectivamente, então definimos

$$\check{S}_h = \{\check{v}_h = (\check{v}_h^i, \check{v}_h^e), \check{v}_h^i \in C^0(\partial K), \check{v}_h^e \in C^0(\partial D), \check{v}_h^i|_{\check{M}}, \check{v}_h^e|_{\check{M}'} \in \mathbb{P}^1, \forall(\check{M}, \check{M}') \in (\check{J}_h^i, \check{J}_h^e)\}.$$

Vamos assumir as hipóteses **H1** e **H2** e, por simplicidade, que K e D são domínios poliédricos. Nesse caso, $(v_h^i, v_h^e)|_{\partial K \cup \partial D} \subset \check{S}_h, \forall(v_h^i, v_h^e) \in S_h$. O caso mais geral pode ser tratado de uma maneira essencialmente equivalente. Consideramos somente elementos finitos lineares por partes, o que é compatível com a regularidade da solução que obtemos.

Vamos definir os operadores de projeção ortogonal

$$\begin{aligned} P_h &: L^2(D) \rightarrow S_h, \\ \check{P}_h &: L^2(\partial K \cup \partial D) \rightarrow \check{S}_h, \end{aligned}$$

Via interpolação vemos que, se $u = (u_1, u_2)$ é tal que

$$u_1 \in H^{3/2}(K), u_2 \in H^{3/2}(D \setminus \bar{K}),$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u - P_h u\|_{0,2,D} \leq Ch^{3/2}(\|u_1\|_{3/2,2,K} + \|u_2\|_{3/2,2,D \setminus \bar{K}}) \quad (2.31)$$

(ver [36]) e, certamente,

$$\|u - \check{P}_h u\|_{L^2(\partial K \cup \partial D)} \leq Ch \|u\|_{H^1(\partial K \cup \partial D)}, \quad (2.32)$$

se $u \in H^1(\partial K \cup \partial D)$ (detalhes podem ser vistos no Capítulo 3 do livro de Quarteroni e Valli [97]).

Para definirmos o problema de aproximação relativo ao problema variacional (2.7), temos de levar em consideração que este último tem uma condição de contorno não homogênea em ∂D . Assim, seguindo a discussão no Capítulo 6 em [97], definimos $\{\mathbf{x}_s | s = 1, \dots, d_h\}$ os nós em ∂D e $\{\mathbf{a}_i | i = 1, \dots, c_h\}$ os nós internos a D (incluindo os nós de ∂K). Definimos o conjunto

$$S_h^* = \{v_h \in S_h, v_h(\mathbf{x}_s) = \Psi_h(\mathbf{x}_s), \forall s = 1, \dots, d_h\}.$$

O problema aproximado para (2.7) consiste em:

Encontrar $u_h \in S_h^* \cap H^1(D)$ tal que

$$a(u_h, v_h) + (N(u_h), v_h) = L(v_h), \quad (2.33)$$

$\forall v_h \in S_h^* \cap H^1(D)$, onde $a(u_h, v_h) = k_1 \int_K \nabla u_h^i \nabla v_h^i d\mathbf{x} + k_2 \int_{D \setminus \bar{K}} \nabla u_h^e \nabla v_h^e d\mathbf{x}$, $(N(u_h), v_h) = \int_D b(\mathbf{x}, u_h) v_h d\mathbf{x}$, $L(v_h) = \frac{4\pi e}{T} \int_{\partial K} \sigma v_h ds - \int_D \rho v_h d\mathbf{x}$.

Definimos $\tilde{\Psi}_h \in S_h^* \cap H^1(D)$ como sendo a solução do problema de aproximação para (2.5): $a(\tilde{\Psi}_h, v_h) = 0$, $\forall v_h \in S_h^* \cap H^1(D)$. Procuramos soluções para (2.33) da forma $u_h = \tilde{\Psi}_h + \sum_{i=1}^{c_h} u_h(\mathbf{a}_i) \varphi_i = \tilde{\Psi}_h + u'_h$, onde φ_i são funções base de S_h relativas aos nós internos. Como observado em [97], $u'_h \in S_h \cap H^1(D)$. Podemos então reformular (2.33) como:

Encontrar $u'_h \in S_h \cap H_0^1(D)$ tal que

$$a(u'_h, v_h) + (N(u'_h + \tilde{\Psi}_h), v_h) = L(v_h) - L_h(v_h), \quad (2.34)$$

$\forall v_h \in S_h \cap H_0^1(D)$, onde $a(u_h, v_h) = k_1 \int_K \nabla u_h^i \nabla v_h^i d\mathbf{x} + k_2 \int_{D \setminus \bar{K}} \nabla u_h^e \nabla v_h^e d\mathbf{x}$, $(N(u_h), v_h) = \int_D b(\mathbf{x}, u_h) v_h d\mathbf{x}$, $L(v_h) = \frac{4\pi e}{T} \int_{\partial K} \sigma v_h ds - \int_D \rho v_h d\mathbf{x}$ e $L_h(v_h) = \langle k_1 \partial_\nu \tilde{\Psi}_h^i - k_2 \partial_\nu \tilde{\Psi}_h^e, v_h \rangle$, onde ν é a normal exterior à ∂K e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a antidualidade entre $(H_{00}^{1/2}(\partial K))'$ e $H_{00}^{1/2}(\partial K)$ (relembramos que esses espaços foram definidos na Seção 2.2 da presente tese). Podemos agora usar o Teorema 2.3 em [49] para garantir a existência de uma única solução $u'_h \in S_h \cap H_0^1(D)$ de (2.34). Como consequência existe uma única solução $u_h \in S_h^* \cap H^1(D)$ de (2.33).

Agora notamos que se u é a solução de (2.4), então usando os resultados de regularidade estabelecidos na Proposição 2.1, a estimativa (2.31) nos fornece

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0,2,D} &\leq \|P_h u - u_h\|_{0,2,D} + \|Q_h u\|_{0,2,D} \\ &\leq \|P_h u - u_h\|_{0,2,D} + Ch^{3/2} (\|u_1\|_{3/2,2,K} + \|u_2\|_{3/2,2,D \setminus \bar{K}}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $Q_h = u - P_h u$. Resta-nos, portanto, estimar o primeiro termo da soma acima. Para isso utilizamos as representações das soluções de (2.4) em termos de operadores

integrais, como discutido na Seção 2.3. Utilizando a Proposição 2.1, sabemos que u tem a representação

$$(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^t = (k_1^{-1}w_1(\mathbf{x}), k_2^{-1}w_2(\mathbf{x}))^t + (k_1^{-1}, k_2^{-1})^t \mathcal{H} \begin{bmatrix} \zeta(\mathbf{x}) \\ \varphi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in D$$

onde $w_2 = -G * (b + \rho_2)$, $w_1 = -G * \rho_1$, e estamos considerando, como na demonstração da referida Proposição, $b = b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$. Podemos também escrever,

$$(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^t = (k_1^{-1}w_1(\mathbf{x}), k_2^{-1}w_2(\mathbf{x}))^t + (k_1^{-1}, k_2^{-1})^t \mathcal{H}(\mathcal{L} + \mathcal{J})^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in D,$$

onde $f_1(\mathbf{x}) = (\mu_1 - \mu_2)w(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x}) = (k_2\Psi(\mathbf{x}) - w_2(\mathbf{x}))|_{\partial D}$, $g_1(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi e}{T}\sigma(\mathbf{x})$. Da mesma forma, u_h satisfaz, para $\mathbf{x} \in D$,

$$(u_h^i, u_h^e)^t = (k_1^{-1}w_h^i, k_2^{-1}w_h^e)^t + (k_1^{-1}, k_2^{-1})^t P_h \mathcal{H}(\mathcal{L} + \mathcal{J})^{-1} \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu_2)\check{P}_h w_h \\ -\frac{4\pi e}{T}\sigma \\ k_2\Psi_h - w_h^e \end{bmatrix},$$

onde $w_h^e = -(P_h G * P_h(b_h + \rho_2))$, $w_h^i = -(P_h G * P_h \rho_1)$, $b_h = b(\mathbf{x}, u_h(\mathbf{x}))$.

Definimos $e_h = P_h u - u_h$. Então,

$$(e_h^i(\mathbf{x}), e_h^e(\mathbf{x}))^t = (k_1^{-1}(P_h w_1 - w_h^i)(\mathbf{x}), k_2^{-1}(P_h w_2 - w_h^e)(\mathbf{x}))^t + (k_1^{-1}, k_2^{-1})^t P_h \mathcal{H}(\mathcal{L} + \mathcal{J})^{-1} \mathcal{M},$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu_2)(\check{P}_h w - w_h)(\mathbf{x}) \\ 0 \\ (\check{P}_h w_2 - w_h^e)(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu_2)\check{Q}_h w(\mathbf{x}) \\ 0 \\ k_2\check{Q}_h \Psi(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever $e_h = \widehat{e}_h + \widetilde{e}_h$, onde $\widehat{e}_h \in S_h \cap H^1(D)$ é a solução de

$$\begin{aligned} P_h \nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla \widehat{e}_h(\mathbf{x})) &= P_h (b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) - b(\mathbf{x}, u_h(\mathbf{x}))), \quad \mathbf{x} \in D, \\ \widehat{e}_h^i(\mathbf{x}) &= \widehat{e}_h^c(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K, \\ \widehat{e}_h^c(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$k_1 \partial_\nu \widehat{e}_h^i(\mathbf{x}) - k_2 \partial_\nu \widehat{e}_h^c(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial K,$$

$$\text{e } \widetilde{e}_h = P_h \mathcal{H}(\mathcal{L} + \mathcal{J})^{-1} \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu_2) \check{Q}_h w(\mathbf{x}) \\ 0 \\ k_2 \check{Q}_h \Psi(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Relembrando a Observação 2.10, $(\mathcal{L} + \mathcal{J})^{-1}$ existe e é um operador limitado de $Y = L^2(\partial K) \times L^2(\partial K) \times L^2(\partial D)$ a Y . Da mesma forma, \mathcal{H} é um operador limitado de Y a Y . Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{e}_h\|_{0,2,D} &\leq C_1 (\|(\mu_1 - \mu_2) \check{Q}_h w\|_{0,2,\partial K} + \|k_2 \check{Q}_h \Psi\|_{0,2,\partial D}) \\ &\leq C_2 h (\|G * (b(\mathbf{x}, u) + \rho)\|_{1,2,\partial K} + \|\Psi\|_{1,2,\partial D}), \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde usamos (2.32) e o fato de que $w|_{\partial K} \in H^1(\partial K)$.

Multiplicando a primeira equação em (2.36) por \widehat{e}_h e integrando por partes, temos

$$-k_1 \int_K |\nabla \widehat{e}_h^i|^2 d\mathbf{x} - k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} |\nabla \widehat{e}_h^c|^2 d\mathbf{x} = \int_{D \setminus \overline{K}} (b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) - b(\mathbf{x}, u_h(\mathbf{x}))) \widehat{e}_h d\mathbf{x}. \tag{2.38}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &\int_{D \setminus \overline{K}} (b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) - b(\mathbf{x}, u_h(\mathbf{x}))) \widehat{e}_h d\mathbf{x} = \\ &= r_D^{-2} k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} (\sinh(u) - \sinh(P_h u) + \sinh(P_h u) - \sinh(u_h)) \widehat{e}_h d\mathbf{x} \\ &= r_D^{-2} k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} \widehat{e}_h \int_0^1 \cosh(P_h u + \theta(u - P_h u))(u - P_h u) d\theta d\mathbf{x} + \\ &+ 2r_D^{-2} k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} \cosh\left(P_h u + \frac{u_h - P_h u}{2}\right) \sinh\left(\frac{P_h u - u_h}{2}\right) \widehat{e}_h d\mathbf{x} + \\ &- r_D^{-2} k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} \widetilde{e}_h \int_0^1 \cosh(u_h + \theta(P_h u - u_h))(P_h u - u_h) d\theta d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Lembrando que, $1 \leq \cosh(a + \theta(b - a)) \leq \max(\cosh(a), \cosh(b))$ e substituindo a igualdade acima em (2.38), a positividade da função $f(x) = x \sinh(x) \cosh(x)$ nos dá a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} & k_1 \int_K |\nabla \widehat{e}_h^i|^2 d\mathbf{x} + k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} |\nabla \widehat{e}_h^e|^2 d\mathbf{x} \leq \\ & \leq r_D^{-2} k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} |\widehat{e}_h| |\max(\cosh(P_h u), \cosh(u))| |(u - P_h u)| d\mathbf{x} + \\ & + r_D^{-2} k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} |\widetilde{e}_h| |\max(\cosh(P_h u), \cosh(u_h))| |(u_h - P_h u)| d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Schwarz, a limitação (uniforme em h) de $\|u_h\|_{\infty, D}$ e $\|P_h u\|_{\infty, D}$ (ver Observação 2.12) e a estimativa (2.37), obtemos

$$\begin{aligned} & k_1 \int_K |\nabla \widetilde{e}_h^i|^2 d\mathbf{x} + k_2 \int_{D \setminus \overline{K}} |\nabla \widehat{e}_h|^2 d\mathbf{x} \leq \\ & \leq C \|\widehat{e}_h \max(\cosh(P_h u), \cosh(u))\|_{0,2,D} \|u - P_h u\|_{0,2,D} + \\ & + C \|\widetilde{e}_h\|_{0,2,D}^2 + C \|\widehat{e}_h\|_{0,2,D} \|\widetilde{e}_h\|_{0,2,D} \tag{2.39} \\ & \leq C \|\widehat{e}_h\|_{0,4,D} \|\max(\cosh(P_h u), \cosh(u))\|_{0,4,D} \|u - P_h u\|_{0,2,D} + \\ & + Ch^2 + C \|\widehat{e}_h\|_{0,2,D} \|\widetilde{e}_h\|_{0,2,D} \end{aligned}$$

Agora, usando (2.31), (2.37) e as desigualdades de Schwarz, Young e Poincaré, bem como a imersão contínua $H^1(D) \subset L^4(D)$ (ver [16]), obtemos para $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & (\min(k_1, k_2)) \int_D \widehat{e}_h^2 d\mathbf{x} \leq C(\min(k_1, k_2)) \int_D |\nabla \widehat{e}_h|^2 d\mathbf{x} \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} \|\nabla \widehat{e}_h\|_{0,2,D}^2 + Ch^3 \|\max(\cosh(P_h u), \cosh(u))\|_{0,4,D}^2 + Ch^2. \end{aligned}$$

Usando a $H^{3/2}$ -regularidade de u restrita a $D \setminus \overline{K}$ e recordando a Observação 2.9, o Lema de Poincaré nos dá, para uma escolha adequada de ϵ ,

$$\|\widehat{e}_h\|_{0,2,D} \leq C(h^{3/2} + h),$$

onde C não depende de h . Conseqüentemente,

$$\|e_h\|_{0,2,D} \leq \|\widetilde{e}_h\|_{0,2,D} + \|\widehat{e}_h\|_{0,2,D} \leq C(h^{3/2} + h),$$

e retornando a (2.35) obtemos a estimativa de erro

$$\|u - u_h\|_{0,2,D} = O(h).$$

Observação 2.12. Em (2.39) usamos o fato de que $\|u_h\|_{\infty,D}$ (e por conseqüência $\|P_h u\|_{\infty,D}$) podem ser limitadas superiormente por uma constante independente de h . Isto pode ser demonstrado estabelecendo-se, através de (2.34), estimativas uniformes em h para $\|u'_h\|_{1,2,D}$ e $\|\tilde{\Psi}_h\|_{1,2,D}$ (ver a demonstração dos Lemas 3.1 e 3.3 no próximo capítulo).

3 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS PARA O MOVIMENTO HIDRO-ELÉTRICO

Nesse capítulo estabelecemos resultados sobre existência de soluções fracas para o sistema envolvido no primeiro modelo de eletroforese discutido na introdução da presente tese. Em tal modelo, o comportamento hidrodinâmico do sistema é governado pela equações de Navier-Stokes, com um termo fonte dependendo não-linearmente sobre o potencial eletrostático. Este, por sua vez, é calculado, em cada instante de tempo, através da equação de Poisson-Boltzmann (1.1). A dependência do potencial com a posição da partícula torna o sistema acoplado, juntamente às equações dinâmicas de movimento.

Cabe observar que não consideramos, nesse modelo, a aproximação usual para o efeito do campo elétrico sobre a partícula baseada na teoria da camada limite de Prandtl: a velocidade de deslizamento. Como já discutido, sua derivação requer maior regularidade do contorno da partícula. Tal modelo será considerado no próximo capítulo.

Estudamos o acoplamento hidro-elétrico admitindo hipóteses mais restritivas do que simplesmente **H1** e **H2**, especialmente com relação às distribuições de cargas. Isso habilita-nos a utilizar os resultados de regularidade estabelecidos na Proposição 2.1 para mostrar que o termo fonte não linear

$$\mathbf{F} = \left(C_1 I_{D \setminus \overline{K(t)}} \rho + C_2 I_{D \setminus \overline{K(t)}} \sinh \left(\frac{e\phi}{T} \right) \right) \nabla \phi$$

pertence a $L^2(D)^3$, $\forall t \in (0, \tau)$, para um determinado $\tau > 0$. Com isso, baseados em técnicas introduzidas nas referências [31, 32, 33], consideramos uma formulação global fraca para o sistema e a existência de soluções local em tempo é estabelecida, no Teorema 3.3. A obtenção desse resultado é uma consequência do fato de que é possível demonstrar a existência de uma seqüência de soluções aproximadas para um sistema global eletro-mecânico apropriado, através da obtenção de limites uniformes sobre \mathbf{F} , conforme Teorema 3.1 e Corolário 3.1. Essas propriedades são

provadas restritas ao caso no qual, a distribuição superficial de cargas da partícula e a distribuição de cargas fixas (na partícula e na solução), são funções L^2 e L^∞ , respectivamente e a distância da partícula ao contorno exterior do enclosure é sempre maior ou igual do que uma constante fixada $d > 0$. Para isso basta considerarmos a hipótese de que ∂K_0 é uma superfície Lipschitz. A existência de soluções fracas obtidas no Teorema 3.3 segue da hipótese adicional que o domínio da partícula é de classe $C^{1,1}$ e através de propriedades de compacidade para a seqüência de soluções aproximadas, bem como da convergência da seqüência de termos forçantes associada, conforme pode ser visto no Teorema 3.2.

Outras hipóteses que assumimos são de ordem física. Como já discutido na introdução dessa tese, elas incluem o fato de que não consideramos o processo de difusão de íons na dupla camada elétrica, ou seja, estamos desprezando os efeitos de eletro-osmose. Também estamos assumindo que os efeitos de polarização do eletrólito sobre a dupla camada podem ser desprezados [100].

3.1 Equações Governantes

Consideremos uma partícula rígida carregada imersa numa solução eletrolítica sob a ação de um campo elétrico externo. Supomos que a solução (um fluido viscoso) ocupa uma região $D \subset \mathbb{R}^3$ e que, no momento inicial, a partícula ocupa uma região compacta $\bar{K}_0 \subset D$ tal que seu centro de massa está localizado na origem $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ de um sistema Cartesiano com coordenadas \mathbf{y} . Assim como no Capítulo 2, assumimos que a solução é composta por um solvente e um sal monovalente.

A ação do campo elétrico na partícula produz seu movimento. A trajetória de qualquer ponto material \mathbf{y} é completamente descrito pelas duas funções

$$t \mapsto Q(t) \in SO(3) \quad \text{and} \quad t \mapsto \mathbf{x}_c(t) \in \mathbb{R}^3, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x}_c(t)$ é a trajetória do centro de massa da partícula. As equações da trajetória de qualquer ponto material tem a forma

$$X(\mathbf{y}, t) = Q(t)\mathbf{y} + \mathbf{x}_c(t) = M(t)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \overline{K_0}. \quad (3.2)$$

Observamos que $M(t)$ é uma transformação afim inversível.

Assim, no tempo t , o corpo ocupa o conjunto $\overline{K(t)}$ onde

$$K(t) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X(\mathbf{y}, t) = M(t)\mathbf{y}, \mathbf{y} \in K_0\}. \quad (3.3)$$

O movimento do fluido é descrito pelo campo de velocidades $\mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t)$ (velocidade do ponto material de fluido o qual tem coordenadas Cartesianas \mathbf{x} no tempo t). Uma descrição Euleriana do movimento da partícula é dada, com (3.2), por

$$\mathbf{v}^p(\mathbf{x}, t) = \dot{Q}(t)Q^*(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) + \mathbf{u}_c(t), \quad \mathbf{x} \in \overline{K(t)}. \quad (3.4)$$

Aqui $\mathbf{u}_c(t) = \dot{\mathbf{x}}_c(t)$. Desde que $Q(t) \in SO(3)$, a matriz $\dot{Q}(t)Q^*(t)$ é anti simétrica. Assim, podemos determinar o vetor rotação $\mathbf{w}(t)$ pela identidade

$$\dot{Q}(t)Q^*(t)\mathbf{z} = \mathbf{w}(t) \times \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3.$$

Então, podemos escrever (3.4) na forma

$$\mathbf{v}^p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(t) \times (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c(t)) + \mathbf{u}_c(t), \quad \mathbf{x} \in \overline{K(t)}. \quad (3.5)$$

Para algum $\tau > 0$, definimos $A : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $A_{ij}(t) = e_{jik}w_k(t)$, $t \in [0, \tau]$. Se $\mathbf{w}(t) \in C([0, \tau]; \mathbb{R}^3)$, pelo fato que $Q(t)$ é a solução de $\dot{Q}(t) = A(t)Q(t)$, $Q(0) = I$, nós temos $Q(t) = \prod_0^t e^{A(\tau)d\tau}$, o produto integral usual [35]. Por um Corolário da Fórmula de Duhamel [35] (p.21), podemos ver que se $A, B : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ são contínuas então $\forall x, y \in [a, b]$

$$\left\| \prod_x^y e^{A(\tau)d\tau} - \prod_x^y e^{B(\tau)d\tau} \right\| \leq e^{\|A\|_1 + \|B\|_1} \left| \int_x^y \|A(s) - B(s)\| ds \right|. \quad (3.6)$$

Aqui $\|A\|_1 = \int_a^b \|A(s)\| ds$ e $\|\cdot\|$ é alguma norma em $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Fixamos uma constante $d > 0$ e supomos (formalmente) que $\tau > 0$ é tal que

$$\delta(t) := \text{dist}(\partial K(t), \partial D) \geq d, \quad (3.7)$$

para todo $t \in [0, \tau]$. Isso será feito de forma precisa posteriormente. Vamos definir $\phi(\mathbf{x}, t)$ como uma função de valor real à qual representa o potencial elétrico em $(\mathbf{x}, t) \in D \times [0, \tau]$. Definimos $\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\phi(\mathbf{x}, t)e}{T}$, com a mesma notação do Capítulo 2. As equações governantes e condições de contorno para ψ são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}, t)) - b(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}, t)) &= \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D, \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) &= \psi_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K(t), \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) &= \Psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D, \\ k_1 \partial_\nu \psi_1(\mathbf{x}, t) - k_2 \partial_\nu \psi_2(\mathbf{x}, t) &= \frac{4\pi e}{T} \sigma(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aqui

- $\nu(\mathbf{x}, t)$ é o vetor normal a $\partial K(t)$.
- $\mathbf{k} : D \times [0, \tau] \rightarrow \mathbf{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ é definido como $k_{ij}(\mathbf{x}, t) = \delta_{ij} k_1$ se $\mathbf{x} \in K(t)$, $k_{ij}(\mathbf{x}, t) = \delta_{ij} k_2$ se $\mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)}$, onde k_1, k_2 são as constantes dielétricas em $K(t)$ e $D \setminus \overline{K(t)}$ respectivamente.
- $b : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}, t)) = k_2 r_D^{-2} \sinh \psi(\mathbf{x}, t)$ se $\mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)}$, $b(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}, t)) = 0$ se $\mathbf{x} \in K(t)$, r_D é o raio de Debye.
- $\Psi(x) = \frac{e\Phi(x)}{T}$, $\psi_1(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t)|_{K(t)}$ e $\psi_2(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t)|_{D \setminus \overline{K(t)}}$.
- σ é a distribuição superficial de cargas e $\rho(\mathbf{x}, t) = (\rho_1(\mathbf{x}, t), \rho_2(\mathbf{x}, t))$, onde $\rho_1(\mathbf{x}, t) = -\frac{4\pi e}{T} \rho_1^0(\mathbf{x}, t)$, $\rho_2(\mathbf{x}, t) = -\frac{4\pi e}{T} \rho_2^0(\mathbf{x}, t)$, $\rho_1^0 = \rho^0|_K$, $\rho_2^0 = \rho^0|_{D \setminus \overline{K}}$ são a distribuição de cargas em $K(t)$ e $D \setminus \overline{K(t)}$ respectivamente.

O movimento do fluido é descrito pelas equações de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_f(\partial_t \mathbf{v}^f + \operatorname{div}(\mathbf{v}^f \otimes \mathbf{v}^f)) - \eta \Delta \mathbf{v}^f + \nabla p &= \bar{\nu}_f \mathbf{F}, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega_\tau)^3 \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^f &= 0, \quad \text{in } \Omega_\tau \\ \mathbf{v}^f &= 0, \quad \text{in } \partial D \\ \mathbf{v}^f|_{t=0} &= \mathbf{v}_0^f \quad \text{in } D \setminus \overline{K_0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

para todo $t \in (0, \tau)$. Aqui $\eta > 0$ é a viscosidade do fluido, $\bar{\mu}_f > 0$ é a densidade de massa (suposta homogênea) do fluido e $\Omega_\tau = \{(t, \mathbf{x})/t \in (0, \tau), \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)}\}$; denotando ρ^{ions} como a densidade de íons da solução, nós temos

$$\mathbf{F} = -(\rho_2^0 + \rho^{ions}) \nabla \phi_2$$

como a força elétrica sobre o domínio do fluido (veja [108]). Então

$$\mathbf{F} = \frac{T}{4\pi e} (\rho_2 + r_D^{-2} k_2 \sinh(\psi_2)) (\nabla \psi_2) I_{D \setminus \overline{K(t)}}, \quad (3.10)$$

usando a distribuição de Boltzmann para ρ^{ions} (veja Seção 2.2). É importante observar a dependência implícita de \mathbf{F} com o movimento.

Se $\bar{\mu}_p > 0$ é a densidade de massa da partícula e A sua matriz inercial (simétrica), então podemos escrever

$$\mathbf{y}^T A \mathbf{y} = \bar{\mu}_p \int_{K_0} |\mathbf{y} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(0))|^2 d\mathbf{x},$$

para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

De resultados bem conhecidos em mecânica Newtoniana para corpos rígidos e o tensor de tensões da dinâmica do fluido, se m é a massa da partícula, a lei de evolução para o movimento é dada por

$$m \frac{d\mathbf{u}_c(t)}{dt} = \int_{\partial K(t)} \sigma^H(\mathbf{x}, t) \cdot \nu(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}) + \int_{\partial K(t)} \sigma^E(\mathbf{x}, t) \cdot \nu(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x})$$

e

$$\begin{aligned} A \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} &= \int_{\partial K(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) \times (\sigma^H \cdot \nu)(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \times (A\mathbf{w}) + \\ &+ \int_{\partial K(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) \times (\sigma^E \cdot \nu)(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

onde $D(\mathbf{v}^f) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^t)$ e $\sigma^H(\mathbf{x}, t) = 2\eta D(\mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t)) - p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$ é o tensor de tensões do fluido; $\sigma^E(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) = \frac{Tk_2}{4\pi e} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\nabla \psi_2)^2 \right)$ é o tensor eletrostático (ver [108]).

Assumimos as seguintes hipóteses sobre os dados:

H5 : K_0 é um domínio Lipschitz e D é um domínio de classe C^2 ;

H6 : Seja $\tau > 0$ tal que (3.7) se verifica, então $\Psi \in H^1(\partial D) \cap C(\partial D)$, $\sigma(\cdot, t) \in L^2(\partial K(t))$, $\rho(\cdot, t) \in L^\infty(D)$, $\forall t \in [0, \tau]$.

Subseqüentemente, vamos impor hipóteses mais fortes sobre ρ e σ .

Observação 3.1. Considerando as hipóteses acima, o resultado de regularidade para ψ (a solução de (3.8)), estabelecido na Proposição 2.1 é válido, isto é

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) \in H^1(D), \quad \psi_1 \in H^{3/2}(K(t)), \quad \psi_2 \in H^{3/2}(D \setminus \overline{K(t)})$$

para todo $t \in [0, \tau]$. Relembrando a Observação 2.9, devido a esse resultado de regularidade, $\|\sinh(\psi_2)\|_{0,p,D \setminus \overline{K(t)}} < +\infty$, $\forall 1 \leq p < +\infty$. Pela imersão de Sobolev $H^{1/2}(D \setminus \overline{K(t)}) \subset L^3(D \setminus \overline{K(t)})$, a inequação de Hölder fornece

$$\int_{D \setminus \overline{K(t)}} \sinh^2(\psi_2) (\nabla \psi_2)^2 d\mathbf{x} \leq \|\sinh(\psi_2)\|_{0,6,D \setminus \overline{K(t)}}^2 \|\psi_2\|_{0,3,D \setminus \overline{K(t)}}^2 < +\infty.$$

Então $\mathbf{F} \in L^2(D)^3$, $\forall t \in [0, \tau]$. Um cálculo similar mostra-nos que $\sigma_{ij}^E \in L^{3/2}(D \setminus \overline{K(t)})$.

3.2 A noção de solução fraca

Seguindo [31], vamos definir as densidades eulerianas $\mu_p(\mathbf{x}, t) = \bar{\mu}_p I_{K(t)}(\mathbf{x})$, $\mu_f(\mathbf{x}, t) = \bar{\mu}_f I_{D \setminus \overline{K(t)}}(\mathbf{x})$ e a densidade global $\mu = \mu_p + \mu_f$. Também definimos a velocidade global em D como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)}, \\ \mathbf{v}^p(\mathbf{x}, t) & \text{if } \mathbf{x} \in K(t). \end{cases}$$

Em vista da conservação de massa, μ satisfaz a equação linear do transporte em D

$$\partial_t \mu + \operatorname{div}(\mu \mathbf{u}) = 0.$$

Requeremos que $\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^f$ e $\sigma^H \cdot \nu = \mathbf{T}$ em $\partial K(t)$, onde $-\mathbf{T}$ é a força aplicada pela partícula sobre o fluido. Podemos escrever $\mathbf{T} = \Sigma \cdot \nu$, onde Σ é o tensor de tensões de Cauchy no corpo.

Em ∂D , consideramos a condição de contorno de Dirichlet homogênea, isto é, $\mathbf{u}|_{\partial D} = 0$. Além do mais, a incompressibilidade do fluido, a rigidez da estrutura e $\mathbf{v}^p \cdot \nu = \mathbf{v}^f \cdot \nu$ implicam que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

As leis de evolução de momentum para o fluido e para a partícula são dadas por

$$\begin{aligned} \partial_t(\mu_f \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mu_f \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \frac{1}{\bar{\mu}_f} \operatorname{div}(\mu_f(2\eta D(\mathbf{u}) - pI)) + \\ &+ \frac{1}{\bar{\mu}_p} \Sigma \cdot \nabla \mu_p + \bar{\mu}_f \mathbf{F}, \quad \text{em } D \setminus \overline{K(t)} \\ \partial_t(\mu_p \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mu_p \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \frac{1}{\bar{\mu}_p} \operatorname{div}(\mu_p \Sigma) - \frac{1}{\bar{\mu}_p} \sigma^H \cdot \nabla \mu_p - \frac{1}{\bar{\mu}_p} \sigma^E \cdot \nabla \mu_p, \quad \text{em } K(t) \end{aligned}$$

respectivamente. Aqui $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t)$ é o tensor global de deformação.

Introduzindo o tensor global de tensões

$$\mathcal{T} = \frac{\mu_f \sigma^H}{\bar{\mu}_f} + \frac{\mu_p \Sigma}{\bar{\mu}_p},$$

obtemos o sistema global em $\mathcal{D}'((0, \tau) \times D)^3$,

$$\partial_t(\mu \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mu \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathcal{T} + \mu \mathbf{F}, \quad (3.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \partial_t \mu + \operatorname{div}(\mu \mathbf{u}) = 0, \quad \mu_p D(\mathbf{u}) = 0,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \mathbf{v}_0^f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K_0} \\ \mathbf{v}^p(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}(0) \times \mathbf{x} + \mathbf{u}_c(0), & \mathbf{x} \in K_0, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\mu_p(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mu}_p I_{K_0}(\mathbf{x}), \quad \mu_f(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mu}_f I_{D \setminus \overline{K_0}}(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

$$\mu(\mathbf{x}, 0) = \mu_0(\mathbf{x}) = \mu_p(\mathbf{x}, 0) + \mu_f(\mathbf{x}, 0) = \mu_{p,0}(\mathbf{x}) + \mu_{f,0}(\mathbf{x}).$$

Formalmente, o sistema acima satisfaz a estimativa *a priori* de energia

$$\int_D \frac{1}{2} \mu |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \eta \int_0^t \int_D |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} ds \leq \int_D \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int_D \mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} ds. \quad (3.14)$$

Então, se assumirmos que $\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(D))^3} \leq C'$ onde C' não depende de \mathbf{u} (como veremos, esse é o caso se $\delta(t) > d$, $\forall t \in [0, \tau)$) e que $\mathbf{u}_0 \in L^2(D)^3$, $\mu_0 \in L^\infty(D)$, juntamente com o fato de que $\mu \in L^\infty((0, \tau) \times D)$, podemos obter os limites *a priori*:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,\tau;H_0^1(D))^3} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(D))^3} &\leq C(\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(D)^3} + \tau^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(D))^3}) \\ &\leq C_1 + \tau^{1/2}C_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Em particular, isso implica que \mathbf{u}_c e \mathbf{w} são limitados em $L^\infty(0, \tau)$ e a transformação afim definida em (3.2) é Lipschitz no tempo.

A noção de solução fraca do sistema acima é dada abaixo, adaptada de [31]

Definição 3.1. (μ, \mathbf{u}) é uma solução fraca de (3.11)-(3.13) em $(0, \tau)$ se satisfaz os limites *a priori* de energia

$$\mu \in L^\infty((0, \tau) \times D), \quad \mathbf{u} \in L^\infty(0, \tau; L^2(D))^3 \cap L^2(0, \tau; H_0^1(D))^3,$$

Além disso, $\delta(t) > d$, $\forall t \in (0, \tau)$ e, para todo $\phi \in \mathcal{V}$ e para quase todo $t \in (0, \tau)$,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_D (\mu \mathbf{u} \cdot \partial_t \phi + \mu \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : D(\phi) - \eta D(\mathbf{u}) : D(\phi) + \mu \mathbf{F} \cdot \phi) d\mathbf{x} d\tau \\ &\quad + \int_D \mu_0 \mathbf{u}_0 \cdot \phi(0) d\mathbf{x} = \left(\int_D \mu \mathbf{u} \cdot \phi d\mathbf{x} \right) (t), \\ &\quad \partial_t \mu + \operatorname{div}(\mu \mathbf{u}) = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'((0, \tau) \times D)^3, \\ &\quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mu_p D(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial D} = 0, \\ &\quad \mu_0 \in L^\infty(D), \quad \mathbf{u}_0 \in L^2(D)^3, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde \mathcal{V} é definido por

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in H^1((0, \tau) \times D)^3 : \varphi(t) \in V(t), \forall t \in (0, \tau)\},$$

e

$$V(t) = \{\varphi \in H_0^1(D)^3 : \operatorname{div} \varphi = 0, \mu_p D(\varphi) = 0\}.$$

Nesta formulação, a pressão p e o tensor de tensões de Cauchy Σ do sólido não aparecem. Eles são os multiplicadores de Lagrange do problema com as funções teste como respectivas restrições.

Vamos estabelecer um teorema de existência local em tempo, baseado na prova do Teorema 2.1 em [32] (ver também o Teorema 3.1 em [31]). A estratégia da prova é baseada na solução de um sistema "aproximado", o qual fornece uma seqüência de soluções aproximantes $(\psi^n, \mu^n, \mathbf{u}^n)_{n \geq 0}$. A solução (ψ, μ, \mathbf{u}) é construída como um limite dessas aproximações; a existência desse limite é derivada de propriedades de compacidade da equação linear de transporte (ver [34]).

3.3 Existência de Soluções Aproximadas

Nessa seção descreveremos brevemente, os passos para a construção de soluções aproximadas para (3.16) acoplado com (3.8). A estratégia consiste em considerar as não linearidades envolvidas, especialmente as introduzidas pelo termo forçante \mathbf{F} e o conjunto \mathcal{V} . No caso de movimento de corpos rígidos num fluxo de Navier-Stokes e sob a ação de uma força externa conhecida, Desjardins e Esteban [31, 32] inicialmente resolveram um problema linear apropriado, através de um método do tipo Galerkin Lagrangiano; a seguir o teorema do ponto fixo de Schauder foi utilizado. A diferença substancial em nossa formulação é que necessitamos estabelecer propriedades adicionais sobre os potenciais relacionadas ao movimento rígido da partícula. Isso nos permite obter limites uniformes sobre o termo forçante \mathbf{F} , que depende não linearmente sobre o movimento.

Vamos assumir a hipótese de que K_0 é um domínio de classe $C^{1,1}$. Isso é essencial para a obtenção de soluções aproximadas, a partir de estimativas a priori para um problema estacionário de Stokes apropriado, como veremos a seguir.

De acordo com argumentos em [32], é possível demonstrar a existência de um homeomorfismo Θ do espaço de campos vetoriais incompressíveis

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, \tau; L^2(D))^3 \cap L^2(0, \tau; H_0^1(D))^3,$$

e os quais são movimentos rígidos em $K(t)$, no espaço de representação

$$Y_\tau = C^{0,1}([0, \tau]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \{\tilde{\mathbf{v}} \in L^2(0, \tau; H_0^1(D \setminus \overline{K_0}))^3 \cap L^\infty(0, \tau; L^2(D \setminus \overline{K_0}))^3 / \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0\},$$

considerado com a norma natural correspondente.

Para construir as soluções aproximantes, escolhemos $\tau > 0$ (subseqüentemente veremos que τ tem de satisfazer condições adicionais), $\epsilon > 0$ e $\mathbf{u}_0^\epsilon \in C^\infty(D)^3$ tal que $\operatorname{div} \mathbf{u}_0^\epsilon = 0$ em D , \mathbf{u}_0^ϵ converge a \mathbf{u}_0 em $L^2(D)^3$ e é um movimento rígido em K_0 . Vamos considerar também ϱ suficientemente pequeno com respeito a d . Para qualquer $\bar{\mathbf{v}} \in Y_\tau$ consideremos o campo incompressível $\mathbf{v} = \Theta(\bar{\mathbf{v}})$ em $L^\infty(0, \tau; L^2(D))^3 \cap L^2(0, \tau; H_0^1(D))^3$ e $\mathbf{v}^\epsilon = \mathcal{R}_\epsilon(\mathbf{v})$, onde \mathcal{R}_ϵ é um operador de regularização (ver discussão em [31, 78]), tal que $\mathcal{R}_\epsilon(\mathbf{v})$ é analítico em tempo e Lipschitz no espaço e $\mathcal{R}_\epsilon(\mathbf{v}^\epsilon)$ converge a \mathbf{v} em $L^2((0, \tau) \times D)^3$ se \mathbf{v}^ϵ converge a \mathbf{v} em $L^2((0, \tau) \times D)^3$.

Vamos assumir que

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(0, \tau; H_0^1(D))^3 \cap L^\infty(0, \tau; L^2(D))^3} \leq L \quad (3.17)$$

onde $C_1 \leq L \leq C'_1$, para alguma constante C'_1 , a qual, através de um cálculo simples, pode ser escolhida adequadamente de forma a termos $\frac{(L-C_1)^2}{C_2^2} \leq \frac{\delta(0)-d}{L}$. Aqui, as constantes C_1 (dependente de \mathbf{u}_0) e C_2 (dependente sobre a estimativa uniforme sobre $\|\mathbf{F}\|_{L^2(D)^3}$) foram definidas em (3.15). Consideramos $\tau < \frac{(L-C_1)^2}{C_2^2}$. Como conseqüência, $\delta(t) \geq \delta(0) - Lt > d$ para todo $t \in (0, \tau)$. Denotamos X_ϵ como sendo o fluxo Lagrangeano de \mathbf{v}^ϵ e colocamos $K^\epsilon(t) = \{X_\epsilon(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in K_0\}$.

Para cada $t \in (0, \tau)$, assumimos que podemos resolver (3.8) nos domínios $K^\epsilon(t)$ e $D \setminus \overline{K^\epsilon(t)}$ para densidades de carga ρ^ϵ e σ^ϵ , consideramos $\mathcal{R}_\epsilon(\mathbf{F}^\epsilon)$ e assumimos que $\|\mathcal{R}_\epsilon(\mathbf{F}^\epsilon)\|_{L^\infty(0, \tau; L^2(D))} \leq C'$. Estabeleceremos essas propriedades sobre os potenciais ainda nessa seção.

Desejamos resolver (3.16) com $\mu(\mathbf{x}, t)$ substituído por

$$\mu^\epsilon(t, \mathbf{x}) = \bar{\mu}_f + (1 - \bar{\mu}_f/\bar{\mu}_p)\mu_{p,0}(X_{S,\epsilon}^g(0, t, \mathbf{x})),$$

\mathbf{F} por $\mathcal{R}_\epsilon(\mathbf{F}^\epsilon)$, e substituindo o termo $\text{div}(\mu_p \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ por $\text{div}(\mu_p^\epsilon \mathbf{v}^\epsilon \otimes \mathbf{u})$. Aqui $X_{S,\epsilon}^g$ é o fluxo Lagrangeano do campo vetorial incompressível \mathbf{v}_S^g construído partindo-se de $(\mathbf{x}_c, \mathbf{w})$, como descrito em [32]. Definimos $\mathbb{F}^\epsilon = \nabla X_\epsilon$, tomamos $N \in \mathbb{N}^*$ (dependendo sobre ϵ e L) e $t_0 = \tau/N$ tais que

$$\sup_{0 \leq m \leq N} \sup_{t \in [mt_0, (m+1)t_0]} |I - \mathbb{F}_\epsilon(t, mt_0, \cdot)|_{L^\infty(D)} \leq 1/2 \quad (3.18)$$

(detalhes podem ser vistos em [33]). Definindo $\nabla_{\mathbf{v}^\epsilon} = \mathbb{F}_\epsilon^{-1} \circ \nabla$, para o primeiro passo $m = 0$, o seguinte problema em coordenadas Lagrangeanas

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_D (\mu_0 \mathbf{w}^\epsilon \cdot \partial_t \varphi - 2\eta D_{\mathbf{v}^\epsilon}(\mathbf{w}^\epsilon) : D_{\mathbf{v}^\epsilon}(\varphi) + \mu_0 \tilde{\mathbf{F}}^\epsilon \cdot \varphi) \, d\mathbf{x} \, ds + \\ & + \int_D \mu_0 \mathbf{u}_0^\epsilon \cdot \varphi(0) \, d\mathbf{x} = \left(\int_D \mu_0 \mathbf{w}^\epsilon \cdot \varphi \, d\mathbf{x} \right) (t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{V}^\epsilon = \{\varphi \in H^1((0, t_0) \times D)^3, \nabla_{\mathbf{v}^\epsilon} \cdot \varphi = 0, \varphi|_{\partial D} = 0, \mu_{p,0} D_{\mathbf{v}^\epsilon}(\varphi) = 0 \text{ em } (0, t_0) \times D\}$ e q.s. $t \in (0, t_0)$, tem uma solução $\mathbf{w}^\epsilon(t, \mathbf{x}) := \mathbf{u}^\epsilon(t, X_\epsilon(t, \mathbf{x}))$ tal que $\mathbf{w}^\epsilon \in L^\infty(0, t_0; L^2(D))^3 \cap L^2(0, t_0; H_0^1(D))^3$, $\nabla_{\mathbf{v}^\epsilon} \cdot \mathbf{w}^\epsilon = 0$ e $\mu_{p,0} D_{\mathbf{v}^\epsilon}(\mathbf{w}^\epsilon) = 0$, usando-se um procedimento padrão do tipo Galerkin e a desigualdade (3.18). Aqui $\tilde{\mathbf{F}}^\epsilon(\mathbf{x}, t) = \mathcal{R}_\epsilon(\mathbf{F}^\epsilon)(t, X_\epsilon(\mathbf{x}, t))$. É importante observar que (3.19) é um problema linear pois $\tilde{\mathbf{F}}^\epsilon(\mathbf{x}, t)$ é uma função conhecida.

Consideremos agora o conjunto

$$B = \{\bar{\mathbf{v}} \in Y_{t_0} / \|\bar{\mathbf{v}}\|_{Y_{t_0}} \leq L\}$$

e uma apropriada aplicação G^ϵ como àquela introduzida em [33, 32]. Para mostrar que esta aplicação tem um ponto fixo em B é necessário provar que G^ϵ aplica B nele mesmo e é um operador compacto (teorema do ponto fixo de Schauder). A primeira propriedade de G^ϵ segue se observarmos que a estimativa de energia (3.15) é válida para \mathbf{w}^ϵ e pela escolha de L em (3.17). A compacidade segue da propriedade de rigidez em K_0 e da imersão de Sobolev em $D \setminus \overline{K_0}$ se pudermos mostrar que $\partial_t \mathbf{w}^\epsilon$

é limitado em $L^2((0, t_0) \times D)^3$ e \mathbf{w}_ϵ é limitado em $L^2(0, t_0; H^2(D \setminus \overline{K_0}))^3$. Como demonstrado em [32],

$$\|\partial_t \mathbf{w}^\epsilon\|_{L^2((0, t_0) \times D)^3} \leq C(\|\mathbf{w}_0^\epsilon\|_{H^1(D)} + \|\tilde{\mathbf{F}}^\epsilon\|_{L^2((0, t_0) \times D)})$$

e

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \mathbf{w}^\epsilon\|_{L^2((0, t_0) \times D \setminus \overline{K_0})^3} + \|\mathbf{w}^\epsilon\|_{L^2(0, t_0; H^2(D \setminus \overline{K_0}))^3} + \|\mathbf{w}^\epsilon\|_{L^\infty(0, t_0; H^1(D \setminus \overline{K_0}))^3} + \\ & + \|q^\epsilon\|_{L^2(0, t_0; H^1(D \setminus \overline{K_0}))} \leq C_\epsilon(\|\tilde{\mathbf{F}}^\epsilon\|_{L^\infty(0, t_0; L^2(D))^3} + \|\partial_t \mathbf{w}^{rig, \epsilon}\|_{L^2(0, t_0; L^\infty(K_0))} + \|\mathbf{w}_0^\epsilon\|_{H_0^1(D)^3}). \end{aligned}$$

Dessa forma G^ϵ tem um ponto fixo em B . Isso completa o primeiro passo em $[0, t_0]$. Podemos prosseguir similarmente em $[mt_0, (m+1)t_0]$, porque a constante L e o número de passos $N = \tau/t_0$ dependem somente sobre d , ϵ , $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(D)^3}$ e $\|\mathbf{F}\|_{L^2(D)^3}$. Considerando uma expressão Euleriana em termos de $(\mu^\epsilon, \mathbf{u}^\epsilon)$ obtemos a seqüência de soluções aproximantes (3.16) acoplada com (3.8) dadas por $(\mu^\epsilon, \mathbf{u}^\epsilon, \psi^\epsilon)$.

Vamos provar agora a validade das propriedades para os potenciais descritas previamente. Mais precisamente, seja $\tau > 0$ arbitrário e o conjunto

$$Y_{\tau, d} = \{\bar{\mathbf{v}} \in Y_\tau; \delta_{\mathbf{v}}(t) > d, \forall t \in (0, \tau)\} \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{v} = \Theta(\bar{\mathbf{v}})$ e $\delta_{\mathbf{v}}(t) = \text{dist}(\partial K_{\mathbf{v}}(t), \partial D)$, $K_{\mathbf{v}}(t)$ é a posição da partícula associada ao campo $\bar{\mathbf{v}}$ (como definida em (3.3)), no tempo $t \in (0, \tau)$. Então se $\mathbf{F}_{\mathbf{v}}$ é definido como em (3.10), através da solução de (2.7) nos respectivos domínios associados a $\bar{\mathbf{v}}$, vamos mostrar que $\|\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\|_{L^\infty(0, \tau; L^2(D)^3)} \leq C$, onde $C > 0$ depende somente sobre d , Ψ , ∂K_0 , ∂D e sobre as distribuições de cargas em $t = 0$. Para mostrar essas propriedades, usaremos os resultados previamente obtidos para a solução ψ de (3.8) e também hipóteses adicionais sobre σ e ρ .

Como mencionado no início da seção a hipótese de que K_0 é de classe $C^{1,1}$ foi necessária para a construção de soluções aproximantes. Entretanto, como veremos, os resultados de limitação uniforme sobre \mathbf{F}^ϵ podem ser demonstrados assumindo-se que K_0 é simplesmente um domínio Lipschitz.

A seguir estabelecemos o primeiro limite sobre ψ derivado de (2.7)

Lema 3.1. *Assumimos as hipóteses **H5** e **H6**. Seja $\tau > 0$ tal que $\delta(t) > d$ (como definido em (3.7)), $\forall t \in (0, \tau)$. Então a solução $\psi \in H^1(D)$ de (2.7) pertence a $L^\infty(0, \tau; H^1(D))$ e $\|\psi\|_{L^\infty(0, \tau; H^1(D))} \leq C$, onde C depende somente de $\|\rho\|_{L^\infty((0, \tau) \times D)}$, $\|\hat{\sigma}\|_{L^\infty(0, \tau; L^2(\partial K(t)))}$, k_1 , k_2 , r_D^{-2} , D , ∂K_0 e $\hat{\Psi}$.*

Demonstração. Pela discussão na Seção 2.2 podemos escrever $\psi = \hat{\psi} + \hat{\Psi}$, onde $\hat{\psi}$ é solução de (2.7). Assim necessitamos provar o lema somente para $\hat{\psi}$. Usando (2.7) e a Observação 2.8 temos

$$\begin{aligned} & -k_1 \int_{K(t)} |\nabla \hat{\psi}|^2 d\mathbf{x} - k_2 \int_{D \setminus \overline{K(t)}} |\nabla \hat{\psi}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\partial K(t)} \hat{\sigma} \gamma_0 \hat{\psi} ds = \\ & = \int_D \rho \hat{\psi} d\mathbf{x} + k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} \sinh(\hat{\psi} + \hat{\Psi}) \hat{\psi} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \min(k_1, k_2) \int_D |\nabla \hat{\psi}|^2 d\mathbf{x} \leq \int_{\partial K(t)} \hat{\sigma} \gamma_0 \hat{\psi} ds - \int_D \rho \hat{\psi} d\mathbf{x} + \\ & -k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} \sinh(\hat{\psi} + \hat{\Psi})(\hat{\psi} + \hat{\Psi}) d\mathbf{x} + k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} \sinh(\hat{\psi} + \hat{\Psi}) \hat{\Psi} d\mathbf{x} \\ & \leq \frac{\|\rho\|_{0,2,D}^2}{2\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1 \|\hat{\psi}\|_{0,2,D}^2}{2} + \frac{\|\hat{\sigma}\|_{0,2,\partial K(t)}^2}{2\epsilon_2} + \frac{\epsilon_2 \|\gamma_0 \hat{\psi}\|_{0,2,\partial K(t)}^2}{2} + \\ & \quad + k_2 r_D^{-2} \|\hat{\Psi}\|_{\infty,D} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} |\sinh(\hat{\psi} + \hat{\Psi})| d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde usamos as desigualdades de Schwarz e Young. Agora, lembrando que $\hat{\psi}$ é o mínimo do funcional $F(\cdot)$ definido em (2.9) e (2.10), temos $F(\hat{\psi}) \leq F(0) = 0$. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} & k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} |\sinh(\hat{\psi} + \hat{\Psi})| d\mathbf{x} \leq k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} \cosh(\hat{\psi} + \hat{\Psi}) d\mathbf{x} \\ & \leq k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} \cosh(\hat{\Psi}) d\mathbf{x} + \int_{\partial K(t)} \hat{\sigma} \gamma_0 \hat{\psi} ds - \int_D \rho \hat{\psi} d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

e assim,

$$\begin{aligned} & \min(k_1, k_2) \int_D |\nabla \hat{\psi}|^2 d\mathbf{x} \leq \frac{\|\rho\|_{0,2,D}^2}{2\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1 \|\hat{\psi}\|_{0,2,D}^2}{2} + \frac{\|\hat{\sigma}\|_{0,2,\partial K(t)}^2}{2\epsilon_2} + \frac{\epsilon_2 \|\gamma_0 \hat{\psi}\|_{0,2,\partial K(t)}^2}{2} + \\ & + k_2 r_D^{-2} \|\hat{\Psi}\|_{\infty,D} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} \cosh(\hat{\Psi}) d\mathbf{x} + \frac{\|\hat{\Psi}\|_{\infty,D}^2 \|\hat{\sigma}\|_{0,2,\partial K(t)}^2}{2\epsilon_3} + \frac{\epsilon_3 \|\gamma_0 \hat{\psi}\|_{0,2,\partial K(t)}^2}{2} + \\ & + \frac{\|\hat{\Psi}\|_{\infty,D} \|\rho\|_{0,2,D}^2}{2\epsilon_4} + \frac{\epsilon_4 \|\hat{\psi}\|_{0,2,D}^2}{2}. \end{aligned}$$

Pelo teorema de traço e desigualdade de Poincaré existem constantes $\lambda_1 = \lambda_1(\partial K_0, D) > 0$ e $\lambda_2 = \lambda_2(D) > 0$ tais que $\|\gamma_0 \widehat{\psi}\|_{0,2,\partial K(t)} \leq \lambda_1 \|\widehat{\psi}\|_{1,2,D}$ e $\|\widehat{\psi}\|_{1,2,D} \leq \lambda_2 \|\nabla \widehat{\psi}\|_{0,2,D}$. Se escolhermos $0 < \epsilon < \min(k_1, k_2)/(2\lambda_1^2 \lambda_2^2)$, $\epsilon_1 = \epsilon_4 = \lambda_1^2 \epsilon$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon > 0$ teremos, para $C_1 = C_1(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2)$, $C_2 = C_2(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2)$,

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla \widehat{\psi}|^2 d\mathbf{x} &\leq C_1 (\|\rho\|_{0,2,D}^2 + \|\widehat{\sigma}\|_{0,2,\partial K(t)}^2) (1 + \|\widehat{\Psi}\|_{\infty,D}^2) + \\ &+ C_2 k_2 r_D^{-2} \|\widehat{\Psi}\|_{\infty,D} \int_{D \setminus K(t)} \cosh(\widehat{\Psi}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Finalmente, a desigualdade de Poincaré fornece

$$\begin{aligned} \|\widehat{\psi}\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(D))} &\leq C^* (|D|^{1/2} \|\rho\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(D))} + \|\widehat{\sigma}\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\partial K(t)))}) (1 + \|\widehat{\Psi}\|_{\infty,D}) + \\ &+ C^* \|\widehat{\Psi}\|_{\infty,D}^{1/2} \|\cosh(\widehat{\Psi})\|_{0,1,D}^{1/2}, \end{aligned}$$

onde $C^* = \max(\lambda_1 C_1^{1/2}, \lambda_1 C_2^{1/2} k_2^{1/2} r_D^{-1})$. Então

$$\|\psi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(D))} \leq C,$$

onde $C = C(C^*, \widehat{\Psi}, \|\rho\|_{L^\infty(0,\tau;L^\infty(D))}, \|\widehat{\sigma}\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(\partial K(t)))})$. \square

Seguindo a discussão na introdução do presente trabalho, vamos assumir hipóteses mais restritivas com relação às distribuições de cargas e sua interação com o campo elétrico e o movimento do fluido.

H7 : Consideremos $\tau > 0$ arbitrário e o conjunto $Y_{\tau,d}$ como definido em (3.20). Seja $\bar{\mathbf{v}} \in Y_{\tau,d}$, $\mathbf{v} = \Theta(\bar{\mathbf{v}})$. Denotamos $\rho_{\mathbf{v}} = -\frac{4\pi e}{\Lambda} \rho_{\mathbf{v}}^0$, onde $\rho_{\mathbf{v}}^0$ é uma distribuição de cargas fixas em D relacionada com as configurações $K_{\mathbf{v}}(t)$ da partícula. Assumimos que $\rho_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}(t, 0, \mathbf{x}), t) = \rho(\mathbf{x}, 0)$, $\forall t \in [0, \tau]$ e $\forall \mathbf{x} \in D$, onde $X_{\mathbf{v}}$ é o fluxo Lagrangeano associado a \mathbf{v} .

H8 : Para todo $t \in [0, \tau]$, $\sigma_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}(t, 0, \mathbf{x}), t) = \sigma(\mathbf{x}, 0)$, $\forall \mathbf{x} \in \partial K_0$.

O seguinte teorema é central para estabelecer um limite uniforme para

$\mathbf{F}_{\mathbf{v}}$

Teorema 3.1. *Assumimos as hipóteses H5-H8. Então a solução $\psi_{\mathbf{v}}$ de (3.8) relacionada com $(K_{\mathbf{v}}(t), \rho_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}})$, onde $\mathbf{v} = \Theta(\bar{\mathbf{v}})$ com $\bar{\mathbf{v}} \in Y_{\tau,d}$, satisfaz*

$$\max(\|\psi_{\mathbf{v},1}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(K_{\mathbf{v}}(t)))}, \|\psi_{\mathbf{v},2}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}))}) \leq C,$$

onde C depende somente sobre Ψ , d , ∂K_0 , ∂D e sobre as distribuições de cargas em $t = 0$.

Demonstração. Necessitamos somente obter os limites para $\widehat{\psi}_{\mathbf{v}} = (\widehat{\psi}_{\mathbf{v},1}, \widehat{\psi}_{\mathbf{v},2})$, onde $\widehat{\psi}_{\mathbf{v}}$ é a solução de (2.7) relacionada a $(K_{\mathbf{v}}(t), \rho_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}})$. Para isso, consideramos os problemas auxiliares

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) \nabla v_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D, \\ v_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) &= v_{\mathbf{v},1}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t), \\ v_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$k_2 \partial_\nu v_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) - k_1 \partial_\nu v_{\mathbf{v},1}(\mathbf{x}, t) = -\widehat{\sigma}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t),$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) \nabla f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) - b(\mathbf{x}, f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + v_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \widehat{\Psi}(\mathbf{x})) &= \\ &= \rho_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D, \\ f_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) &= f_{\mathbf{v},1}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t), \\ f_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$k_1 \partial_\nu f_{\mathbf{v},1}(\mathbf{x}, t) - k_2 \partial_\nu f_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t).$$

Usando uma formulação variacional análoga àquela em (2.7) obtemos soluções (fracas) $v_{\mathbf{v}}, f_{\mathbf{v}} \in H_0^1(D)$ para os problemas (3.22) e (3.23), respectivamente. Observamos que um cálculo simples mostra que $f_{\mathbf{v}} + v_{\mathbf{v}}$ satisfaz (2.7), da unicidade da solução variacional para esse problema, temos $\widehat{\psi}_{\mathbf{v}} = f_{\mathbf{v}} + v_{\mathbf{v}}$.

O Teorema segue dos lemas abaixo.

Lema 3.2. *Assumindo as hipóteses do Teorema 3.1, a solução $v_{\mathbf{v}} \in H_0^1(D)$ de (3.22) tem a regularidade adicional $v_{\mathbf{v},1} \in H^{3/2}(K_{\mathbf{v}}(t))$, $v_{\mathbf{v},2} \in H^{3/2}(D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)})$, para*

cada $t \in [0, \tau]$. Além do mais

$$\max(\|v_{\mathbf{v},1}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(K_{\mathbf{v}}(t)))}, \|v_{\mathbf{v},2}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}))}) \leq C,$$

onde C depende somente sobre $\sigma(\mathbf{x}, 0)$, ∂K_0 , ∂D e d .

Lema 3.3. *Considerando as hipóteses do Teorema 3.1, a solução $f_{\mathbf{v}} \in H_0^1(D)$ de (3.23) pertence a $C^0(\overline{D})$. Além disso, $f_{\mathbf{v},1} \in H^{3/2}(K_{\mathbf{v}}(t))$, $f_{\mathbf{v},2} \in H^{3/2}(D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)})$ e existe $C > 0$ tal que*

$$\max(\|f_{\mathbf{v},1}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(K_{\mathbf{v}}(t)))}, \|f_{\mathbf{v},2}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}))}) \leq C,$$

onde C depende somente sobre Ψ , ∂K_0 , ∂D , d , $\sigma(\mathbf{x}, 0)$, $\rho(\mathbf{x}, 0)$ e da norma $\|\psi\|_{L^\infty(0,\tau;H_0^1(D))}$.

□

Demonstração do Lemma 3.2. Primeiro consideramos, como na demonstração da Proposição 2.1, $\widehat{v}_{\mathbf{v}} = (\widehat{v}_{\mathbf{v},1}, \widehat{v}_{\mathbf{v},2})$ a solução do problema auxiliar

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{v}_{1,\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in K, \\ \Delta \widehat{v}_{2,\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K}, \\ \mu_2 \widehat{v}_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) &= \mu_1 \widehat{v}_{\mathbf{v},1}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t), \\ \widehat{v}_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\partial_\nu \widehat{v}_{\mathbf{v},2}(\mathbf{x}, t) - \partial_\nu \widehat{v}_{\mathbf{v},1}(\mathbf{x}, t) = -\widehat{\sigma}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t),$$

onde $\mu_2 = k_2^{-1}$ e $\mu_1 = k_1^{-1}$. Seguindo a demonstração do Lema 2.2, procuramos soluções do problema acima na forma

$$\begin{aligned} \widehat{v}_{\mathbf{v},1} &= D_{\mathbf{v}} \zeta_{\mathbf{v}} + \mu_1 \mathcal{S}_{\mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{v}} \\ \widehat{v}_{\mathbf{v},2} &= D_{\mathbf{v}} \zeta_{\mathbf{v}} + \mu_2 \mathcal{S}_{\mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{v}} + D_{\mathbf{v},0} \chi_{\mathbf{v}}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

para $\zeta_{\mathbf{v}} \in H^1(\partial K_{\mathbf{v}}(t))$, $\varphi_{\mathbf{v}} \in L^2(\partial K_{\mathbf{v}}(t))$ e $\chi_{\mathbf{v}} \in H^1(\partial D)$. Aqui

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{\mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{v}})(\mathbf{x}, t) &= \int_{\partial K_{\mathbf{v}}(t)} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}), \\ (D_{\mathbf{v}} \zeta_{\mathbf{v}})(\mathbf{x}, t) &= \int_{\partial K_{\mathbf{v}}(t)} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} \zeta_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}), \\ (D_{\mathbf{v},0} \chi_{\mathbf{v}})(\mathbf{x}, t) &= \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} \chi_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $G(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi|\mathbf{x}|}$. As condições de fronteira em (3.24) nos indicam que as densidades $(\zeta_{\mathbf{v}}, \varphi_{\mathbf{v}}, \chi_{\mathbf{v}})$ devem satisfazer um sistema similar a (2.21), ou seja, devemos ter a seguinte igualdade

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\widehat{\sigma}_{\mathbf{v}} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\mathbf{v}} \begin{bmatrix} \zeta_{\mathbf{v}} \\ \varphi_{\mathbf{v}} \\ \chi_{\mathbf{v}} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{A}_{\mathbf{v}} = \mathcal{J}_{\mathbf{v}} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ para

$$\mathcal{J}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mu_2(-\frac{1}{2}I + \mathbb{D}_{\mathbf{v}}) - \mu_1(\frac{1}{2}I + \mathbb{D}_{\mathbf{v}}) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2(\frac{1}{2}I + \mathbb{D}_{\mathbf{v}}^*) - \mu_1(-\frac{1}{2}I + \mathbb{D}_{\mathbf{v}}^*) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2}I + \mathbb{D}_{\mathbf{v},0}) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & (\mu_2^2 - \mu_1^2)\mathcal{S}_{\mathbf{v}} & \mu_2 T_{\mathbf{v},2} \\ 0 & 0 & T_{\mathbf{v},1} \\ T_{\mathbf{v},3} & \mu_2 T_{\mathbf{v},4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui,

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}_{\mathbf{v}}\zeta_{\mathbf{v}})(\mathbf{x}) &= \text{p.v.}(D_{\mathbf{v}}\zeta_{\mathbf{v}})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t) \\ (\mathbb{D}_{\mathbf{v},0}\chi_{\mathbf{v}})(\mathbf{x}) &= \text{p.v.}(D_{\mathbf{v},0}\chi_{\mathbf{v}})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D \\ (\mathbb{D}_{\mathbf{v}}^*\varphi_{\mathbf{v}})(\mathbf{x}) &= \text{p. v.} \left(\int_{\partial K_{\mathbf{v}}(t)} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{x})} \varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right), \quad \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t) \end{aligned} \tag{3.27}$$

e

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v},1}\chi_{\mathbf{v}} &= \gamma_e^{(1)}(\partial_{\nu} D_{\mathbf{v},0}\chi_{\mathbf{v}}), \\ T_{\mathbf{v},2}\chi_{\mathbf{v}} &= \gamma_e^{(1)}(D_{\mathbf{v},0}\chi_{\mathbf{v}}), \\ T_{\mathbf{v},3}\zeta_{\mathbf{v}} &= \gamma_i^{(2)}(D_{\mathbf{v}}\zeta_{\mathbf{v}}), \\ T_{\mathbf{v},4}\varphi_{\mathbf{v}} &= \gamma_i^{(2)}(\mathcal{S}_{\mathbf{v}}\varphi_{\mathbf{v}}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Os resultados de limitação e traço apresentados em (2.17) e em (2.18) permanecem válidos no contexto aqui apresentados, desde que, por (3.7),

$$\forall t \in [0, \tau], \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq d,$$

$\forall \mathbf{x} \in \partial K_{\mathbf{v}}(t), \forall \mathbf{y} \in \partial D$. Logo, lembrando a Observação 2.10, $\mathbf{A}_{\mathbf{v}}^{-1}$ existe e é um operador limitado em

$$X_{\mathbf{v}} = H^1(\partial K_{\mathbf{v}}(t)) \times L^2(\partial K_{\mathbf{v}}(t)) \times H^1(\partial D)$$

a $X_{\mathbf{v}}$. A norma $\|\mathbf{A}_{\mathbf{v}}^{-1}\|$ depende somente de d , K_0 e D . Então

$$\left\| \begin{array}{c} \zeta_{\mathbf{v}} \\ \varphi_{\mathbf{v}} \\ \chi_{\mathbf{v}} \end{array} \right\|_{X_{\mathbf{v}}} \leq \|\mathbf{A}_{\mathbf{v}}^{-1}\| \|\widehat{\sigma}_{\mathbf{v}}\|_{0,2,\partial K_{\mathbf{v}}(t)} \leq C \|\mathbf{A}_{\mathbf{v}}^{-1}\|$$

onde $X_{\mathbf{v}}$ é equipado com a norma produto usual e usamos a definição de $\widehat{\sigma}_{\mathbf{v}}$ e a hipótese **H8**.

Novamente, usando a Observação 2.10, a norma dos operadores em (3.26) e seus apropriados inversos dependem somente da característica Lipschitz dos domínios envolvidos, logo há $L_1 = L_1(\partial K_0) > 0$, $L_2 = L_2(\partial D, \partial K_0) > 0$, tais que

$$\begin{aligned} \|\widehat{v}_{\mathbf{v},1}\|_{3/2,2,K_{\mathbf{v}}(t)} &\leq L_1 \max(\|\zeta_{\mathbf{v}}\|_{1,2,\partial K_{\mathbf{v}}(t)}, \|\varphi_{\mathbf{v}}\|_{0,2,\partial K_{\mathbf{v}}(t)}) \\ \|\widehat{v}_{\mathbf{v},2}\|_{3/2,2,D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}} &\leq L_2 \max(\|\zeta_{\mathbf{v}}\|_{1,2,\partial K_{\mathbf{v}}(t)}, \|\varphi_{\mathbf{v}}\|_{0,2,\partial K_{\mathbf{v}}(t)}, \|\chi_{\mathbf{v}}\|_{1,2,\partial D}). \end{aligned}$$

Utilizando a representação para v como na Proposição 2.1, estabelecemos que

$$\max(\|v_{\mathbf{v},1}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(K_{\mathbf{v}}(t)))}, \|v_{\mathbf{v},2}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t))})}) \leq C.$$

□

Demonstração do Lema 3.3. A solução variacional $f_{\mathbf{v}}$ de (3.23) satisfaz

$$\begin{aligned} &-k_1 \int_{K_{\mathbf{v}}(t)} \nabla \widehat{\psi}_{\mathbf{v}} \cdot \nabla f_{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - k_2 \int_{D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}} \nabla \widehat{\psi}_{\mathbf{v}} \cdot \nabla f_{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = \\ &= \int_D \rho_{\mathbf{v}} \widehat{\psi}_{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}} \sinh(\widehat{\psi}_{\mathbf{v}} + \widehat{\Psi}) \widehat{\psi}_{\mathbf{v}} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Então, usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} &\frac{k_1}{2} \int_{K_{\mathbf{v}}(t)} |\nabla f_{\mathbf{v}}|^2 d\mathbf{x} + \frac{k_2}{2} \int_{D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}} |\nabla f_{\mathbf{v}}|^2 d\mathbf{x} \leq - \int_D \rho_{\mathbf{v}} \widehat{\psi}_{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \\ &- k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}} \sinh(\widehat{\psi}_{\mathbf{v}} + \widehat{\Psi}) \widehat{\psi}_{\mathbf{v}} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Usando um cálculo similar ao do Lemma 3.1, o limite estabelecido lá para $\|\widehat{\psi}_{\mathbf{v}}\|_{1,2,D}$ e hipótese **H7**, temos $\|f_{\mathbf{v}}\|_{1,2,D} \leq C$, onde C não depende sobre $Y_{\tau,d}$.

Como na demonstração da Proposição 2.1, se colocarmos

$$h_{\mathbf{v}} = b(\mathbf{x}, f_{\mathbf{v}} + v_{\mathbf{v}} + \widehat{\Psi}) + \rho_{\mathbf{v}}$$

teremos $h_{\mathbf{v}} \in L^2(D)$, como é fácil checar. Estendemos $h_{\mathbf{v}}$ a ser zero em D^c e colocamos $g_{\mathbf{v}} = -G * h_{\mathbf{v}}$; temos então $\Delta g_{\mathbf{v}} = h_{\mathbf{v}}$ q. s. em D e $g_{\mathbf{v}} \in H^2(D)$; se $g_{\mathbf{v},1} = g_{\mathbf{v}}|_{K_{\mathbf{v}}(t)}$, $g_{\mathbf{v},2} = g_{\mathbf{v}}|_{D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}}$, temos $g_{\mathbf{v},1}|_{\partial K_{\mathbf{v}}(t)} \in H^1(\partial K_{\mathbf{v}}(t))$, $g_{\mathbf{v},2}|_{\partial D} \in H^1(\partial D)$, enquanto que $\partial_{\nu} g_{\mathbf{v},1} - \partial_{\nu} g_{\mathbf{v},2} = 0$ em $\partial K_{\mathbf{v}}(t)$. Portanto a solução $f_{\mathbf{v}}$ de (3.23) admite a representação

$$(\widehat{f}_{\mathbf{v},1}, \widehat{f}_{\mathbf{v},2})^t = (g_{\mathbf{v},1}, g_{\mathbf{v},2})^t + \mathcal{H}_{\mathbf{v}} \mathbf{A}_{\mathbf{v}}^{-1} \begin{bmatrix} g_{\mathbf{v},1}|_{\partial K(t)} \\ 0 \\ g_{\mathbf{v},2}|_{\partial D} \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} D_{\mathbf{v}} & \mu_1 S_{\mathbf{v}} & 0 \\ D_{\mathbf{v}} & \mu_2 S_{\mathbf{v}} & D_{\mathbf{v},0} \end{bmatrix}$$

e $\widehat{f}_{\mathbf{v},1} = k_1 f_{\mathbf{v},1}$, $\widehat{f}_{\mathbf{v},2} = k_2 f_{\mathbf{v},2}$. Os operadores em $\mathcal{H}_{\mathbf{v}}$ e $\mathbf{A}_{\mathbf{v}}$ foram definidos no Lema 3.2. A estimativa uniforme na norma $H^{3/2}$ segue de uma maneira similar ao Lema 3.2 se obtermos limites uniformes na norma $H^{3/2}$ para $g_{\mathbf{v}}$, bem como limites na norma H^1 para $g_{\mathbf{v},1}|_{\partial K(t)}$, $g_{\mathbf{v},2}|_{\partial D}$. Da imersão contínua $H^2(D) \subset H^{3/2}(D)$ e pela limitação do operador $F : L^2(D) \rightarrow H^2(D)$, onde $F h_{\mathbf{v},1} = -G * h_{\mathbf{v}} = g_{\mathbf{v}}$ (ver a prova do Teorema 9.9 em [47]) temos os limites

$$\|g_{\mathbf{v}}\|_{3/2,2,D} \leq \lambda (\|b_{\mathbf{v}}\|_{0,2,D} + \|\rho_{\mathbf{v}}\|_{0,2,D})$$

onde λ depende somente de D e $b_{\mathbf{v}} = b(\mathbf{x}, f_{\mathbf{v}} + v_{\mathbf{v}} + \widehat{\Psi})$. Um cálculo direto e a estimativa acima dá-nos

$$\|g_{\mathbf{v},1}\|_{1,2,\partial K(t)} \leq \lambda' \|\rho_{\mathbf{v}}\|_{0,2,D}$$

$$\|g_{\mathbf{v},2}\|_{1,2,\partial D} \leq \lambda'' (\|b_{\mathbf{v}}\|_{0,2,D} + \|\rho_{\mathbf{v}}\|_{0,2,D})$$

onde $\lambda' = \lambda'(K_0, \lambda)$, $\lambda'' = \lambda''(D, \lambda)$. Portanto, devido a **H7**, necessitamos somente obter uma estimativa uniforme para

$$\|b_{\mathbf{v}}\|_{0,2,D} = \|I_{D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}} k_2 r_D^{-2} \sinh(f_{\mathbf{v}} + v_{\mathbf{v}} + \widehat{\Psi})\|_{0,2,D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}}.$$

Para isso, observamos que

$$\sinh(f_{\mathbf{v}} + v_{\mathbf{v}} + \widehat{\Psi}) = \sinh(f_{\mathbf{v}}) \cosh(\widehat{\Psi} + v_{\mathbf{v}}) + \cosh(f_{\mathbf{v}}) \sinh(v_{\mathbf{v}} + \widehat{\Psi}).$$

O resultado que desejamos segue se pudermos demonstrar estimativas uniformes sobre $f_{\mathbf{v}}$ já que $\Psi \in L^\infty(D)$ e a estimativa

$$\|\cosh(v_{\mathbf{v},2})\|_{0,p,D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}} \leq C \exp(C \|v_{\mathbf{v},2}\|_{3/2,2,D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}}) \leq C, \quad (3.29)$$

pode ser obtida usando-se um cálculo similar como àquele da Observação 2.9, juntamente com o Lema 3.2. A constante C pode ser determinada uniformemente, usando-se o fato de que $\delta_{\mathbf{v}} \geq d$. De fato, como observado em [111], $C_1 = \frac{1+O(r_C^3)}{|C|} O(|D|)$, onde C é o cone fixo determinado pelas propriedades Lipschitz de ∂D e ∂K_0 , r_C é o diâmetro de C .

Observando que D é um domínio de classe C^2 , estimativas elípticas tradicionais (ver Capítulo 14, Teorema 2.1 em [75]) mostram que $f_{\mathbf{v}} \in C(\overline{D})$. Relembrando que, $\forall \bar{\mathbf{v}} \in Y_{\tau,d}$, $\|f_{\mathbf{v}}\|_{1,2,D} \leq C$, então $f_{\mathbf{v}} \in S$, onde $S = \{f \in H_0^1 \cap C(\overline{D}); \|f\|_{1,2,D} \leq C\}$. Afirmamos que $\exists C^* = \sup_{f \in S} \|f\|_{C(\overline{D})} < +\infty$. De fato, caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n \in S$ tal que $\|f_n\|_{C(\overline{D})} > n$. Como $f_n \in C(\overline{D})$, então $\exists \mathbf{x}_n \in \overline{D}$ tal que $|f_n(\mathbf{x}_n)| = \sup_{\mathbf{x} \in \overline{D}} |f_n(\mathbf{x})|$. Dessa forma, dado $0 < \epsilon < 1$ existe $\delta_n > 0$ tal que $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_n; \delta_n) \subset D$, $|f_n(\mathbf{x})| > (n - \epsilon)$. Como consequência,

$$C^2 \geq \int_D |f_n|^2 d\mathbf{x} > C'(n-1)^2 \delta_n^3.$$

Como essa desigualdade é válida para cada n , devemos ter $\delta_n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow +\infty$. Mas claramente isso implica que $\|\nabla f_n\|_{0,2,D} \rightarrow +\infty$, contradizendo o fato de que $f_n \in S$. \square

Corolário 3.1. $\|\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(D))} \leq C$, onde C depende somente dos dados do problema eletrostático no tempo $t = 0$, de ∂K_0 e de ∂D .

3.4 Convergência para as soluções aproximadas

Seja (μ^m, \mathbf{u}^m) uma seqüência de soluções aproximadas como obtidas previamente. Os limites de energia estabelecidos para (μ^m, \mathbf{u}^m) , baseados nas esti-

mativas uniformes sobre os potenciais, habilita-nos a garantir a existência de uma subsequência (μ^m, \mathbf{u}^m) convergindo fracamente a algum (μ, \mathbf{u}) . Como estabelecido em μ^m converge fortemente a μ em $C([0, \tau]; L^p(D))$ para todo $p < \infty$, e em L^∞ fracamente* [31] e [32], , como uma conseqüência dos resultados de Lions [78]. Além disso, \mathbf{u}^m converge fortemente a \mathbf{u} em $L^2((0, \tau) \times D)^3$. Entretanto, não é óbvio que (3.16) verifica-se para $(\mathbf{u}, \mu, \mathbf{F})$ para todo $\varphi \in \mathcal{V}$ dado, onde \mathbf{F} é o termo forçante (3.10) relacionado a ψ , a solução de (2.4) para as posições do sólido e distribuições de cargas relativas à \mathbf{u} . Isso é estabelecido no argumento especial da Seção 4 em [31] se pudermos mostrar que $\int_0^t \int_D (\varphi^{(m)} \cdot \mathbf{F}^{(m)} - \varphi \cdot \mathbf{F}) \, d\mathbf{x} ds \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, para todo $t \in (0, \tau)$.

Lema 3.4. *Assumimos as hipóteses H5 a H8 e consideramos $\psi^{(m)}$, ψ soluções de (2.4) relacionadas a $(K^{(m)}(t), \rho^{(m)}, \sigma^{(m)})$ e $(K(t), \rho, \sigma)$, respectivamente. Então, $\|\psi^{(m)} - \psi\|_{1,2,D} \rightarrow 0$, com $m \rightarrow +\infty$, para cada $t \in [0, \tau]$.*

Demonstração. Colocamos $\eta_m = \psi^{(m)} - \psi$. A formulação variacional (2.7) para $\psi, \psi^{(m)}$ nos dá

$$\begin{aligned} & -k_1 \int_{K^{(m)}(t)} \nabla \widehat{\psi}^{(m)} \cdot \nabla \eta_m \, d\mathbf{x} - k_2 \int_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \nabla \widehat{\psi}^{(m)} \cdot \nabla \eta_m \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K^{(m)}(t)} \widehat{\sigma}^{(m)} \gamma_0 \eta_m \, ds = \\ & = \int_D \rho_m \eta_m \, d\mathbf{x} + k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \sinh(\widehat{\psi}^{(m)} + \widehat{\Psi}) \eta_m \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & -k_1 \int_{K(t)} \nabla \widehat{\psi} \cdot \nabla \eta_m \, d\mathbf{x} - k_2 \int_{D \setminus \overline{K(t)}} \nabla \widehat{\psi} \cdot \nabla \eta_m \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K(t)} \widehat{\sigma} \gamma_0 \eta_m \, ds = \\ & = \int_D \rho \eta_m \, d\mathbf{x} + k_2 r_D^{-2} \int_{D \setminus \overline{K(t)}} \sinh(\widehat{\psi} + \widehat{\Psi}) \eta_m \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Se definirmos

$$\begin{aligned} A^{(m)}(t) &= K^{(m)}(t) \cap K(t), \\ B^{(m)}(t) &= D \setminus \overline{(K(t) \cup K^{(m)}(t))}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

obtemos, depois de subtrair as expressões acima,

$$\begin{aligned}
& -k_1 \int_{A^{(m)}(t)} |\nabla \eta_m|^2 d\mathbf{x} - k_2 \int_{B^{(m)}(t)} |\nabla \eta_m|^2 d\mathbf{x} + \int_{\partial K^{(m)}(t)} \widehat{\sigma}^{(m)} \gamma_0 \eta_m ds - \int_{\partial K(t)} \widehat{\sigma} \gamma_0 \eta_m ds = \\
& = \int_D (\rho^{(m)} - \rho) \eta_m d\mathbf{x} + k_2 r_D^{-2} \int_{B^{(m)}(t)} 2 \cosh \left(\frac{\eta_m}{2} + \widehat{\psi} + \widehat{\Psi} \right) \sinh \left(\frac{\eta_m}{2} \right) \eta_m d\mathbf{x} + \\
& - k_1 \int_{K(t) \setminus A^{(m)}(t)} |\nabla \widehat{\psi}| |\nabla \eta_m| d\mathbf{x} - k_2 \int_{K^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)} |\nabla \widehat{\psi}| |\nabla \eta_m| d\mathbf{x} + \\
& + k_1 \int_{K^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)} |\nabla \widehat{\psi}^{(m)}| |\nabla \eta_m| d\mathbf{x} + k_2 \int_{K(t) \setminus A^{(m)}(t)} |\nabla \widehat{\psi}^{(m)}| |\nabla \eta_m| d\mathbf{x} + \\
& - k_2 r_D^{-2} \int_{K^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)} \sinh(\widehat{\psi} + \widehat{\Psi}) \eta_m d\mathbf{x} + k_2 r_D^{-2} \int_{K(t) \setminus A^{(m)}(t)} \sinh(\psi^{(m)} + \widehat{\Psi}) \eta_m d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Young e Hölder e a positividade da segunda integral do lado direito da expressão acima, nós temos

$$\begin{aligned}
& k_1 \int_{A^{(m)}(t)} |\nabla \eta_m|^2 d\mathbf{x} + k_2 \int_{B^{(m)}(t)} |\nabla \eta_m|^2 d\mathbf{x} \leq \\
& \left| \int_{\partial K^{(m)}(t)} \widehat{\sigma}^{(m)} \gamma_0 \eta_m ds - \int_{\partial K(t)} \widehat{\sigma} \gamma_0 \eta_m ds \right| + \|\rho^{(m)} - \rho\|_{0,2,D} \|\eta_m\|_{0,2,D} + \\
& + k_1 |K(t) \setminus A^{(m)}(t)|^{1/6} \|\nabla \widehat{\psi}\|_{0,3,K(t)} \|\nabla \eta_m\|_{0,2,K(t)} + \\
& + k_2 |K^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)|^{1/6} \|\nabla \widehat{\psi}\|_{0,3,K^{(m)}(t)} \|\nabla \eta_m\|_{0,2,K^{(m)}(t)} + \\
& + k_1 |K^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)|^{1/6} \|\nabla \widehat{\psi}^{(m)}\|_{0,3,K^{(m)}(t)} \|\nabla \eta_m\|_{0,2,K^{(m)}(t)} + \\
& + k_2 |K(t) \setminus A^{(m)}(t)|^{1/6} \|\nabla \widehat{\psi}^{(m)}\|_{0,3,K(t)} \|\nabla \eta_m\|_{0,2,K(t)} + \\
& + k_2 r_D^{-2} |K^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)|^{1/4} \|\sinh(\widehat{\psi} + \widehat{\Psi})\|_{0,2,B^{(m)}(t)} \|\eta_m\|_{0,4,B^{(m)}(t)} + \\
& + k_2 r_D^{-2} |K(t) \setminus A_m(t)|^{1/4} \|\sinh(\widehat{\psi}^{(m)} + \widehat{\Psi})\|_{0,2,B_m(t)} \|\eta_m\|_{0,4,B_m(t)}.
\end{aligned}$$

Agora, seguindo uma estimativa demonstrada em [31], obtemos

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \in (0, \tau)} (|M^{(m)}(t) - M(t)| + |\dot{M}^{(m)}(t) - \dot{M}(t)|) \\
& \leq C_\tau |\mu_p^{(m)} \mathbf{u}^{(m)} - \mu_p \mathbf{u}|_{L^\infty(0, \tau; L^2(D))}^3 \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

com $m \rightarrow +\infty$, desde que $\mu_p^{(m)} \mathbf{u}^{(m)}$ converge a $\mu_p \mathbf{u}$ em $C([0, \tau]; L^2(D))^3$. Portanto $|K^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)|, |K(t) \setminus A^{(m)}(t)| \rightarrow 0, m \rightarrow +\infty, \forall t \in (0, \tau)$.

Pelo Teorema 3.1 e pela imersão de Sobolev $H^{1/2}(K^{(m)}(t)) \subset L^3(K^{(m)}(t))$ obtemos a estimativa

$$\|\nabla \widehat{\psi}_1^{(m)}\|_{0,3,K^{(m)}(t)} \leq C \|\nabla \widehat{\psi}_1^{(m)}\|_{1/2,2,K^{(m)}(t)} \leq C \|\widehat{\psi}_1^{(m)}\|_{3/2,2,K^{(m)}(t)} \leq C,$$

onde C não depende de m .

Similarmente, usando a imersão de Sobolev $H^1(D) \subset L^4(D)$, Lema 3.1 e hipóteses **H7** e **H8** vemos que limites uniformes para $\|\eta_m\|_{0,2,D}$, $\|\eta_m\|_{0,4,D}$ podem ser obtidos. Além disso $\|\rho^{(m)} - \rho\|_{0,2,D} \rightarrow 0$, como é fácil checar. Pelo Teorema 3.1 e argumentos similares como em (3.29) temos que

$$\|\sinh(\widehat{\psi}^{(m)} + \widehat{\Psi})\|_{0,2,B^{(m)}(t)} \leq C \exp(C\|\widehat{\psi}^{(m)}\|_{3/2,2,D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}}) \leq C,$$

onde C não depende de m .

Usando a rigidez da partícula temos

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K^{(m)}(t)} \widehat{\sigma}^{(m)} \gamma_0 \eta_m ds - \int_{\partial K(t)} \widehat{\sigma} \gamma_0 \eta_m ds = \\ & = \int_{\partial K_0} \widehat{\sigma}^{(m)}(M^{(m)}(t)\mathbf{y}) \gamma_0 (\eta_m(M^{(m)}(t)\mathbf{y}) - \eta_m(M(t)\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) + \\ & + \int_{\partial K_0} \gamma_0 \eta_m(M(t)\mathbf{y}) (\widehat{\sigma}^{(m)}(M^{(m)}(t)\mathbf{y}) - \widehat{\sigma}(M(t)\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, introduzimos, para cada m , a C_0^∞ -regularização usual $\{\eta_m^{(h)}\}$ para η_m tal que $\|\eta_m^{(h)} - \eta_m\|_{1,2,D} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Observando que, para h fixo,

$$\|\gamma_0 \eta_m^{(h)}(M^{(m)}(t)\mathbf{y}) - \gamma_0 \eta_m^{(h)}(M(t)\mathbf{y})\|_{0,2,\partial K_0} \rightarrow 0$$

com $m \rightarrow +\infty$, a primeira integral em (3.32) tende a zero com $m \rightarrow +\infty$, como pode ser visto usando o teorema usual de traço juntamente com **H8** e (3.31). Analogamente, o mesmo resultado é válido para a segunda integral em (3.32) se relembrarmos que

$$\widehat{\sigma} = -\frac{4\pi e}{T} \sigma + \left(k_1 \partial_\nu \widehat{\Psi}_1 - k_2 \partial_\nu \widehat{\Psi}_2 \right)$$

e da hipótese **H8**. Para demonstrarmos a convergência do termo envolvendo $\widehat{\Psi}$, recordamos da Observação 2.8, onde afirmamos que $(k_1 \partial_\nu \widehat{\Psi}_1 - k_2 \partial_\nu \widehat{\Psi}_2) \in L^2(\partial K_0)$. Isso segue pelo fato de que é possível escrever $\widehat{\Psi} = \Lambda - \Upsilon$, onde Υ é uma função harmônica em D que coincide com Ψ em ∂D e $\Lambda \in H_0^1(D)$ satisfaz $\nabla \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{x}) \nabla \Lambda(\mathbf{x})) = -\nabla \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{x}) \nabla \Upsilon(\mathbf{x}))$. Conforme demonstrado em [28] (Capítulo VII, §2, Seção 4), $(k_1 \partial_\nu \Lambda_1 - k_2 \partial_\nu \Lambda_2) = 0$; além disso, usando o Lema 3.7 em [24],

$$\|(k_1 \partial_\nu \Upsilon_1 - k_2 \partial_\nu \Upsilon_2)\|_{0,2,\partial K_0} \leq C \|\Upsilon\|_{1,2,D},$$

onde $C = C(D)$. Dessa forma, o resultado segue da mesma forma que para $\eta^{(m)}$. \square

Teorema 3.2. *Vamos considerar $\varphi^{(m)} \in H^1((0, \tau) \times D)^3$ tais que $\varphi^{(m)} \rightarrow \varphi$ fortemente em $C([0, \tau]; L^2(D))^3$ e $\varphi \in H^1((0, \tau) \times D)^3$. Então*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_D \mathbf{F}^{(m)} \cdot \varphi^{(m)} d\mathbf{x} ds = \int_0^t \int_D \mathbf{F} \cdot \varphi d\mathbf{x} ds,$$

para todo $t \in (0, \tau)$.

Demonstração. Relembrando que $\mathbf{F}^{(m)} = \frac{T}{4\pi e} (\rho_2^{(m)} + r_D^{-2} k_2 \sinh(\psi_2^{(m)})) (\nabla \psi_2^{(m)}) I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(m)} \cdot \varphi_m - \mathbf{F} \cdot \varphi &= C_1 (\varphi^{(m)} - \varphi) \cdot I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \nabla \psi^{(m)} \sinh(\psi^{(m)}) + \\ &+ C_1 \varphi \cdot (I_{D \setminus \overline{K(t)}} \nabla \psi \sinh(\psi) - I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \nabla \psi^{(m)} \sinh(\psi^{(m)})) + \\ &+ C_2 (\varphi^{(m)} - \varphi) \cdot I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \rho^{(m)} \nabla \psi^{(m)} \\ &+ C_2 \varphi \cdot (I_{D \setminus \overline{K(t)}} \rho \nabla \psi - I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \rho^{(m)} \nabla \psi^{(m)}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde $C_1 = \frac{k_2 r_D^{-2} T}{4\pi e}$ e $C_2 = \frac{T}{4\pi e}$.

No que segue iremos estimar a integral de cada termo acima.

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_D I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} (\varphi_m - \varphi) \cdot \nabla \psi^{(m)} \sinh(\psi^{(m)}) d\mathbf{x} d\tau \leq \\ &\leq \|\varphi^{(m)} - \varphi\|_{C([0, \tau]; L^2(D))^3} \int_0^t \|\nabla \psi^{(m)}\|_{0,3, D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \|\sinh(\psi^{(m)})\|_{0,6, D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} d\tau \\ &\leq C \|\varphi^{(m)} - \varphi\|_{C([0, \tau]; L^2(D))^3} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

com $m \rightarrow +\infty$. Aqui nós temos usado a desigualdade de Hölder, as imersões $H^{1/2} \subset L^3$ e $H^{1/2} \subset H^{3/2}$, Teorema 3.1 juntamente com uma estimativa similar como em (3.29).

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_D \varphi \cdot (I_{D \setminus \overline{K(t)}} \nabla \psi \sinh(\psi) - I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \nabla \psi^{(m)} \sinh(\psi^{(m)})) d\mathbf{x} d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \left[\int_{B^{(m)}(t)} |\varphi \cdot (\nabla \psi \sinh(\psi) - \nabla \psi^{(m)} \sinh(\psi^{(m)}))| d\mathbf{x} + \right. \\ &+ \int_{K^{(m)}(t) \setminus K(t)} |\varphi \cdot (\nabla \psi) \sinh(\psi)| d\mathbf{x} + \\ &\left. + \int_{K(t) \setminus K^{(m)}(t)} |\varphi \cdot (\nabla \psi^{(m)}) \sinh(\psi^{(m)})| d\mathbf{x} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} \nabla\psi \sinh(\psi) - \nabla\psi^{(m)} \sinh(\psi^{(m)}) &= \sinh(\psi)(\nabla\psi - \nabla\psi^{(m)}) + \\ &+ \nabla\psi^{(m)}(\sinh(\psi) - \sinh(\psi^{(m)})) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{B^{(m)}(t)} \varphi \cdot (\nabla\psi \sinh(\psi) - \nabla\psi^{(m)} \sinh(\psi^{(m)})) d\mathbf{x} d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \|\sinh(\psi)\|_{0,4,B^{(m)}(t)} \|\varphi\|_{0,4,B^{(m)}(t)} \|\nabla\psi - \nabla\psi^{(m)}\|_{0,2,B^{(m)}(t)} d\tau + \quad (3.35) \\ &+ \int_0^t \|\varphi\|_{0,6,B^{(m)}(t)} \|\nabla\psi^{(m)}\|_{0,3,B^{(m)}(t)} \|\sinh(\psi) - \sinh(\psi^{(m)})\|_{0,2,B^{(m)}(t)} d\tau. \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de que $1 \leq \cosh(a + \theta(b - a)) \leq \max\{\cosh(a), \cosh(b)\}$

temos, pela inequação de Schwarz

$$\begin{aligned} &\|\sinh(\psi) - \sinh(\psi^{(m)})\|_{0,2,B^{(m)}(t)}^2 = \\ &= \int_{B^{(m)}(t)} \left(\int_0^1 \cosh(\psi^{(m)} + \theta(\psi - \psi^{(m)})) (\psi - \psi^{(m)}) d\theta \right)^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{B^{(m)}(t)} \int_0^1 (\psi - \psi^{(m)})^2 \cosh^2(\psi^{(m)} + \theta(\psi - \psi^{(m)})) d\theta d\mathbf{x} \\ &\leq C \|\psi - \psi^{(m)}\|_{0,4,D}^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde usamos uma estimativa similar a (3.29), Teorema 3.1 e Lema 3.4. Portanto usando o teorema da convergência dominada, Teorema 3.1 e Lema 3.4 vemos que os termos em (3.35) tendem a zero com $m \rightarrow +\infty$. Passando os termos em (3.34) ao limite $m \rightarrow +\infty$, usando (3.31) e Teorema 3.1 nós obtemos o resultado desejado para o segundo termo em (3.33). A convergência dos outros termos em (3.33) a zero segue de uma maneira completamente similar, usando **H7** e **H8**, Teorema 3.1 e Lema 3.4. \square

Demonstramos então o seguinte teorema de existência local (em tempo) para soluções fracas de (3.16) acoplado a (3.8)

Teorema 3.3. *Seja $d > 0$ fixado. Considerando as hipóteses **H5** a **H8** e as hipóteses adicionais de que K_0 é um domínio de classe $C^{1,1}$, $\mathbf{u}_0 \in L^2(D)^3$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$,*

$\mu_{p,0}D(\mathbf{u}_0) = 0$ e $\delta(0) > d$, existe $\tau^* \in (0, +\infty]$ e uma solução (μ, \mathbf{u}) de (3.16) tais que $\mathbf{u} \in L^2(0, \tau; H_0^1(D))^3 \cap L^\infty(0, \tau; L^2(D))^3$, $\mu \in L^\infty((0, \tau) \times D)$ para todo $\tau < \tau^*$. Além disso, $\tau^* = \inf\{t > 0; \delta(t) = d\}$.

4 TEORIA DE EXISTÊNCIA PARA O MOVIMENTO HIDROELÉTRICO: A VELOCIDADE DE DESLIZAMENTO

Nesse capítulo vamos tratar da modelagem e análise do movimento eletroforético de uma única partícula carregada, através do modelo que leva em consideração a existência da velocidade de deslizamento (1.4). Como já afirmado na introdução do presente trabalho, essa é uma aproximação para a ação do campo elétrico no sistema, onde se admite que sua ação se dá na interface partícula/líquido, produzindo um processo difusivo de íons que dá origem ao movimento da partícula.

Essa aproximação somente tem sentido físico quando as partículas consideradas têm raio de curvatura muito maior do que a camada de separação de Debye (a distribuição superficial de cargas e o espaço difuso de cargas no líquido adjunto) e movendo-se num fluido viscoso estacionário [103, 100]. Isso exclui, por exemplo, eletroforese de proteínas, onde as superfícies de acessibilidade são extremamente complexas [22]. Do ponto de vista matemático isso se manifesta na dificuldade de se definir (1.4) quando se considera o caso em que o domínio ocupado pela partícula é Lipschitz, ou mesmo, de classe C^1 . Nesse sentido, usando os resultados de regularidade sobre os potenciais demonstrados na Subseção 2.3.2, mostramos no Lema 4.1, no caso de domínios $C^{1,1}$, que a velocidade de deslizamento é bem definida. É importante observar que a hipótese de que $K(t)$ é um domínio de classe $C^{1,1}$ garante a existência do raio principal de curvatura da superfície [95].

Nosso objetivo é introduzir uma formulação matemática apropriada para o problema e extrair resultados de existência de soluções fracas e fortes. No primeiro caso, como uma consequência de adaptações dos resultados sobre o movimento de corpos rígidos em fluxos incompressíveis. Usando as mesmas técnicas discutidas no capítulo anterior, a solução é obtida como o limite de soluções aproximadas, juntamente com propriedades de compacidade derivadas da equação linear do transporte. Para aplicar esses resultados consideramos um campo de ve-

tores incompressível, que coincide com a velocidade de deslizamento na fronteira da partícula. Assumimos, para isso, a hipótese de que K_0 é de classe $C^{2+\alpha}$ (para algum $1/2 < \alpha < 1$) e hipóteses adicionais sobre as cargas, levando-nos a um resultado de $H^{3/2}$ -regularidade para \mathbf{v}_s , como pode ser visto no Lema 4.2. Com isso, as equações de Stokes são reformuladas e um termo forçante em L^2 dependendo dos potenciais é introduzido (ver (4.6)). Através da definição de um sistema global eletro-mecânico análogo àquele introduzido no Capítulo 3, obtemos a existência de uma seqüência de soluções aproximadas, derivada de propriedades de limitação sobre os potenciais, demonstradas no Teorema 4.1. A compacidade das soluções aproximadas é obtida como uma conseqüência de propriedades de convergência para uma seqüência adequada de termos forçantes, como pode ser visto no Teorema 4.2. A derivação das descritas acima propriedades segue por meio da representação integral envolvendo o termo forçante na forma de potenciais hidrodinâmicos e o uso de uma seqüência de resultados técnicos auxiliares (Lemas 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 e Corolário 4.1). Resultados de convergência para uma seqüência de potenciais aproximantes são obtidos usando a representação integral de soluções da equação de Poisson-Boltzmann na forma de potenciais de camada simples e dupla. Como conseqüência, é estabelecida a existência local de soluções fracas para o sistema eletro-hidrodinâmico, conforme pode ser visto no Teorema 4.3. Novamente aqui supomos hipóteses adequadas sobre a distribuição de cargas.

Na Seção 4.3, estudamos a existência de soluções fortes para as equações dinâmicas. Nesse caso, consideramos domínios de classe $C^{1,1}$ e impomos uma hipótese adequada sobre os potenciais para usar resultados padrões de equações diferenciais ordinárias. Essa hipótese é relacionada a propriedades Lipschitz dos potenciais e dá-nos um resultado de existência local, como pode ser visto no Teorema 4.4. Ainda na Seção 4.3, tratamos a situação onde a região exterior à partícula é considerada como uma região infinita e propriedades de simetria sobre os campos de velocidade são disponíveis. Nesse caso, usamos a formulação tensorial de Teubner [108] e uma estimativa a priori para o problema de Stokes em regiões exteriores [71]. Como no caso do estudo de soluções fortes em domínios limitados, uma hipótese

adequada sobre os potenciais é considerada para obter no Teorema 4.5 uma condição Lipschitz sobre a força e o torque sobre a partícula. Disso, um resultado de existência local de soluções fortes é obtido (ver Corolário 4.2). Em ambos os casos: domínios limitados e não-limitados, suspeitamos que a existência de soluções fortes é garantida enquanto a partícula não colide com a fronteira exterior, mas isso não é provado aqui (ver [54] para um problema relacionado).

4.1 Campo Elétrico e Interação com o Fluido

Vamos considerar, como no Capítulo 3, uma partícula rígida carregada imersa numa solução eletrolítica sob a ação de um campo elétrico. A eletrostática do sistema é governada pela equação de Poisson-Boltzmann (3.8).

A interação do campo elétrico com o fluido produz o movimento da partícula, um fenômeno que será descrito ainda nessa seção. Similarmente à discussão no Capítulo 3, a dinâmica do movimento é caracterizado por (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6).

Como observado na introdução desse capítulo, estamos considerando um modelo em que, se \mathbf{v} é o campo de velocidades do solvente, $|\mathbf{v}| \ll 1$. Isso significa que os termos inerciais podem ser ignorados e que \mathbf{v} tem variação suave; logo, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ é ignorado; $\mathbf{u}_c(t)$ e $\mathbf{w}(t)$ são pequenos e, portanto, os efeitos de radiação também podem ser ignorados.

Novamente, fixamos $d > 0$ e escolhemos $\tau > 0$ (formalmente) tal que (3.7) é satisfeito.

Como conseqüência, para descrever a interação fluido-campo elétrico consideramos (3.8) acoplado com as equações de Stokes

$$\begin{aligned}\eta\Delta\mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) &= \nabla p(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)} \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)} \\ \mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D \\ \mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}^p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Aqui η é a viscosidade do fluido e

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t) = \frac{k_2 T}{4\pi\eta e} \psi_2(\mathbf{x}, t) \nabla_{tan} \psi_2(\mathbf{x}, t)\tag{4.2}$$

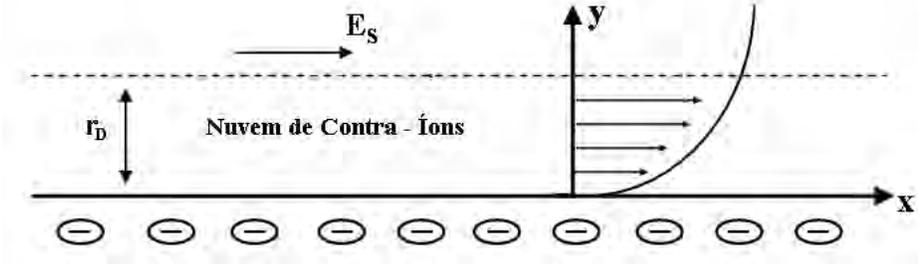
é a velocidade de deslizamento descrita na introdução desse trabalho, uma condição não linear no potencial elétrico. O subscrito *tan* indica a componente tangencial de $\nabla\psi_2$ quando restrita a $\partial K(t)$. Então, estamos assumindo que $\mathbf{v}^f|_{tan} = \mathbf{v}_s$. A condição (4.2) aparece como decorrente da teoria de camada limite de Prandtl: uma nuvem de íons envolve a partícula, dando origem a um efeito de separação. Na literatura ϕ_2 é determinado pelo potencial zeta, já discutido na introdução do presente trabalho. Abaixo, fornecemos a derivação heurística dessa condição a qual usa análise de camada limite [7, 77]. Como já observado, a derivação que será apresentada abaixo só tem sentido quando consideramos o raio de curvatura da partícula muito maior do que o raio de Debye [100].

A carga fixa sobre a superfície é balanceada por uma nuvem difusa de cargas próxima a ∂K com densidade $\rho(y)$, que iguala a diferença entre as concentrações de contra-íons e co-íons; $\mathbf{E}^s = -\nabla\phi_2|_{tan}$ é o campo elétrico na região exterior da dupla camada; sua direção define o eixo x . Esse campo age sobre o espaço de cargas para produzir uma força de corpo sobre o fluido igual a $\rho\mathbf{E}^s$ (ver Figura 4.1). A componente x da equação de Stokes é

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \rho \mathbf{E}^s = 0.$$

O gradiente de pressão paralelo a superfície é negligenciável. A densidade de cargas é relacionada ao potencial eletrostático $\phi_2(y)$, na dupla camada, pela relação de Poisson $\rho = -\frac{k_2}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2}$. A escala de comprimento para a dupla camada é o comprimento

Figura 4.1:



de Debye r_D . Combinando as expressões acima nós obtemos

$$v_x = \frac{k_2}{4\pi\eta} [\phi_2(y) - \zeta] \mathbf{E}^s,$$

onde ζ é o chamado potencial zeta, o qual é igual a ϕ_2 em $y = 0$. Uma condição de contorno de não deslizamento, $v_x = 0$ em $y = 0$, é usada para derivar a expressão acima, e o gradiente de velocidade em $y \rightarrow \infty$ foi colocado igual a zero. A velocidade de deslizamento é definida como o valor de v_x no limite exterior à região interna

$$v_s = \lim_{y \rightarrow \infty} v_x = -\frac{k_2\zeta}{4\pi\eta} \mathbf{E}^s,$$

o qual nos dá a expressão (4.2).

Evidentemente, é importante ver que essa condição é, de fato, bem definida. Isso depende sobre os resultados de regularidade para ψ e condições restritivas sobre os dados do problema (3.8). Mais precisamente, utilizando os resultados obtidos na Seção 2.3 obtemos o seguinte lema

Lema 4.1. *Assumindo que as hipóteses **H3** e **H4** com $1/2 < \alpha < 1$ são válidas para todo $t \in [0, \tau]$, a velocidade de deslizamento \mathbf{v}_s definida em (4.2) é tal que $\mathbf{v}_s \in H^{1/2}(\partial K(t))^3$, $\forall t \in [0, \tau]$.*

Demonstração. A Proposição 2.2 mostra que $\mathbf{v}_s = C\psi_2\nabla_{tan}\psi_2 \in C^\alpha(\partial K(t))^3$, para todo $t \in [0, \tau]$, como é fácil checar. Relembramos que podemos definir uma norma para $H^{1/2}(\partial K(t))$ como

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial K(t))} = \left(\int_{\partial K(t)} \int_{\partial K(t)} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} ds(\mathbf{x}) ds(\mathbf{y}) \right)^{1/2} + \|u\|_{L^2(\partial K(t))}$$

(ver Capítulo II, Seção 3 em [46]). Colocamos $\mathbf{v}_s = (v_{s,1}, v_{s,2}, v_{s,3})$; portanto, para cada $i = 1, 2, 3$,

$$\int_{\partial K(t)} \int_{\partial K(t)} \frac{|v_{s,i}(\mathbf{x}) - v_{s,i}(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} ds(\mathbf{x}) ds(\mathbf{y}) \leq C \int_{\partial K(t)} \int_{\partial K(t)} \frac{ds(\mathbf{x}) ds(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{3-2\alpha}} < +\infty, \quad (4.3)$$

onde usamos o fato de que $0 < 3 - 2\alpha < 2$. \square

Assumindo hipóteses adicionais sobre os dados, podemos obter maior regularidade de \mathbf{v}_s , como pode ser visto no lema abaixo

Lema 4.2. *Sejam $1/2 < \alpha < 1$, K_0 e D domínios de classe $C^{2+\alpha}$ e $\forall t \in [0, \tau]$, $\sigma \in C^{1+\alpha}(\partial K(t))$, $\Psi \in C^{1+\alpha}(\partial D)$ e $\rho \in C^\alpha(\overline{D})$, então $\mathbf{v}_s \in H^{3/2}(\partial K(t))^3$, $\forall t \in [0, \tau]$.*

Demonstração. Inicialmente observamos que $\gamma_1^{(i)}\psi_1 = \gamma_1^{(e)}\psi_2$ implica que

$$\nabla_{\tan}\psi_1|_{\partial K(t)} = \nabla_{\tan}\psi_2|_{\partial K(t)}$$

(ver Definição 1.9 em [114]). Portanto, basta demonstramos o resultado para ψ_1 . De acordo com as hipóteses, podemos usar a Proposição 2.1 para obter a representação $\psi_1 = k_1^{-1}v_1$, onde v_1 é representado na forma (2.15) com densidades

$$(\zeta, \varphi, \chi) \in C^{1+\alpha}(\partial K(t)) \times C^\alpha(\partial K(t)) \times C^{1+\alpha}(\partial K(t))$$

satisfazendo o sistema (2.21). Utilizando o fato de que ∂D e $\partial K(t)$ são domínios de classe $C^{2+\alpha}$ os problemas (2.28) e (2.29) têm soluções $w_1 \in C^{2+\alpha}(\overline{K(t)})$ e $w_2 \in C^{2+\alpha}(\overline{D \setminus K(t)})$ (Teorema 6.14 em [47]).

Com isso, usando o fato que $\sigma \in C^{1+\alpha}(\partial K(t))$, pode-se observar que $g_1 \in C^{1+\alpha}(\partial K(t))$, onde $g_1 = -\frac{4\pi e}{T}\sigma + \partial_\nu w_1 - \partial_\nu w_2$. Como observado em [72], $(\mathbb{D}^*\varphi) \in C^{1+\alpha}(\partial K(t))$, então $\varphi \in C^{1+\alpha}(\partial K(t))$, usando a segunda equação em (2.21).

Um argumento similar a (4.3) utilizando a definição da norma em $H^{3/2}(\partial K(t))$ (Capítulo II, Seção 3.8 em [90]) nos mostra que $(\zeta, \varphi, \chi) \in H^{3/2}(\partial K(t))^3$.

De acordo com [29] (Capítulo XI, § 2, Observações 1 e 6) os operadores

$$\begin{aligned} S &: H^{3/2}(\partial K(t)) \rightarrow H^{5/2}(\partial K(t)), \\ \mathbb{D} &: H^{s+1/2}(\partial K(t)) \rightarrow H^{s+3/2}(\partial K(t)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$s = 1, 2$, são contínuos. Usando a primeira equação de (2.21) e (4.4), observamos que $\zeta \in H^{5/2}(\partial K(t))$. Então, por (2.18), isso implica que $\gamma_1^{(i)}\psi_1 \in H^{5/2}(\partial K(t))$ e por consequência, $\nabla_{tan}\psi_1|_{\partial K(t)} \in H^{3/2}(\partial K(t))^3$. Utilizando resultado padrões de imersões de Sobolev, localização e partições de unidade (ver Corolário 1.1 em [48]) é possível demonstrar que $\psi_1\nabla_{tan}\psi_1 \in H^{3/2}(K(t))^3$ e, para cada $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \|\gamma_1^{(i)}\psi_1(\nabla_{tan}\psi_1)_i\|_{H^{3/2}(\partial K(t))} &\leq C\|\gamma_1^{(i)}\psi_1\|_{H^{3/2}(\partial K(t))}\|(\nabla_{tan}\psi_1)_i\|_{H^{3/2}(\partial K(t))} \\ &\leq C\|\gamma_1^{(i)}\psi_1\|_{H^{3/2}(\partial K(t))}\|\gamma_1^{(i)}\psi_1\|_{H^{5/2}(\partial K(t))} \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde o sub-índice i indica cada componente do vetor $\nabla_{tan}\psi_1$ e $C = C(K_0)$. \square

4.2 Formulação Fraca e Existência de Soluções Aproximadas

Uma formulação fraca para o problema do acoplamento hidro-elétrico considerando-se o modelo proposto nesse capítulo pode ser introduzida nos moldes daquela discutida no capítulo anterior. Da mesma forma, é possível a obtenção de um resultado de existência local em tempo de soluções fracas adaptadas a esse problema. Para aplicarmos os resultados de existência demonstrados em [31], consideramos um problema auxiliar relacionado à (4.1), onde um termo forçante é introduzido, depois de um procedimento de extensão de \mathbf{v}_s à região $D \setminus \overline{K(t)}$. Este termo forçante pertence a $L^2(D \setminus \overline{K(t)} \times (0, \tau))^3$ se $\mathbf{v}_s \in H^{3/2}(\partial K(t))^3, \forall t \in (0, \tau)$, como veremos abaixo.

Relembrando os resultados do Lema 4.2 e as observações feitas na introdução desse capítulo, vamos assumir as seguintes hipóteses sobre os dados

H9: D e K_0 são domínios de classe $C^{2+\alpha}$, $1/2 < \alpha < 1$.

H10: Para todo $\tau > 0$ tal que (3.7) se verifica, $\sigma(\cdot, t) \in C^{1+\alpha}(\partial K(t))$, $\rho(\cdot, t) \in C^\alpha(\overline{D})$, $\text{supp } \rho \subset\subset K(t)$, $\Psi \in C^{1+\alpha}(\partial D)$.

É importante lembrar também que estamos considerando partículas tais que $\varrho \gg r_D$, onde ϱ é o seu raio de curvatura. Consideremos (3.8) acoplado com (4.1); por um resultado bem conhecido de Cattabriga [17], é possível encontrar um campo de vetores livre de divergência $\mathbf{V} \in H^2(D \setminus \overline{K(t)})^3$ tal que $\mathbf{V}|_{\partial K(t)} = \mathbf{v}_s$, $\mathbf{V}|_{\partial D} = \mathbf{0}$ (ver detalhes na prova do Teorema 4.2). Dessa forma, podemos reformular (4.1) definindo $\widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^f - \mathbf{V}$,

$$\begin{aligned} -\eta \Delta \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= \eta \Delta \widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) - \nabla p(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)}, \\ \widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}^p(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \partial K(t), \\ \text{div } \widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)}, \\ \widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial D. \end{aligned} \tag{4.6}$$

A seguir, usaremos a notação introduzida no Capítulo 3: $\bar{\mu}_f > 0$, $\bar{\mu}_p > 0$ representam as densidades de massa do fluido e da partícula, respectivamente e m é a massa da partícula. A lei de evolução para o movimento é dada por

$$m \frac{d\mathbf{u}_c(t)}{dt} = \int_{\partial K(t)} \sigma^H(\mathbf{x}, t) \cdot \nu(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x})$$

e

$$A \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = \int_{\partial K(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) \times (\sigma^H(\mathbf{x}, t) \cdot \nu(\mathbf{x}, t)) ds(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \times (A\mathbf{w}).$$

Aqui A é a matriz inercial da partícula e $\sigma^H(\mathbf{x}, t) = 2\eta D(\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) - p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$ é o tensor de tensões do fluido; $D(\widehat{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}(\nabla \widehat{\mathbf{v}} + (\nabla \widehat{\mathbf{v}})^t)$ é o tensor de deformação. Consideramos μ como sendo a densidade global introduzida no Capítulo 3, bem como a velocidade global em D

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{v}^p(\mathbf{x}, t) & \text{if } \mathbf{x} \in K(t), \\ \widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)}. \end{cases}$$

Relembramos que, em vista da conservação de massa, μ satisfaz a equação linear de transporte em D , $\partial_t \mu + \text{div}(\mu \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Seguindo a discussão do

Capítulo 3, as leis de evolução de momentum para o fluido e para a partícula são dadas agora por

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\bar{\mu}_f} \operatorname{div}(\mu_f(2\eta D(\mathbf{u}) - pI)) + \frac{1}{\bar{\mu}_p} \Sigma \cdot \nabla \mu_p + \eta \frac{\mu_f}{\bar{\mu}_f} \Delta \mathbf{V} \\ \partial_t(\mu_p \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mu_p \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \frac{1}{\bar{\mu}_p} \operatorname{div}(\mu_p \Sigma) - \frac{1}{\bar{\mu}_p} \sigma^H \cdot \nabla \mu_p, \end{aligned}$$

respectivamente. Aqui $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t)$ é o tensor global de deformação. Introduzindo o tensor de tensões global

$$\mathcal{T} = \frac{\mu_f \sigma^H}{\bar{\mu}_f} + \frac{\mu_p \Sigma}{\bar{\mu}_p},$$

obtemos o sistema global em $\mathcal{D}'((0, \tau) \times D)^3$,

$$\begin{aligned} \partial_t(\mu_p \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mu_p \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \operatorname{div} \mathcal{T} + \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \partial_t \mu + \operatorname{div}(\mu \mathbf{u}) &= 0, \quad \mu_p D(\mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, 0), & \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K_0} \\ \mathbf{v}^p(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}(0) \times \mathbf{x} + \mathbf{u}_c(0), & \mathbf{x} \in K_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathbf{x}, 0) &= \bar{\mu}_p I_{K_0}(\mathbf{x}), \quad \mu_f(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mu}_f I_{D \setminus \overline{K_0}}(\mathbf{x}) \\ \mu(\mathbf{x}, 0) &= \mu_0(\mathbf{x}) = \mu_p(\mathbf{x}, 0) + \mu_f(\mathbf{x}, 0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aqui,

$$\mathbf{F} = \eta \frac{\mu_f}{\bar{\mu}_f} \Delta \mathbf{V} \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{V} \in H^2(D)^3$ é o campo vetorial incompressível, que coincide com \mathbf{v}_s em $\partial K(t)$ e tal que $\mathbf{V}|_{\partial D} = 0$, como descrito previamente.

Formalmente, temos a seguinte estimativa de energia

$$\int_D \frac{1}{2} \mu_p |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \eta \int_0^t \int_D |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} d\tau \leq \int_D \frac{1}{2} \mu_{p,0} |\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} ds,$$

$\forall t \in (0, \tau)$. Então, se assumirmos que $\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(0, \tau; L^2(D))^3} \leq C$ onde C não depende sobre \mathbf{u} , $\mathbf{u}_0 \in L^2(D)^3$ e $\mu_0 \in L^\infty(D)$, temos as estimativas *a priori* $\mu \in L^\infty((0, \tau) \times D)$, $\mathbf{u} \in L^2(0, \tau; H_0^1(D))^3$, $\sqrt{\mu_p} \mathbf{u} \in L^\infty(0, \tau; L^2(D))^3$. Em particular, o último limite implica que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, \tau; L^2(K(t)))^3$, pela definição de μ_p . Então \mathbf{u}_c e \mathbf{w} são limitados

em $L^\infty(0, \tau)$ e a transformação afim definida por $K(t) = M(t)K_0$ é Lipschitz no tempo.

Formalmente podemos usar o fato de que \mathbf{u} satisfaz o problema de Stokes (4.6) na região ocupada pelo fluido. Estimativas clássicas *a priori* [17] dão-nos que, para todo $t \in (0, \tau)$

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(D \setminus \overline{K(t)})^3} + \|p\|_{L^2(D \setminus \overline{K(t)})} \leq C_t (\|\mathbf{F}\|_{L^2(D)^3} + \|\mathbf{u}\|_{H^{1/2}(\partial K(t))^3}), \quad (4.11)$$

onde C_t depende somente sobre propriedades geométricas de $D \setminus \overline{K(t)}$. Conforme discussão em [46] (Capítulos III e IV), C_t não é singular $\forall t \in [0, \tau]$, já que estamos assumindo $\delta(t) \geq d$ para esses valores de t . Dessa forma, é possível se obter (4.11) uniformemente (não dependendo sobre \mathbf{u}) usando também a regularidade Lipschitz de $(\mathbf{u}_c, \mathbf{w})$, conforme demonstrado em [54], Lema A2. Essa estimativa uniforme, juntamente com a rigidez de \mathbf{u} dá-nos o limite $\mathbf{u} \in L^\infty(0, \tau; H_0^1(D))^3$.

A definição de solução fraca para o sistema acima, com modificações óbvias com relação àquela definida em (3.16), é dada abaixo:

Definição 4.1. *O par (μ, \mathbf{u}) é uma solução fraca de (3.11)-(3.13) in $(0, \tau)$ acoplado com (2.4) se satisfaz a estimativa a priori*

$$\mu \in L^\infty((0, \tau) \times D), \quad \mathbf{u} \in L^\infty(0, \tau; H_0^1(D))^3,$$

e se para todo $\varphi \in \mathcal{V}$ e para quase todo $t \in (0, \tau)$,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_D (\mu_p \mathbf{u} \cdot \partial_t \varphi - \eta D(\mathbf{u}) : D(\varphi)) \, d\mathbf{x} \, ds + \\ & + \int_D \mu_{p,0} \mathbf{u}_0 \cdot \varphi(0) \, d\mathbf{x} = \left(\int_D \mu_p \mathbf{u} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} \right) (t) + \int_0^t \int_D \mathbf{F} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} \, ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

para $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \eta \frac{\nu_f}{\nu_f} \Delta \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. Além disso, $\delta(t) = \text{dist}(\partial K(t), \partial D) > d$, para todo $t \in [0, \tau)$ e o seguinte é válido em $\mathcal{D}'((0, \tau) \times D)$,

$$\begin{aligned} \partial_t \mu + \text{div}(\mu \mathbf{u}) &= 0, & \text{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \mu_p D(\mathbf{u}) &= 0, & \mathbf{u}|_{\partial D} &= 0 \end{aligned}$$

Também $\mu_0 \in L^\infty(D)$, $\mathbf{u}_0 \in L^2(D)^3$ e \mathcal{V} é definido como em (3.16).

Pela definição de μ_p é imediato que soluções suaves de (4.12) são soluções de (4.6). Além disso, o termo não linear $\mu_p \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ não aparece, pela escolha das funções teste.

Similarmente à discussão no Capítulo 3, a solução (\mathbf{u}, μ) é construída como um limite de soluções aproximadas, obtidas via técnicas de regularização. Estimativas elípticas a priori para \mathbf{u} , assim como estimativas de energia para μ devem ser demonstradas levando-se em consideração que \mathbf{V} depende sobre (\mathbf{u}, μ) . A existência de soluções aproximadas pode ser demonstrada de maneira similar à discussão na Seção 3.3 da presente tese. Algumas modificações devem ser levadas em consideração, em especial pelo fato de que agora tratamos com um problema estacionário de Stokes, na região ocupada pelo fluido. Dessa forma, soluções aproximadas devem pertencer ao espaço $L^\infty(0, \tau; H_0^1(D))^3$.

Resultados similares àqueles demonstrados para o termo forçante no Capítulo 3 devem ser demonstrados para \mathbf{F} , como definido em (4.10). Mais precisamente, seja $\tau > 0$ arbitrário e o conjunto

$$Y_\tau = C^{0,1}([0, \tau]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \{\bar{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, \tau; H_0^1(D \setminus \bar{K}_0))^3 : \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0\}. \quad (4.13)$$

Então se $\bar{\mathbf{v}} \in Y_{\tau,d}$ e $\mathbf{v} = \Theta(\bar{\mathbf{v}})$, onde $Y_{\tau,d}$ foi definido em (3.20), vamos demonstrar que

$$\|\mathbf{F}_\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(D))^3} \leq C,$$

onde $C > 0$ depende somente dos dados do problema eletrostático no tempo $t = 0$.

Como antes, para estabelecer esses resultados para $\mathbf{F}_\mathbf{v}$, necessitamos estudar as propriedades da solução ψ de (3.8), usando os resultados estabelecidos na Seção 2.3 e considerando as hipóteses **H7** e **H8** para ρ e σ (ver Seção 3.3).

Teorema 4.1. *Seja $\tau > 0$, Y_τ como definido acima e $Y_{\tau,d}$ como em (3.20). Então, considerando as hipóteses **H7**, **H8**, **H9** e **H10**, existe uma constante $C > 0$, que depende somente sobre $d > 0$ e dos dados do problema eletrostático (3.8) em $t = 0$, tal que*

$$\|\mathbf{F}_\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,\tau;L^2(D))^3} \leq C$$

para todo $\mathbf{v} = \Theta(\bar{\mathbf{v}})$, $\bar{\mathbf{v}} \in Y_{\tau,d}$.

Demonstração. Como observado anteriormente podemos obter a estimativa

$$\|\mathbf{F}_{\mathbf{v}}\|_{L^2(D)^3} \leq C \|\mathbf{v}_{s,\mathbf{v}}\|_{H^{3/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))},$$

para todo $t \in (0, \tau)$ e $\mathbf{v}_{s,\mathbf{v}}$ definido com em (4.2) e relacionado à $\mathbf{v} = \Theta(\bar{\mathbf{v}})$, $\bar{\mathbf{v}} \in Y_{\tau,d}$. A constante $C > 0$ pode ser escolhida independentemente de \mathbf{v} e de τ , se relembrarmos que $\delta_{\mathbf{v}}(t) > d$, $\forall t \in (0, \tau)$ conforme discussão anterior. O resultado segue se pudermos obter limites uniformes sobre $\mathbf{v}_{s,\mathbf{v}}$. Isso será demonstrado abaixo.

Lema 4.3. *Assumindo as hipóteses do Teorema 4.1, se $\psi_{\mathbf{v}} \in H^1(D)$ é a solução de (3.8) nos domínios $K_{\mathbf{v}}(t)$ e $D \setminus \overline{K_{\mathbf{v}}(t)}$ e considerando as distribuições de cargas $\rho_{\mathbf{v}}$ e $\sigma_{\mathbf{v}}$, então existe $C > 0$ não dependendo sobre $\tau > 0$ e $\bar{\mathbf{v}}^\epsilon$ tal que*

$$\begin{aligned} \max(\|\psi_{\mathbf{v}}\|_{L^\infty(0,\tau;C^\alpha(\overline{K_{\mathbf{v}}(t)}))}, \|\psi_{\mathbf{v}}\|_{L^\infty(0,\tau;C^\alpha(\overline{D \setminus K_{\mathbf{v}}(t)}))}) &\leq C < +\infty, \\ \|\gamma_1^{(i)} \psi_{\mathbf{v}}\|_{L^\infty(0,\tau;C^{1+\alpha}(\partial K_{\mathbf{v}}(t)))} &\leq C < +\infty, \\ \|\gamma_1^{(i)} \psi_{\mathbf{v}}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{5/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t)))} &\leq C < +\infty. \end{aligned}$$

Demonstração. O Lema 2.3 juntamente com a Proposição 2.1, nos dá a representação

$$\psi_{\mathbf{v}} = (\psi_{\mathbf{v},1}, \psi_{\mathbf{v},2}) = (\mu_1(w_{\mathbf{v}} + v_{\mathbf{v},1}), \mu_2(w_{\mathbf{v}} + v_{\mathbf{v},2})),$$

onde $w_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -(G * h_{\mathbf{v}})(\mathbf{x})$ com $h_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) + \rho_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ e $v_{\mathbf{v}}$ é solução de (2.14) nos domínios D e $K_{\mathbf{v}}(t)$, considerando-se $f_1 = (\mu_1 - \mu_2)w_{\mathbf{v}}$, $g_1 = -\frac{4\pi\epsilon}{T}\sigma_{\mathbf{v}}$ e $f_2 = k_2\Psi - w_{\mathbf{v},2}$, onde $\mu_1 = k_1^{-1}$ e $\mu_2 = k_2^{-1}$. Dessa forma,

$$v_{\mathbf{v},1} = \mu_1 \mathbf{B}_{\mathbf{v},1} \begin{bmatrix} \zeta_{\mathbf{v}} \\ \varphi_{\mathbf{v}} \\ \chi_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mu_1 \mathbf{B}_{\mathbf{v},1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{v}})^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

$$v_{\mathbf{v},2} = \mu_2 \mathbf{B}_{\mathbf{v},2} \begin{bmatrix} \zeta_{\mathbf{v}} \\ \varphi_{\mathbf{v}} \\ \chi_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mu_2 \mathbf{B}_{\mathbf{v},2} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{v}})^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

onde $\mathbf{B}_{\mathbf{v},1} = \begin{bmatrix} D_{\mathbf{v}}, & \mu_1 \mathcal{S}_{\mathbf{v}}, & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{v},2} = \begin{bmatrix} D_{\mathbf{v}}, & \mu_2 \mathcal{S}_{\mathbf{v}}, & D_{\mathbf{v},0} \end{bmatrix}$ e os operadores $\mathbf{A}_{\mathbf{v}}$, $D_{\mathbf{v}}$, $\mathcal{S}_{\mathbf{v}}$, $D_{\mathbf{v},0}$ são aqueles definidos em (3.26), com $\partial K(t)$, (ζ, φ, χ) substituídos por $\partial K_{\mathbf{v}}(t)$, $(\zeta_{\mathbf{v}}, \varphi_{\mathbf{v}}, \chi_{\mathbf{v}})$.

Relembrando que $\delta_{\mathbf{v}}(t) \geq d$, $\forall t \in [0, \tau]$, esses operadores são limitados de $Y_{\mathbf{v}}$ a $Y_{\mathbf{v}}$; onde $Y_{\mathbf{v}} = C^\alpha(\partial K_{\mathbf{v}}(t)) \times C^\alpha(\partial K_{\mathbf{v}}(t)) \times C^\alpha(\partial K_{\mathbf{v}}(t))$. Além disso as normas $\|\mathbf{B}_{\mathbf{v},1}\|$, $\|\mathbf{B}_{\mathbf{v},2}\|$, $\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{v}})^{-1}\|$ são limitadas por uma constante que depende somente de expoentes positivos de d^{-1} e das propriedades C^α de ∂K_0 , ∂D (ver Observação 2.11 e também [20]).

Podemos obter diretamente a estimativa

$$\|w_{\mathbf{v}}\|_{C^\alpha(\overline{D})} \leq C(D) \|h_{\mathbf{v}}\|_{0,2,D} \leq C < +\infty,$$

onde $C > 0$ não depende de \mathbf{v} , pelo Teorema 9.2 em [46], Teorema 3.1 e hipóteses **H7** e **H10**. Isso fornece uma estimativa uniforme para a norma $Y_{\mathbf{v}}$ de $(\zeta_{\mathbf{v}}, \varphi_{\mathbf{v}}, \chi_{\mathbf{v}})^t$ e, conseqüentemente, para $v_{\mathbf{v},1}$, $v_{\mathbf{v},2}$.

Para a segunda parte usamos a Proposição 2.2 para obter a representação $\psi_{\mathbf{v}} = (\psi_{\mathbf{v},1}, \psi_{\mathbf{v},2}) = (\mu_1(v_{\mathbf{v},1} + w_{\mathbf{v},1}), \mu_2(v_{\mathbf{v},2} + w_{\mathbf{v},2}))$, onde

$$v_{\mathbf{v},1} = \mathbf{B}_{\mathbf{v},1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{v}})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4\pi e}{T} \sigma_{\mathbf{v}} + (\partial_\nu w_{\mathbf{v},1} - \partial_\nu w_{\mathbf{v},2}) \\ k_2 \Psi \end{bmatrix},$$

$$v_{\mathbf{v},2} = \mathbf{B}_{\mathbf{v},2}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{v}})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4\pi e}{T} \sigma_{\mathbf{v}} + (\partial_\nu w_{\mathbf{v},1} - \partial_\nu w_{\mathbf{v},2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$w_{\mathbf{v},1}$, $w_{\mathbf{v},2}$ são soluções de (2.28) e (2.29) respectivamente, com K , ρ e h substituídos por $K_{\mathbf{v}}$, $\rho_{\mathbf{v}}$ e $h_{\mathbf{v}}$.

Observando que os operadores $\mathbf{B}_{\mathbf{v},1}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{v},2}$ e $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{v}})^{-1}$ são limitados de $Z_{\mathbf{v}} = C^{1+\alpha}(\partial K_{\mathbf{v}}(t)) \times C^\alpha(\partial K_{\mathbf{v}}(t)) \times C^{1+\alpha}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))$ a $Z_{\mathbf{v}}$ o resultado segue como na primeira parte se pudermos estimar w_1 e w_2 . Isso é possível através das seguintes

estimativas elípticas clássicas [47]

$$\|w_{\mathbf{v},1}\|_{C^{1+\alpha}(\overline{K_{\mathbf{v}}(t)})} \leq C \|\rho_{\mathbf{v},1}\|_{C^\alpha(\overline{K_{\mathbf{v}}(t)})}, \quad (4.14)$$

onde $C > 0$ depende somente de K_0 . Similarmente, existe uma constante $C > 0$ que pode ser escolhida independentemente de \mathbf{v}, τ (usando o fato que $\delta_{\mathbf{v}}(t) \geq d$, $\forall t \in [0, \tau]$)

$$\|w_{\mathbf{v},2}\|_{C^{1+\alpha}(\overline{D \setminus K_{\mathbf{v}}(t)})} \leq C \|\sinh(\psi_{\mathbf{v}})\|_{C^\alpha(\overline{D \setminus K_{\mathbf{v}}(t)})} \leq C \quad (4.15)$$

onde usamos a estimativa

$$\begin{aligned} & |\sinh \psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) - \sinh \psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}, t)| |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-\alpha} \leq \\ & \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-\alpha} \int_{\psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}, t)}^{\psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)} \cosh(z) dz \leq C \|\psi_{\mathbf{v}}\|_{C^\alpha(\overline{D \setminus K_{\mathbf{v}}(t)})}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{D \setminus K_{\mathbf{v}}(t)} \end{aligned}$$

o Teorema 3.1, a primeira parte e hipótese **H7**.

A terceira parte do Lema segue-se usando (4.4), que nos dá a estimativa

$$\|v_{\mathbf{v},1}\|_{H^{5/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))} \leq C (\|\zeta_{\mathbf{v}}\|_{H^{5/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))} + \|\varphi_{\mathbf{v}}\|_{H^{3/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))}).$$

Para estimar as normas acima usamos novamente teoria elíptica clássica; estimativas uniformes para $\|w_{\mathbf{v},1}\|_{C^{2+\alpha}(\overline{K_{\mathbf{v}}(t)})}$ e $\|w_{\mathbf{v},2}\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D \setminus K_{\mathbf{v}}(t)})}$ similares a (4.14) e (4.15) são válidas (Teorema 6.14 em [47]). Agora usamos o fato de que φ satisfaz a segunda equação em (2.21) para escrever

$$\varphi_{\mathbf{v}} = \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} [g_{\mathbf{v},1} - T_1 \chi_{\mathbf{v}} - (\mu_2 - \mu_1) \mathbb{D}^* \varphi_{\mathbf{v}}]$$

onde $g_{\mathbf{v},1} = -\frac{4\pi e}{T} \sigma_{\mathbf{v}} + (\partial_{\nu} w_{\mathbf{v},1} - \partial_{\nu} w_{\mathbf{v},2})$. Tomando a norma $C^{1+\alpha}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))$ em $\varphi_{\mathbf{v}}$, obtemos o resultado desejado usando o fato, já mencionado (ver (2.30)), que

$$\|\mathbb{D}_{\mathbf{v}}^* \varphi_{\mathbf{v}}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))} \leq C \|\varphi_{\mathbf{v}}\|_{C^\alpha(\partial K_{\mathbf{v}}(t))},$$

(onde C depende somente sobre ∂K_0) e pela parte anterior do lema. Podemos obter

$$\|\zeta_{\mathbf{v}}\|_{H^{5/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))} \leq C,$$

usando a primeira equação de (2.21), (4.4), argumentos similares aos anteriores, a parte anterior do Lema e por **H8**. \square

Lema 4.4. *Considerando as hipóteses do Teorema 4.1, existe uma constante C não dependente de $Y_{\tau,d}$ tal que*

$$\|\mathbf{v}_{s,\mathbf{v}}\|_{L^\infty(0,\tau;H^{3/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t)))^3} \leq C.$$

Demonstração. Usando a definição (4.2) e o Lema 4.2, obtemos a estimativa, para cada $i = 1, 2, 3$,

$$\|v_{s,i}\|_{H^{3/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))} \leq C \|\psi_{\mathbf{v},1}\|_{H^{3/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))} \|\psi_{\mathbf{v},1}\|_{H^{5/2}(\partial K_{\mathbf{v}}(t))}, \quad (4.16)$$

considerando (4.5). O resultado segue usando-se o Lema 4.3. \square

\square

4.3 Limites para as Soluções Aproximadas

Analogamente à discussão no Capítulo 3 da presente tese, vamos considerar uma seqüência $(\mathbf{u}^{(m)}, \mu^{(m)})$ de soluções aproximadas como obtidas previamente. Colocamos $\mathbf{V}^{(m)}$, como o termo forçante obtido pelo procedimento de extensão descrito na Seção 4.3, através do cálculo de $\psi^{(m)}$, a solução de (3.8) considerando-se $K^{(m)}(t), \rho^{(m)}, \sigma^{(m)}$. Os resultados de compacidade discutidos anteriormente garante-nos a existência de um limite (\mathbf{u}, μ) para $(\mathbf{u}^{(m)}, \mu^{(m)})$ tal que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, \tau; H_0^1(D))^3$ e $\mu \in L^\infty((0, \tau) \times D)$. Além disso $\mathbf{u}^{(m)}$ converge a \mathbf{u} em $L^2((0, \tau) \times D)$ e $\delta(t) \geq d$, para todo $t \in [0, \tau]$. Resta-nos demonstrar que, se \mathbf{V} está relacionado com ψ , (4.12) verifica-se para $(\mathbf{u}, \mu, \mathbf{V})$ para todo $\varphi \in \mathcal{V}$. Dessa forma devemos demonstrar, para todo $t \in (0, \tau)$,

$$\int_0^t \int_D \varphi \cdot (I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \Delta \mathbf{V}^{(m)} - I_{D \setminus \overline{K(t)}} \Delta \mathbf{V}) d\tau d\mathbf{x} \rightarrow 0,$$

quando $m \rightarrow \infty$.

Teorema 4.2. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1, para todo $\varphi \in L^2(D \times (0, \tau))^3$ e $t \in (0, \tau)$,*

$$\int_0^t \int_D \varphi \cdot (I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \Delta \mathbf{V}^{(m)} - I_{D \setminus \overline{K(t)}} \Delta \mathbf{V}) d\tau d\mathbf{x} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Primeiro observamos que $\forall t \in (0, \tau)$, $i = 1, 2, 3$, \mathbf{V}_i e $\mathbf{V}_i^{(m)}$ têm as seguintes representações na forma dos potenciais hidrodinâmicos de F. K. Odqvist (ver [92], [29] ou [96])

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=1}^3 \int_{\partial K(t)} \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varsigma_k(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}) + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_{\partial D} \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \vartheta_k(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=1}^3 \int_{\partial K^{(m)}(t)} \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varsigma_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}) + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_{\partial D} \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \vartheta_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aqui, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$,

$$\mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\eta} \left(\frac{2\delta_{ij}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (|\mathbf{x}|) \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

e $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ é o vetor normal exterior a superfície relacionada. As densidades vectoriais $\varsigma = \varsigma_i$, $\varsigma^{(m)} = \varsigma_i^{(m)}$, $\vartheta = \vartheta_i$, $\vartheta^{(m)} = \vartheta_i^{(m)}$ são soluções das seguintes equações integrais

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K(t)} \varsigma_k(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial D} \vartheta_k(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = v_{s,i}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K(t), \quad i = 1, 2, 3, \\ &\sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K(t)} \varsigma_k(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial D} \vartheta_k(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K^{(m)}(t)} \zeta_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial D} \vartheta_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = v_{s,i}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K^{(m)}(t), \quad i = 1, 2, 3, \\
& \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K^{(m)}(t)} \zeta_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial D} \vartheta_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Definimos $\Gamma(t) = \partial K(t) \cup \partial D$, $\Gamma^{(m)}(t) = \partial K^{(m)}(t) \cup \partial D$ e consideramos as funções vetoriais $\Theta \in H^{3/2}(\partial K(t) \cup \partial D)^3$, $\Theta^{(m)} \in H^{3/2}(\partial K^{(m)}(t) \cup \partial D)^3$ tais que

$$\Theta|_{\partial K(t)} = \mathbf{v}_s, \quad \Theta|_{\partial D} = 0, \quad \Theta^{(m)}|_{\partial K^{(m)}(t)} = \mathbf{v}_s^{(m)}, \quad \Theta^{(m)}|_{\partial D} = 0.$$

Da mesma forma, definimos as densidades vetoriais ξ , $\xi^{(m)}$ tais que $\xi|_{\partial K(t)} = \varsigma$, $\xi|_{\partial D} = \vartheta$, $\xi^{(m)}|_{\partial K^{(m)}(t)} = \varsigma^{(m)}$, $\xi^{(m)}|_{\partial D} = \vartheta^{(m)}$. Então (4.19) e (4.20) podem ser reescritos como

$$\sum_{k=1}^3 \left(\int_{\Gamma(t)} \xi_k(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = \Theta_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \tag{4.21}$$

e

$$\sum_{k=1}^3 \left(\int_{\Gamma^{(m)}(t)} \xi_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = \Theta_i^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(m)}(t), \tag{4.22}$$

para $i = 1, 2, 3$. Conforme demonstrado em [29] (Teorema 1, Capítulo XI, Parte B, § 5), os problemas acima admitem como únicas soluções funções $\xi \in H^{-1/2}(\Gamma(t))^3$, $\xi^{(m)} \in H^{-1/2}(\Gamma^{(m)}(t))^3$, no sentido que os funcionais $L(v) = \int_{\Gamma(t)} \xi \cdot v \, ds(\mathbf{x})$ e $L^{(m)}(v) = \int_{\Gamma^{(m)}(t)} \xi^{(m)} \cdot v \, ds(\mathbf{x})$ são contínuos em $H^1(D \setminus \overline{K(t)})^3$ e $H^1(D \setminus \overline{K^{(m)}(t)})^3$ respectivamente. Além disso, a seguinte estimativa é válida

$$\|\xi^{(m)}\|_{H^{-1/2}(\Gamma^{(m)}(t))^3} \leq C \|\Theta^{(m)}\|_{H^{1/2}(\Gamma^{(m)}(t))^3}, \tag{4.23}$$

onde $C = C(\partial K_0, \partial D)$.

Observamos que, se $X, X^{(m)}$ denotam os fluxos Lagrangeanos de \mathbf{u} e $\mathbf{u}^{(m)}$, respectivamente, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \partial K_0$ com $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$,

$$\mathbf{U}_{i,j}(X(t, \mathbf{x}), X(t, \mathbf{y})) = \mathbf{U}_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.24)$$

como é fácil checar. Evidentemente o mesmo é válido para $X^{(m)}$. Como consequência, (4.19) e (4.20) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K_0} \varsigma_k(X(t, \mathbf{y}), t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial D} \vartheta_k(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(X(t, \mathbf{x}) - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = v_{s,i}(X(t, \mathbf{x}), t), \\ & \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K_0} \varsigma_k^{(m)}(X^{(m)}(t, \mathbf{y}), t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial D} \vartheta_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(X^{(m)}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = v_{s,i}^{(m)}(X^{(m)}(t, \mathbf{x}), t), \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{x} \in \partial K_0, i = 1, 2, 3$. Enquanto que, $\forall \mathbf{x} \in \partial D$,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K_0} \varsigma_k(X(t, \mathbf{y}), t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X(t, \mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial D} \vartheta_k(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = 0, \\ & \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K_0} \varsigma_k^{(m)}(X^{(m)}(t, \mathbf{y}), t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X^{(m)}(t, \mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial D} \vartheta_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = 0, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$. Subtraindo as expressões acima obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K_0} (\delta \varsigma)_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \int_{\partial D} (\delta \vartheta)_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(X(t, \mathbf{x}) - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = \\ & = (\delta v_s)_i^{(m)}(\mathbf{x}, t) - \sum_{k=1}^3 \int_{\partial D} (\mathbf{U}_{ki}(X(t, \mathbf{x}) - \mathbf{y}) - \mathbf{U}_{ki}(X^{(m)}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{y})) \vartheta_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

para $\mathbf{x} \in \partial K_0$ e para cada $i = 1, 2, 3$. Para $\mathbf{x} \in \partial D$ e $i = 1, 2, 3$ temos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K_0} (\delta\varsigma)_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X(t, \mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) + \int_{\partial D} (\delta\vartheta)_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = \\ & = \sum_{k=1}^3 \int_{\partial K_0} \varsigma_k^{(m)}(X^{(m)}(t, \mathbf{y}), t) (\mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X^{(m)}(t, \mathbf{y})) - \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X(t, \mathbf{y}))) ds(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Onde, para todo $t \in (0, \tau)$ e $\mathbf{x} \in \partial K_0$,

$$\begin{aligned} (\delta\varsigma)^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \varsigma(X(t, \mathbf{x}), t) - \varsigma^{(m)}(X^{(m)}(t, \mathbf{x}), t), \\ (\delta v_s)_i^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= v_{s,i}(X(t, \mathbf{x}), t) - v_{s,i}^{(m)}(X^{(m)}(t, \mathbf{x}), t), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

e, para todo $\mathbf{x} \in \partial D$,

$$(\delta\vartheta)^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \vartheta(\mathbf{x}, t) - \vartheta^{(m)}(\mathbf{x}, t).$$

É importante observar que as integrais no lado direito de (4.25) e (4.26) são bem definidas, usando o fato de que

$$\max(\delta(t), \delta^{(m)}(t)) > d, \quad (4.27)$$

$\forall t \in (0, \tau)$ e $m \geq 0$. Como $X|_{K_0}$ e $X^{(m)}|_{K_0}$ são transformações rígidas, é imediato que $(\delta\varsigma)^{(m)} \in H^{-1/2}(\partial K_0)^3$ e que $(\delta\vartheta)^{(m)} \in H^{-1/2}(\partial D)^3$ (ver discussão na Seção 1.1.7 em [84]).

Usando as relações obtidas em (4.25) e (4.26), observamos que, se $\mathbf{y}_t \in \partial K(t)$, as densidades $v^{(m)}(\mathbf{y}_t, t) = (\delta\varsigma)^{(m)}(Q^*(t)(\mathbf{y}_t - \mathbf{x}_c(t)), t)$ e $(\delta\vartheta)^{(m)}$ satisfazem os sistemas

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K(t)} v_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x}_t - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \int_{\partial D} (\delta\vartheta)_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x}_t - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = \\ & = f_i^{(m)}(\mathbf{x}_t, t), \quad \text{para cada } \mathbf{x}_t \in \partial K(t), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.28)$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K(t)} v_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \int_{\partial D} (\delta\vartheta)_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) = \\ & = g_i^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial D, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Aqui, para $\mathbf{x} \in \partial K_0$, $\mathbf{x}_t = X(t, \mathbf{x}) \in \partial K(t)$ e

$$\begin{aligned} f_i^{(m)}(\mathbf{x}_t, t) &= s_i^{(m)}(\mathbf{x}_t, t) - \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_{\partial D} (\mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x}_t - \mathbf{y}) - \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x}_t^{(m)} - \mathbf{y})) \vartheta^{(m)}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde $s^{(m)}(\mathbf{x}_t, t) := (\delta v_s)^{(m)}(Q^*(t)(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_c(t)), t)$ e $\mathbf{x}_t^{(m)} = X(t, \mathbf{x})$. Para $\mathbf{x} \in \partial D$,

$$\begin{aligned} g_i^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{\partial K_0} \zeta_k^{(m)}(X(t, \mathbf{y}), t) (\mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X^{(m)}(t, \mathbf{y})) - \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X(t, \mathbf{y}))) ds(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ressaltamos que $v^{(m)} \in H^{-1/2}(\partial K(t))^3$. Por uma consequência de (4.27), os núcleos das integrais envolvidas na definição de $f^{(m)}$ e $g^{(m)}$ são suaves. Assim, através de um cálculo simples e uso do Lema 4.2 vemos que, $\forall t \in (0, \tau)$, $f^{(m)} \in H^{3/2}(\partial K(t))^3$ e $g^{(m)} \in H^{3/2}(\partial D)^3$. Da mesma forma que em (4.21) e (4.22), o sistema (4.28)-(4.29) tem uma única solução em $H^{-1/2}(\partial K(t) \cup \partial D)^3$.

Consideramos $A^{(m)}(t)$ e $B^{(m)}(t)$ como definidos em (3.30). Seja $t \in (0, \tau)$ fixado. Como observado anteriormente,

$$\mathbf{V} \in H^2(D \setminus \overline{K(t)})^3 \quad \text{e} \quad \mathbf{V}^{(m)} \in H^2(D \setminus \overline{K^{(m)}(t)})^3.$$

Usando (3.31), para cada $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ e uma esfera $S_\epsilon \subset\subset D$ tal que, $K(t) \cup K^{(m)}(t) \subset\subset S_\epsilon$, $|S_\epsilon \setminus \overline{(K(t) \cup K^{(m)}(t))}| < \epsilon$ e

$$\text{dist}(D \setminus \overline{S_\epsilon}, \partial(K(t) \cup K^{(m)}(t))) > \epsilon \quad (4.32)$$

para todo $m \geq N$. Então podemos escrever,

$$\int_D \varphi \cdot (I_{D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}} \Delta \mathbf{V}^m - I_{D \setminus \overline{K(t)}} \Delta \mathbf{V}) d\mathbf{x} \leq \int_{D \setminus \overline{S_\epsilon}} \varphi \cdot (\Delta \mathbf{V}^m - \Delta \mathbf{V}) d\mathbf{x} + C\epsilon \|\varphi\|_{0,2,D}$$

usando o Teorema 4.1. Considerando (4.17) e (4.18) obtemos, para todo $\mathbf{x} \in B^{(m)}(t)$ e para cada $i = 1, 2, 3$,

$$(\mathbf{V}_i^m - \mathbf{V}_i)(\mathbf{x}, t) = \mathcal{V}_i^{(m)}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{V}_i^{(m)}(\mathbf{x}, t) \quad (4.33)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K(t)} \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial D} \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\delta\vartheta)_k^{(m)}(\mathbf{y}, t) ds(\mathbf{y}) \right), \\ \mathbb{V}_i^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\partial K_0} (\mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X(t, \mathbf{y}))) + \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{U}_{ki}(\mathbf{x} - X^{(m)}(t, \mathbf{y})) \zeta_k^{(m)}(X^{(m)}(t, \mathbf{y}), t) ds(\mathbf{y}) \right).\end{aligned}\tag{4.34}$$

Através de (4.28) e (4.29), observamos que $\mathcal{V}^{(m)} \in H^1(D \setminus \overline{K(t)})^3$ é um campo de velocidades satisfazendo o seguinte problema de Stokes em $D \setminus \overline{K(t)}$

$$\begin{aligned}\eta \Delta \mathcal{V}^{(m)} &= \nabla P, \quad \text{em } D \setminus \overline{K(t)}, \\ \operatorname{div} \mathcal{V}^{(m)} &= 0, \quad \text{em } D \setminus \overline{K(t)}, \\ \mathcal{V}^{(m)} &= f^{(m)}, \quad \text{em } \partial K(t), \\ \mathcal{V}^{(m)} &= g^{(m)}, \quad \text{em } \partial D.\end{aligned}\tag{4.35}$$

onde P é um campo escalar dependendo sobre $v^{(m)}$ e de $(\delta\vartheta)^{(m)}$. Utilizando o fato de que D e K_0 são domínios de classe $C^{2+\alpha}$ e a regularidade de $f^{(m)}$ e $g^{(m)}$, devido a resultados de Cattabriga [17] (V, VII), temos que $\mathcal{V}^{(m)} \in H^2(D \setminus \overline{K(t)})^3$ e a seguinte estimativa é válida

$$\begin{aligned}\|\Delta \mathcal{V}_i^{(m)}\|_{L^2(D \setminus \overline{K(t)})^3} &\leq C(\|\mathcal{V}_i^{(m)}\|_{H^{3/2}(\partial K(t))^3} + \|\mathcal{V}_i^{(m)}\|_{H^{3/2}(\partial D)^3}) \\ &= C(\|f^{(m)}\|_{H^{3/2}(\partial K(t))^3} + \|g^{(m)}\|_{H^{3/2}(\partial D)^3}),\end{aligned}$$

onde $C > 0$ pode ser escolhido independente de m , usando-se (4.27) e o Lema A2 em [54].

Considerando (4.32), podemos diferenciar a expressão (4.34) sob a integral. Usando a estimativa (4.23) e o Lema 4.4, obtemos

$$\sup_{\mathbf{x} \in D \setminus \overline{S_\epsilon}} |\Delta \mathbb{V}_i^{(m)}(\mathbf{x}, t)| \rightarrow 0$$

with $m \rightarrow +\infty$ (um argumento similar em uma situação diferente pode ser vista na prova do Teorema 3.1 em [114]).

A integral envolvida na definição de $f^{(m)}$ em (4.30) e a função $g^{(m)}$ definida em (4.31) convergem a zero na norma $H^{3/2}(\partial K(t))^3$ como uma consequência de (4.27) juntamente com a estimativa (4.23) e Lema 4.4. A convergência

$$\|s^{(m)}\|_{H^{3/2}(\partial K(t))^3} \rightarrow 0$$

com $m \rightarrow +\infty$, será demonstrada em uma seqüência de lemas técnicos.

Lema 4.5.

$$\|\psi^{(m)} - \psi\|_{C^\alpha(\overline{B^{(m)}(t)})} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Consideramos a representação

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\mu_1(w_1 + v_1), \mu_2(w_2 + v_2))$$

como no Lema 2.3. Para m suficientemente grande e para $2 < p \leq 6$ escolhido como no Lema 2.3, temos pelas hipóteses **H7** e **H10** e Lema 3.4,

$$\begin{aligned} \|w - w^{(m)}\|_{C^\alpha(\overline{D})} &= \|G * h - G * h^{(m)}\|_{C^\alpha(\overline{D})} \leq \\ &\leq C(\|\rho^{(m)} - \rho\|_{L^p(D)} + \|b^{(m)} - b\|_{L^p(D)}) \\ &\leq \epsilon + C\|\psi^{(m)} - \psi\|_{H^1(D)} \leq (C + 1)\epsilon, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde aqui usamos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \int_D |\sinh \psi^{(m)}(\mathbf{x}) - \sinh \psi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} &\leq \int_D \left(\int_{\psi^{(m)}(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} \cosh(z) dz \right)^p d\mathbf{x} \\ &\leq C_1 \|\psi^{(m)} - \psi\|_{0,p,D}^p \leq C_2 \|\psi^{(m)} - \psi\|_{H^1(D)}^p, \end{aligned}$$

obtida por meio do Teorema 3.1 e da imersão de Sobolev $H^1(D) \subset L^p(D)$. Vamos colocar $\mathbf{y}_t = X(t, \mathbf{y})$ e $\mathbf{y}_t^{(m)} = X^{(m)}(t, \mathbf{y})$, para cada $\mathbf{y} \in \partial K_0$ e definir

$$(\delta\zeta)^{(m)}(\mathbf{y}) = \zeta(\mathbf{y}_t) - \zeta^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}), \quad (\delta\varphi)^{(m)}(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}_t) - \varphi^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}), \quad \mathbf{y} \in \partial K_0;$$

juntamente com

$$(\delta\chi)^{(m)}(\mathbf{y}) = (\chi - \chi^{(m)})(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial D.$$

Usando a representação (2.15) para v , $v^{(m)}$, para todo $\mathbf{x} \in \overline{B^{(m)}(t)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(v_2^{(m)} - v_2)(\mathbf{x}) &= \int_{\partial K_0} \frac{Q(t)\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}_t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_t|^3} (\delta\zeta)^{(m)}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \\
&+ \int_{\partial K_0} \left(\frac{Q(t)\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}_t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_t|^3} - \frac{Q^{(m)}(t)\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}_t^{(m)})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_t^{(m)}|^3} \right) \zeta^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}) ds(\mathbf{y}) \\
&+ \mu_2 \int_{\partial K_0} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_t|} \delta\varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \int_{\partial D} \frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})(\delta\chi)^{(m)}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} + \\
&\mu_2 \int_{\partial K_0} \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_t|} - \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_t^{(m)}|} \right) \varphi^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}) ds(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Inicialmente, vamos mostrar que

$$\begin{aligned}
&\sup \left| \frac{\int_{\partial K_0} \left(\frac{Q(t)\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_t)}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_t|^3} - \frac{Q^{(m)}(t)\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_t^{(m)})}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_t^{(m)}|^3} \right) \zeta^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}) ds(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^\alpha} + \right. \\
&\left. - \frac{\int_{\partial K_0} \left(\frac{Q(t)\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_t)}{4\pi|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_t|^3} - \frac{Q^{(m)}(t)\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_t^{(m)})}{4\pi|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_t^{(m)}|^3} \right) \zeta^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}) ds(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^\alpha} \right| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

com $m \rightarrow +\infty$, onde o supremo é considerado sobre todos os $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{B^{(m)}(t)}$ tais que $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Para isso, basta estimarmos a expressão

$$\begin{aligned}
&\sup \left| \frac{\int_{\partial K_0} \left(\frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{y}|^3} - \frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{y}|^3} \right) \zeta^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}) ds(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|^\alpha} + \right. \\
&\left. - \frac{\int_{\partial K_0} \left(\frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}'_2 - \mathbf{y}|^3} - \frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}'_2 - \mathbf{y}|^3} \right) \zeta^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}) ds(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|^\alpha} \right|,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

onde o supremo é agora considerado sobre todos os $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2 \in \overline{\Omega^{(m)}(t) \setminus K_0}$, $\mathbf{x}'_1 \neq \mathbf{x}'_2$, onde $\Omega^{(m)}(t) = M^*(B^{(m)}(t)) \cap M^{(m)*}(B^{(m)}(t))$. Evidentemente,

$$|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_1| \rightarrow 0, |\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_2| \rightarrow 0$$

com $m \rightarrow +\infty$; além disso, $|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2| = |\mathbf{x}_1^{(m)'} - \mathbf{x}_2^{(m)' }|$. Usando o fato de que $\zeta^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{y}) \in C^{1+\alpha}(\partial K_0)$ e que os potenciais de camada dupla envolvidos em (4.38) são funções de classe $C^{0,1}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0)$, a estimativa abaixo fornece o resultado de convergência desejado

$$\begin{aligned}
&\sup \left| \frac{\int_{\partial K_0} \left(\frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{y}|^3} - \frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}_1^{(m)' } - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}_1^{(m)' } - \mathbf{y}|^3} - \frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}'_2 - \mathbf{y}|^3} - \frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}_2^{(m)' } - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}_2^{(m)' } - \mathbf{y}|^3} \right) \zeta^{(m)}(\mathbf{y}^{(m)}(t)) ds(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|^\alpha} \right| \\
&\leq \sup \frac{|\cdot \cdot \cdot|^\alpha |\cdot \cdot \cdot|^{1-\alpha}}{|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|^\alpha} \leq C \sup \frac{|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|^\alpha (|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1^{(m)' }|^{1-\alpha} + |\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_2^{(m)' }|^{1-\alpha})}{|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Aqui C depende somente de ∂K_0 (Teoremas 2.16 e 2.17 em [20]) e usamos o Lema 4.3 para estimar uniformemente $\|\zeta^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)}$.

O mesmo resultado pode ser obtido de forma similar para o quinto termo em (4.37).

Vamos mostrar que a norma $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ dos termos restantes em (4.37) convergem a zero. Considerando que as densidades $(\zeta^{(m)}, \varphi^{(m)}, \chi^{(m)})$ e (ζ, φ, χ) são soluções de sistemas análogos a (2.21), obtemos, depois da subtração

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} (\delta\zeta)^{(m)} \\ (\delta\varphi)^{(m)} \\ (\delta\chi)^{(m)} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \zeta^{(m)} \\ \varphi^{(m)} \\ \chi^{(m)} \end{bmatrix} + \mathbf{J}^{(m)}, \quad (4.39)$$

onde \mathbf{A} foi definido no Lema 2.3, porém considerando ∂K_0 como o domínio de integração dos operadores integrais componentes. Também estamos considerando os operadores T_1, T_2, T_3 e T_4 como em (2.20), todavia o traço é tomado em $\partial K(t)$ ao invés de ∂K_0 . Em particular, definindo novamente $\mathbf{x}_t = X(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{x}_t^{(m)} = X^{(m)}(t, \mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in \partial K_0$, temos

$$(T_1(\delta\chi)^{(m)})(\mathbf{x}) = 2 \frac{\partial}{\partial\nu(\mathbf{x}_t)} \int_{\partial D} \frac{\nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}_t - \mathbf{y}|^3} (\delta\chi)^{(m)}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad (4.40)$$

$\mathbf{x} \in \partial K_0$. Os operadores \mathbf{M} e $\mathbf{J}^{(m)}$ são definidos como

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & M_1 \\ 0, & 0, & M_2 \\ M_3, & M_4, & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}^{(m)} = \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu_2)(w - w^{(m)}) \\ 0 \\ (w - w^{(m)}) \end{bmatrix},$$

onde, para $\mathbf{x} \in \partial K_0$,

$$\begin{aligned} M_1\chi^{(m)}(\mathbf{x}) &= \mu_2 \int_{\partial D} \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}_t - \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} - \frac{\partial G(\mathbf{x}_t^{(m)} - \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} \right) \chi^{(m)}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \\ M_2\chi^{(m)}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial\nu(\mathbf{x}_t)} \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t - \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} \chi^{(m)}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial\nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t^{(m)} - \mathbf{y})}{\partial\nu(\mathbf{y})} \chi^{(m)}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

e, para $\mathbf{x} \in \partial D$,

$$\begin{aligned} M_3 \zeta^{(m)}(\mathbf{x}) &= \int_{\partial K_0} \left(\frac{Q^{(m)}(t) \nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}_t^{(m)})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}_t^{(m)}|^3} - \frac{Q(t) \nu(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}_t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}_t|^3} \right) \zeta^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}) ds(\mathbf{y}), \\ M_4 \varphi^{(m)}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_2}{4\pi} \int_{\partial K_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_t^{(m)}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_t|} \right) \varphi^{(m)}(\mathbf{y}_t^{(m)}) ds(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Vamos introduzir $Y_0 = C^\alpha(\partial K_0) \times C^\alpha(\partial K_0) \times C^\alpha(\partial D)$. Logo

$$\left\| \begin{pmatrix} (\delta\zeta)^{(m)} \\ (\delta\varphi)^{(m)} \\ (\delta\chi)^{(m)} \end{pmatrix} \right\|_{Y_0} \leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| \left(\|\mathbf{M}\| \left\| \begin{pmatrix} \zeta^{(m)} \\ \varphi^{(m)} \\ \chi^{(m)} \end{pmatrix} \right\|_{Y_0} + \|\mathbf{J}^{(m)}\|_{Y_0} \right). \quad (4.43)$$

Por (4.36), $\|\mathbf{J}^{(m)}\|_{Y_0} \rightarrow 0$ com $m \rightarrow \infty$. O Lema 4.3, Observação 2.11 e cálculos elementares usando (4.27), mostram-nos que o primeiro termo tende a zero quando $m \rightarrow +\infty$ (cabe observar que $\|\mathbf{M}\|$ depende de potências positivas de d^{-1}).

Assim

$$\left\| \begin{pmatrix} (\delta\zeta)^{(m)} \\ (\delta\varphi)^{(m)} \\ (\delta\chi)^{(m)} \end{pmatrix} \right\|_{Y_0} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty. \quad (4.44)$$

Portanto, usando as propriedades de regularidade dos potenciais de camada simples e dupla mencionadas em (2.26) é imediato que o primeiro, terceiro e quarto termos em (4.37) tendem a zero na norma $C^\alpha(\overline{B^{(m)}(t)})$. \square

Lema 4.6. *Sejam $(\delta\zeta)^{(m)}$, $(\delta\varphi)^{(m)}$ como definidos no Lema 4.5. Então,*

$$\max\{(\|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)}, \|(\delta\varphi)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)})\} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Como consequência

$$\|\psi_1^{(m)}(X^{(m)}(t, \mathbf{x}), t) - \psi_1(X(t, \mathbf{x}), t)\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} \rightarrow 0,$$

com $m \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Relembrando o Lema 4.5 e considerando a definição de \mathbf{x}_t , $\mathbf{x}_t^{(m)}$, \mathbf{y}_t e $\mathbf{y}_t^{(m)}$ lá introduzidas, as expressões (4.39) e (4.43) são válidas para $((\delta\zeta)^{(m)}, (\delta\varphi)^{(m)}, (\delta\chi)^{(m)})$ com Y_0 substituído por

$$W_0 = C^{1+\alpha}(\partial K_0) \times C^\alpha(\partial K_0) \times C^{1+\alpha}(\partial D)$$

e

$$\mathbf{J}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{\partial w_1(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial w_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} - \frac{\partial w_2(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} + \frac{\partial w_2^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Portanto, para a segunda parte necessitamos mostrar que

$$\|\mathbf{J}^{(m)}\|_{W_0} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Isso será imediato se pudermos mostrar que

$$\left\| \frac{\partial w_1(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial w_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} - \frac{\partial w_2(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} + \frac{\partial w_2^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} \right\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} \rightarrow 0,$$

com $m \rightarrow +\infty$, o que garante a primeira parte do Lema, já que por (4.39),

$$\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right) (\delta\zeta)^{(m)} = \mu_2 \mathbb{D}(\delta\zeta)^{(m)} + (\mu_2^2 - \mu_1^2) S(\delta\varphi)^{(m)} + \mu_2 T_2(\delta\chi)^{(m)} - M_1 \chi^{(m)}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right) (\delta\varphi)^{(m)} &= -(T_1(\delta\chi)^{(m)}) + (-\mu_2 + \mu_1) \mathbb{D}^*(\delta\varphi)^{(m)} + \\ &+ \frac{\partial w_1(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial w_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} - \frac{\partial w_2(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} + \frac{\partial w_2^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} \end{aligned}$$

onde o operador T_1 foi definido em (4.40), M_1 e M_2 em (4.41) e T_2 em (2.20) (onde o traço é tomado em $\partial K(t)$ ao invés de ∂K_0). Logo, usando as propriedades de continuidade dos operadores \mathbb{D} e S , obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} &\leq C(\|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{C^\alpha(\partial K_0)} + \|(\delta\varphi)^{(m)}\|_{C^\alpha(\partial K_0)} + \\ &+ \|T_2((\delta\chi)^{(m)})\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(\delta\varphi)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} &\leq C(\|T_1(\delta\chi)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} + \|(\delta\varphi)^{(m)}\|_{C^\alpha(\partial K_0)}) + \\ &+ \left\| \frac{\partial w_1(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial w_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} - \frac{\partial w_2(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} + \frac{\partial w_2^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} \right\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)}. \end{aligned}$$

Um cálculo direto, usando o Lema 4.3, que fornece estimativas uniformes para as normas C^α das densidades $(\zeta^{(m)}, \varphi^{(m)}, \chi^{(m)})$, juntamente com (4.27) fornece

$$\max\{\|T_1(\delta\chi)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)}, \|T_2(\delta\chi)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)}, \|M_1\chi^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)}\} \rightarrow 0$$

com $m \rightarrow +\infty$. Usando (4.44) obtemos

$$\|(\delta\varphi)^{(m)}\|_{C^\alpha(\partial K_0)} \rightarrow 0, \|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{C^\alpha(\partial K_0)} \rightarrow 0$$

com $m \rightarrow +\infty$.

Agora observamos que $\left(\frac{\partial w_1(\mathbf{x}_t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial w_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)})}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})}\right) = 0$. Isso é uma conseqüência direta de **H7**, da definição de $w_1, w_1^{(m)}$ e das propriedades da invariância rotacional e translacional do operador gradiente.

Relembrando o Lema 2.2, w_2 é solução do problema (2.29) considerando, para cada $t \in [0, \tau]$, o domínio $D \setminus \overline{K(t)}$ e $h(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}, t))$, usando a hipótese de que $\text{supp } \rho \subset\subset K(t)$. Por sua vez, $w_2^{(m)}$ é solução de (2.29), considerando-se a região $D \setminus \overline{K^{(m)}(t)}$ e a função $h^{(m)}(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, \psi^{(m)}(\mathbf{x}, t))$, onde usamos novamente o fato que $\text{supp } \rho^{(m)} \subset\subset K^{(m)}(t)$.

Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma esfera tal que $\overline{D} \subset B$. Definimos $\tilde{h} \in C^\alpha(\overline{B})$, $\tilde{h}^{(m)} \in C^\alpha(\overline{B})$ as extensões (únicas) à região \overline{B} das funções h e $h^{(m)}$, respectivamente. Observamos que, para cada $t \in [0, \tau]$, por (4.27) existe uma constante $C > 0$ dependendo somente sobre a geometria de ∂K_0 e de ∂D tal que

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}\|_{C^\alpha(\overline{B})} &\leq C \|h\|_{C^\alpha(\overline{D \setminus K(t)})} \\ \|\tilde{h}^{(m)}\|_{C^\alpha(\overline{B})} &\leq C \|h^{(m)}\|_{C^\alpha(\overline{D \setminus K^{(m)}(t)})} \end{aligned} \tag{4.46}$$

(ver Lema 6.37 em [47]). É bem conhecido o fato (ver discussão em [40]) que podemos expressar w_2 e $w_2^{(m)}$ da seguinte forma

$$w_2(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}, t) - u(\mathbf{x}, t),$$

$$w_2^{(m)}(\mathbf{x}, t) = U^{(m)}(\mathbf{x}, t) - u^{(m)}(\mathbf{x}, t)$$

onde

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, t) &= \int_B G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{h}(\mathbf{y}, t) d(\mathbf{y}), \\ U^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \int_B G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{h}^{(m)}(\mathbf{y}, t) d(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

e $u, u^{(m)}$ são soluções de

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)} \\ u(\mathbf{x}, t) &= U(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K(t) \cup \partial D \end{aligned} \quad (4.47)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta u^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K^{(m)}(t)} \\ u^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= U^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K^{(m)}(t) \cup \partial D, \end{aligned} \quad (4.48)$$

respectivamente.

Dessa forma, temos de estimar a norma $C^{1+\alpha}(\partial K_0)$ das expressões $\frac{\partial U(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial U^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})}$ e $\frac{\partial u(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial u^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})}$.

Consideramos, inicialmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial U^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} &= \\ \int_B \frac{\nu(\mathbf{x}_t) \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{y}) \tilde{h}(\mathbf{y}, t)}{4\pi |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}|^3} ds(\mathbf{y}) - \int_B \frac{\nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot (\mathbf{x}_t^{(m)} - \mathbf{y}) \tilde{h}^{(m)}(\mathbf{y}, t)}{4\pi |\mathbf{x}_t^{(m)} - \mathbf{y}|^3} ds(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Definindo

$$B_0(t) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{z} = Q^*(t)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)); \mathbf{y} \in B\}$$

e

$$B_0^{(m)}(t) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{z} = Q^{(m)*}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_c^{(m)}(t)), \mathbf{y} \in B\}$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial U^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} &= \\ \int_{B_0(t)} \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \tilde{h}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{z}, t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3} ds(\mathbf{z}) + \\ - \int_{B_0^{(m)}(t)} \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \tilde{h}^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{z}, t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3} ds(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

para cada $\mathbf{x} \in \partial K_0$.

Seja $A^{(m)}(t) = B_0(t) \cap B_0^{(m)}(t)$, escrevemos então

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial U^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} = \\ & \int_{A^{(m)}(t)} \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})(\tilde{h}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{z}, t) - \tilde{h}^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{z}, t))}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3} ds(\mathbf{z}) + \\ & + \int_{B_0^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)} \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})\tilde{h}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{z}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3} ds(\mathbf{z}) + \\ & - \int_{B_0(t) \setminus A^{(m)}(t)} \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})\tilde{h}^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{z}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3} ds(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (4.49)$$

para cada $\mathbf{x} \in \partial K_0$. Relembrando a definição da norma de $C^{1+\alpha}(\partial K_0)$

$$\|U\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} = \inf\{\|V\|_{C^{1+\alpha}(\overline{K_0})}, V \in C^{1+\alpha}(\overline{K_0}), V|_{\partial K_0} = U\} \quad (4.50)$$

obtemos as seguintes estimativas para cada termo de (4.49)

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{A^{(m)}(t)} \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})(\tilde{h}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{z}, t) - \tilde{h}^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{z}, t))}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3} ds(\mathbf{z}) \right\|_{C^{1+\alpha}(\overline{K_0})} \leq \\ & \leq C \|\tilde{h} - \tilde{h}^{(m)}\|_{C^\alpha(\overline{K_0})}, \\ & \left\| \int_{B_0(t) \setminus A^{(m)}(t)} \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})\tilde{h}^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{z}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3} ds(\mathbf{z}) \right\|_{C^{1+\alpha}(\overline{K_0})} \leq \\ & \leq \sup_{\mathbf{z} \in B_0(t) \setminus A^{(m)}(t)} \left\| \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})\tilde{h}^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{z}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} \right\|_{C^{1+\alpha}(\overline{K_0})} |B_0 \setminus A^{(m)}(t)| \\ & \leq C |B_0(t) \setminus A^{(m)}(t)|, \\ & \left\| \int_{B_0^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)} \frac{\nu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})\tilde{h}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{z}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3} ds(\mathbf{z}) \right\|_{C^{1+\alpha}(\overline{K_0})} \leq \\ & \leq C |B_0^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)|, \end{aligned}$$

onde usamos as propriedades de regularidade de potenciais newtonianos, a estimativa uniforme para $h^{(m)}$ demonstrada no Lema 4.3 e o fato de que, para todo $t \in [0, \tau]$,

$$\text{dist}(K_0, B_0(t) \setminus A^{(m)}(t)) \geq d, \text{dist}(K_0, B_0^{(m)}(t) \setminus A^{(m)}(t)) \geq d.$$

Usando (4.46) e o Lema 4.5 é evidente que $\|\tilde{h} - \tilde{h}^{(m)}\|_{C^\alpha(\overline{K_0})} \rightarrow 0$ com $m \rightarrow +\infty$. Usando o mesmo argumento acima é possível demonstrar que $\|U -$

$U^{(m)} \parallel_{C^{2+\alpha}(\partial K_0)} \rightarrow 0$ com $m \rightarrow +\infty$ e então

$$\left\| \frac{\partial U(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial U^{(m)}(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} \right\|_{C^{2+\alpha}(\partial K_0)} \rightarrow 0$$

com $m \rightarrow +\infty$. Vamos estimar agora a norma $C^{1+\alpha}(\partial K_0)$ da expressão $\frac{\partial u(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial u^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})}$. Para isso relembremos que, por resultados clássicos [87], $u(\mathbf{x}, t) \in C^{2+\alpha}(\overline{D \setminus K(t)})$ e $u^{(m)}(\mathbf{x}, t) \in C^{2+\alpha}(\overline{D \setminus K^{(m)}(t)})$.

Pela teoria de operadores integrais singulares, usando o fato de que $u, u^{(m)}$ são soluções de (4.47) e de (4.48), respectivamente, podemos escrever

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\partial K(t)} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \varsigma(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \vartheta(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}) \\ u^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\partial K^{(m)}(t)} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \varsigma^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \vartheta^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

com densidades

$$(\varsigma, \vartheta) \in C^{1+\alpha}(\partial K(t)) \times C^{1+\alpha}(\partial D) \quad \text{e} \quad (\varsigma^{(m)}, \vartheta^{(m)}) \in C^{1+\alpha}(\partial K^{(m)}(t)) \times C^{1+\alpha}(\partial D).$$

Definindo $((\delta\varsigma)^{(m)}, (\delta\vartheta)^{(m)})$ como no Lema 4.5 e usando argumentos similares aos utilizados nesse lema, vemos que $((\delta\varsigma)^{(m)}, (\delta\vartheta)^{(m)})$ satisfazem, para todo $\mathbf{x} \in \partial K_0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\delta\varsigma)^{(m)}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}(\delta\varsigma)^{(m)}(\mathbf{x}, t) + (T_2\vartheta)(\mathbf{x}_t, t) + \\ - (T_2^{(m)}\vartheta^{(m)})(\mathbf{x}_t^{(m)}, t) = U(\mathbf{x}_t, t) - U^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t) \end{aligned} \quad (4.51)$$

e, para todo $\mathbf{x} \in \partial D$,

$$\begin{aligned} (T_3\varsigma)(\mathbf{x}, t) - (T_3^{(m)}\varsigma^{(m)})(\mathbf{x}, t) + \mathbb{D}_0(\delta\vartheta)^{(m)}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2}(\delta\vartheta)^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \\ = U(\mathbf{x}, t) - U^{(m)}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde os operadores acima foram definidos em (2.19), (2.20), (3.27) e (3.28). Definindo, para cada $\mathbf{x}_t \in \partial K(t)$, a função $v^{(m)}(\mathbf{x}_t, t) = (\delta\varsigma)^{(m)}(Q^*(t)(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_c(t)), t)$, o sistema (4.51)-(4.52) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathbb{D}v^{(m)}(\mathbf{x}_t, t) + \frac{1}{2}v^{(m)}(\mathbf{x}_t, t) + (T_2(\delta\vartheta)^{(m)})(\mathbf{x}_t, t) = U(\mathbf{x}_t, t) - U^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t) + \\ + \int_{\partial D} \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}_t^{(m)} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} - \frac{\partial G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \right) \vartheta^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

para todo $\mathbf{x}_t \in \partial K(t)$ e, para todo $\mathbf{x} \in \partial D$,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_0(\delta\vartheta)^{(m)}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2}(\delta\vartheta)^{(m)}(\mathbf{x}, t) + T_3 v^{(m)}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}, t) - U^{(m)}(\mathbf{x}, t) + \\ \int_{\partial K^{(m)}(t)} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \zeta^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}) - \int_{\partial K(t)} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \zeta^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde estamos considerando os operadores \mathbb{D} e T_3 definidos em $\partial K(t)$. Se definirmos $\wp_1^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ e $\wp_2^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ como sendo as expressões no lado direito de (4.53) e (4.54) respectivamente, vemos que

$$f^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial K(t)} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} v^{(m)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, t) ds(\mathbf{z}) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} (\delta\vartheta)^{(m)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, t) ds(\mathbf{z})$$

é solução do seguinte problema

$$\begin{aligned} \Delta f^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D \setminus \overline{K(t)} \\ f^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \wp_1^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K(t) \\ f^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \wp_2^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial D. \end{aligned}$$

Das propriedades de unicidade e regularidade para o problema acima, $f^{(m)} \in C^{2+\alpha}(\overline{D \setminus K(t)})$, já que, como é fácil checar, $\wp_1^{(m)} \in C^{2+\alpha}(\partial K(t))$ e $\wp_2^{(m)} \in C^{2+\alpha}(\partial D)$. Além disso, a seguinte estimativa é válida

$$\|f^{(m)}\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D \setminus K(t)})} \leq C(\|\wp_1^{(m)}\|_{C^{2+\alpha}(\partial K(t))} + \|\wp_2^{(m)}\|_{C^{2+\alpha}(\partial D)}) \rightarrow 0, \quad (4.55)$$

com $m \rightarrow +\infty$, onde usamos (4.27) e o fato de que a norma $C^{1+\alpha}$ das densidades $(\zeta^{(m)}, \vartheta^{(m)})$ é limitada por uma constante independente de m . Escrevendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}_t, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t)} - \frac{\partial u^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)}{\partial \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})} = (\nu(\mathbf{x}_t) - \nu(\mathbf{x}_t^{(m)})) \cdot \nabla_{\mathbf{u}_{\mathbf{x}_t}}(\mathbf{x}_t, t) + \\ + \nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_t} u(\mathbf{x}_t, t) - \nabla_{\mathbf{x}_t^{(m)}} u^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)) \end{aligned}$$

notamos que temos de estimar somente o segundo termo acima. Considerando o Teorema 2.23 em [20], observamos que

$$\begin{aligned}
& \nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_t} u(\mathbf{x}_t, t) - \nabla_{\mathbf{x}_t^{(m)}} u^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)) = \\
& - \nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot \left(\int_{\partial K(t)} \nabla_{\mathbf{x}_t} G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z}) \times (\nabla_{\tan} \varsigma(\mathbf{z}, t) \times \nu(\mathbf{z})) ds(\mathbf{z}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \nabla_{\tan} \varsigma(\mathbf{x}_t, t) + \int_{\partial D} \nabla_{\mathbf{x}_t} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \vartheta(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}) \right) + \\
& + \nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot \left(\int_{\partial K^{(m)}(t)} \nabla_{\mathbf{x}_t^{(m)}} G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z}) \times (\nabla_{\tan} \varsigma^{(m)}(\mathbf{z}, t) \times \nu(\mathbf{z})) ds(\mathbf{z}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \nabla_{\tan} \varsigma^{(m)}(\mathbf{x}_t, t) + \int_{\partial D} \nabla_{\mathbf{x}_t^{(m)}} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \vartheta^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}) \right).
\end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que a expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& - \nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot \left(\int_{\partial K(t)} \nabla_{\mathbf{x}_t} G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z}) \times (\nabla_{\tan} v^{(m)}(\mathbf{z}, t) \times \nu(\mathbf{z})) ds(\mathbf{z}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \nabla_{\tan} v^{(m)}(\mathbf{x}_t, t) + \int_{\partial D} \nabla_{\mathbf{x}_t} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} (\delta \vartheta)^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}) \right) + \\
& + \nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot \int_{\partial D} \left(\nabla_{\mathbf{x}_t} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} - \nabla_{\mathbf{x}_t^{(m)}} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t^{(m)} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \right) \vartheta^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z})
\end{aligned}$$

e isso corresponde a

$$\begin{aligned}
& - (\nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_t} f^{(m)}(\mathbf{x}_t, t)) + \\
& + \nu(\mathbf{x}_t^{(m)}) \cdot \int_{\partial D} \left(\nabla_{\mathbf{x}_t} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} - \nabla_{\mathbf{x}_t^{(m)}} \frac{\partial G(\mathbf{x}_t^{(m)} - \mathbf{z})}{\partial \nu(\mathbf{z})} \right) \vartheta^{(m)}(\mathbf{z}, t) ds(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Consideramos a definição da norma $\|f^{(m)}\|_{C^{2+\alpha}(\partial K(t) \cup \partial D)}$ como em (4.50) e relembremos (4.55); então, usando a limitação uniforme de $\vartheta^{(m)}$, um cálculo simples usando o teorema da convergência dominada nos mostra que a norma $C^{1+\alpha}(\partial K_0)$ da expressão acima é arbitrariamente pequena para m suficientemente grande. \square

Corolário 4.1. *Para $i = 1, 2, 3$,*

$$\|v_{s,i}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x}, t) - v_{s,i}^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{x}, t)\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} \rightarrow 0,$$

com $m \rightarrow +\infty$, para cada $t \in [0, \tau]$.

Demonstração. Inicialmente observamos que, por resultados demonstrados em [84], existe $C = C(\partial K_0)$ tal que $\|v_{s,i}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x})\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} \leq C\|v_{s,i}(\mathbf{x}_t)\|_{H^{3/2}(\partial K(t))}$ para cada $t \in [0, \tau]$. Escrevemos

$$\begin{aligned} & v_{s,i}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x}, t) - v_{s,i}^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{x}, t) = \\ & = (\psi_1(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x}, t) - \psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{x}, t))\nabla_{tan}\psi_1(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x}, t) + \\ & + \psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{x}, t)(\nabla_{tan}\psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_c^{(m)}(t) + Q^{(m)}(t)\mathbf{x}, t) - \nabla_{tan}\psi_1(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x}, t)) \end{aligned}$$

e consideramos a norma $H^{3/2}(\partial K_0)$ dessa expressão. O resultado segue pelas Lemas 4.2, 4.3 e 4.5 e pelas estimativas abaixo, para cada $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} & \|(\psi_1(\mathbf{x}_t, t) - \psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t))(\nabla_{tan}\psi_1)_i(\mathbf{x}_t, t)\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} \leq \\ & \leq C\|(\psi_1(\mathbf{x}_t, t) - \psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t))\|_{H^{3/2}(\partial K_0)}\|(\nabla_{tan}\psi_1)_i(\mathbf{x}_t, t)\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} \\ & \leq C\|(\psi_1(\mathbf{x}_t, t) - \psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t))\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)}\|(\nabla_{tan}\psi_1)_i(\mathbf{x}_t, t)\|_{H^{3/2}(\partial K_0)}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \|\psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)((\nabla_{tan}\psi_1^{(m)})_i(\mathbf{x}_t^{(m)}, t) - (\nabla_{tan}\psi_1)_i(\mathbf{x}_t, t))\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} \leq \\ & \leq C\|\psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)\|_{H^{3/2}(\partial K_0)}\|((\nabla_{tan}\psi_1^{(m)})_i(\mathbf{x}_t^{(m)}, t) - (\nabla_{tan}\psi_1)_i(\mathbf{x}_t, t))\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} \\ & \leq C\|\psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t)\|_{H^{3/2}(\partial K_0)}\|\psi_1^{(m)}(\mathbf{x}_t^{(m)}, t) - \psi_1(\mathbf{x}_t, t)\|_{H^{5/2}(\partial K_0)} \\ & \leq C\max\{\|(\delta\varphi)^{(m)}\|_{H^{3/2}(\partial K_0)}, \|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{H^{5/2}(\partial K_0)}\} \end{aligned}$$

onde usamos (4.5). A convergência $\|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{H^{5/2}(\partial K_0)} \rightarrow 0$, $m \rightarrow +\infty$ segue do Lema 4.6 e das estimativas abaixo, obtidas através da primeira equação de (4.39) e de (4.4),

$$\begin{aligned} \|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{H^{5/2}(\partial K_0)} & \leq C(\|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} + \|(\delta\varphi)^{(m)}\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} + \\ & + \|T_2(\delta\chi)^{(m)}\|_{H^{5/2}(\partial K(t))} + \|M_1(\chi^{(m)})\|_{H^{5/2}(\partial K(t))}) \\ & \leq C(\|(\delta\zeta)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} + \|(\delta\varphi)^{(m)}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} + \\ & + \|T_2(\delta\chi)^{(m)}\|_{H^{5/2}(\partial K(t))} + \|M_1(\chi^{(m)})\|_{H^{5/2}(\partial K(t))}). \end{aligned}$$

□

□

Nosso resultado sobre existência local de soluções para (4.12) acoplado a (3.8) pode ser então enunciado de maneira similar ao Teorema 3.3, se assumirmos as hipóteses **H7-H10**.

Teorema 4.3. *Seja $d > 0$ fixado. Considerando as hipóteses **H7-H10** e $\mathbf{u}_0 \in L^2(D)^3$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$, $\mu_{p,0} D(\mathbf{u}_0) = 0$ e $\delta(0) > d$, existe $\tau^* \in (0, +\infty]$ e uma solução (μ, \mathbf{u}) de (4.12) tais que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, \tau; H_0^1(D))^3$, $\mu \in L^\infty((0, \tau) \times D)$ para todo $\tau < \tau^*$. Além disso, $\tau^* = \inf\{t > 0; \delta(t) = d\}$.*

É importante observar que $\forall t \in [0, \tau^*)$, $\delta(t) > d$ e o método provavelmente falha se $d \rightarrow 0$. No caso bidimensional, considerando um potencial gravitacional, τ^* pode ser determinado como $\min\{t : \delta(t) = 0\}$. Como já discutido na introdução da presente tese, resultados globais são disponíveis no caso do movimento de bolas sob a ação de uma força de corpo particular [54] ou no caso do movimento de um cilindro bidimensional [107].

4.4 Existência de Soluções Fortes

Grandmont e Maday [51] demonstraram a existência local em tempo de soluções fortes para um sistema acoplado envolvido no movimento de um corpo rígido num fluxo incompressível de Navier-Stokes, no caso bidimensional e sob a hipótese de que a massa do corpo é suficientemente grande. Não é evidente que resultados similares para o sistema eletro-hidrodinâmico que estamos discutindo possam ser obtidos. Esse não é o caso se supormos uma hipótese adequada relativa à dependência dos potenciais com o movimento, num fluxo de Stokes.

Vamos considerar (3.8) e (4.1) acopladas às equações dinâmicas

$$m \frac{d\mathbf{u}_c(t)}{dt} = \int_{\partial K(t)} \sigma^H(\mathbf{x}, t) \cdot \nu(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}) \quad (4.56)$$

$$A \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = \int_{\partial K(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) \times (\sigma^H \cdot \nu)(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}) + \mathbf{w}(t). \quad (4.57)$$

Onde $\sigma^H(\mathbf{x}, t) = 2\eta D(\mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t)) - p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$ e, por simplicidade, estamos considerando $|\mathbf{w} \times (A\mathbf{w})| \ll \mathbf{w}$. Assumimos as hipóteses **H3** e **H4** com $1/2 < \alpha < 1$. Cabe ressaltar que trataremos diretamente o problema (4.1), sem o processo de extensão de \mathbf{v}_s à região $D \setminus \overline{K(t)}$, como no estudo de soluções fracas. Por essa razão não precisamos admitir a hipótese adicional de que os domínios são de classe $C^{2+\alpha}$.

Um par $(\mathbf{u}_c(t), \mathbf{w}(t)) \in C^1([0, \tau]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ (para algum $\tau > 0$) satisfazendo (4.56) e (4.57) é uma solução forte para essas equações. Para mostrar a existência dessas soluções temos de mostrar que uma condição de Lipschitz local para os termos à direita em (4.56) e (4.57) é válida.

Vamos considerar, formalmente, $r > 0$ e $0 < a \leq \frac{\delta(0)-d}{r}$. É imediato que

$$\forall (\mathbf{u}_c(t), \mathbf{w}(t)) \in \overline{B(0, r)} \subset C([0, a]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

temos

$$\bigcup_{t \in [0, a]} K_{(\mathbf{u}_c, \mathbf{w})}(t) \subset G \subset D, \text{ dist}(\overline{G}, \partial D) \geq d > 0, \quad (4.58)$$

onde $K_{(\mathbf{u}_c, \mathbf{w})}(t)$ são as posições da partícula definidas pelo par $(\mathbf{u}_c(t), \mathbf{w}(t))$. Vamos assumir também que $\rho_{(\mathbf{u}_c(t), \mathbf{w}(t))}$, $\sigma_{(\mathbf{u}_c(t), \mathbf{w}(t))}$ satisfazem as hipóteses **H7** e **H8**. Consideramos dois campos de velocidades

$$(\mathbf{u}_c, \mathbf{w}), (\mathbf{u}'_c, \mathbf{w}') \in \overline{B(0, r)} \subset C^0([0, a]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$$

e denotamos $\psi = \psi_{(\mathbf{u}_c, \mathbf{w})}$, $\psi' = \psi_{(\mathbf{u}'_c, \mathbf{w}')}$ com sendo as soluções de (3.8) associadas com $(K(t), \rho, \sigma)$ e $(K'(t), \rho', \sigma')$, respectivamente. Colocamos também $\mathbf{v}^f, \mathbf{v}'^f$ como sendo as soluções de (4.1) em $D \setminus \overline{K(t)}$ e $D \setminus \overline{K'(t)}$ respectivamente e consideramos representações (4.17), (4.18) com densidades $\zeta, \zeta', \vartheta, \vartheta'$. Para todo $\mathbf{x} \in \partial K_0$, colocamos $\delta\zeta(\mathbf{x}, t) = \zeta(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x}, t) - \zeta'(\mathbf{x}'_c(t) + Q'(t)\mathbf{x}, t)$ e para todo $\mathbf{x} \in \partial D$, $\delta\vartheta(\mathbf{x}, t) = \vartheta(\mathbf{x}, t) - \vartheta'(\mathbf{x}, t)$. Analogamente como na prova do Teorema 4.2 nós obtemos um sistema de equações similar a (4.19) e (4.20), onde estamos considerando os mesmos operadores com as seguintes modificações: $\zeta^{(m)}, \vartheta^{(m)}, \mathbf{v}_s^{(m)}$ substituído por $\zeta', \vartheta', \mathbf{v}'_s$; $\partial K^{(m)}(t)$ substituído por $\partial K'(t)$. Além do mais, uma estimativa como em (4.23) é válido.

Definimos

$$h = \sup_{t \in [0, a]} (\{|\mathbf{u}_c(t) - \mathbf{u}'_c(t)|, |\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}'(t)|\} : (\mathbf{u}_c, \mathbf{w}), (\mathbf{u}'_c, \mathbf{w}') \in \overline{B(0, r)}). \quad (4.59)$$

Conforme demonstrado em [29], para cada $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^3 \int_{\partial K(t)} \sigma_{ij}^H(\mathbf{x}, t) \cdot \nu_j(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \int_{\partial K'(t)} \sigma_{ij}^H(\mathbf{x}, t) \cdot \nu_j(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}) \right| = \\ & = \left| \int_{\partial K_0} (\delta \zeta)_i(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right| = \left| \int_{\partial K(t)} v_i(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right| \leq C \|v_i\|_{H^{-1/2}(\partial K(t))} \end{aligned}$$

e, da mesma forma,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) \times (\sigma^H(\mathbf{x}, t) \cdot \nu(\mathbf{x}, t)) ds(\mathbf{x}) - \\ & + \int_{\partial K'(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}'_c(t)) \times (\sigma^H(\mathbf{x}, t) \cdot \nu(\mathbf{x}, t)) ds(\mathbf{x}) \leq C \|v_i\|_{H^{-1/2}(\partial K(t))} + O(h) \end{aligned}$$

onde $v \in H^{-1/2}(\partial K(t))^3$ é definido como no Teorema 4.2, com as modificações já mencionadas e usamos a estimativa (4.23), juntamente com o Lema 4.4. Usando novamente uma estimativa similar a (4.23), nós teremos o resultado desejado se pudermos mostrar que $\|f_i\|_{H^{1/2}(\partial K(t))} = O(h)$, $\|g_i\|_{H^{1/2}(\partial K(t))} = O(h)$ e isso implica mostrarmos que

$$\|s_i\|_{H^{1/2}(\partial K(t))} = O(h). \quad (4.60)$$

Aqui f, g, s são funções similares às definidas no Teorema 4.2, porém com as devidas modificações. Para as integrais envolvidos na definição de f e g o resultado é imediato usando (4.58). Entretanto, (4.60) não é óbvio e iremos obter esta estimativa assumindo uma hipótese adequada sobre ψ .

Observamos que é possível estabelecer um limite uniforme similar àquele estabelecido no Lema 4.3. De maneira análoga à prova do Lema 4.6, definindo, para $\mathbf{y} \in \partial K_0$,

$$\delta \zeta(\mathbf{y}) = \zeta(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{y}) - \zeta'(\mathbf{x}'_c(t) + Q'(t)\mathbf{y}),$$

$$\delta \varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{y}) - \varphi'(\mathbf{x}'_c(t) + Q'(t)\mathbf{y})$$

e, para $\mathbf{y} \in \partial D$,

$$\delta \chi(\mathbf{y}) = (\chi - \chi')(\mathbf{y}),$$

temos, para todo $\mathbf{x} \in \partial K_0$,

$$\begin{pmatrix} \delta\zeta \\ \delta\varphi \\ \delta\chi \end{pmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left(\mathbf{M} \begin{pmatrix} \zeta' \\ \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} + \mathbf{J} \right), \quad (4.61)$$

onde \mathbf{J} foi definido em (4.45), \mathbf{A} no Lema 2.3 e \mathbf{M} em (4.41). Relembrando a notação $Y_0 = C^{1+\alpha}(\partial K_0) \times C^\alpha(\partial K_0) \times C^{1+\alpha}(\partial D)$ e (4.43), enquanto usamos os mesmos cálculos como no Lema 4.6, nós temos

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \zeta' \\ \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} \right\|_{Y_0} \leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| \|\mathbf{M}\| \left\| \begin{pmatrix} \zeta' \\ \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix} \right\|_{Y_0} \leq \\ & \leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| O(h). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Pela dependência não-linear de \mathbf{J} com relação a ψ, ψ' , não é óbvio que possamos obter uma estimativa similar para o termo $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{J}$. Entretanto é razoável que isso seja possível se lembrarmos que, como pode ser visto no Lema 4.6, para cada $\epsilon > 0$ há $\delta(\epsilon) > 0$ e configurações $K'(t), K(t)$, tais que $\text{dist}(\partial K(t), \partial K'(t)) < \delta(\epsilon)$ e

$$\|(\delta\zeta, \delta\varphi, \delta\chi)^t\|_{Y_0} < \epsilon.$$

Consideremos ψ como um operador de

$$\overline{B(0, r)} \subset C([0, a]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \text{ em } C^{1+\alpha}(\partial K_0)$$

colocando

$$\psi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \psi(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x}, t), \psi'(\mathbf{u}', \mathbf{w}') = \psi'(\mathbf{x}'_c(t) + Q'(t)\mathbf{x}, t).$$

Por (4.61) e (4.62) observamos que

$$\|\psi_1 - \psi'_1 - k_1^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{J}\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} = O(h)$$

onde $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D - \frac{1}{2}, & \mu_1 \mathcal{S}, & 0 \end{bmatrix}$.

Nossa hipótese é:

H11 Existe um intervalo maximal $[0, a)$ tal que $\forall \tau < a$ existe um operador linear limitado $\mathcal{H} : \overline{B(0, r)} \subset C([0, \tau]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rightarrow C^{1+\alpha}(\partial K_0)$, onde $r = \frac{\delta(0)-d}{a}$, satisfazendo $\|\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{J} - \mathcal{H}(h)\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} = O(h)$, para todo $t \in [0, \tau]$.

Com essa hipótese \mathcal{H} é a derivada de Fréchet da aplicação

$$\psi : \overline{B(0, r)} \subset C([0, \tau]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rightarrow C^{1+\alpha}(\partial K_0),$$

para cada $\tau < a$. Além disso,

$$\|\psi - \psi'\|_{C^{1+\alpha}(\partial K_0)} \leq O(h),$$

de onde obtemos (4.60), usando (4.2) e argumentos similares aos do Corolário 4.1.

Usando resultados bem conhecidos de equações diferenciais ordinárias [60] temos então estabelecido

Teorema 4.4. *Admitindo a validade de **H3-H4** juntamente com **H7-H8** e **H11**, há um intervalo maximal de existência $[0, a)$ de soluções fortes para o sistema (4.56)-(4.57).*

Como observado na introdução do presente trabalho, suspeitamos que a existência é garantida enquanto a partícula não colide com a fronteira exterior mas não provamos esse fato nesse trabalho.

4.5 Formulação no Caso de Região Infinita

Se relembarmos que macromoléculas são da ordem de 10^{-6} cm em diâmetro e tivermos em mente que, por exemplo, em eletroforese capilar, o "enclosure" D tem seção transversal de milímetros e comprimento 10 cm (conforme discussão em [15]), a região tem dimensão da ordem de 10^5 a 10^7 maior do que a molécula. Isso pode ser usado para simplificar o problema tomando o "enclosure" como sendo infinito, ou seja, $\overline{K(t)}^c$ mantém simetria rotacional no caso de uma partícula singular

ocupando uma região limitada. De acordo, supomos que a condição de contorno de deslizamento na velocidade corresponde à solução do potencial associado à equação de Poisson-Boltzmann numa região **grande mas finita** (sendo considerada como uma aproximação do problema de região infinita). Somos forçados a usar essa formulação pois não temos derivado propriedades eletrostáticas variacionais para regiões infinitas. Dadas essas hipóteses daremos uma formulação matemática mais precisa do que a encontrada na literatura (ver [108], [115]) apesar de estarmos considerando uma condição contorno de deslizamento mais geral. Considerando que o movimento do fluido toma lugar em uma região infinita com essa condição de contorno de deslizamento, as propriedades mecânicas do movimento podem ser descritas através do cálculo tensorial como no esquema geral desenvolvido em [108]. Esse procedimento permite, além de resolver as equações de campo diretamente, obter expressões para a força e o torque dependendo somente sobre as propriedades geométricas da partícula e sobre o potencial.

Assumimos as hipóteses **H7**, **H8**, **H9** e **H10** para os dados e consideramos (3.8) acoplado com (4.6) (onde o domínio do fluido é $\overline{K(t)^c}$). Seja $\tau > 0$ tal que $\forall t \in [0, \tau)$, a partícula se mantenha suficientemente longe de ∂D . Um campo vetorial livre de divergência, o qual denotamos \mathbf{V} , tal que $\mathbf{V}|_{\partial K(t)} = \mathbf{v}_s$, $\mathbf{V}|_{\partial D} = 0$ pode ser construído em $\overline{K(t)^c}$ de uma maneira similar como no Teorema 2 do trabalho de Kozono e Sohr [71]. Dessa construção temos $\partial^2 \mathbf{V} \in L^2(\overline{K(t)^c})^3$ e a estimativa a priori $\|\partial^2 \mathbf{V}\|_{0,2,\overline{K(t)^c}} \leq C \|\mathbf{v}_s\|_{3/2,2,\partial K(t)}$. Também consideramos as hipóteses

$$|\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)|, p(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.63)$$

Colocamos F_i^H e T_i^H , $i = 1, 2, 3$, como sendo as componentes da força hidrodinâmica e torque sobre a partícula. Seguindo [108], nós obtemos

$$F_i^H = \eta \int_{\partial K(t)} \widehat{\mathbf{v}} \cdot (\bar{\sigma}^i \cdot \nu) ds - \eta \int_{\overline{K(t)^c}} \bar{\bar{\mathbf{V}}}^i \cdot \Delta \mathbf{V} d\mathbf{x} \quad (4.64)$$

e

$$T_i^H = \eta \int_{\partial K(t)} \widehat{\mathbf{v}} \cdot (\bar{\sigma}^i \cdot \nu) ds - \eta \int_{\overline{K(t)^c}} \bar{\bar{\mathbf{V}}}^i \cdot \Delta \mathbf{V} d\mathbf{x}, \quad (4.65)$$

onde, para cada $j = 1, 2, 3$, $\bar{\mathbf{V}}^j$ e $\bar{\bar{\mathbf{V}}}^j$ são soluções dos problemas

$$\begin{aligned}\Delta \bar{\mathbf{V}}^j(\mathbf{x}, t) &= \nabla \bar{p}^j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \overline{K(t)}^c \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}}^j(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \overline{K(t)}^c, \\ \bar{V}_i^j(\mathbf{x}, t) &= \delta_{ij}, \quad \mathbf{x} \in \partial K(t), \\ |\bar{\mathbf{V}}^j(\mathbf{x}, t)| &\rightarrow 0, \quad \text{para } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{4.66}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta \bar{\bar{\mathbf{V}}}^j(\mathbf{x}, t) &= \nabla \bar{\bar{p}}^j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \overline{K(t)}^c, \\ \operatorname{div} \bar{\bar{\mathbf{V}}}^j(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \overline{K(t)}^c \\ \bar{\bar{V}}_i^j(\mathbf{x}, t) &= e_{jli}(x_l - x_{c,l}(t)), \quad \mathbf{x} \in \partial K(t), \\ |\bar{\bar{\mathbf{V}}}^j(\mathbf{x}, t)| &\rightarrow 0, \quad \text{para } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{4.67}$$

para todo $t \in [0, \tau)$; $\bar{\sigma}^i$, $\bar{\bar{\sigma}}^i$ são o tensor de tensões relacionados a $\bar{\mathbf{V}}^j$, $\bar{\bar{\mathbf{V}}}^j$. Para j fixado, o campo de vetores $\bar{\mathbf{V}}^j$ é o fluxo próximo a uma partícula não carregada movendo-se na direção j , com velocidade unitária em um meio viscosidade unitária. Similarmente, $\bar{\bar{\mathbf{V}}}^j$ e \bar{p}^j são campo de velocidades e pressão para rotação.

Os resultados demonstrados em [71] garantem a existência de uma única solução $(\bar{\mathbf{V}}^j, \bar{p}^j) \in H^1(\overline{K(t)}^c)^3 \times L^2(\overline{K(t)}^c)$ para o problema (4.66), para cada $j = 1, 2, 3$. O mesmo é válido para o problema (4.67).

As expressões (4.64) e (4.65) são obtidas aplicando-se o seguinte teorema recíproco generalizado [108] aos problemas (4.6) (considerando (4.63)) e (4.66), (4.6) e (4.67), respectivamente. Sejam $(\eta, \mathbf{v}, p, \mathbf{X})$ e $(\eta', \mathbf{v}', p', \mathbf{X}')$ viscosidade, velocidade, pressão, e campo de forças para as equações de Stokes:

$$\begin{aligned}\eta \Delta \mathbf{v} &= \nabla p + \mathbf{X}, & \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \eta' \Delta \mathbf{v}' &= \nabla p' + \mathbf{X}', & \operatorname{div} \mathbf{v}' &= 0,\end{aligned}$$

no espaço G exterior a uma superfície fechada S . Supomos \mathbf{v} , p , \mathbf{v}' , \mathbf{X} , \mathbf{X}' anulando-se suficientemente rápido no infinito. Então o teorema recíproco generalizado diz que

$$\eta' \int_S \mathbf{v}' \cdot (\sigma \cdot \nu) ds + \eta' \int_S \mathbf{v}' \cdot \mathbf{X} dx = \eta \int_S \mathbf{v} \cdot (\sigma' \cdot \nu) ds + \eta \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{X}' dx.$$

Nesse sentido, o resultado central é de que a força hidrodinâmica e torque são compostas da força e torque onde todos os efeitos elétricos são suprimidos mais um termo excedente, que depende somente do campo elétrico. Usando a condição de contorno do problema (4.6) nas expressões (4.64) e (4.65), e a mecânica Newtoniana para a macromolécula, temos

$$m \frac{d\mathbf{u}_c(t)}{dt} = -\eta \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_c(t) - \eta \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}(t) - \eta \int_{\overline{K(t)}^c} \overline{\mathbf{V}} \cdot \Delta \mathbf{V} d\mathbf{x} \quad (4.68)$$

e

$$A \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = -\eta \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_c(t) - \eta \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{w}(t) - \eta \int_{\overline{K(t)}^c} \overline{\overline{\mathbf{V}}} \cdot \Delta \mathbf{V} d\mathbf{x}. \quad (4.69)$$

Em (4.68) e (4.69) temos as matrizes 3×3 $\overline{\mathbf{V}} = \{\overline{V}_i^j\}$ e $\overline{\overline{\mathbf{V}}} = \{\overline{\overline{V}}_i^j\}$, \mathbf{K} é o tensor de translação

$$K_{ij} = - \sum_{l=1}^3 \int_{\partial K(t)} \overline{\sigma}_{jl}^i \nu_l ds$$

e $\mathbf{\Theta}$ é o tensor de rotação

$$\Theta_{ij} = - \sum_{m=1}^3 e_{jkl} \int_{\partial K(t)} (x_k - x_{c,k}) \overline{\overline{\sigma}}_{lm}^i \nu_m ds.$$

Os tensores de acoplamento \mathbf{C} e \mathbf{D} são dados por

$$C_{ij} = - \sum_{m=1}^3 e_{jkl} \int_{\partial K(t)} (x_k - x_{c,k}) \overline{\sigma}_{lm}^i \nu_m ds$$

e

$$D_{ij} = - \sum_{l=1}^3 \int_{\partial K(t)} \overline{\overline{\sigma}}_{jl}^i \nu_l ds.$$

Cabe observar que as integrais acima são bem definidas (ver os resultados sobre o problema exterior de Stokes discutidos no Capítulo XI de [29]).

Agora, escrevemos

$$\frac{d\mathbf{u}_c(t)}{dt} = F(\mathbf{u}_c, \mathbf{w}, \mathbf{V}(\mathbf{u}_c, \mathbf{w})), \quad \mathbf{u}_c(0) = \mathbf{u}_{c0} \quad (4.70)$$

e

$$\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = G(\mathbf{u}_c, \mathbf{w}, \mathbf{V}(\mathbf{u}_c, \mathbf{w})), \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0. \quad (4.71)$$

Nosso objetivo é obter um resultado de existência local de soluções fortes para (4.70)-(4.71). Devemos então estabelecer resultados de dependência Lipschitz de F e G com respeito a $(\mathbf{u}_c, \mathbf{w})$. Para isso vamos assumir uma hipótese mais forte do que **H11**.

H12 Existe um intervalo maximal $[0, a)$ tal que, para cada $i = 1, 2, 3$,

$$\|(\delta v_s)_i\|_{H^{3/2}(\partial K_0)} = O(h),$$

para cada $\tau < a$, onde h foi definido em (4.59) para $r = \frac{\delta(0)-d}{a}$,

$$(\delta v_s)_i(\mathbf{x}) = v_{s,i}(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{x}) - v'_{s,i}(\mathbf{x}'_c(t) + Q'(t)\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial K_0$$

e \mathbf{x}'_c e $Q'(t)$ foram definidos na Seção 4.4.

Considerando as hipóteses assumidas nessa Seção vamos demonstrar o seguinte teorema

Teorema 4.5. *As funções \mathbf{F} , \mathbf{G} são aplicações Lipschitz de $\overline{B(0, r)} \subset C([0, \tau]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ em $C([0, \tau]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, $\forall \tau < a$.*

Demonstração: Consideremos dois campos $(\mathbf{u}_c, \mathbf{w})$ e $(\mathbf{u}'_c, \mathbf{w}') \in \overline{B(0, r)}$; regiões $K(t)$ e $K'(t)$; distribuição de cargas σ, σ', ρ e ρ' ; soluções respectivas de (2.4), ψ e ψ' ; $\mathbf{v}_s, \mathbf{v}'_s$ como em (4.2). Para cada $j = 1, 2, 3$ colocamos $\overline{\mathbf{V}}'^j, \overline{p}', \overline{\mathbf{V}}^j, \overline{p}$ soluções dos problemas (4.66), (4.67), respectivamente, na região $\overline{K'(t)}^c$, para todo $t \in [0, \tau]$. Para cada $j = 1, 2, 3$, $\overline{\mathbf{V}}^j, \overline{p}$ e $\overline{\mathbf{V}}^j, \overline{p}$ são soluções dos mesmos problemas na região $\overline{K(t)}^c$. Introduzimos os tensores $\mathbf{K}', \boldsymbol{\Theta}', \mathbf{C}', \mathbf{D}'$ como antes com modificações óbvias e consideramos as diferenças

$$\eta \mathbf{K}' \cdot \mathbf{u}'_c + \eta \mathbf{C}' \cdot \mathbf{w}' + \eta \int_{\overline{K'(t)}^c} \overline{\mathbf{V}}' \cdot \Delta \mathbf{V}' d\mathbf{x} - \eta \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_c - \eta \mathbf{C} \cdot \mathbf{w} - \eta \int_{\overline{K(t)}^c} \overline{\mathbf{V}} \cdot \Delta \mathbf{V} d\mathbf{x} \quad (4.72)$$

e

$$\eta \mathbf{D}' \cdot \mathbf{u}'_c + \eta \boldsymbol{\Theta}' \cdot \mathbf{w}' + \eta \int_{\overline{K'(t)}^c} \overline{\overline{\mathbf{V}}}' \cdot \Delta \mathbf{V}' d\mathbf{x} - \eta \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_c - \eta \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{w} - \eta \int_{\overline{K(t)}^c} \overline{\overline{\mathbf{V}}} \cdot \Delta \mathbf{V} d\mathbf{x}. \quad (4.73)$$

A invariância do domínio exterior à partícula sob rotações e translações permite que se mude o sistema de referência e as configurações correntes. Vamos definir, para todo $\mathbf{y} \in \overline{K_0^c}$ e $j = 1, 2, 3$, as novas variáveis e funções

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= Q(t)\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{y}, t), & \mathbf{V}'(\mathbf{x}', t) &= Q'(t)\tilde{\mathbf{V}}'(\mathbf{y}, t) \\
\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) &= Q(t)\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{y}, t), & \mathbf{w}'(\mathbf{x}', t) &= Q'(t)\tilde{\mathbf{w}}'(\mathbf{y}, t) \\
\mathbf{u}_c(t) &= Q(t)\tilde{\mathbf{u}}_c(t), & \mathbf{u}'_c(t) &= Q'(t)\tilde{\mathbf{u}}'_c(t) \\
\overline{\mathbf{V}}^j(\mathbf{x}, t)^T &= Q(t)\tilde{\overline{\mathbf{V}}}^j(\mathbf{y}, t)^T, & \overline{\mathbf{V}}'^j(\mathbf{x}', t)^T &= Q'(t)\tilde{\overline{\mathbf{V}}}'^j(\mathbf{y}, t)^T \\
\tilde{\overline{\mathbf{V}}}^j(\mathbf{x}, t)^T &= Q(t)\tilde{\tilde{\overline{\mathbf{V}}}}^j(\mathbf{y}, t)^T, & \tilde{\overline{\mathbf{V}}}'^j(\mathbf{x}', t)^T &= Q'(t)\tilde{\tilde{\overline{\mathbf{V}}}}'^j(\mathbf{y}, t)^T \\
\bar{p}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{\bar{p}}(\mathbf{y}, t), & \bar{p}'(\mathbf{x}', t) &= \tilde{\bar{p}}'(\mathbf{y}, t) \\
\tilde{\bar{p}}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{\tilde{\bar{p}}}(\mathbf{y}, t), & \tilde{\bar{p}}'(\mathbf{x}', t) &= \tilde{\tilde{\bar{p}}}'(\mathbf{y}, t)
\end{aligned} \tag{4.74}$$

onde $\mathbf{x} = Q^*(t)\mathbf{y} + \mathbf{x}_c(t)$ e $\mathbf{x}' = Q'^*(t)\mathbf{y} + \mathbf{x}'_c(t)$. Os novos problemas na variável \mathbf{y} são

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\overline{\mathbf{V}}}^j(\mathbf{y}, t) &= \nabla \tilde{\overline{p}}^j(\mathbf{y}, t), & \mathbf{y} &\in \overline{K_0} \\
\operatorname{div} \tilde{\overline{\mathbf{V}}}^j(\mathbf{y}, t) &= 0, & \mathbf{y} &\in \overline{K_0^c} \\
\tilde{\overline{V}}_i^j(\mathbf{y}, t) &= \sum_{k=1}^3 q_{ik}^*(t)\delta_{kj}, & \mathbf{y} &\in \partial K_0 \\
|\tilde{\overline{\mathbf{V}}}^j(\mathbf{y}, t)| &\rightarrow 0, & \text{para } |\mathbf{y}| &\rightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{4.75}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\tilde{\overline{\mathbf{V}}}}^j(\mathbf{y}, t) &= \nabla \tilde{\tilde{\overline{p}}}(^j)(\mathbf{y}, t), & \mathbf{y} &\in \overline{K_0^c} \\
\operatorname{div} \tilde{\tilde{\overline{\mathbf{V}}}}^j(\mathbf{y}, t) &= 0, & \mathbf{y} &\in \overline{K_0^c} \\
\tilde{\tilde{\overline{V}}}_i^j(\mathbf{y}, t) &= \sum_{k=1}^3 q_{ik}^* \left(e_{jlk} \left(\sum_{m=1}^3 q_{lm} y_m \right) \right), & \mathbf{y} &\in \partial K_0 \\
|\tilde{\tilde{\overline{\mathbf{V}}}}^j(\mathbf{y}, t)| &\rightarrow 0, & \text{para } |\mathbf{y}| &\rightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

para todo $t \in [0, \tau]$, $i, j = 1, 2, 3$. Expressões similares são válidas para $\bar{\mathbf{V}}^{tj}$ e $\bar{\bar{\mathbf{V}}}^{tj}$.

Observamos que, para todo $i, j, m = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{V}_j^i}{\partial x_m}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 q_{jk}(t) \frac{\partial y_l}{\partial x_m} \frac{\partial \tilde{V}_k^i}{\partial y_l}(\mathbf{y}, t) \\ \frac{\partial \bar{V}_j^{ti}}{\partial x_m}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 q_{jk}(t) \frac{\partial y_l}{\partial x_m} \frac{\partial \tilde{V}_k^{ti}}{\partial y_l}(\mathbf{y}, t)\end{aligned}\quad (4.77)$$

e as mesmas relações são válidas para os campos $\bar{\bar{\mathbf{V}}}^j, \bar{\mathbf{V}}^{tj}$ (ver Capítulo 1, Seção 1.7 em [84]). Então tomando a i -componente na diferença vetorial (4.72) nós temos

$$\begin{aligned}\eta \sum_{j=1}^3 (K_{ij} u_{c,j}(t) - K'_{ij} u'_{c,j}(t) + C_{ij} w_j(t) - C'_{ij} w'_j(t)) + \\ + \eta \sum_{j=1}^3 \left(\int_{\bar{K}'(t)^c} \bar{V}_j^{ti} \Delta V'_j dx - \int_{\bar{K}(t)^c} \bar{V}_j^i \Delta V_i dx \right).\end{aligned}\quad (4.78)$$

Para o primeiro termo dessa soma temos

$$\begin{aligned}K_{ij} u_{c_j}(t) - K'_{ij} u'_{c_j}(t) &= K_{ij} u_{c_j}(t) - K'_{ij} u_{c_j}(t) + K'_{ij} u_{c_j}(t) - K'_{ij} u'_{c_j}(t) \\ &= u_{c_j}(t) (K_{ij} - K'_{ij}) + K'_{ij} (u_{c_j}(t) - u'_{c_j}(t)).\end{aligned}\quad (4.79)$$

Observando que $\tilde{\bar{V}}^j - \tilde{\bar{V}}^{tj}$, $\tilde{\bar{p}} - \tilde{\bar{p}}'$ são campo de velocidades e pressão para um problema de Stokes como em (4.75) na região \bar{K}_0^c satisfazendo a condição de contorno $(\tilde{\bar{V}}_i^j - \tilde{\bar{V}}_i^{tj})(\mathbf{y}, t) = \sum_{k=1}^3 (q_{ik}^*(t) - q_{ik}^{t*}(t)) \delta_{kj}$, $\mathbf{y} \in \partial K_0$, usando o Teorema 1 em [71], que dá estimativas a priori para o fluxo de Stokes em regiões exteriores, temos as estimativas

$$\begin{aligned}\|\nabla \tilde{\bar{V}}_i^j - \nabla \tilde{\bar{V}}_i^{tj}\|_{0,2,\bar{K}_0^c} &\leq C \left\| \sum_{k=1}^3 (q_{ik}^*(t) \delta_{kj} - q_{ik}^{t*}(t) \delta_{kj}) \right\|_{H^{1/2}(\partial K_0)}, \\ &\leq C \sum_{k=1}^3 \|(q_{ik}^*(t) \delta_{kj} - q_{ik}^{t*}(t) \delta_{kj})\|_{H^{1/2}(\partial K_0)} = O(h), \\ \|\tilde{\bar{p}} - \tilde{\bar{p}}'\|_{L^2(K_0^c)} &= O(h),\end{aligned}\quad (4.80)$$

onde h foi definido em (4.59); temos também usado (3.6). Por um cálculo direto usando (4.77) observamos que, para estimar o termo $K_{ij} - K'_{ij}$ em (4.79), necessitamos

somente obter estimativas para termos na forma

$$\int_{\partial K_0} (\tilde{\sigma}_{kl}^i - \tilde{\bar{\sigma}}_{kl}^i) \nu_l ds,$$

para cada $k, l = 1, 2, 3$. Conforme discussão no Capítulo XI de [29], usando as fórmulas de Green e as condições de contorno para os problemas de Stokes relacionados a \bar{V}' e \bar{V} respectivamente, temos

$$\left| \int_{\partial K_0} (\tilde{\sigma}_{kl}^i - \tilde{\bar{\sigma}}_{kl}^i) \nu_l ds \right| \leq C \sup_{t \in [0, \tau]} |Q(t) - Q'(t)| = O(h)$$

obtido por (3.6).

Nós temos assim estabelecido a condição Lipschitz para a expressão (4.79). O termo $C_{ij} w_j(t) - C'_{ij} w'_j(t)$ na soma (4.78) pode ser estimado analogamente.

Para $\int_{\bar{K}'(t)^c} \bar{V}_j^i \Delta V_j' d\mathbf{x} - \int_{\bar{K}(t)^c} \bar{V}_j^i \Delta V_j d\mathbf{x}$ é suficiente obter a condição para um termo da forma

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{K}(t)^c} \bar{V}_j^i \frac{\partial^2 V_j}{\partial^2 x_m} d\mathbf{x} - \int_{\bar{K}'(t)^c} \bar{V}_j^i \frac{\partial^2 V_j'}{\partial^2 x_m} d\mathbf{x} = \\ & = \int_{\bar{K}_0^c} \sum_{k,p,l} \left(q_{jk} q_{pm} q_{lm} \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 \tilde{V}_j}{\partial y_l^2} - q'_{jk} q'_{pm} q'_{lm} \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 \tilde{V}_j'}{\partial y_l^2} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para fazer isso observamos que $\tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}'$ é um campo de velocidades livre de divergência em \bar{K}_0^c satisfazendo $\partial^2(\tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}') \in L^2(\bar{K}_0^c)$ e tal que

$$(\tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}')(\mathbf{y}, t) = \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_c(t) + Q(t)\mathbf{y}) - \mathbf{v}'_s(\mathbf{x}'_c(t) + Q'(t)\mathbf{y}),$$

para $\mathbf{y} \in \partial K_0$. Além disso $\|\partial^2(\tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}')\|_{0,2,\bar{K}_0^c} \leq C \|\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s\|_{3/2,2,\partial K_0} = O(h)$, usando

H12. Da desigualdade de Schwarz, (4.80) e pela discussão acima nós obtemos o resultado se escrevermos

$$\begin{aligned} & q_{jk} q_{pm} q_{lm} \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 V_j}{\partial y_l^2} - q'_{jk} q'_{pm} q'_{lm} \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 \tilde{V}_j'}{\partial y_l^2} = q_{jk} q_{pm} q_{lm} \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 V_j}{\partial y_l^2} - q'_{jk} q'_{pm} q'_{lm} \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 V_j}{\partial y_l^2} + \\ & + q'_{jk} q'_{pm} q'_{lm} \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 V_j}{\partial y_l^2} - q'_{jk} q'_{pm} q'_{lm} \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 \tilde{V}_j'}{\partial y_l^2} = \\ & = \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 V_j}{\partial y_l^2} (q_{jk} q_{pm} q_{lm} - q'_{jk} q'_{pm} q'_{lm}) + q'_{jk} q'_{pm} q'_{lm} \left(\tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 V_j}{\partial y_l^2} - \tilde{V}_j^i \frac{\partial^2 \tilde{V}_j'}{\partial y_l^2} \right) \end{aligned}$$

e

$$q_{jk}q_{pm}q_{lm} - q'_{jk}q'_{pm}q'_{lm} = q_{pm}q_{lm}(q_{jk} - q'_{jk}) + q'_{jk}(q_{pm}q_{lm} - q'_{pm}q'_{lm}).$$

A prova do teorema é completada se observarmos que a condição para (4.73) pode ser obtida de uma maneira completamente similar. \square

Portanto, considerando as hipóteses assumidas nessa Seção demonstramos o seguinte resultado de existência local

Corolário 4.2. *Existe um intervalo maximal de existência $[0, a)$ de soluções fortes para (4.70)-(4.71).*

Como observado na introdução da presente tese, a teoria de existência pode não ser válida em dois casos: primeiro $\partial K(t)$ pode aproximar-se de ∂D . Nesse caso a formulação de Stokes não se aplica e a formulação de Teubner que leva-nos a (4.68), (4.69) não é válida ou a solução para $(\mathbf{u}_e, \mathbf{w})$ não pode ser controlada.

Bibliografia

- [1] ADAMS, R. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] AJDARI, A. Electro-osmosis on inhomogeneous charged surfaces. *Phys. Review Letters* **75**, 4 (1995), 755–758.
- [3] AJDARI, A., AND LONG, D. Symmetry properties of the electrophoretic motion of patterned colloidal particles. *Phys. Review Letters* **81**, 7 (1998), 1529–1533.
- [4] ALBERTS, B., BRAY, B., LEWIS, J., RAFF, M., ROBERTS, K., AND WATSON, J. D. *Molecular Biology of the Cell*. Garland, 1994.
- [5] ALLISON, S., CHENG, C., AND STIGTER, D. The length dependence of translational diffusion, free solution electrophoretic motion, and electrophoretic tether force of rigid rod-like model duplex DNA. *Biophysical J.* **81**, 5 (2001), 2558–2568.
- [6] ALLISON, S. A., AND STIGTER, D. A commentary on the Screened-Oseen, counterion-condensation formalism of polyion electrophoresis. *Biophysical J.* **78**, 1 (2000), 121–124.
- [7] ANDERSON, J. L. Colloidal transport by interfacial forces. *Ann. Re. Fluid Mech.* **21** (1989), 61–99.
- [8] ANTOSIEWICS, J., MCCAMMON, J. A., AND GILSON, M. K. Prediction of pH dependent properties of proteins. *J. Mol. Biol.* **238** (1994), 415–436.
- [9] BAKER, N., HOLST, M., AND WANG, F. Adaptive multilevel finite element solution of the Poisson-Boltzmann equation II: refinement at solvent accessible surfaces in biomolecular systems. *J. Comp. Chem.* **21** (2000), 1343–1352.

- [10] BAKER, N., SEPT, D., HOLST, M., AND MCCAMMON, J. A. The adaptive multilevel finite element solution of the Poisson-Boltzmann equation on massively parallel computers. *IBM Journal of Research and Development* 45 (2001), 427–438.
- [11] BEDIN, L., AND THOMPSON, M. Motion of a charged particle in ionized fluids. *Submetido para publicação: Math. Models and Methods in Appl. Sci.* (2004).
- [12] BEDIN, L., AND THOMPSON, M. Weak solutions for the electrophoretic motion of charged particles. *Submetido para publicação: Comp. Appl. Math.* (2004).
- [13] BEDIN, L., THOMPSON, M., AND VILHENA, M. T. On the Poisson-Boltzmann equation on non-smooth domains. *Int. J. Diff. Eq. App.* 8, 4 (2003), 327–360.
- [14] BERGER, M. S. *Nonlinearity and Functional Analysis*. Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis. Academic Press Inc, New York, 1977.
- [15] BERGETHON, P. R. *The Physical Basis of Biochemistry: The Foundations of Molecular Biophysics*. Springer, New York, 1999.
- [16] BERGH, J., AND LÖFSTRÖM, J. *Interpolation Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [17] CATTABRIGA, L. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Padova* 31 (1961), 308–340.
- [18] CHUN, M. S., AND BOWEN, W. R. Rigorous calculations of linearized poisson-boltzmann interaction between dissimilar spherical colloids and osmotic pressure in concentrated dispersions. *J. Coll. Interface Sci* 272 (2004), 330–339.

- [19] CLEMMON, P. C., AND DOUGHERTY, J. P. *Electrodynamics of Particles and Plasmas*. Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1969.
- [20] COLTON, D., AND KRESS, R. *Integral Equations Methods in Scattering Theory*. John Wiley, New York, 1988.
- [21] CONCA, C., MARTÍN, J. S., AND TUCSNAK, M. Motion of a rigid body a viscous fluid. *C. R. Acad. Sci. Paris 328* (1999), 473–478.
- [22] CORTIS, C. M., AND FRIESNER, R. A. An automatic three-dimensional finite element mesh generation system for the Poisson-Boltzmann equation. *J. Comp. Chem.* 18, 13 (1997), 1570–1590.
- [23] CORTIS, C. M., AND FRIESNER, R. A. Numerical solution of the Poisson-Boltzmann equation using tetrahedral finite-element meshes. *J. Comp. Chem.* 18, 13 (1997), 1571–1608.
- [24] COSTABEL, M. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results. *SIAM J. Math. Anal.* 19 (1985), 613–626.
- [25] DARDENNE, L., WERNECK, A., OLIVEIRA, M., AND BISCH, P. Reassociation of fragments using multicentered multipolar expansions: Peptide junction treatment to investigate electrostatic properties of proteins. *J. Comp. Chem.*, 22 (2001), 689–701.
- [26] DARDENNE, L. E., WERNECK, A. S., NETO, M. O., AND BISCH, P. M. Electrostatic properties in the catalytic site of papain: A possible regulatory mechanism for the reactivity of the ion pair. *Proteins: Structure, Function and Genetics* 253 (2003), 236–253.
- [27] DAUNE, M. *Molecular Biophysics: Structures in Motion*. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [28] DAUTRAY, R., AND LIONS, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Functional and Variational Methods*, vol. 2. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

- [29] DAUTRAY, R., AND LIONS, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Integral Equations and Numerical Methods*, vol. 4. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [30] DAUTRAY, R., AND LIONS, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Evolution Equations II*, vol. 6. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [31] DESJARDINS, B., AND ESTEBAN, M. J. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **146** (1999), 59–71.
- [32] DESJARDINS, B., AND ESTEBAN, M. J. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction: Compressible and incompressible models. *Comm. in Partial Diff. Eq.* **25**, 7 & 8 (2000), 1399–1413.
- [33] DESJARDINS, B., ESTEBAN, M. J., GRANDMONT, C., AND TALLEC, P. L. Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model. *Rev. Mat. Comput.* **14**, 2 (2001), 523–538.
- [34] DIPERNA, R., AND LIONS, P. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Inventiones Mathematicae* **98**, 3 (1989), 511–547.
- [35] DOLLARD, J. D., AND FRIEDMAN, C. N. *Product Integration*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Addison-Wesley Publishing Company, London, 1979.
- [36] DUPONT, G., AND SCOTT, M. Finite elements in Sobolev spaces. *Math. Comp.* **34**, 150 (1980), 441–463.
- [37] EKLAND, I., AND TEMAM, R. *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, New York, 1976.
- [38] FAIR, M. C., AND AJDARI, A. Electrophoresis of dumbbell-like colloidal particles. *Int. J. Multiphase Flow* **16**, 4 (1990), 663–679.

- [39] FEIREISL, E. On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid. *J. Evolution Equations* 3 (2003), 419–441.
- [40] FIGUEREDO, D. *Equações Elípticas não Lineares*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [41] FIXMANN, M. Charged macromolecules in external fields. 1. The sphere. *J. Chem. Phys.* **72** (1980), 5177–5186.
- [42] FOGOLARI, F., AND BRIGGS, J. M. On the variational approach to Poisson-Boltzmann. *Chem. Phys. Letters*, 81 (1997), 135–139.
- [43] FOGOLARI, F., ZUCCATO, P., ESPOSITO, G., AND VIGLINIO., P. Biomolecular electrostatics with the linearized Poisson-Boltzmann equation. *Biophysical J.*, **76** (1999), 1–16.
- [44] FU, C. M. K. N., WONG, V. T. S., CHAN, R. H. M., AND LI, W. J. Dielectrophoretic batch fabrication of bundled carbon nanotube thermal sensor. *IEEE Transactions on Nanotechnology* 3, 3 (2004), 395–403.
- [45] FUJITA, H., AND SAUER, N. On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equation in regions with moving boundaries. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 17, 1A (1970), 403–420.
- [46] GALDI, G. P. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations I: Linearized steady problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [47] GILBARG, D., AND TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2 ed. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [48] GIRAULT, V., AND RAVIART, P. A. *Finite element method for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [49] GLOWINSKI, R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer-Verlag, New York, 1984.

- [50] GOODFELLOW, J. M., PITT, W. R., SMART, O. S., AND WILLIAMS, M. A. New methods for the analysis of the protein-solvent interface. *Computer Phys. Comm.* 91 (1995), 321–329.
- [51] GRANDMONT, C., AND MADAY, Y. Existence de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire. *C. R. Acad. Sci. Paris* 326, Série I (1998), 525–530.
- [52] GREINER, A., NEISE, P., AND STÖCKER, R. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [53] GROSBERG, A. Y., AND KHOKHLOV, A. R. *Statistical Physics of Macromolecules*. AIP Press, New York, 1994.
- [54] GUNSBURGER, M. D., LEE, H. C., AND SEREGIN, G. A. Global existence of weak solutions for the viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions. *J. Math. Fluid Mech.* 2 (2000), 219–266.
- [55] GUNTHER, N. M. *La Théorie du Potentiel et ses Applications Aux Problèmes Fondamentaux de la Physique Mathématique*. Gauthier-Villards, Paris, 1934.
- [56] HAJLASZ, P., AND KOSKELA, P. Sobolev met Poincaré. *Memoirs of the American Mathematical Society* 145, 688 (2000).
- [57] HAJLASZ, P., AND MARTIO, O. Traces of Sobolev functions on fractal types sets and characterization of extension domains. *J. Func. Anal.*, 143 (1997), 221–246.
- [58] HARRISON, J. Geometric dual to the Hodge* operator with applications to the theorem of Gauss and Green. *Preprint* (2001).
- [59] HARRISON, J., AND NORTON, A. The Gauss-Green theorem for fractal boundaries. *Duke J.Math.*, 67 (1992), 575–588.

- [60] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley, Baltimore, 1973.
- [61] HIEMENZ, P. C., AND RAJAGOPALAN, R. *Principles of Colloid and Surface Chemistry*. Dekker, New York, 1986.
- [62] HOLST, M. J. The Poisson-Boltzmann equation: Analysis and multilevel numerical solution (Monograph based on Ph.D.Thesis: Multilevel methods for the Poisson-Boltzmann equation). tech. rep., California Institute of Technology, 1994.
- [63] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, New York, 1975.
- [64] JAYARAM, B., SHARP, K. A., AND HONIG, B. The electrostatic potential of B-DNA. *Biopolymers* 28 (1989), 975–993.
- [65] JERISON, D., AND KENIG, C. The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. Func. Anal.* 130 (1995), 161–219.
- [66] JEROME, J. W. Consistency of semiconductor modeling: An existence/stability analysis for the stationary Van Roosbroeck system. *SIAM J. App. Math.* 45 (1985), 565–590.
- [67] JOHNSON, T. J., AND DAVIS, E. J. An analysis of electrophoresis of concentrated suspensions of colloidal particles. *J. Coll. Interface Sci.* 215 (1999), 397–408.
- [68] KEH, H. J., AND ANDERSON, J. L. Boundary effects on electrophoretic motion of colloidal spheres. *J. Fluid Mech.* 153 (1985), 417–439.
- [69] KIM, J. Y., AND YOON, B. J. Electrophoretic motion of a slightly deformed sphere with a nonuniform zeta potential distribution. *J. Coll. Interface Sci.* 251 (2002), 318–330.
- [70] KORNYSHEV, A. A., AND LEIKEN, S. Electrostatic interaction between helical macromolecules in dense aggregates: an impetus for DNA poly- and meso-morphism. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 95 (1998), 13579–13584.

- [71] KOZONO, H., AND SOHR, H. New a priori estimates for the Stokes equations in exterior domains. *Indiana Univ. Math. J.* **40**, 1 (1991), 1–28.
- [72] KRESS, R., AND ROACH, G. F. Transmission problems for the Helmholtz equation. *J. Math. Phys.* **19**, 6 (1978), 1433–1437.
- [73] KUHN, P., BARBOSA, M., AND LEVIN, Y. Effects of hydrophobicity in DNA surfactant complexation. *Physica A*, 283 (2000), 113–118.
- [74] KUHN, P. S., LEVIN, Y., AND BARBOSA, M. Complex formation between polyelectrolytes and ionic surfactantes. *Chem. Phys. Letters*, 298 (1998), 51–56.
- [75] LADYZHENSKAYA, O. A., AND URAL'TSEVA, N. N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Academic Press, New York, 1968.
- [76] LEE, C. Y., LIN, C. H., AND FU, L. M. Band spreading control in electrophoresis microchips by localized zeta-potential variation using field-effect. *Analyst* **129**, 10 (2004), 931–937.
- [77] LEVICH, V. G. *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [78] LIONS, P. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Incompressible Models*. Oxford Interscience, London, 1994.
- [79] LONG, D. *Systemes Hors D'Equilibre En Matiere Molle*. PhD thesis, L'Universite Paris XI, Paris, Janvier 1996.
- [80] LONG, D., VIOVY, J. L., AND AJDARI, A. Simultaneous action of electric fields and nonelectric forces on a polyelectrolyte: motion and deformation. *Phys. Review Letters* **76**, 20 (1996), 3858–3861.
- [81] LOU, X. J., PANARO, N. J., WILDING, P., FORTINA, P., AND KRICKA, L. J. Mutation detection using ligase chain reaction in passivated

- silicon-glass microchips and microchip capillary electrophoresis. *Biotechniques* **37**, 3 (2004), 392–400.
- [82] LYUBARTSEV, A. P., TANG, J. X., JANMEY, P. A., AND NORDENSKIÖLD, L. Electrostatically induced polyelectrolyte associations of rodlike virus particles. *Phys. Rev. Letters* **81**, 24 (1998), 5465–5480.
- [83] MARTÍN, J. A. S., STAROVOITOV, V., AND TUCSNAK, M. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **161** (2002), 113–147.
- [84] MAZ'JA, V. *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [85] MICU, A. M., BAGHERI, B., IDIN, A. V., SCOTT, L. R., AND PETTIT, B. M. Numerical considerations in the computation of the electrostatic free energy of interaction within the Poisson-Boltzmann theory. *J. Comp. Phys.*, 136 (1997), 203–227.
- [86] MIKHLIN, S. G. *Mathematical Physics, an Advanced Course*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [87] MIRANDA, C. *Equazioni Alle Derivate Parziali di Tipo Ellittico*. Springer-Verlag, Berlin, 1955.
- [88] MORREY, C. B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variation*. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [89] NAKUMURA, H. Roles of electrostatic interactions in proteins. *Quart. J. Biophysics*, 29 (1996), 1–90.
- [90] NECAS, J. *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*. Masson, Paris, 1967.
- [91] NODELCU, S., AND WATSON, J. H. P. Size separation of DNA molecules by pulsed electric field dielectrophoresis. *J. of Physics D-Applied Physics* **37**, 15 (2004), 2197–2204.

- [92] ODQVIST, F. K. Über die randwertaufgaben der hydrodynamik zäher flüssigkeiten. *Math. Zeitschr.* **32** (1930), 329–376.
- [93] PETZOLDT, M. *Regularity and error estimators for elliptic problems with discontinuous coefficients*. PhD thesis, FU Berlin, Berlin, 2001.
- [94] PETZOLDT, M. Regularity results for Laplace interface problems in two dimensions. *Journal for Analysis and Applications* **20** (2001), 431–455.
- [95] POGORZELSKI, W. *Integral Equations and their Applications*, vol. 1. Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [96] POWER, H., AND MIRANDA, G. Second kind integral equation formulation of Stokes' flows past a particle of arbitrary shape. *SIAM-J. Appl. Math.* **47**, 4 (1987), 689–698.
- [97] QUARTERONI, A., AND VALLI, A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [98] REINER, E. S., AND RADKE, C. J. Variational approach to the electrostatic free energy in charged colloidal suspensions: General theory for open systems. *J. Chem. Society Faraday Trans.*, **86** (1990), 3901–3912.
- [99] SCARSI, M., AND CAFLISH, A. Comment on the validation of continuum electrostatic models. *J. Comp. Chem.* **20**, 14 (1999), 1533–1536.
- [100] SELLIER, A. A note on the electrophoresis of a uniformly charged particle. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **55**, 4 (2002), 561–572.
- [101] SHARP, K. A., AND HONIG, B. Calculating total electrostatic energies with the nonlinear Poisson-Boltzmann equation. *J. Phys. Chem.* **94** (1990), 7684–7692.
- [102] SHUGAI, A., AND CARNIE, S. L. Electrophoretic motion of a spherical particle with a thick double layer in bounded flows. *J. Coll. Interface Sci.* **213** (1999), 298–315.

- [103] SOLOMENTSEV, Y., AND ANDERSON, J. L. Electrophoresis of slender particles. *J. Fluid Mech.* **279** (1994), 197–215.
- [104] SONG, Y., ZHANG, Y., SHEN, T., BAJAJ, C. L., MCCAMMON, J. A., AND BAKER, N. A. Finite element solution of the steady-state Smoluchowski equation for rate constant calculations. *Biophysical J.* **86** (2004), 2017–2029.
- [105] STILLINGER, F. H. Interfacial solutions of the Poisson-Boltzmann. *J. Chem. Phys.* **35**, 5 (1961), 1584–1589.
- [106] SWAMINATHAN, T. N., AND HU, H. H. Coiling of a long chain of particles undergoing electrophoresis. *Preprint-University of Pennsylvania* (2001).
- [107] TAKAHASHI, T., AND TUCSNAK, M. Global strong solutions for the two dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid. *J. Math. Fluid Mech.* **6** (2004), 78–101.
- [108] TEUBNER, M. The motion of charged particles in electrical fields. *J. Chem. Phys.* **76**, 11 (1982), 5564–5573.
- [109] TORRES, R. H., AND WELLAND, G. V. The Helmholtz equation and transmission problems with Lipschitz interfaces. *Indiana J. Math.* **42** (1993), 1457–1486.
- [110] TRACY, C. A., AND WIDOW, A. On exact solutions to the cylindrical Poisson-Boltzmann equation with application to polyelectrolytes. *Phys. A* **244** (1997), 402–413.
- [111] TRUDINGER, N. On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.* **17**, 5 (1967), 473–483.
- [112] URAL'TSEVA, N. N. Impossibility of W_q^2 bounds for multidimensional elliptic equations with discontinuous coefficients. *Seminars in Mathematics: V. A. Steklov Math. Inst., Leningrad V, I* (1969), 1022–1023.

- [113] VENEMA, P. The viscous flow of charged particles through a charged cylindrical tube. *J. Fluid Mech.* 282 (1995), 45–73.
- [114] VERCHOTA, G. Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace’s equation in Lipschitz domains. *J. Func. Anal.* 59 (1984), 572–611.
- [115] WEINBERGER, H. F. On the steady fall of a body in a Navier-Stokes fluid. *Proc. Symp. Pure Math. XXIII* (1973), 421–439.
- [116] YOON, B. J., AND KIM, S. A boundary collocation method for the motion of two spheroids in Stokes flow: hydrodynamic and colloidal interactions. *Int. J. Multiphase Flow* 16, 4 (1990), 639–649.
- [117] ZHANG, Q., BEARD, D. A., AND SCHLIK, T. Constructing irregular surfaces to enclose macromolecular complexes for mesoscale modeling using the discrete surface charge optimization algorithm. *J. Comp. Chem.* 24, 16 (2003), 2063–2074.