UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio

por

Jorge Nazareno Batista Melo

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Ensino de Matemática

Profa. Dra. Maria Paula Gonçalves Fachin
Orientadora

Porto Alegre, julho de 2012.

Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio

por

Jorge Nazareno Batista Melo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, submetida como requisito parcial à obtenção do grau de

Mestre em Ensino de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Paula Gonçalves Fachin

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogério Ricardo Steffenon
UNISINOS

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana
PPGEM / IM / UFRGS

Profa. Dra. Marcia Notare Meneguetti
PPGEM / IM / UFRGS

CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS

A Deus que me proporcionou a vida com todas as suas plenitudes e possibilidades.

A minha esposa pelo incentivo, confiança e dedicação durante a realização deste trabalho, sabendo compreender com sabedoria os momentos de minha ausência.

A meu filho pela alegria e estímulo que me transmitiu, transformando as dificuldades em estímulos para a boa realização deste trabalho.

A minha Orientadora Professora Doutora Maria Paula Gonçalves Fachin meus agradecimentos pela orientação sábia e objetiva na realização deste projeto.

A todos os integrantes dos Corpos Docente e Administrativo do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS pela dedicação incansável a nobre causa do bem formar seus alunos.

A todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para que este trabalho fosse concluído.

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo apresentar uma proposta de estudo do assunto Programação Linear no currículo do Ensino Médio na disciplina de matemática.

Faremos uma revisão acerca de alguns temas relevantes sobre a Programação Linear, bem como sobre a Resolução de Problemas em Matemática, a qual consistirá na metodologia usada nessa atividade.

Será apresentada uma aplicação prática dessa proposta, através de uma sequência didática, que foi aplicada num grupo de alunos do Ensino Médio, numa escola da rede de Ensino Público Federal da cidade de Porto Alegre, no ano de 2011.

A Programação Linear por apresentar caráter aplicativo e contextualizado pode ser perfeitamente trabalhada no Ensino Médio do currículo da disciplina de matemática, pois tornará os discentes mais participativos e motivados a estudar e discutir essa disciplina.

Seguindo a metodologia da resolução de problemas, apresentaremos algumas atividades que poderão servir de sugestões para possíveis aplicações em outros contextos e situações.

Vale destacar que a resolução de problemas em matemática pode aproximar o aluno dessa disciplina, criando um ambiente muito favorável para o pleno desenvolvimento das suas capacidades cognitivas, aliando conhecimento, autonomia, criatividade, bem como aplicando, contextualizando e relacionando a matemática com o mundo que nos cerca.

Palavras chave: Proposta de Ensino – Programação Linear – Resolução de Problemas – Educação Matemática – Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present work has as its main objective to present a proposal of study of the subject Linear Programming on the curriculum of High Schools in the discipline of Mathematics.

We will do a review on some relevant themes about Linear Programming, as well as the resolution of Math problems, which will consist in the methodology used in this activity.

A practical application of this proposal will be presented through a didactic sequence, which was applied in a group of High School students from a federal public school in the city of Porto Alegre, in 2011.

Because of its applicative and contextualized character, the Linear Programming is perfectly adequate to be presented and worked in High Schools in the discipline of Math, for it will make students more participative and motivated to study and discuss this subject.

Following the methodology of resolution of problems, we will present some activities that may serve as suggestions to possible applications in other contexts and situations.

It's important to point out that the resolution of Math problems may approach students to this discipline, creating a very favorable environment to the full development of their cognitive capacities, allying knowledge, autonomy, creativity, as well as applying, contextualizing and relating Mathematics to the world around us.

Keywords: Teaching Proposal – Linear Programming – Resolution of Problems – Mathematics Education – Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

O Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), iniciado em 2005, tem como objetivo mais amplo a melhoria da qualificação profissional de Professores de Matemática dos Níveis Fundamental e Médio e da educação profissional técnica e pós-técnica, em plena atividade no sistema de ensino, em termos de conteúdos de Matemática, de aspectos teóricos, metodológicos e epistemológicos da Educação Matemática, e do uso de novas tecnologias no ensino de Matemática.

Visa, também, elaborar recursos didáticos com potencial para serem reproduzidos na sala de aula do ensino básico, recorrendo a diferentes metodologias e, em particular, dando ênfase à metodologia da modelagem matemática, à metodologia da resolução de problemas de aplicação e ao uso da informática ou outras tecnologias.

Assim, esta dissertação, que faz parte desse programa de Pós-Graduação, tem como objetivo apresentar uma proposta de Ensino e Aprendizagem da Programação Linear no Ensino Médio, utilizando a metodologia da Resolução de Problemas para sua aplicação.

A justificativa para a presente proposta será abordada ao longo do capítulo 2, a partir da nossa vivência prática em sala de aula, aliada ao estudo teórico desenvolvido ao longo deste curso de mestrado, sempre em sintonia com as mais atuais tendências e metodologias em ensino de matemática.

A fim de auxiliar e embasar o estudo dos professores no assunto, apresentamos no capítulo 3 alguns fundamentos acerca da Programação Linear. Esse estudo fará uma abordagem explorando aspectos históricos desse ramo da matemática, pois acreditamos ser de grande importância para aproximar e valorizar a construção do conhecimento matemático na perspectiva da programação linear. Além disso, apresentaremos algumas referências bibliográficas que possibilitarão um maior aprofundamento do assunto para os que assim desejarem.

No capítulo 4 apresentaremos uma fundamentação teórica da resolução de problemas, uma vez que acreditamos ser a metodologia mais adequada para embasar esta proposta de atividade de aplicação da matemática, mais particularmente da programação linear. Procuraremos, ainda, mostrar algumas variações de perspectivas sobre esse assunto, bem como alguns de seus teóricos e grupos de pesquisa nessa área.

.

Além disso, faremos uma reflexão sobre algumas formas de pensar do aluno, destacando várias medidas que poderão facilitar a atividade de pensar e, consequentemente, a resolução de problemas.

No capítulo 5, será apresentada nossa aplicação da experiência prática, apontando as características da escola em que a mesma foi executada, bem como as particularidades do grupo de alunos que participou dessa atividade. Lembramos que essas particularidades da escola e dos alunos servem de orientação geral para o desenvolvimento da atividade, entretanto essa aplicação pode e deve ser adaptada a cada realidade de modo a obter resultados mais eficazes e particularizados.

No capítulo 6, apresentaremos a sequência de aulas que foram desenvolvidas nessa atividade. Nelas mostraremos os objetivos, as atividades, bem como nossos comentários sobre cada uma delas de modo a oferecer nossas impressões, destacando as facilidades e as dificuldades encontradas durante as suas execuções.

Finalmente, mostraremos as conclusões dessa dissertação sobre a aplicação dessa proposta prática, procurando sempre verificar algumas reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem em matemática.

Desde já, acreditamos que nossa proposta de inclusão da programação linear no Ensino Médio na disciplina de matemática pode despertar o interesse dos docentes que, assim como eu, sentem necessidade de apresentar a matemática a seus alunos de maneira mais contextualizada e mais aplicada, despertando seus interesses, tornando-os mais participativos, e desenvolvendo sua autonomia e criatividade na resolução de problemas.

2 JUSTIFICATIVA

O processo de ensino e aprendizagem em matemática é complexo e constituído por muitas e diferentes variáveis, as quais se relacionam e se interligam de maneira muito dinâmica.

Esse sistema ativo e intenso de busca de metodologias e práticas de como ensinar e como aprender em matemática é formado por vários obstáculos, que são do conhecimento, principalmente, dos que participam, fazem ou estudam essa disciplina tão fascinante e ao mesmo tempo tão incompreendida – a matemática.

Observando os diversos indicadores de desempenho educacional, em especial, na disciplina de matemática, as dificuldades tanto de ensino quanto de aprendizagem se fazem presentes em grande parte das atividades que são propostas pelos professores e desenvolvidas pelos alunos.

Entretanto, acreditamos que essas adversidades, presentes no ensino de matemática, devem servir de estímulo para busca de alternativas para que possamos, se não eliminá-las por completo, pelo menos diminui-las gradativamente.

A prática docente, os debates, os noticiários, as bibliografias, ou simplesmente as conversas entre educadores de matemática indicam, com toda clareza, a imensa necessidade de buscarmos uma maior motivação para nossos discentes, através de uma matemática mais interessante e relacionada aos aspectos socioculturais dos alunos.

Essas necessidades apresentaram-se para nós desde os tempos do curso de graduação em Licenciatura em Matemática. Naquela época, já nos preocupávamos com o grande distanciamento que havia entre a matemática e as nossas vivências e experiências. Ou seja, apesar do grande gosto pessoal que tínhamos para os números, a matemática parecia pouco real e com pouquíssima relação com o nosso dia a dia.

Nossa motivação, necessidade e interesse de desenvolvimento de atividades voltadas para uma melhor aproximação dos alunos com a matemática surgiu a partir da nossa experiência efetiva na educação básica, em especial no Ensino Médio, uma vez que os assuntos são, de um modo geral, apresentados, desenvolvidos e avaliados, com pouco significado, pouca contextualização, distanciando cada vez mais a matemática da realidade, da motivação, bem como de suas aplicações.

No 2º ano do Ensino Médio, trabalhamos os conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares, os quais são apresentados nos livros didáticos através de situações pouco contextualizadas, em atividades extremamente algébricas ou idealizadas, isto é, distante de uma situação próxima ou pelo menos real dos alunos.

Assim, tentando localizar alguma ferramenta que valorizasse e justificasse o estudo das Matrizes e Sistemas Lineares no Ensino Médio, buscamos no Ensino Superior de Matemática o estudo da Programação Linear, na disciplina de Álgebra Linear, que é uma extensão natural e aprofundada do estudo de Matrizes e Sistemas Lineares do Ensino Médio.

Aliada ao conteúdo de Programação Linear, tínhamos a necessidade da utilização de uma metodologia de ensino que facilitasse a abordagem desse conteúdo.

Por outro lado, a própria história da Pesquisa Operacional-Programação Linear nos mostra que ela teve sua origem a partir de necessidades reais e concretas em situações problemas surgidas durante a Segunda Guerra Mundial, ou seja, desde seu surgimento, passando por todo seu desenvolvimento, a Programação Linear sempre esteve relacionada a resolver problemas de aplicação nas diversas áreas do conhecimento.

Acreditamos que a Programação Linear, com alguma adaptação de linguagem e exploração direcionada para o Ensino Médio, possa tornar-se valiosa ferramenta na nossa tarefa de orientadores do processo de ensino e aprendizagem em matemática.

Dessa forma, após pesquisa bibliográfica, nos pareceu mais apropriado para o desenvolvimento da presente dissertação e aplicação da atividade junto aos alunos, a utilização de situações-problemas, uma vez que estas convergiriam para nossas necessidades iniciais de trabalhar a matemática de forma mais próxima da realidade possível.

Além disso, dentro do assunto Programação Linear, sabíamos das soluções geométricas que podíamos trabalhar com os alunos, utilizando para tal o auxílio de software de construção de gráficos que, na nossa visão, auxiliaria e estimularia, ainda mais, nossos alunos para desenvolverem nossas propostas de atividades.

Junto a nossas concepções, verificamos que os documentos oficiais nos apontam para esta direção de procedimentos, isto é:

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. (Brasil, 1999, p. 251)

Assim, entendemos uma clara orientação para a necessidade de se trabalhar matemática em sala de aula, utilizando problemas como forma de apresentar e desenvolver os assuntos.

Os documentos oficiais nos apontam para a necessidade de desenvolvimento da criatividade, da autonomia, do trabalho coletivo e da interação que deve estar sempre presente nas atividades trabalhadas.

Além disso, destacam a marcante presença de diversos meios de informação dos quais temos necessidade de estarmos inseridos e, ainda, sermos capazes de atuação junto a um mundo cada vez mais globalizado, em que a educação deve assumir seu papel de oferecer a todos os cidadãos oportunidades de contato, descoberta e aprimoramento de características úteis e necessárias para uma boa convivência em sociedade.

Assim, acreditamos que desenvolver a matemática através da resolução de problemas, além de torná-la mais real e próxima do aluno, pode alcançar essas necessidades, uma vez que essa metodologia propicia desafios, cujas tentativas de superação resultarão naturalmente na formação de cidadãos melhores preparados para viver em sociedade.

Assim, de acordo com Smole (2001, p. 92):

> A perspectiva da resolução de problemas caracteriza-se por uma postura de inconformismo diante dos obstáculos e do que foi estabelecido por outros, sendo um exercício contínuo do desenvolvimento do senso crítico e da criatividade, que são características primordiais daqueles que fazem ciência e objetivos do ensino de matemática.

Ainda, nossa vivência de sala de aula, nos sugere que uma proposta de atividade didática contextualizada, sobretudo à realidade do discente, produz uma situação de aprendizagem muito favorável, participativa e estimulante tanto para o professor quanto para o aluno.

Por outro lado, revisando documentos oficiais que regem a educação no Brasil, encontramos importante referencial teórico para nossa atividade, ou seja,

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (Brasil, 1999, p. 6)

Por fim, acreditamos que a utilização da Programação Linear como aprofundamento dos assuntos Matrizes e Sistemas Lineares no Ensino Médio, através da resolução de problemas, pode contribuir sobremaneira para a formação dos nossos alunos, não somente sob o aspecto matemático, pois ela contextualiza e aproxima a matemática da realidade, mas também como ferramenta motivadora de descoberta, investigação, autonomia, criatividade e superação.

3 TEORIA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Apresentaremos um breve histórico sobre Programação Linear, bem como alguns conceitos importantes que serão utilizados durante o desenvolvimento de nossas atividades.

3.1 Histórico

Acreditamos ser de grande importância e bastante interessante trabalhar, sempre que possível, com a história da matemática, uma vez que ela mostra a construção do conhecimento, com suas necessidades e dificuldades. Além disso, humaniza e integra a matemática a outros saberes, bem como permite compreender a origem dos pensamentos e suas evoluções. Segundo D'Ambrosio (1999, p.97), "... um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas."

As raízes da Programação Matemática vêm desde a antiguidade, visto que Euclides (século III a.C.), por exemplo, no seu livro III, procurava encontrar a maior e a menor distância de um ponto a uma circunferência, e no livro IV descreveu uma forma de encontrar um paralelogramo de área máxima com um perímetro conhecido. Ele também propunha outros problemas, que foram elucidados nos séculos XVII e XVIII, quando se desenvolveram métodos de cálculo que permitiram resolver esses problemas de maximizar ou de minimizar áreas.

Vejamos abaixo algumas ideias importantes sobre a origem e o desenvolvimento da Pesquisa Operacional:

- A Pesquisa Operacional tem sua origem na Grã-Bretanha (GB), impulsionada pelo conflito com a Alemanha durante a Segunda Guerra Mundial.
- O termo "Pesquisa Operacional" [Pesquisa em Operações (militares)] foi escolhido para denominar este novo ramo de ciência aplicada.
- Inicialmente foi utilizada para organização de manutenção e inspeção de vôo.
- O efeito geral das medidas implementadas pela "Pesquisa Operacional" foi que, em 1945, a probabilidade de destruição por ataque a *U-boots*[1] havia se elevado a 40% (ela começou em 2-3%).

---

[1] É empregado na língua inglesa para designar qualquer um dos submarinos alemães da Primeira e Segunda Guerra Mundial.

- As primeiras equipes em Pesquisa Operacional consistiam de indivíduos provenientes de várias disciplinas: por exemplo, um grupo consistia de um físico, dois físicos-matemáticos, dois fisiologistas e um topógrafo.

No fim da guerra a Pesquisa Operacional ficou bem estabelecida nas forças armadas da Grã-Bretanha e dos Estados Unidos. Entretanto, na GB os integrantes das equipes de Pesquisa Operacional voltaram ao seu trabalho original de tempo de paz, de modo que a Pesquisa Operacional não se disseminou tão bem, exceto em algumas indústrias isoladas (ferro/aço e carvão). Nos Estados Unidos, por outro lado, a Pesquisa Operacional se disseminou para as universidades onde o treinamento específico na nova disciplina se iniciou.

Essa abordagem de planejamento via Programação Linear somente se consolidou com George Dantzig, em 1947, que desenvolveu o Método Simplex, capaz de resolver qualquer problema de Programação Linear. Dantzig desenvolveu esta técnica quando trabalhava na Rand Corporation no projeto SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs) para a Força Aérea Americana, desenvolvendo técnicas de otimização para problemas militares.

O algoritmo Simplex utiliza uma quantidade muito grande de cálculos, no entanto, nos primeiros anos de uso, ele se apoiou exclusivamente na resolução manual. Com o surgimento do computador, em 1951, a Programação Linear encontrou seu aliado natural e foi se expandindo de uma maneira extraordinária.

Das classes de problemas de Programação Matemática[2], veremos aqui, em particular, a designada por Programação Linear.

Problemas de Programação Linear são caracterizados por terem função-objetivo linear, restrições (equações e/ou inequações) lineares e variáveis reais não-negativas.

Veremos mais adiante e com maior detalhe que função-objetivo é a função que modela o objetivo do problema.

3.2 Problema Inicial

Apresentamos um problema inicial para, a partir dele, verificarmos alguns conceitos sobre programação linear.

---

[2] Os problemas de Programação Matemática são uma classe particular de Problemas de Otimização, aplicados nos campos da organização e da gestão econômica, em que o objetivo e as restrições são dados como funções matemáticas e relações funcionais. Disponível em:< http://www.cpdee.ufmg.br/~joao/Esp_CEAI2010/OAEP_V10.pdf>. Acesso em: 12 de maio de 2012, às 9h12min

Novamente, destacamos que Problemas de Programação Linear são caracterizados por terem função-objetivo linear, restrições (equações e/ou inequações) lineares e variáveis reais não-negativas.

3.2.1 Problema 1: Venda de Bolos

Uma padaria dispõe de 150 kg de farinha, 22 kg de açúcar e 27,5 kg de manteiga, produzindo dois tipos de bolo A e B. Para a produção de uma dúzia de bolos do tipo A gasta 3 kg de farinha, 1 kg de açúcar e 1 kg de manteiga e para a produção de uma dúzia de bolos do tipo B gasta 6 kg de farinha, 0,5 kg de açúcar e 1 kg de manteiga. Supondo que o lucro resultante da produção de uma dúzia de bolos do tipo A é de 20 reais e o lucro resultante da produção de uma dúzia de bolos do tipo B é de 30 reais, quantas dúzias de bolos do tipo A e bolos do tipo B deve produzir a padaria para maximizar seu lucro?

O primeiro procedimento a ser adotado é efetuar uma cuidadosa leitura do problema, a fim de verificar os dados (informações) úteis, as restrições, bem como o objetivo do problema, aquilo que se deseja solucionar.

Nesse caso, o que se deseja é determinar a quantidade de dúzias de bolo de cada tipo (A e B) que a padaria deve produzir para obter o objetivo maior, ou seja, o maior lucro.

Organizamos a tabela abaixo, com os dados do problema, de modo a facilitar a compreensão das informações.

Tipo	Farinha (kg)	Açúcar (kg)	Manteiga (kg)	Lucro (R$)
A	3	1	1	20
B	6	0,5	1	30
Disponível	150	22	27,5	

TABELA 1. Problema 1 - Venda de Bolos

Assim, para resolvermos o problema, chamaremos de x a quantidade de dúzias do bolo do tipo A e y a quantidade de dúzias do bolo do tipo B.

O lucro máximo dependerá da quantidade de dúzias de cada tipo A e B.

O que desejamos aqui é encontrar o lucro máximo, que é o objetivo do problema. A função que corresponde a esse objetivo, chamada de função-objetivo, é $f(x, y) = z = 20x + 30y$.

O problema apresenta algumas restrições, que precisam ser tratadas sob a linguagem matemática. As inequações correspondentes são:

Farinha: $3x + 6y \leq 150$

Açúcar: $x + 0{,}5y \leq 22$

Manteiga: $1x + 1y \leq 27{,}5$

Restrições implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, uma vez que as incógnitas x e y devem ser não negativas).

Observamos que tanto a função-objetivo quanto as restrições são lineares.

Resumindo, teremos:

Maximizar (função-objetivo): $z = 20x + 30y$

Sujeito à (restrições):

$$
\begin{aligned}
3x + 6y &\leq 150 \\
x + 0{,}5y &\leq 22 \\
1x + 1y &\leq 27{,}5 \\
x &\geq 0 \\
y &\geq 0
\end{aligned}
$$

No exemplo acima, vemos que temos um problema de otimização a ser resolvido. No caso geral, uma vez identificado que precisamos resolver um problema de otimização, temos três passos iniciais a seguir:

1. identificar ou definir as variáveis de decisão;
2. obter a função-objetivo, ou seja, a função que queremos maximizar ou minimizar;
3. identificar as condicionantes ou restrições do problema.

Vamos verificar a aplicação desses passos no exemplo seguinte:

3.2.2 Problema 2: Dieta

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada porção de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada porção de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível?

Sabe-se que cada porção de carne custa 2,5 unidades monetárias e cada porção de ovo custa 3 unidades monetárias.

1. Variáveis de Decisão: Precisamos saber a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível. Assim, podemos definir as seguintes variáveis de decisão: x quantidade diária de carne e y quantidade diária de ovo.

2. Função-objetivo: Precisamos minimizar o custo da alimentação a ser consumida. A função-objetivo é o custo, dado pela quantidade diária de carne e ovos consumida, associada ao custo por unidade de cada produto. Ou seja, $z = 2,5x + 3y$.

3. Restrições: Além da restrição de não-negatividade, temos os nutrientes mínimos diários de vitaminas e proteínas:

Vitaminas: $4x + 8y \geq 32$

Proteínas: $6x + 6y \geq 36$

$x \geq 0; y \geq 0$

Assim, temos o seguinte Problema de Programação Linear:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar :} & z = 2,5x + 3y \\
\text{sujeito a:} & 4x + 8y \geq 32 \\
 & 6x + 6y \geq 36 \\
 & x \geq 0; y \geq 0
\end{array}
$$

Segundo Namen A. A. e Bornstein, C. T (2004), O Problema da Dieta foi um dos primeiros problemas a serem resolvidos pelo Método Simplex por Dantizg em 1947. Esse mesmo problema foi inicialmente apresentado, em 1945, por George Stigler, o qual consistia:

Para um homem mediano pesando aproximadamente 70 kg, qual quantidade dentre 77 diferentes alimentos deve ser ingerida diariamente, de modo que as necessidades mínimas de nutrientes sejam iguais às recomendadas pelo Conselho Nacional de Pesquisa Norte-Americano e, além disso, a dieta elaborada tenha o menor custo possível. Stigler resolveu um conjunto amplo de inequações, através de uma heurística inteligente, obtendo um custo total para a dieta de 39,93 dólares por ano. Nesse processo, foram examinadas manualmente 510 diferentes possibilidades de combinação de alimentos. Já em 1947, com o método simplex divulgado e com o apoio de nove pessoas utilizando calculadoras de mesa de operação manual, após a utilização de um recurso estimado de 120 dias-homem, obteve-se o custo final da dieta de Stigler a 39,69 dólares, apenas 24 centavos de dólar menos que o valor originalmente obtido por Stigler. Para mais detalhes veja Namen A. A. e Bornstein, C. T, (2004).

3.3 Conceitos Utilizados

De acordo com Neto (2006, p. 14), a **região factível** de um Problema de Programação Linear é o conjunto de todos os pontos que satisfazem todas as restrições. Cada restrição do tipo $a_1x + b_1y = c_1$ define uma reta no plano xy. Cada restrição da forma $a_2x + b_2y \geq c_2$ ou $a_2x + b_2y \leq c_2$ define um semi-plano que inclui a reta da fronteira $a_2x + b_2y = c_2$. Assim, a região factível é sempre uma interseção de um número finito de retas e semi-planos.

Para um problema de maximização uma **solução ótima** de um Problema de Programação Linear é um ponto na região factível que faz com que a função-objetivo tenha o maior valor. Da mesma forma, para um problema de minimização, uma solução ótima é um ponto na região factível que apresenta o menor valor na função-objetivo.

Uma região factível é dita limitada se puder ser englobada por um círculo, e é dita ilimitada, caso contrário.

Se a região factível é vazia, o Problema de Programação Linear não possui solução.

Os pontos de fronteira de uma região factível que são as interseções de dois segmentos de retas de fronteira são chamados de **pontos extremos**.

Apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 1. *Se a região factível de um problema de programação linear é não-vazia e limitada, então a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região factível. Se a região factível é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximos ou mínimos, contudo, se atingir um máximo ou mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.*

Um problema de Programação Linear com duas variáveis pode ser resolvido geometricamente. Esse método, de acordo com Boldrini e Outros (1980, p. 362), é conhecido como Método Geométrico de Resolução em Programação Linear.

Vamos retomar como exemplo o problema da “Venda de Bolos” (pág. 8 e 9).

Naquele problema, temos as seguintes condições:

Maximizar Lucro: $z = 20x + 30y$

Sujeito a:

$$3x + 6y \leq 150$$
$$x + 0{,}5y \leq 22$$
$$1x + 1y \leq 27{,}5$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Vamos seguir passo a passo a sua resolução através do método geométrico:

1º passo: Determinar o conjunto dos pontos que satisfazem as restrições do Problema. Vamos determinar a interseção das regiões definidas por cada uma das inequações.

Para determinar a região do plano xy que satisfaz a restrição $3x + 6y \leq 150$, traçamos a reta $3x + 6y = 150$ e identificamos quais dos semi-planos determinados por ela compreende o conjunto dos pontos (x, y) que satisfaz a inequação. Para identificar esse semi-plano, escolhemos um ponto qualquer P e verificamos se ele satisfaz a desigualdade. Se o ponto tomado satisfizer, significa que todos os pontos desse semi-plano satisfazem a inequação. Caso contrário, o outro semi-plano, que não contém P, satisfaz tal inequação.

A figura 3.1 apresenta a reta $3x + 6y = 150$. Vamos tomar o ponto P(0, 0). Verificamos que P satisfaz a inequação $3x + 6y \leq 150$, ou seja, o semi-plano apresentado na figura 3.2 contém os pontos que satisfazem essa inequação. Vemos que a região abaixo da reta $3x + 6y = 150$ satisfaz a desigualdade.

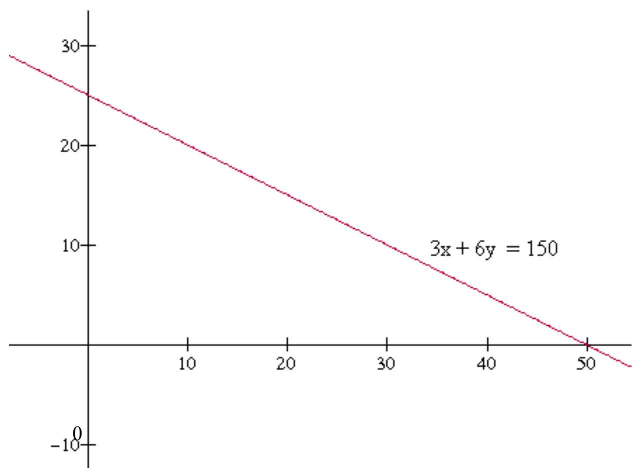


FIGURA 3.1: Reta $3x + 6y = 150$

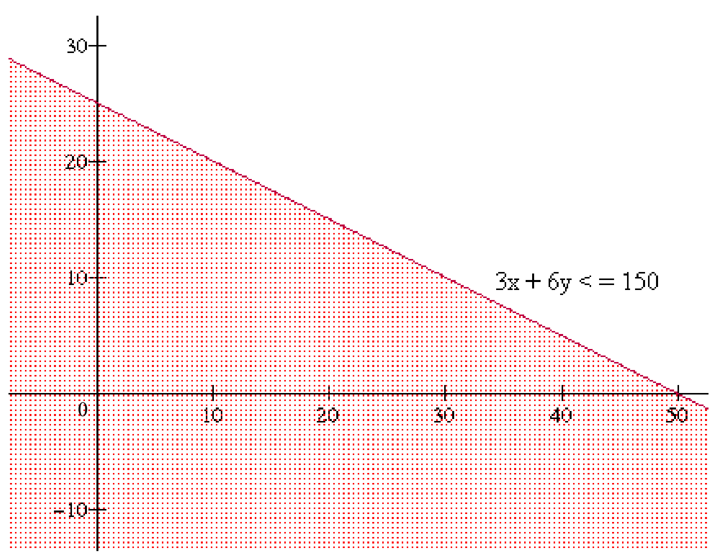


FIGURA 3.2: Semi-plano que satisfaz a inequação $3x + 6y \leq 150$

Vamos traçar a reta x + 0,5y = 22 e executar o mesmo procedimento para determinar o semi-plano que compreende os pontos que satisfazem a segunda restrição do problema: x + 0,5y $\leq$ 22.

Testando para o mesmo ponto (0, 0) vemos que ele satisfaz a inequação e, portanto, o semi-plano desejado é dado pela figura 3.3.

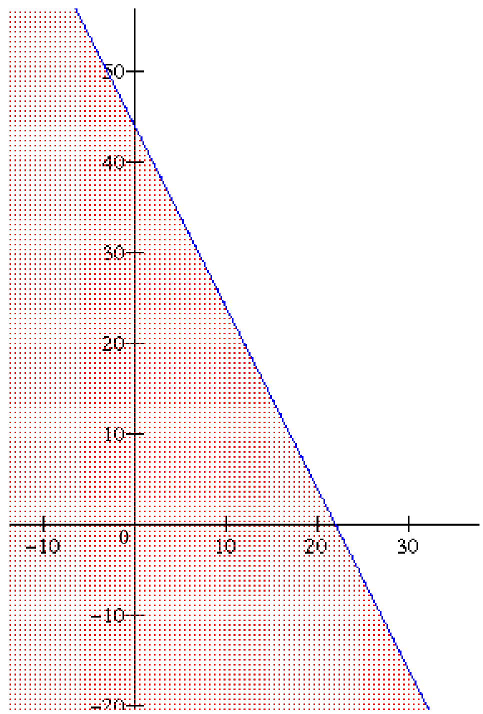


FIGURA 3.3: Semi-plano x + 0,5y $\leq$ 22

A figura 3.4 apresenta as duas retas e a interseção dos dois semi-planos.

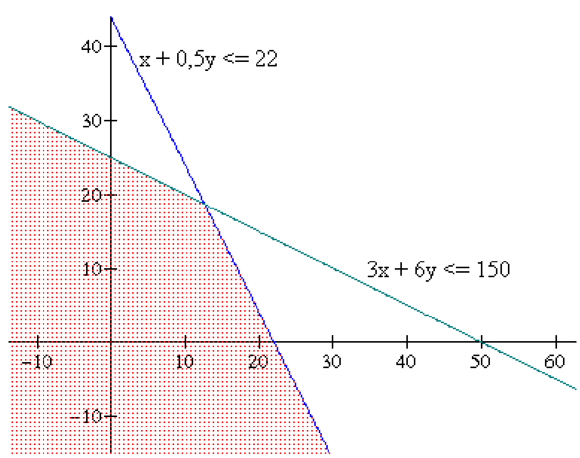


FIGURA 3.4: Semi-planos 3x + 6y $\leq$ 150 e x + 0,5y $\leq$ 22

A figura 3.5 mostra a intersecção dos três semi-planos $3x + 6y \le 150$, $x + 0,5y \le 22$ e $1x + 1y \le 27,5$.

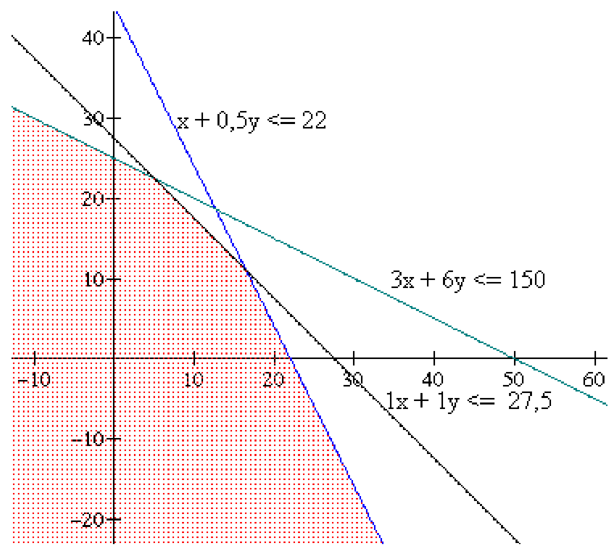


FIGURA 3.5: Semi-planos $3x + 6y \le 150$, $x + 0,5y \le 22$ e $1x + 1y \le 27,5$

Vale destacar que devemos ter $x \ge 0$ e $y \ge 0$. Assim, a região apresentada na figura 3.6 consiste de pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições do problema. Essa é chamada de região factível.

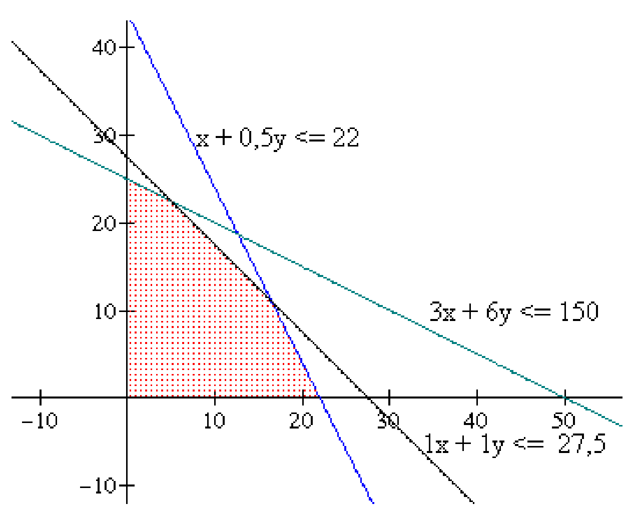


FIGURA 3.6: Região factível do Problema da "Venda de Bolos"

2º passo: Determinar o ponto da região factível que dá como resultado maior lucro.

Poderemos atribuir valores à função-objetivo Lucro ($z = 20x + 30y$), por exemplo $z = z_0$, e verificar se a reta, chamada de curva de nível, intercepta a região factível. Vejamos que, se $z_0 \geq 0$, $z_0 \in R$, qualquer ponto da reta $20x + 30y = z_0$ que intercepta a região factível, satisfaz as restrições e tem lucro $z = z_0$.

A figura 3.7 apresenta algumas curvas de nível (retas tracejadas) para Lucro z = 100; 300; 440; 600; 775.

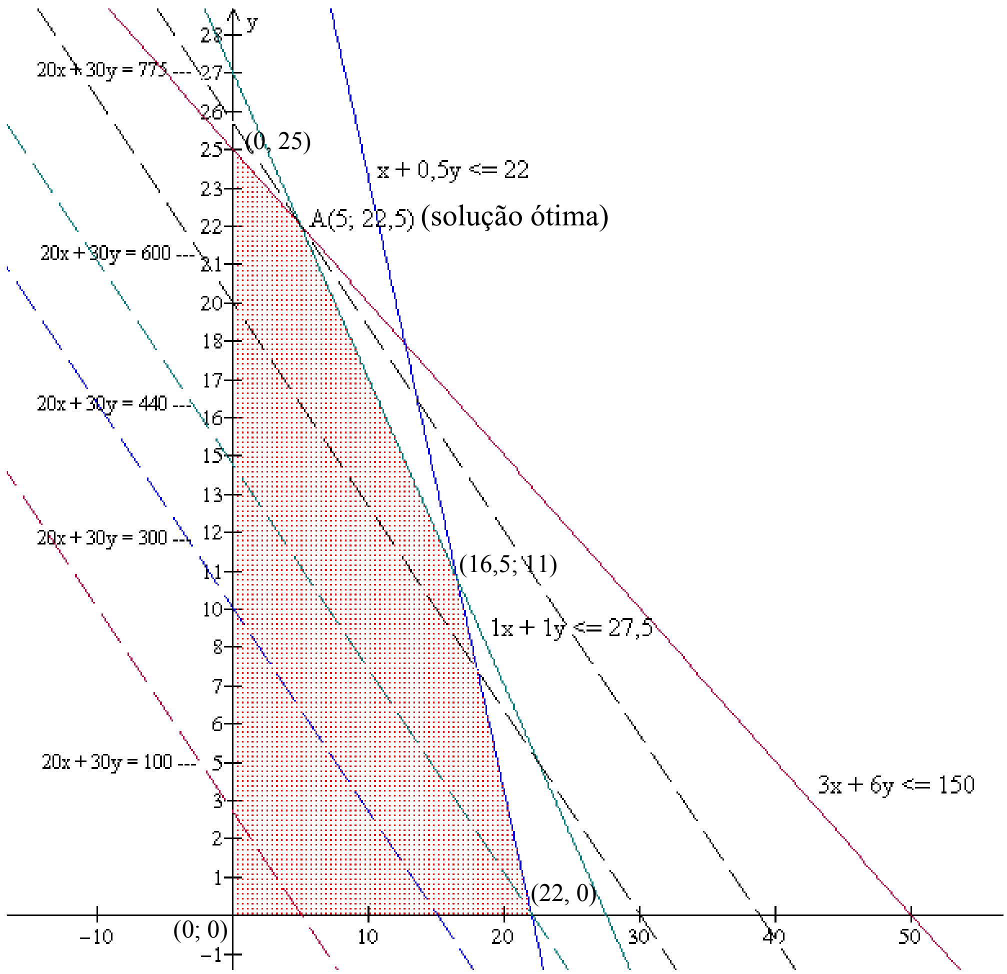


FIGURA 3.7: Curvas de Nível da Função-objetivo e solução ótima

Esse conjunto de retas paralelas, que obtemos ao substituir z_0 por valores na função objetivo, nos indica, intuitivamente, que o máximo ocorre em um ponto extremo ou em um segmento de reta da região factível. Para demonstração ver Pereira (2010).

Veja que a reta $20x + 30y = 775$ intercepta o ponto A(5; 22,5) da região factível. Se aumentarmos o valor do lucro z_0 para valores maiores que 775 a curva de nível $20x + 30y = z_0$ não interceptará a região factível.

Após analisarmos as várias possibilidades, de acordo com a figura 3.7, concluímos que o lucro máximo ocorre no ponto (5; 22,5), que chamaremos de solução ótima. Observe que esse ponto é um dos vértices da região factível.

Assim, no caso do Problema da "Venda de Bolos", a solução ótima é produzir 5 dúzias do bolo A e 22,5 dúzias do bolo B.

Como a região factível possui infinitos pontos não é possível obter a solução ótima testando a função-objetivo em cada ponto.

Para resolver esse problema usamos o teorema 1 (página 12) e calculamos o valor da função-objetivo somente nos pontos extremos da região factível. Concluímos que o ponto que resultar maior valor para função-objetivo é a solução ótima, conforme a tabela abaixo.

	Quantidade de dúzias do bolo do tipo A	Quantidade de dúzias do bolo do tipo B	Lucro (máximo)
Par ordenado	X	Y	z = 20x + 30y
(0, 0)	0	0	0
(0, 25)	0	25	750
(5; 22,5)	5	22,5	775
(16,5; 11)	16,5	11	660
(22, 0)	22	0	440

TABELA 2. Pontos extremos e Função-Objetivo

Retornando ao Teorema 1 (página 12). Para demonstração desse teorema veja Goldbarg e Luna (2000).

Mostra-se que a curva de nível da função-objetivo intercepta a região factível, se esta for limitada, com seu maior valor ou num ponto extremo (solução ótima única) ou numa reta fronteira (soluções infinitas). Se a região factível for ilimitada poderemos ter uma solução ilimitada, se a função-objetivo crescer na direção da região ilimitada num problema de maximização ou se a função-objetivo decrescer na direção da região ilimitada.

Nos problemas de maximização e quando a função-objetivo crescer na direção contrária ao lado da região que é ilimitado, teremos pelo menos uma solução ótima. Da mesma forma, nos problemas de minimização e quando a função-objetivo decrescer na direção contrária ao lado em que a região é ilimitada, teremos pelo menos uma solução ótima.

Podemos resumir isso da seguinte forma:

Em um Problema de Programação Linear (PPL) acontece uma das seguintes situações

Caso 1: O PPL tem uma única solução ótima;

Caso 2: O PPL tem múltiplas soluções ótimas;

Caso 3: O PPL é inviável, ou seja, a região viável é vazia e não existe solução.

Caso 4: O PPL é ilimitado, ou seja, existem pontos na região viável cujo valor da função-objetivo é arbitrariamente alto no caso de problema de maximização e arbitrariamente pequeno no caso de problema de minimização.

Vamos verificar cada um desses casos:

Exemplo 1:

Maximizar $z = 3x + 4y$

sujeito a: $3x + 5y \geq 18$

$-x + y \leq 2$

$x - 2y \leq 3$

$x \geq 0, y \geq 0$

A região viável é ilimitada, conforme mostra a figura 3.8. Como a função-objetivo cresce indefinidamente na região viável, a solução é ilimitada, ou seja, dado um número real s qualquer, existe (pelo menos) um ponto $A = (x_a, y_a)$ na região viável tal que $z = 3x_a + 4y_a > s$.

Exemplo 2:

Maximizar $z = -2x + y$

sujeito a: $3x + 5y \geq 18$

$-x + y \leq 2$

$x - 2y \leq 3$

$x \geq 0, y \geq 0$

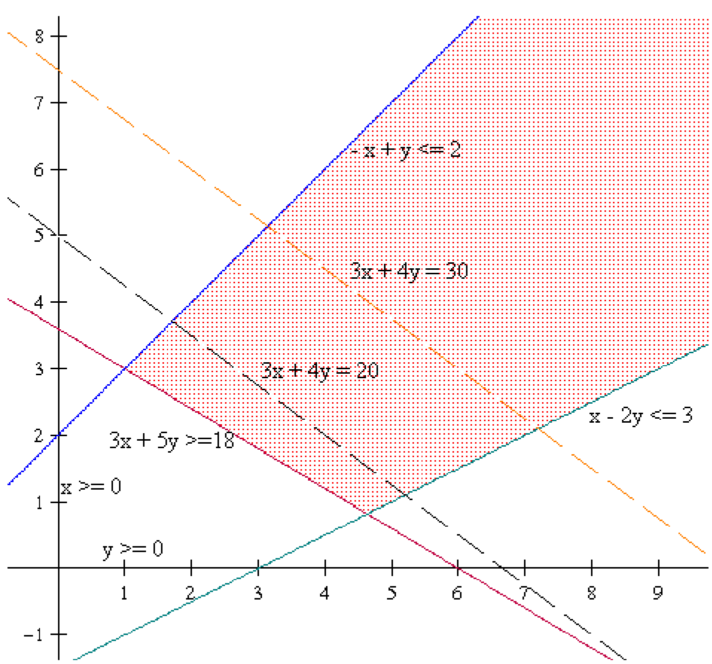


FIGURA 3.8: Região factível e curvas de nível (tracejada) – ex. 1

A região viável deste PPL é a mesma do exemplo 1. Contudo, neste caso temos uma única solução ótima: (1, 3), visto que a função-objetivo cresce na direção limitada da região viável, conforme evidenciam as curvas de nível da função-objetivo mostradas na figura 3.9.

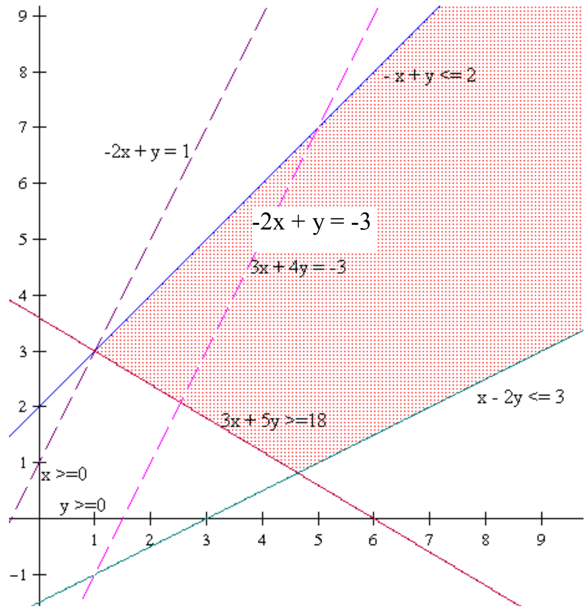


FIGURA 3.9: Região factível e curvas de nível (tracejada) – ex. 2

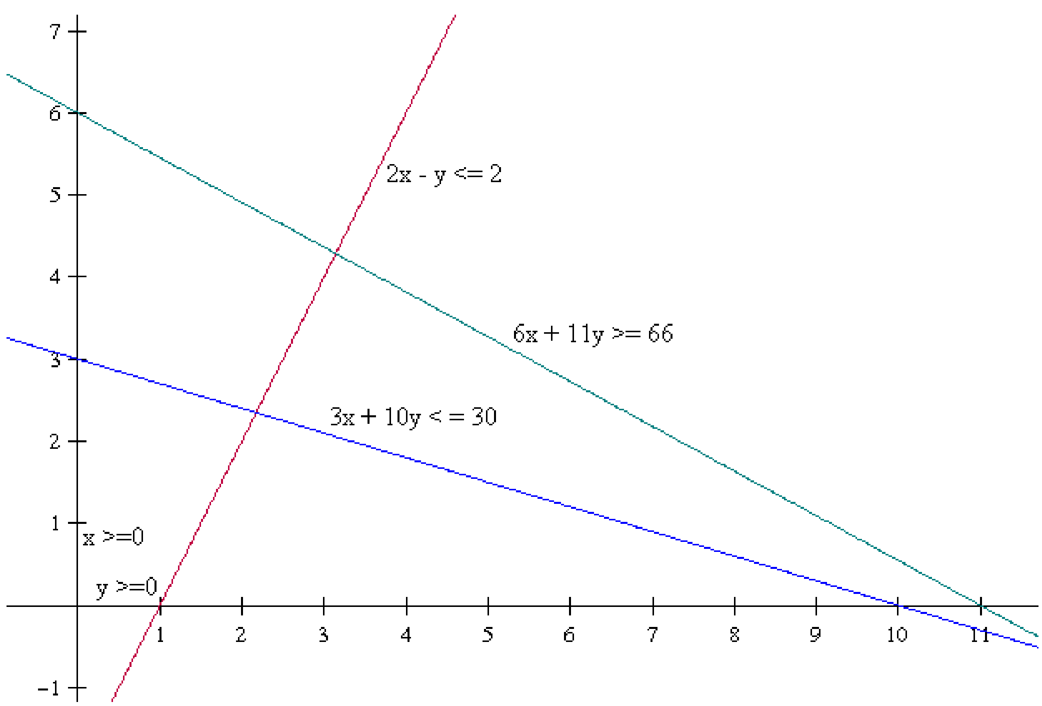


FIGURA 3.10: Região factível vazia – ex. 3

Exemplo 3:

Minimizar $z = 2x + 5y$

sujeito a: $2x - y \leq 2$

$3x + 10y \leq 30$

$6x + 11y \geq 66$

$x \geq 0, y \geq 0$

A região factível deste PPL é vazia, isto é, não existe ponto (x, y) que satisfaça todas as restrições do problema. Portanto, este PPL não possui solução.

Exemplo 4:

Maximizar $z = x + 2y$

sujeito a: $5x + 3y \leq 150$

$x + 2y \leq 60$

$x \geq 0, y \geq 0$

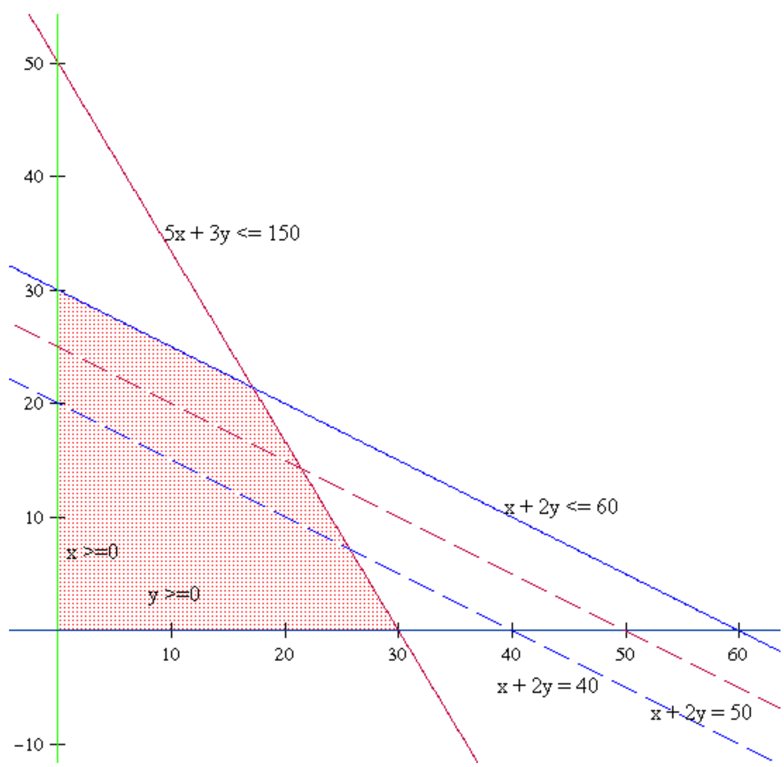


FIGURA 3.11: Região factível – ex. 4

A região factível deste PPL é mostrada na figura 3.11. A tabela 3 traz os pontos extremos e os respectivos valores da função-objetivo. Visto que temos dois pontos extremos com mesmo valor de função-objetivo, temos múltiplas soluções. Mais especificamente, teremos infinitas soluções sobre o segmento de reta determinado pelos pontos (0, 30) e (120/7, 150/7). Isto ocorre pelo fato da reta que contém este segmento de reta ser paralela às curvas de nível da função-objetivo, conforme a figura 3.11.

Pontos Extremos	Função-Objetivo
(0,0)	0
(30, 0)	30
(120/7, 150/7)	60
(0, 30)	60

TABELA 3. Pontos Extremos e Função-objetivo – ex. 4

Vale observar que em problemas reais a solução deve fazer sentido. Por exemplo, deve ser difícil se convencer que num problema de maximização o lucro seja ilimitado, ou que num problema de minimização o custo seja zero.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA

Durante as diversas leituras realizadas, procurou-se buscar embasamento teórico, junto às ideias apresentadas por diversos autores, a fim de respaldar alguns pressupostos que a prática didática mostrava-nos como verdadeiros.

Vejamos o que diz ROMBERG, 1992, p. 51, acerca da metodologia da pesquisa:

> Toda pesquisa se inicia com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real. Em Educação Matemática, o fenômeno envolve professores e estudantes, a forma como os estudantes aprendem, como eles interagem com a matemática, como eles respondem ao ensino, como os professores planejam seu ensino e muitos outros aspectos. (1992, p. 51)

Assim, a coleta de várias informações e práticas, como leituras, conversas e entrevistas, bem como experiências vivenciadas na prática, nos permite aplicar, através de uma proposição de atividade, nosso estudo sobre o ensino da matemática através da resolução de problemas.

Os desafios e dificuldades que encontramos pela frente são estímulos para a produção de soluções que atendam essas necessidades. Sendo assim, na matemática, de maneira semelhante, as situações que geram problemas e desequilíbrios tendem a nos desafiar, provocando a busca de saídas para estas adversidades. Ou seja, os problemas e, por conseguinte, suas soluções, parecem ser estímulos naturais inerentes a quase todas as pessoas.

Assim, é necessário romper com o modo costumeiro de ensinar matemática. Segundo Soares:

> No modelo tradicional de educação o aluno é, desde os seus primeiros passos, habituado a tomar conhecimento de seus deveres e entre estes está, em primeiro lugar, prestar atenção ao que lhe ensina o professor, mas este prestar atenção tem o significado: ficar calado e olhando, sem contestar, sem perguntar, sem sugerir, sem debater, sem poder ser ele mesmo. (1998, p. 26)

Entretanto, o que mais nos perturba é: como realizar tão inquietante tarefa? Como romper com tal paradigma?

Após diversas pesquisas bibliográficas, conversas com antigos e novos mestres, deparamo-nos com a ideia do “ensino da matemática através da resolução de problemas”.

O ensino da matemática através da resolução de problemas vem ao encontro das necessidades de tornar a matemática aplicada e significativa ao contexto ensino-aprendizagem. Essas necessidades, ou problemas, configuraram-se a partir de experiências pessoais e relatos de educadores matemáticos, bem como pesquisas bibliográficas que apontam uma enorme carência de mostrar sentido à matemática.

4.1 Os Ensinos de Matemática

Vale ressaltar que os problemas matemáticos acompanham as civilizações desde a antiguidade, conforme podemos observar, por exemplo, no papiro egípcio de Ahmes, datada ele por volta de 1650 a.C., e que consiste numa coleção de vários problemas.

As propostas de ensino de matemática através da resolução de problemas do final do século XIX apresentavam-se de forma pouco criativa. Nessa época, através de exemplos de problemas, propunham soluções estritamente técnicas e sugeriam exercícios, em que as soluções eram muito parecidas com a do exemplo.

Ainda sobre a história, na década de 1920, quando ocorreu uma organização curricular no Brasil, o ensino de matemática continuava extremamente formalista, voltado para o treinamento e mecanização da aprendizagem.

Chegamos mais adiante, ao ensino de matemática por repetição, onde a memorização era bastante valorizada, como, por exemplo, na fixação da "tabuada". O professor, centro do processo ensino-aprendizagem, explicava o conteúdo; o aluno, por sua vez, escutava, memorizava e repetia as informações. O ensino era avaliado através da capacidade do aluno de repetir aquilo que era exposto pelo professor. Dentro desse contexto, segundo Soares, (1998, p. 19), "a tão decantada clareza da matemática é amplamente discutível, sob o ponto de vista psicológico, ela pode ser evidente para quem a constrói, mas não o é para quem apenas acompanha a exposição do raciocínio alheio".

Essa situação caracteriza, hoje em dia, o aluno que "estuda" somente para a prova, esquecendo logo em seguida toda a aprendizagem.

Em contraposição ao ensino de matemática por repetição, surge o ensino de matemática com compreensão. Os treinamentos e as memorizações excessivas deixavam de ser valorizados. Era necessário o entendimento do conteúdo por parte do aluno sem que, no entanto, o mesmo participasse da construção de seu conhecimento. Assim, do nosso ponto de vista, não tínhamos uma aprendizagem significativa, pois os conhecimentos prévios dos alunos, bem como suas experiências, não eram valorizados.

Na década de 1940, merece destaque o que diz Polya (1994) no prefácio de seu livro "A arte de resolver problemas":

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

A resolução de problemas apresentada por Polya sugere que os conhecimentos adquiridos em matemática devem ser aplicados para resolver novos problemas. Para solução desses problemas aplica-se uma sequência bastante sistematizada de procedimentos a serem adotados.

Por outro lado, a resolução de problemas também é vista como metodologia de ensino de matemática, que possibilita maneiras de utilização de uma situação-problema no desenvolvimento de uma atividade didática.

No final da década de 1940, temos o aparecimento de trabalhos significativos em resolução de problemas. Segundo Onuchic:

> Em 1948, o trabalho desenvolvido por Herbert F. Spitzer, em aritmética básica, nos Estados Unidos, se apoiava numa aprendizagem com compreensão, sempre a partir de situações-problemas e, em 1964, no Brasil, o Professor Luis Alberto S. Brasil defendia um ensino de matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos. (1999, p. 202)

Mais adiante, notamos em 1950 uma estruturação do ensino no Brasil, onde os currículos eram organizados sequencialmente, em séries, sem preocupação com sua aplicação prática.

Nas décadas de 1960 e 1970, surge a Matemática Moderna: que privilegiava sobremaneira a teoria dos conjuntos, apresentando a matemática de maneira bastante formal, abstrata, concisa e precisa. Valorizava a utilização da simbologia matemática, presente até hoje em nosso processo de aprendizagem. Nesse período houve uma preocupação com a didática da matemática. O cálculo mental era pouco valorizado. Pouco se pensava na resolução de problemas, nas aplicações da matemática, bem como nas relações da matemática com outras disciplinas.

Finalmente, no final da década de 1970, a matemática através da resolução de problemas, ganha maior espaço junto aos educadores matemáticos. Observa-se, claramente, uma reação à Matemática Moderna, pois com a resolução de problemas a participação dos alunos passa a ser ativa, valorizada e estimulada.

Em 1980, o NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – An Agenda Of Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980´s, publica nos Estados Unidos, recomendações para todos os interessados na área, juntos, buscar uma melhor educação matemática. A primeira das recomendações:

> Resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80, e o desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década e que o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional, da competência matemática.

Além disso, o NCTM recomenda, também, sobre a necessidade de resolver problemas de matemática da vida real.

A abordagem da matemática através da resolução de problemas promove a criatividade, a iniciativa e a espontaneidade, uma vez que o aluno deverá ser capaz de verificar com atenção as informações disponíveis, elaborando um bom raciocínio lógico na tentativa de solucionar o problema.

4.1.1 Objetivos da Resolução de Problemas

Segundo Dante (2000), podemos verificar que a resolução de problemas apresenta os seguintes objetivos:

- Fazer o aluno pensar produtivamente: as situações-problemas devem ser apresentadas de modo que envolva o aluno, o desafiem e o motivem a querer resolvê-la.

- Desenvolver o raciocínio do aluno: desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente dos recursos disponíveis.

- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas: preparar o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas.

- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática: é preciso que o aluno saiba quando e como usar a matemática convenientemente na resolução de situações-problemas.

É de grande importância que o professor conduza suas atividades pautadas sobre objetivos muito claros, sabendo claramente onde deseja chegar e quais os atributos matemáticos deseja desenvolver nos alunos.

É necessário apresentar, sempre que possível relacionada à realidade dos discentes, as aplicações da matemática, tornando as aulas mais interessantes, desafiadoras e dinâmicas, pois o aluno estará efetivamente participando da construção e discussão da resolução dos problemas.

De acordo com Dante (2000, p. 14) “um bom problema suscita e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo.”

Especificamente sobre os problemas de matemática, vejamos alguns tipos de problemas propostos por Dante:

- Problemas-padrão: sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige qualquer estratégia.

- Problemas-processo ou heurístico: exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução.

- Problemas de aplicação: retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. São também chamados de *situações-problema*.

- Problemas de quebra-cabeça: envolvem e desafiam grande parte dos alunos (matemática recreativa).

Acreditamos ser de grande importância que o professor conheça esses diversos tipos de problemas de matemática, a fim de utilizá-los com maior propriedade e mais convenientemente durante suas aulas.

Assim, uma boa seleção dos problemas que serão trabalhados nas atividades é o ponto de partida para um bom desenvolvimento das aulas e, consequentemente, para um alcance com êxito dos objetivos desejados.

Para nossas atividades, procuramos privilegiar os problemas de aplicação, os quais se relacionarão às situações reais dos alunos, próximas das suas realidades e do contexto no qual estão inseridos.

4.1.2 Esquema para resolução de problemas

Durante a aplicação dos nossos problemas procuraremos usar um resumo do esquema proposto por Polya para resolução de problemas:

- Compreender o problema

a) O que se pede no problema?

b) Quais são os dados e as condições do problema?

c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?

d) É possível estimar a resposta?

- Elaborar um plano

a) Qual é o seu plano para resolver o problema?

b) Que estratégia você tentará desenvolver?

c) Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?

d) Tente organizar os dados em tabelas ou gráficos.

e) Tente resolver o problema por partes.

- Executar o plano

a) Executar o plano elaborado, verificando-o passo a passo.

b) Efetuar todos os cálculos indicados no plano.

c) Executar todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

- Fazer o retrospecto ou verificação

a) Examinar se a solução obtida está correta.

b) Existe outra maneira de resolver o problema.

c) É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

4.2 A Matemática Através da Resolução de Problemas

Chegamos assim, a um foco importante do nosso trabalho, ou seja, o ensino de matemática através da resolução de problemas.

O dia a dia de sala de aula requer por parte do professor grande esforço no sentido de envolver seu aluno de maneira participativa no processo ensino-aprendizagem. Esse processo deve ser significativo, ou seja, ter ralação com experiências pessoais dos alunos, de modo que estes se identifiquem com a situação proposta.

A resolução de problemas visa em sua essência à liberdade, que desenvolve naturalmente no educando a criatividade, que culminará na sua autonomia. Faz-se necessário o estímulo do aparecimento de estratégias pessoais.

Durante a resolução de um problema, espera-se que o aluno:

Pense em vários processos de resolução, através de simulações, tentativas, hipóteses;

Faça comparação de seus resultados com os de outros alunos;

Revise o problema inicial e comprove seu resultado.

Entretanto, vale ressaltar que a matemática como ciência não pode restringir-se tão somente a suas aplicações, faz-se necessário o estímulo ao seu desenvolvimento intrínseco, formal, abstrato e voltado para suas necessidades e interesses internos. Segundo Onuchic (1999, p.204-205), a matemática deve ser ensinada como matemática e não como um acessório subordinado aos seus campos de aplicação. Isso pede uma atenção continuada à sua natureza interna e a seus princípios organizados, assim como a seus usos e aplicações.

Por outro lado, não é raro que os alunos não recebam bem a proposta pedagógica de ensino através da resolução de problemas, uma vez que os discentes estão habituados com a já consagrada dinâmica de ensino há muito adotada, em que o professor expõe o conteúdo; o aluno, por sua vez, copia e em seguida tenta reproduzir os passos que o docente realizou na resolução dos exercícios exemplos.

Os alunos acabam por se acostumar e se acomodar com um processo de ensino que pouco, ou quase nada, exige sua iniciativa, pouco requer, incentiva e explora sua criatividade, não valoriza e, muitas vezes, sufoca qualquer possibilidade de inovação, de novas descobertas, de discussão ou exploração, além do que foi expressamente pedido. É se conformar com o óbvio, o estritamente previsto, não aprofundando ou mesmo abordando a atividade sob outra perspectiva.

Dessa forma, percebemos que romper com o modelo “consagrado” de ensino é uma tarefa que requer por parte do professor grande dedicação e aceitar o desafio, acreditando na capacidade de mudança de comportamento que uma dinâmica de educação mais participativa dos alunos pode trazer bons resultados para todos, principalmente para os próprios alunos.

O professor deve trabalhar a matemática de modo a oferecer ao aluno a construção do seu próprio conhecimento, por sua própria vontade e efetiva participação.

Apontamos que a matemática através da resolução de problemas estimula nos alunos a discussão argumentativa, a cooperação, a organização e a interação, que são práticas necessárias em qualquer contexto que envolvam relações interpessoais. É o exercício da atividade e vivência em grupo, com questionamentos, divergências, tentar compreender a visão do outro, retirando ensinamentos e conclusões para outras situações futuras.

Observamos que não é raro que a maioria dos alunos apresente bons relacionamentos entre eles, argumentem e discutam sobre vários assuntos bem atuais, correspondentes às suas faixas etárias. Entretanto, quando essas discussões são inseridas em situações educacionais em sala de aula, normalmente, esses mesmos alunos já não apresentam tão boa articulação.

Primeiramente, precisamos oferecer, em especial os problemas de matemática, situações possíveis e reais do cotidiano de nossos alunos, que sejam inseridas nos seus contextos, que sejam próximas a eles, fazendo com que os mesmos se sintam envolvidos, para posteriormente encorajá-los a dialogar a respeito desses problemas de matemática, pois assim compreenderão com maior propriedade suas particularidades e, consequentemente, terão maior capacidade de resolvê-los.

Trabalhar sob a ótica da resolução de problemas se por um lado é desafiar, inquietar e desacomodar os alunos, já tão acostumados a seguirem o processo e receberem o modelo pronto, por outro lado também é extrair o professor de uma zona de conforto, anestesiado pela adoção, quase receitual, da sequência dos livros didáticos.

Parece natural que qualquer proposta de mudança é acompanhada de resistência e desconfiança, principalmente porque o ensino de matemática através da resolução de problema sugere aos alunos uma mudança significativa de comportamento, com atitudes mais ativas, participativas, que causam inquietação e desconforto.

É preciso, antes de mais nada, que alunos e professores se conscientizem da relação direta entre resolução de problemas e realidade, de mundo verdadeiro, de coisas que acontecem realmente ou podem acontecer, de situações que as vezes não são perfeitamente fechadas e cujas respostas nem sempre são únicas, ou até mesmo nem sempre podemos encontrá-las. Faz-se necessário desmistificar que a matemática é perfeitamente exata, com situações e respostas irretocáveis e indiscutíveis.

Diante da análise bibliográfica realizada, encontramos diferentes maneiras de abordagem da resolução de problemas em matemática, ou seja, a resolução de problemas como um novo conteúdo: **ensinar sobre resolução de problemas**; a resolução de problemas como aplicação de conteúdos: **ensinar para a resolução de problemas**; e a resolução de problemas como um meio de ensinar matemática: **ensinar através da resolução de problemas**.

Abordaremos a seguir, de maneira mais detalhada, cada uma dessas três concepções acerca da resolução de problemas.

4.3 Ensinar Sobre a Resolução de Problemas

Como já vimos antes, as décadas de 1960 e 1970 marcaram o período de implantação e desenvolvimento da chamada Matemática Moderna caracterizada por profunda abstração, formalização e conceituação de ideias matemáticas, através de uma linguagem universal.

Após esse período, verificou-se a falência desse modelo de ensino de matemática, praticamente descontextualizada e carente de significado.

Em contrapartida aos resultados desfavoráveis alcançados pela matemática moderna, naturalmente surgiram outras maneiras de se trabalhar a matemática, entre elas citamos o ensino da matemática utilizando problemas. Assim, surge a ideias de trabalhar os conteúdos matemáticos pautados em resolução de problemas.

Destaca-se a obra de Krulik e Reys (1980), com o título *Problem Solving in School Mathematic*, que tratava da resolução de problemas, tendo sido lançada na “National Council of Teachers of Mathematics” (NCTM), que é a principal organização para professores de matemática nos estados Unidos nos ensinos primários e secundários.

Em 1980, ainda, a NCTM orienta que o foco principal da matemática deveria ser a resolução de problemas.

4.3.1 George Polya e a Resolução de Problemas

Anteriormente a esse período, em 1945, temos outra importante obra sobre a resolução de problemas, ou seja, o livro de George Polya, chamado *How to Solve it*, que foi traduzido para o português, em 1994, com a denominação *A Arte de Resolver Problemas.*

Um dos destaques dessa obra de Polya é um roteiro que apresenta como proceder na resolução de problemas. Tal roteiro é apresentado em quatro partes: compreender o problema, estabelecer um plano para resolvê-lo, executar esse plano e examinar a solução encontrada.

Esse roteiro, sugerido por George Polya, caracteriza claramente as técnicas de resolver um problema e portanto, ensinar sobre resolução de problemas.

Por outro lado, Thompson (1989) sugere que a resolução de problemas é a melhor solução para os problemas do ensino da matemática. Nesse trabalho, ele aponta que as razões da complexidade em aprender e ensinar resolução de problemas são devidas às interconexões que o aluno precisa estabelecer entre:

- seus recursos matemáticos, por exemplo, o conhecimento de fatos, conceitos e procedimentos;
- heurística, ou seja, métodos e regras de invenção e descoberta matemática;
- controle dos mecanismos necessários para coordenar esses recursos e métodos;
- crença dos alunos sobre a matemática, em geral, e sobre a resolução de problemas, em particular; e,
- a variedade de fatores afetivos e contextuais que envolvem a resolução de problemas.

O mais importante, portanto, seria realizar uma correta interconexão entre as várias ideias acima listadas.

Nesse aspecto, resolver problemas torna-se extremamente importante. Entretanto, a habilidade em resolver problemas não é uma consequência natural da aprendizagem de conteúdos, regras e algoritmos. Assim, aprender a resolver problemas é encarado como assunto específico a ser trabalhado e desenvolvido em cada aluno, cabendo ao professor a tarefa de realizar tal ensino.

Segundo Dante (2000, p. 30) “ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos”.

Alguns autores sugerem estratégias problemas: tentativa e erro organizados, procura de padrões e generalizações, resolução inicial de problemas mais simples, redução à unidade e realização de caminho inverso.

Ensinar sobre a resolução de problemas, para alguns, era caracterizada pelo aprendizado de técnicas específicas, culminando com resoluções repetidas de exercícios semelhantes. Todavia, o mais importante é a compreensão do processo envolvido na resolução do problema, o que nem sempre é garantido com a exaustiva repetição e o domínio da técnica empregada.

4.3.2 Exercícios e Problemas

Adotaremos a distinção proposta por Dante (2000, p. 43) entre exercício e problemas. Exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas.

Problema ou problema-processo é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua resolução. Sua resolução exige uma certa dose de iniciativa, e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Vejamos algumas sugestões de estratégias para resolução de problemas propostas por Dante (2000, p. 54):

- Tentativa e erros organizados.
- Procurar padrões ou generalizações.
- Resolver primeiro um problema mais simples.
- Reduzir à unidade.

Para uma boa condução das atividades em resolução de problemas não devemos esquecer, que de um modo geral, os alunos não estão acostumados com essa abordagem, assim é importante que os problemas sejam apresentados em grau crescente de dificuldades, a fim de encorajá-los na busca progressiva de soluções.

Além disso, deveremos apresentar problemas com diferentes contextos de aplicações, mas que se encaminhem com semelhantes estratégias de solução.

O professor deve ter muita determinação e paciência por ocasião da utilização da resolução de problemas, pois o processo de mudança de hábito por parte dos alunos é certamente lento e requer muita persistência.

O estímulo à discussão em pequenos grupos é muito rico, pois facilita para o professor a interação com seus alunos, verificando de perto como eles veem o problema, de maneira a facilitar suas intervenções e orientações para um bom encaminhamento de soluções.

Entretanto, não devemos perder de vista que o trabalho em grupo pode levar os alunos à dispersão e ao desvio de atenção e interesse ou, ainda, ao isolamento de alguns. Sendo assim, é fundamental que o professor esteja sempre atento a esses desvios de procedimentos, procurando desenvolver no aluno o compromisso com a atividade e com os outros elementos do grupo, promovendo a interação e a cooperação entre todos os componentes.

Por outro lado, mesmo encaminhamentos de resoluções de problemas bem sucedidos devem ser questionados, procurando fazer com que os alunos ampliem e até generalizem suas estratégias para problemas mais aprofundados e complexos. Ainda, propor aos alunos a inserção no problema trabalhado de mais variáveis, ou mais restrições, exploração de casos particulares e gerais. Essas discussões desenvolvem nos alunos capacidade de adaptação a situações não inicialmente previstas.

Também para os encaminhamentos de resolução de problemas considerados incorretos e incoerentes, o professor deverá discutir e questionar essas estratégias de modo a incentivar os próprios alunos a verificarem seus possíveis erros, de modo a identificarem correções de rumos.

Essa atitude é muito valiosa na medida em que os próprios discentes, sob orientação do professor, podem parar e refletir sobre suas interpretações, necessidades, organizações, identificações, tentando rever os passos adotados, bem como identificar em que momento houve ou não adequação ao procedimento de solução do problema.

Faz-se necessário criar nos alunos, e até mesmo nos professores, a cultura da resolução de problemas, pouco a pouco, que sem dúvida é um desafio, pois a aceitação desses enfrentamentos são estímulos para a superação dos obstáculos pedagógicos, reais e práticos, que se fazem presentes constantemente no além muros escolares.

> A matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém desempenha um papel instrumental, pois é uma tarefa que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (Brasil, 1999, p. 251)

4.4 Ensinar para a Resolução de Problemas

Vale destacar que esses aspectos, aqui tratados, sobre o ensino de matemática no contexto da resolução de problemas não são mutuamente excludentes, ou seja, as concepções se intercalam e, frequentemente, se complementam.

Ensinar para a resolução de problemas, dentro dessa abordagem, vai muito mais além do que a simples proposição do problema. Passa, principalmente, pela correta utilização das ferramentas matemáticas, chegando, finalmente, aos métodos e estratégias de resoluções de problemas.

Diante desse enfoque, observamos a preocupação com a utilidade da matemática, indo ao encontro do frequente questionamento: “Para que serve a matemática?”

Vejamos o que sugere Schroeder e Lester (1989, p. 35) com seu diagrama sobre resolução de problemas:

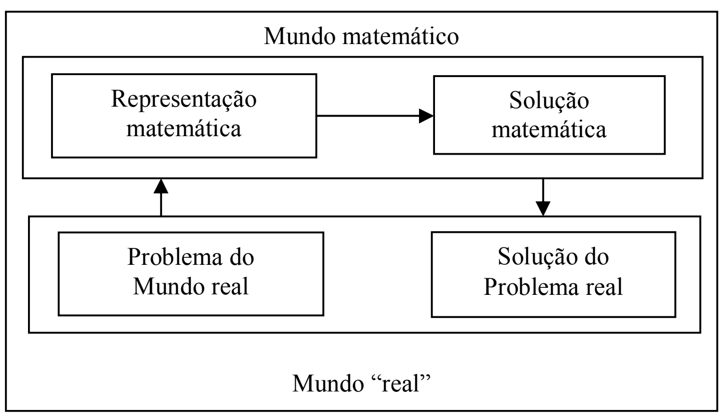


FIGURA 4.1: Diagrama sobre resolução de problemas

Verificamos que o mundo matemático faz parte do mundo “real”. Entretanto, o encaminhamento da sequência Problema do Mundo real, Representação matemática, Solução matemática e, posterior, Solução do Problema real possui estrutura que apresenta único sentido. Isso acarreta pouco dinamismo e pouca comunicação entre essas diversas etapas dessa abordagem de resolução de problemas.

A grande preocupação do professor está centrada na aplicação das ideias matemáticas, através dos problemas trabalhados, ou seja, ensina-se para a resolução de problemas. Nesse aspecto, a resolução de problemas só poderia ser trabalhada após o prévio conhecimento de algum novo conteúdo, conceito ou algoritmo.

Alguns livros didáticos, principalmente da década de 1990, são bons exemplos desse aspecto, onde apresentam no final de cada capítulo uma bateria de questões propostas, com aplicação da teoria, em que o aluno trabalha os conceitos teóricos, através de aplicações e reconstruções dos processos.

Nessas resoluções de problemas as atividades são conduzidas pelo professor que apresenta os conteúdos, bem como suas aplicações.

Podemos caracterizar, portanto, o ensino para a resolução de problemas de acordo com uma típica aula expositiva, característica do ensino tradicional: o professor trabalha a parte conceitual do novo conteúdo, mostra algumas aplicações, chegando finalmente a uma bateria de exercícios de fixação e de exercícios propostos. Na realização desses exercícios, o professor verifica se o aluno obteve o domínio da teoria proposta.

Nesse contexto, as soluções são sempre obtidas a partir de modelos previamente trabalhados. Entretanto, quando o aluno se depara com alguma situação diferente da tradicional, provavelmente ele se sentirá inseguro e incapaz de resolver tal problema.

Não há dúvida de que a matemática voltada para aplicações e contextualizações faz com que a aprendizagem torne-se muito mais motivadora para o aluno.

Lima (1999, p. 5) afirma que “encontrar aplicações significativas para a matéria que está expondo é um desafio e deveria ser uma preocupação constante do professor”.

Entretanto, há de se ter cautela nesta prática pedagógica, pois o estudo da matemática é muito mais do que simples ferramenta de utilidade prática. É necessário, sempre, esclarecer para o aluno que a matemática tem seu desenvolvimento interno próprio, rigoroso e, por vezes, desconectado da realidade trivial das pessoas.

4.5 Ensinar Através da Resolução de Problemas

Nesse contexto, observamos a resolução de problemas como uma maneira de ensinar matemática. Há de se destacar a enorme aproximação que há entre esse enfoque de se ensinar matemática e o construtivismo, onde privilegiam-se a construção do conhecimento pelo próprio aluno.

Segundo Campbell (1996) em seu trabalho, apresentado no Oitavo Congresso Internacional sobre Educação Matemática, na Espanha, ele destacou que “construir conhecimento a partir de conhecimentos anteriores é uma das características do ensino nos moldes do construtivismo”,

Vejamos as recomendações que a NCTM sugere para procedimentos a serem adotados e que vão ao encontro do ensino através da resolução de problemas:

- habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto das resoluções de problema;

- o desenvolvimento de processos de pensamento de ordem superior deve ser estimulado através de experiências em resoluções de problemas; e

- o ensino de matemática deve ocorrer, por investigação orientada, em um ambiente de resolução de problemas.

Durante o processo de resolução de problemas é importante pensar matematicamente, ou seja, construir a resolução de maneira crítica, observando coerências ao que se analisa, realiza e encontra como resultado.

Por outro lado, durante a preparação de uma atividade que envolva resolução de problemas, é importante que o professor tenha a visão geral dos acontecimentos possíveis durante o desenvolver das tarefas. Com essa previsão, será possível realizar revisões prévias que envolvam conhecimentos e habilidades que são pré-requisitos para encaminhamento de uma possível solução para o problema. Com isso, as atenções são direcionadas para o foco principal, ou seja, estratégias para solucionar o problema propriamente dito.

Vejamos um diagrama, Figura 4.2, apresentado por SCHROEDER E LESTER (1989, P. 36) para os processos de pensamento quando problemas não rotineiros são resolvidos:

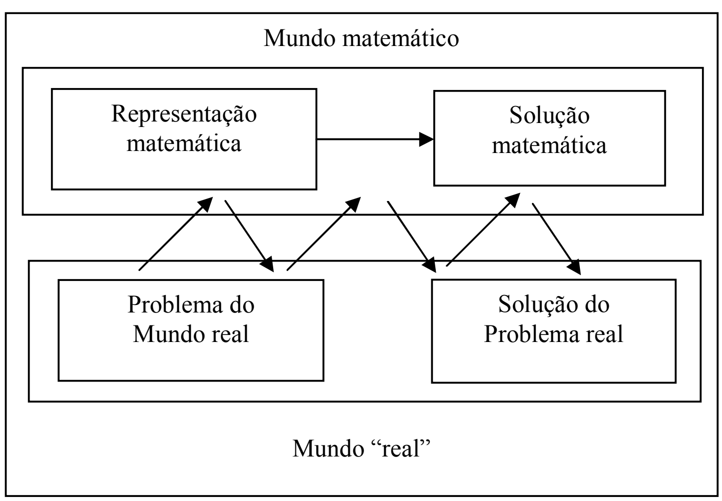


FIGURA 4.2: Processos de pensamento

Vê-se claramente, nesse diagrama, a dinâmica da construção do conhecimento, onde novas idéias matemáticas são desenvolvidas utilizando conhecimentos já adquiridos.

Além disso, os elementos Problema do Mundo real, Representação matemática, Solução matemática e Solução do Problema real estão em constante relacionamento, sem a necessidade de uma precisa organização sequencial.

Vejamos, o diagrama, Figura 4.3, apresentado por SANTOS (2002, p. 15) para os processos de aprendizagem:

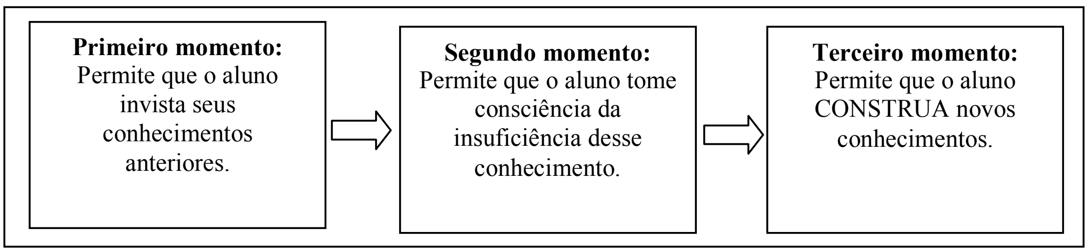


FIGURA 4.3: Processos de aprendizagem

Vemos, com isso, uma interação do aluno com a situação-problema apresentada, o qual utiliza seus conhecimentos previamente adquiridos, modificando-os ou adaptando-os para construir uma nova e possível solução.

Há nesse aspecto uma estreita ligação com o construtivismo, pois as ideias matemáticas devem ser analisadas dentro de um contexto de resoluções de problemas.

Por outro lado, vejamos segundo SCHROEDER E LESTER (1989), algumas razões para justificar o esforço da aprendizagem através da resolução de problemas:

- a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as ideias e sobre o "dar sentido";

- a resolução de problemas envolve os estudantes nos cinco padrões de processo descritos nos Standards, constantes no NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000): resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação;

- a resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e auto-estima dos estudantes;

- a resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permite tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem; e

- os alunos se entusiasmam com o desenvolvimento da capacidade de compreensão que experimentam através de seu próprio raciocínio.

Portanto, destacamos que o ensino da matemática através da resolução de problemas pode ser considerado mais abrangente que as demais metodologias, pois o aluno torna-se agente da sua própria construção de conhecimento, desenvolvendo sua autonomia e, por fim, dando significado às ideias matemáticas.

4.6 Objetivos da Resolução de Problemas

Fala-se bastante sobre resolução de problemas, passando por técnicas empregadas, metodologias adotadas, dinâmicas de trabalho, etc. Entretanto, faz-se necessária uma abordagem específica sobre os objetivos da resolução de problemas no ensino da matemática.

Inicialmente, destacamos as mudanças e atualizações desses objetivos da resolução de problemas, uma vez que os mesmos adaptam-se de acordo com as visões e concepções sobre o ensino da matemática para o contexto sócio-cultural e teórico-matemático vigentes na época.

Resolver problemas, mais uma vez, é inerente ao ser humano, a fim de melhorar ou adaptar seu relacionamento com o meio que o cerca, visando extrair o que de melhor a natureza oferece para melhorar sua qualidade de vida e facilitar a vida das pessoas.

Segundo Dante (2000), os objetivos da resolução de problemas são: levar o aluno a pensar produtivamente e desenvolver o raciocínio; muni-lo de estratégias para resolver problemas; dar-lhe oportunidade de se envolver com aplicações matemáticas, de enfrentar situações novas e de adquirir uma boa base matemática.

Por outro lado, Schroeder e Lester (1989) aponta que a principal objetivo na resolução de problemas é o desenvolvimento e a compreensão da matemática.

4.6.1 Classificação dos Problemas

Vejamos abaixo a classificação dada por Dante (2000) aos problemas matemáticos, bem como o objetivo específico de cada um deles:

Tipo	Objetivo
Exercícios de reconhecimento	Levar o aluno a identificar ou lembrar um conceito, um fato específico, uma propriedade.

	Ex.: Uma centena corresponde a quantas dezenas?
Exercícios de algoritmos	Treinar a habilidade de execução de um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores. Ex.: calcule [(-5 + 2).7: (-3)]
Problemas-padrão	Fixar fatos básicos e algoritmos vinculando seu emprego a situações do dia-a-dia em que é preciso transformar linguagem usual em linguagem matemática. Ex.: Se a idade de José é o dobro da idade de Pedro e a soma das idades é 36, determine a idade de cada um.
Problemas-processo ou heurísticos	Levar o aluno a pensar, arquitetar um plano de ação e elaborar uma estratégia para chegar a solução. Tais problemas não podem ser diretamente traduzidos para a linguagem matemática ou resolvidos por aplicação automática de um algoritmo. Iniciam no aluno no desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problemas. Ex.: Se numa reunião há 5 pessoas e cada uma troca um aperto de mão com todos os todos os outros, quantos apertos de mão ocorrerão?
Problemas de aplicação ou situações-problemas	Levar o aluno a coletar e organizar dados, matematizar uma situação real do dia-a-dia e resolver o problema utilizando a matemática. Ex.: Precisamos de um mural em nossa sala de aula, mas a escola não pode comprar. Podemos adquiri-lo de outro modo? Como? De que precisamos?
Problemas de quebra-cabeça	Desenvolver a percepção, motivar e desafiar o aluno através da chamada Matemática Recreativa. Ex.: Sem tirar o lápis do papel, traçar exatamente quatro segmentos de reta que passem pelos nove pontos abaixo: • • • • • • • • •

TABELA 4. Classificação dos problemas

4.7 A Prática da Resolução de Problemas

Novamente retornemos a Campbell (1996), onde o professor, seguindo uma postura construtivista, deve propiciar ao aluno a construção do seu próprio conhecimento, a partir de conhecimentos anteriores, valorizando o processo e não somente a resposta desejada. Deve-se questionar as soluções, discutir os resultados entre os alunos, gerando uma situação de construção coletiva e compartilhada de conhecimentos.

É de fundamental importância que o professor conheça seus alunos e, principalmente, o nível de conhecimento matemático que já possuem, pois assim trabalhará cada problema individualmente, focalizando seus aspectos centrais, objetivos principais, sem desviar esforços para situações secundárias.

Durante a preparação das atividades, é importante que, além do professor, o aluno, principalmente, esteja voltado e motivado a trabalhar com o problema proposto e ter compreendido corretamente tal problema.

A fim de promover a autonomia dos alunos, é fundamental que os mesmos trabalhem, inicialmente, sozinhos, cabendo ao professor, a tarefa de observar e ouvir os alunos e, posteriormente, orientar as ideias dos discentes, realizando apenas pequenas intervenções.

Também é recomendável que os alunos comecem a trabalhar com problemas mais simples, promovendo a discussão de estratégias sobre essas ideias. Com isso, estaremos criando uma mentalidade de resolução de problemas entre os discentes, que facilitará a compreensão e como consequência a solução de problemas.

Destacamos que especial atenção deverá ser dada à fase final do processo de resolução do problema, onde os alunos apresentam suas possíveis soluções e o professor, por sua vez, promove as discussões necessárias, ouvindo sugestões gerais de estratégias realizadas, onde todos os envolvidos possam compartilhar as várias soluções apresentadas.

Vale destacar, por outro lado, que o grupo MATHEMA[3] nos aponta que a resolução de problemas é mais amplo que uma metodologia de ensino de matemática. Segundo Smole (2001, p. 89):

> Primeiramente, a Resolução de Problemas baseia-se na proposição e no enfrentamento do que chamaremos de situação-problema. Isto é, ampliando o conceito de problema, devemos considerar que a Resolução de Problemas trata de situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvedor combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca da solução.

Smole propõe um rompimento com o tipo de problema tradicional, o qual apresenta as seguintes características:

a) é apresentado por meio de frases, diagramas ou parágrafos curtos;

b) vem sempre após a apresentação de determinado conteúdo;

c) todos os dados de que o resolvedor precisa aparecem explicitamente no texto;

---

[3] Informações sobre o grupo MATHEMA, cujo propósito é pesquisar e experienciar novos métodos de ensino e aprendizagem em matemática, podem ser verificadas na página da internet: http:\\www.mathema.com.br. Acesso em: 27 de agosto de 2012, às 9h 16 min.

d) pode ser resolvido pela aplicação direta de um ou mais algoritmos;

e) tem como tarefa básica em sua resolução a identificação de que as operações são apropriadas para mostrar a resolução e a transformação das informações do problema em linguagem matemática;

f) é ponto fundamental a solução numericamente correta, a qual sempre existe e é única.

Sem dúvida, utilizar somente problemas com essas características não acrescenta grande valor no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, uma vez que esse tipo de problema é pouco desafiador, não suscita maiores investigações ou explorações e possui resposta bem delimitada, que não desperta bons questionamentos sobre sua coerência e significação.

Dessa forma, se o professor utilizar somente problemas tradicionais, o aluno acaba sendo treinado a resolver certos tipos de problemas, seguindo uma repetição de passos específicos, repetitivos e copiados. E, quando o discente é solicitado a fazer qualquer reflexão sobre situações distintas das anteriormente apresentadas e trabalhadas pelo professor, o mesmo provavelmente não se sentirá seguro em tentar realizá-la.

Entretanto, mesmo que consiga resolver - achar a resposta - de um problema, é possível que o aluno não seja capaz de analisar com maior precisão, propriedade e aprofundamento as diversas possibilidades de exploração que o problema pode apresentar.

Ainda sobre o grupo MATHEMA, o mesmo sugere que o processo de resolução de problemas deve ser constantemente acompanhado de questionamentos em todas as suas fases, desde a apresentação, passando pela sua leitura e compreensão, até chegar à solução.

Deve-se valorizar todo o processo de desenvolvimento da atividade e não somente a resposta encontrada, explorando também as soluções incorretas e de que maneira elas foram sendo construídas.

Assim, segundo Smole (2001, p. 92):

> Portanto, enfrentar e resolver uma situação-problema não significa apenas a compreensão do que é exigido, a aplicação das técnicas ou fórmulas adequadas e a obtenção da resposta correta, mas, além disso, uma atitude de "investigação científica" em relação àquilo que está pronto.

Além disso, faz-se necessário o desenvolvimento do espírito crítico, investigativo e criativo dos alunos durante todo o processo, incentivando-os a enfrentarem constantemente os desafios que as situações apresentarem, bem como estimular a necessidade de adaptação, explorando possíveis variações nos problemas.

Sob o ponto de vista do professor, de acordo com Smole (2001, p. 94):

> Sendo assim, não há método de ensino sem que esteja sendo trabalhado algum conteúdo e todo conteúdo está intimamente ligado a uma ou mais maneiras adequadas de abordagem. Além disso, as problematizações devem ter como objetivo alcançar algum conteúdo e um conteúdo deve ser aprendido, porque contém dentro de si questões que merecem ser respondidas.

Para a aplicação das atividades, o professor deverá ter sempre a preocupação de oferecer aos alunos, sempre que possível, o máximo de recursos auxiliares de ensino disponíveis, tais como: material concreto, computadores, datashow, lousas virtuais, entre outros. Essas ferramentas facilitarão bastante a apresentação e a exploração dos problemas, fazendo que os discentes sintam-se mais envolvidos e motivados a participarem das atividades propostas.

Nesse contexto, vale destacar que ambientes informatizados, por exemplo, podem facilitar a compreensão dos problemas, possibilitando com maior dinamismo e interação a exploração de hipóteses, análise gráfica de suposições e soluções, bem como realizar a revisão crítica das respostas encontradas.

Vejamos alguns relatos de alunos, de acordo com Borasi (1985, p. 83-91) apud Smole (2001, p. 94), sobre alunos que trabalham com a resolução de problemas de forma tradicional:

- Não vale a pena gastar muito tempo para resolver um problema; se a solução não pode ser encontrada rapidamente, é porque eu não sei resolvê-lo.

- Se eu cometi um erro, devo desistir e começar tudo de novo; não adianta tentar entender o porquê do erro;

- Há sempre uma maneira certa de resolver um problema; mesmo quando há várias soluções uma delas é correta;

- Aprender a resolver problemas é uma questão de esforço e prática. Eu aprendo tomando notas, memorizando todos os passos de uma sequência correta e praticando-os;

- Um bom professor não deve me deixar confuso. É responsabilidade dele me orientar o que devo fazer, pois isso é ensinar.

Essas concepções, já tão enraizadas sobre aprender matemática, de maneira bem geral que os alunos possuem, estão entre os maiores desafios da utilização da resolução de problemas, isto é, fazer com que os alunos modifiquem suas concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática, e saiam da situação passiva de ouvintes e reprodutores de conteúdos, passando a construtores participantes e ativos dos seus próprios conhecimentos.

Por outro lado, faz-se necessária a mudança de visão que os alunos têm do papel do professor, isto é, eles precisam perceber que o docente é um mediador e incentivador de descobertas, que deverá despertar a curiosidade e autonomia dos discentes, através de questionamentos constantes em suas atividades, fazendo com que os alunos possam construir seus próprios conhecimentos.

Mas, os problemas precisam ter sentido e serem desafiadores, estarem inseridos numa realidade próxima e que necessariamente careçam de uma solução. Segundo Pozo (1998, p. 14):

> Ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta.

Assim, faz-se necessário que o aluno problematize suas próprias situações, isto é, verifique o que pode ser questionado nas situações e proposições que lhe são oferecidas e apresentadas como questionamentos que necessitam de respostas.

Verificando o que seria uma situação-problema, é quando, de acordo com Pozo (1998, p. 16), "não dispomos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisão sobre a sequência de passos a serem seguidas".

Por outro lado, os exercícios poderiam se caracterizar por resoluções através de mecanismos imediatos com técnicas bem rotineiras e contínuas.

Entretanto, sem dúvida, o que é um problema para alguns alunos pode não passar de um mero exercício para outros. E, além disso, o que inicialmente era um problema, após uma boa exploração pode se tornar um exercício para o mesmo aluno.

Assim, Pozo (1998, p. 17) aponta: "Por ora queremos salientar que os exercícios e os problemas exigem dos alunos a ativação de diversos tipos de conhecimentos, não só de diferentes procedimentos mas também de diferentes atitudes, motivações e conceitos."

Para resolver um problema é necessário mais do que a correta aplicação sistemática de técnicas, faz-se necessário iniciativa, domínio de conceitos, autonomia e, principalmente, vontade e disposição de superação de dificuldades, diante de situações desconhecidas, em que não sabemos ou não dominamos exatamente, pelo menos no início, o caminho a seguir para solucioná-lo.

4.7.1 Passos para resolução de problemas

Acompanhe os passos necessários para resolver um problema, segundo Polya (1994).

4.7.1.1 Compreender o problema

- Qual é a incógnita? Quais são os dados?
- Qual é a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? É suficiente? Redundante? Contraditória?

4.7.1.2 Conceber um plano

- Já encontrou um problema semelhante? Ou já ouviu o mesmo problema proposto de maneira um pouco diferente?
- Conhece um problema relacionado com este? Conhece algum teorema que possa lhe ser útil? Olhe a incógnita com atenção e tente lembrar um problema que lhe seja familiar ou que tenha a mesma incógnita, ou uma incógnita similar.
- Este é um problema relacionado com o seu e que já foi resolvido. Você poderia utilizá-lo? Poderia usar o seu resultado? Poderia empregar o seu método? Considera que seria necessário introduzir algum elemento auxiliar para poder utilizá-lo?
- Poderia enunciar o problema de outra forma? Poderia apresenta-lo de forma diferente novamente? Refira-se às definições.
- Se não pode resolver o problema proposto, tente primeiro resolver algum problema semelhante. Poderia imaginar um problema análogo um pouco mais acessível? Um problema mais geral? Um problema mais específico? Pode resolver uma parte do problema? Considere somente uma parte da condição; descarte a outra parte. Em que medida a incógnita fica agora determinada? De que forma pode variar? Você pode deduzir dos dados algum elemento útil? Pode pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? Pode mudar a incógnita? Pode mudar a incógnita ou os dados, ou ambos, se necessário, de tal forma que a nova incógnita e os novos dados estejam mais próximos entre si?
- Empregou todos os dados? Empregou toda a condição? Considerou todas as noções essenciais concernentes ao problema?

4.7.1.3 Execução do plano

- Ao executar o seu plano de resolução, comprove cada um dos passos.
- Pode ver claramente que o passo está correto? Pode demonstrá-lo?

4.7.1.4 Visão retrospectiva

- Pode verificar o resultado? Pode verificar o raciocínio?

- Pode obter o resultado de forma diferente? Pode vê-los com apenas uma olhada? Você pode empregar o resultado ou o método em algum outro problema?

Esses passos procuram encaminhar de maneira muito sistemática como solucionar os problemas. Eles, a todo momento, questionam os procedimentos adotados ou a adotar, durante as várias fases da resolução.

Por outra lado, para resolver problemas faz-se necessário praticar exercícios, pois para Pozo (1998, p. 31) "... considera-se que *as habilidades de resoluções de problemas e, em geral, a perícia, são um efeito da prática*. Por conseguinte, a solução de problemas não pode ser treinada mas deve sê-lo através de muita prática."

Não é simples a transposição dos conhecimentos adquiridos em sala de aula no contexto de uma situação mais ou menos idealizada para uma situação de aplicação em outra área do conhecimento matemático ou de outra disciplina. E, mais ainda complexo, é tentar transferir os conhecimentos de sala de aula para uma situação prática e aplicada a um acontecimento real. Parece que os conhecimentos dos bancos escolares e os conhecimentos práticos e aplicados habitam mundos completamente distintos que têm dificuldades em interagir.

A fim de tornar mais fácil essa transposição de conhecimentos do contexto de sala de aula para o útil, aplicado, é preciso aproximar tanto quanto possível as duas frentes de trabalho. Isto é, tornar as situações didáticas de aula próximas da realidade na qual o aluno está inserido, pois será num ambiente de maior familiaridade, através de suas vivências e experiência, que o discente conseguirá relacionar a teoria escolar com a prática real de aplicação da matemática.

Consequentemente, os problemas serão muito mais motivadores e farão sentido, uma vez que estarão relacionados com situações verdadeiras e próximas da realidade.

Entretanto, a utilização de problemas nas atividades de matemática e sua posterior transferência para a realidade requer um processo lento de transição, pois segundo Pozo (1998, p. 42):

> O que deveria ser uma lenta transição ou evolução, um ato do aluno assumindo responsabilidades e tomando decisões sobre a sua própria aprendizagem, uma transferência da sala de aula para a vida cotidiana, traduz-se numa brusca ruptura, numa mudança no papel e na função do nosso conhecimento para a qual não fomos treinados.

É imprescindível que um problema seja proposto de maneira a possuir um questionamento que seja relevante e que motive os alunos a tentar resolvê-lo. Mas, além desse questionamento, que é fundamental, a maneira como o problema é apresentado e o contexto em que ele está inserido será determinante para um maior ou menor engajamento e motivação dos alunos na busca da sua solução.

Assim, verificamos que Raths insiste na oportunidade de dispor aos alunos experiências ricas como boas possibilidades de ensino.

Raths (1977) afirma:

> Esperamos que nossos alunos pensem sozinhos, que se auto-governem, que sejam ponderados e equilibrados. Em situações novas para eles, esperamos que sejam capazes de aplicar o conhecimento anteriormente obtido. Esperamos que apresentem ideias novas, novas invenções, novos sonhos. Esperamos que tenham uma atitude de reflexão em muitas situações problemáticas.

Dessa forma, entendemos que o ensino de matemática através da resolução de problemas pode ser considerado como uma boa experiência de ensino e aprendizagem que pode ser oferecida aos alunos, na medida em que ela oferece a oportunidade da construção e análise de pensamentos. Aqui, pensar é tomado num contexto bem amplo que, segundo o dicionário "Escolar da Língua Portuguesa", pensar é: elaborar ideias, raciocínios, cogitações; refletir; meditar.

Raths (1977, p. 9) diz que "Comparação, interpretação, observação e resumo são operações de pensamento, na medida em que seu uso inteligente provoca pensamento."

Acreditamos que não é uma tarefa fácil para o professor adotar e implementar a resolução de problemas em suas aulas, uma vez que ela sugere a participação do aluno como ser crítico, indagador, questionador, que deve apresentar dúvidas e explorar situações sugeridas.

Essas e outras situações, consequentes da resolução de problemas, podem expor a autoridade do docente, o que certamente não é uma situação muito cômoda e favorável para ele.

Além disso, os cursos de formação acadêmica dos professores de matemática muito pouco, e por vezes nunca, exploram ou mesmo apresentam a resolução de problemas como opção de utilização como metodologia de ensino num contexto de sala de aula.

O professor não se sente seguro e capaz de desenvolver atividades de matemática sob a abordagem da resolução de problemas, pela carência em sua formação sobre estudo de tópicos nessa área.

É preciso encarar o problema e aceitar o desafio, uma vez que a resolução de problemas valoriza principalmente o processo de aprendizagem e não tão somente o produto final, isto é, a solução. Acreditamos ser o processo algo duradouro, enquanto que o produto final passageiro e momentâneo.

Entretanto, às vezes parece-nos que os alunos encontram-se apáticos, desinteressados ou resignados a qualquer possibilidade de aprendizagem. É muito comum ouvirmos dizer que os alunos estão com preguiça de pensar.

4.7.2 Medidas para facilitar a atividade de pensar

Raths (1977) sugere algumas medidas que podem facilitar o desenvolvimento da atividade de pensar, que será bastante útil na estratégia de resolução de problemas e que devemos despertar, desenvolver e aprimorar nos discentes, isto é:

<u>Comparação</u>: desperta a (possibilidade) para observar, diretamente por fatos ou pela imaginação, diferenças e semelhanças. Destaca a multiplicidade de possibilidades de comparação e que a comparação pode ser tão mais interessante quanto foi a motivação que levou o aluno a realizá-la.

<u>Observação</u>: está intimamente ligada a ideia de procurar, notar, perceber. É a atenção rigorosa e com certo objetivo. É o emprego dos sentidos humanos nos acontecimentos que nos cercam. Observar é uma forma de descobrir a informação.

É importante estimular a troca de observações entre os alunos, uma vez que eles mesmos perceberão as diferenças entre seus olhares sobre as coisas. E, essas observações devem ser verificadas e orientadas com objetivos.

<u>Classificação</u>: é o agrupamento de fatos, situações ou informações de acordo com alguns princípios pré-determinados. É dar ordem à existência.

<u>Interpretação</u>: é a explicação do sentido que uma experiência ou situação tem para o indivíduo. É um processo de atribuir e negar sentido às experiências.

<u>Crítica</u>: quando criticamos fazemos julgamento, analisamos e fazemos avaliações. Criticar não é encontrar defeito ou censura. Geralmente temos uma base para as críticas que fazemos. A base representa os modelos através dos quais julgamos.

<u>Obtenção e Organização dos Dados</u>: é a escolha criteriosa das informações relevantes de uma situação e organizá-la de modo a facilitar sua interpretação e utilização.

<u>Hipótese</u>: é uma proposição apresentada como possível solução para um problema. Sugere uma forma de fazer alguma coisa. Muito frequentemente, também, representa um esforço para explicar como algo atua, e é um guia para tentar a solução de um problema.

Aplicação de Fatos e Princípios a Novas Situações: de modo geral, supõe-se que um aluno tenha aprendido alguns princípios, regras, generalizações ou leis. Supõe-se também que conheça alguns fatos significativos. A situação por ele enfrentada deve ser nova e apresentar um desafio.

4.8 Por que resolver um problema em matemática?

Parece senso comum que a matemática está presente em todas as nossas atividades, que ela é muito útil, que possui várias aplicações e que pode nos auxiliar na solução de problemas relacionados à própria matemática, bem como às mais diversas áreas do conhecimento.

Assim, segundo Echeverría (1998, p. 46):

> Poderíamos dizer que o interesse pela solução de problemas em Matemática se deve, por um lado, à ideia de que o raciocínio nesta matéria reflete e estimula o raciocínio em outras áreas do conhecimento e, por outra lado, à ideia de que um maior aprofundamento nos conhecimentos e procedimentos matemáticos ajudaria o avanço em outras áreas científicas e tecnológicas e, inclusive, a resolução mais eficiente das tarefas cotidianas.

Estudar a matemática através da resolução de problemas ultrapassa a matemática da sala de aula, chegando à matemática da vida cotidiana e ao relacionamento da matemática com outras disciplinas e áreas do conhecimento, bem como às aplicações dessas que utilizam a matemática como estrutura de pensamento.

Durante a exploração de um problema, cabe ao professor mostrar aos alunos outras possibilidades de problemas semelhantes ao inicialmente proposto, bem como seu relacionamento com vários assuntos de matemática ou outras disciplinas e em contextos diversos, uma vez que quanto mais diversificado for o alcance da situação maior possibilidade terá o aluno de relacionar com problemas de sua vivência e, consequentemente, despertar seu maior interesse.

Vejamos o esquema do processo de resolução de problemas proposto por Echeverría (1998, p. 52), que apresenta a solução de problemas em duas grandes etapas, sendo que a primeira consiste na compreensão e tradução para uma série de expressões e símbolos matemáticos, enquanto que a segunda consiste na solução do problema, com a programação de estratégias que estabeleçam as diferentes submetas que pretende alcançar para chegar à solução final. Por fim, a interpretação dos resultados obtidos e a tradução como uma solução plausível.

Observa-se, no esquema abaixo, o destaque dado à linguística e a semântica que evidencia a importância da compreensão do problema pelo correto domínio da linguagem.

O Estágio (Problema) está vinculado aos conhecimentos Linguístico Semântico Esquemático, que consiste na sua correta interpretação. Além disso, esse estágio também está relacionado com o conhecimento Operativo Estratégico, que consiste na busca de estratégias para uma possível solução do problema.

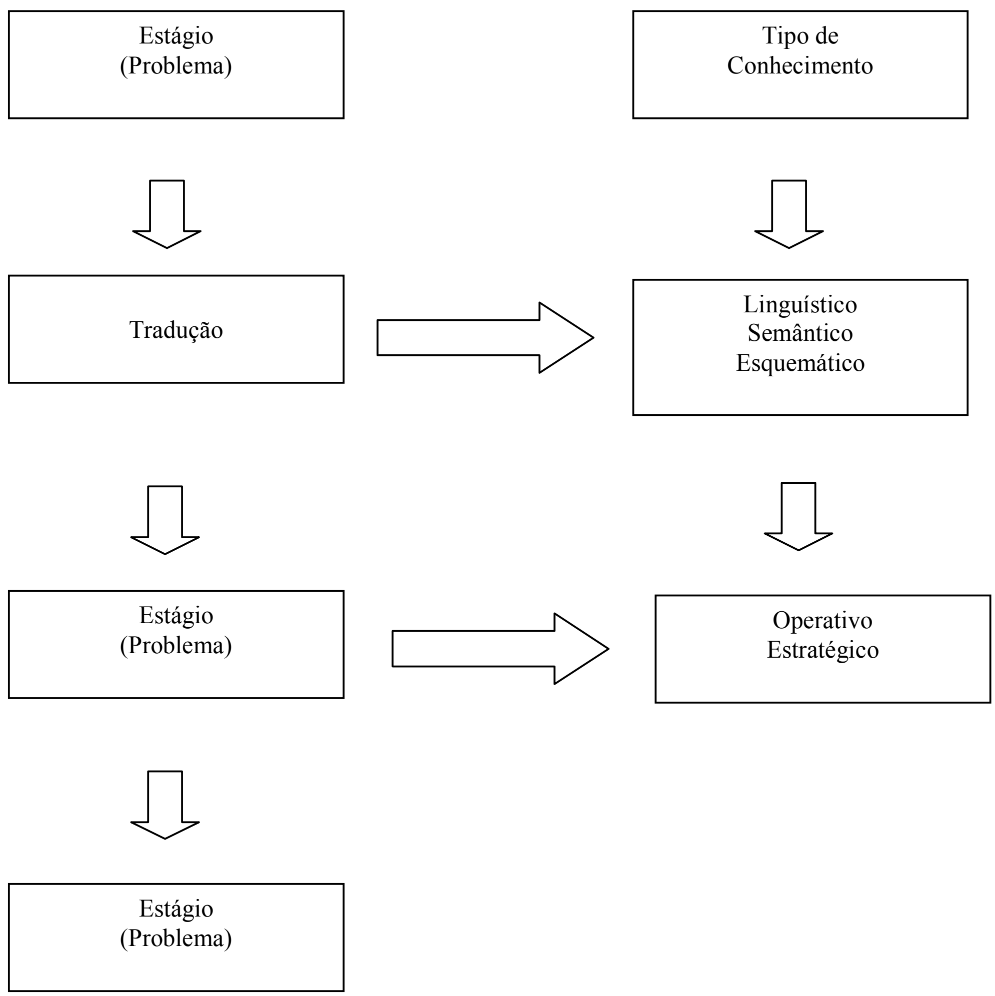


FIGURA 4.4: Compreensão do problema e a linguagem

4.8.1 Orientações para a compreensão dos problemas

Vejamos algumas orientações para facilitar a compreensão dos problemas de matemática, segundo Echeverría (1998, p.59):

- Expressar o problema com outras palavras.
- Explicar aos colegas em que consiste o problema.

- Representar o problema com outro formato (gráficos, diagramas, desenhos, com objetos, etc.)

- Indicar qual é a meta do problema.

- Apontar onde reside a dificuldade da tarefa.

- Separar os dados relevantes dos não relevantes.

- Indicar os dados com os quais contamos para resolver a tarefa.

- Indicar quais os dados que não estão presentes mas que são necessários para resolver a tarefa.

- Procurar um problema semelhante que já tenhamos resolvido.

- Analisar inicialmente alguns exemplos concretos, quando o problema é muito geral.

- Procurar diferentes situações (cenários, contextos, tarefas, etc.) nas quais esse problema possa ter lugar.

Essas orientações indicam que os alunos devem possuir maior cuidado, atenção no trato das informações e dados do problema, buscando relacioná-lo com situações ou tarefas semelhantes, a fim de proceder ao encaminhamento da solução.

É necessário que os alunos sejam estimulados a discutirem entre eles as informações e os questionamentos presentes no problema, uma vez que ao exporem seus pensamentos estarão exercitando seus pontos de vista sobre a situação, mostrando seus entendimentos e dúvidas, e serão naturalmente forçados para um ordenamento de suas próprias ideias, pois terão que mostrar aos outros como estão tentando solucionar o problema. Por outro lado, esse exercício de discussão possibilita uma mútua aprendizagem entre alunos, que normalmente possuem linguagem próxima um dos outros, o que garantirá um intercâmbio de conhecimentos e como consequência um crescimento coletivo dos discentes.

Esse crescimento trará autoconfiança, iniciativa e autonomia, características fundamentais para se trabalhar com resolução de problemas, isto é, ocorre um processo que se auto impulsiona, na medida em que a participação coletiva e interativa dos alunos ajuda na resolução de problemas que, com sua aplicação bem conduzida, facilita a interação e a participação dos discentes na construção dos seus próprios conhecimentos.

Há de se destacar, entretanto, que esse processo de trabalho e discussão coletivos é longo e que requer muita persistência e determinação por parte de todos os envolvidos no processo de matemática através da resolução de problemas.

4.9 Dificuldades da Resolução de problemas

Em análises bibliográficas realizadas, aliadas às conversas e entrevistas com alguns professores que adotam, ou tentaram adotar, como prática pedagógica a abordagem de assuntos com a utilização de resolução de problemas, podemos citar como dificuldades, entre outras, os seguintes aspectos: pouco tempo disponível, que esbarram no cumprimento do currículo; a própria resistência dos alunos, que já estão “doutrinados” a outra dinâmica de atividade de ensino-aprendizagem; a heterogeneidade dos alunos e a própria carência de prática dos professores nesta área de resolução de problemas.

Vejamos o resultado da pesquisa realizada por Ponte (2000), onde são listadas as seguintes dificuldades:

- para conduzir as discussões sobre os processos utilizados e as soluções dos problemas com toda a classe, de modo a valorizar e enriquecer esse momento tão importante da atividade;

- para encontrar bom material de apoio para a resolução dos problemas;

- para encontrar bons problemas, no sentido de integrar as atividades de resoluções de problemas com a sequência de conteúdos a serem ensinados;

- para controlar a ansiedade causada pela sensação de que a resolução de problemas toma muito tempo da aula;

- para superar incoerências causadas pelo confronto de antigas com as novas concepções e orientações curriculares acerca de resolução de problemas.

Em relação a essas dificuldades, uma das questões centrais para solucionar algumas dessas questões, faz-se necessária uma criteriosa revisão curricular, direcionada para conteúdos programáticos centrais.

Juntamente a essas dificuldades, não podemos deixar de destacar a enorme resistência que há frente a qualquer mudança, ou seja, um professor tradicional, com prática pedagógica já consagrada terá dificuldades em mudar sua forma de trabalhar.

Assim, é imprescindível que essas dificuldades sejam inicialmente conhecidas, trabalhadas e solucionadas para, posteriormente, enfocada a questão central da atividade – a resolução do problema.

Enfim, a resolução de problemas deve privilegiar não somente como resolver o problema em si, mas o processo elaborado na resolução. Os problemas devem surgir como ponto de partida para introdução de assuntos, pois dessa forma o aluno verifica a importância das ferramentas que a matemática pode disponibilizar.

Portanto, antes de passarmos para uma maior formalização da situação-problema e apresentação do mesmo em linguagem matemática, faz-se necessário, inicialmente, realizarmos uma aproximação desse problema com a realidade e os conhecimentos prévios dos alunos.

Assim, temos uma importante passagem que vai do concreto – o problema – para o abstrato – através de símbolos e generalizações.

Para a grande maioria dos professores, trabalhar sob a perspectiva da resolução de problemas, até por ser pouco praticada, é, sem dúvida, uma tarefa inicialmente desconfortável, trabalhosa e que não faz parte da sua formação acadêmica. Além disso, essa metodologia de ensino e aprendizagem é um processo muito mais complexo do que o tradicional modelo de ensino de matemática: exposição de conteúdos, resolução de exemplos e sugestão de exercícios. Não é demais repetir que é muito cômodo seguir o livro didático, bem comportado, bem sequencial e com respostas muito bem fechadas e únicas.

Uma aula utilizando resolução de problemas requer, por parte do professor, boa preparação, através de pesquisas teóricas, observações da realidade, além de muito bom conhecimento matemático.

5 PLANEJAMENTO DA PRÁTICA

O exercício da atividade prática da grande maioria dos profissionais da área de educação é recheado de muitos compromissos e muitas responsabilidades, o que, não raras vezes, acarreta carência de tempo para dar sequência em seus estudos de atualização e aperfeiçoamento. Entretanto, se esse fato é uma realidade, não pode ser tomado como justificativa para paralisações e estagnações, que levam alguns profissionais da área a permanecerem anestesiados e fiéis seguidores de práticas e concepções desatualizadas.

Assim, a possibilidade de parar e refletir sobre a atividade prática do exercício da docência, por si só, já é uma excelente oportunidade de atualização e aprimoramento na carreira de qualquer professor.

Agora, quando somos desafiados a produzir alguma proposta de atividade relevante para o processo de ensino e aprendizagem em matemática, isto é muito mais que uma oportunidade, é uma rica complementação da formação acadêmica, pois possibilita uma auto avaliação detalhada sobre as nossas concepções teóricas e práticas: o quê e como estamos fazendo dentro e fora de sala de aula, o quê e como os alunos estão fazendo, também, dentro e fora de sala de aula, o que nós acreditamos ser verdadeiro e correto.

Esse desafio de produzir algo relevante para o processo de ensino e aprendizagem em matemática foi proporcionado por este curso de mestrado profissionalizante, que durante a realização das diversas disciplinas possibilitou aperfeiçoamento, aprimoramento, descobertas e aprendizagens, mas principalmente, ofereceu oportunidade de discussão entre professores e alunos, contato com experiências e realidades distintas.

Além disso, podemos refletir sobre nosso fazer profissional sob várias perspectivas teóricas e práticas e assim, podemos rever e avaliar nossas concepções acerca de ensinar e aprender matemática, sob a ótica de diversas teorias de ensino e aprendizagem em matemática.

Também, nos foi oferecido contato com tecnologias de informática como ferramenta para a aprendizagem da Matemática, o que nos atualizou e enriqueceu nossos conhecimentos na área.

Estas complexas e interessantes discussões e estudos culminaram com a proposta de uma sequência didática destinada para ser desenvolvida na educação básica, especificamente no Ensino Médio.

Nossa atividade prática foi realizada no Colégio Militar de Porto Alegre[4] (CMPA), que é uma tradicional escola do município de Porto Alegre no Rio Grande do Sul.

O CMPA, juntamente com outros 11 Colégios Militares distribuídos em todas as regiões do Brasil, é subordinado à Diretoria de Ensino Preparatório e Assistencial (DEPA), sendo esta subordinada ao Departamento de Ensino e Cultura do Exército Brasileiro (DECEx) do Ministério da Defesa.

O CMPA possui uma proposta pedagógica que o particulariza, na busca da almejada educação integral. O objetivo desta é, não só proporcionar uma sólida base em conteúdos disciplinares, mas também preparar o jovem para a vida cidadã que encontrará ao sair do Colégio, com todas as suas exigências em valores morais e afetivos, ordem, disciplina e respeito, mas sempre dentro de um clima de sadia amizade e sã camaradagem.

Com relação à matemática, o CMPA destaca-se nacionalmente nas diversas Olimpíadas de Matemática, em que podemos citar em 2010 a obtenção de 15 (quinze) medalhas de ouro na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), sendo 02 (dois) primeiros lugares nacionais; em 2010 tivemos 03 (três) medalhistas na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), os únicos do Rio Grande do Sul; em 2011 a obtenção de 06 (seis) medalhas de ouro na Olimpíada Internacional Matemática sem Fronteiras, entre outras conquistas.

Essas vitórias criaram no Colégio Militar uma cultura de valorização da matemática, o que facilitou sobremaneira os procedimentos da atividade prática desta dissertação.

Em 2011, inicialmente, convidamos os alunos de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio para participarem da atividade prática, que denominamos “Programação Linear”. Essas atividades foram realizadas no contra turno, isto é, no período da tarde, uma vez que o Colégio tem suas atividades regulares no período da manhã.

Assim, todos os 20 (vinte) participantes foram voluntários, que permaneceram no colégio após o horário regular de aulas.

Discutimos, mestrando e orientadora, sobre os procedimentos que adotaríamos para a condução das atividades, sempre levando em conta a situação e características dos alunos, especialmente quanto a adequação da linguagem a ser adotada nos problemas que seriam propostos para tornar o assunto compatível e compreensível para eles. Por outro lado, tínhamos a intenção de sermos fiéis aos conceitos do assunto Programação Linear, a fim de não cometermos nenhuma impropriedade do ponto de vista da matemática formal.

---

[4] Informações verificadas no site do Colégio Militar de Porto Alegre. Disponível em <http://www.cmpa.tche.br/index.php/colegio/o-colegio>. Acesso em: 05 de junho de 2012, às 9h.

Vários problemas nos foram sugeridos, e assim fizemos as escolhas voltadas e sintonizadas com situações mais próximas das realidades dos alunos.

Nossa abordagem metodológica foi através da resolução de problemas, que possibilitaria, inicialmente, a proposição de uma situação-problema que deveria ser investigada, motivando e envolvendo os alunos na busca da sua solução.

Com essa abordagem, poderíamos começar a aula sem a preocupação de apresentar um conteúdo específico, mas sim propor algum desafio que estimulasse os alunos a enfrentá-lo, discuti-lo e tentar solucioná-lo, a partir dos seus conhecimentos prévios.

Assim, desde o início pretendíamos desenvolver nos alunos aspectos como autonomia, criatividade e iniciativa, a fim de contemplar a teoria da resolução de problemas em matemática.

No item seguinte, apresentaremos a prática didática em 08 (oito) aulas de 45 (quarenta e cinco) minutos cada encontro.

5.1 A PRÁTICA

Este capítulo apresenta a atividade prática desenvolvida no 2º ano do Ensino Médio sobre os conceitos e aplicações de Pesquisa Operacional-Programação Linear.

Todas as aulas foram planejadas e concebidas valorizando a participação dos alunos, buscando torná-los agentes da construção dos seus próprios conhecimentos, propondo constantemente questionamentos sobre os diversos itens, problemas, sequências e conceitos que foram trabalhados.

Cada uma das atividades foi preparada segundo as teorias das resoluções de problemas, com objetivos bem definidos, com clara intenção daquilo que desejávamos alcançar em cada uma das aulas.

Por outro lado, mesmo com o estabelecimento preciso desses objetivos, tínhamos a preocupação de não tornar nossas aulas completamente fechadas e acabadas, permitindo variações e discussões, que não estavam inicialmente previstas.

Assim, apresentaremos o desenvolvimento dessas aulas, com seus objetivos, suas atividades e um comentário de cada aula, verificando como foi o seu andamento, seu processo didático, a participação e o engajamento dos alunos, de acordo com nossas expectativas e concepções.

5.2 Aula 1: Motivação-Problema Inicial

5.2.1 Objetivo

Na primeira aula nosso objetivo era propor uma situação-problema sobre pesquisa operacional-programação linear, sem fazer, inicialmente, qualquer menção a esse título.

Nessa atividade, pretendíamos motivar os alunos sobre a importância de tentar solucionar um problema, utilizando seus conhecimentos prévios, organizando suas ideias, levantando hipóteses, fazendo testes, discutindo possíveis soluções.

5.2.2 Atividade

Nossas atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática/sala multimídia do Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA), que possui 30 (trinta) computadores de mesa, uma tela de projeção, com Datashow, além de uma "lousa virtual".

Inicialmente, apresentamos o vídeo "Linha de produção mini-bolos[5]", que mostrava a linha de produção de uma padaria com seus maquinários.

Após o vídeo, comentamos sobre as necessidades básicas e fundamentais de qualquer cadeia produtiva ou sistema de administração, isto é, a utilização racional dos recursos disponíveis na busca da utilização otimizada dos mesmos (a relação custo-benefício), não somente para esse caso particular da padaria, mas que poderia ser estendida a qualquer processo ou gestão de produção.

Então, propomos o seguinte problema:

PROBLEMA 1: VENDA DE BOLOS

Uma padaria dispõe de 150 kg de farinha, 22 kg de açúcar e 27,5 kg de manteiga, produzindo bolos do tipo A e tipo B. Para a produção de uma dúzia de bolos do tipo A gasta 3 kg de farinha, 1 kg de açúcar e 1 kg de manteiga e para a produção de uma dúzia de bolos do tipo B gasta 6 kg de farinha, 0,5 kg de açúcar e 1 kg de manteiga. Supondo que o lucro resultante da produção de uma dúzia de bolos do tipo A é de 20 reais e o lucro resultante da produção de uma dúzia de bolos do tipo B é de 30 reais, quantas dúzias de bolos do tipo A e bolos do tipo B deve produzir a padaria para maximizar seu lucro?

Em seguida, os alunos foram organizados em dupla. Solicitamos aos mesmos que realizassem a leitura do problema, com bastante atenção, para compreendê-lo, verificassem os

[5] Vídeo disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=U_t7A7oB2x8>. Acesso em: 09 de setembro de 2011, às 8h52min.

dados que eram fornecidos e identificassem quais eram os questionamentos, a fim de investigar uma possível solução, que tivesse sentido e fosse coerente.

Dessa forma, estávamos orientando os alunos a seguir, aproximadamente, a proposta de encaminhamento de resolução de problemas sugerida por Polya (1994):

1ª etapa: *compreensão do problema*

2ª etapa: *construção de uma estratégia de resolução*

3ª etapa: *execução da estratégia*

4ª etapa: *revisão da solução*.

5.2.3 Comentário

A introdução da aula, através do vídeo “Linha de produção mini-bolos”, chamou bastante atenção dos alunos, despertando o interesse pela atividade. A utilização do laboratório de informática/sala multimídia, com seus recursos disponíveis, mostrou-se bom aliado na apresentação e desenvolvimento da atividade. Os alunos receberam bem o problema da “Venda de Bolos” e logo, em seguida, tentaram resolver, através de soluções bem “imediatas”, utilizando ideias simples e básicas de aritmética.

Alguns alunos realizaram com sucesso uma boa organização dos dados e, logo em seguida, começaram a apresentar alguns questionamentos sobre o problema, tais como, ao verificarem o lucro que produzia o bolo do tipo B (que era maior do que o lucro produzido pelo bolo do tipo A) seria imediato pensar que bastava produzir a maior quantidade possível daquele tipo de bolo, pois assim a padaria teria maior lucro.

Então, questionamos os alunos para verificarem, também, as restrições e as quantidades de materiais que cada tipo de bolo necessitava: farinha, açúcar e manteiga.

Nesse momento, deixamos os alunos à vontade para discutirem acerca do problema, analisando todas as informações, fazendo suposições, levantando hipóteses, propondo soluções. Essas discussões foram muito interessantes e proveitosas, havendo alguns pontos de consenso e também de divergências entre as duplas.

Novamente os discentes tentaram solucionar o problema, buscando diretamente a máxima produção do bolo tipo B, pois ele apresentava maior lucratividade.

Entretanto, outros alunos apontaram que para produzir o bolo tipo B seria necessário o dobro de farinha do bolo tipo A e, ainda, que essa farinha tinha uma disponibilidade máxima de 150 kg.

Esse momento foi extremamente rico, uma vez que os próprios alunos começaram a analisar com maior cuidado não somente o lucro, mas, também as restrições da situação.

Verificamos que as maiores dificuldades dos alunos eram organizar e interpretar as informações que o problema apresentava. Alguns não conseguiam imaginar, principalmente, os limites que eram impostos ao problema.

Os alunos, naturalmente, sentiram necessidade de uma boa organização dos dados, uma vez que, segundo eles, havia muitas informações para serem consideradas.

Acreditamos que esse primeiro encontro foi bastante proveitoso e os alunos se engajaram e tentaram efetivamente encontrar uma solução para o problema.

Pensamos que essa boa participação dos alunos, entre outros fatores, se deve ao fato da atividade ter sido apresentada através de uma situação-problema, contextualizada, inserida em uma realidade perfeitamente possível e próxima de todos.

5.3 Aula 2: A organização dos dados/Apresentação do modelo matemático

5.3.1 Objetivo

Nosso objetivo nessa segunda atividade era desenvolver nos alunos a capacidade de síntese e organização dos dados, pois dessa forma facilitaria a compreensão e a investigação da situação.

Além disso, gostaríamos de orientá-los, usando seus conhecimentos anteriores, na formulação de um modelo matemático que pudesse resolver nosso problema.

5.3.2 Atividade

A partir do problema proposto na aula inicial, problema 1 – venda de bolos, chamamos a atenção sobre a grande quantidade de informações e propusemos aos alunos, que novamente estavam sentados em duplas, que tentassem organizá-las.

Foi natural, quase unânime, praticamente todos os alunos fizeram a organização dos dados através de uma tabela.

Pudemos verificar que, a partir dessa organização em tabela, o problema ficou mais claro e compreensível para os discentes.

Depois da organização, novamente, pedimos para os alunos tentarem encaminhar uma solução para o problema.

Transcorridas mais algumas discussões, uma das duplas sentiu necessidade de introduzir no problema duas variáveis, uma para cada tipo de bolo.

Então, solicitamos que a dupla que havia mencionado sobre as variáveis compartilhasse com os outros alunos essa necessidade, pois essa ideia seria útil para solução do problema.

Usando, as variáveis apresentadas, conjuntamente, professor e alunos, construímos um modelo matemático que representava algebricamente as restrições e o objetivo do problema, e que consistia num sistema de equações e inequações lineares.

MODELO MATEMÁTICO:

x: quantidade de dúzias do bolo do tipo A

y: quantidade de dúzias do bolo do tipo B

Farinha: $3x + 6y \leq 150$

Açúcar: $x + 0{,}5y \leq 22$

Manteiga: $1x + 1y \leq 27{,}5$

Restrições implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade)

Lucro: $z = 20x + 30y$ (máximo) (Chamamos de função objetivo)

5.3.3 Comentário

Achamos interessante continuar insistindo com o problema da aula 1 – venda de bolos, sem ainda apresentar uma solução e deixando que os próprios alunos discutissem entre eles.

Nesse momento, verificamos certa ansiedade por parte dos alunos, uma vez que os mesmos já estavam angustiados e precisando de uma solução “pronta e fechada” para o problema. Talvez essa necessidade seja reflexo de uma aprendizagem matemática que estavam acostumados a vivenciar, isto é, o professor propõe uma problema, os alunos leem a situação e, sem maiores discussões ou explorações, o professor resolve e apresenta a solução. Acreditamos que os alunos estavam sentindo bastante falta desse processo, que já se tornara hábito.

Por outro lado, o surgimento das variáveis, propostas pelos próprios alunos, trouxe novo entusiasmo, uma vez que pudemos discutir e construir um modelo matemático que levaria à solução do problema.

Mas, se por um lado foi razoavelmente simples construir o sistema de equações e inequações (uma vez que os alunos do 2º ano estavam trabalhando o conteúdo “Sistema de

Equações”), por outro lado, sabíamos das dificuldades que seria resolver uma inequação do 1º grau com duas variáveis, pois os alunos tinham trabalhado esse conteúdo no 9º ano do Ensino Fundamental, portanto há 02 (dois) anos.

Com a construção desse modelo matemático, poderíamos, então, apresentar a pesquisa operacional-programação linear.

Chamamos a atenção para a característica das igualdades e desigualdades que surgiram em nosso modelo: todas eram lineares. Além disso, chamamos as variáveis do problema de “variáveis de decisão”.

5.4 Aula 3: A Pesquisa Operacional – Programação Linear

5.4.1 Objetivo

Gostaríamos de apresentar um resumo histórico da linha do tempo da Pesquisa Operacional-Programação Linear, a fim de situarmos nossos alunos no tempo e no espaço em relação a esse assunto para, finalmente, definirmos o que são problemas de Programação Linear.

Apresentaremos, também, algumas aplicações da programação linear e suas diversas áreas de atuação.

5.4.2 Atividade

Utilizamos algumas projeções no Datashow sobre o histórico da Programação Linear, incluindo figuras e textos, desde as mais antigas origens da programação matemática. Em seguida, realizamos um breve histórico a cerca da Programação Linear.

5.4.3 Comentário

Acreditamos ser de grande importância e interesse trabalhar, sempre que possível, com a história da matemática, uma vez que ela mostra a construção do conhecimento, com suas necessidades, dificuldades, humaniza e integra a disciplina a outros saberes, bem como permite compreender a origem dos pensamentos e suas evoluções. Segundo D’Ambrosio (1999, p.97), “... um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas.”

Os recursos de multimídia disponíveis, Datashow e tela de projeção, facilitaram e valorizaram a apresentação histórica, tornando a aula mais atraente e dinâmica para os alunos.

Quando da apresentação das aplicações da programação linear, aproveitamos para realizar alguns comentários sobre cada uma delas, o que despertou interesse nos alunos pela variedade de possibilidades de abrangência do assunto.

5.5 Aula 4: Modelo Matemático com Duas Variáveis

5.5.1 Objetivo

Nossa intenção nessa aula era discutir um modelo matemático que pudesse contemplar todas as informações e condições que um problema de programação linear apresenta.

Além disso, apresentamos mais um problema (Problema da Dieta) para revermos alguns passos anteriormente discutidos: a organização, identificação de variáveis, função objetivo, bem como as equações e inequações.

Destacamos que nos problemas que apresentam 2 (duas) variáveis podemos encaminhar sua possível solução pelo processo chamada de “método geométrico”, em que daremos atenção na solução das inequações lineares com 2 (duas) variáveis.

Revisaremos o processo de solução de um sistema de inequações lineares.

5.5.2 Atividade

Retomamos a discussão do modelo matemático investigado no final da aula 2, chamando atenção das duas variáveis que eram exatamente a pergunta do problema da “venda de bolos”, ou seja, quantas dúzias de bolos do tipo A e bolos do tipo B deve produzir a padaria para maximizar seu lucro?

Lançamos mão, então, do modelo matemático já construído:

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade de dúzias do bolo do tipo A

y: quantidade de dúzias do bolo do tipo B

Farinha: $3x + 6y \leq 150$

Açúcar: $x + 0{,}5y \leq 22$

Manteiga: $1x + 1y \leq 27{,}5$

Restrições implícitas: x ≥ 0; y ≥ 0 (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade).
Lucro: z = 20x + 30y (máximo) (Chamamos de função objetivo)

Destacamos que estávamos diante de um problema com 2 (duas) variáveis e que, nesses casos, podemos encaminhar sua possível solução pelo processo chamada de “método geométrico”, dando atenção, especial, para a solução das inequações lineares com 02 (duas) variáveis. Apresentamos o vídeo “Como escolher carne e ovos[6]”.

Em seguida, distribuímos e projetamos no datashow o seguinte problema:

PROBLEMA 2: DIETA

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada porção de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada porção de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Sabe-se que cada porção de carne custa 2,5 unidades monetárias e cada porção de ovo custa 3 unidades monetárias.

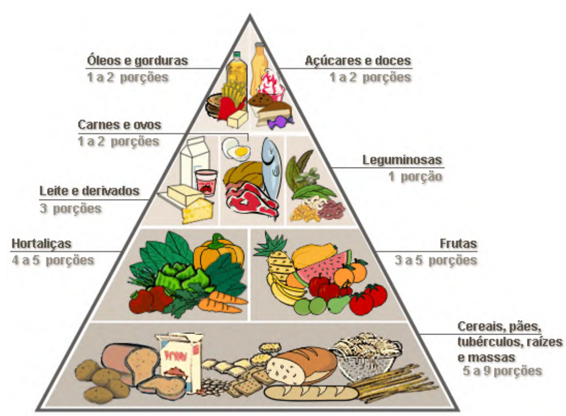


FIGURA 6.4: Pirâmide de alimentos

[6] Vídeo disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=4vyaD1YtOA>. Acesso em: 09 de setembro de 2011, às 9h10min.

Solicitamos aos alunos que realizassem uma leitura atenciosa do problema. Após, incentivamos uma discussão a fim de que os alunos encaminhassem um modelo matemático para o problema.

Alguns alunos realizaram, com facilidade, a organização dos dados do problema numa tabela, bem como identificaram suas variáveis. Solicitamos que esses alunos auxiliassem os outros que ainda não haviam encaminhado satisfatoriamente o modelo matemático.

Dessa forma, pudemos, mais uma vez, destacar a presença de 2 (duas) variáveis (quantidade diária de carnes e quantidade diária de ovos).

Chegamos ao modelo:

x: quantidade diária de carne

y: quantidade diária de ovo

Vitaminas: $4x + 8y \geq 32$

Proteínas: $6x + 6y \geq 36$

$x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade).

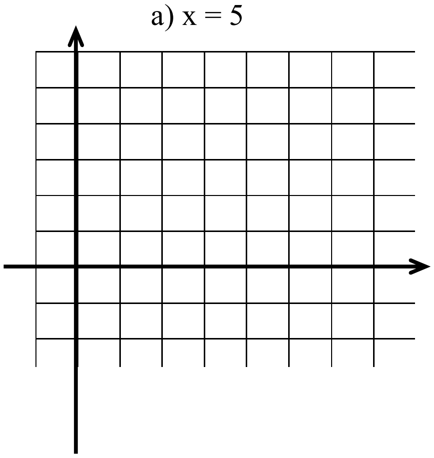
Quantidade: $z = 2{,}5x + 3y$ (minimizar o custo) (Chamamos de função objetivo)

Com os modelos disponíveis, revisamos o processo geométrico de solução de um sistema de inequações lineares. Para retomada desse conteúdo, usamos o material abaixo:

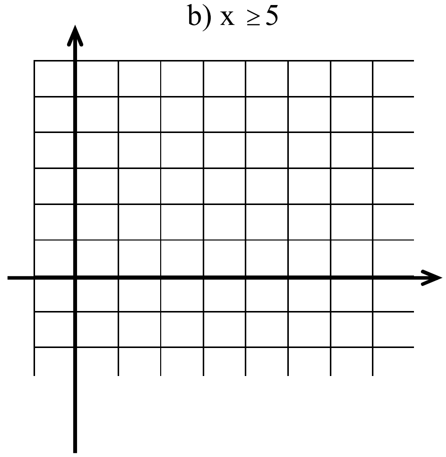
INEQUAÇÃO DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

1. Esboce os pontos que satisfazem cada condição abaixo:

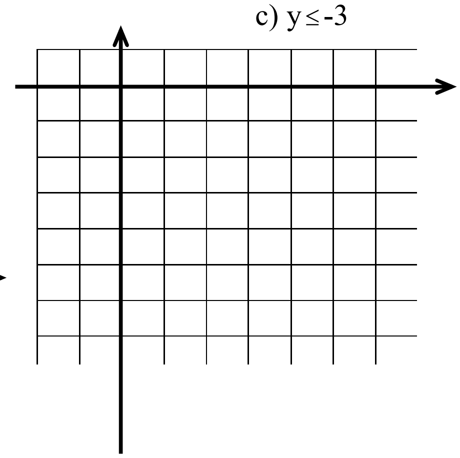
a) $x = 5$



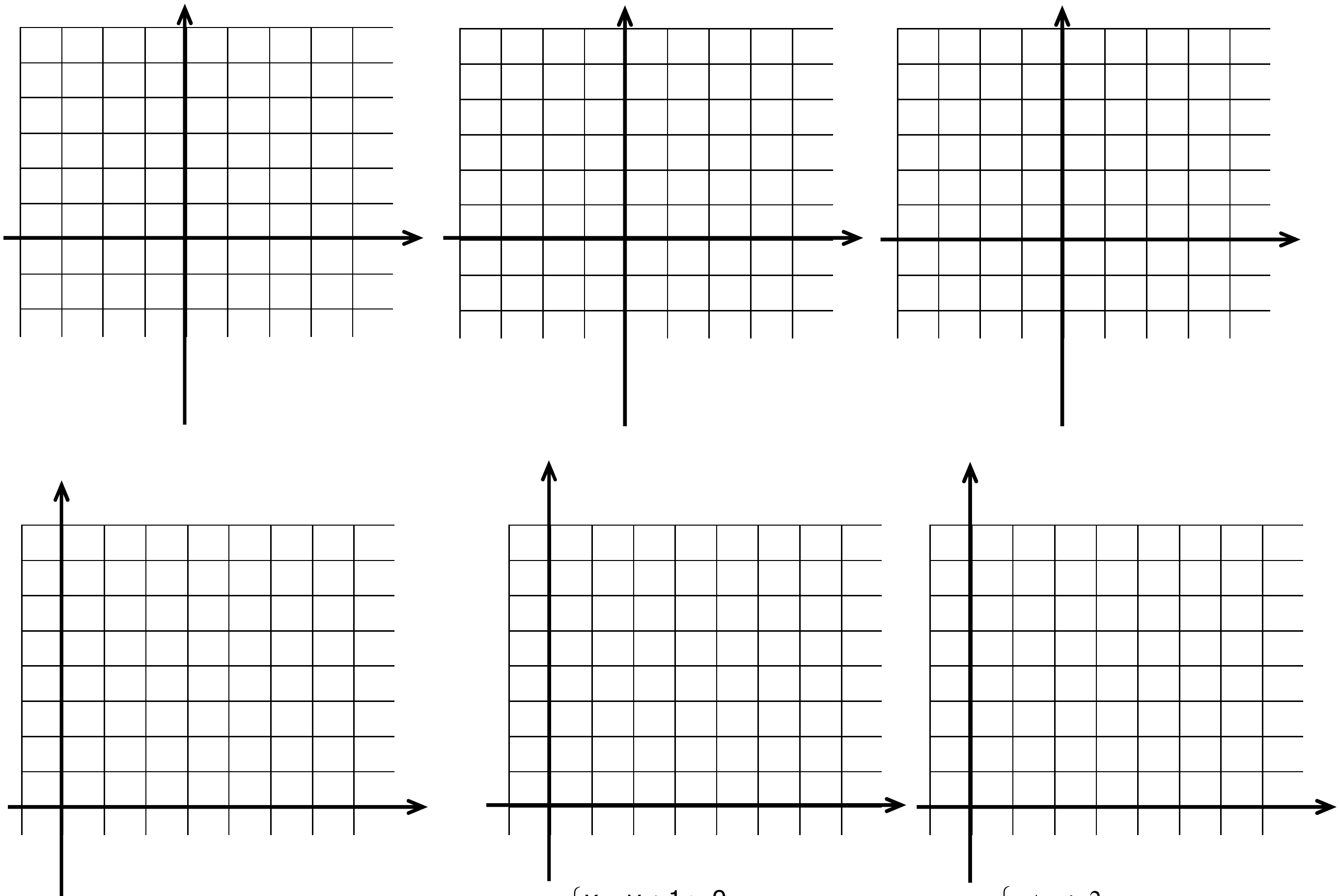
b) $x \geq 5$



c) $y \leq -3$



d) $3x + y = 6$ e) $3x + y \geq 6$ f) $3x + y \leq 6$



g) $-2x + y < -5$ h) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ y - 2 \geq 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y > 2 \\ 2x - y > -4 \end{cases}$

FIGURA 6.5: Gráficos para revisão de inequação

5.5.3 Comentário

Inicialmente, percebemos a necessidade que os alunos sentiam em solucionar o primeiro problema, problema da venda de bolos.

Entretanto, a apresentação do segundo problema (problema da dieta) foi um facilitador para que pudéssemos exercitar a ideia da construção de um modelo matemático para problemas de programação linear.

Destacamos a importância do auxílio prestado pelos alunos, que realizaram mais rapidamente o modelo do problema da dieta, quando ajudaram seus colegas que não haviam conseguido realizar o encaminhamento do exercício. Essa cooperação proporcionou confiança para quem ajudou, integração e interação no grupo para quem foi ajudado.

Após essas discussões, tínhamos dois modelos matemáticos de programação linear para serem resolvidos.

Entretanto, com o surgimento das inequações do 1º grau com duas variáveis, sentimos a necessidade de realizar uma revisão desse conteúdo, uma vez que os alunos somente haviam tido contato com esse conteúdo no 9º ano do Ensino Fundamental.

A utilização da lista de exercícios apresentada para sistema de inequações foi muito útil, pois permitiu realizar uma objetiva e necessária revisão do assunto.

5.6 Aula 5: Software Graphmatica

5.6.1 Objetivo

Nosso objetivo era apresentar e explorar um software que realizasse construção de gráficos, a fim de auxiliar na solução geométrica dos sistemas de inequações do 1º Grau, com duas variáveis, que fariam parte do modelo matemático de um problema de Programação Linear.

5.6.2 Atividade

Nossa intenção inicial era utilizar o software Winplot, todavia sua utilização não foi possível, uma vez que esse programa era incompatível com o sistema operacional que o laboratório de informática do CMPA possui.

Assim, decidimos utilizar o software livre Graphmática, que acreditamos ser de fácil manuseio, apresentar facilitada utilização de suas ferramentas básicas e apresentar versão em língua portuguesa.

Foi realizada, previamente, a instalação do programa Graphmática em todos os computadores do laboratório de informática do CMPA.

Então, solicitamos aos alunos que, individualmente, explorassem as principias ferramentas desse software, que são muito semelhantes à grande maioria de qualquer outro programa de computador, como o editor de texto “Word”, por exemplo. Pedimos que tivessem atenção especial ao traçado de gráficos de funções do 1º grau.

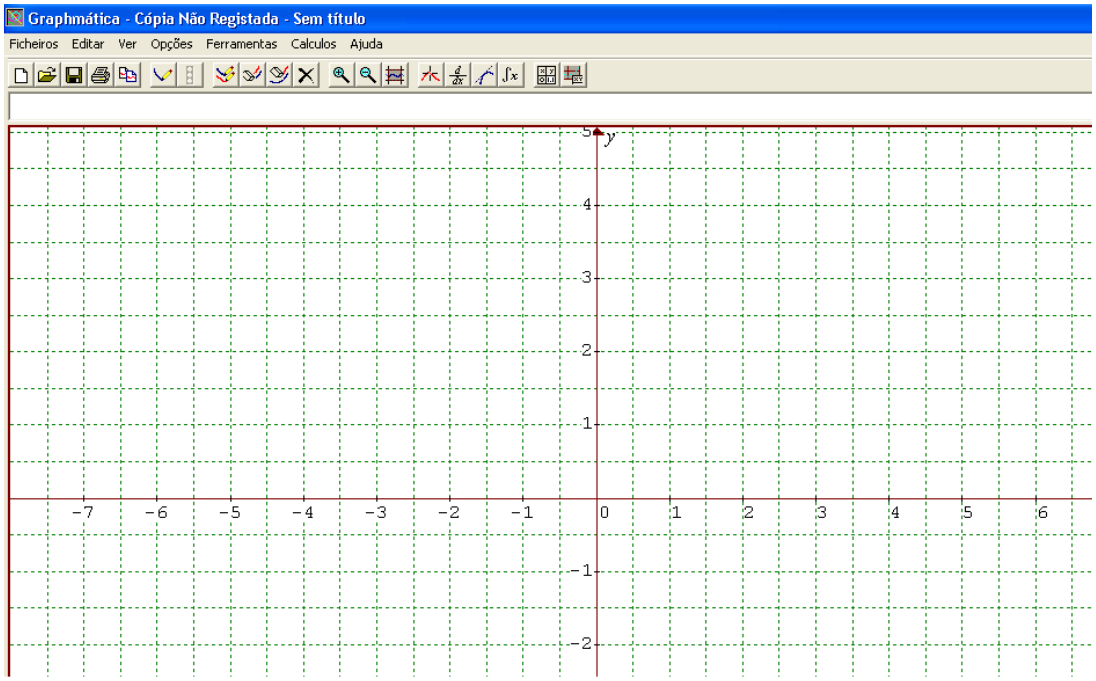


FIGURA 6.6: Software Graphmática

Após esse momento de familiarização, apresentamos o roteiro abaixo, bem específico, e que atendia a nosso objetivo de solucionar geometricamente as desigualdades lineares.

ROTEIRO DE TRABALHO PARA O SOFTWARE GRAPHMÁTICA

1. inserir a equação (ajustar o "zoom");
2. copiar a própria equação (ctrl c);
3. ir em: ***Editar – Anotações*** – colar (ctrl v) – ***Colocar*** – sobre a reta desenhada;
4. inserir as inequações: usar as próprias equações e acrescentar (> ou <);
5. identificar a região comum a todas as inequações;
5. determinar as interseções, ir em: ***Ferramentas – Intersecções*** – selecione as equações e ***Calcular***;
6. anotar todos os pontos de intersecção da região comum e substitua na função (mínimo ou máximo). Podemos usar uma calculadora;
7. verificar o resultado (mínimo ou máximo).

Assim, resolvemos os sistemas de inequações dos modelos matemáticos dos dois exercícios:

A tabela a seguir é referente ao Problema1: Venda de Bolos (página 66).

Tipo	Farinha (kg)	Açúcar (kg)	Manteiga (kg)	Lucro (R$)
A	3	1	1	20
B	6	0,5	1	30
Disponível	150	22	27,5	

TABELA 5. Problema 1 – Venda de Bolos

O modelo matemático correspondente é:

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade de dúzias do bolo do tipo A

y: quantidade de dúzias do bolo do tipo B

Farinha: $3x + 6y \leq 150$

Açúcar: $x + 0{,}5y \leq 22$

Manteiga: $1x + 1y \leq 27{,}5$

Restrições implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade).

Lucro: $z = 20x + 30y$ (máximo) (Chamamos de função objetivo)

A solução gráfica obtida com o software Graphmática é apresentada na Figura 6.7.

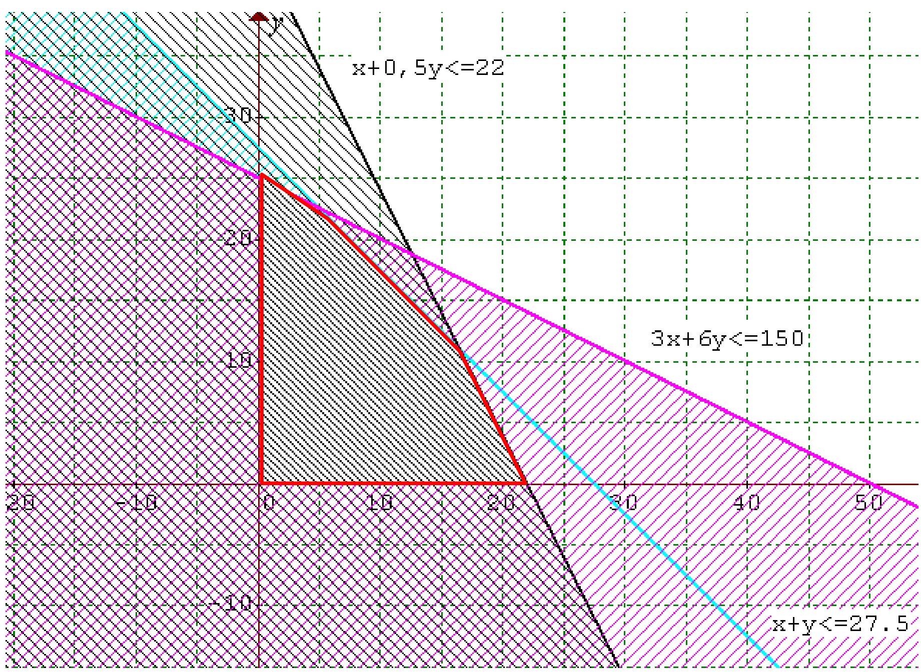


FIGURA 6.7: Solução gráfica do problema 1

PROBLEMA 2: DIETA

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Sabe-se que cada unidade de carne custa 2,5 unidades monetárias e cada unidade de ovo custa 3 unidades monetárias.

A tabela correspondente é:

Alimento	Vitaminas	Proteínas	Custo
Carne	4	6	2,5
Ovo	8	6	3
Necessidade (mínima)	32	36	

TABELA 6. Problema 2 - Dieta

O modelo matemático correspondente é:

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade diária de carne

y: quantidade diária de ovo

Vitaminas: $4x + 8y \geq 32$

Proteínas: $6x + 6y \geq 36$

$x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade)

Quantidade: $z = 2{,}5x + 3y$ (minimizar o custo) (Chamamos de função objetivo)

A solução gráfica obtida com o software Graphmática é apresentada na Figura 6.8.

5.6.3 Comentário

O software Graphmática se mostrou extremamente fácil de ser utilizado, por sua interface amigável, relativamente familiar e conhecida da maioria dos alunos. Essas características facilitaram bastante a utilização desse programa como ferramenta auxiliar na resolução das desigualdades lineares.

Além disso, os alunos mostraram-se bastante interessados nesse programa pela sua facilidade de manuseio e dinamismo em representar as suas inequações lineares.

A maioria dos discentes solicitou cópia do software para estudo e aprendizagem mais aprofundada do programa.

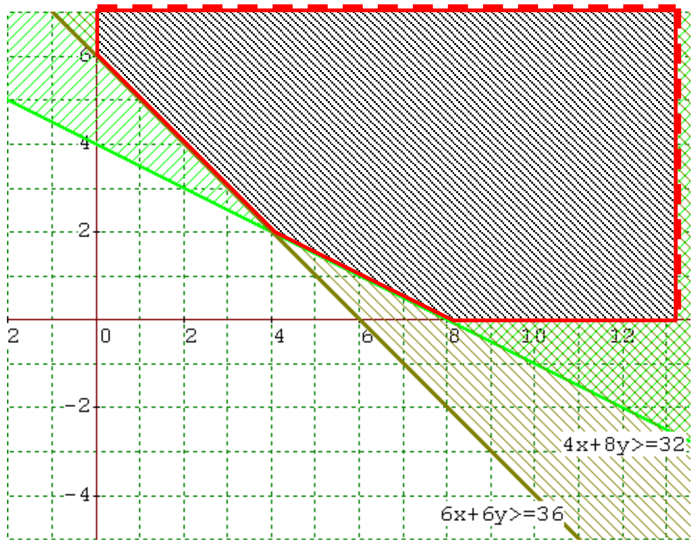


FIGURA 6.8: Solução Gráfica do problema 2

Visualizar na interface do software o encaminhamento da solução de um problema de Programação Linear foi bastante elucidativo e esclarecedor, ao mesmo tempo em que mostrou para os alunos que estávamos no caminho final da solução dos problemas. Isso causou certo alívio e sensação de que finalmente tudo começaria a fazer sentido.

Aproveitamos o momento para destacar a importância da região comum determinada pelas inequações e, principalmente, evidenciar os vértices dessa região do plano.

5.7 Aula 6: Conceitos de Programação Linear/Solução Gráfica

5.7.1 Objetivo

Apresentamos, sem demonstração, o seguinte teorema de Programação Linear:

Teorema Fundamental da Programação Linear

Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ definida numa região poliedral convexa A do R^n. Suponha que f assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se A possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.

Segundo Yoshida (1987):

> Problemas de PL envolvendo duas variáveis podem ser resolvidos graficamente de maneira bastante simples; sendo os problemas de três variáveis de difícil solução gráfica e os que apresentam mais de três variáveis, impossíveis de serem resolvidos graficamente.

Com o auxílio da representação geométrica da solução do sistema de inequações lineares, utilizando o software Graphmática, investigamos as possíveis soluções para os problemas de Programação Linear.

5.7.2 Atividade

Usando as representações gráficas dos dois problemas, utilizamos o Teorema 1 (página 22). Ou seja, calculamos os vértices da região poligonal de cada um dos problemas. Para cálculo desses vértices realizamos as soluções dos sistemas, tomadas de duas em duas equações.

PROBLEMA 1: VENDA DE BOLOS

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade de dúzias do bolo do tipo A

y: quantidade de dúzias do bolo do tipo B

Farinha: $3x + 6y \leq 150$

Açúcar: $x + 0,5y \leq 22$

Manteiga: $1x + 1y \leq 27,5$

Restrições implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade)

Lucro: $z = 20x + 30y$ (máximo) (Chamamos de função-objetivo)

A representação gráfica para a solução do problema 1 é dada na figura 6.9.

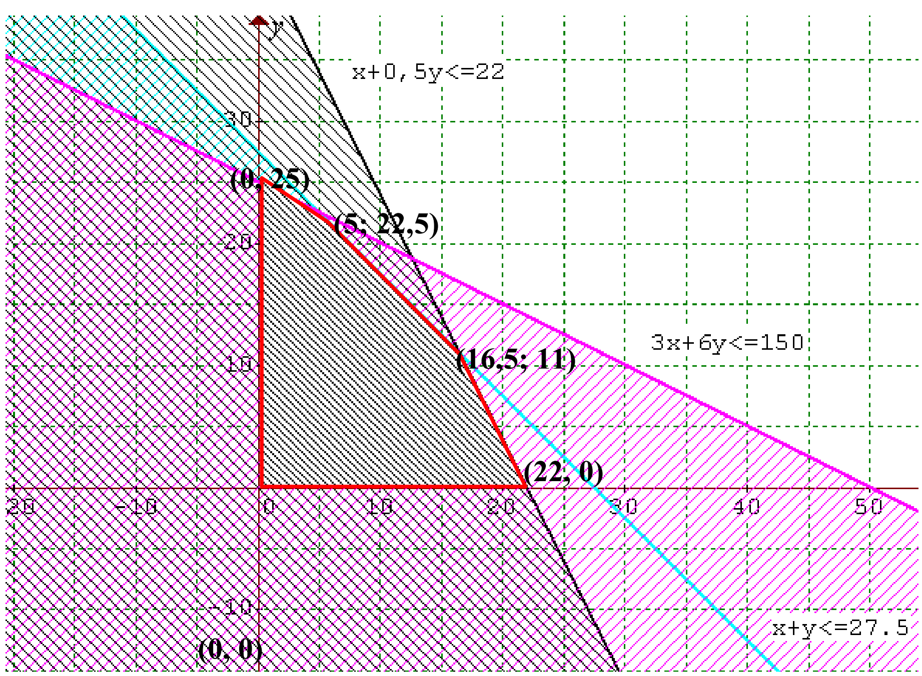


FIGURA 6.9: Solução do Problema 1

PROBLEMA 2: DIETA

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade diária de carne

y: quantidade diária de ovos

Vitaminas: $4x + 8y \geq 32$

Proteínas: $6x + 6y \geq 36$

$x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade).

Quantidade: $z = 2{,}5x + 3y$ (minimizar o custo) (Chamamos de função-objetivo)

Destacamos a região solução do sistema de inequações lineares, evidenciando os vértices dessa região poligonal do plano.

Questionamos os alunos qual seria o significado dessa região convexa do plano?

Após várias discussões, alguns alunos sugeriram, intuitivamente, que nessa região estaria a solução do problema, uma vez que elas contemplavam a solução do sistema linear de inequações.

Chamaremos esta região de “região factível”.

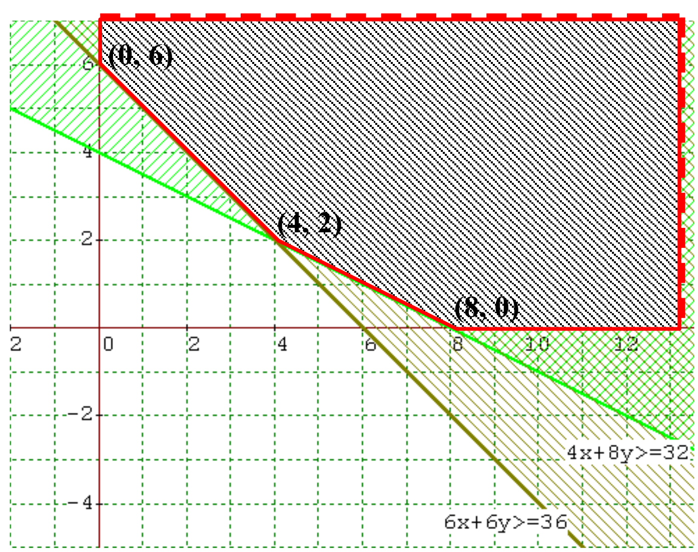


FIGURA 6.10: Solução do Problema 2

Perguntamos, então, qual(is) seria(m) o(s) ponto(s) dessa região em que teríamos a melhor solução? E, o que a função objetivo teria a ver com essa região?

Os alunos não chegaram a concluir satisfatoriamente os questionamentos acima.

Fez-se necessária a nossa intervenção mais diretamente.

Para tentar responder, pelo menos em parte, nossos próprios questionamentos, lançamos mão mais uma vez da representação gráfica do modelo, e para a função objetivo z =

20x + 30y, que representaria o lucro, ainda desconhecido, realizamos algumas substituições para z. Assim, tínhamos:

0 = 20x + 30y

100 = 20x + 30y

200 = 20x + 30y

300 = 20x + 30y

400 = 20x + 30y

500 = 20x + 30y

6000 = 20x + 30y

7000 = 20x + 30y

800 = 20x + 30y

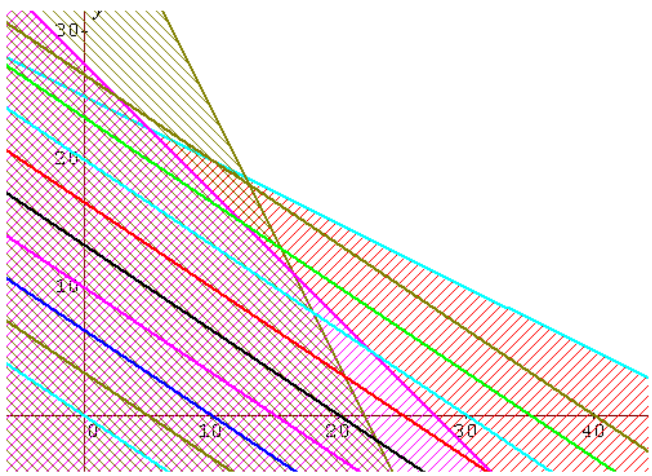


FIGURA 6.11: Curvas de nível

Esse conjunto de equações está representado no plano pelo conjunto de retas paralelas, que passam pela região (região factível) solução do sistema de inequações lineares. Dessa forma, acreditamos que, ainda que intuitivamente, os alunos perceberam a relação entre a função objetivo e a região factível. E, mais ainda lançamos a semente para a compreensão do Teorema Fundamental da Programação Linear.

Anunciamos, sem demonstração e sem maiores formalidades, o Teorema Fundamental da Programação Linear, isto é, informamos que a solução de cada um dos nossos problemas de Programação Linear estaria em um dos vértices da região poligonal solução do sistema. Então, para encontrar a melhor solução, bastaria substituir esses pontos na função objetivo.

Acreditamos que, com o auxílio da Figura 6.11, foi possível oferecer aos alunos uma explicação razoável do Teorema Fundamental da Programação Linear, pois esse conjunto de retas paralelas interceptará os infinitos pontos da região poligonal, onde se encontram as possíveis soluções do problema, incluindo seus vértices.

Além disso, num desses pontos de interseção, entre a reta obtida da função objetivo e os vértices dessa região, estará a melhor solução, uma vez que, a partir de um desses pontos de interseção, uma dessas retas já estará "saindo" dessa região poligonal, e, portanto, nesse caso, tendo seu ponto máximo.

Solicitamos, então, que os alunos identificassem os pontos dos vértices da região, realizando o seguinte comando: ***Ferramentas – Intersecções*** – selecione as equações e ***Calcular***;

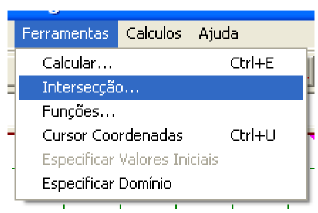


FIGURA 6.12: Software Graphmática

No caso do Problema da venda de bolos, encontramos os seguintes pontos: (0,0), (0, 25), (5; 22,5), (16,5;11) e (22, 0).

Substituindo na função objetivo z = 20x + 30y, cujo objetivo é maximizar o lucro, encontramos:

	Quantidade de dúzias do bolo do tipo A	Quantidade de dúzias do bolo do tipo B	Lucro (máximo)
Par ordenado	X	Y	z = 20x + 30y
(0, 0)	0	0	0
(0, 25)	0	25	750
(5; 22,5)	5	22,5	775
(16,5; 11)	16,5	11	660
(22, 0)	22	0	440

TABELA 7. Pontos extremos e Função-Objetivo

Discutimos o significado de cada um desses pontos, pares ordenados, bem como o respectivo resultado que cada um deles gerava.

Concluímos, finalmente, que a melhor solução seria produzir 05 (cinco) dúzias de bolos do tipo A e 22,5 (vinte e dois vírgula cinco) dúzias de bolos do tipo B, uma vez o resultado seria um lucro de R$ 775,00, maior possível, sob essas condições.

Neste caso, a intuição inicial dos alunos, os quais acreditavam que a melhor solução para o problema seria produzir somente bolos do tipo B, não foi confirmada matematicamente.

Assim, chamamos a atenção dos discentes de que nem sempre uma intuição ou hipótese inicial de solução de um problema de programação linear é confirmada, após a solução formal do mesmo.

No caso do Problema da dieta, encontramos os seguintes pontos: (0,6), (4, 2), e (8, 0).

Substituindo na função objetivo z = 2,5x + 3y, cujo objetivo é minimizar o custo, encontramos:

	Quantidade diária de carne	Quantidade diária de ovo	Custo (mínimo)
Par ordenado	X	Y	z = 2,5x + 3y
(0, 6)	0	6	18
(4, 2)	4	2	16
(8, 0)	8	0	20

TABELA 8. Pontos extremos e Função-Objetivo

Discutimos, novamente, o significado de cada um desses pontos, pares ordenados, bem como o respectivo resultado que cada um deles gerava.

Concluímos que a melhor solução seria consumir 04 (quatro) unidades diárias de carne e 02 (duas) unidades diárias de ovo, uma vez o resultado seria um custo mínimo de $ 16,00 (unidades monetárias), menor possível, sob essas condições.

5.7.3 Comentário

Nessa aula tivemos a parte mais trabalhosa, porém também a mais interessante para os alunos.

Foi necessária uma efetiva participação dos discentes, a fim de entenderem algumas justificativas que seriam usadas a partir dessa etapa.

Acreditamos que o software Graphmática teve fundamental participação, aliado à sua projeção com o datashow, pois facilitou a construção da região poligonal, solução do sistema de inequações. E, mais do que isso, permitiu o dinamismo necessário para tentar justificar, usando da intuição e da representação gráfica, o Teorema Fundamental da Programação Linear.

Acreditamos que não seria possível uma demonstração formal do Teorema Fundamental da Programação Linear, uma vez que esse grupo de alunos do 2º ano do Ensino Médio não teria maturidade matemática para acompanhar tal demonstração, além da falta de conhecimentos prévios que se faziam necessários.

Mas, passada essa fase mais conceitual, pudemos verificar a grande satisfação dos alunos em resolverem, por fim, os problemas que estavam propostos desde os primeiros encontros.

Destacamos que, sempre ao final de cada um dos problemas, solicitamos aos alunos que verificassem se as repostas encontradas eram efetivamente coerentes e se atendiam a todas as condições que os problemas apresentavam. Com isso estávamos contemplando a etapa 3 da proposta de encaminhamento de resolução de problemas, sugerida por Polya, isto é, revisando a solução.

5.8 Aula 7: Exercícios de Programação Linear

5.8.1 Objetivo

Nesta atividade gostaríamos de apresentar alguns problemas, já distribuídos aos alunos na aula anterior, para verificar a capacidade dos discentes em resolver um problema de programação linear com duas variáveis.

Gostaríamos, também, de incentivar a troca de ideias, a discussão e a cooperação, a fim de modelar um problema de programação linear.

5.8.2 Atividade

Distribuímos, desde a aula anterior, a seguinte lista de exercícios:

LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

1. Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: foi descoberto que o programa “A” com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa “B”, com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de 1 (uma) semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo 5 minutos para sua propaganda e que não há verba para mais de 80 minutos de música. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar a fim de obter o maior número de telespectadores?

2. Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranja a 20 u.m. (unidades monetárias) de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos a 10 u.m. de lucro por caixa, e no máximo 200 caixas de tangerinas a 30 u.m. de lucro por caixa. De que forma ele deverá carregar o caminhão para obter o lucro máximo?

3. Uma confecção dispõe de 80 m^2 de brim e 20 m^2 de popeline. Cada unidade de um modelo A de vestido requer 1 m^2 de brim e 3 m^2 de popeline, e cada unidade de um outro modelo B requer 2 m^2 de brim e 2 m^2 de popeline. Se cada unidade de qualquer um dos modelos é vendida por R$ 80,00, quantas unidades de cada modelo devem ser confeccionadas para se obter a receita máxima, com a venda de toda a produção?

4. “Oficina Mecânica”

Uma oficina mecânica tem 01 furadeira vertical e 05 fresadoras, que são usadas para a produção de conjuntos de móveis formados de 2 partes. Sabe-se qual é a produtividade de cada máquina na fabricação destas partes do conjunto:

	FURADEIRA	FRESADORA
PARTE 1	03	20
PARTE 2	05	15

TABELA 9. Oficina mecânica

Obs: tempo para produzir as partes dado em minutos.

O encarregado pela oficina deseja manter uma carga balanceada nas máquinas de modo que nenhuma delas seja usada mais do que 30 minutos por dia do que qualquer outra, sendo o carregamento de fresamento dividido igualmente entre as 05 fresadoras.

5. “Uma Indústria Química”

Dois produtos, *a* e *b*, são feitos a partir de duas operações químicas. Cada unidade do produto *a* requer 2 horas da operação 1 e 3 horas da operação 2. Cada unidade do produto *b* requer 3 horas da operação 1 e 4 horas da operação 2. O tempo total disponível para a realização da operação 1 é de 16 horas, e o tempo total para a operação 2 é de 24 horas.

A produção do produto *b* resulta, também, num subproduto *c* sem custos adicionais. Sabe-se que parte do produto *c* pode ser vendida com lucro, mas o restante deve ser destruído. Previsões mostram que no máximo 5 unidades do produto *c* serão vendidas, e sabe-se que cada unidade do produto *b* fabricada gera 2 unidades do produto *c*.

Sabe-se que:

produto *a* gera um lucro de $ 4 por unidade.

produto *b* gera um lucro de $ 10 por unidade.

produto *c* gera um lucro de $ 3 por unidade se for vendido.

produto *c* gera um custo de $ 2 por unidade se for destruído.

Solicitamos que os alunos realizassem, em dupla, uma leitura atenta de cada problema, destacando as informações e dados importantes, bem como as variáveis e as solicitações dos exercícios.

Por outro lado, fizemos a projeção desses mesmos exercícios, com o auxílio do Datashow, para que sempre que fosse necessário discutíssemos conjuntamente sobre cada um dos problemas.

Durante as leituras em grupo, percebemos que algumas duplas haviam compreendido bem a ideia, a organização e maneira de como apresentar um modelo para solucionar os problemas de programação linear.

Após algum tempo de discussão do problema proposto, pedíamos aos próprios alunos que sugerissem seus modelos de construção para serem solucionados.

5.8.3 Comentário

Acreditamos que esse foi o momento mais importante de toda nossa atividade, uma vez que pudemos verificar efetivamente como os alunos haviam concebido a ideia de solucionar um problema de programação linear.

Algumas duplas saíram-se muito bem, organizando com facilidade os dados dos problemas, identificando suas variáveis, bem como o objetivo. E, dessa maneira, praticamente sem nossa intervenção, conseguiram solucionar os exercícios propostos.

Por outro lado, algumas duplas, certamente a minoria, apresentaram dificuldades em compreender o problema. Segundo eles, os exercícios possuíam muitas informações. Assim, fez-se necessário nosso acompanhamento mais de perto.

Verificando ambos os casos, tanto os alunos que apresentavam boa desenvoltura na solução dos exercícios quanto os que não possuíam essa característica, acreditamos que o grande diferencial entre eles está muito mais na capacidade de autonomia e iniciativa em resolver uma situação problema do que na maior capacidade de entendimento do assunto trabalhado, pois por ocasião da nossa aproximação e questionamento para a condução e mediação das soluções, mesmo os alunos que aparentemente não estavam conseguindo desenvolver a atividade, mostravam-se capazes de encaminhar corretamente a maioria dos exercícios.

5.9 Aula 8: Programação Linear – Problemas com mais de duas variáveis

5.9.1 Objetivo

Gostaríamos de verificar se os alunos seriam capazes de apresentar o modelo matemático de encaminhamento da solução de um problema de programação linear com mais de duas variáveis.

Além disso, queríamos dar ciência da existência de outros métodos de solução, como o método Simplex, por exemplo.

5.9.2 Atividade

Distribuímos aos alunos os exercícios:

1. Determinação do *Mix* de Produção

Uma companhia deseja programar a produção de um utensílio de cozinha que requer o uso de dois tipos de recursos – mão-de-obra e material. A companhia está considerando a fabricação de três modelos e o seu departamento de engenharia forneceu os dados abaixo: o suprimento de material é de 200 quilos por dia. A disponibilidade diária de mão-de–obra é 150 horas. Formule um modelo de programação linear para determinar a produção diária de cada um dos modelos de utensílios de modo a maximizar o lucro total da companhia.

Modelo	A	B	C
Mão de obra (horas por unidade)	7	7	6
Material (kilos por unidade)	4	4	5
Lucro ($ por unidade)	4	2	3

TABELA 10. Mix de Produção

2. "SELEÇÃO DE MÍDIA PARA PROPAGANDA"

Uma companhia de propaganda deseja planejar uma campanha em 3 diferentes meios: tv, rádio e revistas. Pretende-se alcançar o maior número de clientes possível. Um estudo de mercado resultou em:

	TV HORÁRIO NORMAL	TV HORÁRIO NOBRE	RÁDIO	REVISTAS
CUSTO	40.000	75.000	30.000	15.000
CLIENTES TINGIDOS	400.000	900.000	500.000	200.000
MULHERES ATINGIDAS	300.000	400.000	200.000	100.000

TABELA 11. Seleção de mídias para propaganda

0bs: Valores válidos para cada veiculação da propaganda.
A companhia não quer gastar mais de R$ 800.000.
Adicionalmente deseja:
(1) que no mínimo 2 milhões de mulheres sejam atingidas;
(2) gastar no máximo $ 500.000 com tv;
(3) que no mínimo 3 veiculações ocorram no horário normal da tv;
(4) que no mínimo 2 veiculações ocorram no horário nobre da tv;
(5) que o número de veiculações no rádio e revistas deve ficar entre 5 e 10, para cada meio de divulgação.
Formular um modelo de P. L. que trate este problema, determinando o número de veiculações a serem feitas em cada meio de comunicação, de modo a atingir o máximo possível de clientes.

5.9.3 Comentário

Selecionamos exercícios que acreditávamos serem possíveis/acessíveis aos alunos.

Acompanhando as duplas, procuramos discutir o encaminhamento das soluções, buscando incentivar a autonomia e a iniciativa de todos.

Verificamos que, mesmo com o surgimento de mais de duas varáveis, os alunos em sua maioria, conseguiram apresentar corretamente um modelo matemático para solucionar, principalmente, o primeiro problema.

No segundo problema, poucos alunos elaboraram satisfatoriamente um bom modelo. Eles alegavam que o exercício possuía muita informação, o que dificultava sua interpretação.

Entretanto, o fato de não poderem apresentar uma solução final para esses problemas, pois não podiam usar o método gráfico, causou certo desconforto e frustração nos alunos. Lembramos que o software utilizado, o graphmática, não permite desenho em três dimensões, o que impossibilita a construção de gráfico para três variáveis.

Finalmente, comentamos sobre a existência do Método Simplex, que permite realizar a solução de qualquer problema de Programação Linear (que seja possível), bem como comentamos sobre a existência de alguns softwares específicos para solução de problemas de Programação Linear, como por exemplo, a função *Solver* do Excel.

7 CONCLUSÃO

Para obtermos bons resultados em qualquer atividade que vamos realizar, e mais especialmente ainda na área de educação, é fundamental que realizemos um criterioso planejamento prévio.

Sendo assim, para a aplicação da nossa atividade foi realizado um cuidadoso planejamento cujo objetivo principal era propor uma atividade de matemática para o Ensino Médio envolvendo o assunto Programação Linear. Vale destacar que esse conteúdo é normalmente estudado somente em alguns cursos de graduação relacionados à área de ciências exatas.

Nossa proposta de atividade foi bastante significativa, uma vez que proporcionou aos alunos uma, ainda que breve, construção de alguns conhecimentos na área da Programação Linear.

Inicialmente, procuramos apresentar uma revisão histórica do desenvolvimento do assunto, a qual serviu de motivação, mostrando a evolução desse conhecimento a partir das suas próprias necessidades.

Acreditamos que essa abordagem histórica foi bastante apropriada, pois aproximou o aluno da matemática, rompendo barreiras, possibilitando uma melhor compreensão dos assuntos futuros, desmistificando algumas crenças tradicionais sobre essa ciência e, finalmente, verificando que os conhecimentos matemáticos não nascem prontos, mas que são construídos de maneira lenta e progressiva.

A escolha do assunto Programação Linear foi bastante acertada, oportuna e apropriada a nossos objetivos e necessidades iniciais, isto é, apresentar uma matemática mais contextualizada e mais aplicada de modo a motivar os alunos em seus estudos e descobertas acerca dessa disciplina.

Pudemos constatar o grande interesse dos alunos pelo assunto, pois mesmo após o encerramento do horário da aplicação das aulas, eles permaneciam em sala de aula, fazendo perguntas, apresentando ideias, discutindo e propondo soluções.

Essa experiência, ou seja, o estudo da Programação Linear no Ensino Médio, foi bastante proveitosa tanto para os alunos quanto para o professor.

Os discentes aplicaram seus conhecimentos anteriores na solução dos problemas apresentados, os quais eram, tanto quanto possível, contextualizados e com reais possibilidades de aplicação.

Além disso, todos os encaminhamentos de soluções foram construídos paulatinamente, sendo todos os problemas explorados e analisados sob vários aspectos, dando ênfase e liberdade para várias possibilidades de solução.

Essa atividade possibilitou uma efetiva participação dos alunos na construção dos seus próprios conhecimentos. Dessa forma, verificamos maior autonomia, liberdade de criatividade e, principalmente, cooperação entre as diversas duplas que participaram dos trabalhos.

Acreditamos que os resultados obtidos com a aplicação dessa atividade foram muito positivos, uma vez que constatamos que durante a execução da solução dos problemas propostos os alunos apresentaram ótimos encaminhamentos, a fim de encontrar boas soluções para o trabalho.

Em algumas oportunidades os alunos chegaram praticamente sozinhos à solução dos problemas.

Desatacamos, ainda, a necessidade constante de motivar os alunos a participarem das discussões dos problemas, incentivando-os a apresentarem novas soluções, sempre com o intuito de explorar suas possibilidades, potencialidades e capacidades de compreender e resolver uma situação-problema.

Enfim, constatamos ao final da aplicação dessa atividade uma satisfação geral dos alunos participantes, pois eles mostraram interesse em continuar estudando o assunto Programação Linear.

Alguns desses discentes relataram que o conteúdo Programação Linear apresentou sentido para muitos assuntos de matemática que eles haviam estudado ao longo de vários anos, como, por exemplo, inequações do primeiro grau.

Ainda, vários dos alunos participantes solicitaram indicação de livros para leituras complementares sobre o referido assunto, principalmente acerca do Método Simplex, sobre o qual havíamos feito apenas um breve comentário.

Além disso, destacamos o ambiente favorável que possui o colégio no qual a atividade foi desenvolvida, uma vez que o mesmo já possui uma tradição na busca da qualidade do ensino de matemática. Sem dúvida, essa situação facilitou a execução da nossa proposta.

Também, acreditamos que o laboratório de informática do colégio, dotado de equipamento Datashow, foi um aliado importante na condução das atividades, pois permitiu maior dinamismo e melhor interação na apresentação, exploração e, principalmente, na investigação das soluções dos problemas que foram trabalhados.

Nesse contexto, e cientes de que nem toda instituição de ensino de Educação Básica possui essas facilidades, acreditamos que esse clima favorável deve ser buscado constantemente, através de incentivos à participação dos alunos em atividades que envolvam a matemática, criando na escola uma cultura de valorização e importância dessa ciência.

Entretanto, faz-se necessário que os professores estejam atentos, pois de nada adianta um assunto interessante, aliado a uma boa metodologia, com bons recursos didáticos, se uma atividade de ensino e aprendizagem não for conduzida sob olhares efetivamente comprometidos, bem preparados, planejados e com objetivos bem definidos.

Os professores devem verificar a todo momento o andamento das atividades propostas. Devem conversar com pequenos grupos de alunos, questionar individualmente, acompanhar soluções propostas, orientar rumos, enfim, estar em condições de auxiliar e conduzir os alunos na busca dos objetivos da atividade.

Há momentos em que os acontecimentos e discussões da aula conduzem naturalmente para um bom encaminhamento das soluções. Todavia, há situações em que é de extrema importância a intervenção do professor na mediação entre o desconhecido, que está se investigando, e o que se deseja alcançar.

Por outro lado, a metodologia adotada, isto é, o estudo da matemática através da resolução de problemas foi bastante adequada, pois contribuiu para a obtenção dos nossos objetivos.

Acreditamos que desenvolver a matemática através da resolução de problemas, além de tornar a matemática mais real e próxima do aluno, pode alcançar essas necessidades, uma vez que ela propicia desafios, cujas tentativas de superação resultarão naturalmente na formação de cidadãos melhores preparados para viver em sociedade.

Assim, de acordo com Smole (2001, p. 92):

> A perspectiva da resolução de problemas caracteriza-se por uma postura de inconformismo diante dos obstáculos e do que foi estabelecido por outros, sendo um exercício contínuo do desenvolvimento do senso crítico e da criatividade, que são características primordiais daqueles que fazem ciência e objetivos do ensino de matemática.

Ainda, nossa vivência de sala de aula, nos sugere que uma proposta de atividade didática contextualizada, sobretudo à realidade do discente, produz uma situação de aprendizagem muito favorável, participativa e estimulante tanto para o professor quanto para o aluno.

Após cada aula-atividade, realizamos uma reflexão acerca dos objetivos inicialmente propostos, bem como dos resultados e experiências verificados, a fim de realizarmos adaptações e correções de possíveis distorções.

Nossa proposta de atividade não se configura numa receita pronta e acabada que se encaixa em qualquer situação, pois sabemos das diferenças e particularidades de cada escola, cabendo a essas adaptá-la e ajustá-la às suas necessidades.

É muito comum ouvirmos dos professores de matemática, que efetivamente atuam na educação básica, que temos muito conteúdo para trabalhar e pouco tempo disponível para esse fim. Todavia, acreditamos que o assunto Programação Linear pode ser apresentado no Ensino Médio, pois vem ao encontro de algumas necessidades dos alunos e dos professores, ou seja, ver e dar sentido à matemática, verificando algumas de suas aplicações, bem como sua importância em outras áreas do conhecimento.

Assim, abrimos um leque com muitas possibilidades de exploração do assunto, aproximando a matemática de outras disciplinas, o que permitirá uma interação entre os conhecimentos de várias áreas, através de um processo de interdisciplinaridade.

Esse processo de desenvolvimento do conteúdo Programação Linear, aliado à resolução de problemas, provoca, inicialmente, tanto nos alunos como no professor, um certo desconforto, pois desloca ambos de uma situação de passividade e repetição para uma situação de questionamento, não acomodação e, principalmente, de abertura para novas perspectivas de ensino e aprendizagem.

Ou seja, o novo e o desconhecido provocam insegurança, uma vez que muito raramente temos a oportunidade de vivenciarmos experiências em educação que nos provoquem e nos desafiem.

Assim, acreditamos que a proposta de atividade ora apresentada possa:

a) em primeiro momento, provocar alguma reflexão, bem geral, nos docentes a respeito do processo de ensino e aprendizagem em matemática;

b) permitir que os professores verifiquem a possibilidade de incluir no Ensino Médio o assunto Programação Linear, a fim de contextualizar e aplicar a matemática;

c) despertar nos professores de matemática a necessidade da investigação e da pesquisa, a fim de tornarem seus fazeres pedagógicos mais atuais, voltados às necessidades do hoje e do amanhã e, não somente, amarrados às repetições apreendidas no passado.

d) servir para cada professor olhar à sua volta, à sua realidade e possa descobrir o quanto é importante tornar sua aula mais interessante e motivadora para seus alunos.

e) desenvolver nos professores uma atitude corajosa, motivando-os para a criatividade e a iniciativa em busca do constante aprimoramento do seu fazer pedagógico e, consequentemente, que essas virtudes cativem seus alunos, gerando um ambiente favorável e motivador para todo o processo de ensino e aprendizagem em matemática.

Assim, acreditamos que romper com a repetição é dever de todos os educadores e buscar seu auto-aperfeiçoamento é primordial, pois essas mudanças de atitude trarão reflexos muito positivos, sobretudo no processo de ensino e aprendizagem, e todos os envolvidos serão beneficiados: discentes e docentes.

O fazer pedagógico é bastante prazeroso e satisfatório quando o professor tem a certeza de ter acrescentado algo novo e diferenciado para o crescimento dos alunos.

Dessa forma, a matemática através da resolução de problemas pode auxiliar na construção real do conhecimento dos alunos, oferecendo o novo e diferenciado, uma vez que ela privilegia a criatividade, a cooperação, a iniciativa e a investigação.

O fazer diário do professor é trabalhoso e acarreta uma certa hipnose, que o anestesia, levando alguns docentes à cômoda tendência da repetição.

Mas, se os problemas existem e não são poucos, temos a certeza que as soluções existem e podem e devem ser alcançadas.

Esforço e comprometimento devem caminhar lado a lado na busca incessante dos objetivos do educador matemático.

Por outro lado, é preciso que os professores estejam atentos para as soluções encontradas. Eles devem aceitar que, talvez, elas não sejam definitivas, não servirem a toda e qualquer situação e, mais ainda, necessitem de revisões e adaptações, pois o mundo no qual estamos inseridos – matemática, alunos, professores e escola – pode ser bastante mutável.

Ou seja, se tivermos consciência dessas situações transitórias e transformadoras, teremos dado nosso primeiro passo na direção de nos tornarmos educadores atuais, que buscam e valorizam a pesquisa, bem como acreditam na constante e necessária atualização.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, J. L. e Outros. **Álgebra Linear**. Editora Harbra, 3ª edição, São Paulo, 1980.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Ensino Médio**. Brasília, 1999.

CAMPBELL, P. F. Characteristics of constructivist instruction. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 8., 1996, Sevilha. **Eighth International Congress on Mathematical Education,** Sevilha, Espanha, 1996.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas**. Editora Ática, São Paulo, 2000.

D'AMBROSIO, U. **A História da Matemática**: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.

ECHEVERRÍA, M.D.P.P. **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Editora ArtMed, Porto Alegre, 1998.

GOLDBARG, M. C. e LUNA, H. P. **Otimização Combinatória e Programação Linear**: modelos e algoritmos, Editora Campus, Rio de Janeiro, 2000.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **Problem Solving in School Mathematics.** Reston: NCTM, Yearbook, 1980.

LESTER, F. K. What has happened to mathematical problem-solving research. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTCIA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.** Rio de Janeiro: IM – UFRJ, 1995, p.57-68.

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações – os três componentes do ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.41, p.1-6, 1999.

NAMEN A. A. e Bornstein, C. T. **Uma ferramenta para avaliação de resultados de diversos modelos de otimização de dietas**. Pesquisa Operacional, v.24, n.3, p.445-465, 2004.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action.** Reston: NCTM, 1980. 29 p.

______. **Principles and standards for school mathematics.** Reston: NTCM, 2000.

NETO, L. L. de Salles. **Tópicos de Pesquisa Operacional para o Ensino Médio**. Disponível em: <http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/leduino.pdf>. Acesso em: 22 de setembro de 2011, às 15h40min.

ONUCHIC, L.R. **Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas**. In: BICUDO, M.A.V. (org): **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: EDUNESP, 1999. p. 1999-218.

PEREIRA, M. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

PEREIRA, R.A.A. **Elementos de Programação Linear: Condições de Otimalidade e Lema de Farkas.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas 2010. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000772054&fd=y>. Acesso em: 15 de fevereiro de 2012, às 14h20min.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um enfoque do método matemático**. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, 1994.

PONTE, J. P. **A investigação sobre o professor de Matemática**: Problemas e perspectivas. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2000, Serra Negra. **Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em educação Matemática.** Serra Negra, 2000.

POZO, J. I. **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Editora Artmed, Porto Alegre, 1998.

RATHS, L. E. **Ensinar a Pensar**: Teoria e Aplicação. Editora Pedagógica Universitária, São Paulo, 1977.

ROMBERG, T. A. **Perspectives on scholarship and research methods**. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap. 3, p.49-64.

SANTOS, M. C. **Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática**. Educação Matemática em Revista, São Paulo. v. 9, n. 12, p. 11-15, 2002.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. **Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving**. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Artmed Editora, Porto Alegre, 2001.

SOARES, L.J. **Sobre o Ensino de Matemática.** Pelotas: EDUCAT, 1998.

THOMPSON, A. G. **Learning to Teach Mathematical Problem Solving**: Changes in Teachers Conceptions and Beliefs. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989. p.232-243.

YOSHIDA, L. K. **Programação Linear**: métodos quantitativos. Editora Atual, São Paulo, 1987.

APÊNDICE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este apêndice apresenta uma sequência didática para que o estudo da Programação Linear possa ser realizado no Ensino Médio. A seguir, são apresentadas oito aulas como sugestão.

A.1 Aula 1: Motivação-Problema Inicial

A.1.1 Objetivo

Na primeira aula nosso objetivo era propor uma situação problema sobre pesquisa operacional-programação linear, sem fazer, inicialmente, qualquer menção a esse título.

Nessa atividade, pretendíamos motivar os alunos sobre a importância de tentar solucionar um problema, utilizando seus conhecimentos prévios, organizando suas ideias, levantando hipóteses, fazendo testes, discutindo possíveis soluções.

A.1.2 Atividade

Nossas atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática/sala multimídia do Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA), que possui 30 (trinta) computadores de mesa, uma tela de projeção, com Datashow, além de uma "lousa virtual".

Inicialmente, apresentamos o vídeo "Linha de produção mini-bolos[7]", que mostrava a linha de produção de uma padaria com seus maquinários.

Após o vídeo, comentamos sobre as necessidades básicas e fundamentais de qualquer cadeia produtiva ou sistema de administração, isto é, a utilização racional dos recursos disponíveis na busca da utilização otimizada dos mesmos (a relação custo-benefício), não somente para esse caso particular da padaria, mas que poderia ser estendida a qualquer processo ou gestão de produção.

Então, propomos o seguinte problema:

PROBLEMA 1: VENDA DE BOLOS

[7] Vídeo disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=U_t7A7oB2x8>. Acesso em: 09 de setembro de 2011, às 8h52min.

Uma padaria dispõe de 150 kg de farinha, 22 kg de açúcar e 27,5 kg de manteiga, produzindo bolos do tipo A e tipo B. Para a produção de uma dúzia de bolos do tipo A gasta 3 kg de farinha, 1 kg de açúcar e 1 kg de manteiga e para a produção de uma dúzia de bolos do tipo B gasta 6 kg de farinha, 0,5 kg de açúcar e 1 kg de manteiga. Supondo que o lucro resultante da produção de uma dúzia de bolos do tipo A é de 20 reais e o lucro resultante da produção de uma dúzia de bolos do tipo B é de 30 reais, quantas dúzias de bolos do tipo A e bolos do tipo B deve produzir a padaria para maximizar seu lucro?

Em seguida, os alunos foram organizados em dupla. Solicitamos aos mesmos que realizassem a leitura do problema, com bastante atenção, para compreendê-lo, verificassem os dados que eram fornecidos e identificassem quais eram os questionamentos, a fim de investigar uma possível solução, que tivesse sentido e fosse coerente.

Dessa forma, estávamos orientando os alunos a seguir, aproximadamente, a proposta de encaminhamento de resolução de problemas sugerida por Polya (1994):

1ª etapa: *compreensão do problema*

2ª etapa: *construção de uma estratégia de resolução*

3ª etapa: *execução da estratégia*

4ª etapa: *revisão da solução*.

A.2 Aula 2: A organização dos dados/Apresentação do modelo matemático

A.2.1 Objetivo

Nosso objetivo nessa segunda atividade era desenvolver nos alunos a capacidade de síntese e organização dos dados, pois dessa forma facilitaria a compreensão e a investigação da situação.

Além disso, gostaríamos de orientá-los, usando seus conhecimentos anteriores, na formulação de um modelo matemático que pudesse resolver nosso problema.

A.2.2 Atividade

A partir do problema proposto na aula inicial, problema 1 – venda de bolos, chamamos a atenção sobre a grande quantidade de informações e propusemos aos alunos, que novamente estavam sentados em duplas, que tentassem organizá-las.

Foi natural, quase unânime, praticamente todos os alunos fizeram a organização dos dados através de uma tabela.

Pudemos verificar que, a partir dessa organização em tabela, o problema ficou mais claro e compreensível para os discentes.

Depois da organização, novamente, pedimos para os alunos tentarem encaminhar uma solução para o problema.

Transcorridas mais algumas discussões, uma das duplas sentiu necessidade de introduzir no problema duas variáveis, uma para cada tipo de bolo.

Então, solicitamos que a dupla que havia mencionado sobre as variáveis compartilhasse com os outros alunos essa necessidade, pois essa ideia seria útil para solução do problema.

Usando, as variáveis apresentadas, conjuntamente, professor e alunos, construímos um modelo matemático que representava algebricamente as restrições e o objetivo do problema, e que consistia num sistema de equações e inequações lineares.

MODELO MATEMÁTICO:
x: quantidade de dúzias do bolo do tipo A
y: quantidade de dúzias do bolo do tipo B
Farinha: $3x + 6y \leq 150$
Açúcar: $x + 0{,}5y \leq 22$
Manteiga: $1x + 1y \leq 27{,}5$
Restrições implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade)
Lucro: $z = 20x + 30y$ (máximo) (Chamamos de função objetivo)

A.3 Aula 3: A Pesquisa Operacional – Programação Linear

A.3.1 Objetivo

Gostaríamos de apresentar um resumo histórico da linha do tempo da Pesquisa Operacional-Programação Linear, a fim de situarmos nossos alunos no tempo e no espaço em relação a esse assunto para, finalmente, definirmos o que são problemas de Programação Linear.

Apresentaremos, também, algumas aplicações da programação linear e suas diversas áreas de atuação.

A.3.2 Atividade

Utilizamos algumas projeções no Datashow sobre o histórico da Programação Linear, incluindo figuras e textos, desde as mais antigas origens da programação matemática. Em seguida, realizamos um breve comentário sobre Euclides de Mileto e sua obra:

HISTÓRICO

As raízes da Programação Matemática vêm desde a antiguidade, visto que Euclides (século III a.C.), por exemplo, no seu livro III, procurava encontrar a maior e a menor distância de um ponto a uma circunferência, e no livro IV descreveu uma forma de encontrar um paralelogramo de área máxima com um perímetro conhecido. Ele também propunha outros problemas, que foram elucidados nos séculos XVII e XVIII, quando se desenvolveram métodos de cálculo que permitiram resolver esses problemas de maximizar ou de minimizar áreas.

FIGURA 6.1: Euclides

FIGURA 6.2: Livro “Elementos”

Vejamos abaixo algumas ideias importantes sobre a origem e o desenvolvimento da Pesquisa Operacional:

- A Pesquisa Operacional tem sua origem na Grã-Bretanha, impulsionada pelo conflito com a Alemanha durante a Segunda Guerra Mundial. (*apresentação do vídeo "World War 2"*).
- O termo "Pesquisa Operacional" [Pesquisa em Operações (militares)] foi escolhido para denominar este novo ramo de ciência aplicada.
- Inicialmente foi utilizada para organização de manutenção e inspeção de voo.
- O efeito geral das medidas implementadas pela "Pesquisa Operacional" foi que, em 1945, a probabilidade de destruição por ataque a U-boats havia se elevado a 40% (ela começou em 2-3%), (*apresentação do vídeo "German U boat in action 1941*[8]*"*).
- As primeiras equipes em Pesquisa Operacional consistiam de indivíduos provenientes de várias disciplinas diferentes: por exemplo, um grupo consistia de um físico, dois físicos-matemáticos, dois fisiologistas e um topógrafo.

No fim da guerra a Pesquisa Operacional ficou bem estabelecida nas forças armadas da Grã-Bretanha e Estados Unidos. Entretanto, na GB os integrantes das equipes de Pesquisa Operacional voltaram ao seu trabalho original de tempo de paz, de modo que a Pesquisa Operacional não se disseminou tão bem, exceto em algumas indústrias isoladas (ferro/aço e carvão). Nos Estados Unidos, por outro lado, a Pesquisa Operacional se disseminou para as universidades onde o treinamento específico na nova disciplina se iniciou.

Esta abordagem de planejamento somente se consolidou com George Dantzig, em 1947, que desenvolveu o Método Simplex, capaz de resolver qualquer problema de Programação linear. Dantzig desenvolveu esta técnica quando trabalhava na Rand Corporation no projeto SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs) para a Força Aérea Americana, desenvolvendo técnicas de otimização para problemas militares.

O algoritmo Simplex implica uma quantidade muito grande de cálculos e, nos primeiros anos de uso, ele se apoiou exclusivamente na resolução manual. Com o surgimento do computador, em 1951, a Programação linear encontrou seu aliado natural e foi se expandindo de uma maneira extraordinária.

Das classes de problemas de Programação Matemática, veremos aqui, em particular, a designada por Programação Linear. O termo linear advém do fato de que tanto as restrições

---

[8] Vídeo disponível em: < http://www.youtube.com/watch?v=2vQ8uWHo4uw>. Acesso em: 09 de setembro de 2011, às 9h10min.

(condições) quanto o objetivo desse tipo de problema podem ser descritos através de relações lineares (equações e inequações lineares).

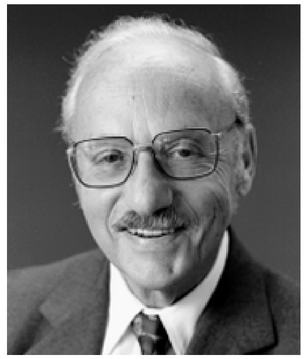


FIGURA 6.3: George Dantzig

Finalmente, definimos o que são problemas de programação linear, isto é,são problemas de optimização nos quais a função-objetivo e as restrições são todas lineares.

Apresentamos e comentamos algumas aplicações da Programação Linear:

- alimentação: que alimentos as pessoas (ou os animais) devem utilizar de modo que o custo seja mínimo e que possuam os nutrientes nas quantidades adequadas, e que também atendam a outros requisitos tais como variedade entre as refeições, aspecto, gosto, etc.?
- rotas de transporte: qual deve ser o roteiro de veículos de carga de modo que entreguem toda a carga no menor tempo e no menor custo total?
- manufatura: qual deve ser a composição de produtos a serem fabricados por uma empresa de modo que se atinja o lucro máximo, sendo respeitadas as limitações ou exigências do mercado consumidor e a capacidade de produção da fábrica?
- siderurgia: quais minérios devem ser carregados no alto-forno de modo a se produzir, ao menor custo, um determinado aço dentro de determinadas especificações de elementos químicos?
- petróleo: qual deve ser a mistura de petróleo a ser enviada para uma torre de craqueamento para produzir seus derivados (gasolina, óleo, etc.) a um custo mínimo? Os petróleos são de diversas procedências e possuem composições diferentes.
- agricultura: que alimentos devem ser plantados de modo que o lucro seja máximo e sejam respeitadas as características do solo, do mercado comprador e dos equipamentos disponíveis?

- carteira de investimento: quais ações devem compor uma carteira de investimentos de modo que o lucro seja máximo e sejam respeitadas as previsões de lucratividade e as restrições governamentais?
- mineração: em que sequência devem-se lavrar blocos de minérios abaixo do solo, dado sua composição, posicionamento e custo de extração?
- localização industrial: onde devem ser localizadas as fábricas e os depósitos de um novo empreendimento industrial de modo que os custos de entrega do produto aos varejistas sejam minimizados ?

A.4 Aula 4: Modelo Matemático com Duas Variáveis

A.4.1 Objetivo

Nossa intenção nessa aula era discutir um modelo matemático que pudesse contemplar todas as informações e condições que um problema de programação linear apresentava.

Além disso, apresentamos mais um problema (Problema da Dieta) para revermos alguns passos anteriormente discutidos: a organização, identificação de variáveis, função objetivo, bem como as equações e inequações.

Destacamos que nos problemas que apresentam 2 (duas) variáveis podemos encaminhar sua possível solução pelo processo chamada de "método geométrico", em que daremos atenção na solução das inequações lineares com 2 (duas) variáveis.

Revisaremos o processo de solução de um sistema de inequações lineares.

A.4.2 Atividade

Retomamos a discussão do modelo matemático investigado no final da aula 2, chamando atenção das duas variáveis que eram exatamente a pergunta do problema da "venda de bolos", ou seja, quantas dúzias de bolos do tipo A e bolos do tipo B deve produzir a padaria para maximizar seu lucro?

Lançamos mão, então, do modelo matemático já construído:

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade de dúzias do bolo do tipo A

y: quantidade de dúzias do bolo do tipo B

Farinha: $3x + 6y \leq 150$

Açúcar: $x + 0{,}5y \leq 22$

Manteiga: $1x + 1y \leq 27{,}5$

Restrições implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade).

Lucro: $z = 20x + 30y$ (máximo) (Chamamos de função objetivo)

Destacamos que estávamos diante de um problema com 2 (duas) variáveis e que, nesses casos, podemos encaminhar sua possível solução pelo processo chamada de "método geométrico", dando atenção, especial, para a solução das inequações lineares com 02 (duas) variáveis. Apresentamos o vídeo "Como escolher carne e ovos[9]".

Em seguida, distribuímos e projetamos no datashow o seguinte problema:

PROBLEMA 2: DIETA

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada porção de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada porção de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Sabe-se que cada porção de carne custa 2,5 unidades monetárias e cada porção de ovo custa 3 unidades monetárias.

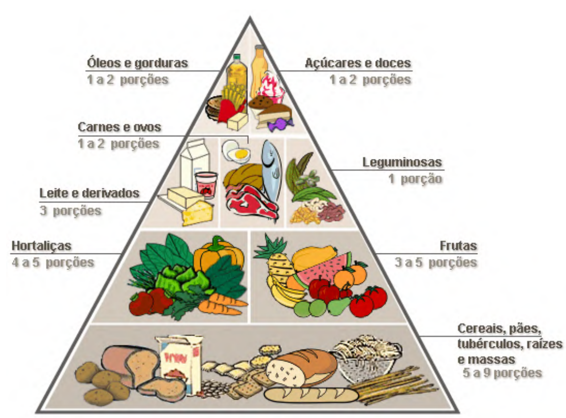


FIGURA 6.4: Pirâmide de alimentos

[9] Vídeo disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=4vyaD1YtOA>. Acesso em: 09 de setembro de 2011, às 9h10min.

Solicitamos aos alunos que realizassem uma leitura atenciosa do problema. Após, incentivamos uma discussão a fim de que os alunos encaminhassem um modelo matemático para o problema.

Alguns alunos realizaram, com facilidade, a organização dos dados do problema numa tabela, bem como identificaram suas variáveis. Solicitamos que esses alunos auxiliassem os outros que ainda não haviam encaminhado satisfatoriamente o modelo matemático.

Dessa forma, pudemos, mais uma vez, destacar a presença de 2 (duas) variáveis (quantidade diária de carnes e quantidade diária de ovos).

Chegamos ao modelo:

x: quantidade diária de carne

y: quantidade diária de ovo

Vitaminas: $4x + 8y \geq 32$

Proteínas: $6x + 6y \geq 36$

$x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade).

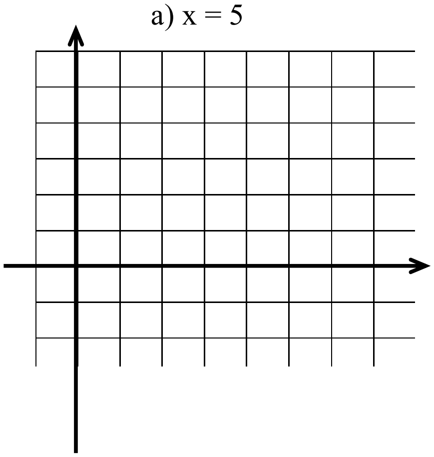
Quantidade: $z = 2{,}5x + 3y$ (minimizar o custo) (Chamamos de função objetivo)

Com os modelos disponíveis, revisamos o processo geométrico de solução de um sistema de inequações lineares. Para retomada desse conteúdo, usamos o material abaixo:

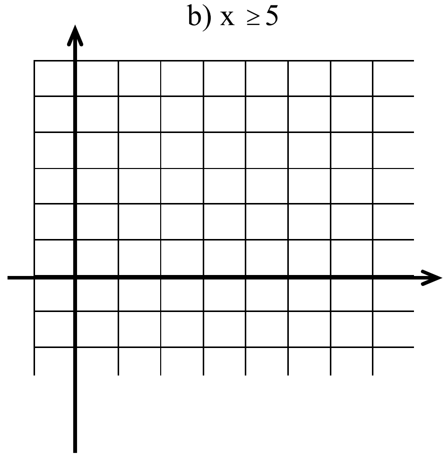
INEQUAÇÃO DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

1. Esboce os pontos que satisfazem cada condição abaixo:

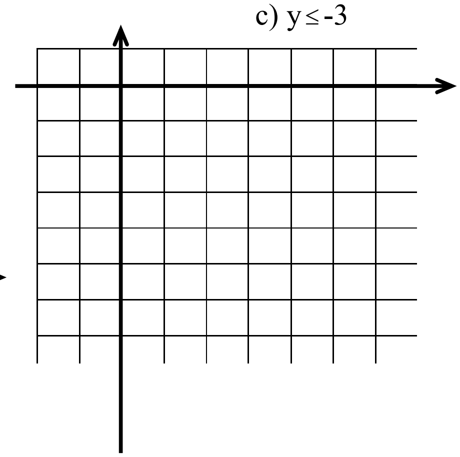
a) $x = 5$



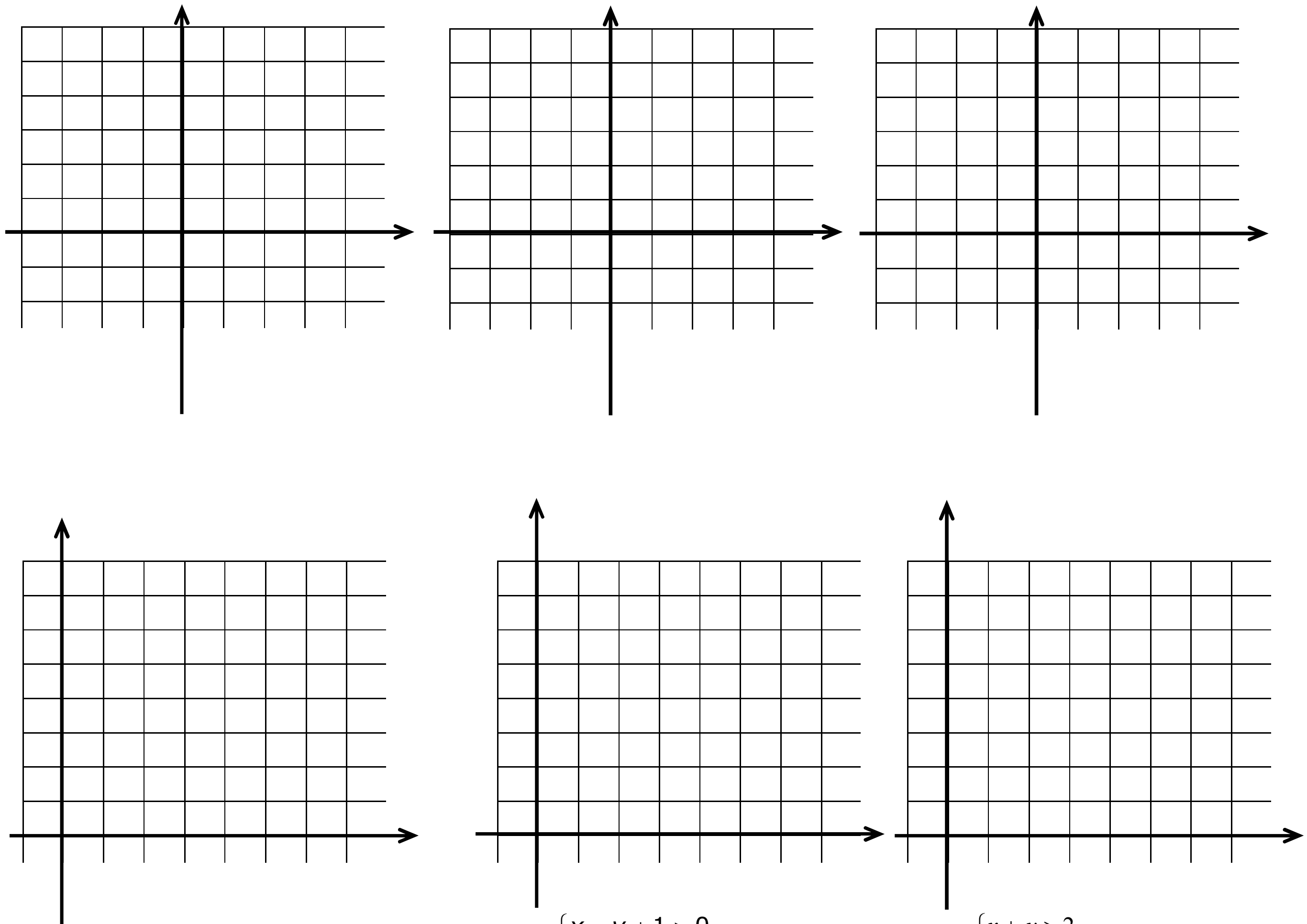
b) $x \geq 5$



c) $y \leq -3$



d) $3x + y = 6$ e) $3x + y \geq 6$ f) $3x + y \leq 6$



g) $-2x + y < -5$ h) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ y - 2 \geq 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y > 2 \\ 2x - y > -4 \end{cases}$

FIGURA 6.5: Gráficos para revisão de inequação

A.5 Aula 5: Software Graphmatica

A.5.1 Objetivo

Nosso objetivo era apresentar e explorar um software que realizasse construção de gráficos, a fim de auxiliar na solução geométrica dos sistemas de inequações do 1º Grau, com duas variáveis, que fariam parte do modelo matemático de um problema de Programação Linear.

A.5.2 Atividade

Nossa intenção inicial era utilizar o software Winplot, todavia sua utilização não foi possível, uma vez que esse programa era incompatível com o sistema operacional que o laboratório de informática do CMPA possui.

Assim, decidimos utilizar o software livre Graphmatica, que acreditamos ser de fácil manuseio, apresentar facilitada utilização de suas ferramentas básicas e apresentar versão em língua portuguesa.

Foi realizada, previamente, a instalação do programa Graphmatica em todos os computadores do laboratório de informática do CMPA.

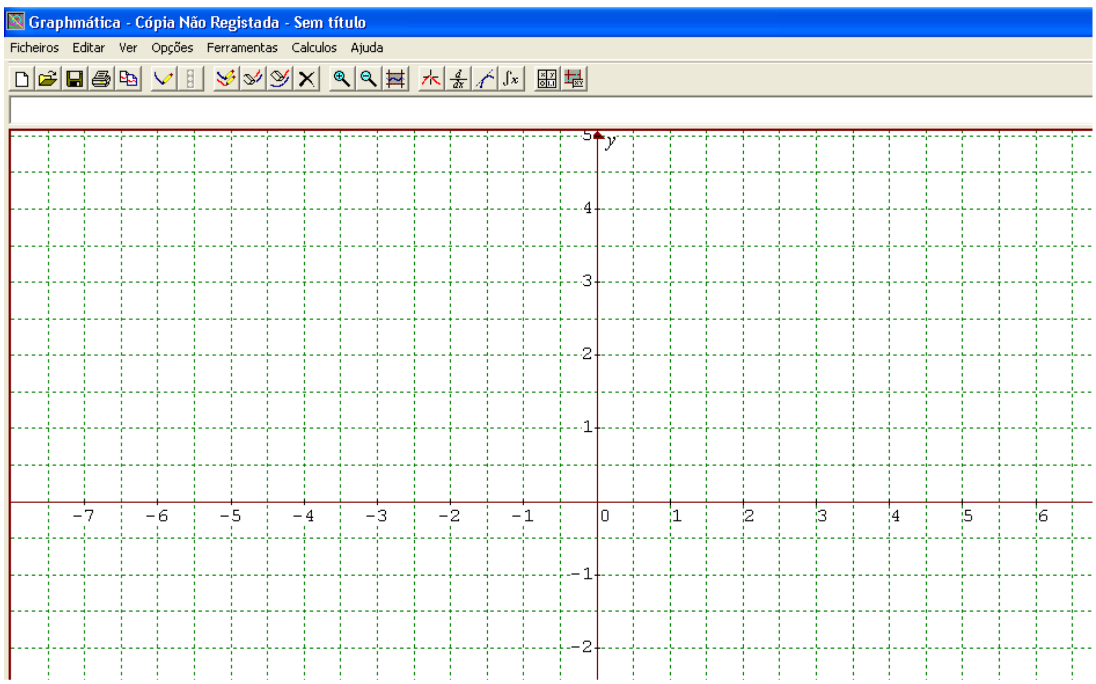


FIGURA 6.6: Software Graphmatica

Então, solicitamos aos alunos que, individualmente, explorassem as principias ferramentas desse software, que são muito semelhantes à grande maioria de qualquer outro programa de computador, como o editor de texto “Word”, por exemplo. Pedimos que tivessem atenção especial ao traçado de gráficos de funções do 1º grau.

Após esse momento de familiarização, apresentamos o roteiro abaixo, bem específico, e que atendia a nosso objetivo de solucionar geometricamente as desigualdades lineares.

ROTEIRO DE TRABALHO PARA O SOFTWARE GRAPHMATICA

1. inserir a equação (ajustar o “zoom”);
2. copiar a própria equação (ctrl c);
3. ir em: ***Editar – Anotações*** – colar (ctrl v) – ***Colocar*** – sobre a reta desenhada;
4. inserir as inequações: usar as próprias equações e acrescentar (> ou <);
5. identificar a região comum a todas as inequações;
5. determinar as interseções, ir em: ***Ferramentas – Intersecções*** – selecione as equações e ***Calcular***;
6. anotar todos os pontos de intersecção da região comum e substitua na função (mínimo ou máximo). Podemos usar uma calculadora;
7. verificar o resultado (mínimo ou máximo).

Assim, resolvemos os sistemas de inequações dos modelos matemáticos dos dois exercícios:

A tabela a seguir é referente ao Problema1: Venda de Bolos (página 66).

Tipo	Farinha (kg)	Açúcar (kg)	Manteiga (kg)	Lucro (R$)
A	3	1	1	20
B	6	0,5	1	30
Disponível	150	22	27,5	

TABELA 5. Problema 1 – Venda de Bolos

O modelo matemático correspondente é:

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade de dúzias do bolo do tipo A

y: quantidade de dúzias do bolo do tipo B

Farinha: $3x + 6y \leq 150$

Açúcar: $x + 0{,}5y \leq 22$

Manteiga: $1x + 1y \leq 27{,}5$

Restrições implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade).

Lucro: $z = 20x + 30y$ (máximo) (Chamamos de função objetivo)

A solução gráfica obtida com o software Graphmática é apresentada na Figura 6.7.

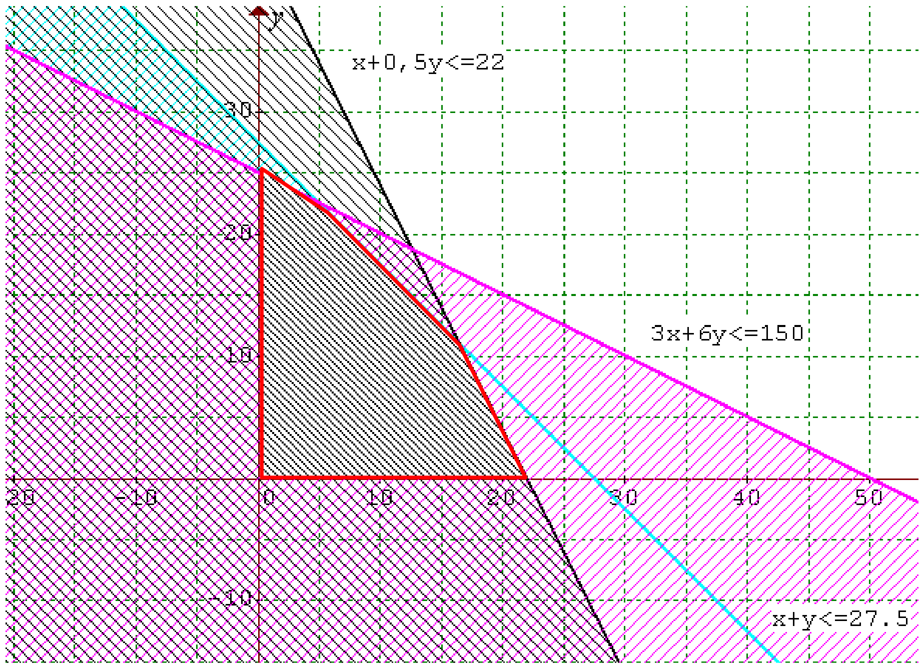


FIGURA 6.7: Solução gráfica do problema 1

PROBLEMA 2: DIETA

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Sabe-se que cada unidade de carne custa 2,5 unidades monetárias e cada unidade de ovo custa 3 unidades monetárias.

A tabela correspondente é:

Alimento	Vitaminas	Proteínas	Custo
Carne	4	6	2,5
Ovo	8	6	3
Necessidade (mínima)	32	36	

TABELA 6. Problema 2 - Dieta

O modelo matemático correspondente é:

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade diária de carne

y: quantidade diária de ovo

Vitaminas: $4x + 8y \geq 32$

Proteínas: $6x + 6y \geq 36$

$x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade)

Quantidade: $z = 2{,}5x + 3y$ (minimizar o custo) (Chamamos de função objetivo)

A solução gráfica obtida com o software Graphmática é apresentada na Figura 6.8.

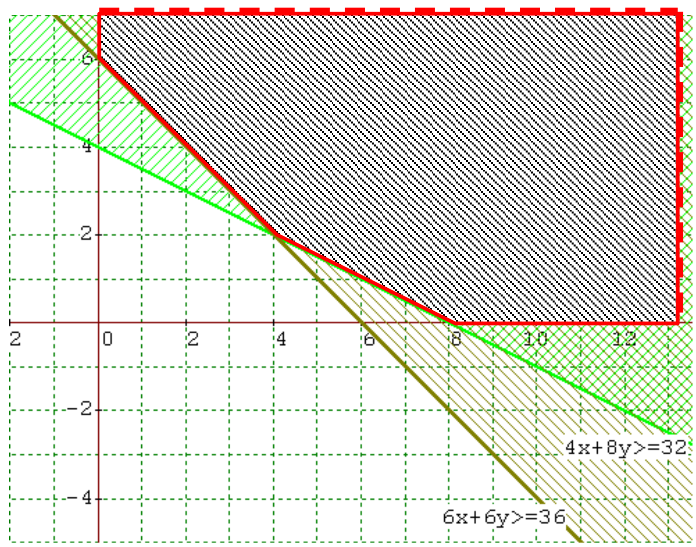


FIGURA 6.8: Solução Gráfica do problema 2

A.6 Aula 6: Conceitos de Programação Linear/Solução Gráfica

A.6.1 Objetivo

Apresentamos, sem demonstração, o seguinte teorema de Programação Linear:

Teorema Fundamental da Programação Linear

Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ definida numa região poliedral convexa A do R^n. Suponha que f assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se A possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.

Segundo Yoshida (1987):

> Problemas de PL envolvendo duas variáveis podem ser resolvidos graficamente de maneira bastante simples; sendo os problemas de três variáveis de difícil solução gráfica e os que apresentam mais de três variáveis, impossíveis de serem resolvidos graficamente.

Com o auxílio da representação geométrica da solução do sistema de inequações lineares, utilizando o software Graphmática, investigamos as possíveis soluções para os problemas de Programação Linear.

6.6.2 Atividade

Usando as representações gráficas dos dois problemas, utilizamos o Teorema 1 (página 22). Ou seja, calculamos os vértices da região poligonal de cada um dos problemas. Para cálculo desses vértices realizamos as soluções dos sistemas, tomadas de duas em duas equações.

PROBLEMA 1: VENDA DE BOLOS

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade de dúzias do bolo do tipo A

y: quantidade de dúzias do bolo do tipo B

Farinha: $3x + 6y \leq 150$

Açúcar: $x + 0{,}5y \leq 22$

Manteiga: $1x + 1y \leq 27{,}5$

Restrições implícitas: $x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade)

Lucro: $z = 20x + 30y$ (máximo) (Chamamos de função-objetivo)

A representação gráfica para a solução do problema 1 é dada na figura 6.9.

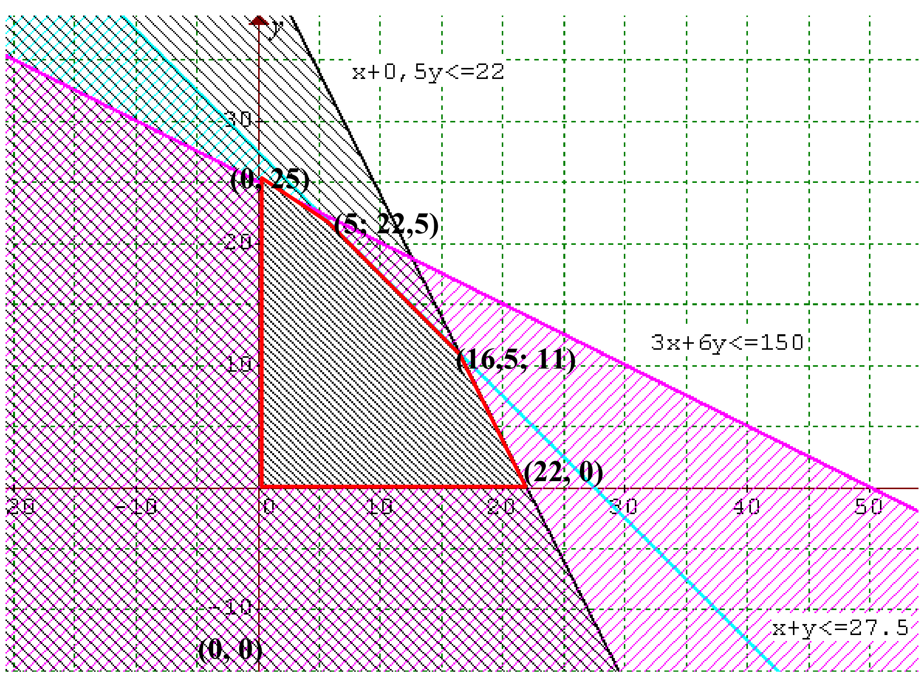


FIGURA 6.9: Solução do Problema 1

PROBLEMA 2: DIETA

MODELO MATEMÁTICO

x: quantidade diária de carne

y: quantidade diária de ovos

Vitaminas: $4x + 8y \geq 32$

Proteínas: $6x + 6y \geq 36$

$x \geq 0$; $y \geq 0$ (restrições que foram destacadas, pela sua futura utilidade).

Quantidade: $z = 2{,}5x + 3y$ (minimizar o custo) (Chamamos de função-objetivo)

Destacamos a região solução do sistema de inequações lineares, evidenciando os vértices dessa região poligonal do plano.

Questionamos os alunos qual seria o significado dessa região convexa do plano?

Após várias discussões, alguns alunos sugeriram, intuitivamente, que nessa região estaria a solução do problema, uma vez que elas contemplavam a solução do sistema linear de inequações.

Chamaremos esta região de “região factível”.

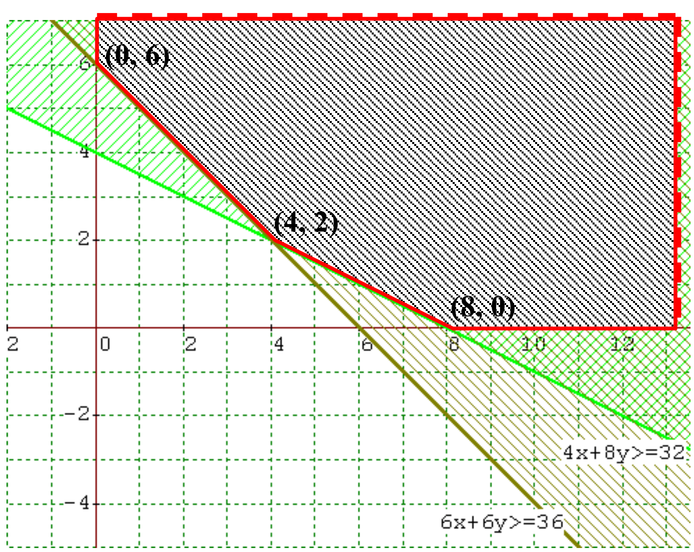


FIGURA 6.10: Solução do Problema 2

Perguntamos, então, qual(is) seria(m) o(s) ponto(s) dessa região em que teríamos a melhor solução? E, o que a função objetivo teria a ver com essa região?

Os alunos não chegaram a concluir satisfatoriamente os questionamentos acima.

Fez-se necessária a nossa intervenção mais diretamente.

Para tentar responder, pelo menos em parte, nossos próprios questionamentos, lançamos mão mais uma vez da representação gráfica do modelo, e para a função objetivo z = 20x + 30y, que representaria o lucro, ainda desconhecido, realizamos algumas substituições para z. Assim, tínhamos:

0 = 20x + 30y

100 = 20x + 30y

200 = 20x + 30y

300 = 20x + 30y

400 = 20x + 30y

500 = 20x + 30y

6000 = 20x + 30y

7000 = 20x + 30y

800 = 20x + 30y

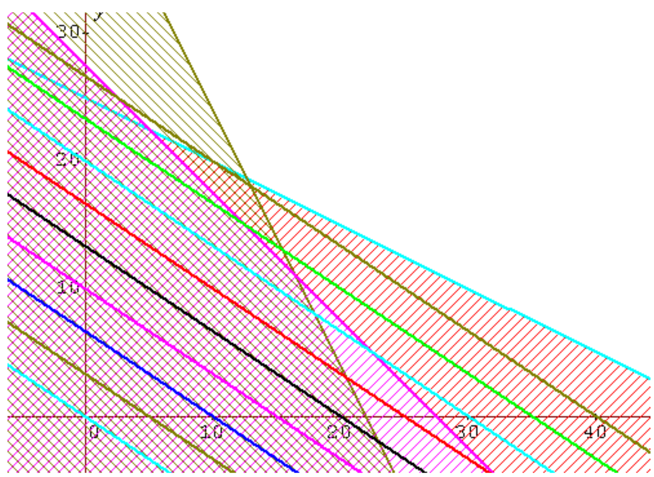


FIGURA 6.11: Curvas de nível

Esse conjunto de equações está representado no plano pelo conjunto de retas paralelas, que passam pela região (região factível) solução do sistema de inequações lineares. Dessa forma, acreditamos que, ainda que intuitivamente, os alunos perceberam a relação entre a função objetivo e a região factível. E, mais ainda lançamos a semente para a compreensão do Teorema Fundamental da Programação Linear.

Anunciamos, sem demonstração e sem maiores formalidades, o Teorema fundamental da Programação Linear, isto é, informamos que a solução de cada um dos nossos problemas de Programação Linear estaria em um dos vértices da região poligonal solução do sistema. Então, para encontrar a melhor solução, bastaria substituir esses pontos na função objetivo.

Acreditamos que, com o auxílio da Figura 6.11, foi possível oferecer aos alunos uma explicação razoável do Teorema Fundamental da Programação Linear, pois esse conjunto de retas paralelas interceptará os infinitos pontos da região poligonal, onde se encontram as possíveis soluções do problema, incluindo seus vértices.

Além disso, num desses pontos de interseção, entre a reta obtida da função objetivo e os vértices dessa região, estará a melhor solução, uma vez que, a partir de um desses pontos de interseção, uma dessas retas já estará "saindo" dessa região poligonal, e, portanto, nesse caso, tendo seu ponto máximo.

Solicitamos, então, que os alunos identificassem os pontos dos vértices da região, realizando o seguinte comando: ***Ferramentas* – *Intersecções*** – selecione as equações e ***Calcular***;

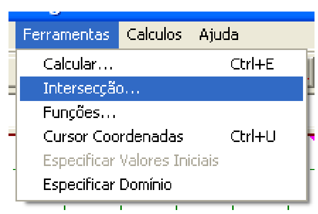


FIGURA 6.12: Software Graphmática

No caso do Problema da venda de bolos, encontramos os seguintes pontos: (0,0), (0, 25), (5; 22,5), (16,5;11) e (22, 0).

Substituindo na função objetivo z = 20x + 30y, cujo objetivo é maximizar o lucro, encontramos:

	Quantidade de dúzias do bolo do tipo A	Quantidade de dúzias do bolo do tipo B	Lucro (máximo)
Par ordenado	X	Y	z = 20x + 30y
(0, 0)	0	0	0
(0, 25)	0	25	750
(5; 22,5)	5	22,5	775
(16,5; 11)	16,5	11	660
(22, 0)	22	0	440

TABELA 7. Pontos extremos e Função-Objetivo

Discutimos o significado de cada um desses pontos, pares ordenados, bem como o respectivo resultado que cada um deles gerava.

Concluímos, finalmente, que a melhor solução seria produzir 05 (cinco) dúzias de bolos do tipo A e 22,5 (vinte e dois vírgula cinco) dúzias de bolos do tipo B, uma vez o resultado seria um lucro de R$ 775,00, maior possível, sob essas condições.

Neste caso, a intuição inicial dos alunos, os quais acreditavam que a melhor solução para o problema seria produzir somente bolos do tipo B, não foi confirmada matematicamente.

Assim, chamamos a atenção dos discentes de que nem sempre uma intuição ou hipótese inicial de solução de um problema de programação linear é confirmada, após a solução formal do mesmo.

No caso do Problema da dieta, encontramos os seguintes pontos: (0,6), (4, 2), e (8, 0).

Substituindo na função objetivo z = 2,5x + 3y, cujo objetivo é minimizar o custo, encontramos:

	Quantidade diária de carne	Quantidade diária de ovo	Custo (mínimo)
Par ordenado	X	y	z = 2,5x + 3y
(0, 6)	0	6	18
(4, 2)	4	2	16
(8, 0)	8	0	20

TABELA 8. Pontos extremos e Função-Objetivo

Discutimos, novamente, o significado de cada um desses pontos, pares ordenados, bem como o respectivo resultado que cada um deles gerava.

Concluímos que a melhor solução seria consumir 04 (quatro) unidades diárias de carne e 02 (duas) unidades diárias de ovo, uma vez o resultado seria um custo mínimo de $ 16,00 (unidades monetárias), menor possível, sob essas condições.

A.7 Aula 7: Exercícios de Programação Linear

A.7.1 Objetivo

Nesta atividade gostaríamos de apresentar alguns problemas, já distribuídos aos alunos na aula anterior, para verificar a capacidade dos discentes em resolver um problema de programação linear com duas variáveis.

Gostaríamos, também, de incentivar a troca de ideias, a discussão e a cooperação, a fim de modelar um problema de programação linear.

A.7.2 Atividade

Distribuímos, desde a aula anterior, a seguinte lista de exercícios:

LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

1. Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: foi descoberto que o programa “A” com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa “B”, com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de 1 (uma) semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo 5 minutos para sua propaganda e que não há verba para mais de 80 minutos de música. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar a fim de obter o maior número de telespectadores?

2. Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranja a 20 u.m. de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos a 10 u.m. de lucro por caixa, e no máximo 200 caixas de tangerinas a 30 u.m. de lucro por caixa. De que forma ele deverá carregar o caminhão para obter o lucro máximo?

3. Uma confecção dispõe de 80 m^2 de brim e 20 m^2 de popeline. Cada unidade de um modelo A de vestido requer 1 m^2 de brim e 3 m^2 de popeline, e cada unidade de um outro modelo B requer 2 m^2 de brim e 2 m^2 de popeline. Se cada unidade de qualquer um dos modelos é vendida por R$ 80,00, quantas unidades de cada modelo devem ser confeccionadas para se obter a receita máxima, com a venda de toda a produção?

4. “Oficina Mecânica”

Uma oficina mecânica tem 01 furadeira vertical e 05 fresadoras, que são usadas para a produção de conjuntos de móveis formados de 2 partes. Sabe-se qual é a produtividade de cada máquina na fabricação destas partes do conjunto:

	FURADEIRA	FRESADORA
PARTE 1	03	20
PARTE 2	05	15

TABELA 9. Oficina mecânica

Obs: tempo para produzir as partes dado em minutos.

O encarregado pela oficina deseja manter uma carga balanceada nas máquinas de modo que nenhuma delas seja usada mais do que 30 minutos por dia do que qualquer outra, sendo o carregamento de fresamento dividido igualmente entre as 05 fresadoras.

5. “Uma Indústria Química”

Dois produtos, *a* e *b*, são feitos a partir de duas operações químicas. Cada unidade do produto *a* requer 2 horas da operação 1 e 3 horas da operação 2. Cada unidade do produto *b* requer 3 horas da operação 1 e 4 horas da operação 2. O tempo total disponível para a realização da operação 1 é de 16 horas, e o tempo total para a operação 2 é de 24 horas.

A produção do produto *b* resulta, também, num subproduto *c* sem custos adicionais. Sabe-se que parte do produto *c* pode ser vendida com lucro, mas o restante deve ser destruído. Previsões mostram que no máximo 5 unidades do produto *c* serão vendidas, e sabe-se que cada unidade do produto *b* fabricada gera 2 unidades do produto *c*.

Sabe-se que:

produto *a* gera um lucro de \$ 4 por unidade.

produto *b* gera um lucro de \$ 10 por unidade.

produto *c* gera um lucro de \$ 3 por unidade se for vendido.

produto *c* gera um custo de \$ 2 por unidade se for destruído.

Solicitamos que os alunos realizassem, em dupla, uma leitura atenta de cada problema, destacando as informações e dados importantes, bem como as variáveis e as solicitações dos exercícios.

Por outro lado, fizemos a projeção desses mesmos exercícios, com o auxílio do Datashow, para que sempre que fosse necessário discutíssemos conjuntamente sobre cada um dos problemas.

Durante as leituras em grupo, percebemos que algumas duplas haviam compreendido bem a ideia, a organização e maneira de como apresentar um modelo para solucionar os problemas de programação linear.

Após algum tempo de discussão do problema proposto, pedíamos aos próprios alunos que sugerissem seus modelos de construção para serem solucionados.

A.8 Aula 8: Programação Linear – Problemas com mais de duas variáveis

A.8.1 Objetivo

Gostaríamos de verificar se os alunos seriam capazes de apresentar o modelo matemático de encaminhamento da solução de um problema de programação linear com mais de duas variáveis.

Além disso, queríamos dar ciência da existência de outros métodos de solução, como o método Simplex, por exemplo.

A.8.2 Atividade

Distribuímos aos alunos os exercícios:

1. Determinação do *Mix* de Produção

Uma companhia deseja programar a produção de um utensílio de cozinha que requer o uso de dois tipos de recursos – mão-de-obra e material. A companhia está considerando a fabricação de três modelos e o seu departamento de engenharia forneceu os dados abaixo: o suprimento de material é de 200 quilos por dia. a disponibilidade diária de mão-de–obra é 150 horas. Formule um modelo de programação linear para determinar a produção diária de cada um dos modelos de utensílios de modo a maximizar o lucro total da companhia.

Modelo	A	B	C
Mão de obra (horas por unidade)	7	7	6
Material (kilos por unidade)	4	4	5
Lucro ($ por unidade)	4	2	3

TABELA 10. Mix de Produção

2. “SELEÇÃO DE MÍDIA PARA PROPAGANDA”

Uma companhia de propaganda deseja planejar uma campanha em 3 diferentes meios: tv, rádio e revistas. Pretende-se alcançar o maior número de clientes possível. Um estudo de mercado resultou em:

	TV HORÁRIO NORMAL	TV HORÁRIO NOBRE	RÁDIO	REVISTAS

CUSTO	40.000	75.000	30.000	15.000
CLIENTES TINGIDOS	400.000	900.000	500.000	200.000
MULHERES ATINGIDAS	300.000	400.000	200.000	100.000

TABELA 11. Seleção de mídias para propaganda

0bs: Valores válidos para cada veiculação da propaganda.

A companhia não quer gastar mais de R$ 800.000.

Adicionalmente deseja:

(1) que no mínimo 2 milhões de mulheres sejam atingidas;

(2) gastar no máximo $ 500.000 com tv;

(3) que no mínimo 3 veiculações ocorram no horário normal da tv;

(4) que no mínimo 2 veiculações ocorram no horário nobre da tv;

(5) que o número de veiculações no rádio e revistas deve ficar entre 5 e 10, para cada meio de divulgação.

Formular um modelo de P.L. que trate este problema, determinando o número de veiculações a serem feitas em cada meio de comunicação, de modo a atingir o máximo possível de clientes.

ANEXO TRABALHO DOS ALUNOS

SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS:

PROBLEMA Nº 1 :

$$\begin{cases} 20x + 10y \leq 80 \\ x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Musica	Prop.	telespec
A	20	1	30 000
B	10	1	10 000

(objetivo): Z = 30000 + 10000y (máximo)

Solução:

(0,8) Z = 80000 //

(0,5) Z' = 50 000 //

(3,2) Z' = 90000 + 20000 = 110000 // ←

PROBLEMA Nº 3 : B 80m² e 20m² P

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

quantia

Modelo	Brim	Popeline
A	1m²	3m²
B	2m²	2m²

(objetivo): Z = 80(x + y)

Solução:

(6,67, 0) Z = 533,6 //

(0, 10) Z = 800 // ←

FIGURA 1: Soluções dos problemas 1 e 3 da dupla 1.

SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS:

PROBLEMA Nº 3:

$$\begin{cases} 1x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

(objetivo): $Z = 80x + 80y$

Solução: $(\emptyset, \emptyset)$ $(0, 10)$ $(6{,}67, \emptyset)$

$80 \cdot 0 + 80 \cdot 10 = 800$ produzir somente o modelo B

PROBLEMA Nº 2:

$$\begin{cases} x + y \leq 600 \\ x \geq 100 \\ x \leq 200 \end{cases}$$

(objetivo): $Z = 10x + 30y + 4000$

Solução: 200 caixas de Tangerina + 400 caixas de pêssego

$Z = 4000 + 6000 + 4000 = 14000$

FIGURA 2: Soluções dos problemas 2 e 3 da dupla 2.

SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS:

PROBLEMA Nº ___:

$$\begin{cases} 20x + 10y \leq 80 \\ 1x + 1y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$Z = 30000x + 10000y$ (maximo)

(objetivo): Z =

$(0,8)$ $Z = 30000.0 + 10000.8 =$

$(3,2)$ $Z =$ " $.3$ " $.2 =$

$(5,0)$ $Z =$ " $.5 +$ " $.0 =$

Solução:

PROBLEMA Nº ___:

	Brim	Popeline
A	1	3
B	2	1
	80	80

Brim $\leq 80\,m^2$

Popeline $\leq 20\,m^2$

$(0,10)$

$(0,0)$

$(6,7;0)$

(objetivo): Z = $80x + 80y$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$Z = 80.0 + 80.10 = \boxed{800}$

$Z = 80.0 + 80.0 = 0$

$Z = 80.6,7 + 80.0 = 67$

Solução:

FIGURA 3: Soluções dos problemas 1 e 3 da dupla 3.

SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS:

PROBLEMA Nº 3 :

	brim	popeline	custo
–	$1m^2$	$3m^2$	80,00
B	$2m^2$	$2m^2$	80,00
T	$80m^2$	$20m^2$	

brim $x + 2y \leq 80$

popeline $3x + 2y \leq 20$

$z = 80x + 80y$

(0, 10) (6,6, 0)

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

$z = 80.0 + 80.10 = 800$

$z = 80.6,6 + 80.0 = 528$

(objetivo): Z = $80x + 80y$

Solução:

$Z = 80.0 + 80.10 = 800$

Produzir 10 produtos B e nenhum produto A é a melhor opção.

PROBLEMA Nº 2 : x = pêssegos y = tangerina

$x \geq 100$ (100; 0)

$y \leq 200$ (100, 200)

$x + y + 200 \leq 800$ (400, 200)

$x + y \leq 600$ (600, 0)

Lucro: $10x + 30y + 200 . 20$

$10x + 30y + 4000$

(objetivo): Z = $10.400 + 200.30 + 200.20$

$z = 4000 + 6000 + 4000$

$z = 14.000$

Solução:

400 caixas de pêssego e 200 de tangerina são a melhor opção

FIGURA 4: Soluções dos problemas 2 e 3 da dupla 4.

SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS:

PROBLEMA 1:

(objetivo): Z =

Solução:

PROBLEMA 2: Dieta

X = quantidade diária de carne
Y: quantidade diária de ovo

$$\begin{cases} 4x + 8Y \geq 32 \\ 6X + 6Y \geq 36 \\ X \geq 0 \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

custo	X	Y
	2,5	3

(objetivo): Z = 2,5x + 3Y (minimizar o custo)

Z = 2,5×4 + 3×2

Z = 16

Solução:

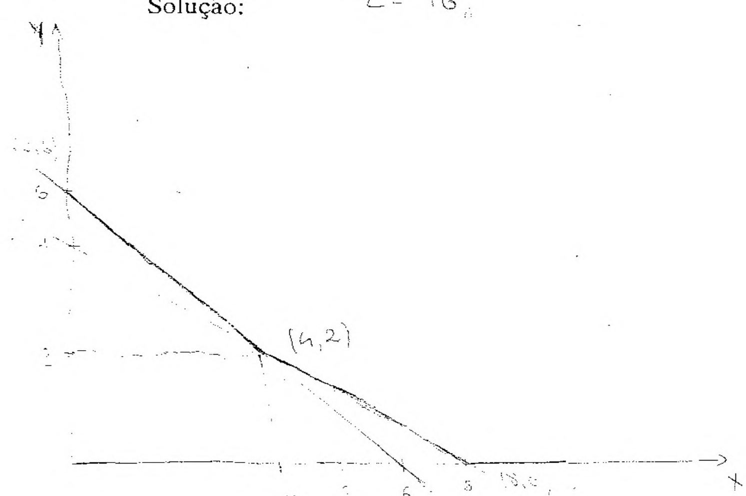


FIGURA 4: Solução do problema 2 da dupla 5.