

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM ANALÍTICA DA DINÂMICA DE UMA TRANSMISSÃO DO TIPO CVT

por

Lucas Vieira Adamatti

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, junho de 2012



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

MODELAGEM ANALÍTICA DA DINÂMICA DE UMA TRANSMISSÃO DO TIPO CVT

por

Lucas Vieira Adamatti

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Arnaldo Ruben Gonzalez
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Jackson Nanfredini Vassoler

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre, 11 de junho de 2012.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, pela compreensão e apoio prestados durante a execução deste trabalho, em especial aos meus pais, por terem me dado condições de chegar até aqui. Agradeço também a todos os amigos contribuíram de alguma forma, em especial ao colega João Bresolin, pelo auxílio prestado na execução do trabalho experimental. E por fim, agradeço ao meu orientador, Jun Fonseca, pelo auxílio prestado, e também pela paciência demonstrada nos momentos em que o trabalho não se desenvolvia da maneira que desejávamos.

ADAMATTI, L. A. Modelagem Analítica da Dinâmica de uma Transmissão do Tipo CVT. 2012. 25 laudas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RESUMO

Neste trabalho, a dinâmica de operação de uma transmissão do tipo CVT de correia e polias, utilizada no protótipo da Equipe Tchê de Baja SAE - UFRGS, é analisada através da elaboração de um modelo analítico. Através deste modelo, é possível relacionar a variação de relação de transmissão ocasionada por diferentes carregamentos impostos sobre a transmissão (torque e rotação do motor). Para validação do modelo, foram realizadas medições experimentais de torque e rotação do motor, bem como suas correspondentes relações de transmissão, utilizadas para efeitos de comparação com os resultados previstos pelo modelo.

PALAVRAS-CHAVE: CVT, modelagem analítica.

ADAMATTI, L. A. Analytical modelling of the Dynamics of a CVT. 2012. 25 laudas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ABSTRACT

In this work, the dynamics of operation of a CVT with belt and pulleys, used in the prototype of the Tchê Team of Baja SAE – UFRGS, is analyzed through the development of an analytic model. By using this model, it is possible to correlate the transmission ratio variation caused by different loads imposed over the CVT (torque and angular speed). For validating the model, experimental measurements of torque and speed of the motor are realized, as well as its related transmission ratios, and then, these results are compared with those provided by the model.

KEYWORDS: CVT, analytical modelling.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	1
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
3.1 O modelo de Firbank para correias planas	1
3.2 A CVT de correia e polias	2
3.3 Modelagem para o caso da CVT	2
4. MODELO ANALÍTICO	3
4.1 Análise cinemática	3
4.2 Balanço de forças	5
5. VALIDAÇÃO DO MODELO	11
5.1 Medições de constantes	11
5.1.1 Medições dimensionais	11
5.1.2 Medições de massa e de centro de massa	11
5.1.3 Medições das constantes e das pré-cargas das molas	12
5.2 Ensaio experimental do equipamento	12
5.3 Resolução do sistema de equações	12
6. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	12
7. CONCLUSÕES	14
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	14
Apêndice I	15
Apêndice II	16
Apêndice III	17

LISTA DE VARIÁVEIS

- α – Ângulo da correia
- ε_{mct} - Constante elástica torcional da mola da polia condutora
- ε_{mcz} - Constante elástica torcional da mola da polia conduzida
- θ - Ângulo de abertura do braço articulado
- ϑ - Ângulo da normal da superfície da tampa
- μ - Coeficiente de atrito entre a correia e a polia
- ξ - Ângulo de abertura entre os pratos da polia conduzida
- τ_b – Torque de resistência na base de fixação do braço articulado
- τ_m – Torque aplicado pela mola no braço articulado
- τ_{mct} – Torque aplicado pela mola da polia condutora
- τ_{mcz} – Torque aplicado pela mola da polia conduzida
- τ_{mcto} – Pré-carga torcional da mola da polia condutora
- τ_{mczo} – Pré-carga torcional da mola da polia conduzida
- τ_r – Torque de resistência a rolamento
- ϕ_{ct} - Ângulo de abraçamento na polia condutora
- \mathcal{M}_k - Momentos dinâmicos
- ω – Velocidade angular da polia condutora
- C – Distância entre os centros das polias
- d_b – Distância entre o centro de massa do braço e a origem do sistema de coordenadas
- d_r – Distância entre o centro de massa do rolete e a origem do sistema de coordenadas
- F_1 – Força de tração no lado tensionado da correia
- F_2 – Força de tração no lado frouxo da correia
- f_a – Força de atrito estático entre a correia e a polia
- F_b – Força centrífuga no braço articulado
- F_c – Força resultante de tração aplicada pela correia na polia conduzida
- F_i – Força inicial de tração na correia
- F_{mcz} – Força aplicada pela mola na polia conduzida
- F_{mczo} – Pré-carga da mola da polia conduzida
- F_r – Força centrífuga no rolete
- F_t – Força tangencial na correia
- k_{mcz} – Constante elástica da mola da polia conduzida
- l_b – Distância entre o centro e massa do braço articulado e sua base de fixação
- l_r – Distância entre o centro e massa do rolete e a base de fixação do braço articulado

m' – Densidade linear da correia
 N – Força normal entre a correia e a polia condutora
 N_{cz} – Força normal entre a correia e a polia condutora
 r_b – Distância entre o centro de massa do braço articulado e o eixo da polia condutora
 r_{ct} – Raio efetivo da polia condutora
 r_{cz} – Raio efetivo da polia conduzida
 r_{cto} – Raio inicial da polia condutora
 r_{czo} – Raio inicial da polia conduzida
 r_d – Raio dos dentes da polia conduzida
 r_r – Distância entre o centro de massa do rolete e o eixo da polia condutora
 R_t – Força de reação na tampa da polia condutora
 s_{ct} – Deslocamento do prato móvel da polia condutora
 s_{cz} – Deslocamento do prato móvel da polia conduzida
 T – Torque aplicado pelo motor

1. INTRODUÇÃO

A Equipe Tchê de Baja SAE – UFRGS utiliza em seu protótipo uma transmissão continuamente variável (CVT) com correia e polias. Em alguns trabalhos já realizados pelos seus integrantes, foram levantadas relações experimentais entre o torque de saída do motor, e o torque na saída de todo o conjunto de transmissão (em série com a CVT, o protótipo possui também uma transmissão manual de engrenagens). Desta forma, no atual estágio de conhecimento da dinâmica do protótipo, trabalha-se com esta transmissão conhecendo-se apenas suas respostas para alguns casos de carregamentos impostos já estudados. Ou seja, a dinâmica de funcionamento da CVT não é conhecida, o que impede que sejam efetuadas melhorias no sistema, de forma a melhor compatibilizar sua resposta com a curva de torque do motor e diferentes curvas de carregamentos relativas a diferentes condições de pilotagem.

2. OBJETIVOS

Os objetivos do presente trabalho são a elaboração de um modelo analítico da dinâmica de operação da CVT em questão, e a validação do mesmo, comparando-se suas respostas com respostas do mecanismo medidas experimentalmente.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A elaboração do modelo se desenvolve baseada em equações de equilíbrio de esforços da mecânica clássica. No entanto, conforme descrito por Shigley, 2005, quando existe transmissão de potência através de polias e correia, sempre ocorrerá algum escorregamento, associado ao fenômeno de *elastic creep*. Shigley explica que este fenômeno trata-se de um deslocamento relativo entre a superfície da correia e a polia, devido à elongação que a mesma sofre quando tracionada. Desta forma, é necessário o uso de algum modelo que leve em conta estes fenômenos de contato. Além disto, existe um problema associado às forças de atrito estático atuantes no mecanismo, uma vez que estas são definidas por desigualdades. Por isso algumas considerações devem ser tomadas em conta com respeito às forças de atrito.

3.1 O modelo de Firbank para correias planas

Os esforços desenvolvidos por uma correia (elemento elástico) sendo tracionada por uma polia foram modelados por Firbank, 1972. Em seu modelo, o autor considera uma correia plana, onde os principais esforços atuantes são a força de tração na correia, a força normal de contato entre a polia e a correia, a força de atrito entre a polia e a correia e a força centrífuga atuante na correia. Estes esforços podem ser visualizados na Figura 3.1.

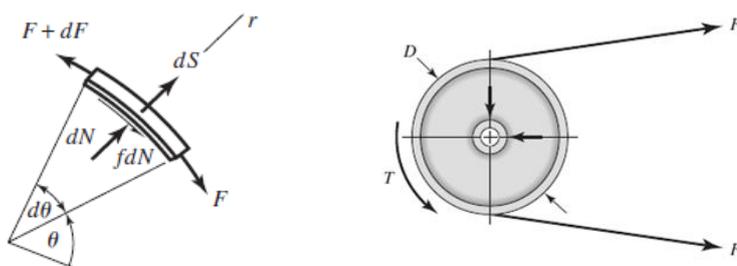


Figura 3.1 – Representação dos esforços atuantes em uma correia plana (Shigley, 2005).

Através deste modelo, Firbank consegue chegar às Equações 3.1, 3.2 e 3.3, além da Equação 3.4, que representa o ângulo de abraçamento entre a polia e a correia, onde F_1 é a força de tração no lado tensionado, F_2 é a força de tração no lado frouxo, m' é a densidade linear da correia, ω é a velocidade angular da polia condutora, r é o raio da polia condutora, R é o raio da polia conduzida, F_i é a força inicial de tensão na correia, μ é o coeficiente de atrito entre a correia e a polia, ϕ_{ct} é o ângulo de abraçamento na polia condutora, T é o torque do motor, e C é a distância entre os centros das polias.

$$F_1 = m' \omega^2 r_{ct}^2 + F_i \frac{2e^{\mu\phi_{ct}}}{e^{\mu\phi_{ct}} + 1} \quad (3.1)$$

$$F_2 = m' \omega^2 r_{ct}^2 + F_i \frac{2}{e^{\mu\phi_{ct}} + 1} \quad (3.2)$$

$$F_i = \frac{T}{2r_{ct}} \frac{e^{\mu\phi_{ct}} + 1}{e^{\mu\phi_{ct}} - 1} \quad (3.3)$$

$$\phi_{ct} = \pi - 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{r_{cz} - r_{ct}}{C} \quad (3.4)$$

3.2 A CVT de correia e polias

A indústria automotiva desenvolveu diversas formas de se construir uma transmissão continuamente variável, cada qual possuindo sua faixa de aplicação, que depende de inúmeras variáveis de operação, como por exemplo, torque do motor, condições de utilização, robustez, durabilidade, etc. No protótipo da Equipe Tchê, utiliza-se uma CVT de correia e polias. Este tipo de transmissão possui seu funcionamento baseado na variação do raio efetivo das polias, alterando-se assim a relação de transmissão. Esta variação é possível, porque as polias são constituídas de dois pratos que possuem a liberdade de movimentarem-se, de forma a permitir que se afastem ou se aproximem um do outro, como é possível verificar na Figura 1.1

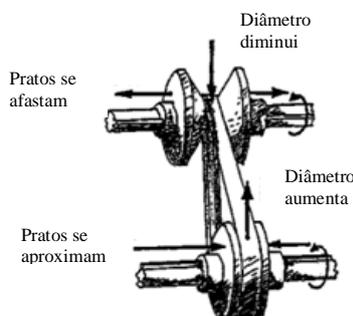


Figura 1.1 – Esboço da CVT desenvolvida por Gottlieb Daimler em 1886, a primeira CVT veicular.

A distância entre os pratos móveis pode ser controlada de diversas formas. Em transmissões do tipo CVT mais sofisticadas, este controle é automatizado, através de atuadores hidráulicos. Existem, no entanto, formas mais simples de realizar este controle, através de mecanismos sensíveis a torque e a rotação.

3.2 Modelagem para o caso da CVT

Existem na literatura diversos trabalhos já desenvolvidos para o caso de uma CVT de correia e polias, pois estes mecanismos não trabalham com correias planas, logo, o modelo de Firbank não pode ser utilizado diretamente. É possível encontrar desde modelos mais simples,

como no exemplo apresentado no livro de Hibbeler, 2009, onde se realiza uma adaptação para correias em V, desprezando as forças centrífugas atuantes na correia, bem como as forças de atrito radiais, até modelos bem mais complexos, como os propostos por Srivastava e Haque, 2009, que consideram as forças de atrito em todas as direções.

4. MODELO ANALÍTICO

Os mecanismos de variação de raio efetivo da CVT em estudo são baseados na atuação de forças centrífugas exercidas por roletes, para o caso da polia condutora, e baseado em um mecanismo sensível a torque, para a polia conduzida. Seu funcionamento está relacionado a um complexo balanço de forças atuantes no sistema. Para cada relação de transmissão que o equipamento fornece, existe uma combinação de esforços atuantes que mantém o sistema em equilíbrio (relação de transmissão constante). Quando algum esforço sobre o sistema é alterado (torque ou rotação), o balanço sofre uma perturbação, e após certo tempo entra novamente em estado de equilíbrio. Desta forma, para que o modelo analítico empregado possa prever com razoável exatidão o seu funcionamento, deve-se partir da identificação de todos os esforços atuantes que influenciam na resposta. Na Figura 4.1 é possível visualizar as polias condutora e conduzida (No Anexo 1 encontram-se desenhos esquemáticos do equipamento).

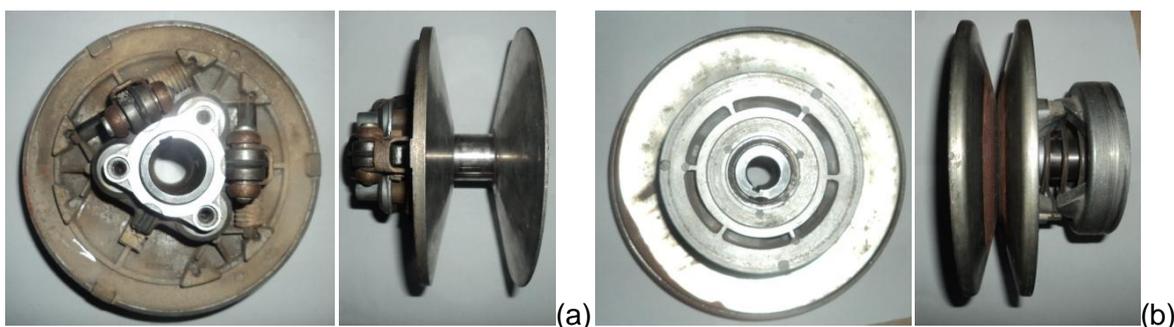


Figura 4.1 – (a) Polia condutora (sem tampa lateral); (b) Polia conduzida.

O funcionamento da polia condutora é baseado em forças centrífugas, exercidas por três braços articulados, equilibradas por esforços exercidos por molas e pela própria força de reação da correia, enquanto que a polia conduzida tem seu funcionamento ditado por um balanço de forças entre o torque exercido pela correia (tracionada pela polia condutora) e as forças de reação exercidas por uma mola. Como o objetivo final deste modelo é explicitar a dependência da relação de transmissão em relação a parâmetros construtivos e esforços aplicados, a abordagem utilizada está baseada na utilização de equações da mecânica clássica e balanços de esforços. Além destas equações, foi necessário utilizar o modelo proposto por Firbank, 1972, para correlacionar os esforços desenvolvidos na correia com os esforços atuantes nas polias.

4.1 Análise cinemática

Seguindo a metodologia de análise de mecanismos descrita por Shigley e Uicker, 1981, ao efetuar-se um processo de análise em um mecanismo deve-se iniciar pela análise cinemática do mesmo. Assim sendo, é necessário encontrar a forma como se relacionam os deslocamentos das partes móveis das polias. Levando em conta que o objetivo final esta análise da CVT visa obter a variação da relação de transmissão em função dos esforços aplicados e de seus parâmetros construtivos, e que esta relação depende dos raios efetivos das polias, busca-se encontrar estes deslocamentos como função destes raios.

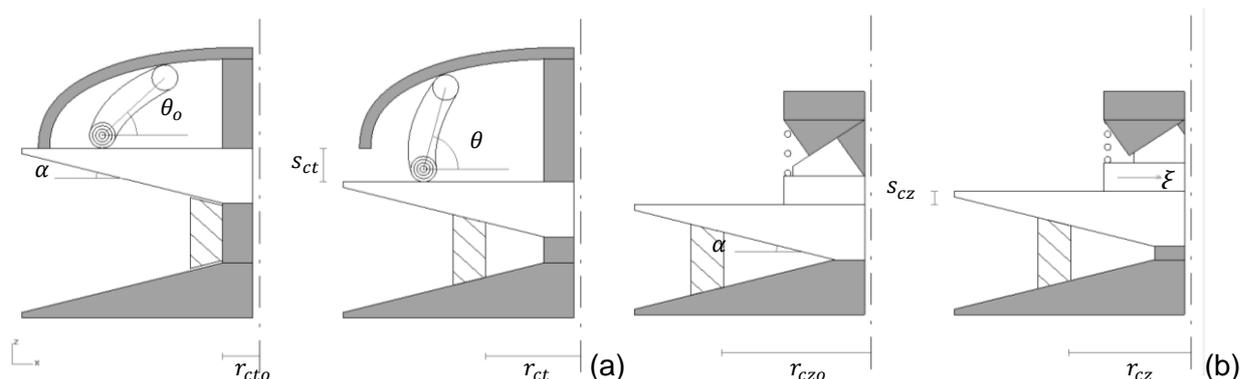


Figura 4.2 – Representação esquemática das polias da CVT (as partes preenchidas na cor cinza não se movem em relação ao eixo de cada polia), onde (a) se refere à polia condutora e (b) se refere à polia conduzida, ambas representadas em duas situações diferentes.

Na Figura 4.2, é possível verificar que existe uma dependência do ângulo θ (deslocamento angular da mola) em relação ao raio efetivo da polia condutora (r_{ct}), onde θ_o é a posição de repouso do rolete. Para baixas rotações, a força centrífuga atuante nos roletes não consegue vencer a pré-carga das molas, com os braços articulados permanecendo em θ_o , e assim não havendo mudança no raio efetivo. Isto permite que em baixas rotações a polia não transmita torque para a correia, deixando que o veículo fique em ponto-morto (nesta situação a distância entre os pratos da polia é um pouco maior que a largura da correia, como é possível verificar na Figura 4.2). A partir do momento em que se atinge uma rotação no motor capaz de gerar uma força centrífuga nos roletes maior que a pré-carga da mola, passa a existir uma relação entre o deslocamento do braço articulado e o raio efetivo. Por relações geométricas é possível verificar que o raio efetivo (r_{ct}) varia com o deslocamento na direção z (s_{ct}) da base onde a mola é fixada de acordo com a Equação 4.1, onde fica explicitado que esta relação depende do ângulo α .

$$\frac{s_{ct}}{2(r_{ct} - r_{cto})} = \tan \alpha \quad (4.1)$$

Para completar a análise cinemática da polia condutora é necessário encontrar uma relação de dependência entre o deslocamento s_{ct} em relação ao ângulo θ . Esta relação depende do perfil da tampa que envolve a polia condutora, por onde o rolete desliza, conforme a equação:

$$\theta = f(s_{ct}) \quad (4.2)$$

Para o caso em análise, foi utilizado um scanner tridimensional, conforme descrito no Capítulo 5.1. A seguir, foram modeladas as relações entre as partes móveis da polia conduzida, conforme esquematizado na Figura 4.2. A relação entre o deslocamento da base móvel da mola (s_{cz}) e a variação do raio efetivo (r_{cz}) pode ser obtida utilizando-se os mesmos princípios geométricos aplicados para a polia condutora, conforme se vê na equação:

$$\frac{s_{cz}}{2(r_{czo} - r_{cz})} = \tan \alpha \quad (4.3)$$

Por fim, é preciso verificar como o deslocamento angular do prato móvel (ξ) varia com relação ao deslocamento s_{cz} , através de uma relação funcional, como representado pela equação 4.4.

$$\xi = f(\Delta s_{cz})$$

4.2 Balanço de forças

O passo seguinte é a análise dinâmica. Para isto, o primeiro passo é a identificação dos esforços atuantes no mecanismo de variação de relação de transmissão. A seguir, tomando em conta as devidas considerações acerca da aderência do modelo à realidade, estes esforços devem ser relacionados aos parâmetros de entrada da CVT (i.e, torque e rotação do motor). Aplicando-se esta metodologia para as duas polias, obtém-se um sistema de duas equações e duas variáveis (raio efetivo da polia condutora e raio efetivo da polia conduzida), representativo do funcionamento do sistema.

Analisando-se primeiramente a polia condutora, identificam-se os esforços atuantes, como se vê na Figura 4.3, onde N é a força normal que atua sobre a correia, τ_m é o torque aplicado pelas molas nos braços articulados do mecanismo, F_r é a força centrífuga atuante no centro de massa do rolete devido à rotação da polia condutora, F_b é a força centrífuga atuante no centro de massa do braço articulado que sustenta o rolete, f_p é a força de atrito que ocorre devido ao contato entre o prato móvel da polia e seu eixo de fixação, f_c é a força de atrito que ocorre devido ao contato entre as superfícies da correia e as paredes laterais da polia, τ_b é o torque resistivo que ocorre devido ao atrito nas bases de sustentação dos braços articulados, τ_r é o torque de resistência a rolamento que ocorre devido ao contato entre o rolete e a tampa da polia condutora, e R_t é a força de reação que ocorre no ponto de contato entre o rolete e a tampa da polia. Quanto às dimensões, d_b é o centro de gravidade do braço e a origem do sistema de coordenadas, e d_r é a distância entre o centro de massa do rolete e a origem do centro de coordenadas.

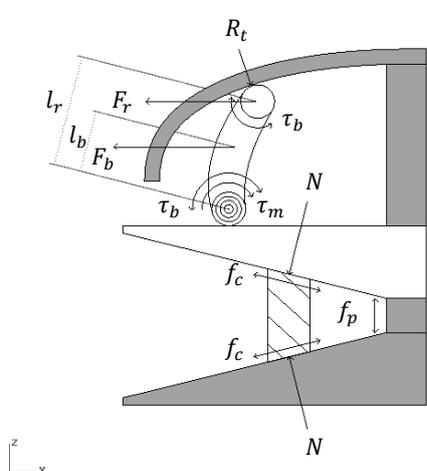


Figura 4.3 – Representação esquemática dos esforços atuantes no mecanismo de variação do raio efetivo da polia condutora.

É importante ressaltar que a análise da Figura 4.3 se refere a ângulos θ maiores que θ_0 . Para ângulos menores, esta análise é irrelevante, pois o raio efetivo permanece sempre constante, no valor de r_{cto} . Identificados os esforços, os mesmos são correlacionados entre si através de uma análise de equilíbrio de momentos, em relação ao eixo de coordenadas inercial que aparece na Figura 4.3. Ao aplicar esta análise, estão sendo desconsideradas as deformações decorrentes dos carregamentos aplicados. Desta forma, chega-se à Equação 4.5, onde ϑ é o ângulo da normal da superfície da tampa da polia no ponto de contato com o rolete, e \mathcal{M}_k representa os momentos dinâmicos em relação à origem do sistema de coordenadas

inercial. O torque aplicado pela mola τ_m é multiplicado por 2, devido à existência de 2 molas para cada braço articulado.:

$$\sum M_z = F_r d_r \sin \theta + F_b d_b \sin \theta \pm \tau_r - R_t d_r \cos \vartheta \cos \theta - 2\tau_m \pm \tau_b = \sum \mathcal{M}_k \quad (4.5)$$

A Figura 4.3 e a Equação 4.5 nos mostram que existe uma indefinição com relação ao sentido das forças de atrito existentes. Além do mais, de acordo com Kikuchi e Oden, 1988, é extremamente difícil modelar as forças envolvidas nos fenômenos de contato, pois as mesmas variam muito e dependem de muitos parâmetros, como limpeza superficial, temperatura, elasticidade, etc... Desta forma, as forças de atrito são desconsideradas neste modelo, sendo necessária uma calibração experimental do modelo no sentido de contornar esta simplificação.

Outra importante consideração é tomada em conta neste momento: os efeitos inerciais são desprezados na análise em questão. Esta consideração decorre do fato de que tanto as magnitudes da aceleração angular conjunto formado pelo braço e pelo rolete como a magnitude do momento de inércia são muito pequenas em relação às outras grandezas envolvidas, sendo seu produto desprezível. Esta consideração decorre também do fato de que as magnitudes da aceleração linear $\Delta \ddot{s}_{ct}$ são também pequenas, podendo-se desprezar também os efeitos inerciais do deslocamento do prato móvel da polia. Além do mais, a inércia do sistema de transmissão deve sempre ser desprezível em relação à inércia total do veículo, melhorando sua eficiência.

Em outras palavras, o que se está dizendo com a consideração do parágrafo anterior é que ao invés de realizarmos uma análise dinâmica do funcionamento do mecanismo, podemos realizar uma análise quasi-estática do mesmo, onde cada estágio de abertura da polia é atingido instantaneamente de acordo com as variações dos carregamentos externos. O fato de realizarmos uma análise quasi-estática, também nos permite considerar a base do braço como um referencial inercial, permitindo que o somatório de momentos seja efetuado em relação a sua base, conforme Equação 4.6, onde l_r é a distância entre o centro de massa do rolete e a base do braço articulado, e l_b é a distância entre o centro de massa do braço articulado e sua base.

$$\sum_o M_z = F_r l_r \sin \theta + F_b l_b \sin \theta - R_t l_r \cos \vartheta \cos \theta - 2\tau_m = 0 \quad (4.6)$$

A definição das forças F_r e F_b vem da definição de força centrífuga, ficando as mesmas de acordo com as Equações 4.7 e 4.8, onde ω é a velocidade angular da polia condutora, r_r a distância entre o centro de massa do rolete e o eixo central da polia quando $\theta = \theta_o$, r_b a distância entre o centro de massa do braço e o eixo central da polia quando $\theta = \theta_o$, m_r é a massa do rolete e m_b é a massa do braço.

$$F_r = m_r \omega^2 (l_r \sin \theta + r_r) \quad (4.7)$$

$$F_b = m_b \omega^2 (l_b \sin \theta + r_b) \quad (4.8)$$

A definição do torque aplicado pela mola vem da definição da lei de Hooke, para molas torcionais. Desta forma, o mesmo fica definido de acordo com a Equação 4.9, onde ϵ_{mct} é a constante elástica torcional das molas da polia condutora, e τ_{mcto} equivale à pré-carga da mola.

$$\tau_m = \tau_{mcto} + \epsilon_{mct} \theta \quad (4.9)$$

Para que se possa explicitar a força de reação atuante na tampa da polia em relação às variáveis de interesse no problema em questão, é preciso efetuar um balanço de esforços na

direção do eixo z (Figura 4.4), resultando no fato de que esta reação possui magnitude igual a componente na direção z do esforço normal (N) entre a superfície do prato móvel da polia e a correia. Isto pode ser verificado na Equação 4.10 (lembrando que a força de atrito f_c está sendo desprezada):

$$\sum F_z = N \cos \alpha - 3R_t \cos \vartheta = 0 \quad (4.10)$$

Observe que o somatório de forças resulta em zero pelo fato de estarmos desprezando efeitos inerciais, e que a variável que representa a reação na tampa é multiplicada por 3, porque existem 3 roletes na polia. Ainda assim, o esforço normal N continua como sendo uma variável desconhecida. Por isso, lança-se mão do modelo proposto por Firbank, 1972, que permite relacionar os esforços normais e de tração na correia com os parâmetros construtivos do sistema, conforme descrito no Capítulo 3.1. No entanto, como se pode verificar na Figura 4.5, o modelo de Firbank foi desenvolvido para a interação entre uma correia plana e uma polia, e não para uma correia trapezoidal, como no caso em análise. Apesar de que a interação entre o elemento flexível e o elemento rígido é regida pelos mesmos princípios em ambos os casos, uma pequena modificação no modelo deve ser efetuada, visando contemplar o fato de que para uma correia trapezoidal a interação ocorre com as paredes laterais da polia.

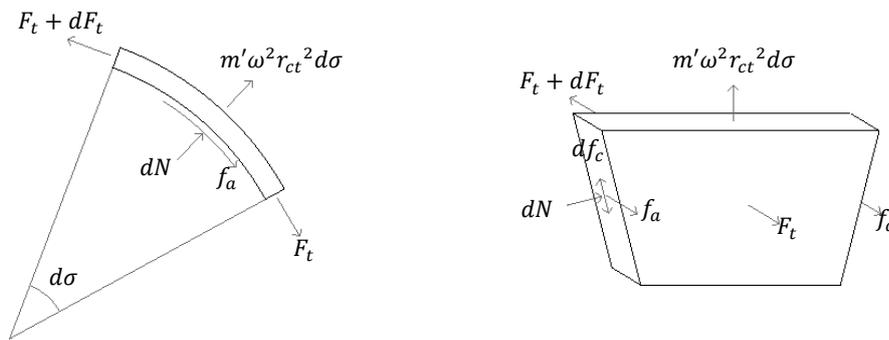


Figura 4.5 – À esquerda a modelagem proposta por Firbank, mostrando os esforços atuantes em um elemento infinitesimal de ângulo $d\sigma$ em contato com uma polia, para uma correia plana, e à direita a alteração deste modelo, considerando uma correia V.

Levando em conta esta mudança na direção de atuação dos esforços normais atuantes na interface entre a polia e a correia, é possível obter as Equações 4.11 e 4.12, que representam o somatório de esforços radiais em um elemento de comprimento infinitesimal, e também as Equações 4.13 e 4.14, que representam os esforços tangenciais. Esta abordagem também é demonstrada por Hibbeler, 2009. O autor, no entanto, não considera os esforços de atrito entre a correia e a polia (f_c) e as forças centrífugas atuantes na correia. Neste modelo, pelas mesmas razões expostas anteriormente, iremos desprezar as forças de atrito entre a correia e a polia.

$$\sum F_r = -(F_t + dF_t) \sin \frac{d\sigma}{2} - F_t \sin \frac{d\sigma}{2} + 2dN \sin \alpha + m' \omega^2 r_{ct}^2 d\sigma = 0 \quad (4.11)$$

$$dN = (F_t - m' \omega^2 r_{ct}^2) \frac{d\sigma}{2(\sin \alpha)} \quad (4.12)$$

$$\sum F_t = 2\mu dN + F_t \cos \frac{d\sigma}{2} - (F_t + dF_t) \cos \frac{d\sigma}{2} = 0 \quad (4.13)$$

$$dN = \frac{dF_t}{2\mu} \quad (4.14)$$

Observe que nas equações acima foram realizadas as seguintes considerações:

- $\sin \frac{d\sigma}{2} = \frac{d\sigma}{2}$, pois o seno de um ângulo pequeno, pode ser aproximado pelo valor do próprio ângulo, o que neste caso é válido por estarmos considerando um ângulo infinitesimal;
- $\cos \frac{d\sigma}{2} = 1$, pois o cosseno de um ângulo pequeno pode ser aproximado por 1, o que neste caso é válido por estarmos considerando um ângulo infinitesimal;
- O diferencial de segunda ordem $dF_t \frac{d\sigma}{2}$ é desprezado;
- Apesar de a força de atrito entre a correia e a polia (f_c) ter sido desprezada, a força de atrito f_a foi incluída no modelo. Isto se deve ao fato de que estas forças desempenham papéis diferentes no funcionamento do mecanismo; enquanto f_c caracteriza-se como sendo uma indeterminação, impedindo o movimento de subida e descida da correia, f_a é desenvolvida devido ao fenômeno de *elastic creep*, e tem seu sentido conhecido. Desta forma, conhecendo-se faixas de valores característicos para o coeficiente de atrito responsável pela força f_a , utiliza-se este parâmetro para a calibração do modelo.

Combinando-se as Equações 4.12 e 4.14, obtém-se a seguinte equação diferencial linear de primeira ordem:

$$\frac{dF_t}{d\sigma} - \frac{\mu}{(\sin \alpha)} F_t = -\frac{\mu}{(\sin \alpha)} m' \omega^2 r_{ct}^2 \quad (4.15)$$

Aplicando o método de resolução deste tipo de equação diferencial descrito por Kreyszig, 2006, a solução para esta equação é:

$$F_t = A e^{\frac{\mu}{(\sin \alpha)} \sigma} + m' \omega^2 r_{ct}^2 \quad (4.16)$$

Apesar da modificação empregada na modelagem diferencial da distribuição de esforços na correia, a única diferença entre a Equação 4.16 (que representa o modelo de uma correia trapezoidal) e a equação que representa a modelagem de uma correia plana é constante que acompanha a variável σ dentro da função exponencial, que passa a ser $\frac{\mu}{(\sin \alpha)}$. Assim, as mesmas considerações aplicadas por Firbank para encontrar o valor da constante A , bem como as forças de tração na correia, são válidas também para este novo modelo. Desta forma, substituindo-se nas Equações 3.1, 3.2 e 3.3 μ por $\frac{\mu}{(\sin \alpha)}$, temos os esforços tangenciais na correia representados pelas Equações 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20.

$$F_1 = m' \omega^2 r_{ct}^2 + F_i \frac{2e^{\frac{\mu}{(\sin \alpha)} \phi_{ct}}}{e^{\frac{\mu}{(\sin \alpha)} \phi_{ct}} + 1} \quad (4.17)$$

$$F_2 = m' \omega^2 r_{ct}^2 + F_i \frac{2}{e^{\frac{\mu}{(\sin \alpha)} \phi_{ct}} + 1} \quad (4.18)$$

$$F_i = \frac{T}{2r_{ct}} \frac{e^{\frac{\mu}{(\sin \alpha)} \phi_{ct}} + 1}{e^{\frac{\mu}{(\sin \alpha)} \phi_{ct}} - 1} \quad (4.19)$$

$$\phi_{ct} = \pi - 2 \sin^{-1} \frac{r_{cz} - r_{ct}}{c}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.20)$$

Para a Equação 4.20, que define o ângulo de contato entre a polia conutra e a correia, foi estipulado uma faixa de valores permissíveis para a função $\sin^{-1} x$ (entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$), devido ao fato que esta função não é bijetora, ou seja, sem esta restrição, existiriam diversas respostas para uma dada entrada de um valor de x do domínio da função. Por fim, como é possível verificar na Figura 3.1, existe uma relação entre as forças de tração na correia (F_1 e F_2) e o esforço normal resultante na polia. Esta relação pode ser encontrada aplicando-se o teorema do paralelogramo, utilizado para encontrar forças resultantes, como se verifica na equação:

$$N = \frac{(F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \phi_{ct})^{\frac{1}{2}} \sin \alpha}{2} \quad (4.21)$$

Reunindo as Equações 4.10 e 4.21, obtém-se finalmente a força de reação na tampa da polia (R_{tz}) em função de variáveis e interesse no problema, conforme descrito pela Equação 4.22.

$$R_t \cos \vartheta = \frac{(F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \phi_{ct})^{\frac{1}{2}} \sin \alpha \cos \alpha}{6} \quad (4.22)$$

Após haver finalizado o procedimento de análise de esforços na polia condutora, aplica-se o mesmo procedimento para a polia conduzida. No que tange à análise dinâmica do comportamento da polia conduzida, por questões de equilíbrio de forças, o esforço normal resultante no mancal da polia conduzida deve ser igual em módulo ao esforço normal resultante na polia condutora. E como o ângulo de contato entre a correia e os pratos é o mesmo para ambas as polias, os esforços normais para a polia conduzida também podem ser representados pela Equação 4.21. Para isso, são verificados quais os esforços atuantes no mecanismo de variação do raio efetivo, conforme se vê na Figura 4.7, onde F_c é a força tangencial resultante aplicada pela correia sobre a polia, N_{cz} é a força normal, f_p é a força de atrito entre o prato móvel e o eixo da polia, f_c é a força de atrito entre a correia e a polia que atua no sentido de impedir a descida ou subida da correia, f_a é a força de atrito devido ao fenômeno de *elastic creep* (como ocorre na polia condutora), τ_{mcz} é o torque aplicado pela mola sobre o prato móvel, e F_{mcz} é a força exercida pela mola sobre o prato móvel.

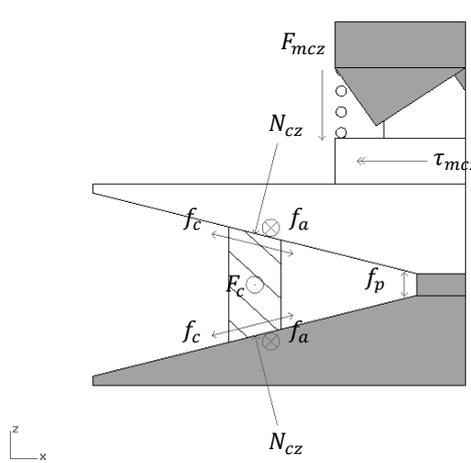


Figura 4.7 – Representação dos esforços atuantes no mecanismo de variação do raio efetivo da polia conduzida.

Da mesma forma que para a polia condutora existe uma faixa de baixas rotações, na qual a polia não transmite torque para a correia, para a polia conduzida existe uma faixa de torques transmitidos pela correia na qual a polia não varia seu diâmetro efetivo. Isto se explica

devido ao fato de que a força de atrito estático exercida pela correia no prato móvel deve superar a força devido à pré-carga torcional da mola, e a força normal resultante sobre as superfícies dos pratos deve superar a pré-carga axial da mola, para que assim possa ocorrer variação do diâmetro efetivo da polia.

Depois de atingida esta faixa de valores, passa a valer uma correlação entre os esforços atuantes e o raio efetivo. Uma maneira de encontrar esta correlação é realizar um balanço dos esforços tangenciais atuantes na polia, conforme Equação 4.23, onde as mesmas considerações aplicadas para a polia condutora são repetidas (análise quasi-estática, sem levar em conta esforços de atrito, com exceção da força devida ao fenômeno de *elastic creep*).

$$\sum F_t = 2f_a + \frac{\tau_{mcz}}{r_{cz}} - F_c = 0 \quad (4.23)$$

Para definição da força de atrito f_a aplica-se a lei de Coulomb para atrito seco, que relaciona a força normal com a força de atrito, conforme a equação:

$$f_a = \mu N_{cz} \quad (4.24)$$

Observe que o coeficiente de atrito é o mesmo utilizado para a polia condutora. Como este coeficiente é muito sensível a variações de propriedades dos materiais, dificilmente terá o mesmo valor para ambas polias. No entanto, como este será utilizado como parâmetro de calibração, considera-se que seu valor é o mesmo para ambas as polias. Quanto ao esforço normal, realizando-se um balanço de forças na direção z atuantes no prato móvel, é possível relacionar seu valor com a força exercida pela mola (F_{mcz}), de acordo com a Equação 4.25, onde foi aplicada a lei de Hooke para encontrar o valor da força exercida pela mola (mesmo procedimento adotado para a outra polia).

$$\sum F_z = N_{cz} \cos \alpha - F_{mcz} = N_{cz} \cos \alpha - (F_{mczo} + k_{mcz} s_{cz}) = 0 \quad (4.25)$$

Na Equação 4.25 F_{mczo} é a pré-carga axial da mola, e k_{mcz} é a constante elástica axial da mola. Para encontrar o torque exercido pela mola, aplica-se novamente a lei de Hooke (Equação 4.26), onde τ_{mczo} é a pré-carga torcional da mola e ε_{mcz} é a constante elástica torcional da mola.

$$\tau_{mcz} = \tau_{mczo} + \varepsilon_{mcz} \zeta \quad (4.26)$$

Por fim, para encontrar a força tangencial exercida pela correia, aplica-se a relação descrita pela Equação 4.27, conforme descrito por Shigley, 2005.

$$F_c = F_1 - F_2 = \frac{T}{r_{ct}} \quad (4.27)$$

Desta forma, as equações 4.6 e 4.23 formam um sistema de duas equações não lineares, com duas incógnitas (r_{ct} e r_{cz}), que representa a dinâmica de funcionamento da CVT (r_{ct} está implícito nas equações).

$$F_r l_r \sin \theta + F_b l_b \sin \theta - R_t l_r \cos \vartheta \cos \theta - 2\tau_m = 0 \quad (4.6)$$

$$2f_a + \frac{\tau_{mcz}}{r_{cz}} - F_c = 0 \quad (4.23)$$

5. VALIDAÇÃO DO MODELO

Para a validação do modelo matemático proposto se faz necessária a realização de um ensaio experimental, que permita verificar o quanto a resposta do modelo se aproxima da resposta real medida, ou seja, aplicando-se diferentes valores de torque e rotação na entrada da CVT, verificar se a relação de transmissão medida está de acordo com os valores previstos pela modelagem. Para isso, se faz necessário também a medição das constantes do modelo para o caso em estudo.

5.1 Medições de constantes

Como é possível verificar nas equações desenvolvidas no Capítulo 4, existe uma série de constantes que representam parâmetros construtivos da CVT. São elas: dimensões em geral (angulares e lineares), perfil da tampa da polia condutora, perfil dos dentes da polia conduzida, massa e posição do centro de massa dos braços da polia condutora, constantes de todas as molas o equipamento e coeficiente de atrito entre a correia e os pratos da polia conduzida. Para cada tipo de medição, um diferente tipo de procedimento é adotado, conforme segue.

5.1.1 Medições dimensionais

As medidas dimensionais foram realizadas com o auxílio de um paquímetro, e seus valores numéricos encontram-se na Tabela 1 do Apêndice. Também com o auxílio de um paquímetro foi possível verificar que o perfil dos dentes da polia conduzida é linear. Desta forma, por se tratar de um perfil linear, é possível através de relação geométrica simples encontrar a relação funcional entre o deslocamento s_{cz} e o deslocamento angular o prato móvel da polia conduzida ξ , como se vê na Equação 5.1, onde r_d é o raio os dentes a polia e o ângulo de inclinação dos mesmos.

$$\xi = f(s_{cz}) = \frac{s_{cz}}{r_d \tan \gamma} \quad (\text{Eq. 5.1})$$

A medição do perfil da tampa da polia condutora não é tão simples, por tratar-se de um perfil curvo. Esta medição foi realizada utilizando-se um *scanner* tridimensional óptico, do fabricante Konica Minolta, modelo Vivid 9i. Este equipamento possui, de acordo com informações do fabricante, uma precisão de 0,032mm. A exatidão do equipamento é variável, de acordo com a distância com que o objeto de medição é colocado da lente do equipamento. Neste caso, a medida foi realizada a 600mm de distância, o que acarreta em uma incerteza de $\pm 0,2$ mm. O equipamento é capaz de gerar um arquivo em formato *.stl* (formato que representa superfícies tridimensionais através de inúmeros triângulos. De posse da superfície digitalizada, foi utilizado um *software* de CAD para extrair a curva de perfil da tampa, e representá-la através de um polinômio, permitindo sua inserção no modelo matemático. Este polinômio está representado na Equação 5.2.

$$y = 0.0001x^4 - 0.0213x^3 + 1.4027x^2 - 41.263x + 454.09 \quad (\text{Eq.5.2})$$

5.1.2 Medições de massa e centro de massa

A medição das massas foi realizada utilizando-se uma balança convencional, que possui incerteza de $\pm 2g$. Os valores de massa medidos também se encontram na Tabela 1 do apêndice. Conhecendo-se a massa dos braços articulados da polia condutora, foi possível

calcular a posição dos seus centros de massa com o auxílio de um *software* de CAD. Os valores encontrados também se encontram na Tabela 1 do apêndice.

5.1.3 Medições das constantes e das pré-cargas das molas

Existem no equipamento seis molas helicoidais na polia condutora e uma mola helicoidal na polia conduzida, todas possuindo uma pré-carga. Estes valores foram medidos com o auxílio de uma célula de carga e um paquímetro, medindo-se forças e deslocamentos correspondentes. A célula de carga utilizada possui uma exatidão de $\pm 0,01\text{kgf}$. Os valores medidos encontram-se na Tabela 1 do Apêndice 2.

5.2 Ensaio experimental do equipamento

A medição experimental dos valores dos raios efetivos de cada polia correspondentes a diferentes combinações de torque e rotação do motor foi efetuada instrumentando-se o protótipo, a com plena carga no motor, foram aplicados diferentes torques resistivos na saída CVT, medindo-se assim as variáveis de interesse para diferentes pontos de operação do motor. A medição do torque foi realizada através do uso de um *strain gauge* tipo espinha de peixe. A rotação foi medida com o uso de um sensor indutivo, e os raios efetivos foram medidos com o auxílio de potenciômetros. Não são fornecidos muitos detalhes a respeito deste experimento, uma vez que este não é o foco do presente trabalho.

5.3 Resolução do sistema de equações

A resolução do sistema de equações, formado pelas Equações 4.6 e 4.23, foi obtida através do uso do *software* Matlab, utilizando-se o módulo Simulink, que permite a resolução de equações não lineares através de diagramas de blocos. As respostas de torque e rotação do motor medidas experimentalmente devidas a um carregamento variável no tempo foram colocadas como vetores de entrada no modelo (dois vetores, um de torque em função do tempo, e outro de rotação em função do tempo). Este diagrama de blocos encontra-se no Apêndice 3.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As medições de torque e rotação efetuadas são utilizadas como variáveis de entrada no modelo desenvolvido, e as respostas fornecidas (raio efetivo da polia condutora e raio efetivo da polia conduzida) são comparadas com as respostas destas variáveis medidas experimentalmente, utilizando-se o coeficiente de atrito (μ) como parâmetro de calibração. O valor de μ que permitiu o melhor ajuste equivale a 0,6, o que está de acordo com os valores típicos definidos por Firbank (em seu trabalho, a autor verificou que o valor do coeficiente de atrito entre a correia e as polias varia entre 0,6 e 0,9). Na Figura 6.1, é possível comparar os valores dos raios efetivos da polia condutora previstos pelo modelo, com os valores medidos experimentalmente.

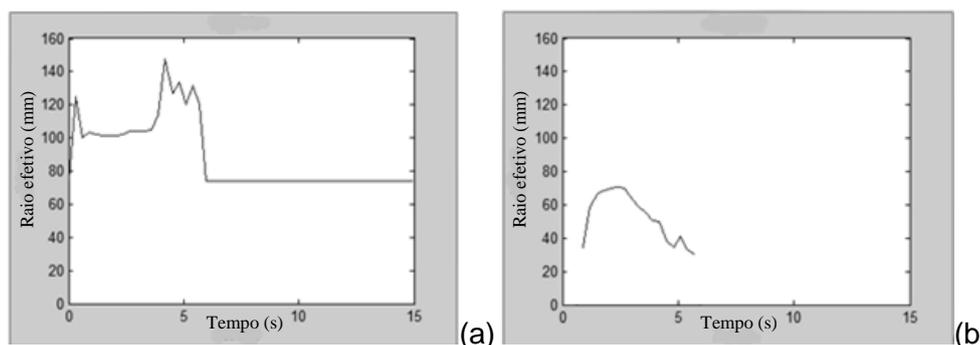


Figura 6.1 – (a) Raio efetivo (mm) da polia condutora em função do tempo (s) previsto pelo modelo; (b) Raio efetivo medido.

Na Figura 6.1, é possível observar que entre os instantes 3 e 7 segundos, o modelo consegue prever a tendência de diminuição do raio efetivo. Neste intervalo, é possível observar também que o modelo prevê algumas oscilações que não foram medidas. Isto pode ser explicado pelo fato de que o modelo não está levando em consideração efeitos inerciais, bem como a ação de algumas forças de atrito, que atuam no sentido de amortecer estas oscilações.

Observa-se também, que não existe certo atraso entre a resposta prevista pelo modelo e a resposta medida. Isto se justifica pelo fato de que, conforme discutido na elaboração do modelo, existe uma faixa de valores do ângulo de inclinação dos braços articulados (θ) onde o modelo não prevê o comportamento da polia, uma vez que nesta faixa o raio efetivo permanece constante. Para que este atraso em relação à resposta real deixe de existir, esta faixa de valores deve ser ajustada corretamente no modelo.

Por fim, nota-se que os valores numéricos revistos pelo modelo estão acima dos valores medidos. Novamente, existe grande possibilidade de que a ausência de certas forças de atrito no modelo seja a responsável por este fenômeno, pois uma vez que os valores previstos foram quase duas vezes maiores que os valores medidos, a influência das forças de atrito é grande demais para ser totalmente desprezada no modelo. No entanto, apenas com outros ensaios experimentais isto poderá ser verificado.

Na Figura 6.2, é possível comparar os valores dos raios efetivos da polia conduzida previstos pelo modelo, com os valores medidos experimentalmente.

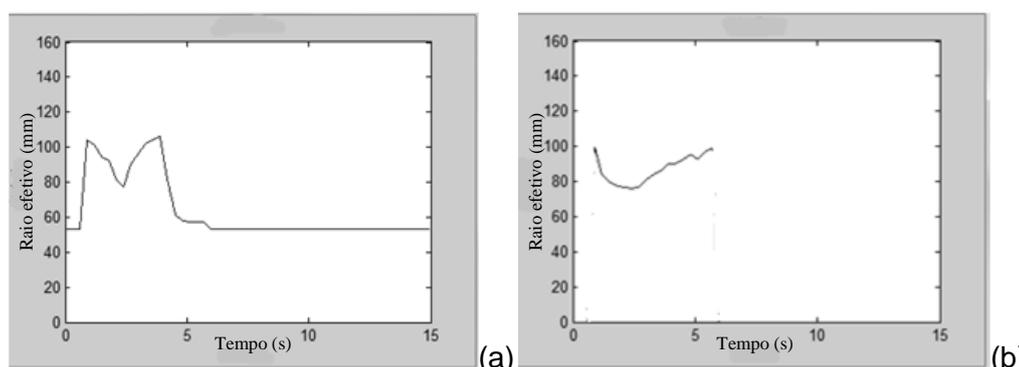


Figura 6.2 – (a) Raio efetivo (mm) da polia conduzida em função do tempo (s) previsto pelo modelo; (b) Raio efetivo medido.

Na Figura 6.2, verifica-se uma boa aproximação dos valores previstos pelo modelo em relação aos valores medidos. Novamente, é possível dizer que a ausência de forças inerciais e de atrito no modelo fazem com que o mesmo oscile com maior amplitude quando ocorrem perturbações externas. Este efeito é mais pronunciado no “vale” que ocorre por volta de 3 segundos nos gráficos da Figura 6.2. Observa-se também que na ausência de medição de

sinal, o modelo passa a apresentar um valor que é inexpressivo, uma vez que para torques muito baixos, o modelo deixa de ser representativo, pois o raio efetivo passa a independe do torque aplicado (devido à pré-carga da mola).

É importante ressaltar também que as forças de atrito neste caso, não apenas amortecem oscilações, mas também são as responsáveis por comportamentos diferentes da CVT na subida e na descida de relação de transmissão. Isto se deve ao fato e que, dependendo se a correia está subindo ou descendo pela polia, o sentido das forças de atrito ia variar, uma vez que essas sempre tendem a se opor ao movimento. Logo, o balanço de forças será diferente quando se estiver aumentando a relação de transmissão, e quando se estiver diminuindo-a. Um caminho a ser seguido é realizar medições experimentais para estas duas situações e compará-las.

7. CONCLUSÕES

Conclui-se que o modelo elaborado é útil como sendo uma primeira abordagem ao problema, uma vez que os objetivos propostos inicialmente, de elaborar um modelo representativo da dinâmica de funcionamento da CVT e validá-lo através de resultados experimentais, foram alcançados. Desta forma, foi desenvolvida uma ferramenta que permite que sejam analisadas as influências de cada variável do equipamento na sua resposta em função de carregamentos impostos. Isto será utilizado pela Equipe Tchê de Baja SAE – UFRGS para otimizar o funcionamento da transmissão do protótipo. No que diz respeito às diferenças entre a resposta medida e a resposta prevista pelo modelo, pode-se dizer que as oscilações apresentadas podem ser corrigidas considerando efeitos inerciais no modelo, apesar de que para fins de otimização isto não seja tão importante. Já para a diferença numérica apresentada entre o raio efetivo previsto pelo modelo para a polia condutora, e o valor medido, deve-se realizar um estudo acerca da influência das forças de atrito no modelo, pois acredita-se que a componente desta força que atua no sentido de impedir o movimento de subida e de descida da correia na polia exerce grande influência.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Firbank, T. C.; **“Mechanics of the Flat Belt Drive”**, ASME paper n° 72-PTG-21.
- [2] Hibbeler, R. C.; **“Dinâmica”**, Prentice Hall, 10ª edição, 2005.
- [3] Hibbeler, R. C.; **“Statics”**, Pearson College Div, 12ª edição, 2009.
- [4] Kikuchi, N.; Oden, J. T.; **“Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods”**, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988.
- [5] Kreyszig, E.; **“Advanced Engineering Mathematics”**, John Wiley & Sons, 2006.
- [6] Shigley, J.E; Mishke, C.R.; **“Projeto de Engenharia Mecânica”**, Bookman, 7ª edição, 2005.
- [7] Shigley, J.E; Uicker, J. J.; **“Theory of Machines and Mechanisms”**, McGraw-Hill, 1981.
- [8] Srivastava, N.; Haque, I.; **“A Review on Belt and Chain Continuously Variable Transmissions (CVT): Dynamics and Control”**, Elsevier, Mechanism and Machine Theory, 2009

APÊNDICE 2

Tabela 1 – Valores numéricos medidos para as constantes do modelo.

<i>Parâmetro</i>	<i>Valor</i>
α (ângulo da correia)	14°
r_{cto} (raio inicial da polia condutora)	31,7 mm
θ_o (ângulo inicial do braço articulado)	75°
r_{czo} (raio inicial da polia conduzida)	101mm
l_r (distância entre o suporte do braço e o centro de massa do rolete)	37,5mm
l_b (distância entre o suporte do braço e o centro de massa do braço)	19,9mm
r_m (distância entre o centro de massa do rolete e o eixo da polia quando $\theta = \theta_o$)	34,6mm
r_b (distância entre o centro de massa do braço e o eixo da polia quando $\theta = \theta_o$)	39,2mm
m_r (massa do rolete)	69,7g
m_b (massa do braço)	35,3g
τ_{mcto} (pré-carga torcional da mola da polia condutora)	0,992Nm
ϵ_{mct} (constante elástica torcional da mola da polia condutora)	0,758Nm/rad
m' (densidade linear da correia)	0,675kg/m
τ_{mczo} (pré-carga torcional da mola da polia conduzida)	4,614Nm
ϵ_{mcz} (constante elástica torcional da mola da polia conduzida)	2,306Nm/rad
F_{mczo} (pré-carga axial da mola da polia condutora)	50,12N
k_{mcz} (constante elástica axial da mola da polia condutora)	2506N/m
C (distância entre centros das polias)	300mm
r_d (raio dos dentes da polia conduzida)	45mm
γ (ângulo dos dentes da polia conduzida)	28°

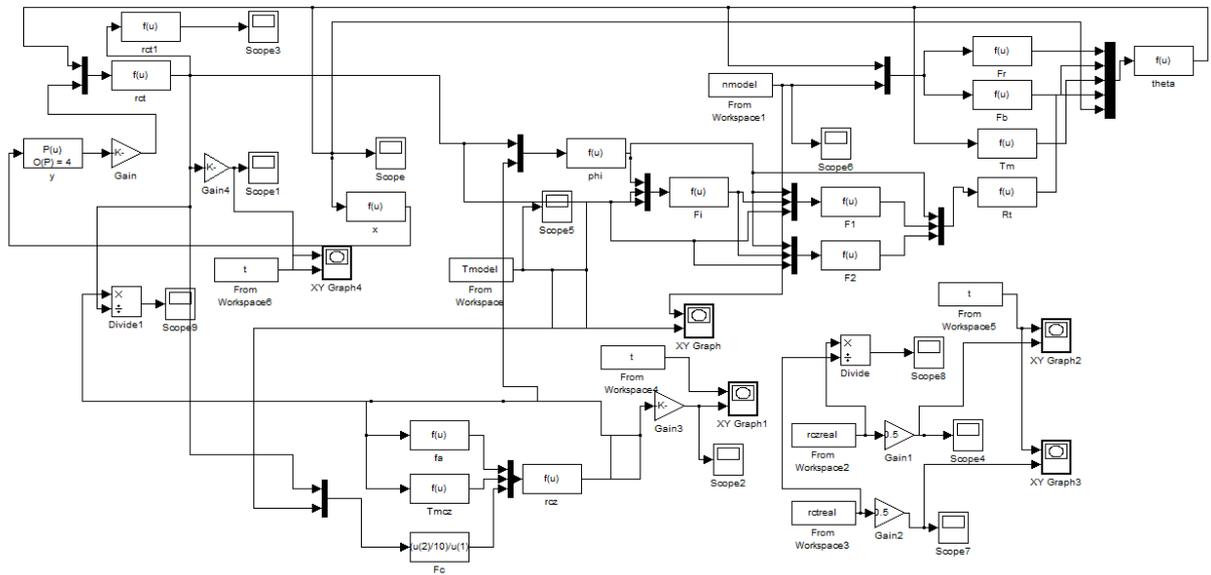


Figura 1 – Modelo em diagrama de blocos do sistema de equações representativo do funcionamento da CVT em Simulink.