UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

BIANCA HERRERIA CAPILHEIRA

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

Porto Alegre
2012

BIANCA HERREIRA CAPILHEIRA

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Luisa Rodriguez Doering

Porto Alegre
2012

BIANCA HERREIRA CAPILHEIRA

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática apresentada à Banca Examinadora para a obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Rogério Ricardo Steffenon - UNISINOS

____

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke - UFGRS

____

Prof. Dra. Elisabete Zardo Búrigo - UFGRS

Porto Alegre, ... de........................de 2012

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conduzir, iluminar os meus passos, amparar-me em todos os momentos e por colocar no meu caminho pessoas que ajudaram no processo de todo este trabalho e na concretização deste sonho! A todas estas pessoas meu agradecimento cheio de carinho, em especial ...

À minha orientadora, que sempre, em todos os momentos, desde que a conheci foi perfeita: a ti Luisa, toda a minha admiração e respeito. Através de ti, percebi que é possível ser das exatas, mas, também, humana e sensível. Este trabalho só foi possível, porque estiveste sempre do meu lado, dizendo o que eu precisava ouvir na hora certa! Além da parte intelectual que produzimos juntas, aprendi a ser uma professora e uma pessoa melhor pelo teu impecável exemplo. Estendo o agradecimento a tua família que sempre me recebeu com muito carinho, permitindo que nossos encontros fossem ainda mais produtivos.

Ao meu esposo: agradeço-te, meu bem, por nunca questionar as minhas ausências, por ser parceiro e me ajudar nas tarefas que temos, permitindo espaço nas nossas vidas para eu realizar minha vontade profissional. Obrigada pelo teu amor!

Ao meu irmão e a minha cunhada: o apoio de vocês sempre foi um incentivo para eu continuar firme. Vou dar uma folga nas visitas à casa de vocês! Obrigada por me acolherem na casa de vocês, por sempre estarem dispostos a fazer a ponte Pelotas - POA com os vídeos e tantas outras coisas que transportaram, inclusive eu!

Aos amigos, dindos, afilhados, Cesar e Nira: obrigada pela companhia, pela disponibilidade de sempre e por me ajudar a desbravar e a olhar para a capital de outra maneira.

A minha família, principalmente, ao meu vô Gico, à vó Sueli, à dinda Graça, à Rafa e a Bé, que passaram as férias de verão dividindo comigo um pequeno momento de lazer e muitos momentos de estudo.

Aos alunos da turma em que apliquei a sequência didática: pela dedicação e colaboração.

Aos componentes da banca examinadora: pelo aceite e sugestões para o nosso trabalho.

Aos docentes do PPGEMat: por manter este programa, na qual colabora com a formação dos professores e, consequentemente, com a melhoria do ensino de matemática.

Dedico este trabalho aos meus pais: amo vocês incondicionalmente, por me mostrarem a importância do estudo, por terem, além de oportunizado, colocado nas suas vidas a prioridade de me proporcionar uma boa formação e, principalmente, por estarem sempre presente na minha vida.

RESUMO

Este trabalho, cuja metodologia foi inspirada na Engenharia Didática, discute e investiga a viabilidade de inserir o ensino/estudo das equações diofantinas lineares no ensino médio. Foi desenvolvida e aplicada uma sequência didática em uma turma do 1º semestre do ensino médio integrado de química do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, Campus Pelotas.
Através das atividades executadas pelos alunos, das anotações feitas pela mestranda e da filmagem de todas as aulas, foi possível coletar os dados sobre toda a experiência. Esta foi iniciada e baseada em um jogo nomeado "escova diofantina", derivado do jogo "escova", seguido de atividades estruturadas com exercícios, questionamentos e debates que encaminharam os alunos, de forma natural, para a construção e estudo do conteúdo desejado.
Elaboramos a sequência didática com objetivos bem definidos em cada atividade. Após o término das aulas, analisamo-las e reformulamo-las. Assim, no Apêndice B, apresentamos uma proposta de sequência didática renovada e pronta para ser aplicada por qualquer professor interessado em lecionar equações diofantinas no ensino médio. Os resultados das análises dos dados indicaram que os alunos do primeiro ano do ensino médio apresentam plenas condições matemáticas para a compreensão e construção dos conceitos e propriedades básicas relacionadas às equações diofantinas lineares.

Palavras – Chave: Ensino de matemática – Equações diofantinas lineares – Ensino médio – Engenharia Didática.

ABSTRACT

This work, whose methodology is inspired by didactical engineering, discusses and investigates the viability of introducing linear diophantine equations at High School level study and teaching. We developed and applied a didactical sequence to a first semester chemistry oriented high school at the Pelotas campus of the Sul-Rio-Grandense Federal Institute. We collected the data of this whole experience, starting with all the activities performed by the students and continuing with notes taken by the author as well as the whole class footage. We started the seminars with a card game that we called “diophantine escova”, derived from the usual “escova” card game. We followed it by structured activities with exercises and several debates that led the students, in a natural way, to understand the definitions, concepts and results about Diophantine Equations. The didactical sequence we have created had very clear and specific goals in each activity. When the seminars ended, we analyzed and reformulated the sequence and therefore, in Appendix C, we present a totally improved and ready to use sequence for any teacher interested in developing linear diophantine equations in high school. The data analysis indicated that fist year high school students have the necessary mathematical skills to understand all concepts and results of basic linear diofantine equations.

Key words: Mathematics Teaching, Linear Diophantine Equations, High School Curriculum, Didactic Engineering

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Folha 1 das atividades.. 35
Figura 2 – Folha 2 das atividades.. 35
Figura 3 – Folha 3 das atividades.. 38
Figura 4 – Folha 4 das atividades.. 39
Figura 5 – Folha 5 das atividades.. 40
Figura 6 – Gráfico referente à equação x+3y=15.. 41
Figura 7 – Gráfico referente à equação 2x+4y=15.. 42
Figura 8 – Gráfico referente à equação 3x+6y=15.. 42
Figura 9 – Folha 6 das atividades.. 43
Figura 10 – Folha 7 das atividades.. 43
Figura 11 – Folha 8 das atividades.. 44
Figura 12 – Folha 9 das atividades.. 45
Figura 13 – Folha 10 das atividades.. 46
Figura 14 – Folha 11 das atividades.. 47
Figura 15 – Folha 12 das atividades.. 50
Figura 16 – Gráfico referente à equação x+3y=15.. 51
Figura 17 – Gráfico referente à equação 2x+9y=7.. 52
Figura 18 – Gráfico referente à equação 3x+6y=15.. 54
Figura 19 – Gráfico referente à equação 120x+23y=150.. 55
Figura 20 – Soluções da equação 120x+ 23y=150.. 56
Figura 21 – Folha 13 das atividades.. 60
Figura 22 – Folha 14 das atividades.. 60
Figura 23 – Fotografia dos alunos mostrando suas jogadas.................................... 65
Figura 24 – Fotografia do registro das jogadas no quadro...................................... 66
Figura 25 – Fotografia da tabela com as equações do jogo.................................... 67
Figura 26 – Fotografia dos alunos colorem a tabela das equações do jogo........... 68
Figura 27 – Fotografia de uma aluna fazendo a comparação entre as atividades. 73
Figura 28 – Fotografia da marcação dos pontos de ambas coordenadas inteiras. 76
Figura 29 – Fotografia do preenchimento da Folha 9... 80
Figura 30 – Fotografia da utilização da calculadora.. 82
Figura 31 – Fotografia do cálculo do MDC na tabela do jogo “Escova

Diofantina”.. 83
Figura 32 – Fotografia da utilização do Algoritmo de Euclides............................. 86
Figura 33 – Fotografia da solução da equação associada à combinação linear..... 86
Figura 34 – Fotografia da correção da solução da equação associada à combinação linear... 87
Figura 35 – Fotografia da verificação da solução encontrada por um aluno.......... 88
Figura 36 – Fotografia da obtenção de uma solução de equação diofantina.......... 91
Figura 37 – Fotografia da análise geométrica para construção da solução geral de *x*.. 93
Figura 38 – Alunos fazem a análise geométrica para construção da solução geral de *y*.. 94
Figura 39 – Fotografia da análise geométrica de outra equação para construção da solução geral de x e y.. 94
Figura 40 – Fotografia da representação geométrica feita pela aluna.................. 95
Figura 41 –Fotografia da representação geométrica da equação $120x+23y=150$.. 95
Figura 42 – Fotografia da solução da equação $120x+23y=150$ de forma algébrica.. 96
Figura 43 – Fotografia do encontro da solução geral de uma equação após a conclusão genérica.. 97
Figura 44 – Fotografia das substituições de valores para “t”................................. 98
Figura 45, 46 e 47 – Fotografia dos alunos resolvendo atividade final................. 99
Figura 48 – Resposta da primeira questão da Folha 3 dada por dois alunos......... 101
Figura 49 – Resposta da segunda questão da Folha 3 dada por um aluno............ 101
Figura 50 – Resposta dada por dois alunos para a terceira questão da Folha 3..... 102
Figura 51 – Tabela, da Folha 4, entregue por um aluno....................................... 103
Figura 52 – Resposta dada por dois alunos para a segunda questão da Folha 4... 103
Figura 53 – Resposta de um aluno para as duas últimas questões da Folha 4...... 104
Figura 54 – Outra resposta dada por um aluno para as duas últimas questões da Folha 4.. 104
Figura 55 – Representação geométrica da equação x+4y=15 e algumas soluções no plano cartesiano: resposta de um aluna para a questão a da Folha 6.............. 106
Figura 56 – Resposta dada por dois alunos às duas últimas questões da Folha 6. 107
Figura 57 – Definição de divisor, segundo dois alunos.. 108

Figura 58 – Resposta da questão 1 e 2 da Folha 8... 109
Figura 59 – Tabela da Folha 9.. 110
Figura 60 – Respostas dada por dois alunos para a primeira questão da Folha 9.. 111
Figura 61 – Resposta do aluno para a segunda questão da Folha 9....................... 111
Figura 62 – Resposta dada por dois alunos para a segunda questão da Folha 9... 111
Figura 63 – Resposta dada por um aluno para a questão “e” da Folha 10............ 112
Figura 64 – Resposta dada pelos alunos para a segunda questão da Folha 10...... 113
Figura 65 – Resolução das questões “d” e “e” da Folha 11.................................. 114
Figura 66 – Respostas dada por dois alunos da segunda questão da Folha 11..... 114
Figura 67 – Resposta da questão “f” da Folha 12.. 116
Figura 68 – Resposta da questão “a” da Folha 14.. 119

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Construção da primeira linha para a tabela das equações do jogo....... 37
Tabela 2 – Tabela das equações do jogo.. 37
Tabela 3 – Tabela das equações do jogo para infinitos baralhos........................... 38
Tabela 4 – Tabela das equações de soma 12.. 39
Tabela 5 – Análise das respostas dadas pelos alunos para a última questão da Folha 13.. 118
Tabela 6 – Análise das respostas dadas pelos alunos para a segunda questão da Folha 14.. 119

LISTA DE GRÁFICO

Gráfico 1– Análise da escrita do MDC como combinação linear 115

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CINAT	Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
GPEA	Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica
IFSul	Instituto Federal Sul-Rio-Grandense
MDC	Máximo Divisor Comum
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
RPM	Revista do Professor de Matemática
TCC	Trabalho de conclusão de curso
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.. 14

1 REVISÃO TEÓRICA... 16

1.1 ENGENHARIA DIDÁTICA... 16

1.2 PRODUÇÕES SOBRE EQUAÇÕES DIOFANTINAS.............................. 19

1.3 CONCEITOS MATEMÁTICOS... 23
1.3.1 Nota Histórica.. 23
1.3.2 Divisibilidade.. 24
1.3.3 Divisão Euclidiana.. 25
1.3.4 Lema de Euclides.. 28
1.3.5 Algoritmo para calcular MDC.. 28
1.3.6 Teorema de Bézout.. 30
1.3.7 Equação Diofantina Linear... 31

2 EXPERIÊNCIA DE ENSINO.. 34

2.1 ARTICULAÇÕES DOS CONCEITOS MATEMÁTICOS COM A REALIDADE DO ENSINO MÉDIO – PLANO DE ENSINO.......................... 34
2.1.1 O jogo “Escova Diofantina”... 34
2.1.2 Combinação linear.. 36
2.1.3 Equação Diofantina.. 36
2.1.4 Interpretação geométrica da equação... 40
2.1.5 Divisor, Divisor Comum e MDC.. 43
2.1.6 Divisão euclidiana.. 46
2.1.7 Teorema de Bézout.. 48
2.1.8 Solução de uma equação.. 50
2.1.9 Resolução de uma equação do jogo.. 58

2.2 RELATO DA EXPERIMENTAÇÃO... 61

2.3 ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS: A *POSTERIORI*............................. 99

CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 121

REFERÊNCIAS.. 125

APENDICE A – DOCUMENTO... 127

APÊNDICE B - PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA.. 129

INTRODUÇÃO

Este trabalho discute e investiga a viabilidade de inserir o ensino/estudo das equações diofantinas lineares no ensino médio. Estas se caracterizam por equações do tipo $ax+by=c$, com a, b e c pertencentes aos inteiros, com soluções, também, nos inteiros.

Vários problemas do cotidiano, de fácil compreensão, que são ao mesmo tempo interessantes e importantes, necessitam de soluções inteiras e podem ser abordados pela teoria das equações diofantinas. Embora não faça parte dos conteúdos usualmente abordados nos Ensinos Fundamental e Médio, nosso trabalho afirma que a teoria das equações diofantinas lineares pode ser introduzida aos alunos do ensino Médio, capacitando-os com uma maneira sistemática de resolução desses problemas, que é muito mais eficaz do que a estratégia de solução por tentativa e erro apresentada costumeiramente.

A resolução de equações diofantinas lineares utiliza basicamente conceitos previstos para o Ensino Fundamental, como o de divisor, máximo divisor comum, divisão euclidiana e equação da reta, o que torna plausível a questão de estudo. Revisitaremos esses conteúdos com mais precisão (de um ponto de vista mais formal), reformulando-os, apresentando mais propriedades e mostrando outras alternativas de abordagem e cálculo, que nos levam a entender e determinar as soluções destas equações.

O tema desta pesquisa foi sugerido pela professora-orientadora, o qual rapidamente foi aceito pela mestranda por ambas entenderem que as questões abrangidas pelas equações diofantinas lineares são relevantes e que é necessário mostrar aos alunos que podemos trocar o método de tentativa e erro por um método eficaz para resolver estas equações.

Diante deste cenário, decidimos desenvolver uma pesquisa qualitativa com o apoio da Engenharia Didática, uma vez que esta oportuniza avaliar a produção dos alunos a partir do confronto de análises de produções dos alunos em questão e da proposta do professor. Escolhemos desenvolver o trabalho no primeiro ano do ensino médio, por entender que os alunos, nesse período, já possuem o amadurecimento matemático, bem como os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento da nossa proposta e, também, porque é um dos níveis de ensino em que a mestranda atua.

A experiência de ensino foi desenvolvida pela mestranda no horário regular de aula do 1º ano do Ensino Médio-integrado de Química do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense Campus Pelotas, contando com 20 (vinte) períodos de 45 (quarenta e cinco) minutos cada.

O processo de estudo, preparação, aplicação, apreciação e discussão dos dados e de toda a investigação, foi organizado da seguinte maneira: o capítulo 1 está dividido em três seções: na seção 1.1, apresentamos um resumo do estudo feito através de seminários sobre Engenharia Didática. A seguir, a seção 1.2 é composta por uma pesquisa bibliográfica que apresenta uma análise de trabalhos de mestrado e doutorado, TCCs e artigos em revistas sobre o ensino das equações diofantinas no Brasil. A seção 1.3 traz os resultados matemáticos necessários para preparação da experimentação, feito com base nas notas de aula da professora-orientadora e do professor Eduardo Brietzke.

Terminada a fase inicial, começamos a preparação do material para sala de aula no capítulo 2. A fim de motivar os alunos a resolver equações diofantinas lineares, iniciamos todo o plano de ensino, conforme seção 2.1, com a adaptação do jogo conhecido por “escova”, para que o conceito de combinação linear ficasse claro. E, para que a partir daí, as equações diofantinas lineares e suas soluções surgissem naturalmente, juntamente com a análise *a priori* das atividades. Esta seção é seguida pela 2.2 onde fazemos um relato da experiência, logo na seção 2.3, fazemos as análises dos trabalhos dos alunos.

Nas considerações finais, discutimos nossas expectativas e discutimos as análises.

Finalizamos com dois Apêndices: o Apêndice A apresenta os documentos de autorização para implementação da sequência didática e o Apêndice B é o resultado da revisão feita nas atividades, o qual deixamos como sugestão para sala de aula.

1 REVISÃO TEÓRICA

1.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

Quando tínhamos predefinido o tema de trabalho, começamos a pensar na maneira como faríamos nossa investigação. Então nas nossas conversas, buscávamos um método que desse conta de compreender uma intervenção em sala de aula. Em uma das disciplinas do mestrado, já me tinha deparado com a Engenharia Didática através de um pequeno estudo, em grupo, sobre a visualização bi e tridimensional através de conceitos geométricos.

Assim, passamos a perceber que a Engenharia Didática poderia ser uma metodologia inspiradora uma vez que “caracteriza-se antes de mais nada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula” (ARTIGUE, 1996, p. 196).

Sentimos que a proposta desta metodologia se aproximava do que buscávamos porque nosso projeto é de justamente sugerir uma prática didática até então desconhecida como proposta de inserção na sala de aula. Por isso, o processo da Engenharia Didática pareceu que poderia nos ajudar a organizar e analisar de forma estruturada o que aconteceria quando os alunos se deparassem com esta proposta.

A Engenharia Didática, como o próprio nome sugere, muito se assemelha ao trabalho de um engenheiro, uma vez que a teoria “tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia — momentos em que é preciso construir soluções” (CARNEIRO, 2005, p. 87).

Além de organizar os passos da investigação, a Engenharia Didática também é útil para desenvolver uma sequência didática consistente, uma vez que “A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.” (CARNEIRO, 2005, p. 87). Com este intuito, nos Apêndices, indicamos uma possibilidade para sala de aula, através das reorganização das atividades utilizadas na experimentação.

Uma Engenharia Didática, segundo Artigue (1996, p. 198), inclui quatro fases: 1) análises prévias; 2) concepção e análise a *priori* das situações didáticas da engenharia; 3) experimentação; 4) análise a *posteriori* e validação.

1) Análises prévias

As análises prévias consistem em reconhecer como o tema a ser pesquisado, no caso “equações diofantinas”, está sendo tratado no âmbito educacional. Ainda, recomenda “a distinção em três dimensões:

- epistemológica: associada às características do saber em jogo;

- cognitiva: associada às características cognitivas do público ao qual se dirige o ensino;

- didática: associada às características do funcionamento do sistema de ensino.” (ARTIGUE, 1996, p. 200)

Ainda sobre esta fase, é possível dizer que ela ajuda a “ esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções. [...] A reflexão sobre essas falhas torna-se o ponto de partida para determinar condições possíveis de um ponto de funcionamento mais satisfatório. (CARNEIRO, 2005, p. 87)

De posse destas duas diretrizes, podemos direcionar o olhar para o tema que investigaremos procurando entender como e de que forma tem sido feito o ensino de “equações diofantinas lineares” na educação básica. Esta questão será desenvolvida na seção 1.2, através de uma revisão bibliográfica, onde nos deteremos na dimensão didática.

2) Concepção e análise a *priori* das situações didáticas da engenharia

Esta fase caracteriza-se pela ação do professor, em que começa a pensar sobre suas intervenções, mesmo que “Tradicionalmente, o professor está pouco presente na análise a *priori* e é considerado essencialmente do ponto de vista das suas relações com a devolução e a institucionalização.” (ARTIGUE, 1996, 206). Efetivamente, a segunda fase da Engenharia Didática constitui-se no primeiro passo do autor da sequência didática que pretende desenvolver, em que ele pode projetar as perspectivas para a experimentação.

Segundo Carneiro (2005, p.96), “É preciso descrever as escolhas efetuadas, definindo variáveis de comando, no âmbito global, mais amplo e mais geral, e no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta.” Neste sentido, apresentamos a análise a *priori* na descrição de cada atividade para sala de aula trazendo as hipóteses do que se deseja que acontecerá de aprendizado, como pode ser visto na seção 2.1.

3) Experimentação

A experimentação é onde o professor coloca em prática seu plano de ação. É a prática efetiva, onde desenvolve tudo o que previu quando da análise a *priori* e das análises prévias. É nesta fase em que serão coletados os dados para a validação da sequência. Apresentamos a terceira fase da Engenharia Didática na seção 2.2. Esta fase é pouco desenvolvida nos trabalhos teóricos da Engenharia Didática, o que pode ser confirmado por Artigue (1996, p.208) “Não me alargarei sobre a fase 3 de experimentação, que é clássica”.

4) Análise a *posteriori* e validação

A quarta fase da Engenharia Didática trata de avaliar e legitimar a experimentação. Em particular, a análise a *posteriori* consiste em olhar criticamente para as ações dos alunos diante da proposta didática. Artigue (1996, p. 208) indica que “A análise dita a *posteriori*, se apóia no conjunto dos dados recolhidos quando da experimentação”. Desta forma, elas aparecem na seção 2.3, através da apreciação das aulas gravadas, bem como o relato delas, feitos anteriormente e com as atividades em sala de aula e em casa desenvolvidas pelos alunos, que foram registradas e recolhidas.

Por outro lado, a validação trata de olhar para o que foi previsto pelo professor e efetivado pelos alunos de forma que nenhum fator externo a este processo influencie na análise da experimentação como um todo. “A validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori*.” (ARTIGUE, 1996, p. 197). Por isso é fundamental que o professor tenha em vista o processo da sequência didática em questão. A validação aparece no capítulo 4, na forma de considerações finais, buscando um paralelo entre as análises indicadas anteriormente para apontar de que forma as equações diofantinas lineares podem (ou não) configurar-se como proposta para o ensino médio.

1.2 PRODUÇÕES SOBRE EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Este capítulo traz o que já foi produzido nos programas de mestrado e doutorado, um TCC e artigos relacionados com o tema Equações Diofantinas. Para isso, foi realizada uma busca por dissertações e teses sobre o assunto em site de busca, bem como nas bibliotecas das universidades em que existem programas de pós-graduação na área da Educação Matemática. Foram encontradas 4 (quatro) dissertações, que tratam especificamente sobre as equações diofantinas. Estas foram utilizadas e discutidas, uma vez que se tornaram o passo inicial do trabalho que aqui será apresentado.

Utilizar-se-á a ordem cronológica em que foram desenvolvidas as dissertações, entendendo que uma complementa a outra e, também, para visualizar como se tem pensado sobre as equações diofantinas no ensino médio.

Começaremos com a dissertação intitulada "As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio" (Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2006), desenvolvida por Sílvio Barbosa de Oliveira. Essa dissertação busca descobrir se o objeto de saber "equações diofantinas lineares" é considerado objeto de ensino nas propostas curriculares para o ensino médio em documentos oficiais como Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e Parâmetros Curriculares Nacionais "Mais" (PCN+), bem como em duas coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM/2004). Para isso, o autor utilizou a análise de conteúdo e concluiu que nem nos documentos oficiais nem nos livros didáticos considerados este assunto é abordado como objeto de ensino.

"A única resolução proposta pelos autores privilegia o método de tentativa e erro, sem explicação sobre algumas das afirmações feitas." (OLIVEIRA, 2006, p. 60) A respeito dos documentos oficiais, Oliveira(2006, p. 91) afirma que "Concluo, portanto, que não há qualquer referência ao objeto de saber "equações diofantinas lineares" feita tanto no PCNEM como nos PCN+, ou seja, este assunto não é considerado objeto de ensino pelos autores desses documentos."

É possível observar um descompasso entre o proposto pelos documentos oficiais e a tendência do livro didático, pois, mesmo com a ausência do tema nos documentos, ele aparece em alguns problemas propostos pelos livros, resolvidos pelo método de tentativa e erro, apesar de poderem ser resolvidos via equações diofantinas.

A dissertação "As equações diofantinas lineares e o professor de matemática do ensino médio" (Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2007), de Eduardo Sad da Costa, como a anterior, também faz um estudo qualitativo, porém seu foco é sobre a possível prática do professor de matemática. O autor investiga, através de entrevistas semiestruturadas, a maneira como o professor trata a resolução de problemas em sala de aula, para verificar se as equações diofantinas são contempladas, mesmo que implicitamente.

> Considero que embora os professores entrevistados afirmassem trabalhar com problemas de matemática discreta modeláveis, via equação diofantina linear, nenhum deles deu indícios de trabalhar com seus alunos utilizando conhecimento das propriedades dessas equações para decidir se as mesmas têm solução e quais seriam essas soluções. (COSTA, 2007, p. 114)

O autor pôde verificar que os professores não trabalham com a teoria das equações diofantinas em sala de aula, através de suas entrevistas colocando os professores em xeque. Sua proposta baseou-se em aplicar os questionários e estes já vinham com questões para serem resolvidas pelo professor que estava sendo entrevistado, para que ele fizesse uma resolução que poderia ser utilizada por seus alunos.

A dissertação desenvolvida por Wagner Marcelo Pommer, em 2008, trata do tema "Equações Diofantinas Lineares: um desafio motivador para alunos de ensino médio" (Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2008) e indaga a ação dos alunos diante de problemas que envolvem equações diofantinas lineares. Ainda, Pommer (2008, p. 12) tem como objetivo reutilizar conceitos estudados pelos alunos no ensino fundamental no que se refere à teoria dos números.

Utilizando a Engenharia Didática como ferramenta metodológica, foi desenvolvida, aplicada e analisada uma sequência didática que fez uso de jogos como ferramenta motivadora para resolução de problemas.

"...concluo que é possível a alunos de ensino médio desenvolver conhecimentos envolvendo equações diofantinas lineares..." (POMMER, 2008, p.123), o autor finaliza sua investigação de forma otimista, uma vez que a prática em sala de aula validou a questão da reutilização de conceitos conhecidos dos alunos, proporcionou a alunos de ensino médio debruçar-se sobre problemas discretos e ampliar seus conhecimentos através da construção (em conjunto) das soluções de equações diofantinas, bem como a análise da não existência de solução.

Estas produções advindas de um grupo de pesquisa da PUC (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo), denominado GPEA (Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica), mostram que a implantação das equações diofantinas na escola parece possível e indica (POMMER, 2008, p.122) que, apesar de, no ensino médio, os alunos já estarem apropriados

dos pré-requisitos, os de anos mais adiantados apresentam mais facilidade para a compreensão da proposta de resolução de equações diofantinas, o que não exclui a sua utilização em outros níveis. Estas dissertações instigam ainda mais a nossa curiosidade de verificar a possibilidade de inclusão da teoria das equações diofantinas no ensino médio, uma vez que nos parece que esta investigação fecharia um ciclo iniciado pelo GPEA e que foram descritos anteriormente.

A dissertação "Equações Diofantinas Clássicas e Aplicações" (Mestrado Profissional em Matemática, UNICAMP/SP, 2009), desenvolvida por Filardes de Jesus Freitas da Silva, retoma a parte teórica das equações diofantinas com suas propriedades e teoremas, apresentando alguns exemplos.

Além das dissertações apresentadas anteriormente, convém tratar do trabalho de conclusão de curso (TCC) de Licenciatura em Matemática – UFRGS, de Guilherme Ferreira Monteiro em 2010, uma vez que começamos a pensar juntos, com encontros promovidos pela orientadora desta dissertação, sobre as equações diofantinas lineares, principalmente no que se refere à escolha de uma metodologia adequada para inserção deste tema na sala de aula.

O TCC de Monteiro (2010) verifica a aplicabilidade das equações diofantinas lineares no ensino médio através de uma oficina realizada em cinco encontros numa escola de Porto Alegre, cujo ingresso se dá através de processo seletivo. O trabalho buscou dar um tratamento bastante teórico aos conteúdos, com iniciação a demonstrações e comprovação de cada resultado enunciado.

Esse trabalho indicou parecer viável apresentar o tema no ensino médio, apesar de não ter sido explorado numa turma regular e por os alunos estarem em período de avaliações – o que prejudicou a sua presença regular, serviu como uma investigação introdutória à dissertação aqui apresentada, uma vez que o autor aponta "Sobre as equações diofantinas lineares propriamente falando, os resultados dos testes revelaram que a grande maioria dos alunos compreendeu o método utilizado para se encontrar todas as soluções inteiras dessa equação." (MONTEIRO, 2010, p.51).

O trabalho desenvolvido por Claudia Lisete Oliveira Groenwald e Rosvita Fuelber Franke, intitulado Equações diofantinas na formação de professores de matemática, apresentado no IX Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), propõe aos licenciandos em matemática questões resolúveis via equações diofantinas lineares e promove discussões sobre as soluções e as estratégias utilizadas por eles utilizadas. Concluíram que, assim como os alunos da educação básica, os alunos de licenciatura também utilizam o método de tentativa e erro, por desconhecerem o conteúdo.

Observaram que os alunos que já tinham cursado mais disciplinas apresentaram mais destreza para as resoluções, mas não utilizaram os resultados da teoria das equações diofantinas.

A Revista do Professor de Matemática (RPM) traz 3 artigos na edição 8 que tratam da busca por soluções inteiras em diferentes situações. Antonio Carlos Patrocínio apresenta o primeiro artigo, “Soluções inteiras”, no qual apresenta dois problemas que necessitam de soluções inteiras. O primeiro problema é resolvido a partir de um sistema e o segundo é não linear e consiste em mostrar que existem apenas 5 poliedros regulares. Ambos são resolvidos sem o uso das propriedades das equações diofantinas lineares.

A seguir, na mesma edição da RPM, Sergio Noriaki Sato e Carlos Isnard buscam soluções inteiras de forma genérica em dois artigos distintos e respectivamente intitulados, “Soluções inteiras positivas” e “Soluções inteiras”. Embora estes trabalhos não tratem especificamente do estudo das equações diofantinas lineares, eles indicam a importância de determinar soluções inteiras e trazem exemplos interessantes.

Ambos tratam de uma fórmula da ótica, sendo que o primeiro encontra soluções inteiras positivas, utilizando apenas a resolução de equação do 2° grau. O segundo generaliza as equações encontradas para inteiros quaisquer e menciona que a equação considerada vem sendo redescoberta e publicada.

Por fim, Gilda La Rocque e João Bosco Pitombeira, na edição 19 da RPM, apresentam o artigo “Uma equação diofantina e suas soluções”. O material, desenvolvido como parte de atividades com professores do 2° grau de um projeto da PUC – Rio, contém três problemas concretos para motivar o estudo das equações diofantinas lineares e apresenta, numa linguagem acessível, as suas propriedades e o teorema que trata da existência de soluções. A partir da solução particular, encontrada pelo algoritmo de Euclides, obtém a solução geral na forma algébrica.

No decorrer da análise destes materiais, percebemos que o tema “equações diofantinas lineares” tem sido matéria de investigação de diferentes pesquisadores. E, além disso que as equações diofantinas lineares parecem estar na superfície do conteúdo programático escolar, uma vez que situações que podem ser trabalhadas utilizando suas propriedades são apresentadas para os alunos.

Os trabalhos analisados e anteriormente apresentados instigam o questionamento: É possível desenvolver este o estudo/ensino de equações diofantinas lineares em turma regular? Assim, nos apoiaremos nestes trabalhos para tentar entender se este tema é, ou não, relevante para o nível de ensino onde os problemas aparecem.

1.3 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, apresentamos um resumo do nosso estudo sobre equações diofantinas. Incluímos as definições e os resultados mínimos para a compreensão do tema, com algumas demonstrações.

As demonstrações aqui apresentadas não serão estudadas na experimentação, embora, em alguns casos, consigamos, através de exemplos e discussões, construir a ideia do funcionamento da demonstração. Utilizaremos "*N*", para o conjunto dos números naturais e "*Z*", para o conjunto dos números inteiros e quando um deles vier acompanhado de "*", o número zero não pertencerá ao respectivo conjunto.

1.3.1 Nota histórica

As equações diofantinas são assim chamadas em homenagem a Diofanto de Alexandria, que se acredita ter vivido por volta de 250 a.C. Pouco se sabe da história de Diofanto. Na Antologia Grega, segundo Eves (2004, p. 225), consta no sumário de um epitáfio que "Diofanto passou 1/6 de sua vida como criança, 1/12 como adolescente e mais 1/7 na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai".

Apesar das poucas informações sobre Diofanto, seu trabalho foi de extrema importância e muitas vezes ele é considerado como o pai da álgebra, embora tenha influência maior na teoria moderna dos números (CARVALHO, ROCQUE, 1991, p.47). Suas principais obras são : Aritmética, Sobre Números Poligonais e Porismas, que, ao longo do tempo, deram origem a outros tantos estudos.

Sobre as equações diofantinas, Eves (2004, p. 272) afirma que Diofanto aceitava soluções racionais e satisfazia–se com uma única solução. Também indica não só o interesse dos hindus por essas equações com soluções nos inteiros, assim como o reconhecimento da autoria da demonstração da condição para a existência de soluções. Ainda, Milies (2001, p.97) adverte que Fermat foi o primeiro a chamar atenção para questões aritméticas estritamente no conjunto dos números inteiros em 1657 e, portanto, deveria ter seu nome relacionado às equações deste tipo.

1.3.2 Divisibilidade

1.3.2.1 Definição de divisor

Sejam $a, b \in Z$, $b \neq 0$ dizemos que b é um divisor de a, ou que b divide a ou que a é múltiplo de b, se existe $d \in Z^*$, tal que $a = db$. Notação: $b \mid a$.

Note que: 1) Se $b \mid a$, então $-b \mid a$, logo sempre teremos os divisores positivos e os seus simétricos. Em particular $|a|$ é o maior divisor de a.

2) $0 = 0 \cdot b, \forall b \in Z.$ Portanto, $b \mid 0$, $\forall b \in Z.$

1.3.2.2 Propriedades de divisibilidade

As seguintes propriedades são válidas.

D_1: $\forall a, b \in Z^*, a \mid b \text{ e } b \mid a \Rightarrow |a| = |b|$;

D_2: $\forall a, b, c \in Z^*, a|b \text{ e } b|c \Rightarrow a|c$ (transitiva);

D_3: $\forall a, b, c \in Z^*,\ a|b \text{ e } a|c \Rightarrow a|(bx + cy), \forall x, y \in Z$;

Em particular $a|b \Rightarrow a|bx, \forall x \in Z$ e $a \neq 0, a|b \text{ e } a|c \Rightarrow a|(b + c)$;

D_4: $\forall a, b, c, d \in Z, a \neq 0, c \neq 0, a|b \text{ e } c|d \Rightarrow ac|bd$

D_5: $\forall a, b, c \in Z, a \neq 0 \text{ e } a|(b + c) \Rightarrow [a|b \Leftrightarrow a|c]$.

Demonstração:

D_1: Suponhamos que $a \mid b$ e $b \mid a$, logo pela definição de divisibilidade, $\exists u, v \in Z$ tais que $b = au$ e $a = bv$. Substituindo a segunda igualdade na primeira, obtemos $b = au = bvu$. Como $b \neq 0$, cancelamos b e obtemos $1 = vu$, logo $u = v = 1$ ou $u = v = -1$, o que implica $|a| = |b|$.

D_2: Suponhamos que $a \mid b$ e $b \mid c$, logo, $\exists u, v \in Z$ tais que $b = au$ e $c = bv$. Substituindo a primeira igualdade na segunda, temos $c = bv = auv$, assim $a \mid c$.

D_3: Suponhamos $a \neq 0$, $a \mid b$ e $a \mid c$, logo, pela definição de divisibilidade $\exists u, v \in Z$ tais que $b = au$ e $c = av$. Assim $bx + cy = aux + avy = a(ux + vy)\ \forall x, y \in Z$. Logo, $a \mid (bx + cy)$, $\forall x, y \in Z$.

Obs.: Ainda a partir de D_3, dizemos que $bx+cy$ é uma combinação linear de b e c, ou de x e y, ou de b e y ou de x e c.

D_4: Suponhamos que $a \mid b$ e $c \mid d$, logo, $\exists u,v \in Z$ tais que $b = au$ e $d = cv$. Fazendo bd, temos $bd = (au)(cv) = (ac)(uv)$, o que implica em $ac \mid bd$.

D_5: Suponhamos que $a,b,c \in Z$, $a \neq 0$ e $a \mid (b+c)$. Então, $\exists$ $t \in Z$, tal que $b+c = at$. Temos que mostrar que vale a equivalência $a \mid b \Leftrightarrow a \mid c$.

($\Rightarrow$) Se $a \mid b$, então $\exists$ $u \in Z$, $b = au$, $au + c = at$, assim $c = at - au = a(t-u)$. Assim, $\exists v = t - u \in Z$, tal que $c = av$. Então, da definição de divisibilidade, segue que $a \mid c$.

($\Leftarrow$) similar ao caso anterior

1.3.3 Divisão Euclidiana

1.3.3.1 Algoritmo da Divisão de Euclides

Sejam $a,b \in N$, com $b \neq 0$. Então, existem e são únicos $q,r \in N$ tais que $a = qb + r$, com $r < b$.

A divisão euclidiana também é válida em Z:

1.3.3.2 Teorema

Sejam $a,b \in Z$ com $b \neq 0$. Então, existem e são únicos q, $r \in Z$ tais que $a = qb + r$, com $0 \leq r < |b|$.

Demonstração

Dividimos a demonstração em quatro casos e mostraremos apenas o primeiro.

(i) $a \geq 0$ e $b > 0$.

Por indução, provemos primeiramente a existência.

Base de indução: $P(0)$ é verdadeira

De fato, se $a=0$, tomamos $q=0$ e $r=0$.

Passagem de indução: Suponhamos que, para algum $a \in Z$, $P(i)$ é verdadeira para todo $i \leq a$. Vamos mostrar que $P(a+1)$ também é verdadeira.

Dividimos em dois casos.

Se $a+1<b$, temos $q = 0$ e $r = a+1$.

Se $a+1 \geq b$, então o elemento $(a+1-b) \in Z$ e satisfaz $a+1-b \leq a$ $(b>0 \rightarrow 1-b<0)$. Então, pela hipótese de indução, existem q', $r' \in Z$ tais que $a+1-b = q' \cdot d+r'$ e $r'<b$. Segue que $a+1 = b+q' \cdot b+r' = (q'+1) \cdot b+r'$.

Então, definindo $q = q'+1$ e $r' = r$, temos que existem q, $r \in Z$ tais que $a+1 = qb+r$ e $r<b$, ou seja, $P(a+1)$ também é verdadeira.

Logo, $P(a)$ é verdadeira para todo $a \in Z$. Desse modo a existência está provada.

Passemos à prova da unicidade.

Sejam $q_1, q_2, r_1, r_2 \in Z$ tais que $a = q_1 \cdot b + r_1$, $a = q_2 \cdot b + r_2$, $r_1 < b$ e $r_2 < b$.

Precisamos mostrar que $r_1 = r_2$ e $q_1 = q_2$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $r_1 \leq r_2$ (temos um par de restos, reservamos o símbolo r_1 para o menor dos dois). Assim, $r_2 - r_1 \in Z$. Da igualdade $q_1 \cdot b + r_1 = a = q_2 \cdot b + r_2$ e da definição de subtração, temos $q_1 \cdot b = q_2 \cdot b + (r_2 - r_1)$. Como $b | q_1 \cdot b$, temos que b divide a soma $b | (q_2 \cdot b + (r_2 - r_1).)$ e b divide a parcela $b | q_2 \cdot b$. Logo, $b | (r_2 - r_1)$. Mas $r_2 - r_1 \leq r_2 < b$. Como $b | (r_2 - r_1)$, se $r_2 - r_1$ fosse diferente de 0, então $b \leq r_2 - r_1$, o que contradiz que $r_2 - r_1 < b$, isto é $r_2 = r_1$. Segue que $q_1 \cdot b = q_2 \cdot b$. Como $b \neq 0$, pela lei do cancelamento, concluímos que $q_1 = q_2$.

Note que a exigência de termos $0 \leq r < |b|$ é fundamental, pois, caso contrário, perderíamos a unicidade do resto. Veja o exemplo que ilustra esta situação.

Exemplo:

$5 = 3 \cdot 1 + 2$

$5 = 3 \cdot 2 + (-1)$

$5 = 3 \cdot 3 + (-4)$

$5 = 3 \cdot 5 + (-10)$

$5 = 3 \cdot 6 + (-13)$

...

1.3.3.3 Definição de divisor comum

Um divisor comum de *a* e *b* é um número inteiro que é divisor tanto de *a* quanto de *b*.

1.3.3.4 Definição de MDC

Sejam $a, b \in Z$ não nulos. O maior elemento do conjunto dos divisores de *a* e *b* é chamado de Máximo Divisor Comum de *a* e *b* que denotados aqui por MDC(*a*, *b*).

1.3.3.5 Propriedades do MDC

Sejam $a, b \in Z$ e $a \neq 0$. Então,

M_1: MDC(*a*, *0*) = |*a*|,

M_2: MDC(*a*, *1*) = *1*,

M_3: MDC(*a*, *a*) = |*a*|,

M_4: MDC(*a*, *b*) = MDC(*b*, *a*),

M_5: *a* divide *b* $\Leftrightarrow$ MDC(*a*, *b*) = |*a*|,

M_6: MDC(a, b) = MDC(|*a*|, |*b*|),

M_7: $d|ab$ e MDC(*d*, *a*) = 1 $\Rightarrow d|b$.

Alguns comentários

M_1: $|a|\,|0$ e |*a*| é o maior divisor de *a*.

M_2: O conjunto dos divisores comuns de *a* e 1 é formado pelos números 1 e -1, pois o conjunto de divisores do 1 é formado pelo 1 e -1, que pertencem ao conjunto dos divisores de *a*, já que 1 divide *a*. Logo MDC (*a*, 1) = 1.

M_3: |*a*| é o maior divisor de *a*

M_5: ($\Rightarrow$) Se *a* divide *b*, então *a* e |*a*| são divisores de *b*. Como |*a*| é o maior divisor de *a* e |*a*| é divisor de *b*, então |*a*| é o maior divisor de *a* e *b*.

M_7: MDC(*d*,*a*)=1, então, pelo Teorema de Bézout – apresentado posteriormente, $1=\alpha d + \beta a$ e $b=\alpha bd + \beta ab$. Como $d|ab$, $ab=dt$, assim $b=\alpha bd + \beta dt = d(\alpha b + \beta t)$, portanto $d|b$.

1.3.3.6 Proposição

Sejam a, b inteiros não simultaneamente nulos e $d \in Z$. Se d divide MDC (a, b), então d divide a e d divide b.

Demonstração:
Seja D = MDC(a, b). Por definição, D divide a e D divide b, logo existem k, $l \in Z$ tais que $a = k$D e $b = l$D. Se d divide D, então existe $t \in Z$ tal que $D = td$. Substituindo, obtemos $a = k$D $= ktd$, ou seja, d divide a e $b = l$D $= ltd$, ou seja, d divide b.

1.3.4 Lema de Euclides

Sejam a, $b \in Z$ e $n \in N$. Então, MDC(a, $b+na$)=MDC(a, $b–na$)=MDC(a, b).

Demonstração:
Basta provar que o conjunto de divisores de a e $b+na$ é igual ao conjunto de divisores de a e b.

($\subseteq$)

Seja d pertencente ao conjunto de divisores de a e $b+na$. Então d divide a e d divide $b+na$, logo, d divide $(b+na) - na = b$, e, assim, d pertence ao conjunto de divisores de a e b.

($\supseteq$)

Seja t pertencente ao conjunto de divisores de a e b. Então t divide a e t divide b, logo t divide na, $\forall\, n \in Z$ e t divide $b+na$. Assim, t pertence ao conjunto de divisores de a e $b+na$.

1.3.5 Algoritmo para calcular o MDC

Por M_6: MDC(a,b) = MDC($|a|$, $|b|$), logo podemos sempre tomar a e b inteiros positivos.

Dados a, $b \in N$ não simultaneamente nulos, o Lema de Euclides permite que troquemos MDC(a, b) pelo MDC entre a e b menos um múltiplo de a (que é um número menor do que b). Note que o resto da divisão de a por b tem a propriedade desejada, logo esse será o "b

menos um múltiplo de a" escolhido. Organizando esse processo, temos um algoritmo para calcular o MDC entre dois números naturais quaisquer não simultaneamente nulos.

Usando este algoritmo, podemos trocar o MDC inicial por um mais simples e isso pode ser feito tantas vezes quantas forem necessárias até chegarmos a um MDC trivial: M_1, M_2 ou M_5.

Algoritmo:

Sejam $a, b \in N$ não simultaneamente nulos. Suponhamos, que $a \leq b$. Pelo Algoritmo da Divisão existem e são únicos $q_1, r_1 \in N$ tais que $b = a \cdot q_1 + r_1$ com $r_1 < a$. Pelo Lema de Euclides,

$$\text{MDC}(a, b)=\text{MDC}(a, b-aq_1)=\text{MDC}(a, r_1).$$

Se $r_1=0$, já temos o máximo divisor comum, pois MDC(a, b)=MDC(a, 0)=a, por M_1.

Se $r_1 \neq 0$, continuamos o processo de divisão, dividindo a por r_1. Pelo Algoritmo da Divisão, existem e são únicos $q_2, r_2 \in N$ tais que $a= r_1 \cdot q_2 + r_2$ com $r_2 < r_1$. Assim, pelo Lema de Euclides

$$\text{MDC}(a, b)=\text{MDC}(a, r_1)=\text{MDC}(r_1, a)= \text{MDC}(r_1, a- r_1 \cdot q_2)= \text{MDC}(r_1, r_2).$$

Se $r_2=0$, já temos o máximo divisor comum, pois MDC(a, b)= MDC(r_1, r_2)= MDC(r_1, 0)= r_1. Se $r_2 \neq 0$, continuamos o processo de divisão, dividindo r_1 por r_2. Vamos obter um quociente q_3 e um resto $r_3 < r_2$.

Esse processo é finito, pois existe $n \in N^*$ tal que $r_{n+1}=0$. De fato, como $a>r_1>r_2>r_3$..., e todos esses restos são positivos, se este processo não parasse em algum momento, obteríamos uma sequência de números naturais infinita e decrescente, o que é impossível pelo Princípio da Boa Ordenação. Então,

$$\text{MDC}(a, b)= \text{MDC}(r_n, r_{n+1})= \text{MDC}(r_n, 0)= r_n.$$

Portanto, MDC(a, b) é igual ao último resto antes de obtermos resto 0, ou seja, o primeiro resto que é obtido e tem a propriedade de que divide o resto anterior.

1.3.6 Teorema de Bézout

Dados $a, b \in Z$, sempre podemos escrever o MDC(a, b) como uma combinação linear de a e b, ou seja, existem $x, y \in Z$, tais que

$$\text{MDC}(a, b) = ax + by.$$

Iniciamos tomando a, b nos naturais e retomando o algoritmo da seção 1.3.5. Vamos comprovar o teorema no caso em que $r_3|r_2$. Neste caso,

$b=aq_1+r_1$, logo $r_1=b-aq_1$

$a=r_1q_2+r_2$, logo $r_2=a-r_1q_2$

$r_1=r_2q_3+r_3$, logo $r_3=r_1-r_2q_3$

Como $r_3|r_2$, temos que MDC(a, b)=r_3 substituindo os valores, obtemos

MDC (a, b)= $r_3=r_1-r_2q_3=$

$r_1-(a-r_1q_2)q_3=$

$(1+q_2q_3)\,r_1-aq_3=$

$(1+q_2q_3)\,(b-aq_1)-aq_3=$

$(1+q_2q_3)b-(1+q_2q_3)aq_1-aq_3=$

$(1+q_2q_3)b-(q_1+q_1q_2q_3+q_3)a$

Tomando $\eta=1+q_2q_3$ e $\varepsilon=q_1+q_1q_2q_3+q_3$, com $\varepsilon, \eta \in N$, temos MDC (a, b)= $\eta b-\varepsilon a$.

Tomando, agora, a e b inteiros, escrevemos o MDC de a e b como uma combinação linear de $|a|$ e $|b|$ com coeficientes em N, já que MDC(a, b)=MDC($|a|$, $|b|$), ou seja existem ε, η, γ, $\delta \in$ N tais que MDC(a, b)= $\varepsilon|a|-\eta|b|=\gamma|b|-\delta|a|$. Assim, se tomamos os coeficientes em Z, não necessitamos do módulo, nem da subtração e, portanto, também não necessitamos dos dois casos. Teremos, portanto, x, y tais que MDC(a, b)= $xa+yb$.

Exemplificações podem ser vistos em 2.1.7.

1.3.7 Equação Diofantina Linear

1.3.7.1 Definição de Equação Diofantina Linear

Sejam $a, b, c \in Z$ com a e b não ambos nulos, a equação $ax + by = c$ é chamada equação diofantina linear, com x e y variáveis.

1.3.7.2 Existência de solução de uma Equação Diofantina Linear.

Teorema

Sejam $a, b, c \in Z$ com a e b não ambos nulos e seja $D = MDC(a, b)$. Então, a equação $ax + by = c$ tem solução em Z se e somente se $D \mid c$.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$

Suponhamos que $\exists x, y \in Z$ tais que $ax + by = c$. Como $D|a$ e $D|b$, temos que D divide qualquer combinação linear e, portanto, $D|(ax + by)$, ou seja, $D| c$.

$(\Leftarrow)$

Suponhamos que $D| c$. Então $\exists e \in Z$ tal que $De = c$. Mas $D = MDC(a, b)$. Logo, $\exists\, \alpha, \beta \in Z$ tais que $a\alpha + b\beta = D$. Multiplicando por e, obtemos

$$ae\alpha + be\beta = De = c.$$

Tomando $x_0 = e\alpha \in Z$ e $y_0 = e\beta \in Z$. Temos,

$$a x_0 + b y_0 = c,$$

ou seja, a equação diofantina tem solução em Z.

Note que, se $a = 0$, temos $by = c$ e $b = MDC(0, b) = MDC(a, b)$: Logo, se $b| c$ então $y = \frac{c}{b}$ $x \in Z$ qualquer nos dá infinitas soluções de $ax + by = c$. Análogo para $b = 0$. Assim, podemos supor, de agora em diante, que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

1.3.7.3 Solução de uma equação

Estudamos primeiro o caso $MDC(a, b)=1$.

Teorema

Sejam *a, b, c*$\in$ Z, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e tais que MDC(*a*, *b*) = 1. Escrevendo $a\alpha + b\beta = 1$, com α, $\beta \in$ Z, temos que $x_0 = \alpha$ c, $y_0 = \beta$ c é uma solução da equação

$$ax + by = c$$

As demais soluções inteiras são dadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \\ \quad t \in \mathrm{Z} \end{cases}$$

Demonstração:

Começamos escrevendo $a\alpha + b\beta = 1$, com *x*, *y*$\in$ Z. Multiplicando por *c*, obtemos $a\alpha c + b\beta c = c$, ou seja, x_0 e y_0 definidos por

$$x_0 = \alpha c \text{ e } y_0 = \beta c$$

nos dá uma solução da equação $ax + by = c$. A seguir, sejam *x* e *y* definidos por $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, $t \in$ Z. Então, $ax + by = a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + abt + by_0 - abt = ax_0 + by_0$. É imediato ver que *x* e *y* também formam uma solução da equação $ax + by = c$.

Falta mostrar que não existem soluções de outro tipo, isto é, que qualquer que seja o par x_1 e y_1 solução da equação $ax+by=c$, $\exists\, t \in Z$ tal que $x_1 = x_0 + bt$ e $y_1 = y_0 - at$. Assim ficará provado que $\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \\ \quad t \in \mathrm{Z} \end{cases}$ inclui todas as soluções inteiras de $ax+by=c$.

De fato, x_1 e y_1 é uma solução de $ax+by=c$, então

$$ax_1 + by_1 = c = ax_0 + xy_0$$

E segue que

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$$

Mas $a|\, a(x_1 - x_0)$ implica que $a|\, b(y_0 - y_1)$. Como MDC(*a*, *b*)=1, concluímos por M_7 que $a|(y_0 - y_1)$ e, portanto, $\exists\, t \in$ Z tal que $at = y_0 - y_1$, ou seja, $y_1 = y_0 - at$. Substituindo $at = y_0 - y_1$ em $a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$, temos que $a(x_1 - x_0) = bat$, ou ainda, $x_1 - x_0 = bt$, ou seja, $x_1 = bt + x_0$

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at\,. \\ \quad t \in \mathrm{Z} \end{cases}$$

Note que em $ax_1+by_1 = c=ax_0+by_0$ também podemos ter $b(y_1 - y_0)=a(x_0 - x_1)$, o que nos leva as soluções $\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$ que geram as mesmas soluções que $\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$, basta trocar t por $-t$.

Obs.: No caso de MDC(a, b) $\neq 1$, divide-se a equação dada pelo MDC(a, b) para recairmos no caso recém-apresentado.

> O leitor sabe que uma equação do tipo $ax+by=c$, em que se admite valores reais para as variáveis x e y, representa uma reta no plano cartesiano. Assim, podemos interpretar a resolução da equação diofantina como o problema de determinar os pontos da reta que têm ambas coordenadas inteiras. (MILIES, 2001, p.98)

Na Geometria Analítica, a equação $ax + by = c$ representa uma reta r. Ao procurarmos soluções em Z da equação $ax + by = c$, na verdade, estamos perguntando se a reta r, por ela representada, contém pontos que tenham ambas as coordenadas inteiras. Ainda, existem equações do tipo $ax + by = c$, sem soluções inteiras, que, geometricamente, evitam todos os pontos do reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

2 EXPERIÊNCIA DE ENSINO

2.1 ARTICULAÇÕES DOS CONCEITOS MATEMÁTICOS COM A REALIDADE DO ENSINO MÉDIO – PLANO DE ENSINO

Nossa escolha em sala de aula é de buscar construir as definições, teoremas e lemas, com base nos exemplos que aparecerem a partir do jogo “Escova Diofantina” ou de situações colocadas pela docente-mestranda para levar os alunos a concluírem ou convencerem-se dos conceitos matemáticos, da maneira mais natural possível. Esta seção foi escrita no infinitivo, pois foi utilizada como “roteiro” pela mestranda na aplicação da sequência didática.

As análises a *priori* consistem nas previsões que fizemos em torno das ações para a sala de aula, constando o objetivo da atividade. Com intuito de facilitar a compreensão, inserimos cada Folha de atividade analisada, na forma reduzida, ao lado da respectiva analise a *priori*.

2.1.1 O jogo “Escova Diofantina”

Começar as atividades enfatizando que o foco é estudar alguns tipos de equações. Para isso, motivar este início através do jogo “escova diofantina”, dizer que o jogo é parecido com o jogo “escova”, mas que tem algumas particularidades nas regras, conforme a Folha 1 das atividades .

Análises a *priori*

A Folha 1, Figura 1, foi utilizada no primeiro dia e consiste em explicar o jogo “escova diofantina”, através das regras apresentadas. Além disso, tem por objetivo convidar os alunos para as atividades de forma inusitada e divertida, para que eles sintam que o que será estudado – a matemática envolvida – pode ser bastante interessante se a ela se dedicarem.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ______________________________ **FOLHA 1**

ESCOVA DIOFANTINA

REGRAS DO JOGO:

Material necessário

1 baralho comum
Retire do baralho as figuras (rei, dama e valete) dos quatro naipes e também os coringas. Agora estas com um baralho de 40 cartas composto por quatro seqüências de Ás a 10.

Descrição

Embaralhe as cartas e distribua 3 para cada jogador. Abra as próximas 4 cartas e coloque-as no centro da mesa desviradas. O monte restante é posto de lado.

O primeiro a jogar deve procurar uma carta em sua mão que somada a uma das cartas da mesa dê um total de 15. (**ATENÇÃO**: poderão ser utilizados no máximo 2 números diferentes)

O jogador coloca à sua frente as cartas pegas da mesa, assim como a carta de sua mão que permitiu a soma de 15, com a face voltada para baixo. Caso ele não consiga pegar nenhuma carta da mesa, deve simplesmente descartar na mesa uma das cartas de sua mão. Se o jogador conseguir pegar todas as cartas restantes na mesa de uma única vez o jogador fez uma *escova diofantina*. Ao colocar na sua frente as cartas pegas, ele deverá colocar uma delas com a face voltada para cima e perpendicular ao monte de cartas voltadas para baixo. Será o sinal de que ele fez uma *escova diofantina*. Para cada *escova diofantina* feita, o mesmo procedimento deverá ser repetido.

Quando os jogadores tiverem utilizado suas 3 cartas, uma nova mão de 3 cartas é distribuída, utilizando o monte que havia sido posto de lado. A partida prossegue da mesma maneira até que o monte de cartas termine. Aí é feita a contabilização dos pontos.

Contabilização dos pontos:

Cada *escova diofantina* vale 1 ponto
Os pontos conquistados por cada jogador (ou equipe) são anotados em uma folha, as cartas são embaralhadas e uma nova mão tem início, ao término da qual os pontos são novamente somados. Vence a partida quem atingir 5 pontos.

Figura 1 – Folha 1 das atividades .

Para que os alunos entendam bem como jogar, pedir que leiam as regras no grande grupo e façam uma rápida simulação do jogo para explicar as dúvidas que forem aparecendo para todos os alunos. Destacar a importância do preenchimento da Folha 2 das atividades , com as jogadas que forem aparecendo.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ______________________________

FOLHA 2

REGISTRO DAS JOGADAS

1ª CARTA	QUANTIDADE DA 1ª CARTA	2ª CARTA	QUANTIDADE DA 2ª CARTA	FAZER A SOMA (REGISTRAR)

Figura 2 – Folha 2 das atividades .

Análises a *priori*

A Folha 2 , Figura 2 ao lado, versa sobre os registros das jogadas realizadas no jogo "escova diofantina" e foi utilizada no primeiro e segundo dias. Esta Folha tem uma função especial, pois é a partir dela que vamos definir combinação linear, já que ela induz esta escrita na última coluna. Ainda, a escrita como combinação linear ajudará na construção da equação que modela o jogo.

Fazer isso, também, como exemplo, na simulação e separar os alunos para que posteriormente indiquem as jogadas que aparecerem com pares de cartas. Por exemplo, dizer que o grupo 1 vai registrar as jogadas com as cartas "ás" (que vale 1 - um) e 2 e assim para outros grupos com outras cartas.

2.1.2 Combinação linear na experimentação

Após aplicar o jogo "escova diofantina", separar as apresentações por grupo/cartas da última coluna da tabela de registros do jogo, conforme Folha 2 das atividades . A partir das apresentações dos alunos dos registros das possibilidades de jogadas, construir a definição de combinação linear, partindo das escritas das jogadas apresentadas e registradas na Folha de registro das jogadas . Usar, por exemplo, as jogadas:

Se tivermos 2 cartas de número 6 e 3 cartas de número 1, obtemos

$$6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 15, \text{ mas também}$$

Se tivermos 2 cartas de número 7 e 1 carta de número 1, obtemos

$$1 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 15,$$

Conseguimos escrever o número 15 utilizando diferentes números, através das operações de soma e multiplicação entre eles. A esta situação chamamos de combinação linear[1].

Exemplo,

$$1 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 15.$$

Dizemos que 15 é uma combinação linear de 1 e 7.

2.1.3 Equação Diofantina na experimentação

Definir equação diofantina, através da generalização da escrita das equações que modelam o jogo "Escova Diofantina", da equação que modela uma situação hipotética em que era possível utilizar um número infinito de baralhos para o jogo e de um exercício em que a soma era 12, seguindo os seguinte passos:

[1] Os resultados matemáticos aqui indicados podem ser vistos em 2.3.

2.1.3.1 Escrever a equação que modela o jogo com um baralho

Se usarmos a carta “ás”, temos as seguintes possibilidades, usando “x” como quantidade das cartas “ás” e “y” como a quantidade das outras cartas, conforme tabela 1

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15

Tabela 1 – Construção da primeira linha para a tabela das equações do jogo.

Construir a tabela abaixo utilizando as escritas que foram apresentadas pelos grupos formados para jogar a “escova diofantina” e separados por pares de cartas, como mencionado anteriormente em 2.1, mostrando as jogadas que poderiam ter aparecido.

Exemplo:

1x+2y=15, onde x é a quantidade de cartas 1 e y é a quantidade de cartas 2

Começar pelo grupo de carta de nº ás e 2 e generalizar as quantidades destas cartas (chamando de x e y) e fazer o mesmo para os outros grupos. Com isso, montar a tabela 2 (ficará pronta a 1ª linha até a 9ª coluna) e pedir que eles pintem as células que resultaram em soma 15, ou seja, as equações que têm solução nos naturais, conforme encontraram no jogo. Depois dos alunos pintarem as equações que encontraram solução, através do jogo, indicar e pedir que os alunos, também, pintem de verde as equações que têm solução nos inteiros negativos. Para diferenciação, utilizar um “*”.

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
2x+1y=15	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
3x+1y=15	3x+2y=15	3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15	4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15	6x+7y=15	6x+8y=15	6x+9y=15	6x+10y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15	7x+6y=15	7x+8y=15	7x+9y=15	7x+10y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15	8x+6y=15	8x+7y=15	8x+9y=15	8x+10y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15	9x+6y=15	9x+7y=15	9x+8y=15	9x+10y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15	10x+6y=15	10x+7y=15	10x+8y=15	10x+9y=15

(amarelo)	Situação já considerada
(verde)	Há solução
(vermelho)	Não há solução

Tabela 2 – Tabela das equações do jogo.

Equação que modela o jogo

$$ax+by=15$$

x - quantidade de cartas de número “a”

y – quantidade de cartas de número “b”

2.1.3.2 Fazer nova tabela sem a limitação de 1 baralho

Aplicar Folha 3 das atividades.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ______________________________ FOLHA 3

QUESTÃO:

Observe as possibilidades de soma, conforme o quadro visto em aula. Agora pense nas possibilidades que resultam em soma igual a 15 para uma quantidade qualquer de baralhos.

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
2x+1y=15	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
3x+1y=15	3x+2y=15	3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15	4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15	6x+7y=15	6x+8y=15	6x+9y=15	6x+10y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15	7x+6y=15	7x+8y=15	7x+9y=15	7x+10y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15	8x+6y=15	8x+7y=15	8x+9y=15	8x+10y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15	9x+6y=15	9x+7y=15	9x+8y=15	9x+10y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15	10x+6y=15	10x+7y=15	10x+8y=15	10x+9y=15

Da mesma forma que na tabela de aula, identifique:

(amarelo)	Situação já considerada
(verde)	Há solução
(vermelho)	Não há solução

Consegues identificar alguma característica nestas equações que permite que consigamos solução? Qual?

Como resolverias a equação: x+12y=15, sendo x,y $\in \mathbb{N}$

Como resolverias a equação: x+12y=15, sendo x,y $\in \mathbb{Z}$

Figura 3 – Folha 3 das atividades .

<u>Análises a *priori*</u>

A Folha 3 , Figura 3 ao lado, foi utilizada no terceiro e quarto dias. Seu objetivo é levar os alunos a perceberem que as equações que não possuem solução nos naturais têm ambos os coeficientes pares, para visualizarem que as equações que têm solução têm algumas características em comum. Também, analisarei como os alunos procuram as soluções destas equações.

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
2x+1y=15	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
3x+1y=15	3x+2y=15	3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15	4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15	6x+7y=15	6x+8y=15	6x+9y=15	6x+10y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15	7x+6y=15	7x+8y=15	7x+9y=15	7x+10y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15	8x+6y=15	8x+7y=15	8x+9y=15	8x+10y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15	9x+6y=15	9x+7y=15	9x+8y=15	9x+10y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15	10x+6y=15	10x+7y=15	10x+8y=15	10x+9y=15

Tabela 3 – Tabela das equações do jogo para infinitos baralhos.

2.1.3.3 Montar a tabela 4 com soma 12, e fazer a mesma análise que foi feita na de soma 15, com a quantidade de baralhos sendo infinita.

Aplicar Folha 4 das atividades .

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ______________________________

FOLHA 4

Exercício

Montar uma tabela com soma 12 e fazer a mesma análise que foi feita na de soma 15.

Da mesma forma que na tabela de aula, identifique:

	Situação já considerada
	Há solução
	Não há solução

Escrever a equação que modela este jogo:

Consegues identificar alguma característica nestas equações que permite que consigamos solução? Qual?

Como resolverias a equação: x+13y=12, sendo x,y $\in \mathbb{N}$

Como resolverias a equação: x+13y=12, sendo x,y $\in \mathbb{Z}$

Figura 4 – Folha 4 das atividades .

Análises a *priori*

A Folha 4 e Figura 4 ao lado, foi tarefa para casa e utilizada no quarto dia. Além de reforçar o que foi feito na aula do terceiro dia, é importante que os alunos consigam construir a tabela com equações diferentes das que constituem o jogo e que indiquem quais delas têm solução para a situação de soma 12. A partir delas, apresentar a equação que modela esta situação e, junto com as ideias das aulas anteriores, construirmos a definição de equação diofantina linear. As questões seguintes são para verificar se os alunos encontraram uma nova estratégia para explicitar a solução das equações, comparando com as dadas na Folha 3.

1x+2y=12	1x+3y=12	1x+4y=12	1x+5y=12	1x+6y=12	1x+7y=12	1x+8y=12	1x+9y=12	1x+10y=12
2x+1y=12	2x+3y=12	2x+4y=12	2x+5y=12	2x+6y=12	2x+7y=12	2x+8y=12	2x+9y=12	2x+10y=12
3x+1y=12	3x+2y=12	3x+4y=12	3x+5y=12	3x+6y=12	3x+7y=12	3x+8y=12	3x+9y=12	3x+10y=12
4x+1y=12	4x+2y=12	4x+3y=12	4x+5y=12	4x+6y=12	4x+7y=12	4x+8y=12	4x+9y=12	4x+10y=12
5x+1y=12	5x+2y=12	5x+3y=12	5x+4y=12	5x+6y=12	5x+7y=12	5x+8y=12	5x+9y=12	5x+10y=12
6x+1y=12	6x+2y=12	6x+3y=12	6x+4y=12	6x+5y=12	6x+7y=12	6x+8y=12	6x+9y=12	6x+10y=12
7x+1y=12	7x+2y=12	7x+3y=12	7x+4y=12	7x+5y=12	7x+6y=12	7x+8y=12	7x+9y=12	7x+10y=12
8x+1y=12	8x+2y=12	8x+3y=12	8x+4y=12	8x+5y=12	8x+6y=12	8x+7y=12	8x+9y=12	8x+10y=12
9x+1y=12	9x+2y=12	9x+3y=12	9x+4y=12	9x+5y=12	9x+6y=12	9x+7y=12	9x+8y=12	9x+10y=12
10x+1y=12	10x+2y=12	10x+3y=12	10x+4y=12	10x+5y=12	10x+6y=12	10x+7y=12	10x+8y=12	10x+9y=12

Tabela 4 – Tabela das equações de soma 12.

Lembrar as equações obtidas em cada situação, para chegar à equação ax+by=c. E, então, na definição de equação diofantina.

Em ambos os casos de soma 15:

$$ax+by=15$$

Na tabela de soma 12:

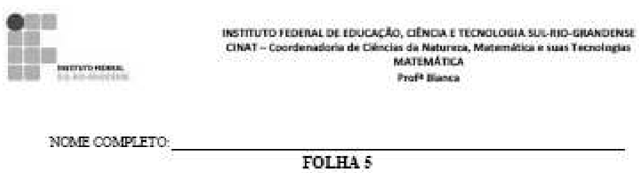
$$ax+by=12$$

Consideremos um $c \in \mathbb{Z}$:

$$ax+by=c$$

2.1.4 Interpretação geométrica da equação na experimentação

Aplicar a Folha 5 das atividades para exemplificar a representação de uma equação linear no plano cartesiano e para dar às equações encontradas nas tabelas de soma 15 e 12 uma visualização geométrica. Isso também auxiliará nas conclusões sobre a existência da solução de uma equação diofantina linear e a solução geral.


INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ______________________________

FOLHA 5

Como representarias no plano cartesiano a equação 2x+4y=15?

E a equação x+3y=15?

Figura 5 – Folha 5 das atividades .

Análises a *priori*

A Folha 5 , Figura 5 ao lado, foi aplicada em sala de aula com o intuito de verificar os conhecimentos dos alunos em relação à representação geométrica de uma equação linear. Também, apurar se os alunos conseguem relacionar a solução de uma equação diofantina aos pares ordenados com ambas coordenadas inteiras.

Evidenciar que buscar a solução da equação $ax+by=c$ equivale a procurar pares ordenados de ambas coordenadas inteiras que sejam pontos da reta. Para a primeira e a terceira equações, que são do jogo e cuja solução já tínhamos observado que seria possível sob as condições do jogo, conseguimos infinitos pares ordenados cujas coordenadas pertencem a Z, o que de fato indica que a equação diofantina possui solução para casos de infinitos baralhos.

Porém, observar que a segunda equação foi uma das que não tinha solução sob as condições do jogo e, ainda, mesmo sem as condições do jogo, em Z ela não possui solução; por isso, temos a indicação de que esta equação diofantina não possui solução.

Observar aqui a diferenciação das equações que anteriormente foram marcadas com "*", para as não marcadas. Deixar clara a distinção de uma solução nos naturais e uma solução nos inteiros. Mostrar esta situação indicando que as soluções do primeiro quadrante do plano cartesiano equivalem a soluções nos naturais, ou seja, as encontradas no jogo. E, por outro lado, as demais soluções, são alguns dos pontos de ambas as coordenadas inteiras dos outros quadrantes, que equivalem as soluções em foi necessária a notação, uma vez que não apareceram no jogo.

Considerar as seguintes equações e alguns de seus pontos indicados:

1) x+3y=15 e sua representação no plano cartesiano, conforme gráfico da Figura 6.

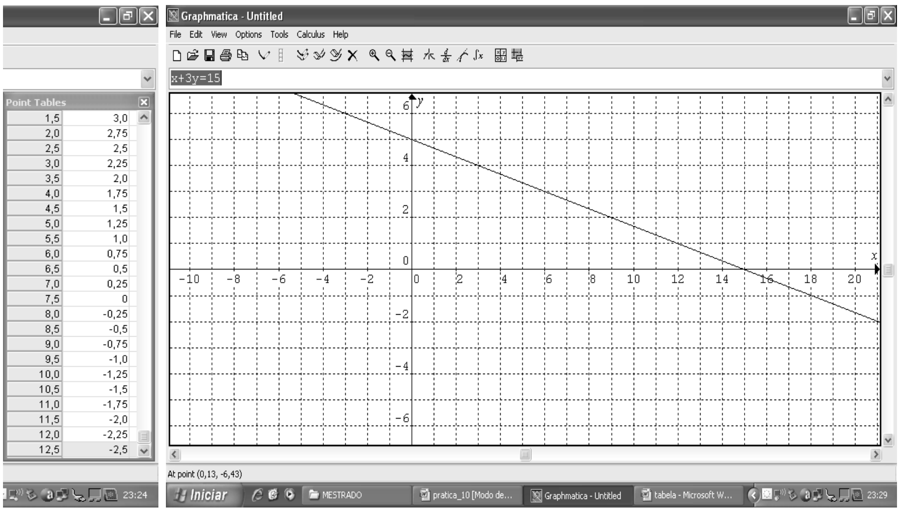


Figura 6 – Gráfico referente à equação x+3y=15.

2) 2x+4y=15 e sua representação no plano cartesiano, conforme Figura 7.

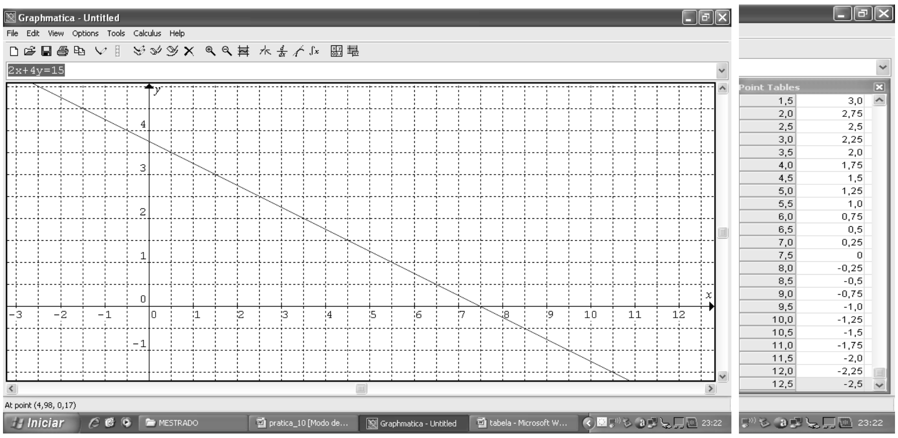


Figura 7 – Gráfico referente à equação 2x+4y=15.

3) 3x+6y=15 e sua representação no plano cartesiano, veja Figura 8.

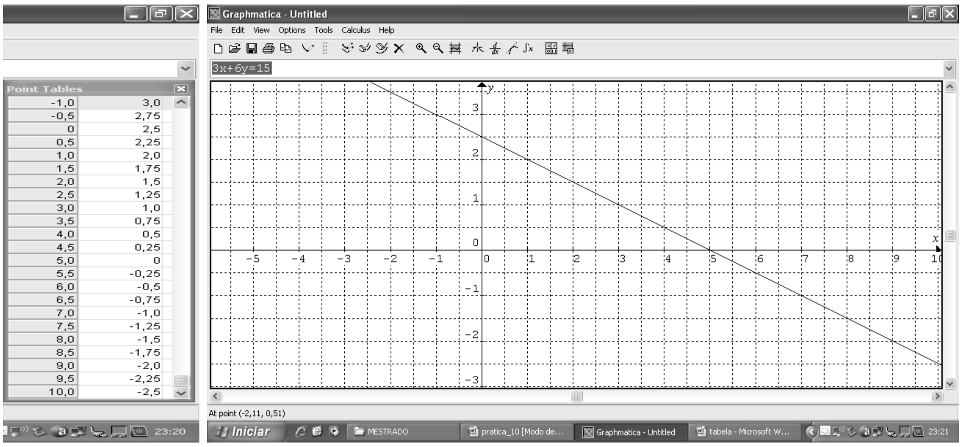


Figura 8 – Gráfico referente à equação 3x+6y=15.

Aplicar a Folha 6 .

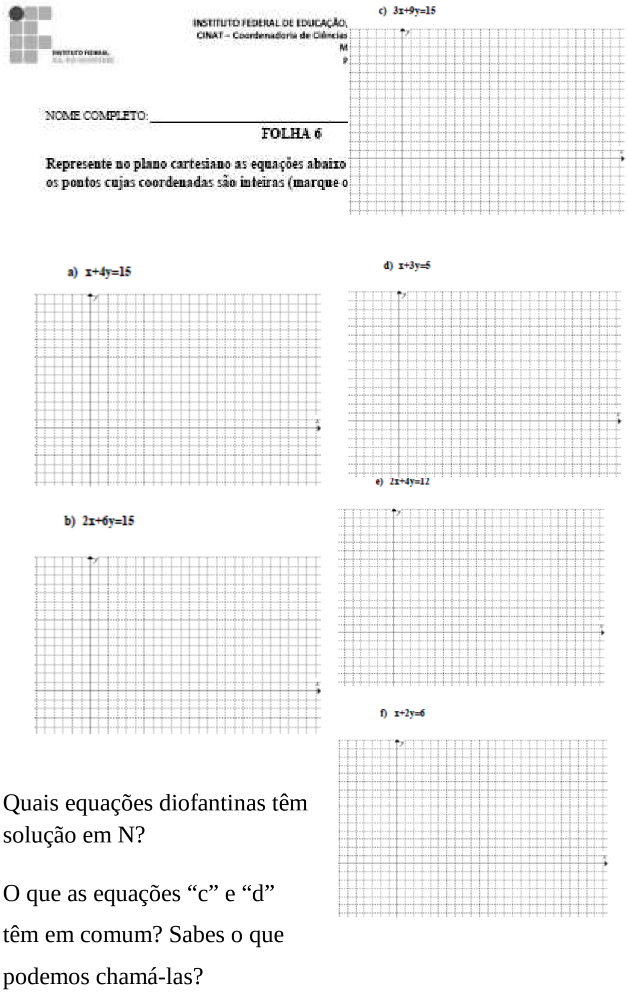


Figura 9 – Folha 6 das atividades .

<u>Análises a *priori*</u>

No final do quarto dia de atividades, entreguei a Folha 6 , Figura 9 ao lado, para os alunos fazerem em casa. Esta Folha também foi utilizada no sexto dia. A partir das análises da Folha 5, em que os alunos mostraram não saber representar geometricamente uma equação linear, foi necessário mostrar como isso pode ser feito. Com esta Folha, espero que os alunos reforcem o que feito em aula e que comecem a ficar atentos para as soluções das equações. Para isso, esta atividade é composta por seis exercícios para representar as equações no plano cartesiano e identificar os pontos de ambas as coordenadas inteiras, alem de duas questões que tratam sobre as soluções de uma equação.

2.1.5 Divisor, Divisor Comum e MDC na experimentação

Aplicar a Folha 7 das atividades e resgatar a definição de divisor.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO:__________

FOLHA 7

1. Considere o número 10.
   1.1 Cite um divisor de 10

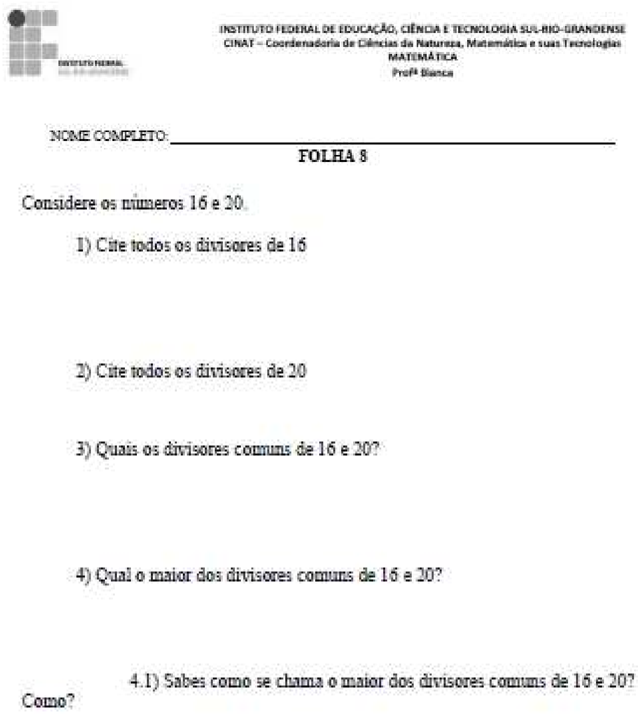
   1.2 Cite todos os divisores de 10
2. Como definirias divisor de um número inteiro?

Figura 10 – Folha 7 das atividades .

<u>Análises a *priori*</u>

A Folha 7 , Figura 10 ao lado, foi aplicada em sala de aula para averiguar os conhecimentos dos alunos sobre divisores. Preocupamo-nos em perguntar se os alunos sabiam o que é o divisor de um número e definir, para não corrermos o risco de eles não terem este conceito construído. As duas primeiras perguntas têm a função de encaminhá-los para a definição.

Aplicar a Folha 8 das atividades e resgatar a definição de divisor comum e MDC.


INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____________________

FOLHA 8

Considere os números 16 e 20.

1) Cite todos os divisores de 16

2) Cite todos os divisores de 20

3) Quais os divisores comuns de 16 e 20?

4) Qual o maior dos divisores comuns de 16 e 20?

4.1) Sabes como se chama o maior dos divisores comuns de 16 e 20? Como?

Figura 11 – Folha 8 das atividades .

Análises a *priori*

No quinto dia, a Folha 8 , Figura 11, foi aplicada em sala de aula como continuidade do que foi feito na atividade anterior – Folha 7. Com esta tarefa, procuramos reforçar a identificação dos divisores de um número, questionamos para verificar se os alunos compreendem o que são divisores comuns e o que é o "MDC" – máximo divisor comum, que serão utilizados de apoio para as atividades seguintes.

Calcular o MDC utilizando a tabela de soma 15, aplicar a Folha 9 das atividades .

Analisar a tabela da Folha 9 e discutir as respostas da Folha, para intuir o teorema que trata de quando uma equação diofantina tem solução e concluir a Folha, enunciando o teorema: Sejam a, b, $c \in$ Z com a e b não ambos nulos e seja D = MDC(a, b). Então, a equação $ax + by = c$ tem solução em Z se e somente se D divide c.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO:____________________________________

FOLHA 9

Escreva o MDC entre os números das cartas do jogo de soma 15 abaixo. (coloque o MDC logo abaixo da equação - na célula da tabela)

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
	2x+3y=15	[illegible]	2x+5y=15	[illegible]	2x+7y=15	[illegible]	2x+9y=15	[illegible]
		3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
			4x+5y=15	[illegible]	4x+7y=15	[illegible]	4x+9y=15	[illegible]
				5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15

Quais são situações em que o MDC é divisor de 15?

Dada uma equação ax+by=c, de acordo com o observado na tabela e na pergunta acima, quando podes afirmar que é possível resolver a equação em N?

Figura 12 – Folha 9 das atividades

Análises a *priori*

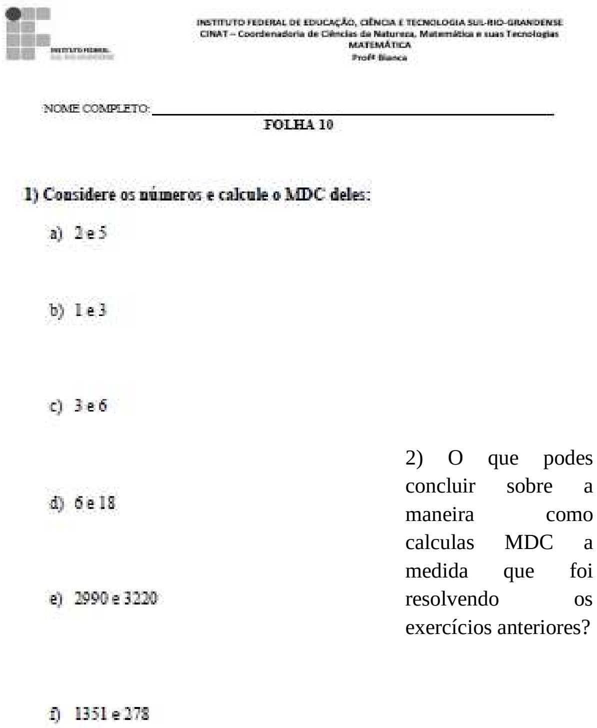
A Folha 9 , Figura 12 ao lado, foi aplicada no sexto dia. Nas tarefas anteriores, retomamos divisor e MDC. Com o estudo dos exercícios da Folha, esperamos que os alunos relacionem estes conteúdos com as equações diofantinas para procurarmos afirmar quando uma equação diofantina tem soluções inteiras, embora a situação considerada seja a do jogo de soma 15, onde trabalhamos com soluções naturais. Vamos usar esta situação para que, aos poucos, os alunos consigam encontrar soluções nos inteiros.

Observar que, na situação do jogo, além de termos a condição do teorema, temos também a limitação da solução ser em N.

Aplicar a Folha 10 das atividades e chamar atenção para o cálculo do MDC de números grandes.

Análises a *priori*

A Folha 10 , Figura 13, foi aplicada no sexto dia. Anteriormente, os alunos foram solicitados a calcular MDC para pequenos números. Agora pedimos que mostrem como fazem para calcular o MDC para números grandes. Pretendemos convencer os alunos de que precisamos de um método que nos permita calcular o MDC entre quaisquer números sem depender da fatoração em primos.


INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO:______________________________

FOLHA 10

1) Considere os números e calcule o MDC deles:

a) 2 e 5

b) 1 e 3

c) 3 e 6

d) 6 e 18

e) 2990 e 3220

f) 1351 e 278

2) O que podes concluir sobre a maneira como calculas MDC a medida que foi resolvendo os exercícios anteriores?

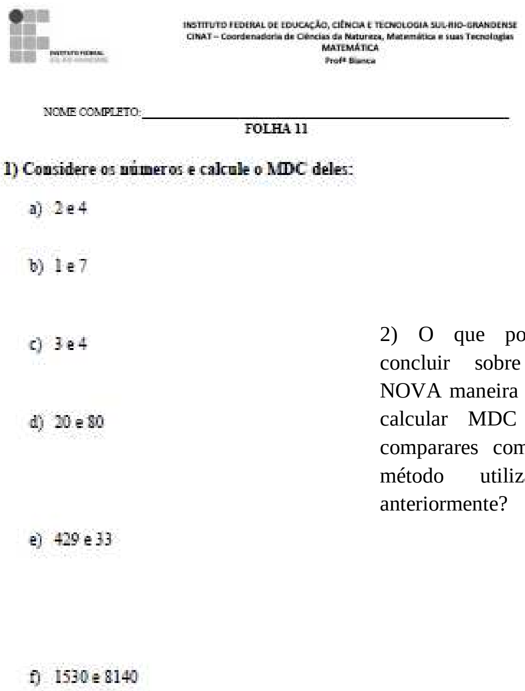
Figura 13 – Folha 10 das atividades .

2.1.6 Divisão euclidiana na experimentação

Após o preenchimento da Folha 10 em que, provavelmente, os alunos terão dificuldade de calcular o MDC, introduzir a nova maneira para este cálculo. Procurar mostrar para os alunos que esta é uma maneira sistemática de obter o resultado. Resolver os seguintes exemplos, até que os alunos compreendam o procedimento e aplicar a Folha 11 das atividades

<u>Análises a *priori*</u>

No 7º dia, a Folha 11, Figura 14, foi entregue aos alunos para resolverem em casa, mas ela foi terminada em aula devido às dúvidas que surgiram no atendimento extraclasse. Com isso, no 8º dia, o assunto foi retomado, os alunos terminaram de preencher a Folha e a entregaram. Nosso objetivo é averiguar se os alunos entenderam como calcular o MDC entre dois números via algoritmo de Euclides e se eles perceberam que ele é mais eficaz que o até então adotado..



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO:____________________________________

FOLHA 11

1) Considere os números e calcule o MDC deles:

a) 2 e 4

b) 1 e 7

c) 3 e 4

d) 20 e 80

e) 429 e 33

f) 1530 e 8140

2) O que podes concluir sobre a NOVA maneira de calcular MDC se comparares com o método utilizado anteriormente?

Figura 14 – Folha 11 das atividades .

Sabemos que MDC(10, 6) = 2, MDC (6, 4) = 2, MDC (4, 2) = 2 e também que na divisão de 10 por 6, obtemos resto 4, ou seja, $10=1\cdot6+4$. E na divisão de 6 por 4, obtemos resto 2, ou seja, $6=4\cdot1+2$.

Neste caso, o MDC(10, 6) é igual ao MDC entre 6 e 4 que é o resto da divisão de 10 por 6. E o MDC(6, 4) é igual ao MDC entre 4 e 2 que é o resto da divisão de 6 por 4. Isso vale em geral e este procedimento é conhecido como Algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC. Este método garante que podemos trocar o MDC entre dois números *a* e *b* pelo MDC entre o menor deles e o resto da divisão do maior pelo menor.

Exemplos

1) MDC(120, 23)=?

$120=5\cdot23+5$, então MDC(120, 23) = MDC(23, 5)

$23=4\cdot5+3$, então MDC(23, 5)= MDC(5,3)

$5=1\cdot3+2$, então MDC(5,3)=MDC(3, 2)

$3=1\cdot2+1$, então MDC(3, 2) =MDC(2,1)

$2=2\cdot1+0$, então MDC(2,1)=MDC(1,0) =1

Assim, MDC(120, 23)=MDC(23,5)=MDC(5,3)= MDC(3,2)=MDC(2,1)= MDC(1,0)=1

2) MDC(1262, 31)=?

$1262=40\cdot 31+22$, então MDC(1262, 31) = MDC(31, 22)

$31=1\cdot 22+9$, então MDC(31, 22) = MDC(22, 9)

$22=2\cdot 9+4$, então MDC(22, 9) = MDC(9, 4)

$9=2\cdot 4+1$, então MDC(9, 4) = MDC(4, 1)=1

Assim, MDC(1262, 31) = MDC(31, 22)=MDC(22,9)=MDC(9,4)=MDC(4,1)=1

3) MDC(126, 24)=?

$126=5\cdot 24+6$, então MDC(126, 24)= MDC(24,6)

$24=4\cdot 6+0$, então MDC(24,6)= MDC(6,0)=6

Assim, MDC(126, 24)= MDC(24,6)=MDC(6,0)= 6

4) MDC(2990,3220)=?

$3220=1\cdot 2990+230$, então MDC(2990,3220)=MDC(2990,230)

$2990=13\cdot 230+0$, então MDC(2990,230)= MDC(230,0)=230

Assim, MDC(2990,3220)=MDC(2990,230)= MDC(230,0)=230

5) MDC(18,6)=?

$18= 3\cdot 6+0$, então MDC(18,6)= MDC(6,0)=6

2.1.7 Teorema de Bézout na experimentação

Lembrar que cada escrita feita para calcular o MDC é uma combinação linear. Assim, escrever o MDC como combinação linear dos números envolvidos. Associar a escrita do MDC como combinação linear a uma equação diofantina linear e indicar uma solução. Quando aparecer esta associação, em uma equação obtida no jogo, comparar a solução encontrada anteriormente com a de agora para começar a pensar sobre as outras soluções de uma equação.

Resolver os exemplos a seguir para os alunos entenderem o procedimento.

1) MDC(9,2)=1

Dividindo 9 por 2, obtemos resto 1 que é o MDC(9, 2).

9= 4$\cdot$2+1, então 1=9-4$\cdot$2; deste modo, já escrevemos 1 =MDC(9,2) como combinação linear de 9 e 2, ou seja, 1=9$\cdot$(1)+2$\cdot$(-4).

Desta combinação podemos gerar a equação diofantina 1=9x+2y e, assim, já temos uma solução, que é x=1 e y=-4.

2) MDC (1,3) = 1

Dividindo 3 por 1, obtemos resto 0 e o MDC (3, 1)=MDC(1,0)=1.

3=1$\cdot$3+0, como 1=1$\cdot$1+0, substituindo 0=3-1$\cdot$3 em 1=1$\cdot$1+0, temos 1=1$\cdot$1+(3-1$\cdot$3) e então 1=3+1$\cdot$ (-2); deste modo, já escrevemos 1 =MDC(1,3) como combinação linear de 1 e 3, ou seja, 1=3$\cdot$(1)+1$\cdot$(-2).

Multiplicando por 15 esta combinação, ou seja, 15=3$\cdot$(15)+1$\cdot$(-30), podemos gerar a equação diofantina do jogo 15=3x+y e, assim, já temos uma solução, que é x=15 e y=-30.

Como na situação do jogo encontramos outra solução, chamar atenção para o fato de que isto sugere que busquemos as outras soluções de uma equação.

3) MDC (120,23) = 1

No exemplo 1 da utilização do algoritmo de Euclides, calculamos o MDC(120, 23) = 1, usando as seguintes igualdades: 120=5$\cdot$23+5, 23=4$\cdot$5+3, 5=1$\cdot$3+2, 3=1$\cdot$2+1.

Agora isolaremos os restos destas igualdades: 5=120-5$\cdot$23, 3=23-4$\cdot$5, 2=5-1$\cdot$3, 1=3-1$\cdot$2, para substituirmos na última igualdade, cujo resto é o MDC.

Em 1=3-1$\cdot$2 substituímos a igualdade 2=5-1$\cdot$3 e temos 1=3-1$\cdot$(5-1$\cdot$3)=3$\cdot$2-1$\cdot$5.

Em 1=3$\cdot$2-1$\cdot$5 substituímos 3=23-4$\cdot$5 e temos 1=(23-4$\cdot$5)$\cdot$2-1$\cdot$5 =23$\cdot$2-9$\cdot$5.

Em 1=23$\cdot$2-9$\cdot$5 substituímos 5=120-5$\cdot$23 e temos 1=23$\cdot$2-9$\cdot$(120-5$\cdot$23) = 23$\cdot$47+120$\cdot$(-9).

Assim, escrevemos 1=MDC(120, 23) como combinação linear de 23 e 120.

Desta combinação linear, podemos gerar a equação diofantina 1=23x+120y e, assim, já temos uma solução, que é x=47 e y=-9.

Aplicar a Folha 12 das atividades .

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____________________

FOLHA 12

1) Considere os números, o MDC deles (calculado anteriormente) e escreve o MDC como combinação linear destes números:

a) 2 e 4

b) 1 e 7

c) 3 e 4

d) 20 e 80

e) 429 e 33

f) 1530 e 8140

Figura 15 – Folha 12 das atividades .

<u>Análises a *priori*</u>

No 8º e no 9º dia, foi trabalhada em aula a escrita do MDC como combinação linear dos números dados. A Folha 12 , Figura 15, foi entregue aos alunos no 8º dia como tarefa para casa. Quando entregaram a resolução no 9º dia, não apresentaram muitas dúvidas. Queremos verificar se os alunos conseguem escrever o MDC como combinação linear de números dados.

2.1.8 Solução de uma equação na experimentação

Utilizar a visualização geométrica como aliada para a construção do teorema após os exemplos. Observar os pontos em que ambas as coordenadas são inteiras e generalizar as soluções. Depois, quando os alunos estiverem convictos desta situação, procurar as soluções de forma algébrica.

1) Consideremos a equação x+3y=15 e sua representação no plano cartesiano, conforme figura 16.

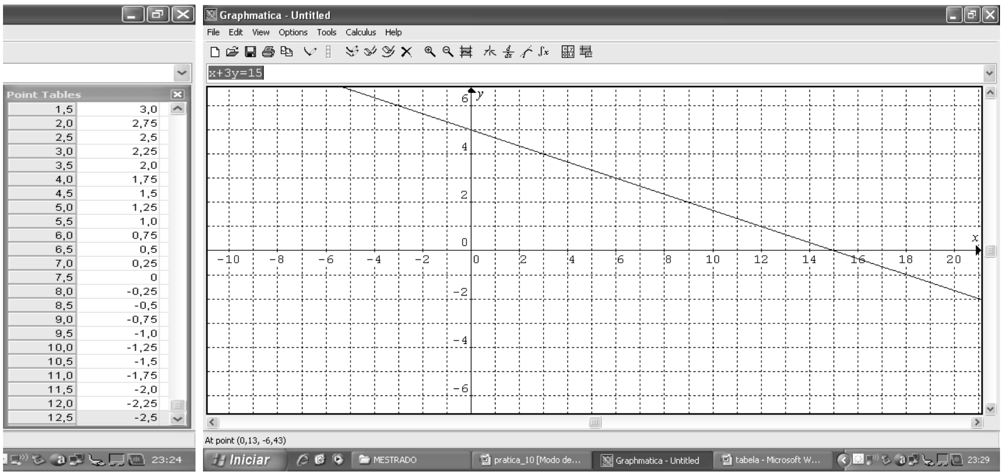


Figura 16 – Gráfico referente à equação x+3y=15.

Verificar se a equação possui solução em Z

MDC(1,3)=1 , 1 divide 15, então a equação possui solução em Z

Escrever MDC(1, 3) como combinação linear de 1 e 3

$1=3+1\cdot(-2)$

Multiplicar a combinação linear por 15

$1\cdot 15=3\cdot 15+1\cdot (-2)\cdot 15$

$15=3\cdot 15+1\cdot (-30)$

Associar a equação dada e indicar uma solução

$x_0= -30$, $y_0=15$

Escrever a solução geral

1°) Solução geral a partir da solução particular e da análise geométrica

Considerar os pares ordenados com ambas as coordenadas inteiras e questionar os alunos sobre o comportamento de *x* e *y*. Observar que, nesse exemplo, quando os valores de *x* aumentam em 3 unidades e os de *y* diminuem em 1 unidade, ou seja,

$$\begin{cases} x = -30 + 3t \\ y = 15 - t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2°) Solução geral a partir da solução particular e da escrita algébrica

15=3· 15+1· (-30)

15=3· 15 -3· 1 · t+3· 1 · t +1· (-30)

15=3(15-t)+1(-30+3t)

$$\begin{cases} x = -30 + 3t \\ y = 15 - t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) Consideremos a equação 2x+9y=7 e sua representação no plano cartesiano, conforme figura 17.

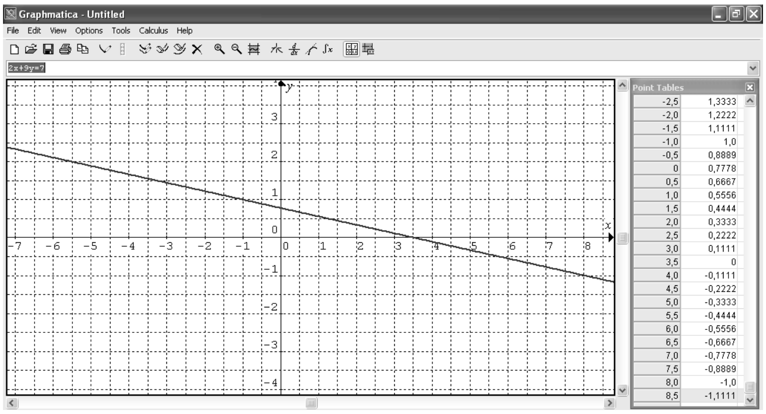


Figura 17 – Gráfico referente à equação 2x+9y=7.

Verificar se a equação possui solução em Z

MDC(2,9)=1 , 1 divide 7, então a equação possui solução em Z

Escrever MDC(2, 9) como combinação linear de 2 e 9

$1=9\cdot(1)+2\cdot(-4)$

Multiplicar a combinação linear por 7

$1\cdot 7=9\cdot 7\cdot(1)+2\cdot 7\cdot(-4)$
$7=9\cdot(7)+2\cdot(-28)$

Associar a equação dada e indicar uma solução

$x_0=-28$, $y_0=7$

Escrever a solução geral

1°) Solução geral a partir da solução particular e da análise geométrica

Considerar os pares ordenados com ambas as coordenadas inteiras e questionar os alunos sobre o que está acontecendo com x e y. Observar que, nesse exemplo, os valores de x aumentam em 9 unidades e os de y diminuem em 2 unidades, ou seja,

$$\begin{cases} x=-28+9t \\ y=7-2t \\ t\in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2°) Solução geral a partir da solução particular e da escrita algébrica

$7=9\cdot(7)+2\cdot(-28)$
$7=9\cdot(7)-9\cdot 2\cdot t+9\cdot 2\cdot t+2\cdot(-28)$
$7=9\cdot(7-2t)+2\cdot(-28+9t)$

$$\begin{cases} x=-28+9t \\ y=7-2t \\ t\in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3) Consideremos a equação 3x+6y=15 e sua representação no plano cartesiano, de acordo com a Figura 18.

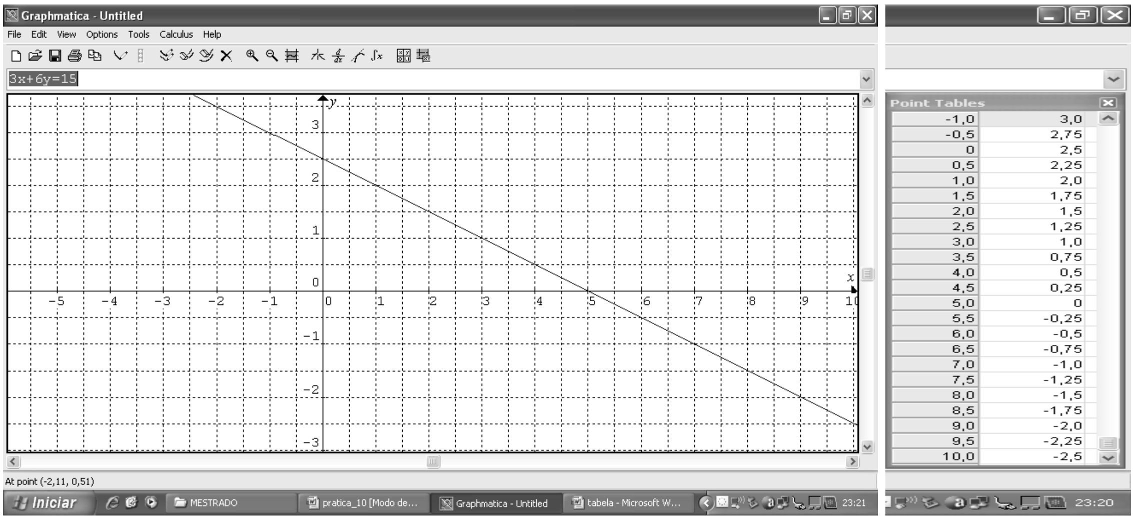


Figura 18 – Gráfico referente à equação 3x+6y=15.

Verificar se a equação possui solução em Z

MDC(6,3)=3 , 3 divide 15, então a equação possui solução em Z

Escrever MDC(3, 6) como combinação linear de 3 e 6

$3=3\cdot(-1)+6\cdot(1)$

Multiplicar a combinação linear por 5

$3\cdot 5=3\cdot 5\cdot(-1)+6\cdot 5\cdot(1)$

$15=3\cdot(-5)+6\cdot(5)$

Associar a equação dada e indicar uma solução

$x_0=-5$, $y_0=5$

Escrever a solução geral

1º) Solução geral a partir da solução particular e da análise geométrica

Considerar os pares ordenados com ambas as coordenadas inteiras e questionar os alunos sobre o comportamento de *x* e *y*. Observar que, nesse exemplo, os valores de *x* aumentam em 2 unidades e os de *y* diminuem em 1 unidade, ou seja,

$$\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 5 - t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2°) Solução geral a partir da solução particular e da escrita algébrica

$3=3\cdot(-1)+6\cdot(1)$

$1=1\cdot(-1)+2\cdot(1)$

$5=1\cdot(-5)+1\cdot 2\cdot t-1\cdot 2\cdot t+2\cdot(5)$

$5=1\cdot(-5+2t)+2\cdot(5-t)$

$$\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 5 - t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

OBS.: Neste exemplo, consideramos a comparação/associação da combinação linear com a equação equivalente, $x+2y=5$.

4) Consideremos a equação 120x+23y=150 e sua representação no plano cartesiano, conforme Figura 19 e 20.

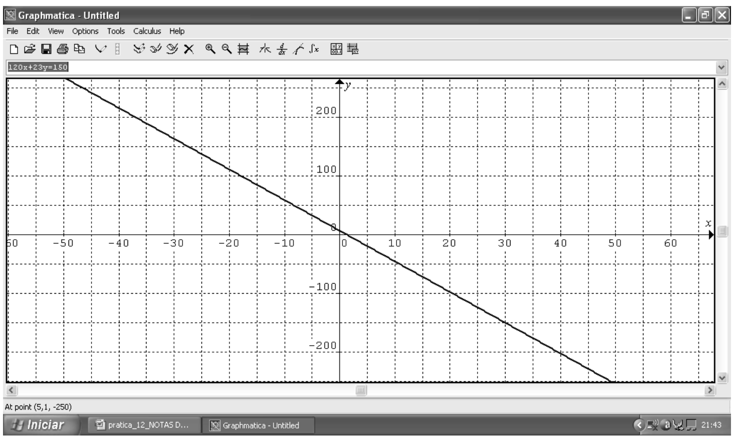


Figura 19 – Gráfico referente à equação 120x+23y=150.

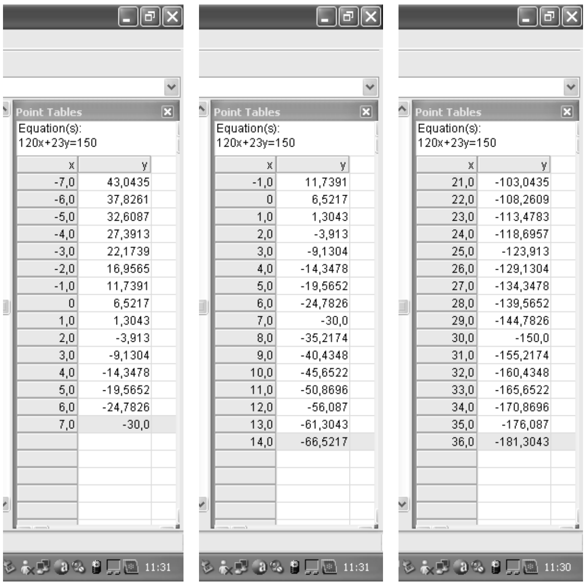


Figura 20 – Soluções da equação 120x+ 23y=150.

Verificar se a equação possui solução em Z

MDC(23,120)=1 , 1 divide 150, então a equação possui solução em Z

Escrever o MDC(120, 23) como combinação linear de 120 e 23

$1=-9\cdot 120+47\cdot 23$

Multiplicar a combinação linear por 150

$1\cdot 150=-9\cdot 150\cdot 120+47\cdot 150\cdot 23$

$150=-1350\cdot 120+7050\cdot 23$

$120\cdot (-1350)+7050\cdot 23 = 150$

Associar a equação dada e indicar uma solução

$x_0=-1350$, $y_0=7050$

Escrever a solução geral

1°) Solução geral a partir da solução particular e da análise geométrica

Considerar os pares ordenados com ambas as coordenadas inteiras e questionar os alunos sobre o comportamento de *x* e *y*. Nesse exemplo, a visualização geométrica não é tão imediata, mas, trabalhando com uma escala adequada, é possível observar que os valores de *x* aumentam em 23 unidades e os de *y* diminuem em 120 unidades, ou seja,

$$\begin{cases} x = -1350 + 23t \\ y = 7050 - 120t \\ \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2°) Solução geral a partir da solução particular e da escrita algébrica

120 $\cdot$ (-1350)+7050 $\cdot$ 23 = 150
120 $\cdot$ (-1350)+120 $\cdot$ 23t-120 $\cdot$ 23t+7050 $\cdot$ 23 = 150
120 $\cdot$ (-1350+23t)+7050 $\cdot$ (23-120t) = 150

$$\begin{cases} x = -1350 + 23t \\ y = 7050 - 120t \\ \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Generalizando os exemplos anteriores, obtemos que a solução geral da equação $ax + by = c$, a partir da solução particular (x_0, y_0), pode ser expressa por: $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$, com $t \in \mathbb{Z}$.

De fato, da mesma maneira que nos exemplos, partindo de (x_0, y_0) como solução inicial, sempre que substituirmos na equação original, teremos:
$c = ax_0 + by_0 = ax_0 + abt - bat + by_0 = a(x_0 + bt) + b(y_0 - at)$.

2.1.9 Resolução de uma equação do jogo

Considerar uma das equações do jogo

x+4y=15

Verificar se a equação possui solução em Z

MDC(1,4) = 1, 1 divide 15, então a equação possui solução em Z

Escrever o MDC(1, 4) como combinação linear de 1e 4

$4=1\cdot 4+0$ -> $0=4-1\cdot 4$

$0=(3+1)-1\cdot 4$

$0=3+1-1\cdot 4$

$1\cdot 4-3=1$

$1\cdot(-3)+4\cdot(1)=1$

Multiplicar a combinação linear por 15 e associar a equação dada e indicar uma solução

$1\cdot 15\cdot(-3)+4\cdot 15\cdot(1)=15$

$1\cdot(-45)+4\cdot(15)=15$

$x_0=-45 \; e \; y_0=15$

A solução geral da equação $ax+by=c$, a partir da solução particular (x_0, y_0) e da escrita algébrica

$$ax+by=c\begin{cases} x=x_0+bt \\ y=y_0-at \\ t\in Z \end{cases} \qquad x+4y=15\begin{cases} x=-45+4t\geq 0 \\ y=15-t\geq 0 \\ t\in Z \end{cases}$$

Fazer $x \geq 0$ e $y \geq 0$, pois representa quantidade de cartas.

x=-45+4t$\geq$0 y=15-t$\geq$0

4$t$$\geq$45 -$t$$\geq$-15

$t$$\geq$11,25 $t$$\leq$15

11,25$\leq$$t$$\leq$15

Como a resolução da inequação 11,25$\leq$$t$$\leq$15 é nos inteiros, ela torna-se equivalente a 12$\leq$$t$$\leq$15, ou seja

$$\begin{cases} t=12 \\ x=-45+4.12=3 \\ y=15-12=3 \end{cases} \quad \begin{cases} t=13 \\ x=-45+4.13=7 \\ y=15-13=2 \end{cases} \quad \begin{cases} t=14 \\ x=-45+4.14=11 \\ y=15-14=1 \end{cases} \quad \begin{cases} t=15 \\ x=-45+4.15=15 \\ y=15-15=0 \end{cases}$$

Consideremos outra equação do jogo

2x+4y=15.

Verificar se a equação possui solução em Z

MDC(2,4) = 2, 2 não divide 15, então a equação não possui solução em Z

Aplicar a Folha 13 das atividades .

<u>Análises a *priori*</u>

A Folha 13 , Figura 21, aplicada em aula no 12º dia verificará se os alunos conseguem encontrar as soluções de uma equação diofantina, também, se identificam quando uma equação tem, ou não, soluções inteiras e se conseguem fazer a representação geométrica das situações colocadas. Além disso, para averiguar se os alunos utilizam a teoria de equações diofantinas para resolver um problema de aplicação.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ______________________

FOLHA 13

Para cada equação abaixo verifique se há solução e, caso exista, calcule-a na forma algébrica e verifique o resultado, analisando o gráfico da equação. Apresente os cálculos, bem como a justificativa para a equação ter (ou não) solução. Se necessário use o verso da Folha.

a) $x + 5y = 15$ b) $- 4x + 8y = 12$ c) $4x + 2y = 5$

Os alunos da turma de química do 1° semestre de 2011 do IFSul decidiram fazer um moletom da turma. A malharia onde encomendaram solicitou que o pagamento final fosse feito apenas com as notas de R$50 e de R$100. Sabendo que a turma tem 25 alunos, que todos quiseram o moletom e que cada um custou R$ 48,00, determine:

a) A equação que modela esta situação
b) A solução da equação
c) A representação no plano cartesiano

Figura 21 – Folha 13 das atividades .

Aplicar a Folha 14 das atividades .

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA

Folha 14

NOME COMPLETO: ______________________ CURSO/TURMA: __________

DATA: __________ VALOR: 1,0 NOTA: __________

De que maneiras podemos comprar selos de dois e de cinco reais, de modo a gastar cem reais?

a) Escreva a equação e diga se ela tem solução, justificando.

b) Resolva a equação e represente - a geometricamente. (apresente todos os cálculos)

Figura 22 – Folha 14 das atividades .

<u>Análises a *priori*</u>

A Folha 14 , Figura 22, foi aplicada em aula no dia em que os alunos fizeram a prova de final da etapa. Foi opcional, teve valor extra de um ponto e foi combinada com os alunos previamente. O objetivo deste trabalho é verificar se, mesmo depois de alguns dias, eles se sentem motivados a resolver um problema com a teoria de equações diofantinas e, também, se lembram como fazer isto.

2.2 RELATO DA EXPERIMENTAÇÃO

A primeira atitude tomada foi pedir autorização ao coordenador da matemática e à supervisão pedagógica do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense para que a prática pudesse ser realizada em uma das minhas turmas (Apendice A). Com a concordância deles, na semana que antecedeu a prática em sala de aula, expliquei aos alunos o que faria: que aplicaria uma série de atividades desenvolvidas em aula e exercícios para casa - como habitual, que a participação deles teria o peso de um trabalho no valor 3,0 e que, ainda sobre o assunto específico de equações diofantinas, seriam colocadas questões na prova final da etapa (uma etapa equivale à metade do semestre), visto que resolução de equações é conteúdo previsto na etapa.

Os alunos se mostraram bastante empolgados quando pedi que trouxessem, para a semana seguinte, baralho de cartas, lápis de cor ou giz de cera nas cores: amarelo, verde e vermelho e régua para utilizarmos nas atividades. Combinei com eles que os períodos vagos no horário da turma, que são 2 de 45 minutos de quarta-feira, seriam utilizados conforme a necessidade de desenvolver as atividades e de ajudá-los nas dúvidas.

Solicitei que levassem para casa um termo de consentimento para ser assinado pelos pais/responsáveis (Apendice A), visto que as aulas foram registradas através de filmagem e que o material seria usado para fins acadêmicos. Coloquei-me à disposição, no horário de atendimento aos alunos – tempo/horário durante o período letivo que os alunos podem sanar suas dúvidas – para qualquer esclarecimento aos responsáveis sobre o que seria desenvolvido em aula e da importância de suas gravações.

1º DIA – 2 períodos cada um de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Jogar “escova diofantina” de acordo com as regras apresentadas.

ATIVIDADES UTILIZADAS

FOLHA 1

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 1**

ESCOVA DIOFANTINA

REGRAS DO JOGO:

Material necessário

1 baralho comum
Retire do baralho as Figuras (rei, dama e valete) dos quatro naipes e também os coringas. Agora estas com um baralho de 40 cartas composto por quatro sequências de Ás a 10.

Descrição

Embaralhe as cartas e distribua 3 para cada jogador. Abra as próximas 4 cartas e coloque-as no centro da mesa desviradas. O monte restante é posto de lado.

O primeiro a jogar deve procurar uma carta em sua mão que somada a uma das cartas da mesa dê um total de 15. (**ATENÇÃO:** poderão ser utilizados no máximo 2 números diferentes)

O jogador coloca à sua frente as cartas pegas da mesa, assim como a carta de sua mão que permitiu a soma de 15, com a face voltada para baixo. Caso ele não consiga pegar nenhuma carta da mesa, deve simplesmente descartar na mesa uma das cartas de sua mão. Se o jogador conseguir pegar todas as cartas restantes na mesa de uma única vez o jogador fez uma *escova diofantina*. Ao colocar na sua frente as cartas pegas, ele deverá colocar uma delas com a face voltada para cima e perpendicular ao monte de cartas voltadas para baixo. Será o sinal de que ele fez uma *escova diofantina*. Para cada *escova diofantina* feita, o mesmo procedimento deverá ser repetido.

Quando os jogadores tiverem utilizado suas 3 cartas, uma nova mão de 3 cartas é distribuída, utilizando o monte que havia sido posto de lado. A partida prossegue da mesma maneira até que o monte de cartas termine. Aí é feita a contabilização dos pontos.

Contabilização dos pontos:

Cada *escova diofantina* vale 1 ponto
Os pontos conquistados por cada jogador (ou equipe) são anotados em uma Folha, as cartas são embaralhadas e uma nova mão tem início, ao término da qual os pontos são novamente somados. Vence a partida quem atingir 5 pontos.

FOLHA 2

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 2**

REGISTRO DAS JOGADAS

1ª CARTA	QUANTIDADE DA 1ª CARTA	2ª CARTA	QUANTIDADE DA 2ª CARTA	FAZER A SOMA (REGISTRAR)

RELATO:

Começo explicando o que faríamos, falo da importância do trabalho para mim e que a minha expectativa é que para eles também seja de grande valor. Este início foi difícil para mim, pois, além do desconforto de a aula ser gravada – situação nova para mim, sabia que era o início de uma aposta pedagógica e que, por mais que a busca fosse avaliar sua viabilidade para tal nível de ensino, a vontade de querer fazer dar certo era superior a qualquer aula anteriormente ministrada. E foi com este sentimento que comecei os trabalhos.

Para minha surpresa, vários alunos, tão empolgados na semana anterior com a possibilidade de jogar carta na aula de matemática, esqueceram-se do baralho de cartas, o que não foi impedimento, pois outros, mais motivados, trouxeram a mais. Entrego as regras do jogo e noto que os alunos estão um pouco encabulados com a filmadora, tanto quanto eu!

Convido os alunos ao jogo, mas, de forma bastante sutil, falo que o nosso objetivo é estudar um tipo de equação chamada diofantina. Essa observação é para que os alunos fiquem atentos à matemática, entendo que o jogo faz parte do estudo e não ao contrário. Procuro tomar o cuidado para que o jogo fique conectado ao conteúdo e que não se torne o foco principal.

> Num contexto de jogo, a participação ativa do sujeito sobre o seu saber é valorizado por pelo menos dois motivos. Um deles deve-se ao fato de oferecer uma oportunidade para os estudantes estabelecerem uma relação positiva com a aquisição de conhecimento, pois conhecer passa a ser percebido como real possibilidade. [...] Outro motivo que justifica valorizar a participação do sujeito na construção do seu próprio saber é a possibilidade de desenvolver seu raciocínio. Os jogos são instrumentos para exercitar e estimular um agir-pensar com lógica e critério, condições para jogar bem e ter um bom desempenho escolar. (SILVA, KODAMA, 2004, p. 3).

Os alunos começam a ler as regras, por espontânea vontade, e vamos discutindo e simulando o jogo. Ressalto que há uma quantidade máxima de números diferentes de cartas, que a soma 15 é bastante importante para a sequência e que deverão ser registradas na Folha 2 que foi entregue a eles.

Neste momento, utilizo a simulação feita para exemplificar o preenchimento das jogadas na Folha. Os alunos são agrupados em trios, de acordo com a quantidade presente.

Nos grupos, os alunos ficam mais soltos e eu, também, fui esquecendo a filmadora aos poucos, graças à preocupação e função de professora de possibilitar um ambiente que os alunos pensem – como normalmente tento fazer em sala de aula.

O jogo se mostrou um instrumento eficaz, a atividade foi acontecendo e os alunos, ao mesmo tempo em que jogavam, faziam matemática, como sugerem as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra- exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (2006, p. 69)

Ao longo das jogadas, os alunos foram fazendo os registros, que terão um papel introdutório fundamental para o estudo do conteúdo proposto. O certo ou errado nas atitudes dos alunos ao jogarem a escova diofantina não foi importante perto das apropriadas, convenientes e importantes escritas deles, bem como nas suas discussões.

O trabalho em grupo proporcionado pelo jogo possibilitou que os alunos discutissem, pensassem e questionassem as regras e as jogadas realizadas pelos colegas e por eles próprios. O interesse de um dos grupos, por exemplo, estava tão claro em obter a soma 15 que, a cada jogada, eles respeitavam o tempo do colega e pensavam numa maneira de obter a soma, mesmo que a jogada não fosse para si próprio. Este grupo, assim como outros em que os colegas se ajudaram, entendeu bem o espírito das atividades, não deixaram a competitividade predominar e, sim, o querer fazer dar certo.

Observe, na Figura 23, que o grupo mostra suas jogadas, sem que isso tivesse sido solicitado, para que os outros pudessem ver, comentar e entender o que foi feito. Outra situação curiosa foi de um grupo que não seguiu as regras do jogo quanto à distribuição das cartas e ordem das jogadas, mas cumpriu o que foi solicitado a respeito do registro na Folha.

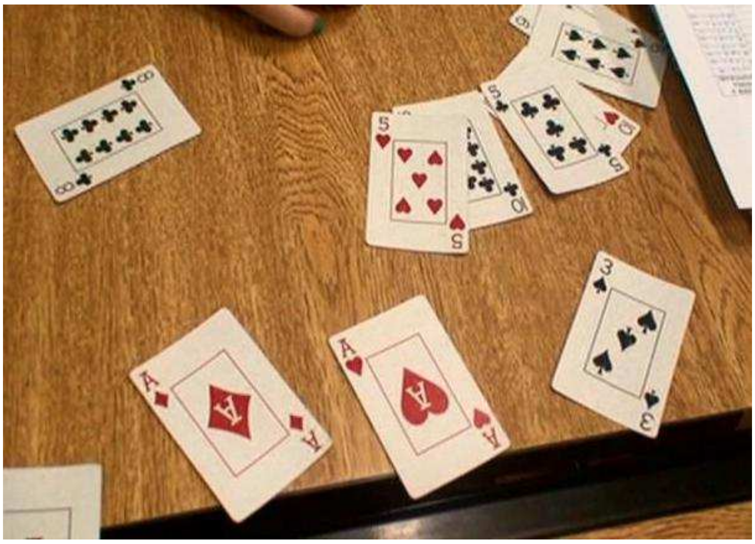


Figura 23 – Fotografia dos alunos mostrando suas jogadas.

Finalizo a aula recolhendo as Folhas com as jogadas e dizendo que, na próxima aula, nossa discussão terá como base tais anotações.

2º DIA – 2 períodos cada um de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Definir combinação linear

RELATO:

Começo escrevendo com os alunos o registro das jogadas que eles fizeram na aula anterior, lembrando que a escrita foi feita de maneira bem característica: na Folha 2 , os alunos fizeram o registro de acordo com a tabela dada que consistia em escrever a carta utilizada e a quantidade e, a partir disso, anotar a soma.

Escrevo uma tabela no quadro, conforme a separação feita na aula anterior dos grupos, para observarem quando aparecia nas jogadas algum par específico de cartas.

Para fazer o registro no quadro, pergunto se algum grupo conseguiu soma 15 com as cartas “ás” e “2” em especial para o grupo responsável por observar e registrar estas jogadas, caso acontecessem, com este par de cartas. Escrevo no quadro uma jogada qualquer com estas cartas e fazemos a soma, os alunos rapidamente percebem a impossibilidade da soma 15.

“Não tem como, conseguimos no máximo uma soma 12.” diz um aluno. A partir desse comentário, exemplifico e chamo atenção para a limitação de cartas quando usamos um baralho. Como temos a limitação de um baralho, portanto 4 cartas com o mesmo número, a soma 15, neste caso não acontece. E, assim, fomos fazendo registros com os pares “ás” e “3”, “ás” e “4”, “ás” e “5”, “ás” e “6”, “ás” e “7”, “ás” e “8” e “ás” e “9”, conforme a Figura 24.

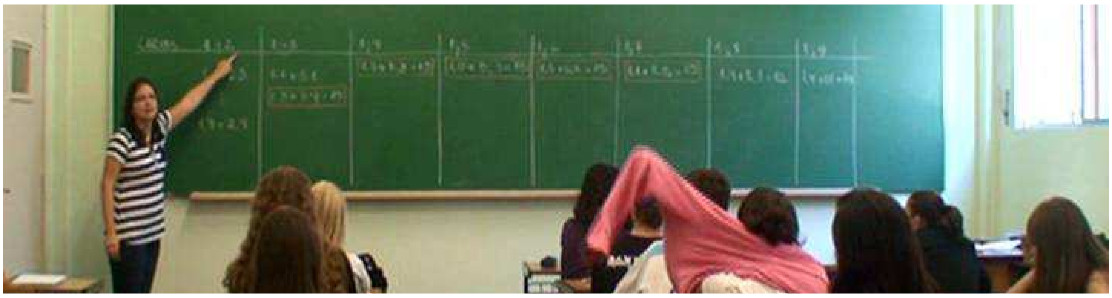


Figura 24 – Fotografia do registro das jogadas no quadro.

Aparece uma jogada em que a soma 15 foi possível com as cartas “ás” e “5”, porém com uma quantidade zero da carta “ás”. Com isso, discutimos o significado dos conectivos e/ou e consideramos que tínhamos 3 possibilidades ao pensar no par de cartas “ás” e “5”: jogadas somente com “ás”, somente com “5” e com as duas ao mesmo tempo. Assim, a única que resultou em soma 15 foi com a exclusividade da carta “5” e para a escrita, registro da jogada, bastou utilizar a quantidade zero para a carta “ás”.

Após o registro no quadro das jogadas, introduzi a variação das quantidades de cartas “ás” e “2” sem a limitação do baralho e então escrevemos a primeira equação, 1x+2y=15, a partir da discussão feita somente com as jogadas dos alunos.

Ainda, surgiu a possibilidade de tomar somente uma das cartas. Um aluno observou que: “não conseguimos, mesmo sem a limitação do baralho, pegar somente carta “2” , porque 2 é par”. Esta foi a primeira ideia que surgiu de quando se consegue, ou não, soma 15 de forma mais genérica.

A partir da equação introduzida, os alunos começam a perceber que não só a limitação de baralhos impede soma 15 que e que há outros fatores, mas ainda não conseguem ir além disto.

Com a ideia da equação para as cartas "ás" e "2", escrevemos as equações para as cartas "ás" e "3", "ás" e "4", "ás" e "5", "ás" e "6", "ás" e "7", "ás" e "8", "ás" e "9" e "ás" e "10". Pergunto aos alunos se eles conseguem pensar em outras equações, mas eles ficam um pouco dispersos e entendem como se eu estivesse perguntando uma equação cujos coeficientes dão soma 15; por isso, mostro a tabela com todas as possibilidades de equações para o jogo, conforme a Figura 25.

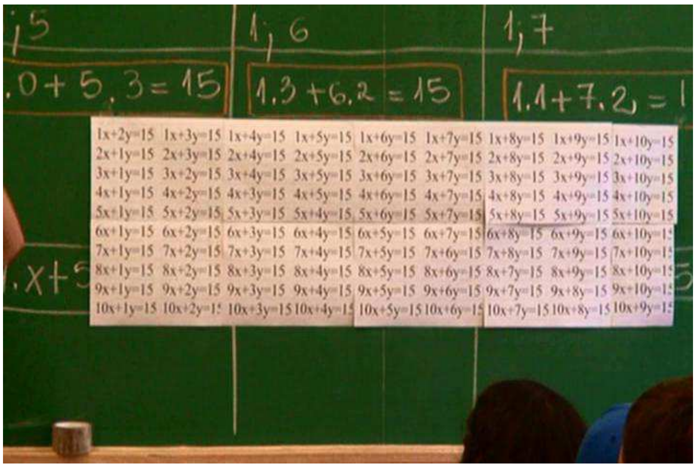


Figura 25 – Fotografia da tabela com as equações do jogo.

De imediato, a pergunta que surgiu foi a respeito de x e y serem negativos. Para alguns, parecia um questionamento um tanto absurdo enquanto outros lembraram que estas equações eram situações do jogo e, portanto, x e y devem ser positivos. Este momento serviu para lembrar de onde obtemos as equações e, também, como um elemento motivador para extensão dos inteiros, que será feita mais tarde.

Na tabela colada no quadro, começamos a colorir de amarelo a situação em que a equação já foi pensada anteriormente, como, por exemplo, 1x+2y=15 e 2x+1y=15. Ambas as equações utilizam as cartas "ás" e "2".

Surgiu uma questão dos alunos: "dá para resolver uma equação com duas incógnitas?" No ensino fundamental, quando estudam sistemas, alguns professores costumam dizer erroneamente que "...para resolver uma equação com duas incógnitas precisamos de outra equação...". Confirmando isso, Costa concluiu na sua pesquisa esta situação entre os docentes "Durante as entrevistas, alguns professores citaram a necessidade de mais de uma equação ou mais restrições para resolverem os problemas.” (2007, p. 115). As orientações complementares aos PCN’s recomendam que o estudo de equações possa ser feito de maneira mais significativa: “Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais [...]. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola.” (2006, p. 122)

Aproveitei o momento para lembrar que um dos objetivos das atividades é que, dada uma equação com duas incógnitas, queremos saber responder às perguntas: Essa equação tem solução inteiras? Quais são as soluções? Os alunos ficaram pensando sobre os questionamentos e os deixamos como uma grande questão para ser respondida até o final das atividades.

Utilizando a ocasião, procuro dar um tratamento qualitativo ao estudo de equações, conforme sugestões das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais não enfatizando os cálculos, mas analisando se uma equação linear tem soluções inteiras.

Continuando a análise da tabela, entrego uma tabela para cada aluno e peço que pintem de verde as equações que tiveram solução e de vermelho as que não tiveram solução, ainda pensando nas situações do jogo, ou seja, para uma quantidade finita de baralhos. Solicito que comecem olhando pelas linhas e que todos tenham pintado a situação repetida de amarelo, conforme Figura 26.

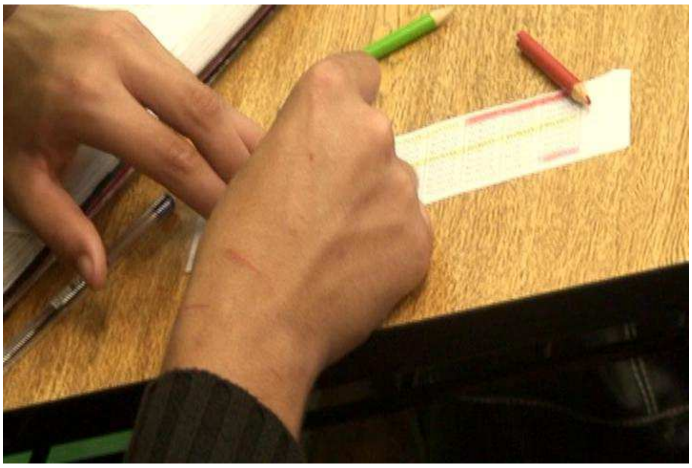


Figura 26 – Fotografia dos alunos colorem a tabela das equações do jogo.

Os alunos tiveram certa dificuldade para colorir a tabela, pensando nas equações que têm solução; porém dois alunos na turma conseguiram concluir para a situação do jogo e suas equações que “quando for multiplicado por dois números pares não vai dar certo”, ou seja, observaram que as equações com coeficientes pares não terão como resultar em soma 15, do que já haviam desconfiado antes para a situação de utilizar um número de carta par.

A tabela teve como função provocar os alunos a darem soluções para as equações que não tinham aparecido no jogo, ou seja, potencializou o que Oliveira (2006) constatou como a única forma de abordagem pelos livros didáticos “Na resolução proposta pelos autores, privilegiou-se o método de tentativa e erro.” (p. 94).

E Costa (2007) sobre a estratégia dos professores “embora os professores entrevistados afirmassem trabalhar com problemas de matemática discreta modeláveis via equação diofantina linear, nenhum deles deu indícios de trabalhar com seus alunos utilizando conhecimentos das propriedades dessas equações para decidir se as mesmas têm solução e quais seriam essas soluções”.

Esta situação, com tantas equações, buscou convencer os alunos que a tentativa não é uma maneira eficiente para resolução das equações.

Pedi que os alunos colassem a tabela no caderno e, para dirimir as dúvidas, corrigimos no quadro colorindo a tabela grande. Esse momento foi meio confuso, pois os alunos já estavam bastante agitados por estarem no final da aula, o que dificultou a minha concentração e a deles.

Com a ideia de conseguirmos soma 15 para diferentes situações, defino combinação linear de inteiros, com coeficientes inteiros, a partir da igualdade $1 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 15$ e de forma genérica $ac+bd=N$, buscando deixar claro que conseguimos várias maneiras de escrever o número 15 e, portanto, não, necessariamente, $ac+bd=N$ é escrito de maneira única.

3º DIA – 1 período de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Construir a equação que modela o jogo.

Ampliar as possibilidades de solução da equação.

ATIVIDADES UTILIZADAS

FOLHA 3

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 3**

QUESTÃO:

Observe as possibilidades de soma, conforme o quadro visto em aula. Agora pense nas possibilidades que resultam em soma igual a 15 para uma quantidade qualquer de baralhos.

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
2x+1y=15	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
3x+1y=15	3x+2y=15	3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15	4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15	6x+7y=15	6x+8y=15	6x+9y=15	6x+10y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15	7x+6y=15	7x+8y=15	7x+9y=15	7x+10y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15	8x+6y=15	8x+7y=15	8x+9y=15	8x+10y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15	9x+6y=15	9x+7y=15	9x+8y=15	9x+10y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15	10x+6y=15	10x+7y=15	10x+8y=15	10x+9y=15

Da mesma forma que na tabela de aula, identifique:

	Situação já considerada
	Há solução
	Não há solução

Consegues identificar alguma característica nestas equações que permite que consigamos solução? Qual?

Como resolverias a equação: x+12y=15, sendo $x,y \in N$

Como resolverias a equação: x+12y=15, sendo $x,y \in Z$

FOLHA 4

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 4**

Exercício

Montar uma tabela com soma 12 e fazer a mesma análise que foi feita na de soma 15.

Da mesma forma que na tabela de aula, identifique:

	Situação já considerada
	Há solução
	Não há solução

Escrever a equação que modela este jogo:

Consegues identificar alguma característica nestas equações que permite que consigamos solução? Qual?

Como resolverias a equação: $x+13y=12$, sendo $x,y \in \mathbb{N}$

Como resolverias a equação: $x+13y=12$, sendo $x,y \in \mathbb{Z}$

RELATO:

Começo a aula retomando a tabela e chamando atenção para as possibilidades de jogadas. Assim, lembro que, com a carta “ás” e a carta “2”, montamos a equação $1x+2y=15$, onde x é a quantidade de cartas “ás”e y é a quantidade de cartas “2”. Também com as cartas “ás” e “3” obtemos a equação $1x+3y=15$ e, assim por diante, para todos os pares de cartas e, então, construímos a equação $ax+by=15$ onde x é a quantidade de cartas "*a*" e y é a quantidade de cartas "*b*".

Adotamos a ideia de Monteiro (2010, p.4), quando partimos de combinações lineares para construir a equação que modela o jogo, que estabelece "As equações diofantinas lineares se encontram na fronteira entre a álgebra e aritmética". Assim, a equação que modela o jogo "escova diofantina" foi obtida de forma que não estivesse estabelecida a indissociabilidade da aritmética e da álgebra.

Seguindo, os alunos fazem o mesmo que na aula anterior em que coloriram a tabela. Porém, a limitação da quantidade de baralhos foi retirada, então, por exemplo, para a jogada com as cartas "ás" e "2", em que não se conseguia soma 15 pela restrição de 1 baralho, ou seja, havia disponibilidade de no máximo 4 cartas do tipo "ás" e "2", a soma seria no máximo 12, agora esta soma 15 é possível.

Solicito que eles façam esta tarefa de forma individual, para poder verificar se eles estão compreendendo o que está sendo feito até esta etapa. Esta observação foi feita com bastante rigor, porque eles costumam realizar algumas atividades juntos, o que na maioria das vezes é proveitoso; porém, nesse momento, o interesse era de perceber o que cada aluno tinha desenvolvido sem a interferência de outro.

Para colorir a nova tabela, uma aluna tem a ideia de aproveitar a tabela da aula anterior, sem a restrição na quantidade de baralhos e diz: "posso analisar só as que pintei de vermelho" – veja Figura 27, ou seja, ela entendeu que as equações que já tinham solução continuariam as tendo, restava verificar se as que não tinham solução anteriormente, agora, sem a limitação, têm. "O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático." (PCNEM, 2000, p.52). Isso se confirma com o que a aluna colocou anteriormente, as atividades realizadas previamente nas atividades propostas já passaram a fazer parte da sua rede de conhecimento.

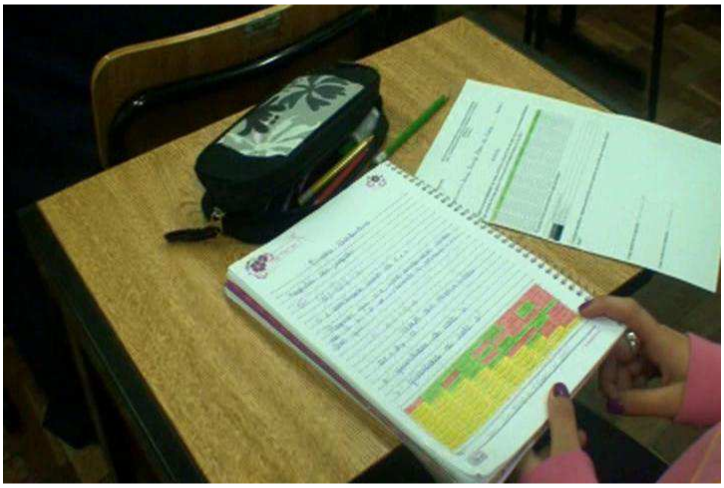


Figura 27 – Fotografia de uma aluna fazendo a comparação entre as atividades.

Para o preenchimento da Folha 3 , momento em que solicitei que os alunos fizessem sozinhos, eles se mostraram bastante apreensivos e inseguros. Solicitei que escrevessem da forma como estavam pensando, que não se preocupassem com os termos.

Solicitei que registrassem o que tinham como resposta da maneira como o entendiam, mesmo que a forma não fosse a da simbologia matemática, mas ressaltei a importância de que escrevessem suas ideias. Devido à grande dificuldade que tiveram em responder às perguntas da Folha, o tempo da aula não foi suficiente, mas recolhi o material e disse que olharia até onde tinham conseguido fazer e entreguei as atividades da Folha 4 para realizarem em casa.

4º DIA – 2 períodos cada um de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Definir equação diofantina linear

Representar geometricamente algumas soluções de uma equação diofantina linear

ATIVIDADES UTILIZADAS:

FOLHA 5

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 5**

Como representarias no plano cartesiano a equação 2x+4y=15?

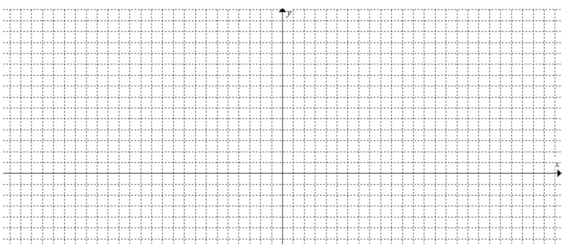
E a equação x+3y=15?

FOLHA 6

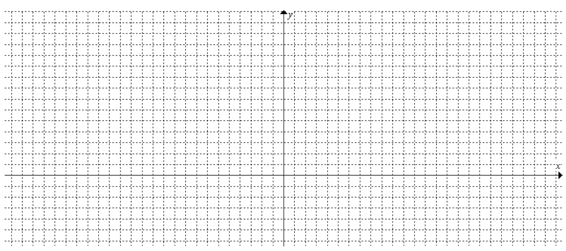
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 6**

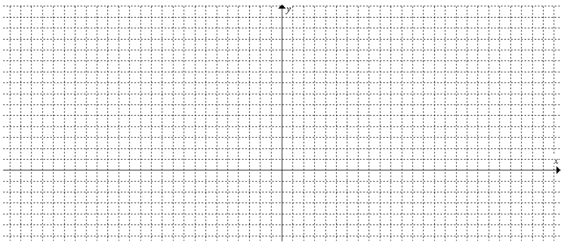
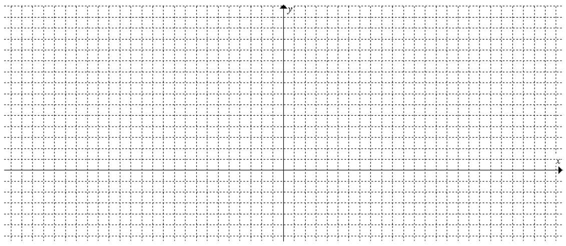
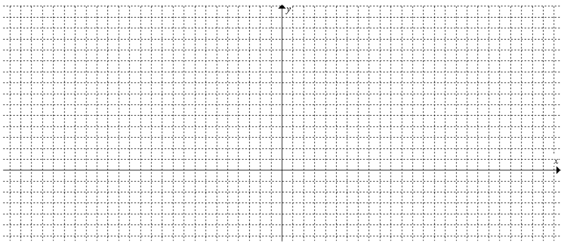
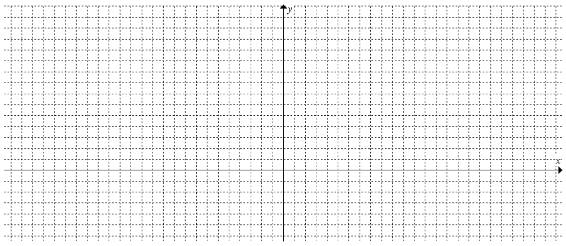
Represente no plano cartesiano as equações abaixo e, quando possível, identifique os pontos cujas coordenadas são inteiras (marque o ponto com uma outra cor).



a) x+4y=15



b) 2x+6y=15

 **c) 3x+9y=15**	 **d) x+3y=5**
 **e) 2x+4y=12**	 **f) x+2y=6**

Quais equações diofantinas têm solução em N?

O que as equações "c" e "d" têm em comum? Sabes o que podemos chamá-las?

RELATO:

Começo a aula devolvendo a Folha da aula anterior que os alunos não conseguiram terminar de preencher no tempo previsto e dou mais um tempo para eles terminarem de responder às perguntas da Folha. Neste momento, mais uma vez, uma aluna pergunta o que significam os símbolos N e Z. Noto que eles não dominam o conteúdo de conjuntos numéricos e escrevo no quadro o que eles denotam.

Lembro a equação construída na aula anterior $ax+by=15$ e começo a perguntar das equações que encontraram para soma 12, conforme Folha 3 de exercícios para casa e questiono sobre a solução destas equações e obtemos a equação $ax+by=12$, que modela a situação da Folha.

Considero um "c" inteiro qualquer e montamos a equação genérica $ax+by=c$ e, assim, defino equação diofantina linear. Explico que, a partir de agora, de posse da definição da equação, nosso interesse passam a ser as incógnitas x e y e entrego uma Folha para eles responderem, o que causou um alvoroço em aula. Ao verem a Folha 5 assustam-se, pois poucos lembravam plano cartesiano e outros não tinham estudado esse conteúdo.

Como notei que os alunos estavam em dúvida, lembrei uma brincadeira infantil com cordas em que duas pessoas seguram a corda em lugares diferentes e outra passa por baixo da corda e então a brincadeira consiste em ir baixando a corda, assim comecei a falar na representação geométrica da equação linear, a partir de dois pontos. Como o clima em aula tinha ficado tenso, pois estavam com dificuldades, utilizei como estratégia o exemplo da brincadeira para suavizar o ambiente e propiciar o entendimento da representação geométrica da equação linear.

Com isso, falo que a nossa equação $x+3y=15$ corresponde a uma reta no plano cartesiano e que, como na brincadeira usamos duas pessoas, para representar a equação no plano, precisamos de dois pontos. Assim, marcamos dois pontos no plano e traçamos a reta. Lembro que esta equação era uma das equações do jogo e que uma das soluções era não pegar nenhuma carta “ás” e cinco cartas “3”, considerando que podíamos ter infinitos baralhos.

Solicito que eles marquem os pontos sobre a reta cujas coordenadas são, ambas, inteiras. Depois de um tempo, escrevo no quadro, conforme Figura 28, e chamo atenção sobre a diferença de termos para uma solução natural e inteira da equação considerada. Ainda lembro que os primeiros pontos marcados, no primeiro quadrante, que correspondem às soluções naturais da equação, são as situações que poderiam ter aparecido para a situação do jogo com infinitos baralhos.

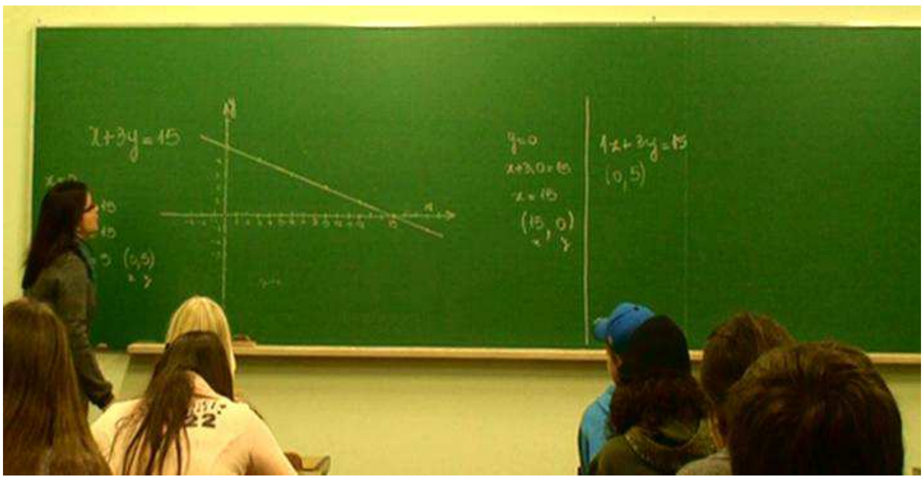


Figura 28 – Fotografia da marcação dos pontos de ambas coordenadas inteiras.

Entrego para os alunos uma tabela com os pares ordenados que são solução da equação e enfatizo que, no plano cartesiano, conseguimos ver algumas soluções, bem como na tabela.

Mostro a representação da equação 2x+4y=15 e lembro que, na situação do jogo, eles já tinham percebido que essa jogada era impossível. Então, de posse da reta no plano cartesiano e da tabela com os pares ordenados, “confirmamos” esta situação, notando que a reta não passa por pontos de ambas as coordenadas inteiras, mesmo para a situação de infinitos baralhos.

Ainda, mostro a representação da equação 3x+6y=15 e os alunos já demonstram ter conseguido fazer a representação. Questiono sobre a quantidade de solução inteiras e naturais. Por fim, entrego a Folha 6 de exercícios para casa para entregarem na próxima aula.

5º DIA – 1 período de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:
Definir divisor de um número
Definir divisor comum e máximo divisor comum (MDC)

ATIVIDADES UTILIZADAS:

FOLHA 7

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 7**

1. Considere o número 10.

1.1 Cite um divisor de 10

1.2 Cite todos os divisores de 10

2. Como definirias divisor de um número inteiro?

FOLHA 8

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 8**

Considere os números 16 e 20.

1) Cite todos os divisores de 16

2) Cite todos os divisores de 20

3) Quais os divisores comuns de 16 e 20?

4) Qual o maior dos divisores comuns de 16 e 20?

4.1) Sabes como se chama o maior dos divisores comuns de 16 e 20? Como?

RELATO:

Começo recolhendo a atividade para casa e os alunos pedem uma aula de dúvidas. Combinamos que a próxima ficaria reservada para perguntas deles, peço que eles preencham a Folha 7 e recolho-as. Discutimos as questões da Folha e alguns alunos ficam inseguros, pois não tinham clareza do que é definir algo, achavam que bastaria um exemplo, então houve um debate sobre a diferença entre definição e exemplo para definir divisor.

Este debate evidenciou as formações desiguais dos alunos, uma vez que eles são oriundos de diferentes escolas de ensino fundamental da cidade, mas proporcionou o resgate e o aprofundamento dos conceitos, o que é corroborado pelo PCN (2000, p.9): "O Ensino Médio passa a ter a característica da terminalidade, o que significa assegurar a todos os cidadãos a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental". Ficando claro que o formato de aula feito através de discussões, estimula o debate e, com isso, oportuniza o crescimento de cada aluno.

Entrego a Folha 8 para eles completarem, recolho-as, discutimos as respostas e definimos divisor comum e máximo divisor comum. Tanto o preenchimento das Folhas quanto as discussões delas transcorreram tranquilamente. Os alunos realizaram as atividades e as trocas sobre as Folhas sem dúvidas.

O único episódio destoante foi o de um aluno que questionou a definição de divisor, por pensar que podemos aceitar um racional como divisor. Seus colegas imediatamente se mobilizaram para convencê-lo de que isso não fazia sentido.

6º DIA – 2 períodos cada um de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Esclarecer as dúvidas das aulas anteriores

Calcular MDC conforme lembram

Instigar os alunos a pensarem sobre a relação entre o MDC dos coeficientes da equação e o seu resultado

ATIVIDADES UTILIZADAS:

FOLHA 9

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 9**

Escreva o MDC entre os números das cartas do jogo de soma 15 abaixo. (coloque o MDC logo abaixo da equação - na célula da tabela)

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
		3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
			4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
				5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15

Quais são situações em que o MDC é divisor de 15?

Dada uma equação ax+by=c, de acordo com o observado na tabela e na pergunta acima, quando podes afirmar que é possível resolver a equação em N?

FOLHA 10

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 10**

1) Considere os números e calcule o MDC deles:

a) 2 e 5

b) 1 e 3

c) 3 e 6

d) 6 e 18

e) 2990 e 3220

f) 1351 e 278

2) O que podes concluir sobre a maneira como calculas MDC a medida que foi resolvendo os exercícios anteriores?

RELATO:

A aula inicia com os alunos preenchendo a Folha 9 , conforme a Figura 29.

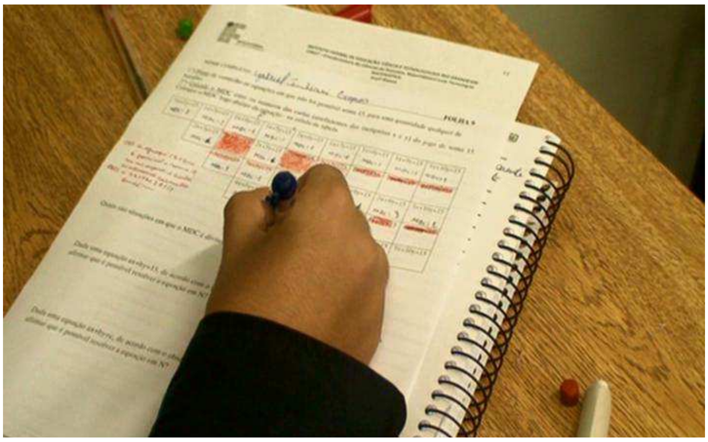


Figura 29 – Fotografia do preenchimento da Folha 9.

Perguntei se todos já tinham pintado a tabela e calculado o MDC para que, antes que iniciassem a responder às perguntas, conferíssemos os resultados. Combinamos que nas correções das equações que eles tivessem pintado de vermelho e que não tinham solução no jogo, seria introduzido um asterisco.

Uma aluna percebeu que havia uma relação entre o MDC dos coeficientes da equação e o valor da equação. E ainda disse que “as equações em que dá para dividir o número pelo MDC são as que têm solução no jogo”.

Após discutirmos a parte da tabela da Folha 9, os alunos responderam às perguntas da Folha e a entregaram. Isto foi feito para que os alunos conseguissem “Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades” (Parâmetros Curriculares Nacionais “Mais”, 2002, p.116).

Esta Folha foi a primeira que fortemente exigiu dos alunos uma atenção no que se refere a fazer uma conexão entre a equação dada e o que se obtém a partir dela, desta forma os alunos podem desenvolver o que sugere os Parâmetros Curriculares Nacionais “Mais” anteriormente citado. As perguntas tinham o intuito de provocar que procurassem um padrão para as equações que tinham solução e outro para as que não tinham.

Depois, reservo a aula para as dúvidas que apareceram até esta parte das atividades e exercício das Folhas, conforme o tratado na aula anterior. E eles pedem que eu corrija a Folha 6, que aborda a representação geométrica de algumas soluções da equação dada.

Como os alunos se mostraram novamente desconfortáveis em relação à representação geométrica, este momento da aula demorou bastante para que o entendimento da solução de uma equação ficasse claro e fizesse sentido, e finalizamos a discussão definindo equações equivalentes.

Entrego a Folha 10 para eles preencherem. As questões tratam do cálculo do MDC, e também peço que eles mostrem como calculam o MDC para números grandes. Eles ficam confusos e dizem: “sei que tem um jeito de fazer, mas não lembro” e “acho que tem um método bem mais rápido, só que não lembro” e, ainda, “desde a 5ª série que não vejo esta matéria, mas sei que tem um jeito fácil de calcular isto”.

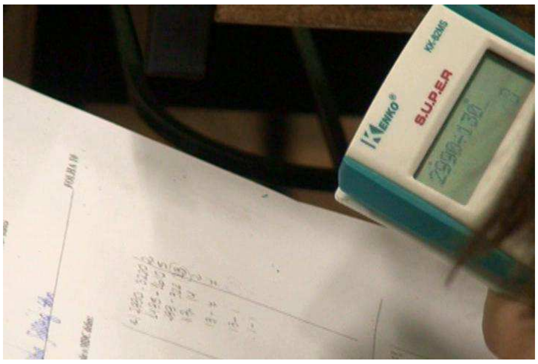


Figura 30 – Fotografia da utilização da calculadora.

Vale dizer que os alunos desta escola podem utilizar calculadora nas disciplinas de matemática, veja Figura 30, “Considerando a Matemática para a Tecnologia, deve-se pensar na formação que capacita para o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, dois instrumentos de trabalho bastante corriqueiros nos dias de hoje.” (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, 2006, p.87). Este tema um tanto polêmico, “uso ou não da calculadora”, não faz parte do nosso estudo, pois o objetivo da atividade estava claro e os alunos estavam muito focados no que deveriam fazer e entender da atividade.

A aula termina comigo lembrando o que tem que ser feito na próxima aula a respeito do fechamento das ideias do cálculo do MDC e deixo a questão sobre a relação do MDC com as soluções das equações da tabela da aula anterior.

7º DIA – 1 período de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Chegar ao teorema que afirma se uma equação diofantina linear tem (ou não) soluções inteiras

Calcular o MDC através do Algoritmo de Euclides

ATIVIDADES UTILIZADAS:

FOLHA 11

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 11**

1) Considere os números e calcule o MDC deles:

a) 2 e 4

b) 1 e 7

c) 3 e 4

d) 20 e 80

e) 429 e 33

f) 1530 e 8140

2) O que podes concluir sobre a NOVA maneira de calcular MDC se comparares com o método utilizado anteriormente?

RELATO:

Começo a aula com a tabela da aula anterior colada no quadro, na qual os alunos utilizaram para calcular o MDC entre os coeficientes das incógnitas x e y, veja Figura 31.

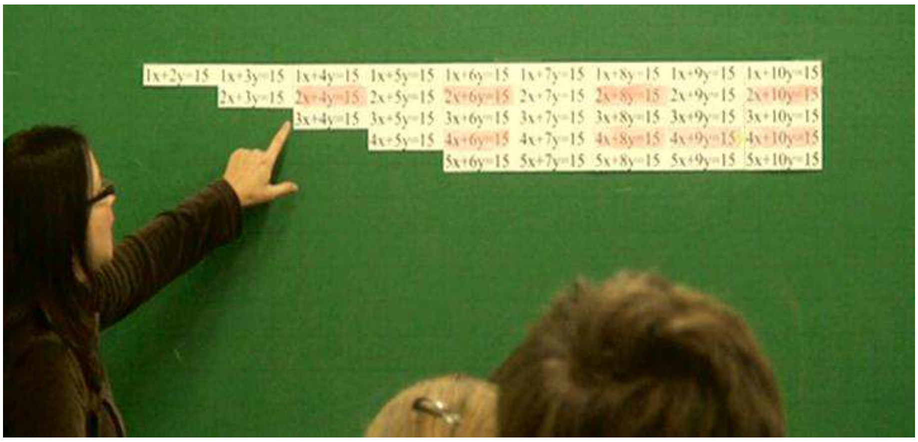


Figura 31 – Fotografia do cálculo do MDC na tabela do jogo “Escova Diofantina”.

Pintamos as equações que não tinham solução no jogo, para infinitos baralhos, e colocamos um asterisco na equação 4x+9y=15, pois essa é a única equação que não tem ambos coeficientes pares e não tem solução natural, mas tem solução inteira. Observe na fotografia 9 que consideramos parte da tabela das equações, excluindo as outras equações que recairiam nesta mesma situação.

Observamos que as equações que não estão em vermelho apresentam o MDC de seus coeficientes sendo 1, 3 ou 5. Pergunto se eles conseguiram observar alguma relação destes números com as equações e uma aluna diz que “todos são divisores de 15”.

Para finalizar esta discussão, lembro que, nas equações da tabela, buscávamos soluções naturais, pois x e y estavam relacionados à quantidade de cartas e que, mesmo que tirássemos a restrição de soluções positivas, todas as equações em vermelho, exceto a com asterisco, continuariam sem solução inteira. Visto que, a equação com asterisco não tem solução natural, mas tem solução inteira.

Construo com os alunos o teorema que afirma quando uma equação diofantina tem solução inteira para uma situação qualquer e não somente a do jogo, a partir das conclusões observadas na tabela de equações e MDC.

Neste momento, retomo a dúvida das primeiras aulas sobre a obrigatoriedade de se ter outra equação para que eles percebam que quando se trata de buscar as soluções inteiras de uma equação do tipo $ax+by=c$, com coeficientes inteiros, isto já não é necessário. Saliento que, de posse de uma equação com coeficientes inteiros, já podemos afirmar se esta equação tem ou não solução inteira. E discutimos que chegamos a um primeiro resultado de reconhecer se uma equação tem solução inteira, mas ainda não sabemos quais são estas soluções.

Lembro a última Folha respondida na aula anterior sobre o cálculo do MDC em que os números foram aumentando e em que alguns foram ficando em dúvida sobre o resultado do MDC. Digo que o próximo passo é termos a garantia do cálculo do MDC para nos ajudar a obter as soluções das equações, quando existirem.

Assim, proponho o cálculo do MDC (23, 120), mas um aluno “salta” e diz que “é obvio que é 1”, então peço que ele explique e ele diz “como 23 é primo e 120 não é divisível por 23 então o que divide os dois é 1”. Digo que a explicação dele está perfeita e que resolveremos como se não lembrássemos que 23 é primo, caso isto ocorra para algum outro número. Então, começo a resolver pelo algoritmo de Euclides e rapidamente eles entendem que basta repetir o processo. Uma aluna, querendo dizer isto diz “e assim sucessivamente”, expressão que ao longo das aulas eles foram colocando quando já tinham entendido a argumentação.

Entrego a Folha 11 para eles resolverem em casa.

8º DIA – 2 períodos cada um de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Reforçar o cálculo do MDC pelo Algoritmo de Euclides

Escrever o MDC como combinação linear dos números envolvidos

Associar uma equação à combinação linear obtida

Escrever uma solução comparando a combinação linear e a equação associada a ela

Utilizar o teorema da aula anterior que diz se a equação diofantina tem (ou não) soluções inteiras

Escrever o MDC dos coeficientes de uma equação dada como combinação linear deles

Encontrar uma solução de uma equação dada

RELATO:

Começo a aula comentando que alguns alunos me procuraram no atendimento para resolver a Folha do MDC que eles levaram para casa. Explico que ainda vamos resolver alguns e depois eles poderiam refazer a Folha 11 .

Calculamos o MDC (18, 6) usando as ideias da aula anterior e o MDC(2990, 3220), que era um exercício resolvido anteriormente, o qual eles deveriam resolver com seus conhecimentos prévios e no qual eles ficaram com muitas dúvidas. Após a resolução destes, os alunos disseram não ter mais dúvidas.

Chamo atenção para o fato de que o método de Euclides é eficaz para encontrar MDC mesmo entre números grandes, sem utilizar a fatoração em primos. Reescrevemos as divisões, Figura 32, e, com isso, retomo o conceito de combinação linear, que foi um pouco demorado, mostrando que cada divisão do algoritmo de Euclides corresponde a uma combinação linear dos números envolvidos.

Figura 32 – Fotografia da utilização do Algoritmo de Euclides.

Reservo um tempo para eles terminarem de preencher a Folha 11, que levaram para casa e peço que esses cálculos apareçam em pelo menos um exercício, ou sempre que eles tiverem dúvida sobre o MDC.

Passamos então a escrever o MDC como combinação linear. Explico que usaremos o algoritmo do cálculo do MDC para conseguir esta escrita. Fazemos o exemplo de MDC(2,9)=1 e montamos uma equação a partir da combinação linear. Comento que a combinação linear e o MDC nos ajudaram a encontrar uma solução da equação e que agora temos de buscar as outras (veja Figura 33).

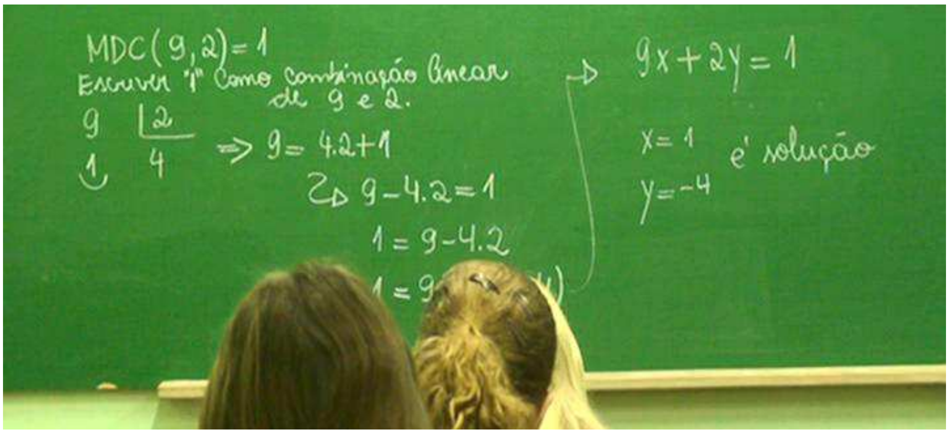


Figura 33 – Fotografia da solução da equação associada à combinação linear.

Faço outro exemplo: escrevemos o MDC(3220, 2990)=230 como combinação linear de 3220 e 2990. Lembro que usaremos as divisões que já tínhamos feito quando do cálculo do MDC.

Resolvemos, ainda, a situação em que o MDC não aparecia imediatamente na divisão, escrevemos MDC(3,6)=3, conforme Figura 34, como combinação linear de 3 e 6. Então expliquei que deveríamos escrever o resto da divisão como combinação linear e usar esta escrita. Novamente associei a combinação linear a uma equação.

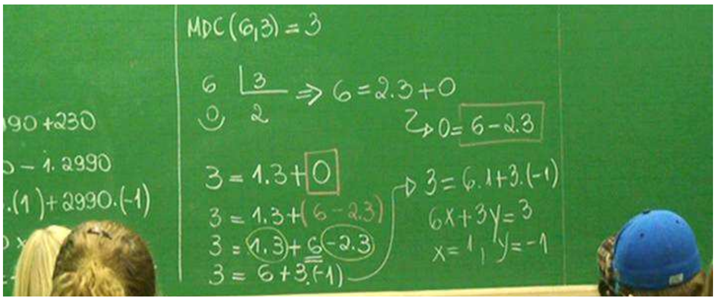


Figura 34 – Fotografia da correção da solução da equação associada à combinação linear.

Peço que escrevam o MDC(18, 6) como combinação linear deles e depois corrijo no quadro. Eles perguntam o que deverão fazer se um dos números for negativo.

Um aluno me chama e diz que escreveu a combinação linear de outra maneira. Ainda, as orientações curriculares indicam um caminho para este tipo de situação vivenciada.

> Ao organizar uma atividade prática, o professor deve valorizar o processo, explorar os fenômenos e analisar os resultados sob vários ângulos. Caso os resultados obtidos sejam diferentes dos esperados, deve aproveitar a situação para discutir o processo de produção científica. Ou seja, possibilitar ao aluno vivenciar as etapas do método científico. (Orientações Curriculares para o Ensino Médio, 2006, p 31)

Discutimos a combinação linear obtida pelo aluno, buscando aproveitar todas as produções dos alunos. Esta situação ilustra o que buscamos seguir, seguindo as sugestões das Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

Assim, montamos a equação com a combinação linear que fizemos e verificamos se a solução dele é solução da equação que encontramos. Fizemos: vamos constatar se o par ordenado (1, -2) é solução da equação $18x+6y=6$. Substituindo na equação $18(1)+6(-2)=6$, portanto o par é solução da equação, veja essa verificação na Figura 35. Esta situação facilita o questionamento das demais soluções e aproveito o momento para reafirmar que devemos de procurar todas as soluções da equação.

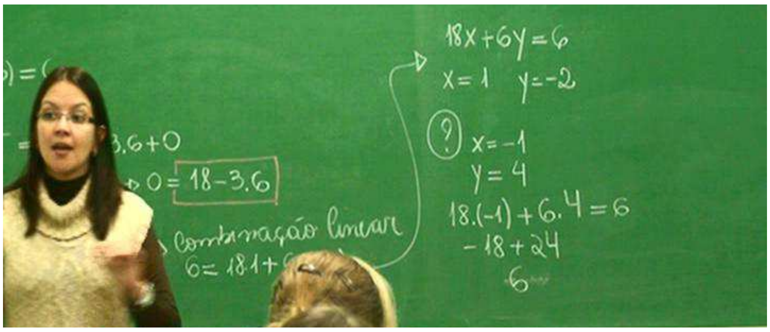


Figura 35 – Fotografia da verificação da solução encontrada por um aluno.

Até aqui resolvemos os exemplos em que eram dados dois números, calculamos o MDC entre eles, escrevemos o MDC como combinação linear destes números, montamos uma equação e obtivemos uma solução desta equação. Digo que faremos agora o processo inverso, ou seja, vamos partir de uma equação.

Dada a equação $4x+2y=2$, digo que a primeira questão é ver se esta equação tem solução inteira. Então pergunto o MDC dos coeficientes das incógnitas e observamos que ele é divisor de 2, resultado da equação. Concluímos que a equação dada tem solução inteira. Partimos para busca de uma solução, escrevemos 2 (MDC (4,2)) como combinação linear de 2 e 4 e encontramos uma solução inteira da equação $x=1$ e $y=-1$.

Deixo de tarefa para casa a equação $3x+y=1$ para eles encontrarem uma solução inteira.

9º DIA – 2 períodos cada um de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Reforçar o cálculo do MDC como combinação linear entre os números dados.

ATIVIDADES UTILIZADAS:

FOLHA 12

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Prof^a Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 12**

1) Considere os números, o MDC deles (calculado anteriormente) e escreve o MDC como combinação linear destes números:

a) 2 e 4

b) 1 e 7

c) 3 e 4

d) 20 e 80

e) 429 e 33

f) 1530 e 8140

RELATO:

Começo a aula perguntando se eles tinham feito o solicitado na aula anterior, que era obter uma solução para a equação $3x+y=1$. Peço que os que conseguiram fazê-lo, entreguem sua resolução e corrijo no quadro para a toda turma, seguindo os mesmos passos utilizados na aula anterior para obter a solução da equação $4x+2y=2$.

Utilizamos a combinação linear feita anteriormente, $1=3\cdot(1)+1\cdot(-2)$, multiplicamos por 15 para obter 15 como combinação linear de 1 e 3 e obtivemos a igualdade $15 = 3\cdot 15+1\cdot(-30)$. Associamos a essa combinação linear a equação $3x+y=15$, que era uma equação que surgiu na fase em que os alunos jogaram a “escova diofantina”. Lembro que uma situação para infinitos baralhos é pegar 5 cartas de número 3 e nenhuma carta “ás” e que tínhamos comentado esse fato naquela situação. Comparamos a combinação linear com a equação e vimos que uma solução da equação é $x=15$ e $y=-30$. E, mais uma vez, questionei sobre como encontrar todas as soluções. Digo que ainda temos de reforçar a escrita das combinações lineares e que, na próxima semana, nos preocuparemos com essa outra questão.

Coloco no quadro a situação MDC(120, 23) e os alunos pulam dizendo que já resolveram, mas digo que queremos escrever o MDC como combinação linear.

Explico que partiremos da igualdade em que o “1” é resto e que isolaremos os restos de cada igualdade até chegarmos à igualdade escrita com giz na cor branca, conforme consta no plano em 2.1.6. Explico que faremos muitas contas e digo para tomarem cuidado para não se perderem nas contas. Vejo que eles ficam um pouco inseguros e digo, então, que vamos fazer um exemplo para eles visualizarem o que estou falando.

Começamos a buscar a escrita do MDC(1262, 31) como combinação linear de 1262 e 31. Surgiu algo inusitado, pois eu sempre me referia às igualdades pelas cores, e um aluno era daltônico e eu não sabia, enfim, uma situação inesperada. A sorte é que o aluno tem muita facilidade e isso em nada atrapalhou seu aprendizado, mas, se eu soubesse do fato desde o início, tomaria mais cuidado. A turma já sabia disso, mas não foi um problema para o aluno pois os outros não constrangem o colega.

No meio do exemplo, faço uma pausa para que os alunos possam copiar e, também, para eles irem olhando o procedimento e irem-se familiarizando com eles. É quando uma aluna me chama para mostrar que, enquanto eu escrevia no quadro, ela estava fazendo o exercício sozinha e me mostrou todo seu desenvolvimento, que estava impecável.

Esta aula foi ministrada bem devagar para que os alunos se familiarizassem com o algoritmo e, ao mesmo tempo, para que fosse possível saírem da aula tranquilos, percebendo que a resolução é possível, mesmo com tantos cálculos, bastando utilizar um procedimento adequado.

Entreguei uma tarefa, Folha 12 , para fazerem em casa e entregar na próxima aula.

10º DIA – 1 período de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Encontrar uma solução de uma equação diofantina, sem ser por tentativa e erro

RELATO:

Começo perguntando sobre a Folha 12 que levaram para resolver em casa e se tiveram dúvida. No geral, eles disseram que conseguiram fazer e tirei algumas dúvidas particulares. Discutimos como conferir se a combinação linear estava certa, bastando multiplicar, somar e ver se resultou no MDC.

Consideramos a equação 120x+23y=150 e verificamos que ela possui soluções inteiras pelo teorema estudado. Utilizamos o resultado da aula anterior e da escrita do MDC(23,120)=1 como combinação linear de 23 e 120, multiplicamos a combinação linear por 150 e encontramos uma solução da equação, veja Figura 36.

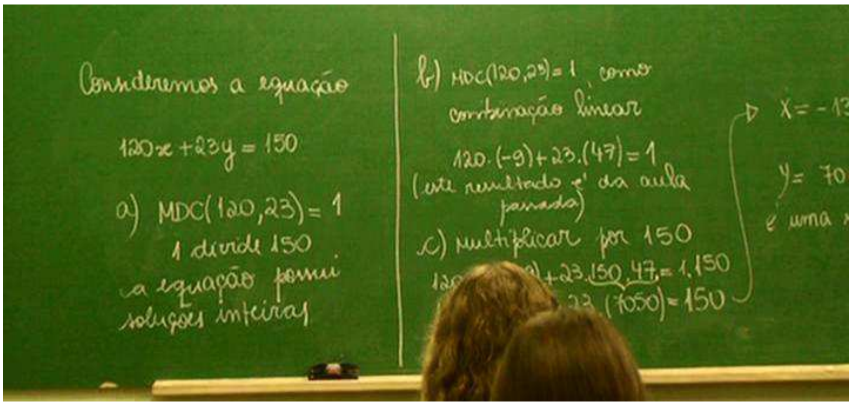


Figura 36 – Fotografia da obtenção de uma solução de equação diofantina.

Os alunos não mostraram dificuldade para entender os passos executados para a obtenção de uma solução. Por isso, consideramos uma equação do jogo x+3y=15 e pedi que eles seguissem os mesmo passos do exemplo anterior. Esperei um tempo para eles resolverem e entreguei papel quadriculado para eles fazerem a representação geométrica da equação e de suas soluções. A aula terminou e a atividade ficou para eles terminarem em casa.

11º DIA – 2 períodos cada um de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Encontrar a solução geral de uma equação diofantina linear

ATIVIDADE UTILIZADA:

FOLHA 13

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA
Profª Bianca

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA 13**

Para cada equação abaixo verifique se há solução inteira e, caso exista, calcule-a na forma algébrica e verifique o resultado, analisando o gráfico da equação. Apresente os cálculos, bem como a justificativa para a equação ter (ou não) solução. Se necessário use o verso da Folha.

a) $x + 5y = 15$

b) $- 4x + 8y = 12$

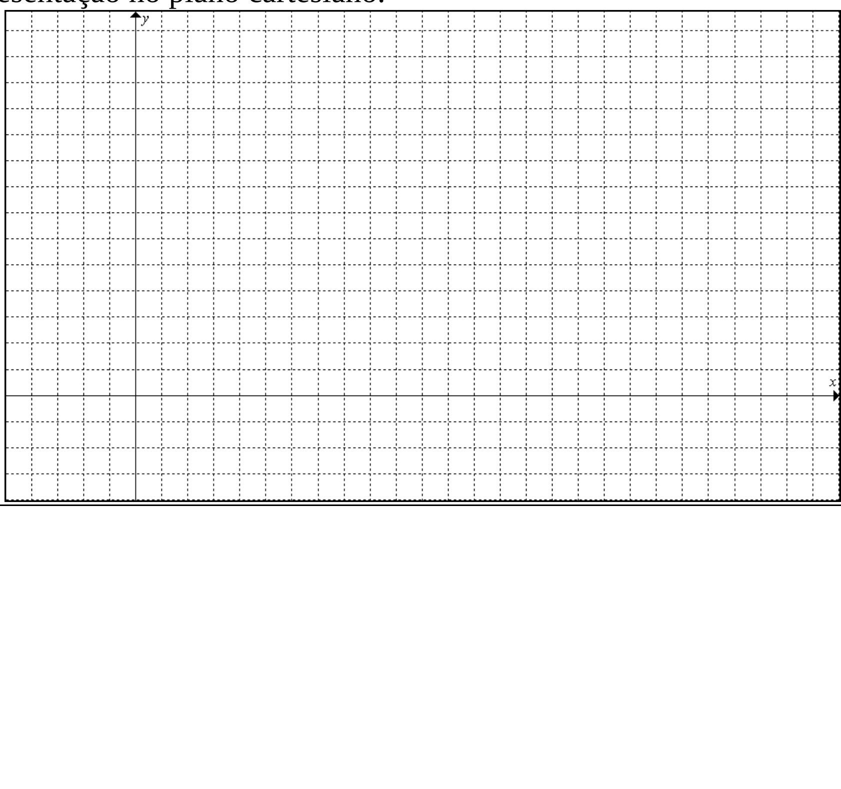
c) $4x + 2y = 5$

Os alunos da turma de química do 1° semestre de 2011 do IFSul decidiram fazer um moletom da turma. A malharia onde encomendaram solicitou que o pagamento final fosse feito apenas com as notas de R$50 e de R$100. Sabendo que a turma tem 25 alunos, que todos quiseram o moletom e que cada um custou R$ 48,00, determine:

a) A equação que modela esta situação

b) A solução da equação

c) A representação no plano cartesiano.



RELATO:

Começo a aula retomando a equação $x+3y=15$, cuja representação geométrica foi feita no 4º dia e na aula anterior tinha ficado para eles encontrarem uma solução. Além disso, lembrei os alunos que, junto da representação geométrica no 4º dia, eles colaram no caderno uma tabela com as coordenadas dos pontos que pertencem à reta.

Para buscar outras soluções da equação $x+3y=15$, partimos da representação geométrica e pegamos os pontos cujas coordenadas são ambas inteiras. Anotamos numa tabela no quadro e observamos que as soluções para x vão aumentando de 3 em 3 e para y vão diminuindo de 1 em 1, conforme Figura 37.

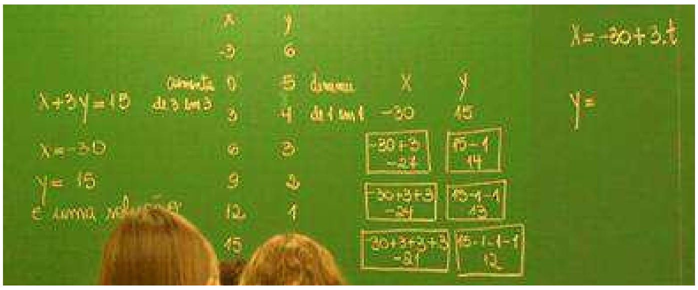


Figura 37 – Fotografia da análise geométrica para construção da solução geral de *x*.

Ainda para a mesma equação, utilizamos a solução que encontramos na aula anterior que é $x=-30$ e $y=15$. A partir desta solução e utilizando o observado nos pares ordenados anteriores, escrevemos algumas soluções seguintes, utilizando a ideia de aumentar 3 para os valores de x e diminuir 1 para os valores de y, conforme fotos.

Um dos objetivos dos PCNEM (2000, p. 42) para a disciplina de matemática é "reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações". Com esta ideia, buscamos comparar a representação geométrica com a algébrica para chegar a conclusões sobre as soluções da equação diofantina linear dada, notamos que a solução $x=-30$ ficou fixa e fomos variando a quantidade de 3, daí chegamos que $x=-30+3t$, $t\in \mathbb{Z}$ são todos os valores de x na solução da equação $x+3y=15$.

Pedi que fizessem o mesmo para encontrar todas as soluções de y. Com isso, obtém-se a solução geral da equação dada.

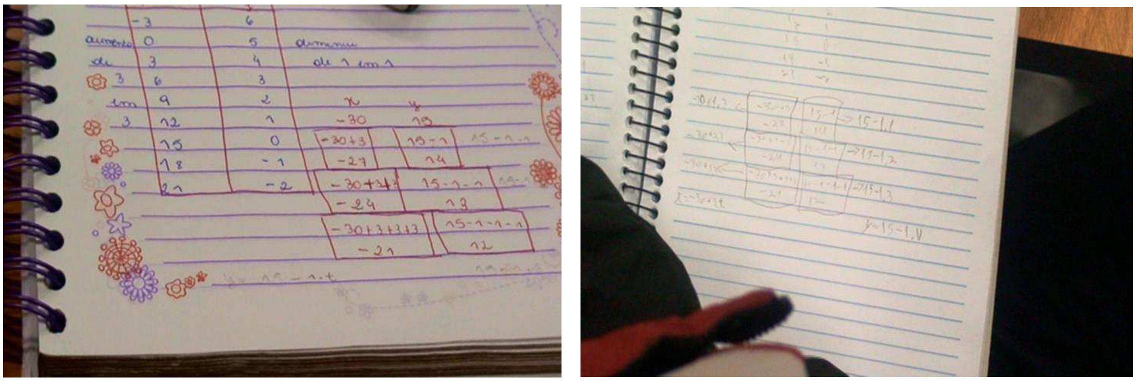


Figura 38 – Alunos fazem a análise geométrica para construção da solução geral de *y*.

Rapidamente, uma aluna me chamou para mostrar o que tinha feito, Figura 38, e estava corretíssimo. Além da aluna de ter tido a iniciativa, ela se mostrou segura ao terminar a solicitação que fiz, isto foi positivo, visto que ela sempre se mostrou bastante dependente do professor para resolver exercícios e chegar a conclusões próprias, porém desta vez compreendeu e fez questão de mostrar seu progresso.

Ao corrigirmos a solução geral para *y*, expliquei, por comparação, que utilizávamos o mesmo “t” inteiro relacionando que a quantidade do numero -1 era mesma quantidade do número 3 que usamos em x. Assim, chegamos que y=15-1t, t$\in \mathbb{Z}$.

Partimos para uma nova equação 3x+6y=15, da qual os alunos também tinham a representação geométrica e uma solução x=-5 e y=5, utilizamos o mesmo procedimento anterior e encontramos x=-5+2t e y=5-1t, veja Figura 39.

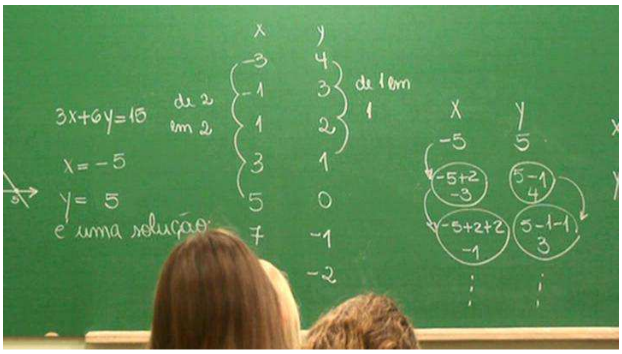


Figura 39 – Fotografia da análise geométrica de outra equação para construção da solução geral de x e y.

Após encontrar todas as soluções dos dois exemplos, tomando como base a representação geométrica e uma solução encontrada a partir da combinação linear do MDC, verificamos se estas soluções tinham alguma relação com os coeficientes dados.

Para a equação *x*+3*y* =15, obtivemos *x*=-30+3t e *y*=15-1t e para a equação 3*x*+6*y*=15, obtivemos *x*=-5+2t e *y*=5-1t. Observamos os coeficientes de *x* e *y* na primeira equação e vimos que o 3, coeficiente de *y*, aparece na solução de *x* como coeficiente de t e que o oposto de 1, coeficiente de *x*, aparece na solução de *y* como coeficiente de t.

Para a segunda equação, vimos que isso não é imediato, primeiro pegamos a equação equivalente x+2y=5 e da mesma forma vimos que o 2, coeficiente de y, aparece na solução de x como coeficiente de t e que o 1, coeficiente de x, aparece o seu oposto na solução de y como coeficiente de t (veja representação feita por uma aluna na Figura 40).

Figura 40 – Fotografia da representação geométrica feita pela aluna.

Assim, concluímos que, dada uma equação $ax+by=c$, com mdc(a, b)=1, a solução geral será $x=x_0+bt$ e $y = y_0 - at$ com t inteiro, onde x_0 e y_0 é uma solução inicial.

Consideramos a equação 120*x*+23*y*=150 e solicitei a representação geométrica.

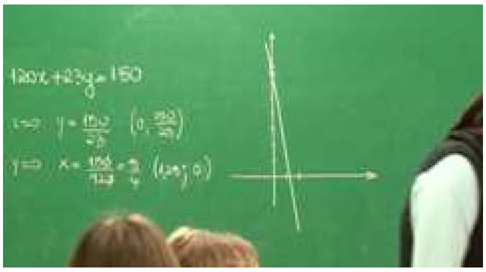


Figura 41 –Fotografia da representação geométrica da equação 120*x*+23*y*=150.

Perguntei se eles tinham conseguido, através da representação geométrica, conforme Figura 41, visualizar alguma solução. Um aluno encontrou *x*=2 e *y*=1. Substituímos na equação e vimos que não era solução e encontramos erro na sua representação geométrica, ou seja, o ponto não pertencia a reta. Usei o exemplo para os alunos perceberem que só a representação geométrica não é suficiente para montarmos a solução geral, que precisávamos encontrá-la algebricamente, pois nem sempre a geométrica nos indica uma solução, para obtermos as outras, como conseguimos observar na representação anterior.

Escrevemos a solução geral para a equação 120*x*+23*y*=150, analisando os coeficientes e chegamos a *x*=-1350+23t e *y*=7050-120t, mas um aluno ficou em dúvida sobre qual coeficiente usar. Então aproveitei o momento para introduzir a maneira de encontrar as soluções algebricamente (veja fotografia 22), que consiste em utilizar a solução particular obtida através da escrita do MDC como combinação linear dos números envolvidos,

$$x_0 = -1350 \text{ e } y_0 = 7050$$

substituir na equação dada,

$$120 \cdot (-1350) + 23 \cdot 7050 = 150$$

somar e subtrair os coeficientes das incógnitas multiplicados por um inteiro "t",

$$120 \cdot (-1350) + 120 \cdot 23t - 120 \cdot 23t + 23 \cdot 7050 = 150$$

e, por fim, colocar em evidência um de cada vez, os coeficientes das incógnitas.

$$120 \cdot (-1350 + 23t) + 23 \cdot (7050 - 120t) = 150$$

O que aparece nos parênteses é a expressão geral das soluções de *x* e de *y*, veja Figura 42.

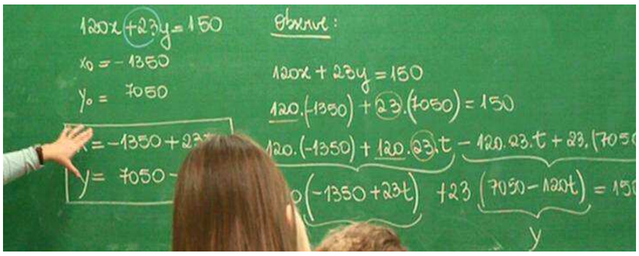


Figura 42 – Fotografia da solução da equação 120*x*+23*y*=150 de forma algébrica.

Entrego a Folha 13 de exercícios para fazerem em casa. E decidimos utilizar a próxima aula para resolver mais alguns exemplos.

12º DIA – 2 períodos cada um de 45 minutos

OBJETIVO DA AULA:

Encontrar as soluções de equações diofantinas lineares.

ATIVIDADE UTILIZADA:

FOLHA 14

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL-RIO-GRANDENSE
CINAT – Coordenadoria de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
MATEMÁTICA

Folha 14

NOME COMPLETO: ________________________________CURSO/TURMA:__________

DATA: ____________ VALOR:_____1,0____ NOTA: ____________

De que maneiras podemos comprar selos de dois e de cinco reais, de modo a gastar cem reais?

a) Escreva a equação e diga se ela tem solução, justificando.

Fonte: http://www.correios.com.br/selos/selos_postais/selos_2011/selos2011.cfm

b) Resolva a equação e represente - a geometricamente. (apresente todos os cálculos)

RELATO:

Começo procurando as soluções da equação 2x+9y=7. Utilizamos a combinação linear do MDC (2,9)=1 feita anteriormente 1=9.1+2.(-4) e obtemos 7=9.7+2.(-28), assim uma solução particular é x_0=-28 e y_0=7 e escrevemos a solução geral usando as ideias da aula passada x=-28+9t e y=7-2t, com t inteiro, conforme Figura 43.

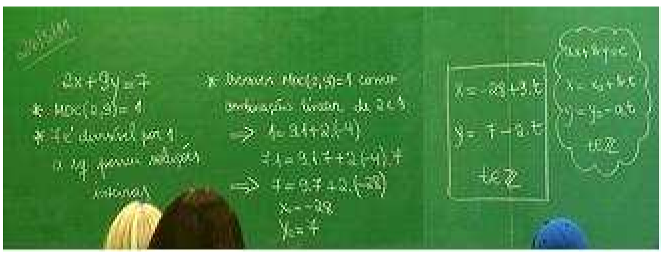


Figura 43 – Fotografia do encontro da solução geral de uma equação após a conclusão genérica.

Um aluno perguntou como faria as escolhas para o t. Lembrei que ele é um número inteiro e tomamos t=2 e encontramos x=-10 e y=3 e retomei que, se pegássemos outro t, inteiro, teríamos outra solução.

Retomamos a equação da aula anterior $x+3y=15$ e a solução geral encontrada, $x=-30+3t$ e $y=15-t$, para um t inteiro. Lembrei que esta é equação que apareceu no jogo, mas que, no jogo, t não pode ser qualquer inteiro. Procuro aqui fazer o fechamento e relação com a parte inicial das atividades – o jogo "escova diofantina", em conformidade ao que diz Silva e Kodama:

> [...]enquanto recurso didático, os jogos matemáticos podem dar efetivas contribuições ao processo de ensino-aprendizagem da matemática, auxiliando o trabalho do professor, que têm em suas mãos um recurso didático que lhe permite o trabalho com diversos conteúdos, de acordo com a sua necessidade, podendo tornar o seu planejamento mais dinâmico e atrativo, além de contribuir para a aprendizagem dos alunos, que se sentem mais motivados a aprender matemática e podem construir seus conhecimentos de uma forma mais interativa e prazerosa, encontrando nas aulas de matemática a oportunidade de adquirir saberes, desenvolver habilidades de resolução de problemas, de cooperação e trabalho em equipe. (2004, p. 12)

Com o intuito de levar os alunos a perceberem a importância da parte inicial, deixo claro que voltamos na situação do jogo para uma quantidade qualquer de baralhos, sabemos que x representa a quantidade da carta "ás" e y a quantidade da carta 3 e que uma dessas quantidades tem que ser positiva ou zero. Assim, $x=-30+3t\geq 0$ e $y=15-t\geq 0$, portanto $10\leq t\leq 15$.

Pedi que eles escolhessem um t de acordo com a condição encontrada para verificarmos se a solução que encontrarmos foi marcada na representação geométrica feita anteriormente.

Escolhemos, também, um valor para t fora do intervalo encontrado t=7 e encontramos x=-9 e y=8 para reforçarmos a diferença entre esta solução ser solução da equação, mas não ser uma solução para o jogo, veja Figura 44.

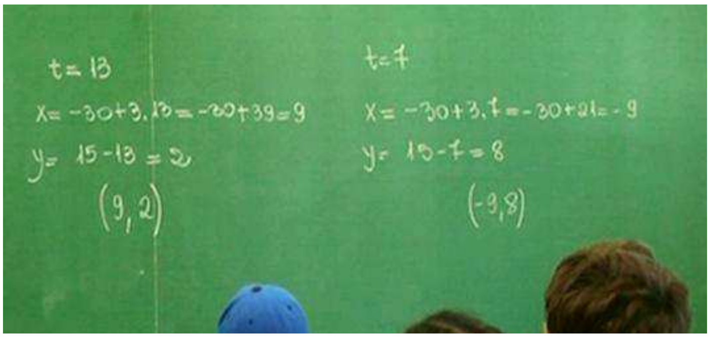


Figura 44 – Fotografia das substituições de valores para "t".

A seguir, pedi que sentassem em duplas para completar a Folha 14. Ao completar a Folha, os alunos foram muito dedicados, discutiram bastante e poucos pediam minha ajuda.



Figura 45, 46 e 47 – Fotografia dos alunos resolvendo atividade final.

As fotos mostram a concentração e a seriedade com que desempenharam o fechamento das aulas sobre equações diofantinas lineares, mostrando a maneira como atuaram durante as atividades, mostrando que estão abertos ao que não está totalmente previsto no currículo.

2.3 ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS: A *POSTERIORI*

Nesta seção, discutimos os dados coletados na experimentação. Apresentamos as análises a *posteriori* para cada atividade desenvolvida, que aparecem no plano das atividades (seção 2.1) e relato (seção 2.2).

Nas análises a *posteriori*, examinamos a aplicação do planejamento que fizemos para as aulas e as atividades realizadas pelos alunos. Para os dados coletados, consideramos, além das Folhas das atividades, nossas observações no decorrer das aulas, através dos comentários dos alunos e das aulas que foram gravadas, a que assistimos conforme a necessidade. Também, foram estas análises que indicaram o que deveria ser revisto nas atividades da sequência didática do Apêndice B.

Análises da Folha 1

Análises a *posteriori*

Durante a leitura da Folha 1 feita pelos alunos, pude perceber que eles começaram a interagir com a atividade que estava sendo proposta. Alguns nunca tinham jogado o tradicional jogo "escova" e, por isso, levaram mais tempo para entender como funcionava o jogo que estava sendo apresentado como “escova diofantina”. Fizemos uma simulação das jogadas para que ficasse mais visível como funciona o jogo e uns colegas foram ajudando os outros, tornando este momento produtivo. A leitura das regras fez com que os alunos ficassem atentos e deu oportunidade para discutirem sobre o que estavam entendendo. Assim, os alunos demonstraram que entenderam o funcionamento do jogo e seu objetivo. A perguntas que surgiram, não se difere muito das que aparecem num jogo fora da sala de aula, tais como: Se eu não somar 15, o que faço? Fico com todas as cartas que tenho ou descarto a alguma? Essas questões fomos simulando e resolvendo com o jogo que simulamos.

Análises da Folha 2

Análises a *posteriori*

O registro das jogadas foi feito de forma individual, porém os alunos foram ajudando uns aos outros. Todos os alunos fizeram os registros das cartas, suas quantidades e a soma de forma correta, embora alguns grupos tenham apresentado de forma separada cada nova rodada, ficando mais claro quando terminava uma e começava outra rodada do jogo. Embora os registros do grupo 7, estejam corretos, eles não seguiram as regras do jogo “escova diofantina”. Os alunos que estavam trabalhando nesse grupo, fizeram os registros solicitados, mas não mostraram preocupação em seguir as regras. Também, esse grupo foi o único que não fez o registro específico para cada grupo.

Análises da Folha 3

Análises a *posteriori*

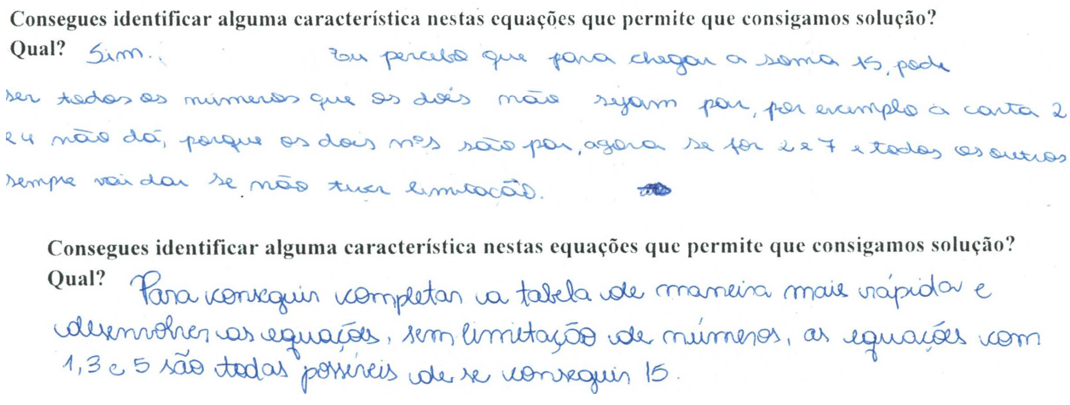
Os alunos levaram bastante tempo para fazer esta Folha. Por isso, no quarto dia, reservei mais um tempo para terminarem. Considerarei na questão se o aluno “percebeu bem”, se ele intuiu que ambos os coeficientes não podem ser pares para a equação ter solução; “percebeu a ideia”, se relacionar algumas das equações com coeficientes pares, ou associou apenas um coeficiente para a equação não ter solução inteira ou natural ou “não percebeu” se não conseguiu perceber a importância dos coeficientes para a equação ter (ou não) solução inteira ou natural.

Obtivemos o seguinte resultado para a primeira questão da Folha 3 e a resposta de dois alunos constam na Figura 48:

9 alunos “perceberam bem”

4 alunos “perceberam a ideia”

8 alunos “não perceberam”


Consegues identificar alguma característica nestas equações que permite que consigamos solução? Qual? Sim. Eu percebo que para chegar a soma 15, pode ser todos os números que os dois não sejam par, por exemplo a conta 2 e 4 não dá, porque os dois n°s são par, agora se for 2 e 7 e todos os outros sempre vai dar se não tiver limitação.

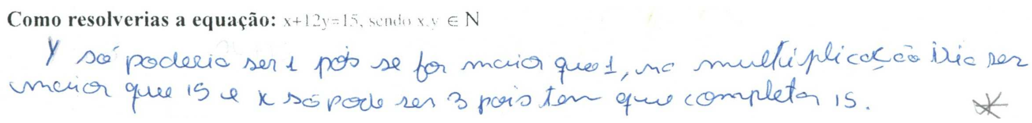
Consegues identificar alguma característica nestas equações que permite que consigamos solução? Qual? Para conseguir completar a tabela de maneira mais rápida e desenvolver as equações, sem limitação de números, as equações com 1, 3 e 5 são todas possíveis de se conseguir 15.

Figura 48 – Resposta da primeira questão da Folha 3 dada por dois alunos.

.

Os comentários dos alunos, conforme figura anterior, indica o que a maioria da turma buscou expressar. Os registros dos alunos sugerem que estavam no caminho para a compreensão do teorema.

Para a segunda questão, observei como eles chegaram à solução da equação. Todos os alunos utilizaram o método de tentativa e erro. Também todos os 21 alunos presentes tiveram o cuidado com x e y serem naturais. Porém, 3 das respostas se diferenciaram, pois não apenas testaram os valores para x e y, mas discutiram a solução dada, conforme Figura 49, que, embora não seja completa, foi mais crítica.


Como resolverias a equação: $x+12y=15$, sendo $x,y \in N$

Y só poderia ser 1 pois se for maior que 1, na multiplicação iria ser maior que 15 e x só pode ser 3 pois tem que completar 15.

Figura 49 – Resposta da segunda questão da Folha 3 dada por um aluno.

Sobre a terceira questão da terceira Folha, pôde-se observar que novamente todos os alunos utilizaram tentativa e erro. Porém, 14 alunos foram claros na diferenciação de *x* e *y* comparando com a questão anterior. Explicaram que, nessa situação, os números *x* e *y* poderiam ser negativos, conforme resposta dada por dois alunos e apresentada na Figura 50. Sete alunos não distinguiram a solução natural da inteira.

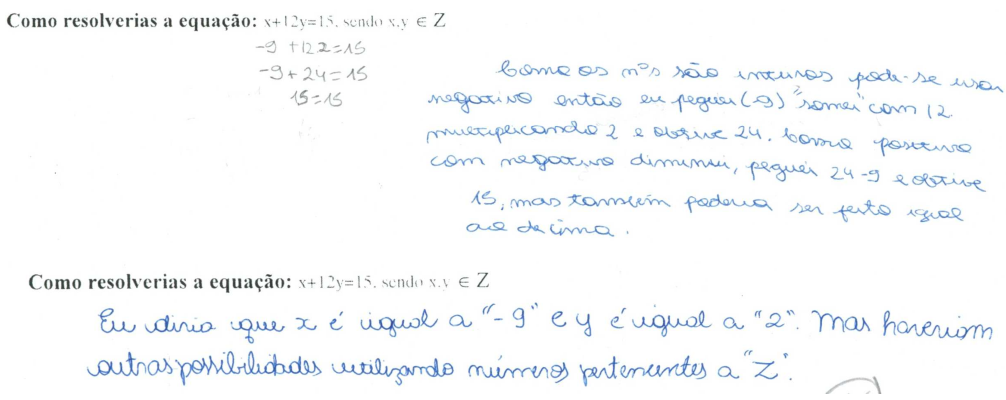


Figura 50 – Resposta dada por dois alunos para a terceira questão da Folha 3.

Consideramos que as 2 últimas questões devem ser colocadas mais adiante. Esta correção está presente no Apêndice B, pois foram pouco discutidas.

Análises da Folha 4

Análises a *posteriori*

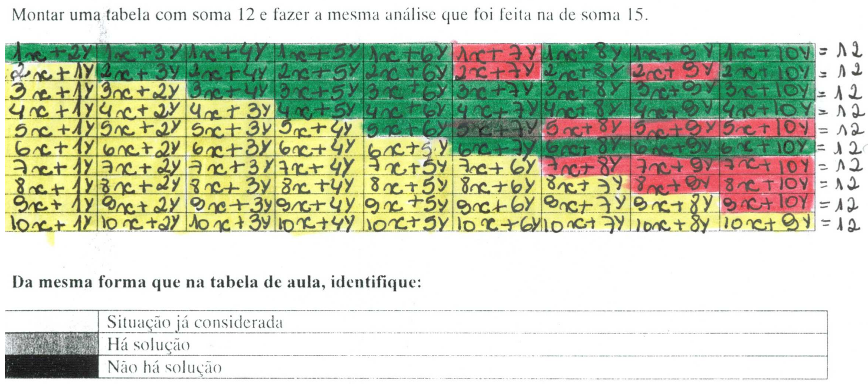
Para construção da tabela, veja uma tabela entregue por um aluno na Figura 51. Separei os alunos em quatro níveis, considerei uma “construção perfeita” para as tabelas que não continham nenhum erro tanto nas equações quanto nas indicadas por ter ou não ter solução no jogo; “construção com poucos erros” para as tabelas em que indicaram a maioria das equações que têm ou não têm solução no jogo de forma correta; “construção com muitos erros” para as tabelas em que indicaram a minoria das equações que têm ou não têm solução no jogo de forma correta e “não construiu” para as tabelas em que não foram indicadas as equações que têm ou não têm solução no jogo. Com este olhar, obtivemos o seguinte resultado para a construção da tabela:

14 alunos apresentaram “construção perfeita”

5 alunos apresentaram “construção com poucos erros”

1 aluno apresentou “construção com muitos erros”

2 alunos se encaixaram no nível “não construiu”



Montar uma tabela com soma 12 e fazer a mesma análise que foi feita na de soma 15.

1x + 2y	1x + 3y	1x + 4y	1x + 5y	1x + 6y	1x + 7y	1x + 8y	1x + 9y	1x + 10y	= 12
2x + 1y	2x + 3y	2x + 4y	2x + 5y	2x + 6y	2x + 7y	2x + 8y	2x + 9y	2x + 10y	= 12
3x + 1y	3x + 2y	3x + 4y	3x + 5y	3x + 6y	3x + 7y	3x + 8y	3x + 9y	3x + 10y	= 12
4x + 1y	4x + 2y	4x + 3y	4x + 5y	4x + 6y	4x + 7y	4x + 8y	4x + 9y	4x + 10y	= 12
5x + 1y	5x + 2y	5x + 3y	5x + 4y	5x + 6y	5x + 7y	5x + 8y	5x + 9y	5x + 10y	= 12
6x + 1y	6x + 2y	6x + 3y	6x + 4y	6x + 5y	6x + 7y	6x + 8y	6x + 9y	6x + 10y	= 12
7x + 1y	7x + 2y	7x + 3y	7x + 4y	7x + 5y	7x + 6y	7x + 8y	7x + 9y	7x + 10y	= 12
8x + 1y	8x + 2y	8x + 3y	8x + 4y	8x + 5y	8x + 6y	8x + 7y	8x + 9y	8x + 10y	= 12
9x + 1y	9x + 2y	9x + 3y	9x + 4y	9x + 5y	9x + 6y	9x + 7y	9x + 8y	9x + 10y	= 12
10x + 1y	10x + 2y	10x + 3y	10x + 4y	10x + 5y	10x + 6y	10x + 7y	10x + 8y	10x + 9y	= 12

Da mesma forma que na tabela de aula, identifique:

	Situação já considerada
	Há solução
	Não há solução

Figura 51 – Tabela, da Folha 4, entregue por um aluno.

A primeira questão da Folha solicitava a equação que modelava o jogo:

3 alunos indicaram a equação e explicaram o que significava cada variável

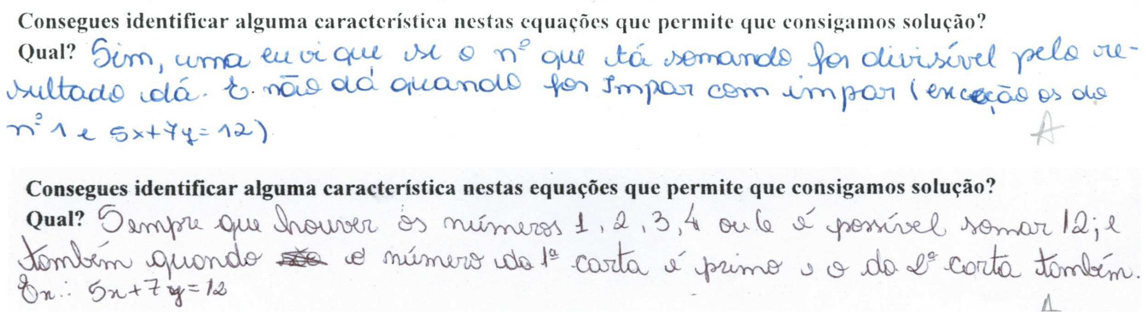
12 alunos indicaram a equação, mas não explicaram o que significava cada variável

2 alunos apresentaram um exemplo de equação

5 alunos não responderam a questão

Os 12 alunos que não indicaram o que significa cada variável, embora tenham modelado corretamente a situação do jogo, mostram a falta de hábito dos alunos no registro algébrico, o que pode ser um dos motivos da dificuldade que aparecem na escola. Uma vez que não feito isso, o registro da variável, a compreensão do que o próprio aluno está fazendo fica mais difícil.

A próxima questão pergunta se as equações que possuem solução apresentam alguma característica. A maioria dos alunos percebeu que existe uma relação entre os coeficientes e o resultado da equação e alguns alunos conseguiram fazer ligação com divisores, citaram o fato de o número 12 ser divisível pelos coeficientes, embora não tenham feito relação com o MDC, veja as respostas dadas por dois alunos na Figura 52.



Consegues identificar alguma característica nestas equações que permite que consigamos solução?
Qual? Sim, uma eu vi que se o nº que tá somando for divisível pelo resultado dá. E não dá quando for Impar com impar (exceção os do nº 1 e 5x+7y=12)

A

Consegues identificar alguma característica nestas equações que permite que consigamos solução?
Qual? Sempre que houver os números 1, 2, 3, 4 ou 6 é possível somar 12; e também quando ~~...~~ o número da 1ª carta é primo e o da 2ª carta também.
Ex.: 5x+7y=12

A

Figura 52 – Resposta dada por dois alunos para a segunda questão da Folha 4.

As duas últimas questões pretendiam instigar os alunos a pensar nas soluções das equações dadas, assim como as últimas questões da Folha 3. Os alunos não mostraram nova estratégia para buscar as soluções, veja a resposta dada por dois alunos nas Figuras 53 e 54. Utilizaram novamente tentativa e erro, porém algumas singularidades apareceram:

- três alunos escreveram sobre as outras possibilidades de soluções em Z, cada um registrou da sua maneira, mas os três mostraram que entenderam a ideia

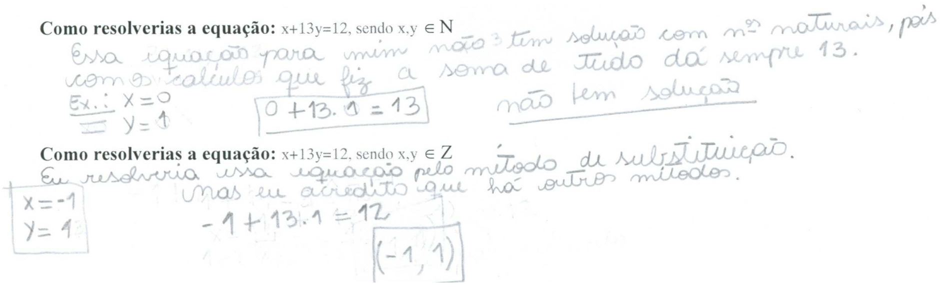


Figura 53 – Resposta de um aluno para as duas últimas questões da Folha 4.

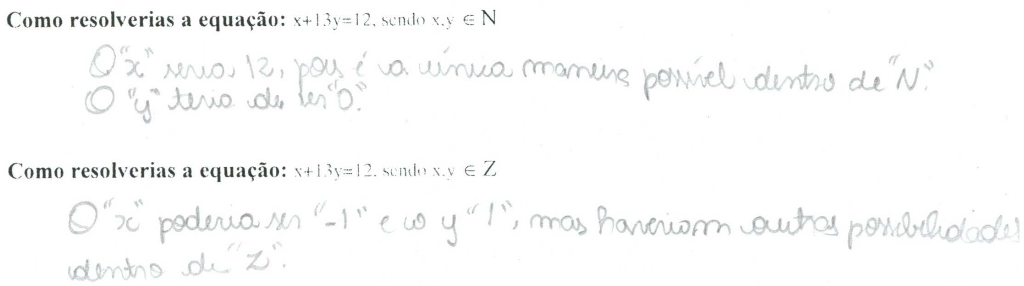


Figura 54 – Outra resposta dada por um aluno para as duas últimas questões da Folha 4.

- quatro alunos confundiram o coeficiente da incógnita "y" da equação x+13y=12 com o "12"; não pensaram que y poderia ser zero e disseram que a equação não tem solução natural. Quando, porém, a solução pode ser inteira, conseguiram determiná-la.

Observamos que a "troca" de 15 por 12 não gerou maiores empecilhos e foi um meio dos alunos reforçarem o que já tinham feito e uma maneira de estimulá-los a pensar em novas possibilidades. Ficou evidente que a maioria dos alunos ainda não busca outras soluções para a equação e consideramos que as duas últimas questões foram feitas, nas atividades, muito cedo. Mostraram que utilizam o método de tentativa e erro, conforme indicou a investigação de Oliveira (2006).

Análises da Folha 5

Análises a *posteriori*

Tanto a aplicação desta Folha foi tumultuada quanto o diagnóstico do que realmente os alunos sabem sobre representação de reta no plano cartesiano. Em relação à primeira questão, que trata da representação da equação 2x+4y=15, foi possível perceber que os alunos não sabem representar uma equação linear no plano cartesiano e, mesmo que tenham estudado o tema algum dia, não foi significativo para grande maioria. A única relação que fizeram foi com vetores, que estudaram na física e não garantiram ter estudado este conteúdo.

A segunda questão também trata da representação geométrica de uma equação do 1º grau. Porém a equação diofantina considerada, x+3y=15, tem soluções inteiras, diferente da primeira questão.

Na análise inicial da primeira questão, pensei que a solução gerada pelas respostas fosse oriunda de o fato da equação não possuir solução inteira, mas a análise mais cuidadosa indica que não foi este o motivo, mas, sim, que o alunos, de fato, não sabem que a equação do tipo $ax+by=c$ representa no plano uma reta.

O retorno da segunda questão só afirma a análise feita anteriormente e as respostas indicaram que a situação exige que a representação de uma equação no plano cartesiano seja trabalhada para dar continuidade às atividades.

Análises da Folha 6

Análises a *posteriori*

No primeiro exercício, que tratava da equação x+4y=15, a maioria dos alunos fez a representação correta no plano cartesiano. Apenas 2 fizeram errada a representação da reta e a marcação dos pontos. Os outros 20 alunos que entregaram a tarefa, cometeram erros na marcação dos pontos de ambas as coordenadas inteiras. Dos vinte alunos, seis apresentaram tudo correto, os outros quatorze alunos cometeram algum dos seguintes erros, quanto à marcação dos pontos: não marcaram alguns pontos que são solução da equação, marcaram pontos que não são solução da equação, embora tenham ambas as coordenadas inteiras ou marcaram pontos cujas coordenadas não são ambas inteiras. A resolução correta (desconsiderando os pontos auxiliares marcados no eixo *x*) dada por um aluno aparece na Figura 55 a seguir.

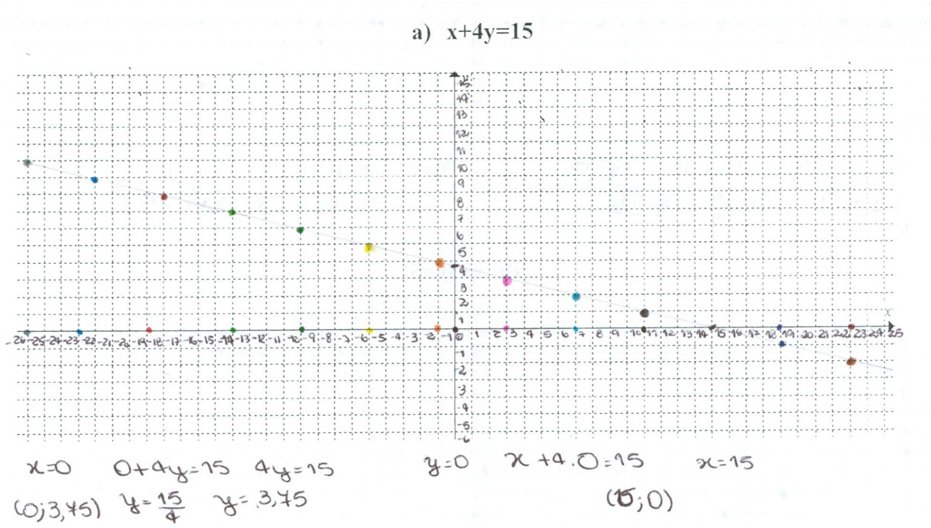


Figura 55 – Representação geométrica da equação x+4y=15 e algumas soluções no plano cartesiano: resposta de um aluna para a questão a da Folha 6.

O segundo exercício solicitava a equação 2x+6y=15. A maioria dos 22 alunos fez a representação geométrica correta, porém, na marcação dos pontos, cometeram os mesmos erros da questão anterior, com um agravante: neste exercício, foi possível observar a falta de precisão ao traçarem a reta à mão, mesmo utilizando um instrumento como régua ou esquadro, o que prejudicou a visualização. Talvez seja interessante, após este exercício, levar impressa a representação feita em algum software, ou até mesmo propor que os alunos o façam para que esta situação seja corrigida.

O terceiro e o quarto exercícios, os alunos realizaram praticamente da mesma maneira, com exceção de dois alunos que fizeram certa a representação do terceiro e errada a do quarto exercício. A maioria representou os dois exercícios de forma correta e marcou os pontos de ambas coordenadas inteiras errados, o que reforça a observação feita ao final da análise do segundo exercício.

Apenas um aluno resolveu o quinto e o sexto exercícios completamente errado, todos os outros fizeram a representação geométrica correta. Destes, três não marcaram os pontos de ambas as coordenadas inteiras, oito marcaram apenas alguns destes pontos e dez alunos marcaram todos os pontos possíveis no plano cartesiano dado de ambas coordenadas inteiras.

Logo após os exercícios, fazemos duas perguntas. A primeira trata das equações diofantinas que possuem soluções naturais. Pretendemos observar se os alunos conseguem fazer a associação dos pontos marcados como soluções das equações diofantinas dadas. Somente o segundo exercício não possuía solução natural e apenas um aluno a indicou; quatro alunos não conseguiram fazer a relação algébrica/geométrica; dois destes explicitaram isso e dois sugeriram ter ficado confusos. Nove alunos disseram corretamente que as equações A, C, D e F possuem solução natural e seis alunos deram a resposta incompleta, sem incluir todas as equações, mas não citaram a B como não ter soluções naturais.

A outra questão pretendia comparar duas equações e queríamos estimular os alunos a observar as suas iguais soluções e, consequentemente, mesmos pontos no plano cartesiano, bem como lembrar que as equações são equivalentes. As respostas indicaram que os alunos não lembravam ou não compreendiam o significado de "equações equivalentes". Mesmo assim, a maioria conseguiu relacioná-las. Um aluno não respondeu, um respondem incorretamente, um não soube responder – explicitou isto e dois não conseguiram generalizar, apenas observaram os dois pontos necessários para traçar a reta. Cinco alunos indicaram a proporcionalidade das equações, conforme a escrita de dois desses alunos na Figura 56.

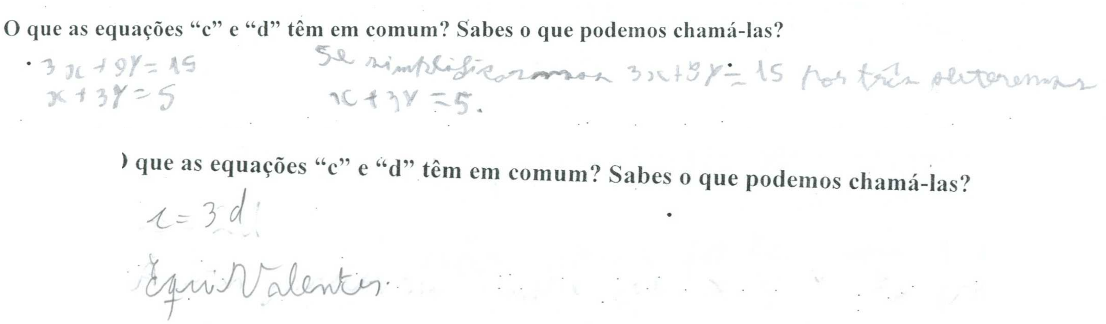


Figura 56 – Resposta dada por dois alunos às duas últimas questões da Folha 6.

Onze alunos falaram sobre os mesmos valores de x e y, um aluno relatou as duas propriedades citadas.

Diante dos avanços dos alunos, apresentados ao longo do desenvolvimento desta tarefa, foi possível perceber que é importante e viável, mesmo que alguns conceitos não sejam conhecidos dos alunos, utilizar a interpretação geométrica associada à algébrica para a compreensão das soluções das equações diofantinas.

Análises da Folha 7

<u>Análises a *posteriori*</u>

A primeira questão, que solicitava que os alunos citassem um divisor de 10, foi respondida de forma correta por 22 dos 23 alunos presentes. Na segunda, que requeria todos os divisores: um dos alunos apresentou todos os divisores; quatorze citaram só os positivos: um aluno mencionou só os positivos e esqueceu o número um; dois alunos citaram somente os positivos, porém incluíram o número zero; um aluno confundiu-se e anotou os múltiplos de 10; dois escreveram que são todos naturais e um aluno considerou alguns racionais como divisores de 10.

Quando foram perguntados sobre a definição de divisor, dez alunos deram indícios de saber a definição. Considerei que tinham esta ideia quando, pelo menos, enunciavam que se tratava de um inteiro e que o resto da divisão pelo número dado tem de ser zero. Veja as palavras de dois alunos que tentaram apresentar a definição na Figura 57.

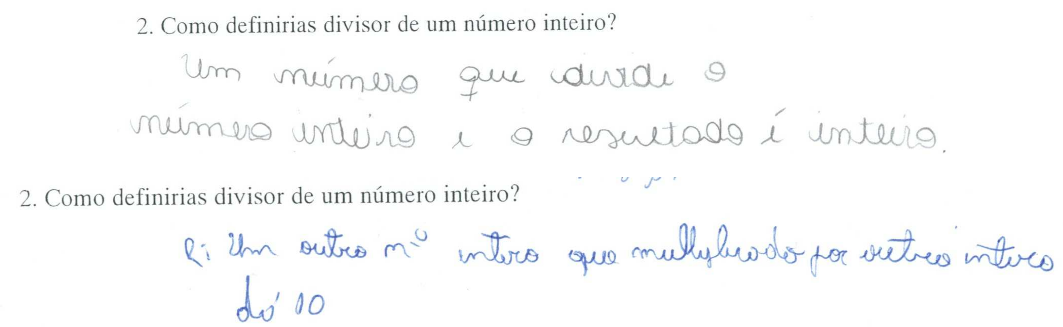


Figura 57 – Definição de divisor, segundo dois alunos.

Os outros 13 alunos não conseguiram explicitar a ideia da definição de divisor.

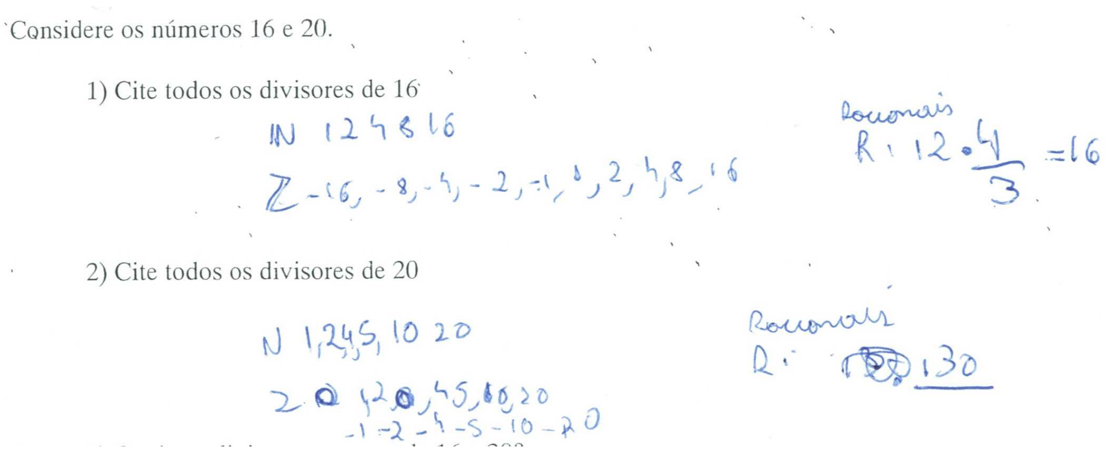
Com isso, foi possível observar que precisávamos discutir as respostas para que fosse possível os alunos perceberem que tinham mais divisores, bem como começar a ensiná-los como construir uma definição, para que pudessem rever a definição dada na Folha.

Análises da Folha 8

Análises a *posteriori*

Como alguns alunos mostraram não indicar todos os divisores de um número, conforme analisamos na Folha 7, esta Folha pretende fazê-los pensar nas discussões feitas e rever esta questão. Os resultados foram positivos e a maioria dos alunos aproveitou o que foi dito sobre a Folha 7 e reconsiderou respondendo de forma correta às questões sobre os divisores desta Folha. A dificuldade dos alunos na Folha 7 estava em indicar todos os divisores de um número. Eles apenas citavam alguns e não todos, o que foi sanado depois das discussões, conforme mostraram na resolução desta atividades da Folha 8.

Os alunos apresentaram, no geral, ter ideia de divisor comum e MDC. O caso mais delicado, como sugere a Figura 58, foi do aluno que acrescentou como divisor um número racional e, não inteiro, e, mesmo após as discussões da Folha anterior, continuou com a ideia errada. Eu e os seus colegas tentamos mostrar que não faz sentido um racional, não inteiro, ser um divisor, mas ele não estava mais conseguindo compreender o que tentávamos falar o que resultou os mesmos erros no preenchimento desta Folha.


Considere os números 16 e 20.

1) Cite todos os divisores de 16

N 1 2 4 8 16

Z -16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16

Racionais

R: $12 \cdot \frac{4}{3} = 16$

2) Cite todos os divisores de 20

N 1, 2, 4, 5, 10 20

Z 1, 2, 4, 5, 10, 20 -1 -2 -4 -5 -10 -20

Racionais

R: 1,30

Figura 58 – Resposta da questão 1 e 2 da Folha 8.

Fora este caso, apenas foi necessário ressaltar a questão dos negativos também serem divisores. Acreditamos que os conhecimentos apresentados pelos alunos e as correções que foram feitas nas discussões foram suficientes para o andamento das atividades que necessitariam este tema como pré-requisito.

Análises da Folha 9

Análises a *posteriori*

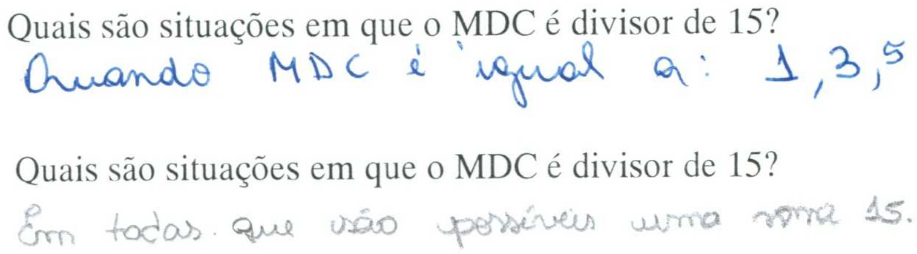
A primeira atividade da Folha 9 solicita que os alunos calculem o MDC dos coeficientes das equações encontradas no jogo de soma 15, veja a atividade entregue por um aluno na Figura 59. Quinze alunos calcularam corretamente todos os MDC´s, seis alunos calcularam errado pelo menos um MDC entre os coeficientes das equações e todos os alunos que cometeram este erro foi em MDC que resultava em um valor diferente de um e um aluno indicou dois números como sendo o MDC. Ainda, foi solicitado que os alunos pintassem de vermelho as equações que não tinham solução para soma 15. Apenas três alunos fizeram corretamente, ou seja, não pintaram equações que não tinham soluções no jogo, todos os outros dezenove alunos pintaram alguma equação que tinha solução.

1°) Pinte de vermelho as equações em que não foi possível soma 15, para uma quantidade qualquer de baralho.
2°) Calcule o MDC entre os números das cartas (coeficientes das incógnitas x e y) do jogo de soma 15. Coloque o MDC logo abaixo da equação - na célula da tabela.

1x+2y=15 MDC = 1	1x+3y=15 MDC = 1	1x+4y=15 MDC = 1	1x+5y=15 MDC = 1	1x+6y=15 MDC = 1	1x+7y=15 MDC = 1	1x+8y=15 MDC = 1	1x+9y=15 MDC = 1	1x+10y=15 MDC = 1
	2x+3y=15 MDC = 1	2x+4y=15 MDC = 2	2x+5y=15 MDC = 1	2x+6y=15 MDC = 2	2x+7y=15 MDC = 1	2x+8y=15 MDC = 2	2x+9y=15 MDC = 1	2x+10y=15 MDC = 2
		3x+4y=15 MDC = 1	3x+5y=15 MDC = 1	3x+6y=15 MDC = 3	3x+7y=15 MDC = 1	3x+8y=15 MDC = 1	3x+9y=15 MDC = 3	3x+10y=15 MDC = 1
			4x+5y=15 MDC = 1	4x+6y=15 MDC = 2	4x+7y=15 MDC = 1	4x+8y=15 MDC = 4	4x+9y=15 MDC = 1	4x+10y=15 MDC = 2
				5x+6y=15 MDC = 1	5x+7y=15 MDC = 1	5x+8y=15 MDC = 1	5x+9y=15 MDC = 1	5x+10y=15 MDC = 5

Figura 59 – Tabela da Folha 9.

Quando finalizaram, corrigimos a tabela das equações para que pudessem responder às próximas questões, veja duas respostas na Figura 60. Portanto, as respostas dos alunos são baseadas na tabela corrigida. Quando perguntamos quais as equações em que o MDC é divisor de 15, apenas 5 não conseguiram generalizar e apresentaram alguns exemplos e dezessete alunos estabeleceram alguma relação entre o MDC e o número 15. Destes, quatorze alunos explicitaram os números 1, 3 e 5 e três alunos associaram as equação em que foi possível soma 15.


Quais são situações em que o MDC é divisor de 15?
Quando MDC é igual a: 1, 3, 5

Quais são situações em que o MDC é divisor de 15?
Em todas que são possíveis uma soma 15.

Figura 60 – Respostas dada por dois alunos para a primeira questão da Folha 9.

A seguir, consideramos uma equação ax+by=15 e perguntamos quando esta equação tem solução em N e sete alunos conseguiram concluir, ou pelo menos deram a ideia, que será quando o MDC entre a e b for divisor de 15.

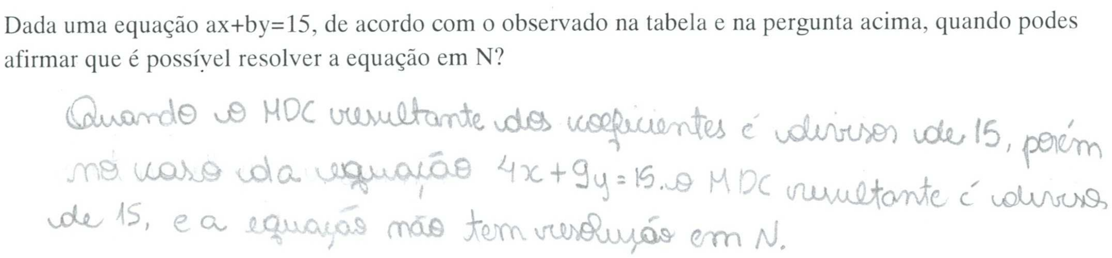
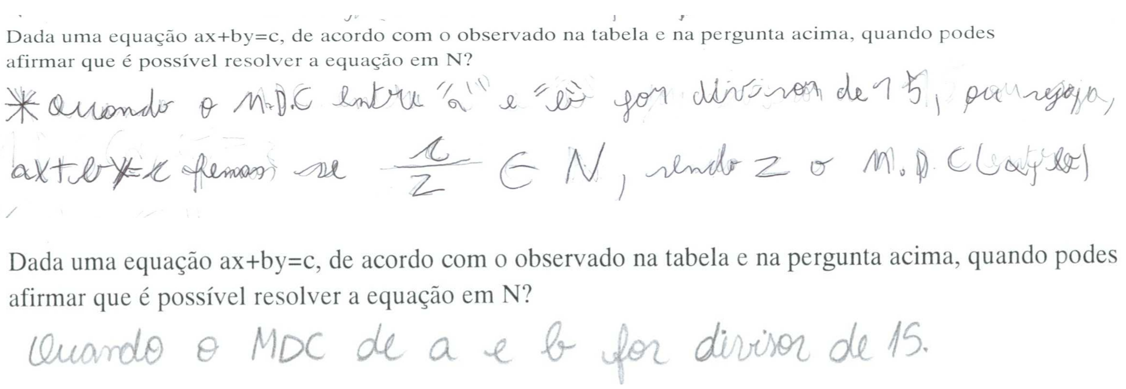

Dada uma equação ax+by=15, de acordo com o observado na tabela e na pergunta acima, quando podes afirmar que é possível resolver a equação em N?
Quando o MDC resultante dos coeficientes é divisor de 15, porém no caso da equação 4x+9y=15 o MDC resultante é divisor de 15, e a equação não tem resolução em N.

Figura 61 – Resposta do aluno para a segunda questão da Folha 9.

Na Figura 61, o aluno observa que a equação não tem solução em N e é uma exceção ao que aconteceu com as equações cujo MDC dos coeficientes dividem 15. Esta situação ocorre devido ao fato de que a equação 4x+9y=15 tem solução em Z e não em N, que foi discutido depois que os alunos entregaram as Folhas.

A última questão da Folha considera ax+by=c e pergunta quando a equação tem solução em N. Oito alunos responderam corretamente: será quando o MDC de a e b for divisor de c, veja Figura 62.


Dada uma equação ax+by=c, de acordo com o observado na tabela e na pergunta acima, quando podes afirmar que é possível resolver a equação em N?
*Quando o M.D.C entre "a" e "b" for divisor de 15, ou seja, ax+by=c teremos se $\frac{c}{z} \in N$, sendo z o M.D.C(a,b)

Dada uma equação ax+by=c, de acordo com o observado na tabela e na pergunta acima, quando podes afirmar que é possível resolver a equação em N?
Quando o MDC de a e b for divisor de 15.

Figura 62 – Resposta dada por dois alunos para a segunda questão da Folha 9.

Quatorze alunos não conseguiram dar sinais de quando a equação terá solução. Estes não conseguiram generalizar a situação que foi abordada nas questões anteriores. Os alunos mostraram ainda ter dificuldade de fazer afirmações genéricas, assim como em atividades anteriores não sabiam definir um determinado conceito. Mas isso se justifica, uma vez que não é uma prática usual em sala de aula e, também, por não ter sido muito solicitado a eles. Acreditamos que criar este hábito leva tempo. Embora não tenham fechado completamente as ideias, indicaram várias sugestões corretas, mesmo sem generalizar, em relação às equações que possuem solução em Z. Concluímos, também, que talvez seja mais interessante colocar esta pergunta mais adiante, proposta que será incorporada ao Apêndice B.

Análises da Folha 10

<u>Análises a *posteriori*</u>

Com o primeiro exercício, buscávamos ver como os alunos calculam o MDC entre dois números. Primeiro, preocupamo-nos com o método usado e foi possível computar que nove alunos utilizam a decomposição em primos, veja Figura 63. Seis alunos analisaram os conjuntos dos divisores e tomaram o maior divisor comum e seis alunos não mostraram como obtiveram o MDC. Veja os cálculos de dois alunos um que usou o primeiro método citado e outro que usou o segundo. Nenhum dos alunos que usou a escrita por conjunto de divisores encontrou o MDC entre os maiores números da Folha. Já dos nove que utilizaram o método de decomposição em primos, três conseguiram resolver todos os MDC’s solicitados.

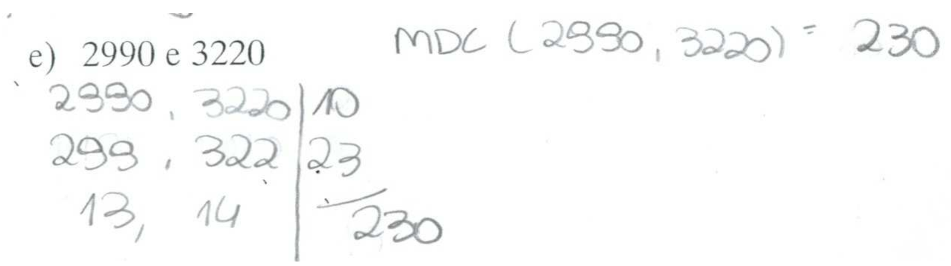
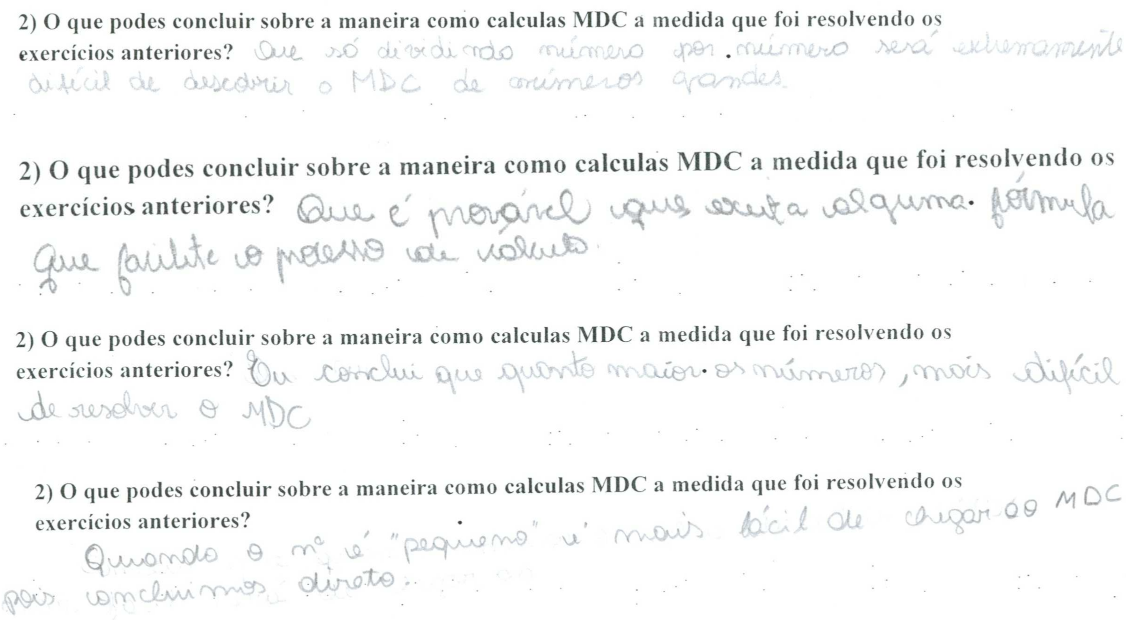


Figura 63 – Resposta dada por um aluno para a questão “e” da Folha 10.

A segunda pergunta, embora genérica demais, a reformulamos nas atividades do Apêndice B. Solicitava que os alunos classificassem os MDC’s calculados. Pretendia fazer os alunos questionarem a maneira como estavam calculando o MDC. Quatro alunos indicaram a possibilidade da existência de outra maneira de calcular o MDC, principalmente para números grandes, veja as respostas na Figura 64.


2) O que podes concluir sobre a maneira como calculas MDC a medida que foi resolvendo os exercícios anteriores? Que só dividindo número por número será extremamente difícil de descobrir o MDC de números grandes.

2) O que podes concluir sobre a maneira como calculas MDC a medida que foi resolvendo os exercícios anteriores? Que é possível que exista alguma fórmula que facilite o processo de soluto.

2) O que podes concluir sobre a maneira como calculas MDC a medida que foi resolvendo os exercícios anteriores? Eu conclui que quanto maior os números, mais difícil de resolver o MDC

2) O que podes concluir sobre a maneira como calculas MDC a medida que foi resolvendo os exercícios anteriores? Quando o nº é "pequeno" é mais fácil de chegar ao MDC pois concluímos direto.

Figura 64 – Resposta dada pelos alunos para a segunda questão da Folha 10.

Quatro alunos não responderam à pergunta, onze alunos relataram os cálculos feitos nos itens anteriores, sem emitir juízo sobre tais cálculos e um aluno escreveu que não entendeu.

Apesar de a maioria não ter registrado sobre a maior dificuldade encontrada para obter o MDC entre 2990 e 3320 e, também, entre 1351 e 278, percebemos na realização da atividade que isto aconteceu e que muitos alunos comentaram sobre a incerteza do resultado encontrado, o que abre o caminho para introduzir o cálculo do MDC entre dois números pelo algoritmo de Euclides.

Análises da Folha 11

<u>Análises a *posteriori*</u>

A primeira questão requer que os alunos calculem o seis MDC’s entre dois números, utilizando o algoritmo de Euclides. Os seis pares de números foram propostos utilizando como base a Folha anterior, em que os alunos calcularam o MDC sem o algoritmo de Euclides.

Dezesseis alunos fizeram todos os seis MDC’s corretamente com o método ensinado; três alunos erraram apenas um dos seis MDC’s. Cada um cometeu um erro diferente e em um exercício diferente; um deles indicou o MDC como sendo o quociente da divisão; o outro indicou o número 1 sem que este aparecesse nas suas contas e o outro apresentou o MDC entre zero e dez como sendo zero. Três alunos cometeram dois ou três erros. Veja um destes, na Figura 65, como um dos alunos citados anteriormente, indicou o quociente como o resultado do MDC.

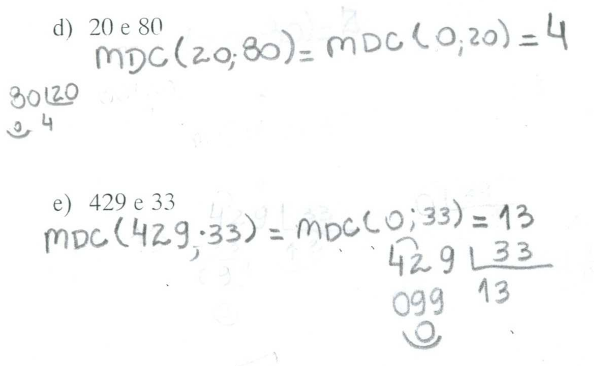
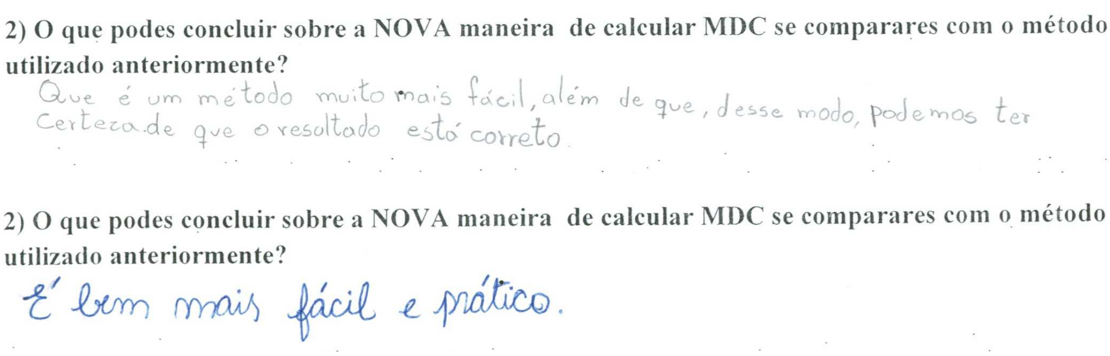


Figura 65 – Resolução das questões “d” e “e” da Folha 11.

A segunda pergunta da Folha solicitava que os alunos dessem sua opinião sobre “o novo método” – algoritmo de Euclides, comparando com o método que usavam anteriormente, como o mostrado na Folha 10. Foi unânime a resposta dos alunos que consideraram o método fácil de entender e usar e que passaram a ter a garantia sobre os resultados encontrados. A seguir, na Figura 66, as palavras de dois alunos que mostram a posição dos alunos quanto ao algoritmo de Euclides.



2) O que podes concluir sobre a NOVA maneira de calcular MDC se comparares com o método utilizado anteriormente?

Que é um método muito mais fácil, além de que, desse modo, podemos ter certeza de que o resultado está correto.

2) O que podes concluir sobre a NOVA maneira de calcular MDC se comparares com o método utilizado anteriormente?

É bem mais fácil e prático.

Figura 66 – Respostas dada por dois alunos da segunda questão da Folha 11.

Os cálculos feitos pelos alunos, bem como suas opiniões sobre o algoritmo de Euclides foram importantes nesta etapa das atividades, pois foi algo novo para eles e conseguiram ter sucesso, tanto na aprendizagem quanto na execução. Eles se mostraram à vontade e seguros com o método o que é fundamental para os próximos passos, em que a estrutura do MDC será usada para retomar a escrita como combinação linear. Esta parte das atividades se tornou motivadora para o andamento das aulas, já que os alunos mostraram uma posição positiva e segura para o conteúdo, indicado pelos comentários como os anteriormente apresentados.

Análises da Folha 12

Análises a *posteriori*

Ao começar a fazer as análises desta Folha e corrigir os exercícios, fiquei um pouco apreensiva, pois não conseguia, diante de tantos cálculos, enxergar o resultado como um todo. Sabemos que esta tarefa não é fácil, pois envolve cálculos bastante extensos, requerendo destreza algébrica bastante desenvolvida.

Senti a necessidade de fazer uma análise bastante quantitativa. Para isso, com o gráfico 1, podemos ver como foi o desempenho dos alunos ao resolverem os MDC's propostos na Folha 12.

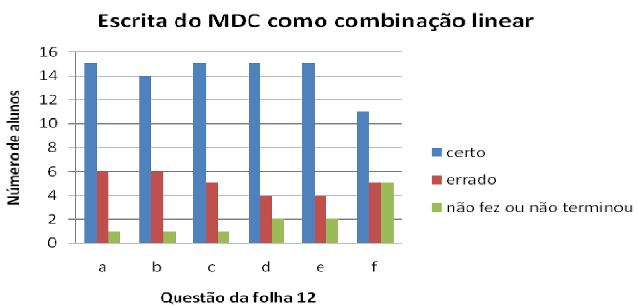


Gráfico 1 – Análise da escrita do MDC como combinação linear.

Depois deste primeiro olhar, foi mais fácil perceber que os alunos cometeram basicamente dois erros. Primeiro, foi possível observar que a maioria dos alunos entendeu o procedimento da escrita, embora, nem sempre, tenha conseguido terminar efetivamente a combinação solicitada. Veja a escrita do aluno, na Figura 67, que fez as cinco primeiras questões corretas e não conseguiu terminar a última.

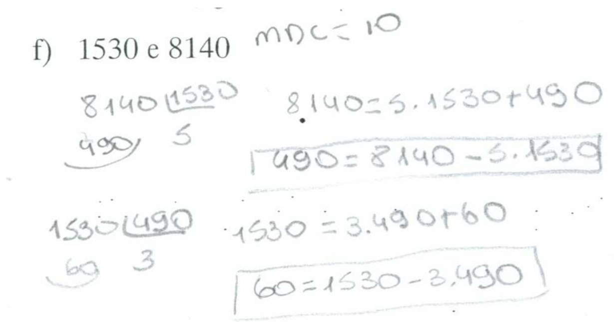


Figura 67 – Resposta da questão “f” da Folha 12.

O comentário do aluno indica uma característica deste tipo de escrita e que também apareceu nas questões de outros alunos. A diferença, e por isso mostramos este, se dá pelo fato de o aluno perceber que tem algo errado. Embora não tenha terminado, notou que se havia se atrapalhado nas contas e só é possível chegar a tal conclusão quem de fato compreende o que está fazendo.

Alguns alunos escreveram uma combinação linear, mas não dos números dados, de quaisquer outros números, o que não será útil na busca das soluções das equações, mas mostra que já conseguem articular o cálculo.

Análises da Folha 13

Análises a *posteriori*

Para a primeira equação x+5y=15 todos os alunos conseguiram identificar que a equação possui soluções inteiras; dezenove alunos justificaram corretamente através do teorema que trata de uma equação diofantina ter, ou não, soluções e três alunos não escreveram sobre isso, mas buscaram as soluções. Foram encontradas três escritas diferentes e corretas:

Um aluno encontrou x=-5+5t, y=4-t. Ele encontrou uma solução por tentativa e montou a solução geral, outro chegou a x=10+5t, y=1-t, escrevendo diretamente o 15 como combinação linear de 1 e 5 e uma aluna não conseguiu escrever 15 como combinação linear. Dezenove alunos escreveram o MDC entre 1 e 5 como combinação linear e depois multiplicaram por 15 e encontraram a solução geral x=-60+5t, y=15-t. Destes, quatro alunos confundiram-se e deram as soluções invertidas de x e y.

Isso mostrou que os alunos estavam procurando um modo próprio de encontrar as soluções e que não copiaram uns dos outros, além de reforçar que os alunos perceberam que nenhuma maneira foi dita como única e nem imposta para que eles seguissem.

A segunda equação proposta foi -4x+8y=12. Um aluno considerou a equação equivalente –x+2y=3 e chegou a x=-1+2t, y=1+t, porém não indicou como encontrou a solução particular (-1,1). Parece, pelas suas escritas, que foi por tentativa. Este mesmo aluno já tinha feito isso na equação anterior. Esse aluno demonstra que compreendeu completamente a ideia, ou seja, que basta obter uma solução inicial para determinar todas e que em casos simples a escrita do MDC como combinação linear pode ser descartada.

Quatro alunos encontraram x=3+8t, y=3+4t, através da escrita de 4 como combinação linear de 8 e -4 e após multiplicaram por 3. Dois alunos obtiveram, através de -4 como combinação linear de 8 e -4 e a multiplicação por -3, x=-9+8t, y=-3+4t.

Cinco alunos encontraram x=3+2t, y=3+t; três deles tomaram a equação equivalente –x+2y=3 a escrita de 1 como combinação linear de 2 e -1 e multiplicaram por 3. Os outros dois escreveram 4 como combinação linear de 4 e -8 e multiplicaram por 3.

Nas respostas da questão b, quatro alunos escreveram 4 como combinação linear de 4 e 8, mas escolheram as soluções particulares incorretas. Outros dois alunos escreveram a mesma combinação linear, porém multiplicaram por 12 e outros dois confundiram-se nas multiplicações por 3 na combinação. Também, um aluno errou ao escrever 12 como combinação linear de 4 e 8.

Dos alunos que entregaram a representação geométrica das duas primeiras equações, dezessete fizeram as duas corretas; um fez as duas erradas e dois alunos fizeram a segunda errada.

Para a terceira equação 4x+2y=5, apenas dois alunos buscaram a solução geral sem antes verificar se a equação possui soluções inteiras. Todos os outros alunos calcularam o MDC entre 4 e 2 e perceberam que ele não divide o número 5. Assim, conseguiram justificar que a equação não possui soluções inteiras.

O último exercício da Folha consiste em um problema em que os alunos têm de montar a equação, encontrar a solução e representá-la no plano cartesiano. Apenas um aluno não montou corretamente a equação: ele se esqueceu de multiplicar o preço de cada moletom pelo número de alunos.

Cinco alunos montaram a equação, mas não conseguiram encontrar a solução geral de forma correta: ou escreveram errada a combinação linear ou não consideraram a equação equivalente para obter os coeficientes de *x* e *y*. Dezesseis alunos obtiveram seus resultados conforme a tabela 5.

Nº de alunos	Equação e Combinação linear considerada	x da solução geral	y da solução geral	Parâmetro t
1	Não fez	$15+t$	$-6-2t$	$t \geq -15$
1	$50x+100y=1200$ $1200=50(0)+100(12)$	$100t$	$12-50t$	Não fez
1	$50x+100y=1200$ $1200=50(-24)+100(24)$	$-24+100t$	$24-50t$	$0{,}24 \leq t \leq 0{,}48$
2	$x+2y=12$ $1200=50(-24)+100(24)$	$-24+2t$	$24-t$	$12 \leq t \leq 24$
2	$2x+y=12$ $24=2(24)+1(-24)$	$24+t$	$-24-2t$	Não fez
6	$50x+100y=1200$ $1200=50(-24)+100(24)$	$-24+100t$	$24-50t$	Não fez

Tabela 5 – Análise das respostas dadas pelos alunos para a última questão da Folha 13.

A diversidade de resoluções corretas mostra que os alunos buscaram um método próprio de resolução, não se atendo a fórmulas prontas.

Em relação à representação geométrica desta equação: apenas um aluno não a fez e todos os outros fizeram-na de forma correta, embora nem todos tenham encontrado a solução da equação. Observamos que nenhum aluno usou a representação geométrica para conferir ou questionar as soluções encontradas na forma algébrica. Devido a isso, no Apêndice B, solicitaremos que eles façam esta comparação.

Vejo o saldo desta atividade como positivo, pois os alunos trabalharam bastante e mostraram, através das escritas, que compreenderam como se resolve uma equação diofantina. Um ponto a destacar é que alguns não perceberam que a solução do problema não poderia ser qualquer inteiro e, sim, teria que ser natural. Atribuo esta situação não somente ao fato de não questionarem seus resultados, mas também a esta situação ter sido pouco trabalhada em aula e ao tempo de execução que já estava se esgotando.

Análises da Folha 14

Análises a *posteriori*

Dos vinte e quatro alunos presentes, um aluno não tentou responder a nenhuma das questões e outro não respondeu à primeira. Dois alunos não conseguiram montar a equação que modelava a situação dada, quatro indicaram que a equação tem solução inteira, mas não utilizaram a teoria estudada e dezesseis alunos justificaram que a equação tem solução usando o teorema adequado. Veja uma destas respostas na Figura 68.

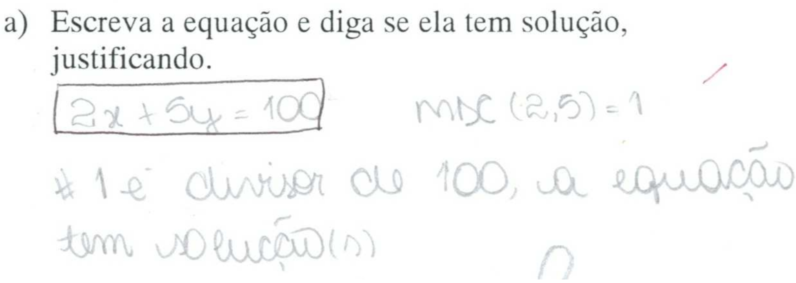


Figura 68 – Resposta da questão “a” da Folha 14.

Para a segunda, desenvolvida por 24 alunos, que tratava da solução da equação, três alunos não responderam, dois não terminaram, cinco alunos fizeram a combinação linear errada, dois inverteram os valores de x e y da solução particular, um usou os coeficientes de t errados e quatro o fizeram por tentativa. Destes, um escreveu a solução geral e, ainda, obtivemos o seguinte resultado, conforme colocamos na tabela 6.

Nº de alunos	Equação e Combinação linear	x da solução geral	y da solução geral	Parâmetro t
4	2x+5y=100 100=5 (100)+2 (-200)	-200+5t	100-2t	Dois indicaram, incorretamente, $20 \leq t \leq 40$
2	2x+5y=100 100=5 (-100)+2 (300)	300+5t	-100+5t	Não fez
1	5x+2y=100 100=2 (-200)+5 (100)	100+2t	-200-5t	Não fez

Tabela 6 – Análise das respostas dadas pelos alunos para a segunda questão da Folha 14.

Sete alunos não fizeram a representação geométrica; três a fizeram errada e quatorze a fizeram de forma correta.

Cabe lembrar que, além de este trabalho ser opcional, ele foi realizado juntamente com uma prova que envolvia outros conteúdos. Mesmo assim, a parte realizada mostra que o que foi desenvolvido nas aulas sobre equações diofantinas foi bem compreendido, já que a maioria resolveu as equações de forma correta.

As análises feitas ajudaram tanto para a compreensão da investigação, quanto para a melhoria da própria proposta de ensino apresentada. Portanto, considerando os acertos e falhas apresentados e diagnosticados durante a experiência de ensino, reformulamos as atividades e as exibimos no Apêndice B.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção, trazemos o que percebemos ao longo desta investigação, cujo foco foi analisar a viabilidade da inserção do estudo de equações diofantinas lineares em uma turma regular do ensino médio. No decorrer do estudo do conteúdo de equações diofantinas, na preparação e aplicação das atividades, bem como no momento das análises, notamos que situações não previstas apareceram, sejam elas em relação aos assuntos que foram vistos ou revistos ou, também, no que diz respeito ao comportamento tanto dos alunos quanto da mestranda.

Como as aulas não são feitas só de conteúdos, mas, também, da relação que se estabelece entre o professor e o aluno, apareceu uma aproximação pessoal que perdura e que foi diferente das já vivenciadas pela mestranda na condição de professora. Abordar este conteúdo foi benéfico para a mestranda, que desconhecia o tema. Isso oportunizou o estudo de um novo tópico com certo rigor matemático, além da parte prática de pensar como propor sua inclusão no ensino médio, como pode ser visto no Apêndice B.

Planejar a proposta e discutir os resultados da experimentação reforçaram o quanto são ricos os momentos de troca de ideias com outro professor e como seria bom para o ensino em geral e, em particular para o de matemática, se os professores participassem de debates deste tipo.

Esta experiência nos mostrou que uma aula bem preparada, além de economizar tempo em sala de aula, faz com que o seu objetivo fique mais claro para o aluno, tornando a aula mais inteligente e motivadora para ambos. Também, renovou a maneira de ser professora da mestranda, que ficou mais atenta para os acontecimentos das aulas como um todo e não apenas no momento da aplicação da sequência didática, promovendo até mesmo mais questionamentos sobre como trabalha muitos dos tópicos da matemática, despertados ao explicar a nova maneira de calcular o MDC.

Nossa proposta foi de construir conceitos com os alunos. Para isso, utilizamos as situações criadas e as inusitadas, que apareciam em aula como um processo investigativo. Isto se deu através de exemplos predefinidos no plano de ensino e pelos que surgiam em aula, bem como nas discussões que nasciam deste processo. Isso foi possível porque nos dispusemos a respeitar o tempo necessário para compreensão dos alunos, entendendo que este caminho, embora demorado, é o mais adequado para o aprendizado.

A proposta de iniciar a experiência didática por um jogo que nomeamos “escova diofantina” mostrou-se positiva, pois, além de convidar os alunos à proposta de uma forma lúdica, conduziu-os para a compreensão de combinação linear, para a construção de equações e suas possíveis soluções. Isso mostrou que um jogo pode ser uma ferramenta bastante apropriada para a sala de aula, quando bem estruturado e com o professor tendo a clareza da matemática que deseja fazer dele emergir.

Conduzimos toda a sequência didática, fazendo com que os alunos tivessem a oportunidade de obter resultados a partir de uma atividade realizada. Procuramos não impor conceitos, mas trabalhamos de modo que os alunos ficassem convencidos de fatos para fazerem suas próprias conclusões. Na aplicação do jogo, por exemplo, os alunos preencheram uma tabela com as jogadas e, a partir delas e das discussões que apareceram quando eles relatavam suas jogadas, definimos combinação linear e construímos a equação que modelava o jogo, introduzindo, deste modo, nosso tema: equação diofantina linear.

Passamos a examinar se os alunos sabiam representar geometricamente a equação $ax+by=c$ e eles demonstraram, através dos exercícios e das discussões, ter muitas dúvidas. Porém, no decorrer das aulas, eles mostraram ter superado esta dificuldade, até mesmo porque utilizaram, com facilidade, a representação geométrica para concluir o teorema sobre a solução geral de uma equação diofantina linear, feito posteriormente.

Precisávamos, também, que os alunos lembrassem os conceitos de divisor, divisor comum e de MDC para concluírem o teorema que trata de quando uma equação diofantina linear tem solução inteira. Examinamos isso através das atividades propostas e dos questionamentos e eles mostraram não ter dificuldades, embora não tenham expressado com clareza as definições.

Os alunos já tinham analisado as equações que têm solução inteira através do jogo e da representação geométrica. Retomamos a tabela do jogo para eles indicarem o MDC entre os coeficientes das equações e, assim, além de atrelar os assuntos já conhecidos por eles à proposta da sequência didática, começamos a induzi-los a pensar na relação entre o MDC, o resultado da equação e quando uma equação tem solução inteira. Os poucos alunos que não indicaram a ideia do teorema através da atividade mostraram ficar convencidos com as discussões, o que promoveu a enunciação do teorema. Para as atividades seguintes, os alunos utilizaram este resultado com muita naturalidade, garantindo, assim, a compreensão do teorema.

Queríamos que os alunos entendessem que a forma como calculavam o MDC nem sempre era efetiva. Para eles perceberem isso, a atividade que solicitava este cálculo buscou questionar o que acontecia, no que se refere à dificuldade de obter o MDC entre números grandes e, sem maiores problemas, eles desejaram uma nova maneira. Destacamos, assim, que o estudo sobre equações diofantinas lineares oportunizou, também, uma renovação e o amadurecimento de diversos conteúdos já vistos pelos alunos, principalmente acerca do MDC. Isso aconteceu através deste confronto entre a maneira como calculavam e a nova técnica apresentada, que foi bem aceita e compreendida pelos alunos.

De posse da nova maneira para calcular o MDC, passamos a utilizá-la para construir algumas equações diofantinas lineares e obter uma solução da equação construída, o que permitiu que retomássemos o foco de obter as soluções de uma equação. Aproveitando os cálculos do MDC, passamos a escrevê-lo como combinação linear dos números envolvidos. Os alunos acompanharam muito bem os diversos cálculos que a escrita do MDC como combinação linear exige. Escolhemos cuidadosamente os exemplos e exercícios nas aulas em que eram executados muitos cálculos para que os alunos pudessem compreender o procedimento sem se intimidarem com o seu tamanho. Quando tiveram dúvidas, procuraram o atendimento extraclasse, bem como dirimir as dúvidas em aula e, aparentemente, tudo ficou sanado.

Retomamos a representação geométrica da equação para achar a solução particular. Destacamos a maneira como dirigimos os alunos a escrever a solução geral da equação; para fugir do artifício algébrico, buscamos uma associação geométrica e, através da representação de algumas soluções da equação no plano cartesiano, naturalmente, foi detectado o comportamento das abscissas e ordenadas da solução geral de uma equação diofantina linear específica.

Observamos que esta abordagem é vantajosa, pois tornou o procedimento de generalização bastante natural e esta transição geométrico – algébrica, que foi utilizada em sala de aula, é prevista nos PCN +:

> Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações (2006, p. 114).

Nosso objetivo principal, quando pensamos nas aulas e no que seria interessante de os alunos apreenderem, foi de fazer com que eles fossem bem orientados para resolver uma equação diofantina linear. Porém, a experiência mostrou que revisitar conteúdos, aproveitando o que os alunos já dominam e, a partir daí, construir novos conceitos pode ser uma maneira motivadora de captar os alunos para as aulas, valorizando-os e, também, favorece a prática docente, que passa a ser mais desafiadora.

Escolhemos trabalhar o tema no primeiro ano do ensino médio, mas, ao finalizarmos as análises, começamos a pensar em outras possibilidades de inserção na escola. E ficamos curiosas de saber: o que teria acontecido se tivéssemos aplicado o tema no ensino fundamental? Será que os alunos realmente são imaturos para receber este assunto? Começamos a imaginar, também, como seria usar esta sequência para alunos numa fase final do ensino médio: será que eles também não gostariam de resgatar e reutilizar tantas coisas que já aprenderam e que podem ter ficado perdidas?

Enfim, deixamos o desafio! Temos a esperança de que outros alunos tenham a oportunidade de se deparar com este tópico da matemática, que indica ser capaz de dar muitos frutos e que também é de interesse de outros programas de pós-graduação.

Nossa experiência indicou que os alunos abraçaram a proposta de estudar as equações diofantinas lineares e, através das análises das atividades e das aulas, mostraram que compreenderam o conteúdo e que ficam interessados por pontos que não estão diretamente previstos no currículo. Por esta sequência didática ter sido bem sucedida, esperamos que outras pessoas possam aproveitá-la, utilizando o Apêndice B, e melhorá-la com o intuito de aprimorar os próprios tópicos da matemática.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michele. **Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

BRIETZKE, Eduardo Henrique de Mattos; DOERING, Luisa Rodriguez. **Notas de aula**.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

COSTA, Eduardo Sad da. **As equações diofantinas lineares e o professor de matemática do ensino médio**. 2007. 119p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 3 ed. Campinas: Unicamp, 2004.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; FRANKE, Rosvita Fuelber. **Equações diofantinas na formação de professores de matemática**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte.

ISNARD, Carlos. Soluções inteiras. In: **Revista do Professor de Matemática** n.8. São Paulo: SBM, 1986.

MILIES, Francisco César Polcino; COELHO, Sonia Pitta Coelho. **Números: uma introdução à matemática**. São Paulo: EDUSP, 2001.

MONTEIRO, Guilherme Ferreira. **Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio.** 2010. 91p. Trabalho de Conclusão de Curso. (Licenciatura em Matemática), UFRGS-RS, 2010.

OLIVEIRA, Sílvio Barbosa de. **As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio**. 2006. 102p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2006.

PATROCÍNIO, Antonio Carlos. **Soluções inteiras**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, SP, n.8, 1986.

POMMER, Wagner Marcelo. **Equações Diofantinas Lineares: um desafio motivador para alunos de ensino médio.** 2008. 153p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2008.

ROCQUE , Gilda La; PITOMBEIRA, João Bosco. Uma equação diofantina e suas aplicações. In: **Revista do Professor de Matemática** n.19. São Paulo: SBM, 1991.

SATO, Sergio Noriaki. **Soluções inteiras positivas**. In: **Revista do Professor de Matemática** n.8. São Paulo: SBM, 1986.

SILVA, Aparecida Francisco da; KODAMA, Helia Matiko Yano. **Jogos no ensino de matemática**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador: UFBa, 2004.

SILVA, Filardes de Jesus Freitas da. **Equações Diofantinas Clássicas e Aplicações**. 2009. 90p. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática), UNICAMP-SP, 2009.

APENDICE A - DOCUMENTOS

Termo de Consentimento

Eu, ____ , responsável pelo (a) aluno (a) ____, da turma 20111.QUI_I.1AM, declaro, por meio deste termo que o (a) aluno (a) participe de toda a pesquisa "Equações diofantinas no ensino médio" desenvolvida pela professora Bianca Herreira Capilheira, que é a professora de matemática da turma e efetiva do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, sob a orientação da professora Luisa Rodríguez Doering - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Para o desenvolvimento desta investigação as aulas serão ministradas no matutino, no horário das aulas de matemática e serão realizadas aulas extras nos dias: 28/04/2011 e 05/05/2011 no horário vago da turma que é das 10h45min às 12h15min.

Este trabalho, previamente autorizado pelo IFSul, será filmado e fotografado, tem o objetivo acadêmico de analisar o processo ensino/aprendizagem de equações diofantinas lineares no ensino médio, que utiliza diversos conteúdos do ensino fundamental, fortalecendo e justificando o estudo destes tópicos neste nível e é parte integrante das avaliações da 1ª etapa do semestre tendo peso 2.

Qualquer dúvida poderá ser esclarecida pela professora Bianca nas terças-feiras às 16h na Coordenadoria de Matemática, pessoalmente ou pelo telefone (53)21231000.

Professora Bianca Herreira Capilheira ____________________________

Responsável pelo aluno ____

Pelotas, _____de ___________________de 2011.

Termo de autorização

Eu, Bianca Herreira Capilheira professora de matemática do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense do Campus Pelotas, solicito autorização para realizar a pesquisa “Equações diofantinas no ensino médio” na turma 20111.QUI_I.1AM. Esta prática é parte da dissertação que está sob orientação da professora Luisa Rodríguez Doering – PPGEM/Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Para o desenvolvimento desta investigação as aulas serão ministradas no matutino, no horário das aulas de matemática e serão realizadas aulas extras nos dias: 28/04/2011 e 05/05/2011 no horário vago da turma que é das 10h45min às 12h15min.

Este trabalho será filmado e fotografado e tem o objetivo acadêmico de analisar o processo ensino/aprendizagem de equações diofantinas lineares no ensino médio, que utiliza diversos conteúdos do ensino fundamental, fortalecendo e justificando o estudo destes tópicos neste nível e é parte integrante das avaliações da 1ª etapa do semestre tendo peso 2.

Professora Bianca Herreira Capilheira

Odair Antonio Noskoski
Coordenador da Matemática

APÊNDICE B – PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

A seguir, apresentamos uma sequência didática revisada para que o leitor possa utilizar em sala de aula, sendo este o produto da dissertação.

Neste sentido, partimos das atividades aplicadas em sala de aula durante a experimentação e construímos um roteiro com as atividades reformuladas e renumeradas. Partindo do que foi feito em sala de aula e do que foi observado nas análises, rearranjamos a proposta, procurando melhorá-la para utilização em sala de aula. Tornamos este roteiro prático indicando a parte conceitual e o que foi feito quando da experimentação, para que o leitor busque-o conforme sua necessidade no corpo da dissertação. Além do roteiro, fica a sugestão de o professor promover uma discussão para cada atividade com os alunos, bem como na correção dos exercícios, onde sugerimos explorar as diversas maneiras de apresentar as resoluções.

ROTEIRO

0. Estudar a teoria das equações diofantinas na seção 1.3

1. Jogo "Escova Diofantina"

Aplicar Folha I

Aplicar Folha II

2. Combinação linear

Usar as escritas da Folha II para definir combinação linear, veja na seção 2.1.2.

3. Equação Diofantina

Construir a tabela da Folha III e Aplicar Folha III.

Aplicar Folha IV.

Aplicar Folha V.

Usar as equações das Folhas III, IV e V para definir equação diofantina, veja na seção 2.1.3.

4. Representação geométrica da equação

Se necessário, fazer uma revisão breve sobre a representação geométrica da equação $ax+by = c$. Fazer vários exemplos, veja na seção 2.1.4.

Aplicar Folha VI

5. Divisor, Divisor Comum e MDC

Aplicar Folha VII

Aplicar Folha VIII

6. Algoritmo de Euclides

Aplicar Folha IX. Usar a tabela da Folha para convencer os alunos de que os divisores comuns de a e b (a > b) são os mesmos que de b e o resto da divisão de a por b e, que, portanto, o MDC também é o mesmo.

Introduzir a algoritmo de Euclides através dos exemplos da seção 2.1.6.

Aplicar Folha X

Aplicar Folha XI

7. Teorema de Bézout

Introduzir Teorema de Bézout e associar a combinação linear a uma equação, ver na seção 2.1.7.

Aplicar Folha XII

8. Solução de uma equação

Construir o teorema que trata da solução geral de uma equação diofantina, ver seção 2.1.8.

Aplicar Folha XIII

Aplicar Folha XIV

9. Equação do jogo

Soluções de uma equação do jogo, ver seção 2.1.9.

10. Outro problema envolvendo equações diofantinas

Aplicar a Folha XV

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA I**

ESCOVA DIOFANTINA

REGRAS DO JOGO:

Material necessário

1 baralho comum
Retire do baralho as Figuras (rei, dama e valete) dos quatro naipes e também os curingas. Agora tens um baralho de 40 cartas composto por quatro sequências de Ás a 10.

Descrição

Embaralhe as cartas e distribua 3 para cada jogador. Abra as próximas 4 cartas e coloque-as no centro da mesa mostrando os números. O monte restante é posto de lado.

O objetivo é jogar uma carta de modo que a soma do seu valor com o valor de uma ou mais cartas da mesa dê 15, utilizando no máximo dois valores de carta diferentes.

O jogador coloca à sua frente as cartas retiradas da mesa, assim como a carta de sua mão que permitiu a soma de 15, com a face voltada para baixo. Caso ele não consiga pegar nenhuma carta da mesa, deve simplesmente descartar na mesa uma das cartas de sua mão e o jogo prossegue. Se o jogador conseguir pegar todas as cartas restantes na mesa de uma única vez, o jogador fez uma *escova diofantina*. Ao colocar na sua frente as cartas retiradas, ele deverá colocar uma delas com a face voltada para cima e perpendicular ao monte de cartas voltadas para baixo. Será o sinal de que ele fez uma *escova diofantina* e este procedimento deverá ser repetido para cada *escova diofantina* feita.

Quando os jogadores tiverem utilizado suas 3 cartas, uma nova mão de 3 cartas é distribuída, utilizando o monte que havia sido posto de lado. A partida prossegue da mesma maneira até que o monte de cartas termine. Aí é feita a contabilização dos pontos.

Contabilização dos pontos:

Cada *escova diofantina* vale 1 ponto.
Os pontos conquistados por cada jogador (ou equipe) são anotados em uma Folha, as cartas são embaralhadas e uma nova mão tem início, ao término da qual os pontos são novamente somados. Vence a partida quem atingir 5 pontos.

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA II**

REGISTRO DAS JOGADAS

	1ª CARTA	QUANTIDADE DA 1ª CARTA	2ª CARTA	QUANTIDADE DA 2ª CARTA	FAZER A SOMA (REGISTRAR) (quantidade 1ªcarta).(valor da 1ªcarta) + (quantidade 2ªcarta).(valor da 2ª carta)
Exemplo	**4**	**2**	**7**	**1**	$4 \cdot (2) + 1 \cdot (7)$

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA III**

A tabela abaixo, que foi construída anteriormente, apresenta as equações que modelam o jogo "escova diofantina", onde x é a quantidade da primeira carta indicada e y a quantidade da segunda carta.

1) Verifica que existem duas equações para cada par de cartas e pinta a primeira delas de amarelo, seguindo pelas linhas da tabela.

2) Pinta de vermelho as equações que não têm solução e de verde as que têm solução.

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
2x+1y=15	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
3x+1y=15	3x+2y=15	3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15	4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15	6x+7y=15	6x+8y=15	6x+9y=15	6x+10y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15	7x+6y=15	7x+8y=15	7x+9y=15	7x+10y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15	8x+6y=15	8x+7y=15	8x+9y=15	8x+10y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15	9x+6y=15	9x+7y=15	9x+8y=15	9x+10y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15	10x+6y=15	10x+7y=15	10x+8y=15	10x+9y=15

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA IV**

A tabela abaixo apresenta as equações que modelam o jogo "escova diofantina", agora para infinitos baralhos, onde x é a quantidade da primeira carta indicada e y a quantidade da segunda carta.

1) Assim como na tabela anterior, existem duas equações para cada par de cartas. Pinta a primeira delas de amarelo, seguindo pelas linhas da tabela.

2) Pinta de vermelho as equações que não têm solução e de verde as que têm solução. Lembra que agora temos infinitos baralhos!

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
2x+1y=15	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
3x+1y=15	3x+2y=15	3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15	4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15	6x+7y=15	6x+8y=15	6x+9y=15	6x+10y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15	7x+6y=15	7x+8y=15	7x+9y=15	7x+10y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15	8x+6y=15	8x+7y=15	8x+9y=15	8x+10y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15	9x+6y=15	9x+7y=15	9x+8y=15	9x+10y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15	10x+6y=15	10x+7y=15	10x+8y=15	10x+9y=15

1) Se comparares esta tabela com a da Folha 3, o que faz com que algumas equações da tabela da Folha 3 fiquem com outra cor nesta tabela?

2) Por que a equação 4x+2y=15 continua sem solução?

3) Analisa as equações que não têm solução. Consegues identificar alguma característica nas equações em que não conseguimos solução? Qual?

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA V**

Constrói uma tabela com as equações que modelam o novo jogo "escova diofantina" para soma 12 com infinitos baralhos, onde x é a quantidade da primeira carta indicada e y a quantidade da segunda carta.

1) Assim como nas tabelas anteriores, existem duas equações para cada par de cartas. Pinta a primeira delas de amarelo, seguindo pelas linhas da tabela.

2) Pinta de vermelho as equações que não têm solução e de verde as que tem solução.

1) Escreva a equação que modela este jogo.

2) Por que a equação $5x+10y=12$ não tem solução?

3) Analisa as equações que não têm solução. Consegues identificar alguma característica nas equações em que não conseguimos solução? Qual?

4) Se $x, y \in \mathbb{Z}$, será que a equação $5x+8y=12$ tem solução?

NOME COMPLETO: ____**FOLHA VI**

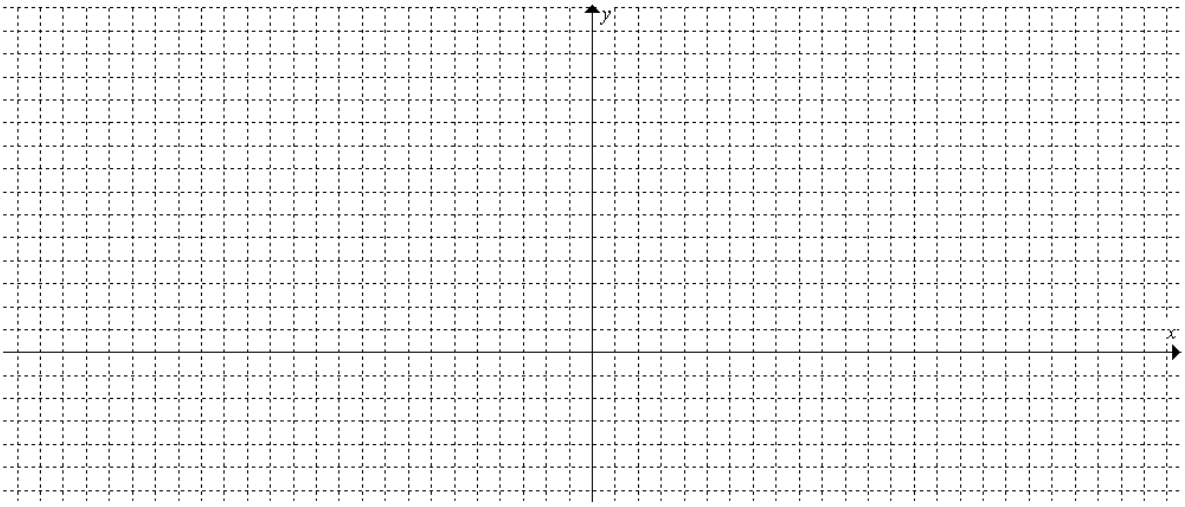
1) Representa no plano cartesiano as equações abaixo.

2) Identifica, caso existam, todos os pontos cujas coordenadas são ambas inteiras (marca o ponto com uma outra cor) no reticulado dado.

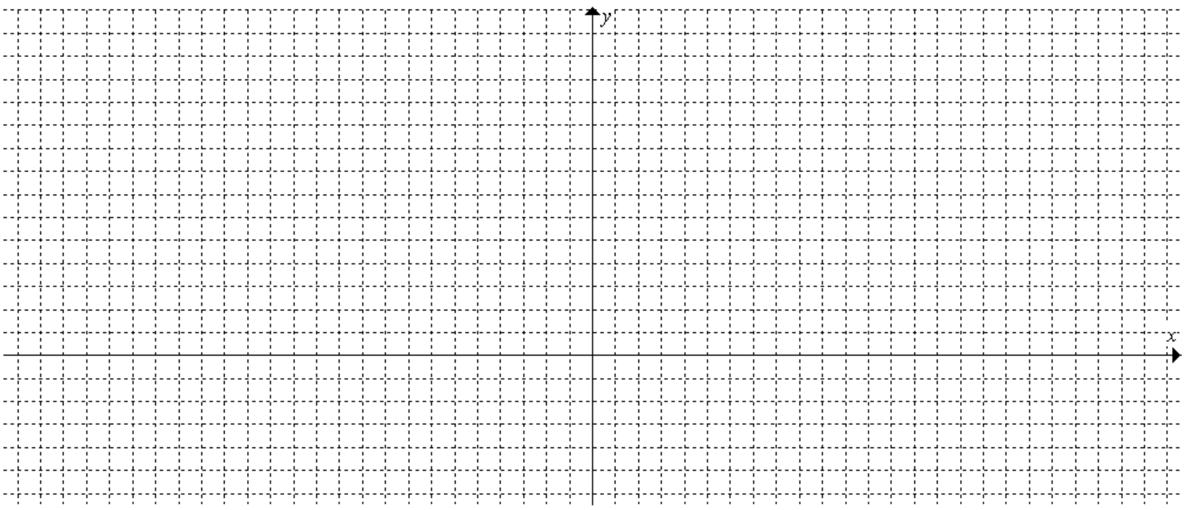
3) Para cada equação que possui pontos com ambas as coordenadas inteiras, apresenta uma listagem em forma de tabela colocando a coordenada x na primeira coluna e a coordenada y, correspondente, na segunda coluna.

4) Qual a relação entre as retas que possuem pontos com ambas as coordenadas inteiras, exceto a letra "e", e as equações pintadas nas tabelas de verde ou vermelho?

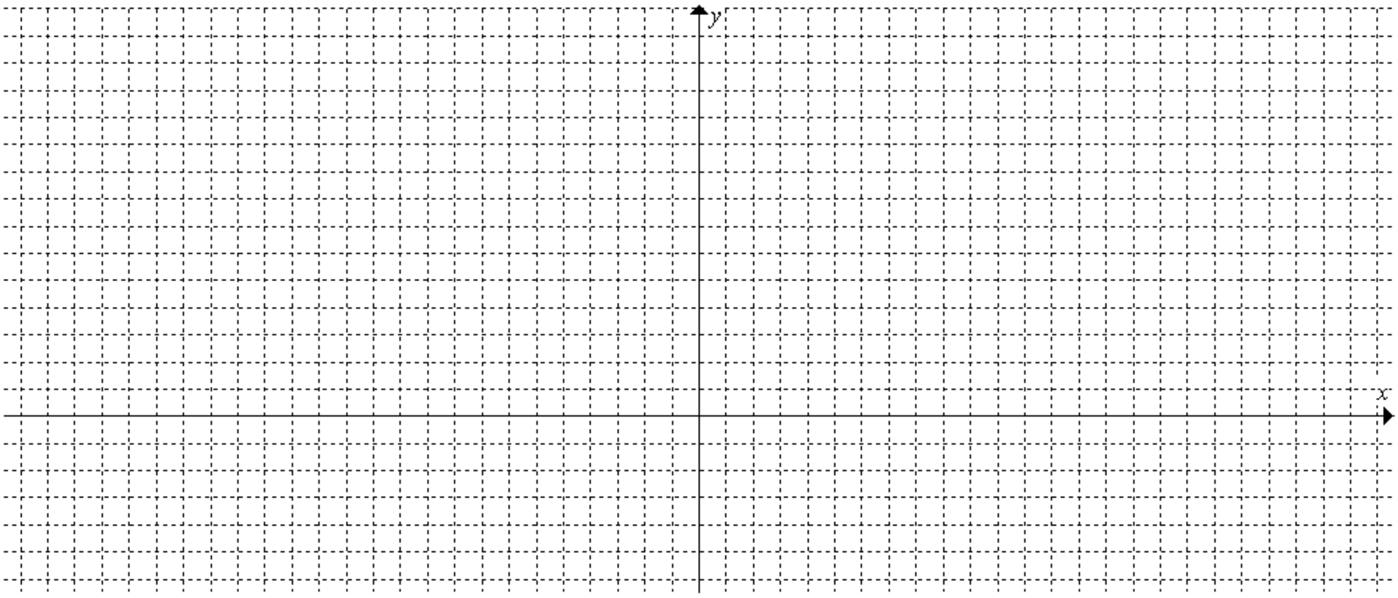
a) 5x+10y=12



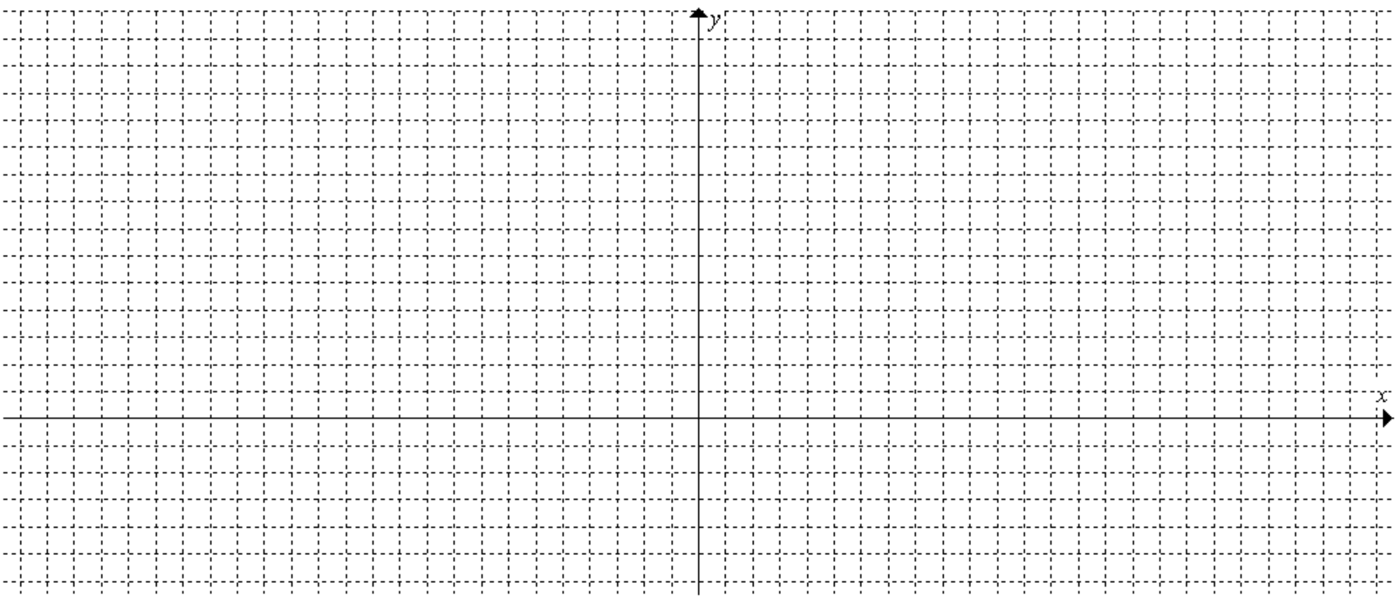
b) 4x+2y=15



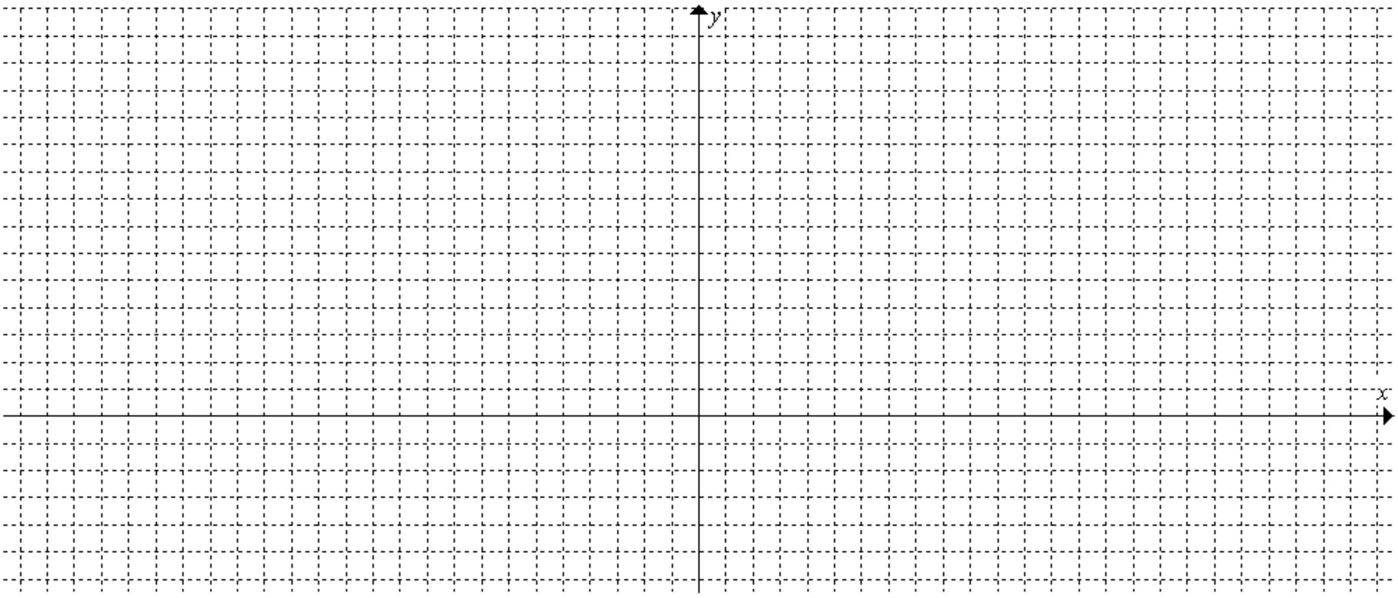
c) 5x+8y=15



d) 2x+4y=12



e) x+2y=6



Compara as tabelas feitas no item 3 para os exercícios “d” e “e”. O que as equações “d” e “e” têm em comum? Sabes como chamá-las?

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA VII**

1) Considera o número 10.

1.1 Cita um divisor de 10

1.2 Cita todos os divisores de 10

2) Qual a definição de divisor de um número inteiro?

3) Quais os divisores comuns de 16 e 20?

4) Qual o maior dos divisores comuns de 16 e 20?

5) O que é MDC?

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA VIII**

1) Considera os números e calcule o MDC entre eles:

a) 2 e 5

b) 6 e 18

c) 2990 e 3220

d) 1351 e 278

2) Classifica o cálculo dos MDC’s como fácil, médio e difícil.

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA IX**

Determina os divisores comuns entre

a) 48 e 30

b) 30 e 18

c) 18 e 12

d) 12 e 6

4) Determina o MDC para cada par de números do item 3.

5) Completa a tabela.

	Divisores comuns	MDC	Resto da divisão	
48 e 30				
30 e 18				
18 e 12				
12 e 6				

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA X**

1) Considera os números e calcule o MDC entre eles, usando o algoritmo de Euclides.

a) 3 e 4

b) 20 e 80

c) 429 e 33

d) 1530 e 8140

2) Compara a NOVA maneira de calcular MDC com o método utilizado anteriormente.

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA XI**

A tabela abaixo mostra o resultado da Folha 4. Escreve o MDC entre o valor das cartas do jogo de soma 15, ou seja, o MDC entre os coeficientes de x e y. (coloca o MDC logo abaixo da equação - na célula da tabela)

2x+1y=15				
3x+1y=15	3x+2y=15			
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15		
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15

1) Relacionando com o MDC calculado, quais as situações em que a equação ax+by=15:

a) possui solução inteira?

b) não possui solução inteira?

2) Trocando 15 por um valor c inteiro, quando a equação ax+by=c,:

a) possui solução?

b) não possui solução?

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA XII**

Calculamos, na Folha 9, o MDC entre cada par de números abaixo.

1) **Escreve o MDC como combinação linear destes números**
2) **Associa a combinação linear encontrada a uma equação diofantina**
3) **Obtém uma solução particular**

a) 3 e 4

b) 20 e 80

c) 429 e 33

d) 1530 e 8140

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA XIII**

Escreve a solução geral das equações (da Folha 6): c)$5x+8y=15$, d) $2x+4y=12$ e e) $x+2y=6$, utilizando a listagem das soluções feita na Folha 6.

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA XIV**

Para cada equação,

1) verifica se há solução e justifica tua resposta,

2) determina, caso exista, uma solução inicial. Para isso, se necessário, usa a escrita do MDC como combinação linear dos coeficientes de x e y,

3) encontra a solução geral algebricamente,

4) faze a representação geométrica e indica todas as soluções com ambas as coordenadas inteiras e

5) verifica se todos os pontos encontrados no item 4 satisfazem a solução geral encontrada em 3.

a) $\mathbf{x + 5y = 15}$

b) $\mathbf{- 4x + 8y = 12}$

c) 4x + 2y = 5

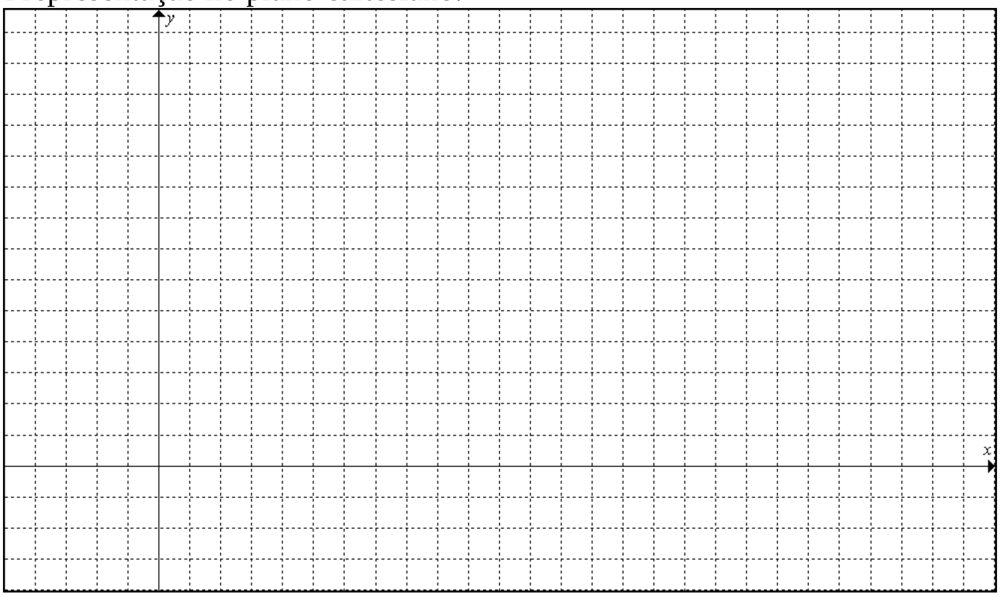
Resolva o seguinte problema:

Os alunos da turma de química do 1° semestre de 2011 do IFSul decidiram fazer um moletom com emblema da turma. A malharia que fará o serviço solicitou que o pagamento final fosse feito apenas com notas de R$50 ou/e de R$100. Sabendo que a turma tem 25 alunos, que todos quiseram um moletom e que cada um custou R$ 48,00, determina:

b) A equação que modela esta situação

c) A solução geral da equação

d) A representação no plano cartesiano.



e) Analisa todas as soluções e indique a que utiliza a menor quantidade de notas.

f) E se forem utilizados os dois tipos de notas para o pagamento, qual a que utiliza a menor quantidade de notas?

NOME COMPLETO: ____ **FOLHA XV**

Deseja – se gastar exatamente R$100, comprando selos de R$2,00 e R$5,00.

Fonte: http://www.correios.com.br/selos/selos_postais/selos_2011/selos2011.cfm

a) Considera x a quantidade de cédulas de R$2,00 e y de R$5,00. Escreve a equação que modela o problema.

b) Verifica se a solução do item *a* tem solução e justifique.

c) Determina a solução geral.

d) Representa a equação geometricamente.

e) Determina todas as maneiras de efetuar essa compra.