Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

CAMPOS DE KILLING, CURVATURA MÉDIA E TRANSLAÇÕES

por

CÍNTIA RODRIGUES DE ARAÚJO PEIXOTO

Porto Alegre, abril de 2005

Dissertação submetida por Cíntia Rodrigues de Araújo Peixoto* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS)

Banca Examinadora:
Dr. Artur Oscar Lopes (UFRGS)
Dra. Elizabeth Quintana Ferreira da Costa (UFRGS)
Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS)
Dra. Susana Cândida Fornari (UFMG)

Data de Defesa: 08 de abril de 2005.

* Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Para Leandro e Fernando,
com carinho.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Jaime Ripoll pela valiosa orientação.

A todos professores que contribuíram para minha formação, especialmente aos professores Ivan Pan, Luisa Doering, Leonardo Bonorino e Marcos Sebastiani.

Aos professores da banca, Artur Oscar Lopes, Elizabeth Ferreira da Costa e Susana Fornari, que através de suas sugestões e conselhos enriqueceram este trabalho.

Aos ex-colegas da graduação e aos colegas da Pós pela amizade e companheirismo.

À Rosane, secretária do programa, pela disponibilidade e ajuda.

Resumo

D. Hoffman, R. Osserman e R. Schoen mostraram que se a aplicação de Gauss de uma superfície orientada completa de curvatura média constante M imersa em $\mathbb{R}^3$ está contida em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^2$ (equivalentemente, a função $\langle \eta, v \rangle$ não muda de sinal em M, onde η é um vetor unitário normal de M e v algum vetor não nulo de $\mathbb{R}^3$), então M é invariante por um subgrupo a um parâmetro de translações de $\mathbb{R}^3$ (aquele determinado por v). Neste trabalho obtemos uma extensão deste resultado para o caso em que o espaço ambiente é uma variedade riemanniana e M uma hipersuperfície em N requerendo que a função $\langle \eta, V \rangle$ não mude de sinal em M, onde V é um campo de Killing em N. Na parte final deste trabalho consideramos uma variedade riemanniana Killing paralelizável N para definir uma translação $\gamma : M \to \mathbb{R}^n$ de uma hipersuperfície M de N que é uma extensão natural da aplicação de Gauss de uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$. Considerando as mesmas hipóteses para a imagem de γ obtemos uma extensão do resultado original de Hoffman-Osserman-Schoen.

Abstract

D. Hoffman, R. Osserman and R. Schoen proved that if the Gauss map of a complete constant mean curvature oriented surface M immersed in $\mathbb{R}^3$ is contained in a closed hemisphere of $\mathbb{S}^2$ (equivalently, the function $\langle \eta, v \rangle$ does not change sign on M where η is a unit normal vector of M and v some non zero vector of $\mathbb{R}^3$), then M is invariant by a one parameter subgroup of translations of $\mathbb{R}^3$ (the one determined by v). In this work we obtain an extension of this result to the case that the ambient space is a Riemannian manifold and M a hypersurface on N by requiring that the function $\langle \eta, V \rangle$ does not change sign on M, where V is a Killing field on N. In the last part of this work we consider a Killing paralelizable Riemannian manifold N to define a translation map $\gamma : M \to \mathbb{R}^n$ of a hypersurface M of N which is a natural extension of the Gauss map of a hypersurface in $\mathbb{R}^n$. Considering the same hypothesis on the image of γ we obtain, an extension to this setting, of the original Hoffman-Osserman-Schoen result.

Conteúdo

Introdução

D. Hoffman, R. Osserman and R. Schoen mostraram que se a aplicação de Gauss de uma superfície completa, orientada e com curvatura média constante M imersa em $\mathbb{R}^3$ está contida em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^2$, então M é invariante por um subgrupo a um parâmetro de translações de $\mathbb{R}^3$; e daí decorre que M ou é um cilindro circular ou um plano (Teorema 1 de [6]). Este resultado pode ser escrito equivalentemente da seguinte forma:

Seja η um campo normal unitário de M em $\mathbb{R}^3$. Se para algum vetor não-nulo $V \in \mathbb{R}^3$ a aplicação :

$$f(p) := \langle \eta(p), V \rangle, p \in M, \tag{1}$$

não muda de sinal em M, então M é invariante pelo subgrupo de translações determinado por V. Este resultado foi generalizado em [8] para o caso em que M é uma hipersuperfície de um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante e V com campo invariante à esquerda. E mais recentemente os autores mostraram que o mesmo resultado vale em um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e V invariante à direita.

Considerando que em um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda, os campos invariantes à direita são campos de Killing, é natural elaborar a seguinte questão: Seja M uma hipersuperfície orientada, completa e de curvatura média constante imersa em N. Supondo que f (definida em (1)) não muda de sinal em M, onde V é um campo de Killing em N: É verdade que M é invariante pelo subgrupo a um parâmetro de isometrias determinado por V?

Neste trabalho obtemos a resposta afirmativa no caso de M ser compacta de dimensão qualquer (Corolário 2.5) e no caso de M ser completa, simplesmente conexa e de dimensão 3 (Corolário 2.7). Em ambos os casos supomos que $\mathrm{Ric}(W) \geq -nH^2$, para qualquer W vetor unitário tangente de N. Para provarmos estes dois resultados usamos como resultado fundamental, a seguinte fórmula para o Laplaciano de f:

$$\Delta f = -n\langle V, \nabla H\rangle - (Ric(\eta) + \|B\|^2)f. \tag{2}$$

Esta fórmula é conhecida no caso de N ser espaço de curvatura constante e de M ter curvatura média constante (ver [9]).

O primeiro capítulo deste trabalho destina-se a apresentar definições e resultados que serão utilizados no desenvolvimento desta dissertação.

No segundo capítulo demonstramos a fórmula (2) e provamos as duas conseqüências dela citadas acima.

No terceiro capítulo, usamos campos de Killing em variedades Killing paralelizáveis para definir uma aplicação de translação $\gamma : M \to \mathbb{R}^n$ da hipersuperfície M de N e usamos (2) para provar que M tem curvatura média constante se, e somente se, γ satisfaz a equação

$$\Delta\gamma = -(Ric(\eta) + ||B||^2)\gamma.$$

Usando este resultado obtemos uma caracterização de hipersuperfícies de curvatura média constante com hipóteses sobre a imagem de γ.

Esta dissertação foi baseada no trabalho de J. Ripoll e S. Fornari ([5]).

Capítulo 1

Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é introduzir algumas noções básicas de geometria riemanniana e alguns resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. As definições de variedade diferenciável orientável, espaço tangente e conexão serão assumidas conhecidas e podem ser encontradas, por exemplo, em [1].

1.1 Definições

Sejam M e N variedades riemannianas orientáveis de dimensões n e $n+1$, respectivamente, sendo M hipersuperfície de N; ou seja, existe $h : M \to N$ imersão isométrica. Estamos identificando M com $h(M)$, de modo que $M \subset N$. Sejam $D(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis de M e $\mathfrak{X}$ conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ de N.

Temos que, para cada $p \in M$,

$$T_pN = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é complemento ortogonal de T_pM em T_pN.

Denotaremos por η um campo normal unitário em M na vizinhança de p ($\{\eta(p)\}$ é a base de $(T_pM)^\perp$, pois $\dim(T_pM)^\perp = 1$) e por ∇ a conexão riemanniana em N.

Dados X e Y campos em M e $p \in M$, definimos a aplicação $S(X, Y) := (\nabla_X Y)^\perp$, projeção de $\nabla_X Y$ em $(T_pM)^\perp$.

Seja B a aplicação que satisfaz

$$\langle B(X), Y\rangle = \langle S(X,Y), \eta\rangle, \text{onde } X, Y \in T_pM.$$

Notemos que se $\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^{\perp} + (\nabla_X Y)^T$, então

$$\begin{aligned}\langle B(X), Y\rangle &= \langle S(X,Y), \eta\rangle = \langle (\nabla_X Y)^{\perp}, \eta\rangle = \langle (\nabla_X Y), \eta\rangle = \\ &= -\langle Y, \nabla_X \eta\rangle = \langle (-\nabla_X \eta), Y\rangle\end{aligned}$$

pois $\langle (\nabla_X Y), \eta\rangle + \langle Y, \nabla_X \eta\rangle = X\langle Y, \eta\rangle = 0$. Como Y é qualquer, temos que $B(X) = -\nabla_X \eta$ para todo campo X em M.

Assim chamamos a transformação linear simétrica $B : T_pM \to T_pM$ dada por $B(v) := B_p(v) = -\nabla_v \eta$, de *segunda forma fundamental* de M em N no ponto p.

Definição 1.1. Chamamos de *curvaturas principais de M* no ponto p aos autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$ da transformação B e definimos a *função curvatura média de M* como sendo a função $H : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(p) := \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_n}{n} = \frac{1}{n}\, trB,$$

onde trB é o traço de B.

Dizemos que M é *umbílica* se $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$.

Definição 1.2. Seja $c : I \to N$ uma curva diferenciável em N e W_0 um vetor tangente a N em $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Dizemos que $W(t)$ é o **transporte paralelo** de $W(t_0)$ ao longo de c se $W(t_0) = W_0$ e $\dfrac{DW}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Definição 1.3. Seja $p \in M$. Um *referencial geodésico de M em p* é uma família $E_1, ..., E_n$ de campos de vetores de M ortonormais em cada ponto de uma vizinhança $U \subset M$ de p, tais que, em p, $(\nabla_{E_i} E_j)^T = 0, \forall i, j$, onde $(\nabla_{E_i} E_j)^T$ é a componente tangente a M de $(\nabla_{E_i} E_j)$.

A existência do referencial geodésico numa vizinhança normal U é garantida tomando $E(q)$, $\forall q \in U$, como o transporte paralelo de $E(p)$ ao longo da geodésica que liga p à q.

Observação 1.4. Se $E_1, ..., E_n$ é um referencial geodésico em U vizinhança de p em M. É possível estender o referencial à uma vizinhança de p em N considerando o transporte paralelo na direção do campo η normal à M fazendo com que ele satisfaça que $\nabla_\eta E_i = 0$.

Definição 1.5. Dados $f \in D(M)$ e $\{E_i\}_{1,\dots,n}$ um referencial geodésico de M em $p \in M$. Chamamos de:

1. *Gradiente de f* o campo vetorial em M definido por

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i.$$

2. *Divergente de X* a função $\text{div}X : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div}X(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)(p),$$

   onde $X = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i$.

3. *Laplaciano de M* a aplicação $\Delta : D(M) \to D(M)$ definida por

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f))(p).$$

Como conseqüência direta das definições anteriores temos que

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f).$$

Quando $f : M \to \mathbb{R}$ satisfaz $\Delta f \geq 0$, dizemos que f é *subharmônica*.

Proposição 1.6. *Nas notações acima, temos que:*

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Demonstração:
Seja $p \in M$. Seja $\{E_i\}_{1,\dots,n}$ um referencial geodésico de M definido em uma vizinhança de p.
Por definição, $\Delta(fg) = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(fg))$. Temos que:

$$\begin{aligned} E_i(E_i(fg)) &= E_i(E_i(f)g + fE_i(g)) = E_i(E_i(f)g) + E_i(fE_i(g)) \\ &= E_i(E_i(f))g + E_i(f)E_i(g) + E_i(f)E_i(g) + fE_i(E_i(g)). \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta(fg) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(fg)) = \sum_{i=1}^{n}[E_i(E_i(f))g + fE_i(E_i(g)) + 2E_i(f)E_i(g)] \\
&= g\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f)) + f\sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(g)) + 2\sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(g) \\
&= g\Delta f + f\Delta g + 2\langle\sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i, \sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i\rangle \\
&= g\Delta f + f\Delta g + 2\langle\nabla f, \nabla g\rangle.
\end{aligned}
$$

■

Definição 1.7. Dizemos que V é um *campo de Killing em* N se V satisfaz

$$\langle\nabla_X V, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y V\rangle = 0,$$

chamada equação de Killing, para todo X, Y campos de vetores em N.

Um difeomorfismo $g : N \to N$ em N é uma *isometria* se ele preserva a métrica riemanniana, ou seja, para $p \in N, v, w \in T_pN$,

$$\langle v, w\rangle_p = \langle dg_p(u), dg_p(v)\rangle_{g(p)}.$$

Para podermos relacionar os campos de Killing com o grupo das isometrias da variedade precisaremos do seguinte teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais:

Teorema 1.8. *Se X é um campo C^∞ numa variedade N e $p \in N$ então existem um aberto $U \subset N$, $p \in U$, um número $\varepsilon \geq 0$, e uma aplicação C^∞ $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to N$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t, q), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q, para cada q, isto é, $\varphi(0, q) = q$ e $\dfrac{d}{dt}\varphi(t, q) = X(\varphi(t)), \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Demonstração: Ver [1], pág. 63.

Dados X campo de N e $p \in N$. Pelo teorema anterior existe φ : $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to N$ tal que a curva $t \mapsto \varphi(t, q), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. Fixando t, com $|t| < \varepsilon$, φ_t define um difeomorfismo de U em $\varphi_t(U)$ e $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ vale onde ambos os lados estão definidos.

Definição 1.9. Pela construção acima dizemos que um campo X gera um grupo φ_t chamado de *subgrupo(local) a um parâmetro de difeomorfismos locais.*

O conjunto das isometrias da variedade riemanniana N forma um subgrupo do grupo dos difeomorfismos de N. Assim se um campo gera uma família a um parâmetro constituída de isometrias dizemos ele gera um *subgrupo a um parâmetro de isometrias.*

Proposição 1.10. *Seja X campo de vetores de N. Então X é um campo de Killing se e somente se X gera um subgrupo(local) a um parâmetro de isometrias locais de N.*

Demonstração: Ver [3], pág. 48.

Definição 1.11.

1. Chamamos de *curvatura* de N à aplicação trilinear $R : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ dada por
$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$
2. Chamamos de *tensor curvatura* à aplicação multilinear $R : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to D(N)$ definida por
$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

A partir da definição de curvatura R dada acima podemos apresentar a noção de curvatura seccional que generaliza a noção de curvatura de Gauss das superfícies. Para isto indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão $\sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$.

Dado um ponto $p \in N$ e um espaço bidimensional $\sigma \subset T_pN$, chamamos de *curvatura seccional* de σ em p ao número

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|},$$

onde x, y é uma base de σ.

Neste trabalho utilizaremos bases ortonormais e denotaremos

$$K(X,Y) = \langle R(X,Y)X, Y\rangle,$$

onde X e Y são campos tais que $X(p) = x$ e $Y(p) = y$.

Se K é constante para todo σ, dizemos que N é uma *variedade riemanniana de curvatura constante.*

Se M tem dimensão 2, a curvatura seccional de M é chamada de *curvatura de Gauss.*

Definição 1.12. Seja $\{W_1, ..., W_{n+1}\}$ uma base ortonormal do espaço tangente de N. Chamamos de *tensor de Ricci* de N à forma bilinear:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \sum_{i=1}^{n+1} \langle R(X,W_i)Y, W_i\rangle,$$

onde X, Y, Z são campos tangentes de N e R é o tensor curvatura de N. A *curvatura de Ricci* de N na direção de Z definimos por

$$\mathrm{Ric}(Z) = \mathrm{Ric}(Z,Z).$$

Proposição 1.13. *Sejam $X, Y, W, Z \in \mathfrak{X}$. Então*
(a)$\langle R(X,Y)W, Z\rangle = -\langle R(Y,X)W, Z\rangle$
(b)$\langle R(X,Y)W, Z\rangle = -\langle R(X,Y)Z, W\rangle$.

Demonstração: Ver [1], pág 91.

Definição 1.14. Denotamos por $<,>$ a métrica riemanniana de M. Dizemos que uma métrica riemanniana $\ll,\gg$ em M é conforme a $<,>$ se existe $\alpha : M \to \mathbb{R}^+$ diferenciável e positiva tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$ temos

$$< u, v >_p = \alpha(p) \ll u, v \gg_p .$$

1.2 Alguns Resultados Importantes

Aqui apresentaremos alguns resultados bem conhecidos, que serão utilizados mais adiante, a saber, O Princípio do Máximo, Teorema de Gauss, o Teorema de E. Hopf e o Teorema da Uniformização.

Teorema 1.15. (Princípio do Máximo) *Seja M variedade riemanniana conexa. Seja f função em M subharmônica. Se f assume um máximo, então f é constante.*

Demonstração:

Seja p_0 ponto de máximo de f. Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização local de M, onde $\varphi(U)$ é uma vizinhança de p_0. Seja $g := f \circ \varphi$. Como $\Delta f \geq 0$, então existe um operador linear uniformemente elíptico $L : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ tal que $L(g) \geq 0$, onde L é da forma

$$L(u) = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Além disso, fazendo $x_0 = \varphi^{-1}(p_0)$ temos que g assume um máximo local em x_0, pois

$$g(x) = f(\varphi(x)) \leq f(p_0) = f(\varphi(x_0)) = g(x_0).$$

Assim $L(g) \geq 0$ e g atinge um máximo em x_0, então, pelo Teorema 3.5 de [2], g é constante em U. Portanto f é constante em $\varphi(U)$.

Estendendo para toda a variedade, como M é conexa então f é constante.

■

Observação 1.16. O Teorema acima vale de forma análoga no caso de $\Delta f \leq 0$ e f assumindo o mínimo.

Teorema 1.17. *Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitada e subharmônica. Então u é constante.*

Demonstração:

Suponhamos que u não é constante. Logo, existe $R > 0$ tal que u não é constante em $B_R(0)$.

Como u é subharmônica e não é constante em $B_R(0)$, então pelo Princípio do Máximo ([2], pág. 31), o máximo de u é atingido na fronteira de $B_R(0)$.

Seja $x_0 \in \partial B_R(0)$ tal que $u(x_0) = \sup\limits_{B_R(0)} u$; assim, $u(0) < u(x_0)$.

Tomamos r tal que $0 < r < R$. Assim $u(x) < u(x_0)$, $\forall x \in B_r(0)$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $w(x) = a \ln(x_1^2 + x_2^2) + b$ satisfaz:

$$\begin{aligned} w(x) &> u(x), \forall x \in \partial B_r(0) \\ w(x) &< u(x_0), \forall x \in \partial B_R(0). \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to\infty} w(x) = \infty$ e u é limitado então $\exists R_1 > R > 0$ tal que $w(x_1, x_2) > u(x_1, x_2)$ para $x_1^2 + x_2^2 > (R_1)^2$.

Consideramos $v = u - w$. Como u é subharmônica e w é harmônica então $\Delta u \geq 0$ e $\Delta w = 0$. Conseqüentemente $\Delta v = \Delta u - \Delta w \geq 0$, ou seja, v é subharmônica.

Além disso, pela definição de v, temos que v é limitada no anel A_{r,R_1} de raios r e R_1 e centro 0, $v(x) < 0$ para $x \in \partial B_r$ e $v(x) < 0$ para $x \in \partial B_{R_1}$.

Portanto, pelo Princípio do Máximo ([2], pág. 31), $\sup\limits_{A_{r,R_1}} v = \sup\limits_{\partial B_r \cup \partial B_{R_1}} v < 0$, o que é absurdo, pois $v(x_0) = u(x_0) - w(x_0) > 0$ e $x_0 \in A_{r,R_1}$.

■

Teorema 1.18. (Teorema de E. Hopf) *Seja M variedade Riemanniana orientável, compacta e conexa. Seja f uma função diferenciável em M com $\Delta f \leq 0$. Então f é constante.*

Demonstração: Como M é compacta, então f atinge o mínimo. Então, pelo Princípio do Máximo (1.15), f é constante. ■

O Teorema de Hopf vale de forma análoga no caso que $\Delta \geq 0$.

Teorema 1.19. (Teorema da Uniformização) *Seja M superfície completa e simplesmente conexa. Então existe um difeomorfismo conforme entre M e uma das seguintes superfícies:*

(a) $\mathbb{S}^2$,

(b) $\mathbb{R}^2$,

(c) o plano hiperbólico.

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.20. **(Teorema de Gauss)** *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K_M(x, y) - K_N(x, y) = \langle S(x, x), S(y, y)\rangle - |S(x, y)|^2,$$

onde K_N é a curvatura seccional de N e K_M é a curvatura de seccional de M.

Demonstração: Ver [1], pág. 130.

Teorema 1.21. *Sejam M disco unitário e K a curvatura de Gauss de uma métrica completa conforme no disco. Se $a \geq 1$ e P é uma função não negativa, então não existe solução positiva g de $\Delta g - aKg + Pg = 0$, em M.*

Demonstração: Corolário 3 de [7].

Capítulo 2

Hipersuperfícies de curvatura média constante e campos de Killing

Neste capítulo, mais precisamente no Teorema 2.4, estabeleceremos uma fórmula para o laplaciano da função $f(p) := \langle \eta(p), V \rangle$, $p \in M$, a saber

$$\Delta f = -n\langle V, \nabla H \rangle - (Ric(\eta) + \|B\|^2)f,$$

onde η é um campo normal unitário de M em N e V é um campo de Killing em N.

Depois demonstramos o Corolário 2.5 e o Corolário 2.7.

Aqui estamos usando a todo momento as notações e definições dadas no Capítulo 1.

2.1 Lemas

Esta seção tem como objetivo desenvolver alguns resultados necessários a demonstração do Teorema 2.4.

Sejam N uma variedade riemanniana de dimensão $n+1$, M hipersuperfície orientável de N e η um campo normal unitário de M em N. Dados $p \in M$, $\{E_1(p), ..., E_n(p)\}$ base ortonormal que diagonaliza B e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalores associados a $E_1(p), ..., E_n(p)$, respectivamente. Seja $E_1, ..., E_n$ um referencial geodésico em M obtido extendendo $E_1(p), ..., E_n(p)$ numa vizinhança normal

U em M do ponto p.

Com estas hipóteses obtemos os seguintes resultados.

Lema 2.1.

$$\nabla_{E_i} E_i = \lambda_i \eta, \; em \, p.$$

Demonstração:

Pela definição de referencial geodésico, temos que $(\nabla_{E_i} E_i)^T(p) = 0$. Então $\nabla_{E_i} E_i(p) = \alpha\eta(p)$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente, em p, $\langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle = \langle \alpha\eta, \eta \rangle = \alpha$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \langle \eta, E_i \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i} E_i \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \eta, \nabla_{E_i} E_i \rangle = -\langle \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Assim, em p,

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle(p) = -\langle \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle \\ &= -(-\lambda_i \langle E_i, E_i \rangle) = \lambda_i, \end{aligned}$$

pois λ_i é autovalor referente a E_i. Logo $\nabla_{E_i} E_i = \lambda_i \eta$.

$\blacksquare$

Lema 2.2. *Sejam $W \in \mathfrak{X}$ e $g : M \to \mathbb{R}$. Então, $\forall q \in U$, vale*

$$\langle W, \nabla g \rangle = (\sum_{j=1}^{n} \langle W, E_j \rangle E_j) g.$$

Demonstração: Como $\{E_1, ..., E_n, \eta\}$ é uma base de T_qN, para todo $q \in U$, e W é um campo em N ao longo de M, escrevemos $W = \sum_{j=1}^{n} v_j E_j + f\eta$, onde $f : U \to \mathbb{R}$ é definida por $f(q) = \langle \eta(q), W \rangle$ e $v_j(q) = \langle W, E_j(q) \rangle$ para todo j.

Então,

$$\begin{aligned} \langle W, \nabla g \rangle = \langle W, \sum_{i=1}^{n} E_i(g) E_i \rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} v_j E_j, \sum_{i=1}^{n} E_i(g) E_i \rangle \\ &+ \langle f\eta, \sum_{i=1}^{n} E_i(g) E_i \rangle. \end{aligned}$$

E, como $\langle f\eta, \sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i\rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle W, \nabla g\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} v_j E_j, \sum_{i=1}^{n} E_i(g)E_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} E_i(g)\langle E_j, E_i\rangle \\ &= (\sum_{j=1}^{n} v_j E_j)g = (\sum_{j=1}^{n}\langle W, E_j\rangle E_j)g.\end{aligned}$$

■

Lema 2.3. *Seja H a função curvatura média de M com respeito a η. Então:*

$$nH = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle.$$

Demonstração:

Temos que

$$nH = -\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\eta, E_i\rangle.$$

E por outro lado, derivando $\langle \eta, E_i\rangle$ em relação a E_i, temos

$$-\langle \nabla_{E_i}\eta, E_i\rangle = -E_i\langle \eta, E_i\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}E_i\rangle.$$

Como $\langle \eta, E_i\rangle = 0$, então

$$-\langle \nabla_{E_i}\eta, E_i\rangle = \langle \eta, \nabla_{E_i}E_i\rangle.$$

Portanto

$$nH = \sum_{i=1}^{n}\langle \eta, \nabla_{E_i}E_i\rangle.$$

■

2.2 Teorema 2.4

A fórmula 2.2, demostrada neste capítulo, parece já ser conhecida, pelo menos em alguns casos particulares. Contudo, neste caso mais geral não foi encontrada explicitamente na literatura. Em [9], por exemplo, a fórmula é apresentada para o caso em que a curvatura média é constante e N tem curvatura seccional constante, usando argumentos que não podem ser aplicados ao caso geral. A prova apresentada aqui é longa, mas consiste essencialmente de manipulações dos conceitos.

Seja N uma variedade riemanniana de dimensão $n+1$. Seja V campo de Killing de N. Seja M hipersuperfície orientável de N e η campo normal unitário de M em N.

Daqui para frente H denotará a função curvatura média de M com respeito a η, $\mathrm{Ric}(\eta)$ a curvatura de Ricci de N na direção de η, B a segunda forma fundamental de em N e Δ o laplaciano de M na métrica induzida por N.

Teorema 2.4. *Se*

$$f(p) := \langle \eta(p), V \rangle, p \in M, \tag{2.1}$$

então

$$\Delta f = -n\langle V, \nabla H \rangle - (\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f. \tag{2.2}$$

Em particular, se M tem curvatura média constante, então

$$\Delta f = -(\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f. \tag{2.3}$$

Demonstração:

Sejam $p \in M$ e $\{E_1(p), ..., E_n(p)\}$ base ortonormal que diagonaliza B em p. Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalores associados a $E_1(p), ..., E_n(p)$, respectivamente. Denotamos por $E_1, ..., E_n$ um referencial geodésico em M obtido extendendo $E_1(p), ..., E_n(p)$ em uma vizinhança do ponto p em M.

Então, em p,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i E_i(f). \tag{2.4}$$

Temos

$$E_i(f) = E_i\langle \eta, V \rangle = \langle \nabla_{E_i}\eta, V \rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i} V \rangle$$

e

$$E_iE_i(f) = \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, V\rangle + 2\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V\rangle.$$

Mas, em p, temos

$$\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}V\rangle = -\langle \lambda_i E_i, \nabla_{E_i}V\rangle = -\lambda_i\langle E_i, \nabla_{E_i}V\rangle = 0,$$

onde a última iqualdade decorre da equação de Killing: $2\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i}V\rangle = 0$.

Portanto, em p,

$$E_iE_i(f) = \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, V\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V\rangle. \tag{2.5}$$

Da equação de Killing,

$$\langle \nabla_{E_i}V, \eta\rangle = -\langle \nabla_\eta V, E_i\rangle.$$

Derivando em relação a E_i;

$$E_i\langle \nabla_{E_i}V, \eta\rangle = -E_i\langle \nabla_\eta V, E_i\rangle;$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V, \eta\rangle + \langle \nabla_{E_i}V, \nabla_{E_i}\eta\rangle = -\langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle - \langle \nabla_\eta V, \nabla_{E_i}E_i\rangle. \tag{2.6}$$

Em p, temos que $\langle \nabla_{E_i}V, \nabla_{E_i}\eta\rangle = -\lambda_i\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle$, pois E_i é autovetor de B. Aplicando o Lema 2.1 ao último termo da igualdade (2.6) obtemos:

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V, \eta\rangle - \lambda_i\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle = -\langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle - \lambda_i\langle \nabla_\eta V, \eta\rangle.$$

Como V é de Killing então $\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle = 0$ e $\langle \nabla_\eta V, \eta\rangle = 0$.

Assim

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}V, \eta\rangle = -\langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle. \tag{2.7}$$

Por outro lado, pela definição de tensor curvatura, temos:

$$\langle R(\eta, E_i)V, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}\nabla_\eta V, E_i\rangle - \langle \nabla_\eta\nabla_{E_i}V, E_i\rangle + \langle \nabla_{[\eta,E_i]}V, E_i\rangle. \tag{2.8}$$

Estendemos $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$ a uma vizinhaça de p em N, requerendo que $\nabla_\eta E_i = 0$.

Então, em p, $[\eta, E_i] = \nabla_\eta E_i - \nabla_{E_i}\eta = 0 - (-\lambda_i E_i) = \lambda_i E_i$. Assim

$$\langle \nabla_{[\eta,E_i]}V, E_i\rangle = \lambda_i\langle \nabla_{E_i}V, E_i\rangle. \tag{2.9}$$

Agora, derivando $\langle \nabla_{E_i} V, E_i \rangle = 0$ com relação a η obtemos

$$\langle \nabla_\eta \nabla_{E_i} V, E_i \rangle + \langle \nabla_{E_i} V, \nabla_\eta E_i \rangle = 0.$$

Como $\nabla_\eta E_i = 0$, temos

$$\langle \nabla_\eta \nabla_{E_i} V, E_i \rangle = 0. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8), obtemos:

$$\langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle = \langle \nabla_{E_i} \nabla_\eta V, E_i \rangle. \tag{2.11}$$

Usando (2.7) em (2.11), obtemos $\langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle = -\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} V, \eta \rangle$ e substituindo em (2.5), temos que:

$$E_i E_i(f) = -\langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle + \langle V, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta \rangle.$$

Então

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \langle R(\eta, E_i)V, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle V, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta \rangle = \tag{2.12}$$

$$= -\mathrm{Ric}(\eta, V) + \sum_{i=1}^{n} \langle V, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta \rangle. \tag{2.13}$$

Para estimar o segundo termo da equação (2.12), fazemos $v_j = \langle V, E_j \rangle$ e escrevemos

$$V = \sum_{j=1}^{n} v_j E_j + f\eta.$$

Então,

$$\langle V, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \langle E_j, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta \rangle + f \langle \eta, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta \rangle. \tag{2.14}$$

Derivando a equação $\langle \nabla_{E_i} \eta, \eta \rangle = 0$ em relação a E_i, obtemos

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta, \eta \rangle + \langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} \eta \rangle = 0.$$

Em p, temos que

$$\langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} \eta \rangle = \lambda_i^2.$$

Logo,
$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, \eta\rangle = -\lambda_i^2. \tag{2.15}$$

Derivando $\langle \eta, E_j\rangle = 0$, em relação a E_i, duas vezes:

$$E_i(\langle \nabla_{E_i}\eta, E_j\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}E_j\rangle) = 0,$$

e portanto,

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, E_j\rangle + 2\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}E_j\rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_j\rangle = 0.$$

Então , em p,
$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, E_j\rangle = -\langle \eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_j\rangle, \tag{2.16}$$
pois $(\nabla_{E_i}E_j)^T = 0$ em p e $(\nabla_{E_i}\eta)(p)$ é tangente a M.

Como $\langle [E_i, E_j], \eta\rangle = 0$, $\langle \nabla_{E_i}E_j, \eta\rangle = \langle \nabla_{E_j}E_i, \eta\rangle$.

Assim, derivando a última expressão em relação a E_i, obtemos

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_j, \eta\rangle + \langle \nabla_{E_i}E_j, \nabla_{E_i}\eta\rangle = \langle \nabla_{E_j}E_i, \nabla_{E_i}\eta\rangle + \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_i, \eta\rangle,$$

e daí,em p
$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_j, \eta\rangle = \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_i, \eta\rangle. \tag{2.17}$$

Considerando o tensor curvatura R de N, sabemos que:

$$\langle R(E_i, E_j)E_i, \eta\rangle = \langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle - \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_i, \eta\rangle + \langle \nabla_{[E_i,E_j]}E_i, \eta\rangle. \tag{2.18}$$

Note que, em p,

$$[E_i, E_j] = (\nabla_{E_i}E_j - \nabla_{E_j}E_i)^T = 0$$

e

$$E_j\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle = \langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle + \langle \nabla_{E_i}E_i, \nabla_{E_j}\eta\rangle = \langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle. \tag{2.19}$$

Assim, usando (2.16), depois (2.17) e na última igualdade (2.18) e (2.19), temos (em p) que:

$$\langle E_j, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta\rangle = -\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_j, \eta\rangle = -\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_i, \eta\rangle =$$

$$= \langle R(E_i, E_j)E_i, \eta\rangle - E_j\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle. \tag{2.20}$$

Substituindo (2.20) e (2.15) em (2.14), obtemos usando a linearidade de termos da curvatura:

$$\langle V, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta\rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j(\langle R(E_i, E_j)E_i, \eta\rangle - E_j\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle) - f\lambda_i^2 =$$

$$= \langle R(E_i, \sum_{j=1}^{n} v_jE_j)E_i, \eta\rangle - (\sum_{j=1}^{n} v_jE_j)\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle - f\lambda_i^2 =$$

$$= \langle R(E_i, V - f\eta)E_i, \eta\rangle - (\sum_{j=1}^{n} v_jE_j)\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle - f\lambda_i^2 =$$

$$= \langle R(E_i, V)E_i, \eta\rangle - f\langle R(E_i, \eta)E_i, \eta\rangle - (\sum_{j=1}^{n} v_jE_j)\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle - f\lambda_i^2.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{n}\langle V, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle R(E_i, V)E_i, \eta\rangle - f\sum_{i=1}^{n}\langle R(E_i, \eta)E_i, \eta\rangle$$
$$- (\sum_{j=1}^{n} v_jE_j)(\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle) - f\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

Usando a definição de tensor de Ricci e aplicando o Lema 2.3, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle V, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta\rangle = \mathrm{Ric}(\eta, V) - f\mathrm{Ric}(\eta) - (\sum_{j=1}^{n} v_jE_j)(nH) - f\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

Usando a definição de B e aplicando o Lema 2.2,

$$\sum_{i=1}^{n}\langle V, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta\rangle = \mathrm{Ric}(\eta, V) - f\mathrm{Ric}(\eta) - n\langle V, \nabla H\rangle - f\|B\|^2.$$

E por (2.12)

$$\Delta f = -\mathrm{Ric}(\eta, V) + \mathrm{Ric}(\eta, V) - f\mathrm{Ric}(\eta) - n\langle V, \nabla H\rangle - f\|B\|^2.$$

Portanto

$$\Delta f = -f\mathrm{Ric}(\eta) - n\langle V, \nabla H\rangle - f\|B\|^2.$$

■

2.3 Conseqüências do Teorema 2.4

Nesta seção, como conseqüência do Teorema 2.4, mostraremos que se f (definida por 2.1) não muda de sinal em M hipersuperfície compacta, conexa e de curvatura média constante imersa em N, e se $\mathrm{Ric}(W) \geq -nH^2$, para qualquer W vetor unitário tangente de N, então M é invariante pelo subgrupo a um parâmetro de isometrias determinado por V ou é umbílica (Corolário 2.5). No Corolário 2.7 obtemos uma extensão do Teorema de Hoffman-Osserman-Schoen, onde M é simplesmente conexa e N tem dimensão 3.

Corolário 2.5. *Seja N variedade riemanniana de dimensão $n+1$. Seja M hipersuperfície conexa e compacta de curvatura média constante H imersa em N e assuma que*

$$\mathrm{Ric}(W) \geq -nH^2$$

para qualquer vetor tangente unitário W de N. Seja V um campo de Killing em N. Se a função,

$$f = \langle \eta, V \rangle$$

não muda de sinal em M, então M é invariante pelo subgrupo a um parâmetro de isometrias de N determinado por V ou M é umbílica e N tem curvatura de Ricci não-positiva constante

$$\mathrm{Ric}(\eta) = -nH^2$$

na direção de η.

Lema 2.6.

$$\|B\|^2 \geq nH^2$$

e $\|B\|^2 = nH^2$ se e somente se M é umbílica.

Demonstração: Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ as curvaturas principais de M no ponto p. Assim

$$\|B\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

e

$$H^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^2}{n^2}.$$

Então

$$\|B\|^2 - n^2H^2 = -2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j;\ i,j = 1,...,n.$$

Pelo método de indução, obtemos

$$\sum_{i<j}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) = (n-1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

Assim

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 &= \sum_{i<j}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) - 2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j = \\ &= (n-1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - 2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 &= (n-1)\|B\|^2 + \|B\|^2 - n^2H^2 = \\ &= n\|B\|^2 - n^2H^2.\end{aligned}$$

E como $\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq 0$, então $n\|B\|^2 - n^2H^2 \geq 0$.
Logo $\|B\|^2 \geq nH^2$ e $\|B\|^2 = nH^2$ se e somente se $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

■

Demonstração do Corolário 2.5:

Suponhamos que $f \geq 0$. Como a curvatura média é constante, temos que $\langle V, \nabla H\rangle = 0$.

Por hipótese $\mathrm{Ric}(\eta) + nH^2 \geq 0$ e pelo Lema 2.6 concluímos que:

$$\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2 \geq \mathrm{Ric}(\eta) + nH^2 \geq 0. \tag{2.21}$$

Assim, pelo Teorema 2.4:

$$\Delta f = -(\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f,$$

e, por (2.21), $\Delta f \geq 0$. Como M é compacta e conexa, pelo Teorema de Hopf (Teorema 1.18), f é constante e $\Delta f = 0$.

Então

$$-(\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2 = 0.$$

- Se $f \equiv 0$,

  pela definição de f, $\langle \eta, V \rangle \equiv 0$. Portanto V é um campo de vetores em M, ou seja M é invariante pelo subgrupo a $1-$parâmetro de isometrias determinado por V.

- Se $\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2 = 0$,

  então, de (2.21), temos que

$$\|B\|^2 = nH^2 = -\mathrm{Ric}(\eta). \tag{2.22}$$

  Mas se $\|B\|^2 = nH^2$, então, por (2.6), $\lambda_i = \lambda_j, \forall i, j$, ou seja M é umbílica, e, por (2.22), $\mathrm{Ric}(\eta) = -nH^2$.

■

Corolário 2.7. *Seja N uma variedade riemanniana de dimensão 3. Seja M uma superfície completa, simplesmente conexa de curvatura média constante H imersa em N tal que*

$$Ric(W) \geq -2H^2,$$

para qualquer vetor tangente unitário W em N. Seja V campo de Killing em N e assuma que a função

$$f = \langle \eta, V \rangle$$

não muda de sinal em M.

a) Se M é conforme a esfera ou M é conforme ao plano e $\|V\|$ é limitada em M, então M é invariante pelo subgrupo a um parâmetro de isometrias de N determinado por V, ou M é umbílica e N tem curvatura de Ricci não-positiva

$$Ric(\eta) = -2H^2$$

na direção η nos pontos de M.

b) Se M é conforme ao disco, então M é invariante pelo subgrupo a um parâmetro de isometrias de N determinado por V.

Lema 2.8. *Sejam, N uma variedade riemanniana de dimensão 3 e M superfície orientável de N, sendo η um campo normal unitário de M em N. Então*

$$\|B\|^2 = 4H^2 - 2(K_M - K_N),$$

onde K_M é a curvatura de Gauss de M e K_N curvatura seccional de N.

Demonstração:

Sejam $p \in M$, $\{E_1(p), E_2(p)\}$ base ortonormal que diagonaliza B e λ_1, λ_2 autovalores associados a $E_1(p), E_2(p)$, respectivamente.

Pelo Teorema de Gauss (Teorema 1.20),

$$K_M(x,y) - K_N(x,y) = \langle S(x,x), S(y,y)\rangle - |S(x,y)|^2$$

onde $x, y \in T_pM$ são ortogonais.

Por definição, $S(E_i, E_i) = \alpha\eta$, para algum α.

Então,

$$\alpha = \langle S(E_i, E_i), \eta\rangle = \langle E_i, B(E_i)\rangle = \langle E_i, \lambda_i E_i\rangle = \lambda_i.$$

Assim,

$$S(E_i, E_i) = \lambda_i \eta \quad \text{e} \quad \langle S(E_i, E_i), S(E_j, E_j)\rangle = \lambda_i \lambda_j.$$

Da mesma forma, $S(E_i, E_j) = \beta\eta$, para algum β e

$$\beta = \langle S(E_i, E_j), \eta\rangle = \langle E_i, B(E_j)\rangle = \langle E_i, \lambda_j E_j\rangle = 0.$$

Então $|S(E_i, E_j)|^2 = 0$.

Logo $K_M(E_1, E_2) - K_N(E_1, E_2) = \lambda_1\lambda_2$. Por outro lado,

$$\|B\|^2 - 2^2 H^2 = -2\lambda_1\lambda_2$$

.

Portanto $\|B\|^2 = 4H^2 - 2(K_M - K_N)$.

∎

Demonstração do Corolário 2.7:

Esta demonstração é essencialmente a mesma do Teorema 1 de [6].

Pelo Teorema da Uniformização (Teorema (1.19)), como M é completa e simplesmente conexa então M é conforme à esfera, ou é conforme ao plano ou ao disco.

•Caso 1: M é conforme à esfera.

Este é o caso em que M é compacta e estamos na situação do Corolário 2.5. Então o presente resultado decorre diretamente deste último.

•Caso 2: M é conforme a $\mathbb{R}^2$ e $\|V\|$ é limitada em M.

Suponhamos que $f \leq 0$.

Como H é constante, pelo Teorema 2.4, $\Delta f = -(\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f$. Pelo Lema 2.6 e pela hipótese

$$\Delta f = -(\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f \geq -(\text{Ric}(\eta) + 2H^2)f \geq 0.$$

Ou seja, f é subharmônica.

Como $\|V\|$ é limitada em M, pela definição, f é limitada em $\mathbb{R}^2$.

Assim, pelo Teorema 1.17, f é constante.

Então $\Delta f = 0$ e da Proposição 2.4 segue que:

$$(\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f = 0.$$

Concluímos como na demonstração do Corolário 2.5.

•Caso 3: M é conforme ao disco.

Suponhamos que $f \leq 0$.

Então, usando o Teorema 2.4, o Lema 2.6 e a hipótese relacionada à curvatura de Ricci, temos que

$$\Delta f = -(\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f \geq -(\text{Ric}(\eta) + 2H^2)f \geq 0.$$

Ou seja, f é subharmônica.

Assim, pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.15), se $f = 0$ em algum ponto de M então $f \equiv 0$. Logo $\langle \eta, V \rangle = 0, \forall p$. Portanto M é invariante pelo subgrupo a um parâmetro determinado por V.

Afirmação: $f = 0$ em algum ponto de M.

Suponhamos, por absurdo, que $f < 0$ em todo ponto.

Nós temos, pelo Lema 2.8, que

$$\|B\|^2 = 4H^2 - 2(K_M - K_N),$$

e, pelo Teorema 2.4 que

$$\Delta f = -(\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2)f.$$

Assim,

$$\Delta f + (\text{Ric}(\eta) + 4H^2 - 2K_M + 2K_N)f = 0$$

e então,

$$\Delta f - 2K_M f + (\text{Ric}(\eta) + 4H^2 + 2K_N)f = 0.$$

Considerando uma base ortonormal E_1, E_2 do espaço tangente a M, por definição, temos que

$$\mathrm{Ric}(\eta) + 2K_N = \langle R(\eta, E_1)\eta, E_1\rangle + \langle R(\eta, E_2)\eta, E_2\rangle + 2\langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle,$$

e, pela Proposição 1.13:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\eta) + 2K_N &= \langle R(E_1, \eta)E_1, \eta\rangle + \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle \\ &+ \langle R(E_2, \eta)E_2, \eta\rangle + \langle R(E_2, E_1)E_2, E_1\rangle \\ &= \mathrm{Ric}(E_1) + \mathrm{Ric}(E_2).\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathrm{Ric}(\eta) + 2K_N = \mathrm{Ric}(E_1) + \mathrm{Ric}(E_2) \geq -2H^2 - 2H^2,$$

onde a desigualdade ocorre por hipótese.

Assim,

$$\mathrm{Ric}(\eta) + 2K_N + 4H^2 \geq 0.$$

Com isso concluímos que existe uma solução negativa para

$$\Delta f - 2K_M f + (\mathrm{Ric}(\eta) + 4H^2 + 2K_N)f = 0,$$

onde $\mathrm{Ric}(\eta) + 2K_N + 4H^2 \geq 0$, o que contradiz o Teorema 1.21. De fato basta tomar $g = f, a = 2$ e $P = \mathrm{Ric}(\eta) + 4H^2 + 2K_N$.

Isto completa a prova da afirmação.

■

Observação 2.9. Os Corolários 2.5 e 2.7 mostram que é interessante termos uma classificação e descrição dos possíveis campos de Killing de N. Usando a teoria das álgebras de Lie semisimples, é dada em [5] uma descrição completa de todos esses campos no caso em que N é $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.

Capítulo 3

Translação de Killing

Seja N uma variedade riemanniana $(n+1)$-dimensional. Denotamos por TN o fibrado tangente de N dado por $TN = \{(p,v); p \in N, v \in T_pN\}$ munido de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2(n+1)$).

Definição 3.1. Dizemos que N é uma **variedade riemanniana killing paralelizável** se existirem $(n+1)$ campos de Killing $V_1, ..., V_{n+1}$ que sejam linearmente independentes em cada ponto de N.

O conjunto dos campos $\mathcal{B} = \{V_1, ..., V_{n+1}\}$ é chamado de **base de Killing** de TN.

Associado a uma base de Killing $\mathcal{B}$, definimos uma **translação de Killing** em TN, como a aplicação

$$\Gamma : TN \to \mathbb{R}^{n+1}, \text{dada por}$$

$$\Gamma_p(v) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle v, V_i(p) \rangle e_i,$$

onde $p \in N$,$v \in T_pN$ e $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Observação 3.2. $\Gamma_p : T_pN \to \mathbb{R}^{n+1}$ é um isomorfismo linear, para qualquer $p \in N$ dado, pois a aplicação é linear (diretamente da definição). Ainda temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \langle v, V_i(p) \rangle e_i = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad \langle v, V_i(p) \rangle = 0, \forall i,$$

e, como $\{V_1, ..., V_{n+1}\}$ são L.I., temos que $\langle v, V_i(p) \rangle = 0, \forall i$ se e somente se $v = 0$. Logo Γ_p é um isomorfismo linear.

Seja M uma hipersuperfície orientável de N e seja η um campo normal unitário de M em N.

Definição 3.3. Definimos a **translação normal de Killing** como sendo a aplicação $\gamma : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ associada à base de Killing $\mathcal{B}$ dada por:

$$\gamma(p) = \Gamma_p(\eta(p)),$$

ou seja,

$$\gamma(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \eta(p), V_i(p) \rangle e_i.$$

Exemplo 3.4. Supondo $N = \mathbb{R}^3$ e $V_1 = e_1 = (1,0,0), V_2 = e_2 = (0,1,0), V_3 = e_3 = (0,0,1)$. Então γ é a aplicação de Gauss, chamada de g, de M:

$$g(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \eta(p), e_i \rangle e_i.$$

Neste caso, sabemos que

$$\Delta g = -2\nabla H - \|B\|^2 g,$$

onde B é segunda forma fundamental de M em N e H função curvatura média de M.

Queremos mostrar que γ satisfaz uma fórmula similar no caso em que M está imersa em uma variedade riemanniana killing paralelizável de dimensão $n+1$.

Teorema 3.5. *Seja N uma variedade riemanniana killing paralelizável e seja $\mathcal{B}$ base de Killing de TN. Seja M uma hipersuperfície orientável imersa em N.*

Então a translação normal de Killing $\gamma : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ de M associada a $\mathcal{B}$ satisfaz a fórmula:

$$\Delta\gamma(p) = -n\Gamma_p(\nabla H) - (\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)\gamma(p)$$

para todo $p \in M$.

Em particular, M tem curvatura média constante se, e somente se, γ satisfaz a equação

$$\Delta\gamma = -(\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)\gamma.$$

Demonstração:

Suponhamos que $\mathcal{B} = \{V_1, ..., V_{n+1}\}$. Como

$$\gamma(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \eta, V_i \rangle e_i,$$

temos que, pelo Teorema 2.4, dado $p \in M$,

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(p) &= \sum_{i=1}^{n+1} \Delta(\langle \eta, V_i \rangle)(p) e_i = \\
&= -n \sum_{i=1}^{n+1} \langle V_i, \nabla H \rangle (p) e_i - (\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2) \sum_{i=1}^{n+1} \langle \eta, V_i \rangle (p) e_i = \\
&= -n\Gamma_p(\nabla H) - (\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)\gamma(p).
\end{aligned}$$

Temos que H é constante se e somente se $\nabla H = 0$; e, como Γ_p é um isomorfismo linear, $\Gamma_p(\nabla H)$ se e somente se $\nabla H = 0$. Portanto H é constante se e somente se

$$\Delta\gamma = -(\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)\gamma.$$

■

Como conseqüência do Teorema 3.5, obtemos o Teorema 1 de [8] que aqui enunciamos como o Corolário 3.6.

Consideramos G um grupo de Lie de dimensão $n+1$ com uma métrica bi-invariante $\langle , \rangle$ e elemento neutro e. Dada uma hipersuperfície orientável M imersa em G, definimos $N : M \to T_eG$ por:

$$N(p) = d(L_p^{-1})_p(\eta(p)),$$

onde $L_p : G \to G$ é dada por $L_p(x) = px$ e $d(L_p)_e : T_eG \to T_pG$.

Corolário 3.6. *Nas condições acima vale*

$$\Delta N(p) = -nd(L_p^{-1})_p(\nabla H) - (\mathrm{Ric}(\eta) + \|B\|^2)N(p),$$

onde $\|B\|$ é a norma da segunda forma fundamental de M em G, H é a curvatura média de M e ∇H é o gradiente de H em M.

Demonstração:

Seja $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ base ortogonal de T_eG. Definimos

$$V_i(p) := d(L_p)_e(e_i).$$

Desta forma V_i é um campo de vetores invariante à esquerda para todo i, e consequentemente de Killing (pois a métrica é invariante à direita). Temos que $V_1, ..., V_{n+1}$ são linearmente independentes em p, pois $e_1, ..., e_{n+1}$ o são e L_p é difeomorfismo.

Portanto G é uma variedade Killing paralelizável e $\mathcal{B} = \{V_1, ..., V_{n+1}\}$ é a base de Killing.

Além disso, $\Gamma_p : T_pG \to \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\Gamma_p(v) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle v, V_i(p)\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n+1} \langle v, d(L_p)_e(e_i)\rangle e_i.$$

Mas como a métrica é invariante à esquerda, L_p^{-1} é isometria, então

$$\Gamma_p(v) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle d(L_p^{-1})_p(v), e_i\rangle e_i = d(L_p^{-1})_p(v).$$

Logo, pelo Teorema 3.5, obtemos o resultado.

■

No próximo resultado reescrevemos os corolários 2.5 e 2.7 no caso de N ser uma variedade killing paralelizável.

Corolário 3.7. *Seja N uma variedade riemanniana killing paralelizável $(n+1)$-dimensional e seja $\mathcal{B}$ uma base de Killing de TN. Suponhamos que*

$$\mathrm{Ric}(W) \geq -nH^2,$$

para qualquer vetor tangente unitário W de N.

Seja M uma hipersuperfície completa imersa em N com curvatura média constante H tal que suponhamos que $\gamma(M)$ está contido em um semi-espaço de $\mathbb{R}^{n+1}$, onde γ é a translação normal de Killing associada a $\mathcal{B}$.

Então temos que:

(i) se M é compacta então M é invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias de N ou M é umbílica e tem curvatura de Ricci constante não positiva $\mathrm{Ric}(\eta) = -nH^2$ *na direção de η.*

Se $n = 2$, M é simplesmente conexa e

(ii) se M é conforme ao plano com γ limitada em M, então M é invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias de N ou M é umbílica e N tem curvatura de Ricci não-positiva

$$Ric(\eta) = -2H^2$$

na direção η nos pontos de M.

(iii) se M é conforme ao disco, então M é invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias de N determinado por V.

Demonstração:

Como $\gamma(M)$ está contido em um semi-espaço de $\mathbb{R}^{n+1}$, então existe $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v \neq 0$, tal que $\langle v, \gamma(p) \rangle \geq 0$, para todo $p \in M$.

Definimos o campo V por

$$V = \sum_{i=1}^{n+1} \langle v, e_i \rangle V_i,$$

sendo cada V_i campo de Killing e como $\langle v, e_i \rangle$ é constante para cada i usando as propriedades da conexão temos que V é um campo de Killing de N.

Então

$$\langle \eta, V \rangle = \langle \eta, \sum_{i=1}^{n+1} \langle v, e_i \rangle V_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \eta, V_i \rangle \langle v, e_i \rangle =$$
$$= \langle \sum_{i=1}^{n+1} \langle \eta, V_i \rangle e_i, v \rangle = \langle \gamma(p), v \rangle \geq 0.$$

Assim aplicamos o Corolário 2.5 em (i) e o Corolário 2.7 em (ii) e (iii), concluindo a demosntração.

■

No caso de $N = \mathbb{R}^3$ e da translação normal de Killing ser a aplicação de Gauss, temos a conjectura de M. P. do Carmo que diz que a aplicação de

Gauss de uma superfície completa de c.m.c. de $\mathbb{R}^3$ que não é um cilindro e nem um plano tem que conter uma vizinhança de um equador da esfera. Esta propriedade está confirmada para superfícies de Delaunay e para superfícies helicoidais completas de curvatura média constante.

Esta propriedade foi comprovada para alguns exemplos de superfície de Delaunay e helicoidais de c.m.c., para alguns exemplos de translação de Killing associada a uma base de Killing $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ (considerando a projeção radial de γ sobre a esfera).

Levando em conta o Corolário 3.7, é natural considerar a seguinte extensão da conjectura de M. P. do Carmo:

Conjectura:

Seja N uma variedade riemanniana Killing paralelizável $(n+1)-$dimensional e seja $\mathcal{B}$ uma base de Killing de TN. Seja M uma hipersuperfície completa de curvatura média constante imersa em N e seja $\gamma : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ a translação normal de Killing associada à $\mathcal{B}$. Se M não é invariante pelo campo de Killing gerado (sobre os números reais) por $\mathcal{B}$, então a projeção radial de $\gamma(M)$ sobre a esfera unitária cobre uma vizinhança de um equador da esfera.

Bibliografia

[1] Carmo, M. P. do, "*Geometria Riemanniana*", IMPA, (1988).

[2] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S., "*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*", Springer-Verlag, (1977).

[3] Jost, Jürgen, "*Riemannian Geometry and Geometric Analysis*", Springer, (1995).

[4] Ahlfors, L. V., "*Conformal invariants: Topics in Geometric Function Theory*", Mcgraw-Hill, (1973).

[5] Ripoll, J. e Fornari, S., "*Killing Fields, Mean Curvature, Translation Maps*", Illinois Journal of Math, preprint.

[6] Hoffman, D., Osserman, R., Schoen, R., "*On the Gauss map of complete constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$", Comm. Math. Helvetici, 57, (1982), 519 - 531.

[7] Fischer-Colbrie, D., Schoen, R., "*The structure of complete stable minimal surfaces in* $3-$*manifolds of non-negative scalar curvature*", Comm. of Pure and Applied Math., 33, (1980), 199 - 211.

[8] Espírito-Santo, N., Fornari S., Frensel, K., Ripoll, J., "*Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric*", Manuscripta Mathematica, 111, (2003), 459- 470.

[9] Rosenberg, H., "*Hypersurfaces of constant curvature in space forms*", Bull. Sc. Math., Número 2, 117, 1993, 211 - 239.