Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS SEMILINEARES COM CRESCIMENTO SINGULAR CRÍTICO

por

MARNEI LUIS MANDLER

Porto Alegre, março de 2005.

Dissertação submetida por Marnei Luis Mandler* como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Dr. Mark Thompson
Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano

Data da Defesa: 18 de março de 2005.

---

*Bolsista do CNPq-Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Para Juliana e Henrique,
com todo carinho.

Agradecimentos

À Deus, que sempre se faz presente em minha vida.

Aos meus pais, à minha irmã e à minha sobrinha, pelo amor, pela confiança, pela compreensão e pelo apoio incondicional.

Ao professor Leonardo, por todos os ensinamentos, pela formação, pelo exemplo e pela paciência.

À Sabrina, colega e grande amiga, por toda a força, pelo incentivo, pela cumplicidade e pelo companheirismo ao longo de todos esses anos de formação acadêmica.

Ao Cleber, amigo de todas as horas, por todo o auxílio durante minha estada em Porto Alegre, pelo incentivo e pelo companheirismo constante.

À Eliane, à Flávia e ao Luciano, pelo carinho e atenção, pela preparação psicológica às vésperas da defesa, pelo pouso e por toda a ajuda, mas acima de tudo, pela amizade sincera.

À Denise, pelo exemplo de força e determinação.

À Clarissa e aos colegas da pós-graduação, em especial à Valéria, ao Maurício, ao Josué, ao Pedro e ao Davi, pela amizade, pelos conhecimentos compartilhados e pelos momentos de alegria e descontração.

À Rosane, secretária da pós-graduação, ao Maurício e à Soraia, bolsistas do laboratório, pela atenção, pelo auxílio e pela paciência.

Ao Fernando, por todas as caronas, pelo suporte computacional e, sobretudo, pela amizade.

Aos meus velhos amigos, Leandro, Mônica e Romar, pela parceria, pelo incentivo e pelo apoio nas horas mais difíceis.

E a todos que torceram por mim e colaboraram de alguma forma para a concretização desta etapa.

Muito obrigado a todos.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma equação diferencial parcial elíptica semilinear contendo uma singularidade e um termo de crescimento crítico. A existência de soluções depende da dimensão do espaço e do coeficiente da singularidade. Através da caracterização variacional e com o uso de seqüências de Palais-Smale provamos que o problema possui soluções não triviais.

Abstract

In this work we study a semilinear elliptic partial differential equation containing a singularity and a critical growth term. The solvability depends on the space dimension and on the parameter multiplying the singularity. Using the variational characterization and Palais-Smale sequences, we establish the existence of nontrivial solutions for this problem.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Considere o problema semilinear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \dfrac{u}{|x|^2} = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, contendo a origem e com fronteira suave, $2^* = \frac{2n}{n-2}$, para $n \geqslant 3$, é o expoente crítico de Sobolev, $\lambda > 0$ e $0 \leqslant \mu < \overline{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$.

Quando $\mu = 0$, este problema torna-se simplesmente

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

equação estudada por Brezis e Nirenberg [7], que provam que a existência de soluções não triviais de (1.2) não depende apenas de λ, mas sim do par (n, λ).

Um papel importante na resolução destas equações é desempenhado pelo espectro σ_μ do operador $-\Delta - \mu/|x|^2$ com condições de fronteira de Dirichlet. De acordo com [11], quando $\mu < \overline{\mu}$, temos que σ_μ é discreto, contido no semi-eixo positivo e cada autovalor λ_k $(k \geqslant 1)$ é isolado e tem multiplicidade finita. O menor autovalor λ_1 é simples e $\lambda_k \to +\infty$, quando $k \to \infty$. Além disso, todas as autofunções (para qualquer μ) pertencem ao espaço $H_0^1(\Omega)$.

Brezis e Nirenberg [7] consideram o caso $\lambda < \lambda_1$ e também provam que quando Ω é a bola unitária, as soluções positivas de (1.2) são radialmente simétricas. Posteriormente, Capozzi, Fortunato e Palmieri [9] consideram o caso $\lambda \geqslant \lambda_1$ e mostram que a solubilidade de (1.2) é diferente nos casos $n = 3$, $n = 4$ e $n \geqslant 5$.

Esse fenômeno envolvendo a dimensão do espaço também ocorre para operadores mais gerais, como o operador poliharmônico e o p-Laplaciano.

Com relação a (1.1), Jannelli [19] prova que se $0 < \mu \leqslant \overline{\mu} - 1$, esta equação admite uma solução positiva para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Se $\overline{\mu} - 1 < \mu < \overline{\mu}$ e se Ω é a bola unitária, Jannelli [19] prova também que existe $\lambda_* \in (0, \lambda_1)$ tal que a equação (1.1) admite uma solução positiva se e somente se $\lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$.

Neste trabalho, vamos estudar um problema mais geral que a equação (1.1), no qual o termo λu é substituído por uma função $g(x, u)$ que satisfaz certas condições de crescimento, segundo o artigo [14] realizado por A. Ferrero e F. Gazzola.

As principais ferramentas utilizadas são o Mountain Pass Theorem e o Linking Theorem, idéias que foram introduzidas por Ambrosetti e Rabinowitz [2] e melhoradas posteriormente em [6], [15] e [5]. Estas técnicas permitem resolver uma equação achando pontos críticos do funcional f associado ao problema, mesmo quando f é ilimitado. A Teoria de Morse [24] e a Teoria de Lusternik-Schnirelman [22], [20], [27], [23] e [8] são alternativas para obter-se pontos críticos.

No capítulo 2 introduzimos notações, definimos conceitos e apresentamos alguns resultados que são utilizados ao longo do trabalho.

No capítulo 3 é realizada a formulação do problema, enunciando-se as hipóteses gerais que são admitidas no decorrer do trabalho.

No capítulo 4 definimos as soluções aproximadas para a equação (1.1) e efetuamos algumas estimativas assintóticas que serão úteis mais adiante.

O capítulo 5 é a essência do trabalho. Nele descrevemos a caracterização variacional do problema, baseada em argumentos de Linking e do Mountain Pass Theorem. Provamos a existência de soluções não triviais para a equação (1.1) encontrando seqüências de Palais-Smale em determinados níveis minimais.

No apêndice, introduzimos a teoria de índice e provamos a existência de pontos críticos para funcionais que satisfazem certas condições.

Capítulo 2

Conceitos Iniciais

Nesta seção vamos introduzir a notação e enunciar alguns resultados que serão usados no decorrer deste trabalho. As demonstrações aqui omitidas podem ser encontradas em [12].

Definições Gerais: Seja X um espaço vetorial.

Dizemos que $\| \ \| : X \to [0, \infty)$ é uma norma em X se:

$$\begin{aligned} i)\ & \|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in X \qquad \text{e} \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ ii)\ & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \\ iii)\ & \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X. \end{aligned}$$

Dizemos que uma seqüência $\{x_n\} \subseteq X$ converge para $x \in X$ e escrevemos $x_n \to x$ se para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Dizemos que $\{x_n\} \subseteq X$ é uma seqüência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ sempre que $n, m \geqslant n_0$.

Dizemos que X é completo se toda seqüência de Cauchy em X for convergente.

Dizemos que X é um espaço de Banach se X for um espaço normado e completo em relação a esta norma.

Dizemos que X é um espaço de Hilbert se a sua norma for proveniente de um produto interno e X for completo em relação a esta norma.

Dizemos que um funcional linear $l : X \to \mathbb{R}$ é limitado se existir $c > 0$ tal que $|l(x)| \leqslant c\|x\|$ para todo $x \in X$.

Dizemos que $X' = \{l : X \to \mathbb{R};\ l \text{ é linear e limitado}\}$ é o espaço dual de X.

Notações:

∂X é a fronteira de X.

$\overline{X} = X \cup \partial X$ é o fecho de X.

X^c é o complementar de X.

$X^\perp$ é o complemento ortogonal de X.

B_r é a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ com raio r e centrada na origem.

S^{n-1} é a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$.

$\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle_X$ é um produto interno em X.

∇f é o gradiente da função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$div\, F$ é o divergente da função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$supp\, f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$ é o suporte de $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

$|A|$ é a medida do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.

C é uma constante que pode representar diferentes valores.

Espaços Clássicos:

Dizemos que $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory se $g(x,t)$ for mensurável em x, para todo $t \in \mathbb{R}$, e se $g(x,t)$ for contínua em t, para quase todo $x \in \Omega$.

O espaço $L^p(\Omega)$, para $1 \leqslant p < \infty$, é o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_\Omega |f|^p \, dx < \infty.$$

Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, definimos a norma L^p de f por

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |f|^p \, dx \Big)^{1/p}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\big|f(x)\big| \leqslant M \quad \text{ q.s. em } \Omega,$$

para algum $M = M(f) > 0$.

Definimos a norma $\| \, \|_{L^\infty}$ em $L^\infty(\Omega)$ por

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \big\{ M > 0\, ;\, \big|f(x)\big| \leqslant M \text{ q.s. em } \Omega \big\}.$$

O espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ é formado pelas funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_K |f|\, dx < \infty$$

para todo subconjunto compacto K de Ω.

O espaço das funções infinitamente diferenciáveis é denotado por $C^\infty(\Omega)$.

O espaço das funções $f \in C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, isto é, com $supp\, f \subseteq K$, onde K é um subconjunto compacto de Ω, é denotado por $C_0^\infty(\Omega)$. Uma função pertencente a este espaço é chamada de função teste.

Para $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$, dizemos que v é a α-ésima derivada parcial no sentido fraco de u, e escrevemos $v = D^\alpha u$, se ocorrer que

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\, \varphi\, dx$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, onde $D^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\, \varphi$ e $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Se $|\alpha| = 1$, temos que $D^\alpha u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ para algum x_i.

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, para $1 \leqslant p < \infty$, consiste de todas as funções em $L^1_{loc}(\Omega)$ que pertencem a $L^p(\Omega)$ e cujas derivadas parciais de primeira ordem no sentido fraco também pertencem a $L^p(\Omega)$, ou seja,

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^1_{loc}(\Omega)\, ;\, u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\ \ \forall\, i \in \{1, ..., n\} \Big\}.$$

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definimos a norma em $W^{1,p}$ de u por

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \Big(\|u\|^p_{L^p} + \|\nabla u\|^p_{L^p} \Big)^{1/p}.$$

No caso particular em que $p = 2$ temos o espaço de Hilbert $H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega)$.

Definimos o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma de $W^{1,p}(\Omega)$. Intuitivamente, uma função pertencente a este espaço se anula na fronteira de Ω.

No caso $p = 2$, denotamos $H_0^1(\Omega) \equiv W_0^{1,2}(\Omega)$. Se Ω é limitado, então a norma definida por

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2}$$

é equivalente à norma $\|\ \|_{W^{1,2}}$.

Definimos o espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, de acordo com [21], como sendo o conjunto das funções $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e que se "anulam no infinito", isto é, que $\{x\, ;\, |f(x)| > a\}$ tenha medida finita para todo $a > 0$. Observe que $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Desigualdade de Young: Sejam $a, b \geqslant 0$ e $p, q \geqslant 1$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualdade de Hölder: Sejam $p, q \geqslant 1$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então

$$\int_\Omega |fg| \; dx \leqslant \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q} \; .$$

Desigualdade de Gagliardo-Niremberg-Sobolev: Seja $1 \leqslant p < n$. Então existe uma constante C, dependendo apenas de p e n, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \; C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \, u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ é o conjugado de Sobolev de p.

A demonstração desta desigualdade pode ser encontrada em [21]. No caso particular em que $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, pode também ser obtida em [12].

Notação para "ó pequeno": Dizemos que $f = o(g)$ quando $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Integral de funções radiais: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função radial, isto é, com $f(x) = \rho(|x|)$ para alguma função $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cometendo o abuso de notação $f(|x|) = \rho(|x|)$ e utilizando coordenadas esféricas, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} f(x) \; dx \;\; &= \;\; \int_0^R \int_{|w|=1} f(rw) \; r^{n-1} \; dw \; dr = \int_0^R f(r) \; r^{n-1} \int_{|w|=1} dw \; dr \\
&= \;\; nw_n \int_0^R f(r) \; r^{n-1} \; dr = C \int_0^R f(r) \; r^{n-1} \; dr,
\end{aligned}$$

onde $w \in S^{n-1}$ e w_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1 : Teorema da Divergência
Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe C^1 orientada pela normal unitária exterior η e seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Então

$$\int_\Omega div \, F \; dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta \; ds.$$

Conseqüência: Como $div\,(u\nabla v) = \nabla u \nabla v + u\Delta v$, aplicando o Teorema da Divergência, obtemos que

$$\int_\Omega u\Delta v \; dx = \int_{\partial\Omega} u \,\frac{\partial v}{\partial \eta}\; ds - \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx.$$

Teorema 2.2 : Teorema de Rellich-Kondrachov
Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe C^1 e $1 \leqslant p < n$. Então toda seqüência limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ possui uma subseqüência convergente em $L^q(\Omega)$, para qualquer $q < p^*$.

Definição 2.1 Sejam H um espaço de Hilbert e H' o seu dual. Dizemos que uma seqüência $\{u_k\} \subseteq H$ converge fracamente para $u \in H$ e escrevemos $u_k \rightharpoonup u$, se

$$l(u_k) \to l(u) \qquad \forall\, l \in H'.$$

É claro que se $u_k \to u$ então $u_k \rightharpoonup u$. Também é válido o seguinte resultado:

Teorema 2.3 *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{u_k\}$ uma seqüência limitada em H. Então existem uma subseqüência u_{k_j} e $u \in H$ tais que*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u.$$

Proposição 2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ uma função contínua tal que $f(0) = 0$. Se $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis tais que $|supp\; u \cap supp\; v| = 0$, então*

$$\int_\Omega f(u+v)\; dx = \int_\Omega f(u)\; dx + \int_\Omega f(v)\; dx.$$

Esta identidade é válida também no caso estendido, isto é, quando uma das integrais acima é infinita.

Demonstração: Como f é contínua e u, v são mensuráveis, então $f(u), f(v)$ e $f(u+v)$ também são mensuráveis. Considerando

$$A = supp\; u \cap supp\; v \qquad \text{e} \qquad B = \Omega \backslash (supp\; u \cup supp\; v)$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(u+v)\; dx &= \int_{supp\; u\backslash A} f(u+v)\; dx + \int_A f(u+v)\; dx \\ &+ \int_{supp\; v\backslash A} f(u+v)\; dx + \int_B f(u+v)\; dx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Mas como $v = 0$ em $supp\; u\backslash A$ e $|A| = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{supp\; u\backslash A} f(u+v)\; dx &= \int_{supp\; u\backslash A} f(u+0)\; dx \\ &= \int_{supp\; u} f(u)\; dx = \int_\Omega f(u)\; dx, \end{aligned}$$

pois $f(u) = f(0) = 0$ em $(supp\ u)^c$. De forma análoga,

$$\int_{supp\ v\backslash A} f(u+v)\ dx = \int_\Omega f(v)\ dx.$$

Além disso, como $|A| = 0$ segue que

$$\int_A f(u+v)\ dx = 0$$

e também, como $u = v = 0$ em B, obtemos que

$$\int_B f(u+v)\ dx = \int_B f(0)\ dx = 0.$$

Portanto, substituindo em (2.1) concluímos que

$$\int_\Omega f(u+v)\ dx = \int_\Omega f(u)\ dx + \int_\Omega f(v)\ dx.$$

$\square$

Definição 2.2 Sejam H um espaço de Hilbert e $J : H \to \mathbb{R}$. Dizemos que J é diferenciável em $u \in H$ se existir $v \in H$ tal que

$$J(u+h) = J(u) + \langle v, h \rangle_H + o(h).$$

Nesse caso, definimos $J'(u) = v$. Se $J' : H \to H$ for contínuo, dizemos que J é de classe C^1 e escrevemos $J \in C^1(H, \mathbb{R})$.

Notação: Sejam H um espaço de Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Então

$$A_c = \{u \in H\,;\ J(u) \leqslant c\},$$

$$K_c = \{u \in H\,;\ J(u) = c \ \text{ e } \ J'(u) = 0\}.$$

Definição 2.3 Dizemos que

i) $u \in H$ é um ponto crítico se $J'(u) = 0$,

ii) $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico se $K_c \neq \emptyset$.

Definição 2.4 Dizemos que $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale se cada seqüência $\{u_k\} \subseteq H$ satisfazendo

$$\{J(u_k)\} \text{ limitada em } H \quad \text{e} \quad J'(u_k) \to 0 \text{ em } H'$$

possuir uma subseqüência convergente em H.

Lema 2.1 : Lema da Deformação
Seja $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ um funcional que satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale. Suponhamos que $K_c = \emptyset$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ suficiente pequeno, existe uma constante $0 < \delta < \varepsilon$ e uma função $\eta \in C([0,1] \times H; H)$ tais que as transformações $\eta_t(u) \equiv \eta(t,u)$ satisfazem:

i) $\eta_0(u) = u \qquad \forall\, u \in H,$
ii) $\eta_1(u) = u \qquad \forall\, u \notin J^{-1}\big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\big),$
iii) $J(\eta_t(u)) \leqslant J(u) \qquad \forall\, u \in H,\ 0 < t < 1,$
iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subseteq A_{c-\delta}$.

Teorema 2.4 : Mountain Pass Theorem
Seja $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de compacidade de Palais-Smale. Suponhamos que:
i) $J(0) = 0$,
ii) existem constantes $a, r > 0$ tais que $J(u) \geqslant a$ se $\|u\|_H = r$,
iii) existe um elemento $v \in H$ com $\|v\|_H > r$ e $J(v) \leqslant 0$.

Então definindo

$$\Gamma = \{\gamma \in C\big([0,1]; H\big)\,;\, \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = v\},$$

temos que

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} J(u)$$

é um valor crítico de J.

Demonstração: Note que para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $t \in [0,1]$ tal que $\gamma(t) = w$, com $\|w\|_H = r$. Assim, por *(ii)*, obtemos que

$$J(w) \geqslant a,$$

logo,

$$\max_{u \in \gamma([0,1])} J(u) \geqslant J(w) \geqslant a$$

e, portanto,

$$c \geqslant a.$$

Suponhamos por contradição que c não é um valor crítico, ou seja, que $K_c = \emptyset$ e escolhemos ε suficientemente pequeno tal que $0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$. Como J também satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, podemos utilizar o Lema da Deformação e obter uma constante $0 < \delta < \varepsilon$ e um homeomorfismo $\eta : H \to H$ $(\eta = \eta_1)$, com

$$\eta(A_{c+\delta}) \subseteq A_{c-\delta}$$

e

$$\eta(u) = u \quad \text{ se } u \notin J^{-1}\big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\big).$$

Como $c < c+\delta$, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in \gamma_0([0,1])} J(u) \leqslant c+\delta.$$

Considerando então $\widehat{\gamma} = \eta \circ \gamma_0$, temos que $\widehat{\gamma} \in \Gamma$, pois

$$\widehat{\gamma}(0) = \eta(\gamma_0(0)) = \eta(0) = 0 \quad \text{ e } \quad \widehat{\gamma}(1) = \eta(\gamma_0(1)) = \eta(v) = v,$$

já que $c - \varepsilon \geqslant a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} \geqslant 0$ e assim $0, v \notin J^{-1}\big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\big)$.

Como para todo $t \in [0,1]$

$$J(\gamma_0(t)) \leqslant c+\delta \Rightarrow \gamma_0(t) \in A_{c+\delta} \Rightarrow \eta(\gamma_0(t)) \in A_{c-\delta} \Rightarrow \widehat{\gamma}(t) \in A_{c-\delta},$$

segue que

$$J(\widehat{\gamma}(t)) \leqslant c-\delta \quad \forall\, t \in [0,1]$$

e, assim,

$$\max_{u \in \widehat{\gamma}([0,1])} J(u) \leqslant c-\delta.$$

Portanto, obtemos que

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} J(u) \leqslant \max_{u \in \widehat{\gamma}([0,1])} J(u) \leqslant c-\delta < c,$$

um absurdo.

$\square$

O próximo teorema é uma generalização do Mountain Pass Theorem e pode ser encontrado em [3].

Teorema 2.5 : Teorema do Linking
Sejam H um espaço de Hilbert com $H = V \oplus W$, $\dim V < +\infty$ e $w \in W$ com $\|w\|_H = R$. Definimos

$$D_R = \big(\overline{B_R} \cap V\big) \oplus [0,R]w,$$

onde $[0,R]w = \{h \in H\,;\, h = tw \text{ com } 0 \leqslant t \leqslant R\}$, e

$$\widetilde{\Gamma} = \big\{h \in C(D_R, H)\,;\, h(u) = u \ \ \forall\, u \in \partial D_R\big\}.$$

Consideremos $J \in C^1(H,\mathbb{R})$ um funcional que satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale e tal que

i) $J(0) = 0$,

ii) existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $J(u) \geqslant \alpha$ para todo $u \in \partial B_\rho \cap W$,

iii) existem $R > \rho$ e $\beta < \alpha$ tais que $J(u) \leqslant \beta$ para todo $u \in \partial D_R$ (onde ∂D_R é a fronteira de D_R em relação ao subespaço $V \oplus [w]$).

Suponhamos ainda que $h(D_R) \cap \big(\partial B_s \cap W\big) \neq \emptyset$ para todo $s < R$ e todo $h \in \widetilde{\Gamma}$. Então

$$c = \inf_{h \in \widetilde{\Gamma}} \max_{u \in D_R} J\big(h(u)\big)$$

é um valor crítico de J.

Demonstração: Como $\rho < R$, para $h \in \widetilde{\Gamma}$ existe $x \in h(D_R) \cap (\partial B_\rho \cap W)$. Logo, existe $u_0 \in D_R$ tal que $x = h(u_0)$ e assim, para todo $h \in \widetilde{\Gamma}$ temos que

$$\max_{u \in D_R} J\big(h(u)\big) \geqslant J\big(h(u_0)\big) = J(x).$$

Além disso, como $x \in \partial B_\rho \cap W$, utilizando (ii) obtemos

$$\max_{u \in D_R} J\big(h(u)\big) \geqslant J(x) \geqslant \alpha.$$

Portanto,

$$\inf_{h \in \widetilde{\Gamma}} \max_{u \in D_R} J\big(h(u)\big) \geqslant \alpha,$$

ou seja,

$$c \geqslant \alpha > \beta.$$

Suponhamos por contradição que c não é um valor crítico de J, isto é, que $K_c = \emptyset$. Como J satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, podemos utilizar o Lema da Deformação para $\varepsilon > 0$ tal que $c - \varepsilon > \beta$, obtendo uma constante $0 < \delta < \varepsilon$ e uma função $\eta : H \to H$ tais que

$$\eta(u) = u \quad \forall\, u \notin J^{-1}\big((c-\varepsilon, c+\varepsilon)\big) \tag{2.2}$$

e

$$\eta(A_{c+\delta}) \subseteq A_{c-\delta}. \tag{2.3}$$

Mas para $u \in \partial D_R$, conforme (iii), temos que

$$J(u) \leqslant \beta < c - \varepsilon$$

e, assim,

$$u \in \partial D_R \Rightarrow u \notin J^{-1}\big((c-\varepsilon, c+\varepsilon)\big).$$

Portanto, para todo $h \in \widetilde{\Gamma}$ e para todo $u \in \partial D_R$, podemos utilizar (2.2) e a definição de $\widetilde{\Gamma}$ e obter que

$$\big(\eta \circ h\big)(u) = \eta\big(h(u)\big) = \eta(u) = u,$$

concluindo que

$$\eta \circ h \in \widetilde{\Gamma} \quad \forall\, h \in \widetilde{\Gamma}.$$

Por outro lado, pela definição de c, existe $h_0 \in \widetilde{\Gamma}$ tal que

$$\max_{u \in D_R} J\big(h_0(u)\big) \leqslant c + \delta.$$

Logo, para $u \in D_R$ temos que $h_0(u) \in A_{c+\delta}$ e, por (2.3), segue que

$$\eta\big(h_0(u)\big) \in A_{c-\delta},$$

ou seja,

$$J\big(\eta(h_0(u))\big) \leqslant c - \delta$$

e, assim,

$$\max_{u \in D_R} J\big(\eta(h_0(u))\big) \leqslant c - \delta.$$

Mas como $\eta \circ h_0 \in \widetilde{\Gamma}$, obtemos que

$$c = \inf_{h \in \widetilde{\Gamma}} \max_{u \in D_R} J\big(h(u)\big) \leqslant c - \delta < c,$$

um absurdo.

$\square$

Capítulo 3

A Formulação do Problema

Vamos nos concentrar em uma forma mais geral para a equação (1.1), dada por

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \dfrac{u}{|x|^2} = g(x,u) + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, contendo a origem e com fronteira suave, $2^* = \frac{2n}{n-2}$, para $n \geqslant 3$, é o expoente crítico de Sobolev, $\lambda > 0$, $0 \leqslant \mu < \overline{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$ e $g(x,.)$ tem crescimento subcrítico ao infinito.

Mais precisamente, assumimos que $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory (veja a página 4), tal que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}} \text{ com } |g(x,s)| \leqslant a_\varepsilon(x) + \varepsilon|s|^{\frac{n+2}{n-2}} \ \ \forall\, s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \text{ q.s.} \tag{3.2}$$

Outras hipóteses são impostas para a primitiva $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s g(x,t)\,dt$. Primeiro, assumimos que

$$G(x,s) \geqslant 0 \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.s. } \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Assumimos também que existem $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ e $\eta \in (0, \lambda_{k+1} - \lambda_k)$ tais que

$$G(x,s) \geqslant \frac{1}{2}(\lambda_k + \eta)s^2 \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.s. } \forall\, |s| \leqslant \delta \tag{3.4}$$

e que existem $C \geqslant 0$, $\theta \in (2, 2^*)$, $\psi \in L^{q(\theta)}(\Omega)$ e $\nu \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ tais que

$$G(x,s) \leqslant \frac{1}{2}\nu s^2 + \psi(x)|s|^\theta + C|s|^{2^*} \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.s. } \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

com $q(\theta) = \dfrac{2n}{2n + (2-n)\theta}$.

Além disso, assumimos ainda que, para η como em (3.4),

$$G(x,s) \geqslant \frac{1}{2}(\lambda_k+\eta)s^2 - \frac{1}{2^*}|s|^{2^*} \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.s. } \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Se $\overline{\mu} - 1 < \mu < \overline{\mu}$, precisamos ainda de uma condição de crescimento ao infinito, isto é, que existe um subconjunto aberto e não vazio $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $0 \in \Omega_0$ e

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{G(x,s)}{s^p} = +\infty \tag{3.7}$$

uniformemente para $x \in \Omega_0$, onde $p = \dfrac{2(n-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu})}{n-2}$.

Para cada $\mu \in [0,\overline{\mu})$, vamos considerar o espaço de Hilbert H_0^1 dotado do produto interno

$$\left\langle u,v\right\rangle_{H_\mu} = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx - \mu \int_\Omega \frac{uv}{|x|^2}\, dx$$

e cuja norma é obtida pelo produto escalar, ou seja,

$$\|u\|_{H_\mu}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \mu \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx.$$

Vamos mostrar que $\|\ \|_{H_\mu}$ é de fato uma norma e é equivalente à norma $\|\ \|_{H_0^1}$. Para isso, precisaremos de um resultado auxiliar, que é importante na mecânica quântica. Trata-se de um refinamento do princípio da incerteza de Heisenberg, que pode ser usado, por exemplo, para mostrar a estabilidade do átomo de hidrogênio, conforme [17].

Lema 3.1 *Para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$ temos que*

$$\overline{\mu} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Demonstração: Inicialmente notemos que, para quaisquer $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1,

$$div\ (Gf) = G \cdot \nabla f + f\, div\ G$$

e como $\nabla\left(\dfrac{1}{|x|}\right) = -\dfrac{1}{|x|^2}\dfrac{x}{|x|}$, temos que $\dfrac{x}{|x|}\nabla\left(\dfrac{1}{|x|}\right) = -\dfrac{1}{|x|^2}$.

Desta forma, para $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $r > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\, dx &= -\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2 x}{|x|} \nabla\left(\frac{1}{|x|}\right) dx \\ &= -\int_{\Omega\setminus B_r} div\left(\frac{u^2 x}{|x|^2}\right) - \frac{1}{|x|}\, div\left(\frac{u^2 x}{|x|}\right) dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pelo Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_{\Omega\setminus B_r} div\left(\frac{u^2x}{|x|^2}\right)dx = \int_{\partial(\Omega\setminus B_r)} \frac{u^2x}{|x|^2}\cdot\eta\, ds = \int_{\partial B_r} \frac{u^2x}{|x|^2}\cdot\eta\, ds,$$

pois $u = 0$ em $\partial\Omega$, onde η é a normal unitária exterior a ∂B_r.
Além disso, como $div\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{n-1}{|x|}$, temos que

$$div\left(\frac{u^2x}{|x|}\right) = \frac{2x\,u\nabla u}{|x|} + \frac{(n-1)u^2}{|x|}.$$

Substituindo em (3.8), obtemos

$$\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\,dx = -\int_{\partial B_r} \frac{u^2x}{|x|^2}\cdot\eta\, ds + 2\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{x\,u\nabla u}{|x|^2}\,dx + (n-1)\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\,dx,$$

ou seja,

$$-(n-2)\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\,dx = -\int_{\partial B_r} \frac{u^2x}{|x|^2}\cdot\eta\, ds + 2\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{x\,u\nabla u}{|x|^2}\,dx$$

e pela desigualdade de Hölder com $p = q = 2$, obtemos que

$$\begin{aligned}-(n-2)\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\,dx \;&\leqslant\; -\int_{\partial B_r} \frac{u^2x}{|x|^2}\cdot\eta\, ds \\ &+\; 2\left(\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\setminus B_r} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}-(n-2)\left(\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\,dx\right)^{1/2} \;&\leqslant\; -\left(\int_{\partial B_r} \frac{u^2x}{|x|^2}\cdot\eta\, ds\right)\left(\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\,dx\right)^{-1/2} \\ &+\; 2\left(\int_{\Omega\setminus B_r} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares e fazendo $r \to 0$, como $n - 2 > 0$, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B_r} \frac{u^2x}{|x|^2}\cdot\eta\,ds\right| \;&\leqslant\; \int_{\partial B_r} \frac{u^2}{|x|}\,ds = \int_{|w|=1} \frac{u^2}{r}\,r^{n-1}\,dw \\ &=\; r^{n-2}\int_{|w|=1} u^2\,dw \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Logo, para $r \to 0$, temos que

$$\left(\int_{\partial B_r} \frac{u^2x}{|x|^2}\cdot\eta\,ds\right)\left(\int_{\Omega\setminus B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\,dx\right)^{-1/2} \longrightarrow 0$$

e como $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\left(\int_{\Omega\setminus B_r} |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2} \longrightarrow \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Portanto, fazendo $r \to 0$ na igualdade (3.9), obtemos que

$$-(n-2)\left(\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2}$$

e, assim,

$$\frac{(n-2)^2}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega).$$

□

Cabe ressaltar que a demonstração deste Lema é baseada na idéia utilizada por [18] para provar a desigualdade de Hardy, que afirma que se $p \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 0$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, então

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p\, dx.$$

Provaremos que o Lema 3.1 é válido também para funções em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Antes, porém, necessitamos de alguns resultados, que estão relacionados a seguir.

Lema 3.2 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, para $n \geqslant 3$, um conjunto de medida finita. Então*

$$\int_{A^c} \frac{1}{|x|^2}\, dx = +\infty.$$

Demonstração: Para $\delta > 0$, utilizando coordenadas polares e a desigualdade de Hölder com $p = n$ e $q = \frac{n}{n-1}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{1}{|x|^2}\, dx &= \int_{A\cap B_\delta} \frac{1}{|x|^2}\, dx + \int_{A\cap B_\delta^c} \frac{1}{|x|^2}\, dx \\
&\leqslant \int_{B_\delta} \frac{1}{|x|^2}\, dx + \left(\int_{A\cap B_\delta^c} \frac{1}{|x|^{2n}}\, dx\right)^{1/n} |A|^{(n-1)/n} \\
&\leqslant \int_0^\delta r^{n-3}\, dr + C\left(\int_\delta^\infty r^{-n-1}\, dr\right)^{1/n} \\
&= C\,\delta^{n-2} + C\,\delta^{-1} < +\infty.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Além disso, para $n \geqslant 3$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{r^2}\, r^{n-1}\, dr = \int_0^\infty r^{n-3}\, dr = +\infty. \tag{3.11}$$

Portanto, como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^2}\, dx = \int_A \frac{1}{|x|^2}\, dx + \int_{A^c} \frac{1}{|x|^2}\, dx,$$

por (3.10) e (3.11), concluímos que

$$\int_{A^c} \frac{1}{|x|^2}\, dx = +\infty.$$

$\square$

Definição 3.1 Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções tais que $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e g é limitada. Definimos a convolução de f e g por

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Lema 3.3 *Dado $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, existe $\{u_k\} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\|\nabla u_k - \nabla u\|_{L^2} \to 0.$$

Demonstração: Inicialmente, consideremos uma função ζ_R tal que

$$\zeta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \zeta_R(x) = 1 \text{ se } x \in B_R \quad \text{e} \quad \zeta_R(x) = 0 \text{ se } x \notin B_{2R}.$$

A construção de tal ζ_R pode ser encontrada em [12], por exemplo. Podemos supor que

$$\left|\nabla \zeta_R\right| \leqslant \frac{2}{2-R} = \frac{2}{R}.$$

Para isto, considere

$$\psi(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leqslant r \leqslant R, \\ 2 - r/R & \text{se } R \leqslant r \leqslant 2R, \\ 0 & \text{se } 2R \leqslant r < +\infty \end{cases}$$

e defina $\widetilde{\zeta}_R(x) = \psi(|x|)$. Assim, obtemos que $\left|\nabla \widetilde{\zeta}_R\right| \leqslant \dfrac{1}{R}$ quase sempre. Agora, basta aproximar ζ_R pela convolução $\widetilde{\zeta}_R * \eta_\varepsilon$, onde η_ε é uma "função suavizadora". Podemos definir η_ε por

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\, \eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

onde $\eta \geqslant 0$, $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, dx = 1$.

Conforme [12], temos que $\widetilde{\zeta}_R * \eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\nabla(\widetilde{\zeta}_R * \eta_\varepsilon) = \nabla\widetilde{\zeta}_R * \eta_\varepsilon$, que converge para $\nabla\widetilde{\zeta}_R$ na norma L^∞, visto que $\nabla\widetilde{\zeta}_R \in L^\infty$.

Seja então $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Utilizando ζ_R e η_ε, podemos construir u_k tal como desejado. De fato, seja $\delta_k = \dfrac{1}{k} > 0$ e defina $v = (\zeta_R\, u) * \eta_\varepsilon$, onde $R, \varepsilon > 0$ serão construídos posteriormente. Note que, de acordo com o Teorema 5.3.1 de [12],

$$\nabla v = \big[\nabla(\zeta_R\, u)\big] * \eta_\varepsilon = [u\nabla\zeta_R + \zeta_R \nabla u] * \eta_\varepsilon,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\big\|\nabla v - \nabla u\big\|_{L^2} &= \big\|(u\nabla\zeta_R + \zeta_R\nabla u) * \eta_\varepsilon - \nabla u\big\|_{L^2} \leqslant \big\|u\nabla\zeta_R * \eta_\varepsilon\big\|_{L^2} \\
&+ \big\|(\zeta_R\nabla u - \nabla u) * \eta_\varepsilon\big\|_{L^2} + \big\|\nabla u * \eta_\varepsilon - \nabla u\big\|_{L^2} \\
&\leqslant \big\|u\nabla\zeta_r\big\|_{L^2} + \big\|\zeta_R\nabla u - \nabla u\big\|_{L^2} + \big\|\nabla u * \eta_\varepsilon - \nabla u\big\|_{L^2},
\end{aligned}$$

pois $\big\|f * \eta_\varepsilon\big\|_{L^2} \leqslant \big\|f\big\|_{L^2}$, devido ao Teorema 5.3.1 de [12]. Pelo mesmo teorema, obtemos que, para ε suficientemente pequeno,

$$\big\|\nabla u * \eta_\varepsilon - \nabla u\big\|_{L^2} < \frac{\delta_k}{3} \tag{3.12}$$

e também,

$$\big\|\zeta_R\nabla u - \nabla u\big\|_{L^2} \leqslant \left(\int_{{B_R}^c} |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2} < \frac{\delta_k}{3}, \tag{3.13}$$

para R suficientemente grande, pois $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, aplicando a desigualdade de Hölder com $p = \frac{2^*}{2}$ e $q = \frac{n}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\big\|u\nabla\zeta_R\big\|_{L^2} &= \left(\int_{B_{2R}\setminus B_R} u^2\, |\nabla\zeta_R|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{B_{2R}\setminus B_R} |u|^{2^*} dx\right)^{1/2^*}\left(\int_{B_{2R}\setminus B_R} |\nabla\zeta_R|^n\, dx\right)^{1/n} \\
&\leqslant C\left(\int_{{B_R}^c} |u|^{2^*} dx\right)^{1/2^*}\left(\int_R^{2R} \frac{2^n}{R^n}\, r^{n-1}\, dr\right)^{1/n} \\
&= C\left(\int_{{B_R}^c} |u|^{2^*} dx\right)^{1/2^*}\left(\frac{2^n}{n}\,(2^n - 1)\right)^{1/n} \\
&= C\left(\int_{{B_R}^c} |u|^{2^*} dx\right)^{1/2^*} < \frac{\delta_k}{3}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

para R suficientemente grande. Substituindo as estimativas (3.12), (3.13) e (3.14), obtemos que

$$\big\|\nabla v - \nabla u\big\|_{L^2} < \delta_k,$$

para R e ε convenientes. Portanto, definindo $u_k = v$, concluímos que o Lema é válido.

$\square$

Lema 3.4 *Para todo $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ temos que*

$$\overline{\mu} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx.$$

Conseqüentemente, essa desigualdade vale para $u \in H_0^1(\Omega)$, onde Ω é apenas um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\left\|\nabla u_k - \nabla u\right\|_{L^2} \to 0$, de acordo com o Lema 3.3. Logo, ∇u_k é uma seqüência de Cauchy em L^2 e, portanto, $\dfrac{u_k}{|x|}$ também é de Cauchy em L^2, pois pelo Lema 3.1,

$$\frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_k - u_m)^2}{|x|^2}\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k - \nabla u_m|^2\, dx.$$

Dessa maneira, existe $v \in L^2$ tal que $\dfrac{u_k}{|x|} \to v$ em L^2. Como $v \in L^2$ e $|x|$ é limitado em compactos, vemos que $v|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Afirmamos que $\nabla(v|x|) = \nabla u$.

De fato, seja $i \in \{1, ..., n\}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $|x|$ é contínua, temos que $|x|\, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (v|x|)}{\partial x_i}(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}^n} v|x|\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \;=\; -\lim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_k}{|x|}\, |x| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \\
&= -\lim \int_{\mathbb{R}^n} u_k\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \;=\; \lim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\, \varphi\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \varphi\, dx \;=\; \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial (v|x|)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

e, então,

$$\nabla(v|x|) = \nabla u.$$

Assim, $u - v|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\nabla(u - v|x|) = 0.$$

Utilizando o Teorema 7.16 de [16], com $\Omega = B_r$, obtemos que $u - v|x|$ é constante. Suponhamos que $u - v|x| = c \neq 0$. Como $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, vemos que

$$A = \left\{ x \,;\, |u(x)| > \frac{|c|}{2} \right\}$$

tem medida finita. Note que se $x \notin A$, então

$$\big|v(x)\,|x|\big| = \big|u(x) - c\big| \geqslant |c| - \frac{|c|}{2} = \frac{|c|}{2},$$

assim, para $x \notin A$ temos que $\big|v(x)\big| \geqslant \dfrac{|c|}{2\,|x|}$. Logo,

$$\big|v(x)\big|^2 \geqslant \frac{c^2}{4|x|^2} \quad \forall\, x \notin A$$

e, pelo Lema 3.2,

$$\int_{A^c} \big|v(x)\big|^2\, dx \geqslant \int_{A^c} \frac{c^2}{4|x|^2}\, dx = \frac{c^2}{4} \int_{A^c} \frac{1}{|x|^2}\, dx = +\infty,$$

contradizendo o fato que $v \in L^2$.
Dessa forma, obtemos que $c = 0$ e $u = v|x|$. Logo, $\dfrac{u}{|x|} = v$ e portanto,

$$\frac{u_k}{|x|} \to \frac{u}{|x|} \qquad \text{em } L^2.$$

Como o Lema 3.1 é válido para $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, aplicando limites concluímos que também é válido para $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\overline{\mu} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx \quad \forall\, u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, a desigualdade é válida em $H_0^1(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega) \subseteq D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Agora sim podemos enunciar o resultado desejado:

Teorema 3.1 *As normas $\|\ \|_{H_0^1}$ e $\|\ \|_{H_\mu}$ são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Como $\mu \geqslant 0$, temos que

$$\|u\|_{H_\mu}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \mu \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|u\|_{H_0^1}^2.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.4, temos que

$$\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \leqslant \frac{1}{\overline{\mu}} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_\mu}^2 &= \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \mu \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \\ &\geqslant \frac{\overline{\mu} - \mu}{\overline{\mu}} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \;=\; \frac{\overline{\mu} - \mu}{\overline{\mu}} \|u\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $\mu < \overline{\mu}$ obtemos que

$$\sqrt{\frac{\overline{\mu}-\mu}{\overline{\mu}}}\ \|u\|_{H_0^1} \leqslant \|u\|_{H_\mu} \leqslant \|u\|_{H_0^1}.$$

Dessa forma, $\|\ \|_{H_\mu}$ é uma norma e é equivalente à $\|\ \|_{H_0^1}$.

$\square$

Definição 3.2 Usaremos a notação $H_\mu(\Omega)$ para o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma $\|\ \|_{H_\mu}$.

Definição 3.3 Dizemos que uma função $u \in H_\mu(\Omega)$ é **solução fraca** de (3.1) se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx - \mu \int_\Omega \frac{u\, v}{|x|^2}\, dx = \int_\Omega g(x,u)\, v\, dx + \int_\Omega |u|^{2^*-2}\, u\, v\, dx \quad \forall\, v \in H_\mu.$$

Definindo o funcional $J : H_\mu \to \mathbb{R}$ por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx - \int_\Omega G(x,u)\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}\, dx,$$

temos que $J \in C^1(H_\mu, \mathbb{R})$.

Além disso, como para todo $\varphi \in H_\mu$,

$$J'(u)(\varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx - \mu \int_\Omega \frac{u\,\varphi}{|x|^2}\, dx - \int_\Omega g(x,u)\,\varphi\, dx - \int_\Omega |u|^{2^*-2}\, u\,\varphi\, dx,$$

vemos que os pontos críticos do funcional J acima definido correspondem às soluções fracas do problema (3.1).

Para uso posterior, definimos também a constante

$$S_\mu = \inf_{u\, \in\, D^{1,2}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx - \mu \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2}\, dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}\,.$$

A seguir, enunciamos alguns resultados que envolvem autovalores e autofunções do operador $-\Delta - \mu/|x|^2$.

Proposição 3.1 *Se e_i, e_j são autofunções do operador $-\Delta - \dfrac{\mu}{|x|^2}$ referentes a autovalores distintos, então*

$$\|e_i\|_{H_\mu}^2 = \lambda_i\, \|e_i\|_{L^2}^2 \qquad e \qquad \big\langle e_i, e_j\big\rangle_{H_\mu} = \big\langle e_i, e_j\big\rangle_{L^2} = 0.$$

Demonstração: Formalmente,

$$-\Delta e_i - \frac{\mu\, e_i}{|x|^2} = \lambda_i\, e_i$$

e, assim,

$$\int_\Omega -\varphi\,\Delta e_i - \mu\,\frac{e_i\,\varphi}{|x|^2}\;dx = \int_\Omega \lambda_i\, e_i\,\varphi\; dx \quad \forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mas pelo Teorema da Divergência,

$$\int_\Omega -\varphi\,\Delta e_i\; dx = \int_\Omega \nabla\varphi\,\nabla e_i\; dx - \int_{\partial\Omega} \varphi\,\frac{\partial e_i}{\partial \eta}\; ds = \int_\Omega \nabla\varphi\,\nabla e_i\; dx,$$

pois $\varphi = 0$ em $\partial\Omega$. Logo,

$$\int_\Omega \nabla\varphi\,\nabla e_i - \mu\,\frac{e_i\,\varphi}{|x|^2}\;dx = \int_\Omega \lambda_i\, e_i\,\varphi\; dx \quad \forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

De fato, esta é a definição precisa de autofunção no sentido fraco.
Como $e_i \in H_0^1$, podemos utilizar $\varphi = e_i$ na igualdade acima e obter que

$$\|e_i\|_{H_\mu}^2 = \int_\Omega |\nabla e_i|^2 - \mu\,\frac{e_i^2}{|x|^2}\;dx = \int_\Omega \lambda_i\, e_i^2\; dx = \lambda_i\,\|e_i\|_{L^2}^2.$$

Além disso, utilizando $\varphi = e_j$ na igualdade anterior, temos que

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle_{H_\mu} = \int_\Omega \nabla e_i\,\nabla e_j - \mu\,\frac{e_i\, e_j}{|x|^2}\;dx = \lambda_i \int_\Omega e_i\, e_j\; dx = \lambda_i \left\langle e_i, e_j \right\rangle_{L^2}.$$

De forma análoga, obtemos também

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle_{H_\mu} = \lambda_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle_{L^2}.$$

Portanto,

$$(\lambda_i - \lambda_j)\left\langle e_i, e_j \right\rangle_{L^2} = 0.$$

Mas como $\lambda_i \neq \lambda_j$, concluímos que

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle_{L^2} = 0$$

e, assim,

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle_{H_\mu} = \left\langle e_i, e_j \right\rangle_{L^2} = 0.$$

□

Proposição 3.2 *O menor autovalor do operador* $-\Delta - \mu/|x|^2$ *é dado por*

$$\lambda_1 = \inf_{\{u \in H_\mu\,;\, u \neq 0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \mu \frac{u^2}{|x|^2}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2\, dx} \tag{3.15}$$

e, em particular, para todo $v \in H_\mu$ *temos* $\|v\|_{H_\mu}^2 \geqslant \lambda_1 \|v\|_{L^2}^2$.

Demonstração: Suponhamos que o ínfimo acima é atingido para alguma função $u_0 \in H_\mu$. Definindo o funcional $f : H_\mu \to \mathbb{R}$ por

$$f(v) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 - \mu \frac{v^2}{|x|^2}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega v^2\, dx},$$

temos que

$$f(u_0 + \varepsilon\varphi) \geqslant f(u_0) \quad \forall\, \varphi \in H_\mu$$

e então, para $\varepsilon > 0$,

$$\frac{f(u_0 + \varepsilon\varphi) - f(u_0)}{\varepsilon} \geqslant 0 \quad \forall\, \varphi \in H_\mu.$$

Assim,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(u_0 + \varepsilon\varphi) - f(u_0)}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0 + \varepsilon \nabla\varphi|^2 - \mu \frac{(u_0 + \varepsilon\,\varphi)^2}{|x|^2}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega (u_0 + \varepsilon\,\varphi)^2\, dx} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \mu \frac{u_0^2}{|x|^2}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega u_0^2\, dx} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\displaystyle\int_\Omega u_0^2\, dx \int_\Omega 2\,\varepsilon \nabla u_0 \nabla\varphi + \varepsilon^2\, |\nabla\varphi|^2 - 2\,\varepsilon\,\mu \frac{u_0\,\varphi}{|x|^2} - \mu\,\varepsilon^2 \frac{\varphi^2}{|x|^2}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega u_0^2\, dx \int_\Omega (u_0 + \varepsilon\,\varphi)^2\, dx}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \frac{\displaystyle\int_\Omega 2\,\varepsilon\, u_0\,\varphi + \varepsilon^2\,\varphi^2\, dx \int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \mu \frac{u_0^2}{|x|^2}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega u_0^2\, dx \int_\Omega (u_0 + \varepsilon\,\varphi)^2\, dx} =$$

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega u_0^2\, dx \int_\Omega 2\,\nabla u_0 \nabla\varphi - 2\,\mu \frac{u_0\,\varphi}{|x|^2}\, dx - \int_\Omega 2\,u_0\,\varphi\, dx \int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \mu \frac{u_0^2}{|x|^2}\, dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_0^2\, dx\right)^2} \geqslant 0.$$

Da mesma forma, obtemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{f(u_0 + \varepsilon\varphi) - f(u_0)}{\varepsilon} =$$

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega u_0^2\,dx \int_\Omega 2\,\nabla u_0 \nabla\varphi - 2\,\mu\,\frac{u_0\,\varphi}{|x|^2}\,dx - \int_\Omega 2\,u_0\,\varphi\,dx \int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \mu\,\frac{u_0^2}{|x|^2}\,dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_0^2\,dx\right)^2} \leqslant 0.$$

Portanto, concluímos que para todo $\varphi \in H_\mu$,

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega u_0^2\,dx \int_\Omega 2\,\nabla u_0 \nabla\varphi - 2\,\mu\,\frac{u_0\,\varphi}{|x|^2}\,dx - \int_\Omega 2\,u_0\,\varphi\,dx \int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \mu\,\frac{u_0^2}{|x|^2}\,dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_0^2\,dx\right)^2} = 0$$

e, então,

$$\int_\Omega u_0^2\,dx \int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi - \mu\,\frac{u_0\,\varphi}{|x|^2}\,dx = \int_\Omega u_0\,\varphi\,dx \int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \mu\,\frac{u_0^2}{|x|^2}\,dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi - \mu\,\frac{u_0\,\varphi}{|x|^2}\,dx = \int_\Omega u_0\,\varphi\,dx\,\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^2 - \mu\,\frac{u_0^2}{|x|^2}\,dx}{\displaystyle\int_\Omega u_0^2\,dx},$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi - \mu\,\frac{u_0\,\varphi}{|x|^2}\,dx = \lambda_1 \int_\Omega u_0\,\varphi\,dx \quad \forall\,\varphi \in H_\mu,$$

que é a formulação fraca de

$$-\Delta u_0 - \mu\,\frac{u_0}{|x|^2} = \lambda_1\,u_0.$$

Portanto, λ_1 é realmente um autovalor do operador $-\Delta - \mu/|x|^2$. Além disso, se λ é um outro autovalor, temos que

$$-\Delta u_\lambda - \mu\,\frac{u_\lambda}{|x|^2} = \lambda u_\lambda$$

para alguma $u_\lambda \neq 0 \in H_\mu$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda\,\nabla\varphi - \mu\,\frac{u_\lambda}{|x|^2}\,\varphi\,dx = \lambda \int_\Omega u_\lambda\,\varphi\,dx \quad \forall\,\varphi \in H_\mu.$$

Tomando $\varphi = u_\lambda$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 - \mu \frac{u_\lambda^2}{|x|^2}\, dx = \lambda \int_\Omega u_\lambda^2\, dx$$

e, dessa forma,

$$\lambda \;=\; \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 - \mu \frac{u_\lambda^2}{|x|^2}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega u_\lambda^2\, dx} \geqslant \lambda_1.$$

Portanto λ_1 é o menor autovalor.

Resta provar que o mínimo em (3.15) é atingido. Para isso, consideremos $\{u_k\} \subseteq H_\mu$ tal que $f(u_k) \to \lambda_1$ quando $k \to +\infty$, ou seja,

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_k|^2 - \mu \frac{u_k^2}{|x|^2}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega u_k^2\, dx} \longrightarrow \lambda_1,$$

isto é,

$$\int_\Omega \left|\nabla \frac{u_k}{\|u_k\|_{L^2}}\right|^2 - \frac{\mu}{|x|^2}\left(\frac{u_k}{\|u_k\|_{L^2}}\right)^2 dx \longrightarrow \lambda_1.$$

Definindo $v_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|_{L^2}}$, obtemos que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_k|^2 - \mu \frac{v_k^2}{|x|^2}\, dx \longrightarrow \lambda_1$, ou seja,

$$\|v_k\|_{H_\mu}^2 \to \lambda_1 \quad \text{e} \quad \|v_k\|_{L^2} = 1.$$

Assim, v_k é limitada em H_μ e podemos utilizar o Teorema 2.3 para obter $v_{k_l}, v \in H_\mu$ tais que

$$v_{k_l} \rightharpoonup v \quad \text{em } H_\mu.$$

Como v_{k_l} também é limitada e as normas em H_0^1 são equivalentes, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (com $p = 2$), obtemos $v_{k_{l_j}}, w \in H_\mu$ tais que

$$v_{k_{l_j}} \to w \quad \text{em } L^q,\ \forall\, q < 2^*.$$

Como $2 < 2^*$, renomeando $v_{k_{l_j}}$ por v_j obtemos

$$v_j \rightharpoonup v \quad \text{em } H_\mu,$$

$$v_j \to w \quad \text{em } L^2.$$

Desta forma,

$$l(v_j) \to l(v) \qquad \forall\, l \in {H_\mu}'$$

e como $H_\mu = H_0^1 \subseteq L^2$, segue que $H_\mu{}' \supseteq (L^2)'$. Logo $l(v_j) \to l(v)\ \forall\, l \in (L^2)'$ e, então,

$$v_j \rightharpoonup v \quad \text{em } L^2.$$

Como também $v_j \to w$ em L^2, temos que

$$v_j \rightharpoonup w \quad \text{em } L^2$$

e com isso, vemos que $w = v$. Portanto,

$$v_j \rightharpoonup v \quad \text{em } H_\mu,$$

$$v_j \to v \quad \text{em } L^2.$$

Além disso, como $\|v_j\|_{L^2} = 1$, também temos que $\|v\|_{L^2} = 1$.

Afirmamos agora que $v_j \to v$ em H_μ. De fato, como $\|v_j\|_{H_\mu}^2 \to \lambda_1$ e $v_j \rightharpoonup v$, obtemos que, para $j \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \|v_j - v\|_{H_\mu}^2 &= \|v_j\|_{H_\mu}^2 - 2\big\langle v_j, v\big\rangle_{H_\mu} + \|v\|_{H_\mu}^2 \\ &\to \lambda_1 - 2\big\langle v, v\big\rangle_{H_\mu} + \|v\|_{H_\mu}^2 \\ &= \lambda_1 - \|v\|_{H_\mu}^2 \leqslant 0, \end{aligned}$$

pois $\lambda_1 = \inf\limits_{\|u\|_{L^2}=1} \|u\|_{H_\mu}^2$.

Obtemos assim que $\|v_j - v\|_{H_\mu}^2 \to 0$ em H_μ e, dessa forma,

$$v_j \to v \quad \text{em } H_\mu.$$

Como $\|v_j\|_{H_\mu}^2 \to \lambda_1$, obtemos que $\|v\|_{H_\mu}^2 = \lambda_1$.

Portanto, existe $v \in H_\mu$ tal que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 - \mu\,\frac{v^2}{|x|^2}\,dx}{\displaystyle\int_\Omega v^2\,dx} = \lambda_1 = \inf_{u \in H_\mu} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \mu\,\frac{u^2}{|x|^2}\,dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2\,dx}.$$

Em particular, obtemos que $\|w\|_{H_\mu}^2 \geqslant \lambda_1\,\|w\|_{L^2}^2$ para todo $w \in H_\mu$.

$\square$

Lema 3.5 *Suponhamos que a hipótese* (3.2) *seja válida e consideremos uma seqüência* $\{u_m\} \subseteq H_\mu$ *limitada e tal que* $u_m \rightharpoonup 0$. *Então, quando* $m \to +\infty$,

$$\int_\Omega g(x, u_m)\,u_m\,dx \to 0.$$

Além disso,

$$\int_\Omega G(x, u_m)\,dx \to 0.$$

Demonstração: Como as normas $\| \, \|_{H_\mu}$ e $\| \, \|_{H_0^1}$ são equivalentes, podemos supor que existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u_m\|_{H_0^1} \leqslant k.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Pela hipótese (3.2), existe $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}$ tal que

$$|g(x, u_m)| \leqslant a_\varepsilon(x) + \varepsilon \, |u_m|^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega g(x, u_m) \, u_m \, dx \Big| &\leqslant \int_\Omega |g(x, u_m)| \, |u_m| \, dx \\ &\leqslant \int_\Omega \Big(a_\varepsilon(x) + \varepsilon \, |u_m|^{\frac{n+2}{n-2}} \Big) |u_m| \, dx \\ &= \int_\Omega a_\varepsilon(x) \, |u_m| + \varepsilon \, |u_m|^{2^*} \, dx \\ &= \int_\Omega a_\varepsilon(x) \, |u_m| \, dx + \varepsilon \, \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Utilizando a desigualdade de Sobolev com $p = 2$, temos que

$$\|u_m\|_{L^{2^*}} \leqslant C \, \|\nabla u_m\|_{L^2} = C \, \|u_m\|_{H_0^1} \leqslant C, \tag{3.17}$$

que, substituído em (3.16), nos dá

$$\Big| \int_\Omega g(x, u_m) \, u_m \, dx \Big| \leqslant \int_\Omega a_\varepsilon(x) \, |u_m| \, dx + C \, \varepsilon$$

e assim, para que tenhamos o resultado desejado, basta mostrar que

$$\int_\Omega a_\varepsilon(x) \, |u_m| \, dx \to 0.$$

Para isto, consideremos $l : H_0^1 \to \mathbb{R}$ dado por

$$l(u) = \int_\Omega a_\varepsilon(x) \, u \, dx.$$

Pela desigualdade de Hölder, com $p = \frac{2n}{n+2}$ e $q = 2^*$ e por (3.17), temos que

$$\big| l(u) \big| \leqslant \|a_\varepsilon\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \, \|u\|_{L^{2^*}} \leqslant C \, \|u\|_{H_0^1} \quad \forall \, u \in H_0^1,$$

ou seja, l está bem definido e é um funcional linear limitado. Portanto, se mostrarmos que

$$|u_m| \rightharpoonup 0 \tag{3.18}$$

teremos que $l(|u_m|) \to l(0) = 0$ e o resultado seguirá.

Para demonstrar (3.18), notemos inicialmente que $\|u_m\|_{H_0^1} = \||u_m|\|_{H_0^1}$ e assim, $|u_m|$ também é uma seqüência limitada. Pelo Teorema 2.3, existem então $u_{m_k},\ v \in H_0^1$ tais que

$$|u_{m_k}| \rightharpoonup v$$

e, como $u_m \rightharpoonup 0$, também temos que

$$u_{m_k} \rightharpoonup 0.$$

Renomeando u_{m_k} por u_k, obtemos

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \text{e} \quad |u_k| \rightharpoonup v.$$

Como u_k é limitada em H_0^1, podemos utilizar o Teorema de Rellich-Kondrachov com $p = 2$ e obter que existe u_{k_j} tal que

$$u_{k_j} \to w_1 \quad \text{em } L^q \ \forall\, q < 2^*$$

e da mesma forma, como $|u_{k_j}|$ também é limitada, existe $u_{k_{j_i}}$ tal que

$$|u_{k_{j_i}}| \to w_2 \quad \text{em } L^q \ \forall\, q < 2^*.$$

Novamente renomeando $u_{k_{j_i}}$ por u_i, obtemos que

$$u_i \to w_1 \quad \text{e} \quad |u_i| \to w_2 \quad \text{em } L^q \ \forall\, q < 2^*.$$

Como dado $\delta > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $i \geqslant i_0$,

$$\big\||u_i| - |w_1|\big\|_{L^q} \leqslant \|u_i - w_1\|_{L^q} < \delta,$$

vemos que $w_2 = |w_1|$. Desta forma, obtemos

$$\begin{array}{lll} u_i \rightharpoonup 0, & |u_i| \rightharpoonup v & \text{em } H_0^1, \\ u_i \to w_1, & |u_i| \to |w_1| & \text{em } L^q \ \forall\, q < 2^*. \end{array}$$

Como $u_i \rightharpoonup 0$ em H_0^1, temos que

$$f(u_i) \to f(0) \quad \forall\, f \in (H_0^1)'$$

e, como $H_0^1 \subseteq L^q$ para $q < 2^*$, segue que $(H_0^1)' \supseteq (L^q)'$ e, em particular,

$$f(u_i) \to f(0) \quad \forall\, f \in (L^q)' \ \ q < 2^*,$$

ou seja,

$$u_i \rightharpoonup 0 \quad \text{em } L^q \ \forall\, q < 2^*.$$

Além disso, como $u_i \to w_1$, também temos que

$$u_i \rightharpoonup w_1 \quad \text{em } L^q \ \ \forall\, q < 2^*.$$

Portanto, concluímos que $w_1 = 0$. Assim, obtemos

$$|u_i| \rightharpoonup v \quad \text{em } H_0^1,$$

$$|u_i| \to 0 \quad \text{em } L^q \ \ \forall\, q < 2^*.$$

De maneira análoga, temos que

$$f(|u_i|) \to f(v) \quad \forall\, f \in (L^q)' \ \ q < 2^*,$$

logo,

$$|u_i| \rightharpoonup v \quad \text{em } L^q \ \ \forall\, q < 2^*$$

e como $|u_i| \to 0$, segue que

$$|u_i| \rightharpoonup 0 \quad \text{em } L^q \ \ \forall\, q < 2^*.$$

Portanto, concluímos finalmente que

$$|u_i| \rightharpoonup 0,$$

mostrando que

$$\int_\Omega g(x, u_m)\, u_m \, dx \to 0.$$

Para provar que $\displaystyle\int_\Omega G(x, u_m)\, dx \to 0$ note que, dado $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |G(x,s)| &= \Big| \int_0^s g(x,t)\, dt \Big| \leqslant \int_0^s |g(x,t)|\, dt \\ &\leqslant \int_0^s a_\varepsilon(x) + \varepsilon\, t^{\frac{n+2}{n-2}}\, dt \leqslant a_\varepsilon(x)\, |s| + \varepsilon\, \frac{|s|^{2^*}}{2^*}, \end{aligned}$$

para algum $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}$. Logo,

$$\int_\Omega |G(x, u_m)|\, dx \leqslant \int_\Omega a_\varepsilon(x)|u_m| + \varepsilon\, C |u_m|^{2^*} dx,$$

onde o lado direito da última desigualdade é o mesmo que em (3.16). Portanto, repetindo o mesmo raciocínio, podemos estimar este termo e concluir o Lema.

$\square$

Capítulo 4

Estimativas Assintóticas

Fixemos $k \in \mathbb{N}$ e para cada $i \in \mathbb{N}$ denotemos por e_i a autofunção normalizada em L^2, relativa ao autovalor $\lambda_i \in \sigma_\mu$.

Sejam H^- o espaço gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$, $H^+ := (H^-)^\perp$ e seja $P_k : H_\mu \to H^-$ o operador projeção ortogonal.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$ grande o bastante para que $B_{1/m} \subseteq \Omega$. Suponhamos também que no caso da hipótese (3.7), m é grande o suficiente para que $B_{1/m} \subseteq \Omega_0$, onde as propriedades sobre Ω_0 foram definidas no capítulo 3.

Consideremos as funções $\xi_m : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\xi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x \in B_{1/m} \\ m|x| - 1 & \text{se } \ x \in A_m = B_{2/m} \backslash B_{1/m} \\ 1 & \text{se } \ x \in \Omega \backslash B_{2/m} \end{cases}$$

e então definimos as autofunções aproximadas

$$e_i^m := \xi_m e_i$$

e o espaço

$$H_m^- := span\{e_i^m\,;\, i = 1, \dots, k\}.$$

Provaremos que as funções e_i^m convergem para as autofunções e_i e estimaremos o erro aproximado.

Lema 4.1 *Para $m \to +\infty$ temos que*

$$e_i^m \to e_i \qquad em\ H_\mu \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

(i) se $H_m^- = span\{e_i^m\,;\, i = 1, \dots, k\}$, temos que

$$\max_{\{u \in H_m^-\,;\, \|u\|_{L^2} = 1\}} \|u\|_{H_\mu}^2 \leqslant \lambda_k + o(1),$$

(ii) se $\Omega = B$ é a bola unitária e $H_m^- = span\{e_1^m\}$, temos que

$$\max_{\{u\in H_m^-\,;\,\|u\|_{L^2}=1\}} \|u\|_{H_\mu}^2 \leqslant \lambda_1 + Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}.$$

Demonstração: Para mostrar a convergência em H_μ basta mostrar a convergência em H_0^1, pois as normas são equivalentes. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla(e_i^m - e_i)\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |\nabla(e_i^m - e_i)|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla e_i^m - \nabla e_i|^2\,dx \\
&= \int_\Omega |\nabla(\xi_m e_i) - \nabla e_i|^2\,dx = \int_\Omega |\xi_m \nabla e_i + e_i \nabla \xi_m - \nabla e_i|^2\,dx \\
&= \int_\Omega |e_i \nabla \xi_m + (\xi_m - 1)\nabla e_i|^2\,dx \\
&= \int_{B_{1/m}} |\nabla e_i|^2\,dx + \int_{A_m} |e_i \nabla \xi_m + (\xi_m - 1)\nabla e_i|^2\,dx \\
&= \int_{B_{1/m}} |\nabla e_i|^2\,dx + \int_{A_m} |e_i|^2\,|\nabla \xi_m|^2\,dx \\
&+ 2\int_{A_m} e_i(\xi_m - 1)\nabla \xi_m \nabla e_i\,dx + \int_{A_m} (\xi_m - 1)^2\,|\nabla e_i|^2\,dx \\
&= \int_{A_m} |\nabla \xi_m|^2\,|e_i|^2\,dx + 2\int_{A_m} e_i\,(\xi_m - 1)\nabla \xi_m \nabla e_i\,dx \\
&+ \int_{B_{2/m}} (\xi_m - 1)^2\,|\nabla e_i|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Primeiro vamos mostrar que $\displaystyle\int_{A_m} |\nabla \xi_m|^2\,|e_i|^2\,dx \to 0.$

De fato, como em A_m temos $|\nabla \xi_m| = m$, pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}
\int_{A_m} |\nabla \xi_m|^2\,|e_i|^2\,dx &= \int_{A_m} m^2 |e_i|^2\,dx \;<\; m^2 \int_{B_{2/m}} |e_i|^2\,dx \\
&\leqslant m^2 \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \left(\int_{B_{2/m}} dx \right)^{2/n} \\
&= m^2 \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{2^*}\,dx \right)^{2/2^*} \left[C \left(\frac{2}{m} \right)^n \right]^{2/n} \\
&= C \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $m \to +\infty$, pela integrabilidade da função.

Da mesma forma, mostraremos que $\displaystyle\int_{A_m} e_i(\xi_m - 1)\nabla \xi_m \nabla e_i\,dx \to 0.$

De fato, como em A_m temos $|\nabla \xi_m| = m$ e $|\xi_m(x) - 1| \leqslant 1$, pela desigualdade de Hölder segue que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{A_m} e_i(\xi_m - 1)\nabla \xi_m \nabla e_i \, dx \right| &\leqslant \int_{A_m} |e_i| \, |\xi_m - 1| \, |\nabla \xi_m| \, |\nabla e_i| \, dx \\
&\leqslant m \int_{A_m} |e_i| \, |\nabla e_i| \, dx \\
&\leqslant m \left(\int_{A_m} |e_i|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \left(\int_{A_m} |\nabla e_i|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{A_m} dx \right)^{1/n} \\
&\leqslant m \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \left(\int_{B_{2/m}} |\nabla e_i|^2 \, dx \right)^{1/2} \left[C \left(\frac{2}{m} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\
&\leqslant C \left(\int_{B_{2/m}} |e_i|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \left(\int_{B_{2/m}} |\nabla e_i|^2 \, dx \right)^{1/2} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

quando $m \to +\infty$, pela integrabilidade da função.

Finalmente, vamos mostrar que $\displaystyle\int_{B_{2/m}} (\xi_m - 1)^2 \, |\nabla e_i|^2 \, dx \to 0$.

De fato, como $(\xi_m - 1)^2 \leqslant 1$, para $m \to +\infty$ temos

$$
\int_{B_{2/m}} (\xi_m - 1)^2 \, |\nabla e_i|^2 \, dx \leqslant \int_{B_{2/m}} |\nabla e_i|^2 \, dx \longrightarrow 0.
$$

Portanto, concluímos que

$$
\|e_i^m - e_i\|_{H_0^1}^2 = \|\nabla(e_i^m - e_i)\|_{L^2}^2 \to 0
$$

e a primeira parte do Lema está provada.

Para provar (i), consideremos

$$
\widetilde{e_i^m} = \frac{e_i^m}{\|e_i^m\|_{L^2}}.
$$

Como $e_i^m \to e_i$ em H_μ, temos que $\|e_i^m\|_{L^2} \to \|e_i\|_{L^2} = 1$ e assim podemos provar que $\widetilde{e_i^m} \to e_i$ em H_μ.

De fato, para $m \to +\infty$, temos

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{e_i^m} - e_i\|_{H_\mu} &= \left\| \frac{e_i^m}{\|e_i^m\|_{L^2}} - \frac{e_i}{\|e_i^m\|_{L^2}} + \frac{e_i}{\|e_i^m\|_{L^2}} - e_i \right\|_{H_\mu} \\
&\leqslant \left\| \frac{e_i^m - e_i}{\|e_i^m\|_{L^2}} \right\|_{H_\mu} + \left\| \left(\frac{1}{\|e_i^m\|_{L^2}} - 1 \right) e_i \right\|_{H_\mu} \\
&= \frac{1}{\|e_i^m\|_{L^2}} \|e_i^m - e_i\|_{H_\mu} + \left(\frac{1}{\|e_i^m\|_{L^2}} - 1 \right) \|e_i\|_{H_\mu} \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Daí, segue que $\|\widetilde{e_i^m}\|^2_{H_\mu} \to \|e_i\|^2_{H_\mu}$ e, portanto,

$$\|\widetilde{e_i^m}\|^2_{H_\mu} = \|e_i\|^2_{H_\mu} + o(1). \tag{4.1}$$

Agora, seja $u_m \in H_m^- \cap \partial B$ (onde $\partial B = \{u \in L^2(\Omega)\,;\, \|u\|_{L^2} = 1\}$) tal que

$$\max_{H_m^- \cap \partial B} \|u\|^2_{H_\mu} = \|u_m\|^2_{H_\mu}.$$

Como $u_m \in H_m^-$, existem constantes $\alpha_1^m, \dots, \alpha_k^m$ tais que $u_m = \displaystyle\sum_{i=1}^k \alpha_i^m \, \widetilde{e_i^m}$.

Assim, como $\|\widetilde{e_i^m}\|_{L^2} = 1$, temos que

$$\begin{aligned} 1 = \|u_m\|^2_{L^2} &= \left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i^m \, \widetilde{e_i^m} \,,\, \sum_{i=1}^k \alpha_i^m \, \widetilde{e_i^m} \right\rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i^m)^2 \, \|\widetilde{e_i^m}\|^2_{L^2} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \alpha_i^m \, \alpha_j^m \, \langle \widetilde{e_i^m}, \, \widetilde{e_j^m} \rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i^m)^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \alpha_i^m \, \alpha_j^m \, \langle \widetilde{e_i^m}, \, \widetilde{e_j^m} \rangle_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Além disso, para $m \to +\infty$, temos

$$\begin{aligned} \left| \langle \widetilde{e_i^m}, \, \widetilde{e_j^m} \rangle_{L^2} - \langle e_i, e_j \rangle_{L^2} \right| &= \left| \langle \widetilde{e_i^m}, \widetilde{e_j^m} \rangle_{L^2} - \langle \widetilde{e_i^m}, e_j \rangle_{L^2} + \langle \widetilde{e_i^m}, e_j \rangle_{L^2} - \langle e_i, e_j \rangle_{L^2} \right| \\ &= \left| \langle \widetilde{e_i^m}, \, \widetilde{e_j^m} - e_j \rangle_{L^2} + \langle \widetilde{e_i^m} - e_i, \, e_j \rangle_{L^2} \right| \\ &\leqslant \left| \langle \widetilde{e_i^m}, \, \widetilde{e_j^m} - e_j \rangle_{L^2} \right| + \left| \langle \widetilde{e_i^m} - e_i, \, e_j \rangle_{L^2} \right| \\ &\leqslant \|\widetilde{e_i^m}\|_{L^2} \, \|\widetilde{e_j^m} - e_j\|_{L^2} + \|\widetilde{e_i^m} - e_i\|_{L^2} \, \|e_j\|_{L^2} \\ &= \|\widetilde{e_j^m} - e_j\|_{L^2} + \|\widetilde{e_i^m} - e_i\|_{L^2} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \widetilde{e_i^m}, \, \widetilde{e_j^m} \rangle_{L^2} \longrightarrow \langle e_i, e_j \rangle_{L^2}.$$

Mas pela Proposição 3.1, temos que $\langle e_i, e_j \rangle_{L^2} = 0$ e assim

$$\langle \widetilde{e_i^m}, \, \widetilde{e_j^m} \rangle_{L^2} = o(1) \quad \text{quando } m \to +\infty.$$

Portanto, por (4.2), temos que

$$1 = \|u_m\|^2_{L^2} = \sum_{i=1}^k (\alpha_i^m)^2 + o(1). \tag{4.3}$$

Da mesma forma, obtemos que

$$\langle \widetilde{e_i^m}, \, \widetilde{e_j^m} \rangle_{H_\mu} \longrightarrow \langle e_i, e_j \rangle_{H_\mu}$$

e, pela Proposição 3.1, temos que $\left\langle e_i, e_j \right\rangle_{H_\mu} = \lambda_i \left\langle e_i, e_j \right\rangle_{L^2} = 0$, logo

$$\left\langle \widetilde{e_i^m}, \widetilde{e_j^m} \right\rangle_{H_\mu} = o(1) \quad \text{quando } m \to +\infty. \tag{4.4}$$

Usando (4.1) e (4.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{H_\mu}^2 &= \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \, \|\widetilde{e_i^m}\|_{H_\mu}^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \alpha_i^m \, \alpha_j^m \left\langle \widetilde{e_i^m}, \widetilde{e_j^m} \right\rangle_{H_\mu} \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \, \|\widetilde{e_i^m}\|_{H_\mu}^2 + o(1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \Big(\|e_i\|_{H_\mu}^2 + o(1) \Big) + o(1).
\end{aligned}$$

Por (4.3), vemos que $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2$ é limitado, logo

$$\|u_m\|_{H_\mu}^2 = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \, \|e_i\|_{H_\mu}^2 + o(1).$$

Como $\|e_i\|_{H_\mu}^2 = \lambda_i \, \|e_i\|_{L^2}^2 = \lambda_i$ e λ_k é o maior autovalor, utilizando (4.3) obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{H_\mu}^2 &= \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 \, \lambda_i + o(1) \\
&\leqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^m)^2 + o(1) = \lambda_k + o(1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\max_{H_m^- \cap \partial B} \|u\|_{H_\mu}^2 = \|u_m\|_{H_\mu}^2 \leqslant \lambda_k + o(1)$$

e o item (i) está provado.

No caso (ii), como $\mu \geqslant 0$, pelos Teoremas 2.2 e 2.7 em [1], obtemos que a primeira autofunção e_1 é radialmente simétrica, isto é, $e_1 = e_1(r)$ onde $r = |x|$. Além disso, temos que

$$-\Delta e_1 - \mu \, \frac{e_1}{|x|^2} = \lambda_1 e_1,$$

equação que, em coordenadas polares, transforma-se em

$$-\frac{\partial^2 e_1}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\partial e_1}{\partial r} - \mu \, \frac{e_1}{r^2} = \lambda_1 e_1,$$

isto é,

$$e_1'' + \frac{n-1}{r} \, e_1' + \Big(\frac{\mu}{r^2} + \lambda_1 \Big) e_1 = 0, \tag{4.5}$$

cuja solução, pelo Método de Frobenius, é da forma $e_1(r) = \sum a_n\, r^{n+\alpha}$ e, próximo da origem, é tal que

$$e_1(r) \approx r^{\alpha}.$$

Assim, substituindo em (4.5), obtemos

$$\alpha(\alpha-1)\, r^{\alpha-2} + (n-1)\,\alpha\,\frac{r^{\alpha-1}}{r} + \frac{\mu}{r^2}\, r^{\alpha} + \lambda_1\, r^{\alpha} = 0,$$

logo,

$$\big(\alpha^2 + (n-2)\,\alpha + \mu\big)\, r^{\alpha-2} + \lambda_1\, r^{\alpha} = 0$$

e, então,

$$\alpha^2 + (n-2)\,\alpha + \mu = 0,$$

ou seja,

$$\alpha = 1 - \frac{n}{2} + \sqrt{\overline{\mu} - \mu}.$$

Portanto, quando $r \to 0$, temos o seguinte comportamento assintótico:

$$e_1(r) \approx r^{1-\frac{n}{2}+\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} \qquad \text{e} \qquad e_1'(r) \approx r^{-\frac{n}{2}+\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}. \tag{4.6}$$

Utilizando estas estimativas é possível determinar o raio de convergência de e_1^m quando $m \to +\infty$.

Como $\nabla e_1^m = \begin{cases} 0 & \text{em } B_{1/m} \\ (m|x|-1)\nabla e_1 + m e_1 \nabla|x| & \text{em } A_m \\ \nabla e_1 & \text{em } \Omega \backslash B_{2/m} \end{cases}$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\|e_1^m\|_{H_\mu}^2 - \|e_1\|_{H_\mu}^2 &= \int_\Omega \big|\nabla e_1^m\big|^2 dx - \mu\int_\Omega \frac{(e_1^m)^2}{|x|^2}\, dx - \int_\Omega \big|\nabla e_1\big|^2 dx + \mu\int_\Omega \frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx \\
&= \int_{A_m} \big|m e_1 \nabla|x| + (m|x|-1)\nabla e_1\big|^2 dx + \int_{\Omega\backslash B_{2/m}} \big|\nabla e_1\big|^2\, dx \\
&- \mu\int_{A_m} \frac{(m|x|-1)^2}{|x|^2}\, e_1^2\, dx - \mu\int_{\Omega\backslash B_{2/m}} \frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx \\
&- \int_\Omega \big|\nabla e_1\big|^2\, dx + \mu\int_\Omega \frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx \\
&= \int_{A_m} \big|m e_1 \nabla|x| + (m|x|-1)\nabla e_1\big|^2 - \big|\nabla e_1\big|^2 dx \\
&- \int_{B_{1/m}} \big|\nabla e_1\big|^2 dx - \mu\int_{A_m} \frac{m^2|x|^2 - 2m|x|}{|x|^2}\, e_1^2\, dx + \mu\int_{B_{1/m}} \frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular e como $\big|\nabla|x|\big| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\big|m e_1 \nabla|x| + (m|x|-1)\nabla e_1\big|^2 - \big|\nabla e_1\big|^2 &\leqslant m^2 e_1^2 + 2m e_1 (m|x|-1)\big|\nabla e_1\big| \\
&+ (m^2|x|^2 - 2m|x|)\big|\nabla e_1\big|^2
\end{aligned}$$

e, assim,

$$
\begin{aligned}
\|e_1^m\|_{H_\mu}^2-\|e_1\|_{H_\mu}^2 \leqslant & \int_{A_m} m^2e_1^2+2me_1(m|x|-1)\big|\nabla e_1\big|+(m^2|x|^2-2m|x|)\big|\nabla e_1\big|^2 dx\\
& -\int_{B_{1/m}}\big|\nabla e_1\big|^2\, dx-\mu\int_{A_m}\left(m^2-\frac{2m}{|x|}\right)e_1^2\, dx+\mu\int_{B_{1/m}}\frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx\\
& =\int_{A_m}\left(m^2+\frac{2m\mu}{|x|}\right)e_1^2\, dx+\int_{A_m}2m(m|x|-1)e_1\big|\nabla e_1\big|\, dx\\
& +\int_{A_m}(m^2|x|^2-2m|x|)\big|\nabla e_1\big|^2\, dx-\int_{B_{1/m}}\big|\nabla e_1\big|^2\, dx\\
& -\mu\int_{A_m}m^2e_1^2\, dx+\mu\int_{B_{1/m}}\frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx\\
& \leqslant\int_{A_m}\left(m^2+\frac{2m\mu}{|x|}\right)e_1^2\, dx+\int_{A_m}2m(m|x|-1)e_1\big|\nabla e_1\big|\, dx\\
& +\int_{A_m}(m^2|x|^2-2m|x|)\big|\nabla e_1\big|^2\, dx+\mu\int_{B_{1/m}}\frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx.
\end{aligned}
$$

Mas em A_m temos

$$m^2+\frac{2m\mu}{|x|}\leqslant(1+2\mu)m^2=Cm^2,$$

$$2m(m|x|-1)\leqslant 2m=Cm$$

e

$$m^2|x|^2-2m|x|\leqslant 0,$$

logo, utilizando (4.6) e a fórmula da integral para funções radias, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|e_1^m\|_{H_\mu}^2-\|e_1\|_{H_\mu}^2 & \leqslant Cm^2\int_{A_m}e_1^2\, dx+Cm\int_{A_m}e_1\big|\nabla e_1\big|\, dx+\mu\int_{B_{1/m}}\frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx\\
& \leqslant Cm^2\int_{B_{2/m}}e_1^2\, dx+Cm\int_{B_{2/m}}e_1\big|\nabla e_1\big|\, dx+\mu\int_{B_{1/m}}\frac{e_1^2}{|x|^2}\, dx\\
& \leqslant \ Cm^2\int_0^{2/m}r^{1+2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}\, dr+Cm\int_0^{2/m}r^{2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}\, dr\\
& + \ C\int_0^{1/m}r^{-1+2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}\, dr\\
& \leqslant \ Cm^2\left(\frac{2}{m}\right)^{2+2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}+Cm\left(\frac{2}{m}\right)^{1+2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}+C\left(\frac{1}{m}\right)^{2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}\\
& = \ Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}+Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}+Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}\\
& = \ Cm^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos que

$$\|e_1^m\|_{H_\mu}^2 \leqslant \|e_1\|_{H_\mu}^2 + Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} = \lambda_1 + Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}. \tag{4.7}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\|e_1^m\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega (\xi_m e_1)^2\, dx = \int_\Omega e_1^2\, dx - \int_\Omega (1-\xi_m^2)\, e_1^2\, dx \\
&= \|e_1\|_{L^2}^2 - \int_\Omega (1-\xi_m^2)\, e_1^2\, dx = 1 - \int_\Omega (1-\xi_m^2)\, e_1^2\, dx \\
&= 1 - \int_{B_{1/m}} e_1^2\, dx - \int_{A_m} (1-\xi_m^2)\, e_1^2\, dx \\
&\geqslant 1 - \int_{B_{1/m}} e_1^2\, dx \;\geqslant\; 1 - \int_{B_{2/m}} e_1^2\, dx \\
&\geqslant 1 - C\int_0^{2/m} r^{1+2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\, dr \\
&= 1 - C\left(\frac{2}{m}\right)^{2+2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} \\
&= 1 - Cm^{-2-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Assim, como $H_m^- = span\{e_1^m\}$, vemos que

$$\max_{u\,\in\, H_m^-\cap\,\partial B} \|u\|_{H_\mu}^2 = \left\| \frac{e_1^m}{\|e_1^m\|_{L^2}} \right\|_{H_\mu} = \frac{\|e_1^m\|_{H_\mu}}{\|e_1^m\|_{L^2}}$$

e utilizando as estimativas (4.7), (4.8) e o fato que $\frac{1}{1-x} \leqslant 1 + kx$ para x suficientemente pequeno e onde k é constante, obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}
\max_{u\,\in\, H_m^-\cap\,\partial B} \|u\|_{H_\mu}^2 &\leqslant \frac{\lambda_1 + Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}}{1 - Cm^{-2-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}} \\
&\leqslant \big(\lambda_1 + Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\big)\big(1 + kCm^{-2-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\big) \\
&= \lambda_1 + Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} + Cm^{-2-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} + Cm^{-2-4\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} \\
&\leqslant \lambda_1 + Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}.
\end{aligned}$$

□

Agora, para $\varepsilon > 0$ consideremos a família de funções

$$u_\varepsilon^*(x) = \frac{C_\varepsilon}{\big[\varepsilon^2|x|^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\big]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}, \tag{4.9}$$

onde $C_\varepsilon = \left(\dfrac{4\varepsilon^2 n(\overline{\mu}-\mu)}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{4}}, \quad \gamma = \sqrt{\overline{\mu}} + \sqrt{\overline{\mu}-\mu}, \quad \gamma' = \sqrt{\overline{\mu}} - \sqrt{\overline{\mu}-\mu}.$

Para cada $\varepsilon > 0$, de acordo com [13], as funções u_ε^* são soluções da equação

$$-\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = |u|^{2^*-2}u \qquad \text{em } \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

e por isso satisfazem

$$\|u_\varepsilon^*\|_{H_\mu}^2 = \|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^{2^*}.$$

Além disso, considerando o elemento v que minimiza S_μ, temos que

$$-\Delta v - \mu \frac{v}{|x|^2} = S_\mu \, |v|^{2^*-2}v$$

e tomando $u = S_\mu^{1/(2^*-2)} v$ e substituindo na igualdade acima, obtemos

$$-\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = |u|^{2^*-2}u.$$

Assim, devemos ter que $u = u_\varepsilon^*$ e então

$$v = S_\mu^{-1/(2^*-2)} u_\varepsilon^*,$$

logo,

$$S_\mu = \frac{\|v\|_{H_\mu}^2}{\|v\|_{L^{2^*}}^2} = \frac{\|u_\varepsilon^*\|_{H_\mu}^2}{\|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^2} = \frac{\|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^{2^*}}{\|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^2} = \|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^{2^*-2}$$

e, portanto,

$$\|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^{2^*} = S_\mu^{2^*/(2^*-2)} = S_\mu^{n/2}.$$

Desta forma, obtemos que

$$\|u_\varepsilon^*\|_{H_\mu}^2 = \|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^{2^*} = S_\mu^{n/2}. \tag{4.10}$$

Como u_ε^* é uma função radial, podemos vê-la como uma função definida em $\mathbb{R}^+$ e então denotaremos $u_\varepsilon^*(|x|) = u_\varepsilon^*(x)$.

Para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, considerando as funções corte

$$u_\varepsilon^m(x) = \begin{cases} u_\varepsilon^*(x) - \dfrac{C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2 \left(\dfrac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + \left(\dfrac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{\sqrt{\mu}}} & \text{se } x \in B_{1/m} \backslash \{0\} \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash B_{1/m}, \end{cases}$$

temos as seguintes estimativas:

Lema 4.2 *Existem constantes C_1, C_2, $K > 0$ tais que se $\varepsilon^{n-2} m^{2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} < K$, então*

$$\|u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 \leqslant S_\mu^{n/2} + C_1 \, \varepsilon^{n-2} \, m^{2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}},$$

$$\|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geqslant S_\mu^{n/2} - C_2 \, \varepsilon^n \, m^{\frac{2n}{n-2}\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}.$$

Demonstração: Denotaremos todas as constantes positivas por C.

Notemos inicialmente que $\nabla u_\varepsilon^m = \begin{cases} \nabla u_\varepsilon^* & \text{em } B_{1/m}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{em } \Omega\backslash B_{1/m}. \end{cases}$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^m|^2\, dx &= \int_{B_{1/m}} |\nabla u_\varepsilon^m|^2\, dx + \int_{\Omega\backslash B_{1/m}} |\nabla u_\varepsilon^m|^2\, dx \\ &= \int_{B_{1/m}} |\nabla u_\varepsilon^*|^2\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon^*|^2\, dx. \qquad (4.11) \end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{(u_\varepsilon^m)^2}{|x|^2}\, dx &= \int_{B_{1/m}} \frac{(u_\varepsilon^m)^2}{|x|^2}\, dx + \int_{\Omega\backslash B_{1/m}} \frac{(u_\varepsilon^m)^2}{|x|^2}\, dx = \int_{B_{1/m}} \frac{(u_\varepsilon^m)^2}{|x|^2}\, dx \\ &= \int_{B_{1/m}} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\, dx + \int_{B_{1/m}} \frac{C_\varepsilon^2}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{2\sqrt{\mu}}} \frac{1}{|x|^2}\, dx \\ &- 2\int_{B_{1/m}} \frac{C_\varepsilon u_\varepsilon^*}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{\sqrt{\mu}}} \frac{1}{|x|^2}\, dx \\ &\geqslant \int_{B_{1/m}} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\, dx - 2\int_{B_{1/m}} \frac{C_\varepsilon u_\varepsilon^*}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{\sqrt{\mu}}} \frac{1}{|x|^2}\, dx, \end{aligned}$$

mas, pela fórmula da integral para funções radiais,

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/m}} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\, dx - \int_{\mathbb{R}^n\backslash B_{1/m}} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\, dx \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\, dx - C\int_{1/m}^\infty \frac{u_\varepsilon^*(r)^2}{|r|^2}\, r^{n-1}\, dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\, dx - C\int_{1/m}^\infty \frac{C_\varepsilon^2\, r^{n-3}}{\left[\varepsilon^2 r^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + r^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{2\sqrt{\mu}}}\, dr \qquad (4.12) \end{aligned}$$

e como $\varepsilon^2\, r^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + r^{\gamma/\sqrt{\mu}} \geqslant r^{\gamma/\sqrt{\mu}}$ e $C_\varepsilon^2 = C\varepsilon^{2\sqrt{\mu}}$, temos que

$$\begin{aligned} C\int_{1/m}^\infty \frac{C_\varepsilon^2\, r^{n-3}}{\left[\varepsilon^2\, r^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + r^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{2\sqrt{\mu}}}\, dr &\leqslant C\,\varepsilon^{2\sqrt{\mu}} \int_{1/m}^\infty \frac{r^{n-3}}{\left[r^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{2\sqrt{\mu}}}\, dr \\ &= C\,\varepsilon^{2\sqrt{\mu}} \int_{1/m}^\infty r^{n-3-2\gamma}\, dr \\ &= C\,\varepsilon^{2\sqrt{\mu}} \int_{1/m}^\infty r^{-1-2\sqrt{\mu-\mu}}\, dr \\ &= C\,\varepsilon^{2\sqrt{\mu}}\, m^{2\sqrt{\mu-\mu}} \end{aligned}$$

e assim, substituindo em (4.12), obtemos

$$\int_{B_{1/m}} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\,dx \;\geqslant\; \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\,dx - C\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\,m^{2\sqrt{\bar\mu-\mu}}. \tag{4.13}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\frac{1}{m}}} \frac{C_\varepsilon\,u_\varepsilon^*}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right]^{\sqrt{\bar\mu}}|x|^2}\,dx &\leqslant C\int_0^{1/m} \frac{C_\varepsilon\,u_\varepsilon^*(r)\,r^{n-1}}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right]^{\sqrt{\bar\mu}}r^2}\,dr \\
&= C\int_0^{1/m} \frac{C_\varepsilon^2\,r^{n-3}}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right]^{\sqrt{\bar\mu}}\left[\varepsilon^2 r^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + r^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right]^{\sqrt{\bar\mu}}}\,dr \\
&\leqslant C\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\int_0^{1/m} \frac{r^{n-3}}{\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right]^{\sqrt{\bar\mu}}\left[r^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right]^{\sqrt{\bar\mu}}}\,dr \\
&= C\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\left(\frac{1}{m}\right)^{-\gamma}\int_0^{1/m} r^{n-3-\gamma}\,dr \\
&= C\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\left(\frac{1}{m}\right)^{n-2-2\gamma} \\
&= C\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\,m^{2\sqrt{\bar\mu-\mu}}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Portanto, substituindo (4.13) e (4.14), segue que

$$\int_\Omega \frac{(u_\varepsilon^m)^2}{|x|^2}\,dx \;\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\,dx - C\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\,m^{2\sqrt{\bar\mu-\mu}} \tag{4.15}$$

e por (4.10), (4.11) e (4.15), finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 &= \int_\Omega \left|\nabla u_\varepsilon^m\right|^2 dx - \mu\int_\Omega \frac{(u_\varepsilon^m)^2}{|x|^2}\,dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla u_\varepsilon^*\right|^2 dx - \mu\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_\varepsilon^*)^2}{|x|^2}\,dx + \mu\,C\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\,m^{2\sqrt{\bar\mu-\mu}} \\
&= \|u_\varepsilon^*\|_{H_\mu}^2 + C_1\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\,m^{2\sqrt{\bar\mu-\mu}} \\
&= S_\mu^{n/2} + C_1\,\varepsilon^{2\sqrt{\bar\mu}}\,m^{2\sqrt{\bar\mu-\mu}}.
\end{aligned}$$

Para provar a estimativa restante, notemos que

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} &= \int_\Omega (u_\varepsilon^m)^{2^*}dx = \int_{B_{1/m}} |u_\varepsilon^m|^{2^*}dx \\
&\geqslant \int_{B_{1/m}} |u_\varepsilon^*|^{2^*}dx - 2^*\int_{B_{1/m}} \frac{|u_\varepsilon^*|^{2^*-1}\,C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right]^{\sqrt{\bar\mu}}}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon^*|^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{1/m}} |u_\varepsilon^*|^{2^*}dx \\
&\quad - 2^*\int_{B_{1/m}} \frac{|u_\varepsilon^*|^{2^*-1}\,C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\bar\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\bar\mu}}\right]^{\sqrt{\bar\mu}}}\,dx,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

mas, pela fórmula da integral para funções radias e como $C_\varepsilon^{2^*} = C\varepsilon^n$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{1/m}} |u_\varepsilon^*(x)|^{2^*} dx &= C\int_{1/m}^{\infty} |u_\varepsilon^*(r)|^{2^*} r^{n-1}\,dr \\
&= C\int_{1/m}^{\infty} \frac{C_\varepsilon^{2^*}}{\left[\varepsilon^2 r^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + r^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{2^*\sqrt{\mu}}}\, r^{n-1}\,dr \\
&\leqslant C\int_{1/m}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{\left[r^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{2^*\sqrt{\mu}}}\, r^{n-1}\,dr \\
&= C\,\varepsilon^n \int_{1/m}^{\infty} r^{n-1-2^*\gamma}\,dr \\
&= C\,\varepsilon^n\, r^{-2^*\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}\Big|_{1/m}^{\infty} \\
&= C\,\varepsilon^n\, m^{2^*\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

e ainda,

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_{1/m}} \frac{|u_\varepsilon^*|^{2^*-1}\,C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{\sqrt{\mu}}}\,dx \\
&= C\int_{B_{1/m}} \frac{C_\varepsilon^{2^*-1}\,C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2|x|^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{(2^*-1)\sqrt{\mu}}\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{\sqrt{\mu}}}\,dx \\
&\leqslant C\int_0^{1/m} \frac{C_\varepsilon^{2^*}}{\left[\varepsilon^2\, r^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + r^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{(2^*-1)\sqrt{\mu}}\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + \left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{\sqrt{\mu}}}\, r^{n-1}\,dr \\
&\leqslant C\int_0^{1/m} \frac{\varepsilon^n}{\left[r^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{(2^*-1)\sqrt{\mu}}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\mu}}\right]^{\sqrt{\mu}}}\, r^{n-1}\,dr \\
&= C\,\varepsilon^n\int_0^{1/m} \frac{r^{n-1}}{r^{(2^*-1)\gamma}\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma}}\,dr \\
&= C\,\varepsilon^n\left(\frac{1}{m}\right)^{-\gamma}\int_0^{1/m} r^{n-1-(2^*-1)\gamma}\,dr \\
&= C\,\varepsilon^n\left(\frac{1}{m}\right)^{-\gamma} r^{n-(2^*-1)\gamma}\Big|_0^{1/m} \\
&= C\,\varepsilon^n\left(\frac{1}{m}\right)^{n-2^*\gamma} = C\,\varepsilon^n\, m^{2^*\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo (4.17) e (4.18) em (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon^*|^{2^*} dx - (C + 2^* C)\, \varepsilon^n\, m^{\frac{2n}{n-2}\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \\
&= \|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^{2^*} - C_2\, \varepsilon^n\, m^{\frac{2n}{n-2}\sqrt{\bar{\mu}-\mu}} \\
&= S_\mu^{n/2} - C_2\, \varepsilon^n\, m^{\frac{2n}{n-2}\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.1 *Temos que*

$$\|v\|_{H_\mu}^2 \geqslant \lambda_{k+1} \|v\|_{L^2}^2 \quad \forall\, v \in H^+.$$

Demonstração: Para $v \in H^+$ temos que $v = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i\, e_i$ e, utilizando a Proposição 3.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H_\mu}^2 &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i^2\, \|e_i\|_{H_\mu}^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i^2\, \lambda_i\, \|e_i\|_{L^2}^2 \\
&\geqslant \lambda_{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i^2\, \|e_i\|_{L^2}^2 \;=\; \lambda_{k+1}\, \|v\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 5

A Caracterização Variacional

O objetivo desta seção é descrever a caracterização variacional do problema (1.1) e com isso provar resultados importantes sobre a existência de soluções para esta equação. Ao longo desta seção, as hipóteses citadas no capítulo 2 serão largamente utilizadas.

Definição 5.1 Uma seqüência $\{u_m\} \subseteq H_\mu$ é chamada uma seqüência PS (de Palais-Smale) para o funcional J no nível c se:

$$J(u_m) \to c \qquad \text{e} \qquad J'(u_m) \to 0 \text{ em } {H_\mu}'.$$

Lema 5.1 *Suponhamos que a hipótese* (3.2) *se verifique e seja* $\{u_m\} \subseteq H_\mu$ *uma seqüência PS para o funcional* J*. Então existem* $u_{m_k}, u \in H_\mu$ *tais que* $u_{m_k} \rightharpoonup u$ *e* $J'(u) = 0$*. Além disso, se* $J(u_m) \to c$ *com* $c \in (0, \frac{1}{n} S_\mu^{n/2})$*, então* $u \neq 0$ *e, assim,* u *é uma solução fraca não trivial do problema* (3.1)*.*

Demonstração: Consideremos

$$f(x,s) = g(x,s) + |s|^{2^*-2} s \qquad \text{e} \qquad F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt.$$

Inicialmente vamos provar que existem $\vartheta \in (0, \frac{1}{2})$ e $A \in L^1(\Omega)$ tais que

$$F(x,s) \leqslant \vartheta\, s\, f(x,s) + A(x) \qquad \text{para } x \in \Omega \text{ q.s. } \forall s \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

De fato, utilizando a hipótese (3.2) para $\varepsilon > 0$, temos que

$$\begin{aligned} F(x,s) &= \int_0^s f(x,t)\, dt = \int_0^s g(x,t) + |t|^{2^*-2}\, t\, dt \\ &\leqslant \int_0^s a_\varepsilon(x) + \varepsilon\, |t|^{\frac{n+2}{n-2}} + |t|^{2^*-2}\, t\, dt \\ &= \int_0^s a_\varepsilon(x) + \varepsilon\, |t|^{2^*-1} + |t|^{2^*-2}\, t\, dt \\ &= a_\varepsilon(x)\, s + (1+\varepsilon)\, \frac{|s|^{2^*}}{2^*} \end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Young, com $p = \frac{2n}{n+2}$ e $q = 2^*$,

$$a_\varepsilon(x)\, s \leqslant \frac{|a_\varepsilon(x)|}{\varepsilon}\, |\varepsilon s| \leqslant \frac{|a_\varepsilon(x)|^{\frac{2n}{n+2}}}{\varepsilon^{\frac{2n}{n+2}}\, p} + \frac{\varepsilon^{2^*} |s|^{2^*}}{2^*} = A_1(x) + \frac{\varepsilon^{2^*} |s|^{2^*}}{2^*},$$

onde $A_1 \in L^1(\Omega)$, pois $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$. Assim, obtemos que

$$F(x,s) \leqslant A_1(x) + (1+\widetilde{\varepsilon})\, \frac{|s|^{2^*}}{2^*}. \tag{5.2}$$

Por outro lado, como $f(x,s) = g(x,s) + |s|^{2^*-2}\, s$, temos

$$\begin{aligned}
|s|^{2^*} &= s\, f(x,s) - s\, g(x,s) \ \leqslant \ s\, f(x,s) + |s|\, |g(x,s)| \\
&\leqslant s\, f(x,s) + |s| \big(a_\varepsilon(x) + \varepsilon\, |s|^{\frac{n+2}{n-2}}\big) \\
&= s\, f(x,s) + |s|\, a_\varepsilon(x) + \varepsilon\, |s|^{2^*} \\
&\leqslant s\, f(x,s) + A_1(x) + \frac{\varepsilon}{2^*}\, |s|^{2^*} + \varepsilon\, |s|^{2^*} \\
&= s\, f(x,s) + A_1(x) + \overline{\varepsilon}\, |s|^{2^*},
\end{aligned}$$

logo,

$$(1-\overline{\varepsilon})\, |s|^{2^*} \leqslant s\, f(x,s) + A_1(x).$$

Portanto, substituindo em (5.2) concluímos que

$$\begin{aligned}
F(x,s) &\leqslant A_1(x) + \frac{(1+\widetilde{\varepsilon})}{2^*(1-\overline{\varepsilon})} \big(s\, f(x,s) + A_1(x)\big) \\
&= A(x) + \vartheta\, s\, f(x,s),
\end{aligned}$$

com $A \in L^1(\Omega)$ e $\vartheta \to \dfrac{1}{2^*} < \dfrac{1}{2}$, obtendo o resultado desejado.

Consideremos então $\{u_m\} \subseteq H_\mu$ uma seqüência PS para o funcional J. Como $J'(u_m) \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$\big| J'(u_m)\, (\varphi) \big| \leqslant \|J'(u_m)\|\, \|\varphi\|_{H_\mu} \leqslant \varepsilon$$

para todo $\|\varphi\|_{H_\mu} = 1$ e m suficientemente grande. Assim,

$$\Big| \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi - \mu\, \frac{u_m\, \varphi}{|x|^2}\, dx - \int_\Omega g(x,u_m)\, \varphi + |u_m|^{2^*-2}\, u_m\, \varphi\, dx \Big| \leqslant \varepsilon$$

e tomando $\varphi = \dfrac{u_m}{\|u_m\|_{H_\mu}}$ obtemos

$$\left| \frac{1}{\|u_m\|_{H_\mu}} \int_\Omega |\nabla u_m|^2 - \mu\, \frac{{u_m}^2}{|x|^2}\, dx - \int_\Omega \frac{g(x,u_m)\, u_m + |u_m|^{2^*}}{\|u_m\|_{H_\mu}}\, dx \right| \leqslant \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left| \|u_m\|_{H_\mu} - \frac{1}{\|u_m\|_{H_\mu}} \int_\Omega g(x, u_m)\, u_m + |u_m|^{2^*}\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Logo,

$$\frac{1}{\|u_m\|_{H_\mu}} \int_\Omega g(x, u_m)\, u_m + |u_m|^{2^*}\, dx - \varepsilon \leqslant \|u_m\|_{H_\mu}$$

e, então,

$$\int_\Omega g(x, u_m)\, u_m + |u_m|^{2^*}\, dx \leqslant \|u_m\|_{H_\mu}^2 + \varepsilon\, \|u_m\|_{H_\mu}. \tag{5.3}$$

Porém, por (5.1) temos que

$$g(x, u_m)\, u_m + |u_m|^{2^*} = u_m\, f(x, u_m) \geqslant \frac{1}{\vartheta} \Big(F(x, u_m) - A(x) \Big),$$

que substituído em (5.3) nos dá

$$\frac{1}{\vartheta} \int_\Omega F(x, u_m) - A(x)\, dx \leqslant \|u_m\|_{H_\mu}^2 + \varepsilon\, \|u_m\|_{H_\mu},$$

isto é,

$$\int_\Omega F(x, u_m)\, dx \leqslant \vartheta\, \|u_m\|_{H_\mu}^2 + \vartheta\, \varepsilon\, \|u_m\|_{H_\mu} + \int_\Omega A(x)\, dx.$$

Note que

$$F(x, s) = \int_0^s g(x, t) + |t|^{2^*-2}\, t\, dt = G(x, s) + \frac{|s|^{2^*}}{2^*}$$

e assim,

$$\int_\Omega G(x, u_m) + \frac{|u_m|^{2^*}}{2^*}\, dx \leqslant \vartheta\, \|u_m\|_{H_\mu}^2 + \vartheta\, \varepsilon\, \|u_m\|_{H_\mu} + \int_\Omega A(x)\, dx. \tag{5.4}$$

Além disso, como $J(u_m) \to c$ temos que $J(u_m)$ é limitada. Logo, existe uma constante k tal que

$$\frac{1}{2}\, \|u_m\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x, u_m) + \frac{1}{2^*}\, |u_m|^{2^*}\, dx = J(u_m) \leqslant k.$$

Utilizando (5.4), obtemos que

$$\begin{aligned} k &\geqslant \frac{1}{2}\, \|u_m\|_{H_\mu}^2 - \vartheta\, \|u_m\|_{H_\mu}^2 - \vartheta\, \varepsilon\, \|u_m\|_{H_\mu} - \int_\Omega A(x)\, dx \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \vartheta \Big) \|u_m\|_{H_\mu}^2 - \vartheta\, \varepsilon\, \|u_m\|_{H_\mu} - \int_\Omega A(x)\, dx \\ &= a\, \|u_m\|_{H_\mu}^2 - b\, \|u_m\|_{H_\mu} - c \qquad\qquad \text{com } a, b, c > 0 \end{aligned}$$

e concluímos que u_m é uma seqüência limitada, pois caso contrário, fazendo $m \to +\infty$, teríamos que $k \geqslant +\infty$, um absurdo.

Portanto, u_m é limitada e, pelo Teorema 2.3, existem $u_{m_k}, u \in H_\mu$ tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u.$$

Além disso, como u_m é uma seqüência PS, temos que $J'(u_{m_k}) \to 0$. Assim, pela continuidade fraca de J', obtemos que

$$J'(u) = 0$$

e desta forma u é uma solução fraca da equação (3.1).

Para provar a afirmativa restante suponhamos que $c \in \left(0, \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}\right)$ e por contradição, que $u \equiv 0$.
Como u_m é uma seqüência PS, temos que $J'(u_m) \to 0$ em ${H_\mu}'$ e, assim, vemos que $J'(u_m)(u_m) = o(1)$, ou seja,

$$\begin{aligned} o(1) = J'(u_m)(u_m) &= \int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, dx - \mu \int_\Omega \frac{u_m^2}{|x|^2} \, dx \\ &- \int_\Omega g(x, u_m)\, u_m \, dx - \int_\Omega |u_m|^{2^*-2}\, u_m^2 \, dx \\ &= \|u_m\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega g(x, u_m)\, u_m \, dx - \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*}. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.5 vemos que $\displaystyle\int_\Omega g(x, u_m)\, u_m \, dx \to 0$ e, portanto, obtemos que

$$\|u_m\|_{H_\mu}^2 - \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} = o(1). \tag{5.5}$$

Pela definição de S_μ, para todo $u \in H_\mu$ temos $S_\mu \, \|u\|_{L^{2^*}}^2 \leqslant \|u\|_{H_\mu}^2$, logo

$$S_\mu^{2^*/2} \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant \|u_m\|_{H_\mu}^{2^*},$$

que substituído em (5.5) nos dá

$$o(1) \geqslant \|u_m\|_{H_\mu}^2 - S_\mu^{-2^*/2} \|u_m\|_{H_\mu}^{2^*} = \|u_m\|_{H_\mu}^2 \Big(1 - S_\mu^{-2^*/2} \|u_m\|_{H_\mu}^{2^*-2}\Big).$$

Note agora que $\|u_m\|_{H_\mu}$ é limitada inferiormente por uma constante positiva d, pois senão teríamos $\|u_{m_k}\|_{H_\mu} \to 0$ para alguma subseqüência e, assim, $J(u_{m_k}) \to 0$, contradizendo o fato que $J(u_{m_k}) \to c \in \left(0, \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}\right)$. Logo,

$$1 - S_\mu^{-2^*/2} \|u_m\|_{H_\mu}^{2^*-2} \leqslant \frac{|o(1)|}{\|u_m\|_{H_\mu}^2} \leqslant \frac{|o(1)|}{d^2} = o(1)$$

e, então,

$$S_\mu^{2^*/2} + o(1) \leqslant \|u_m\|_{H_\mu}^{2^*-2}.$$

Como $2^* - 2 = \dfrac{4}{n-2}$ e $\dfrac{2^*}{2} = \dfrac{n}{n-2}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{H_\mu}^2 &= \big(\|u_m\|_{H_\mu}^{2^*-2}\big)^{\frac{n-2}{2}} \geqslant \Big(S_\mu^{\frac{n}{n-2}}\big(1+o(1)\big)\Big)^{\frac{n-2}{2}} \\
&= S_\mu^{n/2}\big(1+o(1)\big) = S_\mu^{n/2} + o(1).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Assim, utilizando (5.5), (5.6) e o Lema 3.5, temos que

$$\begin{aligned}
J(u_m) &= \frac{1}{2}\|u_m\|_{H_\mu}^2 - o(1) - \frac{1}{2^*}\|u_m\|_{H_\mu}^{2^*} \\
&= \frac{1}{n}\|u_m\|_{H_\mu}^2 + \frac{n-2}{2n}\|u_m\|_{H_\mu}^2 + o(1) - \frac{n-2}{2n}\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&= \frac{1}{n}\|u_m\|_{H_\mu}^2 + \frac{n-2}{2n}\big(\|u_m\|_{H_\mu}^2 - \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*}\big) + o(1) \\
&= \frac{1}{n}\|u_m\|_{H_\mu}^2 + o(1) \\
&\geqslant \frac{1}{n}S_\mu^{n/2} + o(1)
\end{aligned}$$

e como $J(u_m) \to c$ obtemos que $c \geqslant \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}$, um absurdo. Concluímos portanto que $u \neq 0$.

$\square$

Devido a este lema, para garantirmos a existência de soluções para a equação (3.1) basta encontrar uma seqüência PS para o funcional J em um nível estritamente entre 0 e $\frac{1}{n}S_\mu^{n/2}$.

Como temos interesse em soluções positivas podemos definir $g(x,s) = 0$ para $s \leqslant 0$. Nesse sentido, quando o funcional J possuir a geometria do Mountain Pass Theorem, obtemos o seguinte resultado:

Lema 5.2 *Suponhamos que a hipótese* (3.3) *seja válida. Admitimos também que vale* (3.5) *para* $\nu \in (\lambda_0, \lambda_1)$, *onde* $\lambda_0 = 0$. *Então o funcional* J *admite um seqüência PS no cone de funções positivas para o nível*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C\big([0,1], H_\mu\big)\,;\, \gamma(0) = 0$ *e* $J(\gamma(1)) < 0\}$.

Demonstração: Vamos provar que o funcional J satisfaz as hipóteses do Mountain Pass Theorem, exceto pela condição PS de compacidade.

Obviamente temos que $J \in C^1(H_\mu, \mathbb{R})$ e $J(0) = 0$.

Além disso, existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$J(v) \geqslant \alpha \qquad \forall\, v \in \partial B_\rho \cap H_\mu.$$

De fato, utilizando a hipótese (3.5) obtemos que

$$\begin{aligned}
J(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{v^2}{|x|^2}\, dx - \int_\Omega G(x,v)\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\,\|v\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x,v)\, dx - \frac{1}{2^*}\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\,\|v\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega \frac{1}{2}\,\nu\, v^2 + \psi(x)\,|v|^\theta + C\,|v|^{2^*}\, dx - \frac{1}{2^*}\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\,\|v\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2}\,\nu\,\|v\|_{L^2}^2 - \int_\Omega |\psi(x)|\,|v|^\theta\, dx - C\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \frac{1}{2^*}\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&= \frac{1}{2}\,\|v\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2}\,\nu\,\|v\|_{L^2}^2 - \Big(C + \frac{1}{2^*}\Big)\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \int_\Omega |\psi(x)|\,|v|^\theta\, dx. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Mas pela desigualdade de Hölder, com $p = 2^*/\theta$ e $q = q(\theta)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\psi(x)|\,|v|^\theta\, dx &\leqslant \Big(\int_\Omega |\psi(x)|^{q(\theta)}\, dx\Big)^{1/q(\theta)} \Big(\int_\Omega |v|^{2^*}\, dx\Big)^{\theta/2^*} \\
&= \|\psi(x)\|_{L^{q(\theta)}}\,\|v\|_{L^{2^*}}^\theta.
\end{aligned}$$

Pela definição de S_μ, temos $\|v\|_{H_\mu}^2 \geqslant S_\mu \|v\|_{L^{2^*}}^2$ e, assim, obtemos que

$$\|v\|_{H_\mu}^{2^*} \geqslant S_\mu^{2^*/2}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \qquad \text{e} \qquad \|v\|_{H_\mu}^\theta \geqslant S_\mu^{\theta/2}\|v\|_{L^{2^*}}^\theta.$$

Pela Proposição 3.2 também temos que $\|v\|_{H_\mu}^2 \geqslant \lambda_1\,\|v\|_{L^2}^2$. Substituindo em (5.7), obtemos

$$\begin{aligned}
J(v) &\geqslant \Big(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2\lambda_1}\Big)\|v\|_{H_\mu}^2 - \Big(C + \frac{1}{2^*}\Big) S_\mu^{-2^*/2}\|v\|_{H_\mu}^{2^*} - \|\psi(x)\|_{L^{q(\theta)}}\|v\|_{L^{2^*}}^\theta \\
&\geqslant \Big(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2\lambda_1}\Big)\|v\|_{H_\mu}^2 - \Big(C + \frac{1}{2^*}\Big) S_\mu^{-2^*/2}\|v\|_{H_\mu}^{2^*} - \|\psi(x)\|_{L^{q(\theta)}} S_\mu^{-\theta/2}\|v\|_{H_\mu}^\theta \\
&= C_1\,\|v\|_{H_\mu}^2 - C_2\,\|v\|_{H_\mu}^{2^*} - C_3\|v\|_{H_\mu}^\theta,
\end{aligned}$$

onde C_1, C_2, $C_3 > 0$, visto que $\nu < \lambda_1$. Como $2 < \theta < 2^*$ podemos escolher $\rho > 0$ suficientemente pequeno para que

$$J(v) \geqslant C_1\,\rho^2 - C_2\,\rho^{2^*} - C_3\,\rho^\theta > \alpha > 0 \qquad \forall\, v \in \partial B_\rho \cap H_\mu.$$

Por fim, completando as hipóteses do Mountain Pass Theorem, vemos que existe um elemento $v \in H_\mu$ tal que

$$\|v\|_{H_\mu} > \rho \quad \text{e} \quad J(v) \leqslant 0.$$

De fato, utilizando a hipótese (3.3), para cada $v \in H_\mu$ temos que

$$\begin{aligned} J(tv) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(tv)|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{(tv)^2}{|x|^2}\,dx - \int_\Omega G(x,tv)\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |tv|^{2^*}dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|v\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x,tv)\,dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leqslant \frac{t^2}{2}\|v\|_{H_\mu}^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \end{aligned}$$

e como $2 < 2^*$, podemos escolher $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande para que

$$\|tv\|_{H_\mu} > \rho \quad \text{e} \quad J(tv) < 0.$$

Desta forma, as hipóteses do Mountain Pass Theorem estão satisfeitas. Assim, podemos aplicar o Teorema 2.2 de [7] (veja o Apêndice B) e obter a existência de uma seqüência PS em H_μ no nível

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)).$$

Como definimos $g(x,s) = 0$ para $s \leqslant 0$, temos que

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,t)\,dt \leqslant \int_0^{|u|} g(x,t)\,dt = G(x,|u|) \quad \forall\, u \in H_\mu$$

e assim, para todo $u \in H_\mu$ obtemos

$$\begin{aligned} J(|u|) &= \frac{1}{2}\big\||u|\big\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x,|u|)\,dx - \frac{1}{2^*}\big\||u|\big\|_{H_\mu}^{2^*} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|u\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x,u)\,dx - \frac{1}{2^*}\|u\|_{H_\mu}^{2^*} \\ &= J(u). \end{aligned}$$

Portanto, a seqüência PS pode ser escolhida no cone de funções positivas.

□

Lema 5.3 *Dado $m \in \mathbb{N}$, suponha que para todo $\varepsilon > 0$ exista um t_ε satisfazendo*

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m) \geqslant \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}. \tag{5.8}$$

Então existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 \leqslant t_\varepsilon \leqslant c_2$. Conseqüentemente, existe uma seqüência $\varepsilon_k \to 0$ tal que $t_{\varepsilon_k} \to t_0 > 0$.

Demonstração: Por contradição, suponhamos que exista alguma seqüência ε_k tal que $\varepsilon_k \to 0$ e $t_{\varepsilon_k} \to +\infty$. Utilizando a hipótese (3.3) temos que

$$\begin{aligned} J(t_{\varepsilon_k} u^m_{\varepsilon_k}) &= \frac{1}{2}\, \|t_{\varepsilon_k} u^m_{\varepsilon_k}\|^2_{H_\mu} - \int_\Omega G(x, t_{\varepsilon_k} u^m_{\varepsilon_k})\, dx - \frac{1}{2^*}\, \|t_{\varepsilon_k} u^m_{\varepsilon_k}\|^{2^*}_{L^{2^*}} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\, t^2_{\varepsilon_k}\, \|u^m_{\varepsilon_k}\|^2_{H_\mu} - \frac{1}{2^*}\, t^{2^*}_{\varepsilon_k} \|u^m_{\varepsilon_k}\|^{2^*}_{L^{2^*}}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.2, para ε_k suficientemente pequeno, obtemos

$$\|u^m_{\varepsilon_k}\|^2_{H_\mu} \leqslant 2\, S_\mu^{n/2} \quad \text{e} \quad \|u^m_{\varepsilon_k}\|^{2^*}_{L^{2^*}} \geqslant \frac{1}{2}\, S_\mu^{n/2},$$

logo,

$$J(t_{\varepsilon_k} u^m_{\varepsilon_k}) \leqslant t^2_{\varepsilon_k} S_\mu^{n/2} - \frac{1}{2.2^*}\, t^{2^*}_{\varepsilon_k} S_\mu^{n/2} \to -\infty,$$

ocorrendo assim uma contradição com (5.8). Portanto, t_ε fica limitada quando $\varepsilon \to 0$ e, então, existem t_{ε_k} e t_0 tais que $t_{\varepsilon_k} \to t_0$.

Suponhamos que $t_0 = 0$.
Pela hipótese (3.2), existe $a_1 \in L^{\frac{2n}{n+2}}$ tal que $|g(x,s)| \leqslant a_1(x) + |s|^{\frac{n+2}{n-2}}$ e assim

$$|G(x,s)| \leqslant \int_0^{|s|} |g(x,t)|\, dt \leqslant \int_0^{|s|} a_1(x) + |t|^{\frac{n+2}{n-2}}\, dt = |s|\, a_1(x) + C\, |s|^{2^*}$$

e, pela desigualdade de Hölder com $p = \frac{2n}{n+2}$ e $q = 2^*$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |G(x, t_{\varepsilon_k} u^m_{\varepsilon_k})|\, dx &\leqslant t_{\varepsilon_k} \int_\Omega |u^m_{\varepsilon_k}|\, a_1(x)\, dx + C\, t^{2^*}_{\varepsilon_k} \int_\Omega |u^m_{\varepsilon_k}|^{2^*} dx \\ &= t_{\varepsilon_k}\, \|a_1\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}\, \|u^m_{\varepsilon_k}\|_{L^{2^*}} + C\, t^{2^*}_{\varepsilon_k}\, \|u^m_{\varepsilon_k}\|^{2^*}_{L^{2^*}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

pois $\|u^m_{\varepsilon_k}\|_{L^{2^*}}$ é limitado. Logo

$$J(t_{\varepsilon_k} u^m_{\varepsilon_k}) = \frac{1}{2}\, t^2_{\varepsilon_k}\, \|u^m_{\varepsilon_k}\|^2_{H_\mu} - \int_\Omega G(x, t_{\varepsilon_k} u^m_{\varepsilon_k})\, dx - \frac{1}{2^*}\, t^{2^*}_{\varepsilon_k}\, \|u^m_{\varepsilon_k}\|^{2^*}_{L^{2^*}} \longrightarrow 0,$$

contradizendo novamente a hipótese (5.8). Portanto, obtemos que $t_0 > 0$.

$\square$

Agora estimaremos o termo de ordem inferior $\displaystyle\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u^m_\varepsilon)\, dx$:

Lema 5.4 *Suponhamos que as hipóteses* (3.2)-(3.5) *sejam válidas para* $n \geqslant 4$ *e* $\mu \leqslant \overline{\mu} - 1$ (*com* $k = 0$ *e* $\lambda_0 = 0$). *Suponhamos também que a hipótese* (3.7) *seja válida para* $\overline{\mu} - 1 < \mu < \overline{\mu}$. *Então existe uma função* $\tau = \tau(\varepsilon)$ *com* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tau(\varepsilon) = +\infty$ *e tal que, para* ε *suficientemente pequeno,*

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u^m_\varepsilon)\, dx \geqslant \tau(\varepsilon)\, \varepsilon^{n-2},$$

onde t_ε *é uma seqüência tal como no lema anterior.*

Demonstração: Todas as constantes positivas serão denotadas por C.

1º Caso: $\overline{\mu}-1<\mu<\overline{\mu}$.

Pela hipótese (3.7) existe uma função contínua crescente $\varphi=\varphi(s)$ tal que $\lim\limits_{s\to\infty}\varphi(s)=+\infty$ e existe $\overline{s}\geqslant 0$ tal que se $s\geqslant\overline{s}$ então, para quase todo $x\in\Omega$

$$\frac{G(x,s)}{s^p}\geqslant\varphi(s). \tag{5.9}$$

Consideremos

$$\beta=\frac{\sqrt{\overline{\mu}}}{\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}, \qquad p=\frac{2\,(n-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}\,)}{n-2},$$

$$\gamma=\sqrt{\overline{\mu}}+\sqrt{\overline{\mu}-\mu}, \qquad \gamma'=\sqrt{\overline{\mu}}-\sqrt{\overline{\mu}-\mu}.$$

Se $\varepsilon>0$ é suficientemente pequeno temos que $B_{\varepsilon^\beta}\subseteq B_{1/m}\subseteq\Omega_0$. Como $\gamma=2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}+\gamma'$ obtemos que $\varepsilon^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}=\varepsilon^{(2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}+\gamma')/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}$ e assim, para qualquer $x\in B_{\varepsilon^\beta}$ vale que

$$\varepsilon^2|x|^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}+|x|^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\leqslant\varepsilon^2\varepsilon^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}+\varepsilon^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}=2\,\varepsilon^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}. \tag{5.10}$$

Então, como $C_\varepsilon=C\,\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}}$, para $x\in B_{\varepsilon^\beta}$ temos

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon u_\varepsilon^m(x) &= t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x)-t_\varepsilon u_\varepsilon^*(1/m)\\
&= \frac{t_\varepsilon\,C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2|x|^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}+|x|^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}-\frac{t_\varepsilon\,C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}+\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}\\
&\geqslant \frac{t_\varepsilon\,C_\varepsilon}{\left[2\,\varepsilon^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}-\frac{t_\varepsilon\,C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}+\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}\\
&= \frac{C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}}}{\varepsilon^{\gamma\sqrt{\overline{\mu}}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}}-\frac{C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}}}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}+\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}\\
&= C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}\,(1-\gamma/\sqrt{\overline{\mu}-\mu})}-\frac{C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}}}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}+\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}\\
&= C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}-\frac{C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}}}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}+\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}\,,
\end{aligned}$$

mas, pelo Lema 5.3, t_ε é limitada e, assim,

$$\frac{C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}}}{\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}+\left(\frac{1}{m}\right)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}}\longrightarrow 0 \qquad \text{quando } \varepsilon\to 0.$$

Logo

$$t_\varepsilon\,u_\varepsilon^m(x)\geqslant C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}-o(1)\geqslant C\,t_\varepsilon\,\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\longrightarrow+\infty.$$

Desta forma, obtemos que $t_\varepsilon u_\varepsilon^m(x) \geqslant \overline{s}$ para $x \in B_{\varepsilon^\beta}$ e ε suficientemente pequeno. Assim, podemos utilizar (5.9) e que $0 < c_1 \leqslant t_\varepsilon \leqslant c_2$ para obter

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\,dx &\geqslant \int_{B_{\varepsilon^\beta}} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\,dx \geqslant \int_{B_{\varepsilon^\beta}} \varphi(t_\varepsilon u_\varepsilon^m)(t_\varepsilon u_\varepsilon^m)^p\,dx \\ &\geqslant \int_{B_{\varepsilon^\beta}} \varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}})\, t_\varepsilon^p \left(u_\varepsilon^m(x)\right)^p dx \\ &\geqslant C\varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}) \int_{B_{\varepsilon^\beta}} \left(u_\varepsilon^*(x) - u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big)\right)^p dx. \quad (5.11)\end{aligned}$$

Seja $q = p^{1/\gamma'}$. Note que $q > 1$, pois como $\overline{\mu} - \mu < 1$ temos que $p > 1$. Então, para ε suficientemente pequeno, $B_{\varepsilon^\beta/q} \subseteq B_{1/qm}$ e como u_ε^* é uma função radial, para $x \in B_{\varepsilon^\beta/q}$ temos

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^*(x) \;&\geqslant\; u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{qm}\Big) \;=\; \frac{C_\varepsilon}{\left[\varepsilon^2\big(\frac{1}{qm}\big)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}} + \big(\frac{1}{qm}\big)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}} \\ &= \frac{C_\varepsilon}{\left[\big(\frac{1}{q}\big)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}\varepsilon^2\big(\frac{1}{m}\big)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}} + \big(\frac{1}{q}\big)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\big(\frac{1}{m}\big)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}} \\ &\geqslant \frac{C_\varepsilon}{\left[\big(\frac{1}{q}\big)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}}\Big(\varepsilon^2\,\big(\frac{1}{m}\big)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}} + \big(\frac{1}{m}\big)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\Big)\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}} \\ &= \frac{C_\varepsilon}{\big(\frac{1}{q}\big)^{\gamma'}\left[\varepsilon^2\,\big(\frac{1}{m}\big)^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}} + \big(\frac{1}{m}\big)^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}} \\ &= q^{\gamma'} u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big) \;=\; p\, u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big), \end{aligned}$$

onde usamos que $\gamma > \gamma'$ e $1/q < 1$. Logo, para $x \in B_{\varepsilon^\beta/q}$ temos

$$u_\varepsilon^*(x) - u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big) \geqslant u_\varepsilon^*(x) - \frac{u_\varepsilon^*(x)}{p} = \frac{p-1}{p}\,u_\varepsilon^*(x) = Cu_\varepsilon^*(x), \qquad (5.12)$$

que substituído em (5.11) nos dá

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\,dx \;&\geqslant\; C\varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}) \int_{B_{\varepsilon^\beta/q}} \left(u_\varepsilon^*(x) - u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big)\right)^p dx \\ &\geqslant\; C\varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}) \int_{B_{\varepsilon^\beta/q}} \left(u_\varepsilon^*(x)\right)^p dx.\end{aligned}$$

Como $B_{\varepsilon^\beta/q} \subseteq B_{\varepsilon^\beta}$, (5.10) é válida e, assim,

$$u_\varepsilon^*(x) \geqslant \frac{C_\varepsilon}{\left[2\,\varepsilon^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\right]^{\sqrt{\overline{\mu}}}} = C\,\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}. \qquad (5.13)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\, dx &\geqslant C\varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}) \int_{B_{\varepsilon^{\beta/q}}} \big(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\big)^p\, dx \\
&\geqslant C\varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}})\, \varepsilon^{-\overline{\mu}p/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} \int_0^{\varepsilon^{\beta/q}} r^{n-1}\, dr \\
&= C\varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}})\, \varepsilon^{\beta n - \frac{\overline{\mu}p}{\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}} \\
&= C\varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}})\, \varepsilon^{n-2}.
\end{aligned}$$

Assim, definindo $\tau(\varepsilon) = C\varphi(C\varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}})$ temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tau(\varepsilon) = \lim_{s\to+\infty} C\varphi(s) = +\infty$$

e o primeiro caso está provado.

2º Caso: $0 \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu} - 1$.

Pela hipótese (3.4) existem $\delta > 0$ e $\eta \in (0, \lambda_1)$ tais que

$$G(x,s) \geqslant \frac{1}{2}\eta\, s^2 \quad \forall\, |s| \leqslant \delta,\ x \in \Omega \text{ q.s.}. \tag{5.14}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon u_\varepsilon^m(x) &= t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x) - t_\varepsilon u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big) \leqslant t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x) \\
&= \frac{t_\varepsilon\, C_\varepsilon}{\big[\varepsilon^2 |x|^{\gamma'/\sqrt{\overline{\mu}}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\overline{\mu}}}\big]^{\sqrt{\overline{\mu}}}} \leqslant \frac{t_\varepsilon\, C_\varepsilon}{|x|^\gamma}.
\end{aligned}$$

Portanto, se ocorrer que

$$\frac{t_\varepsilon\, C_\varepsilon}{|x|^\gamma} \leqslant \delta \quad \forall\, x \in B_{1/m}, \tag{5.15}$$

teremos que $t_\varepsilon u_\varepsilon^m(x) \leqslant \delta$ e assim poderemos utilizar a hipótese (5.14).
Porém, a desigualdade (5.15) valerá se e somente se

$$|x| \geqslant \left(\frac{t_\varepsilon\, C_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{t_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/\gamma} \left(\frac{4\,\varepsilon^2\, n\,(\overline{\mu}-\mu)}{n-2}\right)^{\sqrt{\overline{\mu}}/2\gamma}.$$

Como t_ε é limitada devido ao Lema 5.3, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que para ε suficientemente pequeno

$$\left(\frac{t_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/\gamma} \left(\frac{4\,\varepsilon^2\, n\,(\overline{\mu}-\mu)}{n-2}\right)^{\sqrt{\overline{\mu}}/2\gamma} = \left(\frac{t_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/\gamma} C\, \varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}/\gamma} \leqslant C_1\, \varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}/\gamma} < \frac{1}{qm},$$

onde $q = 2^{1/\gamma'} > 1$. Assim, se $|x| \geqslant C_1\, \varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}$, teremos que $|x| \geqslant \Big(\dfrac{t_\varepsilon\, C_\varepsilon}{\delta}\Big)^{1/\gamma}$ e, então, $t_\varepsilon u_\varepsilon^m(x) \leqslant \delta$ e poderemos utilizar (5.14).

Além disso, como $\gamma' < \gamma$, também existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\varepsilon^2\, |x|^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\mu}} \leqslant C_2\, |x|^{\gamma/\sqrt{\mu}} \qquad \forall\, |x| \geqslant C_1\, \varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}, \tag{5.16}$$

com $C_1\, \varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma} < \dfrac{1}{qm} < \dfrac{1}{m}$. Utilizando as hipóteses (3.4), (5.14) e o Lema 5.3, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\, dx &\geqslant \int_{B_{1/qm}\backslash B_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\, dx \\
&\geqslant \int_{B_{1/qm}\backslash B_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}} \frac{1}{2}\, \eta\, (t_\varepsilon u_\varepsilon^m)^2\, dx \\
&= C \int_{B_{1/qm}\backslash B_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}} u_\varepsilon^m(x)^2\, dx \\
&= C \int_{B_{1/qm}\backslash B_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}} \Big(u_\varepsilon^*(x) - u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big)^2\, dx.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

De forma análoga ao caso anterior, para todo $x \in B_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}$ vale que

$$u_\varepsilon^*(x) \geqslant u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{qm}\Big) \geqslant q^{\gamma'}\, u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big) = 2\, u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big),$$

logo,

$$u_\varepsilon^*(x) - u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big) \geqslant \frac{1}{2}\, u_\varepsilon^*(x)$$

e por (5.16), para $x \in B_{1/qm}\backslash B_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}$ temos

$$u_\varepsilon^*(x) = \frac{C_\varepsilon}{\big[\varepsilon^2 |x|^{\gamma'/\sqrt{\mu}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\mu}}\big]^{\sqrt{\mu}}} \geqslant \frac{C_\varepsilon}{C_2\, |x|^\gamma} = C\varepsilon^{\sqrt{\mu}}\, |x|^{-\gamma},$$

que substituído em (5.17), nos dá

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\, dx &\geqslant C \int_{B_{1/qm}\backslash B_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}} u_\varepsilon^*(x)^2\, dx \\
&\geqslant C \int_{B_{1/qm}\backslash B_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}} \varepsilon^{2\sqrt{\mu}}\, |x|^{-2\gamma}\, dx \\
&= C\, \varepsilon^{2\sqrt{\mu}} \int_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}^{1/qm} r^{-2\gamma}\, r^{n-1}\, dr \\
&= C\, \varepsilon^{n-2} \int_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\mu}/\gamma}}^{1/qm} r^{1-2\sqrt{\bar\mu-\mu}}\, dr.
\end{aligned}$$

Para prosseguir, dividiremos em dois subcasos:

$i)$ se $\mu < \overline{\mu} - 1$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\, dx &\geqslant C\,\varepsilon^{n-2}\Big[C\left(\frac{1}{qm}\right)^{2-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} - C\,\varepsilon^{\frac{\sqrt{\overline{\mu}}}{\gamma}(2-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu})}\Big] \\
&\geqslant C\,\varepsilon^{n-2}\,\varepsilon^{\frac{2\sqrt{\overline{\mu}}}{\gamma}(1-\sqrt{\overline{\mu}-\mu})} \;=\; \tau(\varepsilon)\,\varepsilon^{n-2},
\end{aligned}$$

onde

$$\tau(\varepsilon) = C\,\varepsilon^{\frac{2\sqrt{\overline{\mu}}}{\gamma}(1-\sqrt{\overline{\mu}-\mu})}$$

é tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tau(\varepsilon) = +\infty,$$

pois $1 - \sqrt{\overline{\mu}-\mu} < 0$ e assim temos o resultado desejado;

$ii)$ se $\mu = \overline{\mu} - 1$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\, dx &\geqslant C\,\varepsilon^{n-2}\int_{C_1\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}/\gamma}}^{1/qm} r^{-1}\, dr \\
&= C\,\varepsilon^{n-2}\left(\ln\left(\frac{1}{qm}\right) - \ln C_1\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}/\gamma}\right) \\
&\geqslant C\,\varepsilon^{n-2}\left|\ln C\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}/\gamma}\right| \;=\; \tau(\varepsilon)\,\varepsilon^{n-2},
\end{aligned}$$

onde

$$\tau(\varepsilon) = C\,|\ln C\varepsilon^{\sqrt{\overline{\mu}}/\gamma}|$$

é tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tau(\varepsilon) = +\infty,$$

completando a demonstração do 2º caso.

□

Lema 5.5 *Para $\varepsilon \to 0$ é válida a seguinte estimativa*

$$\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant \frac{1}{n} S_\mu^{n/2} + C\,\varepsilon^{n-2}.$$

Demonstração: Vamos considerar $a = \|u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2$, $b = \|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*}$ e definir a função $f(t) = \dfrac{1}{2}\, a\, t^2 - \dfrac{1}{2^*}\, b\, t^{2^*}$. Como $2 < 2^*$, temos que

$$t \to 0 \;\Rightarrow\; f(t) \to 0 \quad \text{e} \quad t \to +\infty \;\Rightarrow\; f(t) \to -\infty.$$

Assim, vemos que f assume um valor máximo em $(0, \infty)$, dado por

$$f\Big(\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{1}{(2^*-2)}}\Big) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)\frac{a^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{b^{\frac{2}{2^*-2}}} = \frac{1}{n}\,\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} &= \frac{1}{2}\,t_\varepsilon^2\,\|u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}\,t_\varepsilon^{2^*}\,\|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\,\frac{\left(\|u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*}\right)^{\frac{n-2}{2}}}
\end{aligned}
$$

e, utilizando o Lema 4.2, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} &\leqslant \frac{1}{n}\,\frac{\left(S_\mu^{n/2} + C_1\,\varepsilon^{n-2}\,m^{2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\right)^{n/2}}{\left(S_\mu^{n/2} - C_2\,\varepsilon^{n}\,m^{2^*\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\,S_\mu^{n/2}\,\frac{(1+C\varepsilon^{n-2})^{n/2}}{(1-C\varepsilon^n)^{\frac{n-2}{2}}} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\,S_\mu^{n/2}\left(\frac{1+C\varepsilon^{n-2}}{1-C\varepsilon^n}\right)^{n/2}. \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

Como $\dfrac{1}{1-x} \leqslant 1 + kx$ para x suficientemente pequeno e k constante, temos

$$
\frac{1+C\varepsilon^{n-2}}{1-C\varepsilon^n} \leqslant (1+C\varepsilon^{n-2})(1+k\,\varepsilon^n) \leqslant 1 + C\varepsilon^{n-2}
$$

e substituindo em (5.18), para ε suficientemente pequeno, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} &\leqslant \frac{1}{n}\,S_\mu^{n/2}\,(1+C\varepsilon^{n-2})^{n/2} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\,S_\mu^{n/2}\,(1+C\varepsilon^{n-2})^{n} \\
&= \frac{1}{n}\,S_\mu^{n/2}(1+C\varepsilon^{n-2}+C\varepsilon^{2(n-2)}+\ldots+C\varepsilon^{n(n-2)}) \\
&\leqslant \frac{1}{n}\,S_\mu^{n/2}\,(1+C\varepsilon^{n-2}) \\
&= \frac{1}{n}\,S_\mu^{n/2} + C\,\varepsilon^{n-2}.
\end{aligned}
$$

□

Estes resultados nos possibilita enunciar um primeiro teorema sobre a existência de soluções para a equação (3.1), que trata da questão quando, a grosso modo, $g(x,s)$ é menor que $\lambda_1 s$ numa vizinhança de $s=0$.

Teorema 5.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio fechado e limitado tal que $0 \in \Omega$ e seja $\mu \geqslant 0$. Para $n \geqslant 4$ e $\mu \leqslant \overline{\mu} - 1$ suponhamos que as hipóteses (3.2)-(3.5) são válidas (com $k=0$ e $\lambda_0 = 0$). Para $\overline{\mu} - 1 < \mu < \overline{\mu}$ assumimos também a hipótese (3.7). Então a equação (3.1) admite uma solução positiva.*

Demonstração: Utilizando o Lema 5.2, obtemos uma seqüência PS de funções positivas no nível

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C\big([0,1], H_\mu\big)\,;\, \gamma(0) = 0 \text{ e } J(\gamma(1)) < 0\}$.
Pelo Lema 5.1, se $c \in \big(0, \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}\big)$ existe uma solução não trivial (e positiva) para a equação (3.1).
Portanto, teremos demonstrado o teorema se provarmos que $c < \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}$.
Na demonstração do Lema 5.1 obtemos que

$$\forall\, v \in H_\mu \ \ \exists\, t > 0 \text{ tal que } J(tv) < 0$$

e assim existe $t_0 > 0$ tal que $J\big(t_0 u_\varepsilon^m(x)\big) < 0$. Considerando então $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\widehat{\gamma}(t) = t\, t_0 u_\varepsilon^m$, temos que $\widehat{\gamma} \in \Gamma$ e, então,

$$c \leqslant \max_{t \geqslant 0} J\big(\widehat{\gamma}(t)\big).$$

Assim, basta provar que

$$\max_{t \geqslant 0} J(t u_\varepsilon^m) < \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}.$$

Suponhamos por contradição que isto não é válido, ou seja, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m) \geqslant \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}. \tag{5.19}$$

Desta forma, as hipóteses dos Lemas 5.3 e 5.4 estão satisfeitas e utilizando-os, juntamente com o Lema 5.5, para ε suficientemente pequeno obtemos

$$\begin{aligned} J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m) &= \frac{1}{2} t_\varepsilon^2 \|u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\, dx - \frac{1}{2^*} t_\varepsilon^{2^*} \|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leqslant \frac{1}{n} S_\mu^{n/2} + C\, \varepsilon^{n-2} - \tau(\varepsilon)\, \varepsilon^{n-2} \\ &= \frac{1}{n} S_\mu^{n/2} + (C - \tau(\varepsilon))\, \varepsilon^{n-2} < \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}, \end{aligned}$$

uma contradição com (5.19), que prova o teorema.

$\square$

Trataremos agora o caso onde o funcional J tem um comportamento de linking.

Lema 5.6 *Suponhamos que as hipóteses* (3.3), (3.5) *e* (3.6) *sejam válidas. Dados* $\varepsilon, R > 0$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *sejam também*

$$Q_m^\varepsilon = \big[(\overline{B_R} \cap H_m^-) \oplus [0,R]\{u_\varepsilon^m\}\big]$$

e
$$\Gamma = \{h \in C(Q_m^\varepsilon, H_\mu)\, ;\ h(v) = v \ \ \forall\, v \in \partial Q_m^\varepsilon\}.$$

Então J *admite uma seqüência PS no nível*

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J\big(h(v)\big),$$

para m *e* R *suficientemente grandes.*

Demonstração: Para $v \in H_m^- \oplus \mathbb{R}^+\{u_\varepsilon^m\}$ podemos escrever $v = w + \alpha\, u_\varepsilon^m$, onde $w \in H_m^-$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e por definição

$$|supp\ u_\varepsilon^m \cap supp\ w| = 0.$$

Vamos provar que o funcional J satisfaz as hipóteses do Teorema do Linking (com $V = H_m^-$ e $W = H^+$), exceto pela condição PS de compacidade.

Afirmação 1: Se a hipótese (3.5) *é válida então existem* α, $\rho > 0$ *tais que*

$$J(v) \geqslant \alpha \qquad \forall\, v \in \partial B_\rho \cap H^+.$$

De fato, da mesma forma que na demonstração do Lema 5.2 e utilizando a Proposição 4.1, para $v \in H^+$ temos

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\,\|v\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x,v)\,dx - \frac{1}{2^*}\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\,\|v\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2}\,\nu\,\|v\|_{L^2}^2 - \|\varphi(x)\|_{L^{q(\theta)}}\,\|v\|_{L^{2^*}}^\theta - \Big(C + \frac{1}{2^*}\Big)\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\geqslant \Big(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\lambda_{k+1}}\Big)\|v\|_{H_\mu}^2 - \|\varphi(x)\|_{L^{q(\theta)}}\,\|v\|_{L^{2^*}}^\theta - \Big(C + \frac{1}{2^*}\Big)\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\geqslant C_1\,\|v\|_{H_\mu}^2 - C_2\,\|v\|_{H_\mu}^\theta - C_3\,\|v\|_{H_\mu}^{2^*}, \end{aligned}$$

onde $C_1, C_2, C_3 > 0$. Assim, como $2 < \theta < 2^*$ podemos escolher $\rho > 0$ suficientemente pequeno para que

$$J(v) \geqslant C_1\,\rho^2 - C_2\,\rho^\theta - C_3\,\rho^{2^*} = \alpha > 0 \qquad \forall\, v \in \partial B_\rho \cap H^+.$$

Afirmação 2: Pela definição de Q_m^ε*, existe* $R > \rho$ *tal que*

$$\max_{v \in \partial Q_m^\varepsilon} J(v) \leqslant \omega_m,$$

com $\omega_m \to 0$ *quando* $m \to +\infty$.

Para provarmos esta afirmação notemos inicialmente que

$$\lim_{m\to+\infty}\ \max_{v\,\in\,H_m^-} J(v) = 0.$$

De fato, da mesma forma que na demonstração do item (ii) do Lema 4.1, quando $m \to +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned}\|e_i^m\|_{H_\mu}^2 - \|e_i\|_{H_\mu}^2 &\leqslant C\,m^2 \int_{B_{2/m}} e_i^2\,dx + C\,m \int_{B_{2/m}} e_i\,|\nabla e_i|\,dx \\ &+ \mu \int_{B_{1/m}} \frac{e_i^2}{|x|^2}\,dx = o(1),\end{aligned}$$

e como $\|e_i\|_{H_\mu}^2 = \lambda_i\,\|e_i\|_{L^2}^2 = \lambda_i$, segue que

$$\|e_i^m\|_{H_\mu}^2 \leqslant \lambda_i + o(1) \qquad \text{quando } m \to +\infty.$$

Assim, para $v \in H_m^- = span\{e_i^m\,;\, i = 1, ..., k\}$, temos $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, e_i^m$ e, utilizando a Proposição 3.1 e o Lema 4.1, obtemos que

$$\begin{aligned}\|v\|_{H_\mu}^2 &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2\,\|e_i^m\|_{H_\mu}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2\,(\lambda_i + o(1)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2\,\lambda_i + o(1) \leqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 + o(1) \\ &= \lambda_k\,\|v\|_{L^2}^2 + o(1).\end{aligned}$$

Então, pela hipótese (3.6),

$$\begin{aligned}J(v) &= \frac{1}{2}\,\|v\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x,v)\,dx - \frac{1}{2^*}\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\,\lambda_k\,\|v\|_{L^2}^2 + o(1) - \int_\Omega \frac{\lambda_k+\eta}{2}\,v^2 - \frac{1}{2^*}\,v^{2^*}\,dx - \frac{1}{2^*}\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &= \frac{\lambda_k}{2}\,\|v\|_{L^2}^2 + o(1) - \frac{\lambda_k+\eta}{2}\,\|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2^*}\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \frac{1}{2^*}\,\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &= -\frac{\eta}{2}\,\|v\|_{L^2}^2 + o(1) \leqslant o(1)\end{aligned}$$

e como $J(0) = 0$, para $m \to +\infty$ obtemos que $0 \leqslant \max_{v\,\in\,H_m^-} J(v) \leqslant o(1)$. Portanto,

$$\lim_{m\to+\infty}\ \max_{v\,\in\,H_m^-} J(v) = 0.$$

Assim, para todo $v \in H_m^-$ temos

$$J(v) \leqslant \omega_m.$$

Ainda, pela hipótese (3.3), temos que

$$J(ru_\varepsilon^m) \leqslant \frac{1}{2}\, r^2\, \|u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}\, r^{2^*}\, \|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*}$$

e como $2 < 2^*$, para m e ε fixados existe $R = R(m, \varepsilon)$ grande o suficiente tal que

$$J(ru_\varepsilon^m) < 0 \quad \text{ para } r \geqslant R. \tag{5.20}$$

Desta maneira, com o auxílio da Proposição 2.1, para todo $v \in H_m^- \oplus R\{u_\varepsilon^m\}$ também temos

$$J(v) = J(w + R\, u_\varepsilon^m) = J(w) + J(R\, u_\varepsilon^m) \leqslant \omega_m.$$

Também, como $[0, R]$ é compacto, existe $M > 0$ tal que $J(ru_\varepsilon^m) \leqslant M$ para todo $r < R$ e assim, por (5.20), obtemos que

$$\max_{0 \leqslant r < \infty} J(ru_\varepsilon^m) \leqslant M.$$

Logo, para $v = w + \alpha\, u_\varepsilon^m \in (\partial B_R \cap H_m^-) \oplus [0, R]\{u_\varepsilon^m\}$, segue que

$$J(v) = J(w) + J(\alpha\, u_\varepsilon^m) \leqslant J(w) + M,$$

mas, pelo item (i) do Lema 4.1 e pela desigualdade de Hölder com $p = \frac{2^*}{2}$ e $q = \frac{n}{2}$, temos que

$$\|w\|_{H_\mu}^2 \leqslant \lambda_k\, \|w\|_{L^2}^2 \leqslant \lambda_k\, |\Omega|^{2/n} \|w\|_{L^{2^*}}^2 = C\, \|w\|_{L^{2^*}}^2$$

e assim, para R suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} J(w) &\leqslant \frac{1}{2}\|w\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}\, \|w\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant \frac{1}{2}\, \|w\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^* C}\, \|w\|_{H_\mu}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\, R^2 - \frac{1}{2^* C}\, R^{2^*} \leqslant -M. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $v \in (\partial B_R \cap H_m^-) \oplus [0, R]\{u_\varepsilon^m\}$ também temos

$$J(v) \leqslant \omega_m$$

e como $\partial Q_m^\varepsilon = H_m^- \cup (H_m^- \oplus R\{u_\varepsilon^m\}) \cup \big[(\partial B_R \cap H_m^-) \oplus [0, R]\{u_\varepsilon^m\}\big]$ e $\omega_m \to 0$, a afirmação está provada.

Resta mostrar que $H_\mu = H_m^- \oplus H^+$.

De fato, pelo Lema 4.1 temos que $e_i^m \to e_i$ e assim $P_k(e_i^m) \to P_k(e_i) = e_i$ quando $m \to +\infty$, onde $P_k : H_\mu \to H^-$ é a projeção ortogonal definida anteriormente. Dessa maneira, obtemos que $P_k(H_m^-) \subseteq P_k(H_\mu) = H^-$ e então basta mostrar que, para m suficientemente grande,

$$P_k(H_m^-) = H^-.$$

Para isto, basta provar que $\{P_k(e_i^m)\}_{i=1}^k$ é um conjunto linearmente independente quando m é grande. Suponhamos que isto não ocorre, ou seja, que existe $(\alpha_1^m, ..., \alpha_k^m) \neq (0, ..., 0)$ tal que

$$\alpha_1^m P_k(e_1^m) + ... + \alpha_k^m P_k(e_k^m) = 0.$$

Normalizando $(\alpha_1^m, ..., \alpha_k^m)$, podemos supor que $(\alpha_1^m)^2 + ... + (\alpha_k^m)^2 = 1$ e assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtemos que existe uma subseqüência $(\alpha_1^{m_j}, ..., \alpha_k^{m_j})$ convergente para $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1^{m_j} P_k(e_1^{m_j}) + ... + \alpha_k^{m_j} P_k(e_k^{m_j}) \\ &\to \alpha_1 P_k(e_1) + ... + \alpha_k P_k(e_k) \ = \ \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k, \end{aligned}$$

isto é,

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0 \qquad \text{com} \qquad \alpha_1^2 + ... + \alpha_k^2 = 1,$$

contradizendo o fato que $\{e_i\}_{i=1}^k$ é uma base de H^-.

Portanto, obtemos que $P_k(H_m^-) = H^-$ e, assim,

$$H_m^- \oplus H^+ = H_\mu,$$

para m suficientemente grande, completando a verificação das hipóteses do Teorema do Linking.

Desta forma, podemos utilizar o Teorema de Linking em [26] e obter uma seqüência PS para J no nível

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J\big(h(v)\big).$$

$\square$

Para o caso em que $g(x, s)$ é maior que $\lambda_1 s$, o seguinte resultado é válido:

Teorema 5.2 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio suave e limitado tal que $0 \in \Omega$ e seja $\mu \geqslant 0$. Para $n \geqslant 4$ e $\mu \leqslant \overline{\mu} - 1$, suponhamos que as hipóteses* (3.2)-(3.6) *(com $k \geqslant 1$) sejam válidas. Para $\overline{\mu} - 1 < \mu < \overline{\mu}$, suponhamos também que a hipótese* (3.7) *seja válida. Então a equação* (3.1) *admite uma solução não trivial.*

Demonstração: Pelo Lema 5.6, sabemos que, para Q_m^ε conveniente, existe uma seqüência PS para J no nível

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(h(v))$$

e, pelo Lema 5.1, se $c \in \left(0, \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}\right)$, existirá uma solução não trivial para a equação (3.1).

Portanto, é suficiente mostrar que $c < \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}$. Como $Id \in \Gamma$, temos que

$$c \leqslant \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v)$$

e, assim, basta mostrar que, para algum $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$\max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) < \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}.$$

Por contradição, suponhamos que

$$\max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) \geqslant \frac{1}{n} S_\mu^{n/2} \quad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{5.21}$$

Como existe um isomorfismo entre o cilindro $C = B_R \times [0, R]$ e Q_m^ε, temos que o conjunto $\{v \in Q_m^\varepsilon\,;\, J(v) \geqslant 0\}$ é compacto. Como o funcional J é contínuo, o máximo em (5.21) é atingido. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, existe $v_\varepsilon^m \in Q_m^\varepsilon$ tal que

$$J(v_\varepsilon^m) = \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) \geqslant \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}$$

e pela definição de Q_m^ε existem $t_\varepsilon \geqslant 0$ e $w_\varepsilon^m \in H_m^-$ tais que

$$v_\varepsilon^m = w_\varepsilon^m + t_\varepsilon u_\varepsilon^m,$$

onde $|supp\ w_\varepsilon^m \cap supp\ u_\varepsilon^m\,| = 0$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$J(v_\varepsilon^m) = \frac{1}{2}\,\|v_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x, v_\varepsilon^m)\, dx - \frac{1}{2^*}\,\|v_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geqslant \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}. \tag{5.22}$$

Pelo Lema 5.3 e Lema 4.1, obtemos que $\{t_\varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^+$ e $\{w_\varepsilon^m\} \subseteq H_m^-$ são limitadas. Como H_m^- tem dimensão finita, existem seqüências convergentes. Logo, podemos assumir que, quando $\varepsilon_j \to 0$,

$$t_{\varepsilon_j} \to t_0 \geqslant 0, \qquad w_{\varepsilon_j}^m \to w_0 \in H_m^-.$$

Como $w_\varepsilon^m \in H_m^-$, podemos utilizar o item (i) do Lema 4.1 e obter que

$$\left\| \frac{w_\varepsilon^m}{\|w_\varepsilon^m\|_{L^2}} \right\|_{H_\mu}^2 \leqslant \max_{\{u \in H_m^-\,;\, \|u\|_{L^2} = 1\}} \|u\|_{H_\mu}^2 \leqslant \lambda_k + o(1),$$

isto é,

$$\|w_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 \leqslant \big(\lambda_k + o(1)\big)\|w_\varepsilon^m\|_{L^2}^2.$$

E utilizando a hipótese (3.6), temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, w_\varepsilon^m)\, dx &\geqslant \int_\Omega \frac{1}{2}\,(\lambda_k + \eta)\,|w_\varepsilon^m|^2 - \frac{1}{2^*}\,|w_\varepsilon^m|^{2^*} dx \\
&= \frac{1}{2}\,(\lambda_k + \eta) \int_\Omega |w_\varepsilon^m|^2\, dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |w_\varepsilon^m|^{2^*} dx \\
&= \frac{1}{2}\,(\lambda_k + \eta)\,\|w_\varepsilon^m\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\,\|w_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(w_\varepsilon^m) &= \frac{1}{2}\|w_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x, w_\varepsilon^m)\, dx - \frac{1}{2^*}\|w_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\big(\lambda_k + o(1)\big)\|w_\varepsilon^m\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}(\lambda_k+\eta)\|w_\varepsilon^m\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2}(o(1)-\eta)\|w_\varepsilon^m\|_{L^2}^2 \ \leqslant\ 0, \end{aligned} \tag{5.23}$$

para m suficientemente grande. Além disso, como $|supp\ w_\varepsilon^m \cap supp\ u_\varepsilon^m| = 0$, podemos utilizar a Proposição 2.1 e obter que

$$J(v_\varepsilon^m) = J(w_\varepsilon^m + t_\varepsilon u_\varepsilon^m) = J(w_\varepsilon^m) + J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m). \tag{5.24}$$

Logo, de (5.22), (5.23) e (5.24) segue que

$$\frac{1}{n}S_\mu^{n/2} \leqslant J(v_\varepsilon^m) \leqslant J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m).$$

Desta forma, podemos utilizar os Lemas 5.3 e 5.4 e obter que existe uma seqüência $t_{\varepsilon_j} \to t_0 > 0$, com $\varepsilon_j \to 0$, tal que

$$\int_\Omega G(x, t_{\varepsilon_j} u_{\varepsilon_j}^m)\, dx \geqslant \tau(\varepsilon_j)\, \varepsilon_j^{n-2}, \tag{5.25}$$

com $\lim\limits_{\varepsilon_j \to 0} \tau(\varepsilon_j) = +\infty$.

Portanto, utilizando (5.23), (5.24), (5.25) e o Lema 5.5, para ε suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} J(v_\varepsilon^m) &= J(w_\varepsilon^m) + J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m) \leqslant J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m) \\ &= \frac{1}{2}\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)\, dx - \frac{1}{2^*}\|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leqslant \frac{1}{n}S_\mu^{n/2} + C\,\varepsilon^{n-2} - \tau(\varepsilon)\,\varepsilon^{n-2} \\ &= \frac{1}{n}S_\mu^{n/2} + \big(C - \tau(\varepsilon)\big)\,\varepsilon^{n-2} < \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}, \end{aligned}$$

o que contradiz (5.22). Portanto,

$$\max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) < \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}$$

e isto prova o teorema.

□

Agora vamos trabalhar com a equação (1.1). Como neste caso temos $g(x,s) = \lambda\, s$, o teorema anterior garante o seguinte resultado:

Corolário 5.1 *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado, suave e tal que* $0 \in \Omega$. *Se* $n \geqslant 4$ *e* $0 \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu} - 1$, *então a equação* (1.1) *admite uma solução não trivial para todo* $\lambda > 0$ *tal que* $\lambda \notin \sigma_\mu$.

Vamos denotar o funcional associado ao problema (1.1) por $I : H_\mu \to \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx.$$

Consideremos $\lambda_+ = \min\{\lambda_j \in \sigma_\mu\, ;\, \lambda < \lambda_j\}$ e suponhamos que

$$\lambda_+ - \lambda < S_\mu\, |\Omega|^{-2/n}. \tag{5.26}$$

Para $j \in \mathbb{N}$, denotemos por $M(\lambda_j)$ o autoespaço gerado por λ_j, isto é, $M(\lambda_j) = span\{e_j\}$, onde e_j é a autofunção associada ao autovalor λ_j. Sejam também

$$M^+ = \overline{\bigoplus_{\lambda_j \geqslant \lambda_+} M(\lambda_j)} \qquad \text{e} \qquad M^- = \bigoplus_{\lambda_j \leqslant \lambda_+} M(\lambda_j).$$

Nestas condições, temos o seguinte resultado:

Lema 5.7 *Temos que*

$$\beta_\lambda := \sup_{u \in M^-} I(u) \leqslant (\lambda_+ - \lambda)^{n/2}\,\frac{|\Omega|}{n} < \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}$$

e, além disso, existem $\rho_\lambda > 0$ *e* $\delta_\lambda \in (0, \beta_\lambda)$ *tais que* $I(u) \geqslant \delta_\lambda$ *para qualquer* $u \in M^+$ *com* $\|u\|_{H_\mu} = \rho_\lambda$.

Demonstração: Para cada $u \in M^-$ temos $u = \alpha_1\, e_1 + ... + \alpha_k\, e_k$, onde α_j são constantes e e_j são as autofunçõs associadas aos autovalores λ_j, com $\lambda_j \leqslant \lambda_+$ para $j = 1, ..., k$. Assim, utilizando a Proposição 3.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H_\mu} &= \|\alpha_1\, e_1 + ... + \alpha_k\, e_k\|^2_{H_\mu}\\
&= \alpha_1^2\, \|e_1\|^2_{H_\mu} + ... + \alpha_k^2\, \|e_k\|^2_{H_\mu}\\
&= \alpha_1^2\, \lambda_1\, \|e_1\|^2_{L^2} + ... + \alpha_k^2\, \lambda_k\, \|e_k\|^2_{L^2}\\
&\leqslant \alpha_1^2\, \lambda_+\, \|e_1\|^2_{L^2} + ... + \alpha_k^2\, \lambda_+\, \|e_k\|^2_{L^2}\\
&= \lambda_+(\alpha_1^2\, \|e_1\|^2_{L^2} + ... + \alpha_k^2\, \|e_k\|^2_{L^2}) = \lambda_+\, \|u\|^2_{L^2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u\|^2_{H_\mu} \leqslant \lambda_+\, \|u\|^2_{L^2} \qquad \forall\, u \in M^-.$$

Pela desigualdade de Hölder, com $p = \frac{2^*}{2}$ e $q = \frac{n}{2}$, obtemos que

$$\|u\|^2_{L^2} \leqslant \|u\|^2_{L^{2^*}}\, |\Omega|^{2/n}.$$

Assim, para todo $u \in M^-$ temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\lambda_+ - \lambda)\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\lambda_+ - \lambda)|\Omega|^{2/n}\|u\|_{L^{2^*}}^2 - \frac{1}{2^*}\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*}. \end{aligned}$$

Mas, considerando $f(p) = \dfrac{1}{2}(\lambda_+ - \lambda)|\Omega|^{2/n} p^2 - \dfrac{1}{2^*} p^{2^*}$, obtemos que

$$\sup_{u \in M^-} I(u) \leqslant \max_{p \geqslant 0} f(p) = \frac{1}{n}(\lambda_+ - \lambda)^{n/2}|\Omega|.$$

Portanto, por (5.26), obtemos

$$\beta_\lambda \leqslant \frac{1}{n}(\lambda_+ - \lambda)^{n/2}|\Omega| < \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}.$$

Além disso, de maneira análoga ao anterior, obtemos que

$$\|u\|_{H_\mu}^2 \geqslant \lambda_+\|u\|_{L^2}^2 \qquad \forall\, u \in M^+$$

e, pela definição de S_μ, temos que $S_\mu\|u\|_{L^{2^*}}^2 \leqslant \|u\|_{H_\mu}^2$ e, assim,

$$\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant S_\mu^{-2^*/2}\|u\|_{H_\mu}^{2^*}.$$

Logo, para todo $u \in M^+$ obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_+}\|u\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}S_\mu^{-2^*/2}\|u\|_{H_\mu}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\right)\|u\|_{H_\mu}^2 - \frac{1}{2^*}S_\mu^{-2^*/2}\|u\|_{H_\mu}^{2^*}. \end{aligned}$$

Considerando $f(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\right)p^2 - \dfrac{1}{2^*}S_\mu^{-2^*/2}p^{2^*}$, temos que

$$\max_{p \geqslant 0} f(p) = \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\right)^{n/2},$$

sendo que o máximo ocorre quando $p = \left[S_\mu^{2^*/2}\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\right)\right]^{\frac{n-2}{4}}$. Assim, colocando

$$\rho_\lambda = \left[S_\mu^{2^*/2}\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\right)\right]^{\frac{n-2}{4}} = S_\mu^{n/4}\left(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\right)^{\frac{n-2}{4}},$$

para todo $u \in M^+$ com $\|u\|_{H_\mu} = \rho_\lambda$, temos que

$$I(u) \geqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\Big)\|u\|^2_{H_\mu} - \frac{1}{2^*}\, S_\mu^{-2^*/2}\, \|u\|^{2^*}_{H_\mu} = \frac{1}{n}\, S_\mu^{n/2}\Big(\frac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda_+}\Big)^{n/2}.$$

Portanto, tomando $\delta_\lambda < \dfrac{1}{n}\, S_\mu^{n/2}\Big(\dfrac{\lambda_+ - \lambda}{\lambda}\Big)^{n/2}$, obtemos que

$$I(u) > \delta_\lambda \quad \forall\, u \in M^+ \cap \partial B_{\rho_\lambda}.$$

Resta mostrar que $\delta_\lambda < \beta_\lambda$.

De fato, como $M^+ \cap M^- = M(\lambda_+)$ é um espaço vetorial não trivial, temos que

$$M^+ \cap M^- \cap\, \partial B_{\rho_\lambda} \neq \emptyset$$

e assim, qualquer $v \in M^+ \cap M^- \cap\, \partial B_{\rho_\lambda}$ satisfaz

$$\delta_\lambda < I(v) \leqslant \sup_{u\,\in\, M^-} I(u) = \beta_\lambda.$$

□

Enunciaremos agora um resultado que garante a existência de soluções para a equação (1.1) quando λ pertence a uma vizinhança à esquerda, com comprimento fixado, de qualquer autovalor do operador $(-\Delta - \mu/|x|^2)$.

Teorema 5.3 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio suave, limitado e tal que $0 \in \Omega$. Suponhamos que $\overline{\mu} \geqslant 0$, $\overline{\mu} - 1 < \mu < \overline{\mu}$. Dado $\lambda > 0$, suponhamos também que exista $\lambda_k \in \sigma_\mu$ tal que*

$$\lambda \in \big(\lambda_k - S_\mu |\,\Omega|^{-2/n},\, \lambda_k\big).$$

Então a equação (1.1) admite v_k pares de soluções não triviais, onde v_k denota a multiplicidade de λ_k.

Demonstração: Vamos verificar que as hipóteses do Teorema A.4 (veja o Apêndice A) são satisfeitas.

De fato, colocando $\lambda_+ = \lambda_k$ vemos que $\lambda_+ - \lambda < S_\mu\, |\Omega|^{-2/n}$ e, assim, podemos utilizar o Lema 5.7 com

$$H = H_\mu, \qquad H^+ = M^+, \qquad H^- = M^-, \qquad f = I,$$

$$\rho = \rho_\lambda, \qquad c_0 = \delta_\lambda, \qquad c_\infty = \frac{1}{n}\, S_\mu^{n/2}$$

e obter que $\operatorname{codim} H^+ = \dim M^- < \infty$ e $f(0) = 0 < c_0 < \beta_\lambda < c_\infty$, sendo então satisfeita a hipótese (f_2) do Teorema A.4.

Além disso, como I é par, (f_3) também é válida.

Para verificar a condição restante, consideremos $\{u_m\} \subseteq H_0^1$ uma seqüência tal que

$$I(u_m) \to c < \frac{1}{n} S_\mu^{n/2} \qquad \text{em } H_0^1, \tag{5.27}$$

$$I'(u_m) \to 0 \qquad \text{em } (H_0^1)'. \tag{5.28}$$

Com um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do Lema 5.1, obtemos que u_m é limitada e, assim, existem u_{m_j} e $u \in H_0^1$ tais que

$$u_{m_j} \rightharpoonup u \qquad \text{em } H_0^1.$$

Como u_{m_j} também é limitada, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov com $p = 2$, existem $u_{m_{j_k}}$ e $v \in H_0^1$ tais que

$$u_{m_{j_k}} \to v \quad \text{em } L^q, \ \forall\, q < 2^*.$$

Denotemos $u_{m_{j_k}}$ por u_k. Como $u_k \rightharpoonup u$ em H_0^1, temos que

$$f(u_k) \to f(u) \qquad \forall f \in (H_0^1)'$$

e, com a desigualdade de Sobolev, vemos que $H_0^1 \subseteq L^q$ para $q \leqslant 2^*$. Assim, $(H_0^1)' \supseteq (L^q)'$ para todo $q \leqslant 2^*$ e, em particular,

$$f(u_k) \to f(u) \qquad \forall f \in (L^q)' \ \ \forall\, q \leqslant 2^*,$$

ou seja, $u_k \rightharpoonup u$ em L^q para todo $q \leqslant 2^*$. Como também $u_k \rightharpoonup v$ em L^q, concluímos que $v = u$. Logo

$$u_k \rightharpoonup u \qquad \text{em } H_0^1, \tag{5.29}$$

$$u_k \to u \qquad \text{em } L^q, \ \forall\, q < 2^*. \tag{5.30}$$

Além disso, como $I'(u_k) \to 0$, pela continuidade fraca de I' obtemos que $I'(u) = 0$, ou seja, u resolve fracamente a equação (1.1). Por resultados de regularidade, conforme [7] e [10], segue que

$$u \in L^\infty(\Omega). \tag{5.31}$$

Assim, u é regular e então, pela Teoria Clássica de Regularidade, conforme [16], é uma solução clássica de (1.1).

Queremos mostrar que u_m possui uma subseqüência convergente. Para isto, provaremos que

$$u_k \to u \qquad \text{em } H_0^1.$$

Consideremos $v_k = u_k - u$. Como $I'(u_k)(v_k) = o(1)$, temos que

$$\int_\Omega \nabla u_k \nabla v_k - \mu \frac{u_k\, v_k}{|x|^2}\, dx - \lambda \int_\Omega u_k\, v_k\, dx - \int_\Omega |u_k|^{2^*-2}\, u_k\, v_k\, dx = o(1)$$

e usando que $u_k = v_k + u$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^2 - \mu \frac{v_k^2}{|x|^2}\, dx \quad + \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v_k - \mu \frac{u\, v_k}{|x|^2}\, dx - \lambda \int_\Omega (v_k + u)\, v_k\, dx$$
$$- \quad \int_\Omega |v_k + u|^{2^*-2} (v_k + u)\, v_k\, dx = o(1),$$

ou seja,

$$\|v_k\|_{H_\mu}^2 + \big\langle u, v_k \big\rangle_{H_\mu} \quad - \quad \lambda \int_\Omega (v_k + u)\, v_k\, dx$$
$$- \quad \int_\Omega |v_k + u|^{2^*-2} (v_k + u)\, v_k\, dx = o(1). \quad (5.32)$$

Considerando $l_1(v) = \big\langle u, v \big\rangle_{H_\mu}$ e usando a desigualdade de Cauchy-Scharwz, temos que

$$\big|l_1(v)\big| = \big|\big\langle u, v \big\rangle_{H_\mu}\big| \leqslant \|u\|_{H_\mu} \|v\|_{H_\mu} \leqslant C\, \|v\|_{H_0^1}$$

e, assim, vemos que l_1 é um funcional linear limitado. Como por (5.29), $v_k = u_k - u \rightharpoonup 0$ em H_0^1, segue que

$$\big\langle u, v_k \big\rangle_{H_\mu} = l_1(v_k) \to l(0) = 0.$$

Também, considerando $l_2(v) = \displaystyle\int_\Omega u\, v\, dx$, pela desigualdade de Hölder temos

$$\big|l_2(v)\big| \leqslant \int_\Omega |u\, v|\, dx \leqslant \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} = C\, \|v\|_{L^2}$$

e como $2 < 2^*$, por (5.30) vemos que $v_k \to 0$ em L^2. Assim,

$$\Big|\int_\Omega u\, v_k\, dx\Big| = \big|l_2(v_k)\big| \leqslant C\, \|v_k\|_{L^2} \to 0.$$

Da mesma forma,

$$\int_\Omega v_k^2\, dx = \|v_k\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Portanto, obtemos que

$$\big\langle u, v_k \big\rangle_{H_\mu} - \lambda \int_\Omega (v_k + u)\, v_k\, dx = o(1)$$

e, substituindo em (5.32), segue que

$$\|v_k\|_{H_\mu}^2 - \int_\Omega |v_k + u|^{2^*-2} (v_k + u)\, v_k\, dx = o(1). \quad (5.33)$$

Afirmamos agora que

$$\|v_k\|_{H_\mu}^2 = \|v_k\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1). \quad (5.34)$$

De fato, por (5.33), temos que

$$\begin{aligned}
\left|\|v_k\|_{H_\mu}^2 - \|v_k\|_{L^{2^*}}^{2^*}\right| &= \left|\int_\Omega |v_k+u|^{2^*-2}(v_k+u)\,v_k\,dx - \int_\Omega |v_k|^{2^*}\,dx\right| + o(1)\\
&= \left|\int_\Omega\int_0^u \frac{\partial}{\partial\xi}(v_k+\xi)\,|v_k+\xi|^{2^*-2}\,v_k\,d\xi\,dx\right| + o(1)\\
&\leqslant \left|\int_\Omega\int_0^u \left|\frac{\partial}{\partial\xi}|v_k+\xi|^{2^*-1}\right|\,|v_k|\,d\xi\,dx\right| + o(1)\\
&= \left|(2^*-1)\int_\Omega\int_0^u |v_k+\xi|^{2^*-2}\,|v_k|\,d\xi\,dx\right| + o(1)
\end{aligned}$$

e fazendo $t = \xi/u$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\|v_k\|_{H_\mu}^2 - \|v_k\|_{L^{2^*}}^{2^*}\right| &\leqslant C\int_\Omega\int_0^1 |v_k+tu|^{2^*-2}\,|v_k|\,|u|\,dt\,dx + o(1)\\
&\leqslant C\int_\Omega\int_0^1 \Big(|v_k|^{2^*-2} + |tu|^{2^*-2}\Big)|v_k|\,|u|\,dt\,dx + o(1)\\
&\leqslant C\int_\Omega |v_k|^{2^*-1}\,|u| + |u|^{2^*-1}\,|v_k|\,dx + o(1). \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

Porém, por (5.31), existe $M>0$ tal que $|u|\leqslant M$ quase sempre em Ω. Assim

$$\int_\Omega |v_k|^{2^*-1}\,|u|\,dx \leqslant M\int_\Omega |v_k|^{2^*-1}\,dx = M\,\|v_k\|_{L^{2^*-1}}^{2^*-1} \to 0,$$

já que $v_k \to 0$ em L^q para todo $q<2^*$, conforme (5.30).
Ainda, considerando $l(w) = \displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*-1}\,w\,dx$, pela desigualdade de Hölder com $p = \frac{2^*}{2^*-1}$ e $q = 2^*$, e pela desigualdade de Sobolev com $p=2$, obtemos

$$|l(w)| \leqslant \int_\Omega |u|^{2^*-1}\,|w|\,dx \leqslant \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*-1}\,\|w\|_{L^{2^*}} \leqslant C\,\|\nabla w\|_{L^2} = C\,\|w\|_{H_0^1}$$

e assim, l é um funcional linear limitado.
Além disso, como $v_k \rightharpoonup 0$ em H_0^1 e $v_k \to 0$ em L^q para todo $q<2^*$, da mesma forma que na demonstração do Lema 3.5, obtemos que $|v_k| \rightharpoonup 0$ em H_0^1. Logo, $l(|v_k|) \to l(0) = 0$, ou seja,

$$\int_\Omega |u|^{2^*-1}\,|v_k|\,dx \to 0$$

e substituindo em (5.35), concluímos que

$$\|v_k\|_{H_\mu}^2 = \|v_k\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1),$$

provando a afirmação.

Por outro lado, como $I'(u_k)(u_k) = o(1)$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^2 - \mu \frac{u_k^2}{|x|^2}\, dx - \lambda \int_\Omega u_k^2\, dx - \int_\Omega |u_k|^{2^*}\, dx = o(1),$$

logo,

$$\|u_k\|_{L^{2^*}}^{2^*} = \|u_k\|_{H_\mu}^2 - \lambda \int_\Omega u_k^2\, dx + o(1)$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
I(u_k) &= \frac{1}{2}\|u_k\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_k^2\, dx - \frac{1}{2^*}\|u_k\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|u_k\|_{H_\mu}^2 - \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2^*}\right)\int_\Omega u_k^2\, dx + o(1) \\
&= \frac{1}{n}\|u + v_k\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda}{n}\int_\Omega (u + v_k)^2\, dx + o(1) \\
&= \frac{1}{n}\|u\|_{H_\mu}^2 + \frac{1}{n}\|v_k\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda}{n}\int_\Omega u^2\, dx + o(1), \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

visto que $\langle u, v_k\rangle_{H_\mu} = o(1)$, $\|v_k\|_{L^2} = o(1)$ e $\langle u, v_k\rangle_{L^2} = o(1)$. Como u é solução de (1.1), temos que $I'(u)(u) = 0$, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \mu \frac{u^2}{|x|^2}\, dx - \lambda \int_\Omega u^2\, dx - \int_\Omega |u|^{2^*}\, dx = 0$$

e, em particular,

$$\|u\|_{H_\mu}^2 - \lambda \int_\Omega u^2\, dx = \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geqslant 0. \qquad (5.37)$$

Assim, de (5.36) e (5.37), temos que

$$I(u_k) \geqslant \frac{1}{n}\|v_k\|_{H_\mu}^2 + o(1),$$

logo,

$$\|v_k\|_{H_\mu}^2 \leqslant n\, I(u_k) + o(1)$$

e devido a (5.27), para k suficientemente grande, obtemos

$$\|v_k\|_{H_\mu}^2 \leqslant c_1 < S_\mu^{n/2}. \qquad (5.38)$$

Ainda, pela definição de S_μ, temos que $\|v_k\|_{H_\mu}^2 \geqslant S_\mu \|v_k\|_{L^{2^*}}^2$, ou seja,

$$\|v_k\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant S_\mu^{-2^*/2}\|v_k\|_{H_\mu}^{2^*}.$$

Assim, por (5.34), temos que

$$\|v_k\|_{H_\mu}^2 = \|v_k\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1) \leqslant S_\mu^{-2^*/2}\|v_k\|_{H_\mu}^{2^*} + o(1),$$

logo,
$$S_\mu^{2^*/2}\,\|v_k\|_{H_\mu}^2 - \|v_k\|_{H_\mu}^{2^*} \leqslant o(1)$$
e, então,
$$\|v_k\|_{H_\mu}^2\big(S_\mu^{2^*/2} - \|v_k\|_{H_\mu}^{2^*-2}\big) \leqslant o(1). \tag{5.39}$$
Mas por (5.38),
$$\|v_k\|_{H_\mu}^{2^*-2} < \big(S_\mu^{n/4}\big)^{2^*-2} = S_\mu^{2^*/2},$$
ou seja,
$$S_\mu^{2^*/2} - \|v_k\|_{H_\mu}^{2^*-2} > 0.$$
Assim, a igualdade (5.39) implica que $\|v_k\|_{H_\mu}^2 \to 0$, isto é,
$$v_k \to 0 \quad \text{em } H_\mu,$$
que é o resultado desejado.

Resta mostrar que para todo $C > 0$ existem δ, R, $\alpha > 0$ tais que, para $\|u\|_{H_\mu} \geqslant R$ com $I(u) \in (C-\delta, C+\delta)$, temos $\|I'(u)\|\,\|u\|_{H_\mu} \geqslant \alpha$.

Seja $C > 0$. Suponhamos, por contradição, que para todos δ_m, R_m, $\alpha_m > 0$ existe uma seqüência $\{u_m\} \subseteq H_\mu$ tal que
$$\|u_m\|_{H_\mu} \geqslant R_m, \tag{5.40}$$
$$|I(u_m)| < C + \delta_m, \tag{5.41}$$
mas, no entanto,
$$\|I'(u_m)\|\,\|u_m\|_{H_\mu} \leqslant \alpha_m. \tag{5.42}$$
Como $\|I'(u)\| = \sup\limits_{v\,\in H_\mu} \dfrac{|I'(u)v|}{\|v\|_{H_\mu}}$, temos que
$$\|I'(u_m)\|\,\|u_m\|_{H_\mu} \geqslant |I'(u_m)(u_m)|$$
e, por (5.42),
$$\big|\|u_m\|_{H_\mu}^2 - \lambda\,\|u_m\|_{L^2}^2 - \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*}\big| = |I'(u_m)(u_m)| \leqslant \alpha_m, \tag{5.43}$$
isto é,
$$-\alpha_m + \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant \|u_m\|_{H_\mu}^2 - \lambda\,\|u_m\|_{L^2}^2. \tag{5.44}$$
Devido a (5.41), temos que
$$\frac{1}{2}\,\|u_m\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda}{2}\,\|u_m\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\,\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} < C + \delta_m$$
e utilizando (5.44), obtemos
$$\frac{1}{2}\Big(\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \alpha_m\Big) - \frac{1}{2^*}\,\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant C + \delta_m.$$

Logo,

$$\frac{1}{n}\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant C + \delta_m + \alpha_m$$

e assim, vemos que u_m é limitada em L^{2^*}. Como pela desigualdade de Hölder temos $\|u_m\|_{L^2}^2 \leqslant k\,\|u_m\|_{L^{2^*}}^2$, também vemos que u_m é limitada em L^2. Desta forma, como

$$\|u_m\|_{H_\mu}^2 - \lambda\,\|u_m\|_{L^2}^2 - \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant \alpha_m,$$

devemos ter que u_m é limitada em H_μ, contradizendo (5.40).

Portanto, a hipótese (f_1) também é satisfeita.

Assim, como

$$m = \dim H^- - \text{codim } H^+ = \dim M^- - \text{codim } M^+ = \dim M(\lambda_+) > 0,$$

aplicando o Teorema A.4, obtemos que existem m pares distintos de pontos críticos para o funcional I, que correspondem às soluções fracas da equação (1.1). E ainda, como $m = \dim M(\lambda_k)$ é a multiplicidade do autovalor λ_k, temos o resultado desejado.

$\square$

Nosso último resultado nos dá a existência de soluções para a equação (1.1) no caso particular em que $\lambda = \lambda_1$ e quando o domínio Ω possui uma certa simetria.

Teorema 5.4 *Seja $\Omega = B$ a bola unitária centrada na origem. Se $n \geqslant 5$ e $0 \leqslant \mu < \overline{\mu} - \left(\frac{n+2}{n}\right)^2$, então, para $\lambda = \lambda_1$, a equação (1.1) admite uma solução não trivial $\overline{u} \in H_\mu$ tal que*

$$I(\overline{u}) \in \left(0,\ \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}\right).$$

Demonstração: A prova deste teorema segue as mesmas linhas da demonstração do Teorema 5.2, apenas faremos alguns refinamentos nas estimativas obtidas anteriormente.

Utilizando novamente o Lema 5.6, vemos que existe uma seqüência PS para o funcional I no nível

$$c = \inf_{h\,\in\,\Gamma}\ \max_{v\,\in\,Q_m^\varepsilon} I(h(v))$$

e, pelo Lema 5.1, se mostrarmos que $c \in \left(0, \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}\right)$, obteremos uma solução não trivial para a equação (1.1).

Portanto, da mesma forma que no Teorema 5.2, basta mostrar que para algum $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$

$$c \leqslant \max_{v\,\in\,Q_m^\varepsilon} I(v) < \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}.$$

Por contradição, suponhamos que para todo $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\max_{v \in Q_m^\varepsilon} I(v) \geqslant \frac{1}{n} S_\mu^{n/2}.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$ e para m suficientemente grande, existe $v_\varepsilon^m \in Q_m^\varepsilon$ tal que

$$\frac{1}{n} S_\mu^{n/2} \leqslant \max_{v \in Q_m^\varepsilon} I(v) = I(v_\varepsilon^m) = \frac{1}{2} \|v_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda_1}{2} \|v_\varepsilon^m\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*} \|v_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \tag{5.45}$$

e, pela definição de Q_m^ε, existem $\{t_\varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^+$ e $\{w_\varepsilon^m\} \subseteq H_m^-$ tais que

$$v_\varepsilon^m = w_\varepsilon^m + t_\varepsilon u_\varepsilon^m,$$

$$|supp\ w_\varepsilon^m \cap supp\ u_\varepsilon^m| = 0$$

e que ainda satisfazem

$$t_\varepsilon \geqslant c > 0 \quad \text{e} \quad \|w_\varepsilon^m\|_{H_\mu} \leqslant c.$$

Para trabalharmos apenas com um parâmetro, colocaremos $\varepsilon = m^{-\left(\frac{n+2}{n-2}\right)\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}$. Dessa forma, pelo Lema 4.2, quando $m \to +\infty$ obtemos que

$$\|u_\varepsilon^m\|_{H_\mu}^2 \leqslant S_\mu^{n/2} + C_1\, \varepsilon^{n-2}\, m^{2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} = S_\mu^{n/2} + C_1\, m^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} \tag{5.46}$$

e

$$\|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geqslant S_\mu^{n/2} - C_2\, \varepsilon^n\, m^{\frac{2n}{n-2}\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} = S_\mu^{n/2} - C_2\, m^{-\frac{n^2}{n-2}\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}, \tag{5.47}$$

onde $m^{-\frac{n^2}{n-2}\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} = o(m^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}})$ quando $m \to +\infty$, pois

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{m^{-\frac{n^2}{n-2}\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}}{m^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}} = \lim_{m\to+\infty} m^{-2^*\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} = 0.$$

Ainda, de acordo com (5.12), para $x \in B_{\varepsilon^\beta/q}$, onde $\beta = \frac{\sqrt{\overline{\mu}}}{\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}$, temos que

$$u_\varepsilon^m(x) = u_\varepsilon^*(x) - u_\varepsilon^*\Big(\frac{1}{m}\Big) \geqslant C u_\varepsilon^*(x)$$

e, por (5.13) e pela escolha anterior de ε, obtemos que

$$u_\varepsilon^m(x) \geqslant C\, \varepsilon^{-\overline{\mu}/\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} = C m^{\overline{\mu}\left(\frac{n+2}{n-2}\right)} = C m^{\frac{n^2-4}{4}},$$

para $x \in B_{\varepsilon^\beta/q}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon^m\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |u_\varepsilon^m(x)|^2\, dx \;\geqslant\; \int_{B_{\varepsilon^\beta/q}} C m^{\frac{n^2-4}{2}}\, dx \\
&= \int_0^{\varepsilon^\beta/q} C m^{\frac{n^2-4}{2}}\, r^{n-1}\, dr \;=\; C m^{\frac{n^2-4}{2}} \frac{\varepsilon^{\beta n}}{nq^n} \\
&= C m^{\frac{n^2-4}{2}}\, m^{-\left(\frac{n+2}{n-2}\right)n\sqrt{\overline{\mu}}} \;=\; C m^{-(n+2)}
\end{aligned}$$

Portanto, para $m \to +\infty$, também temos que

$$\|u_\varepsilon^m\|_{L^2}^2 \geqslant C_3\, m^{-(n+2)}. \tag{5.48}$$

Por simplicidade, vamos denotar por v^m, u^m, w^m as funções $v_\varepsilon^m, u_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m$ com ε escolhido acima e t_m a seqüência correspondente a t_ε.

Afirmação 1*: Se m é suficientemente grande, então*

$$I(t_m u^m) \leqslant \frac{1}{n}\, S_\mu^{n/2} - C\, m^{-(n+2)}.$$

De fato, utilizando (5.46), (5.47) e (5.48), segue que

$$\begin{aligned}
I(t_m u^m) &= \frac{1}{2}\, t_m^2\, \|u^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda_1}{2}\, t_m^2\, \|u^m\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\, t_m^{2^*}\, \|u^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\, t_m^2\, S_\mu^{n/2} + C\, m^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} - \frac{\lambda_1}{2}\, t_m^2\, C\, m^{-(n+2)} \\
&- \frac{1}{2^*}\, t_m^{2^*}\, S_\mu^{n/2} + C\, m^{-\frac{n^2}{n-2}\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\, t_m^2 - \frac{1}{2^*}\, t_m^{2^*}\right) S_\mu^{n/2} + C\, m^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} - C\, m^{-(n+2)} \\
&+ C\, m^{-\frac{n^2}{n-2}\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Mas considerando $f(p) = \frac{1}{2}\, p^2 - \frac{1}{2^*}\, p^{2^*}$, temos que

$$\max_{p \geqslant 0} f(p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} = \frac{1}{n}$$

e como $\mu < \overline{\mu} - \left(\frac{n+2}{n}\right)^2$, obtemos que

$$n + 2 < n\sqrt{\overline{\mu}-\mu} < \frac{n^2}{n-2}\, \sqrt{\overline{\mu}-\mu}.$$

Aplicando estes resultados em (5.49), concluímos que, para m suficientemente grande,

$$I(t_m u^m) \leqslant \frac{1}{n}\, S_\mu^{n/2} - C\, m^{-(n+2)}.$$

Afirmação 2: Se m é suficientemente grande, então

$$I(w^m) \leqslant C m^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}.$$

De fato, utilizando o item (ii) do Lema 4.1, obtemos que

$$\frac{1}{2}\, \|w^m\|_{H_\mu}^2 \leqslant \frac{\lambda_1}{2}\, \|w^m\|_{L^2}^2 + C m^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\, \|w^m\|_{L^2}^2$$

e pela desigualdade de Hölder com $p = \frac{2^*}{2}$ e $q = \frac{n}{2}$, temos

$$\|w^m\|_{L^2}^{2^*} \leqslant \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} |\Omega|^{2^*/n} = C\|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(w^m) &= \frac{1}{2}\|w^m\|_{H_\mu}^2 - \frac{\lambda_1}{2}\|w^m\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leqslant Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\|w^m\|_{L^2}^2 - C\|w^m\|_{L^2}^{2^*}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Mas considerando $f(p) = Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}p^2 - Cp^{2^*}$, obtemos que

$$\max_{p \geqslant 0} f(p) = Cm^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}.$$

Portanto, substituindo em (5.50), concluímos que

$$I(w^m) \leqslant Cm^{-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}\|w^m\|_{L^2}^2 - C\|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leqslant Cm^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}$$

e a afirmação está provada.

Desta forma, utilizando a Proposição 2.1 e as afirmações acima, obtemos que

$$\begin{aligned} I(v^m) &= I(w^m + t_m u^m) = I(w^m) + I(t_m u^m) \\ &\leqslant Cm^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} + \frac{1}{n}S_\mu^{n/2} - Cm^{-(n+2)} \\ &= \frac{1}{n}S_\mu^{n/2} + Cm^{-n\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} - Cm^{-(n+2)} \\ &< \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}, \end{aligned} \tag{5.51}$$

para m suficientemente grande, já que

$$0 < \mu < \overline{\mu} - \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad n + 2 < n\sqrt{\overline{\mu} - \mu}.$$

Porém, a desigualdade (5.51) contradiz (5.45).

Portanto, temos que $c < \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}$ e assim, existe uma solução não trivial $\overline{u} \in H_\mu$ para a equação (1.1), com $I(\overline{u}) \in \left(0, \frac{1}{n}S_\mu^{n/2}\right)$.

$\square$

Apêndice A

Neste apêndice nos baseamos em [4] para demonstrar alguns teoremas que garantem a existência de pontos críticos para um funcional definido num espaço de Banach X, dentre os quais está o teorema utilizado no capítulo anterior.

Definição A.1 Dizemos que $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais Smale em (c_1, c_2), com $-\infty \leqslant c_1 < c_2 \leqslant +\infty$, se:

$i)$ toda seqüência $\{u_k\} \subseteq f^{-1}\big((c_1, c_2)\big)$ para as quais $f(u_k)$ é limitada e $f'(u_k) \to 0$ possuir uma subseqüência convergente;

$ii)$ $\{u_k\} \subseteq f^{-1}\big((c_1, c_2)\big)$, $f(u_k)$ limitada e $\|u_k\| \to \infty$ para $k \to \infty \Rightarrow \|f'(u_k)\| \geqslant \alpha > 0$ para k suficientemente grande.

A primeira condição é uma condição de compacidade, enquanto que a segunda condição nos dá uma certa limitância para os pontos críticos de f em $f^{-1}\big((c_1, c_2)\big)$.

Definição A.2 Dizemos que $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição C em (c_1, c_2), com $-\infty \leqslant c_1 < c_2 \leqslant +\infty$, se:

$i)$ é valido;

$ii')$ $\forall\, c \in (c_1, c_2)$ $\exists\, \delta$, R, $\alpha > 0$ tais que $[c - \delta, c + \delta] \subseteq (c_1, c_2)$ e $\forall\, u \in f^{-1}\big((c - \delta, c + \delta)\big)$ com $\|u\| \geqslant R \Rightarrow \|f'(u)\|\, \|u\| \geqslant \alpha$.

Esta condição é suficiente para enunciarmos uma nova versão para o Lema da Deformação. Relembrando a notação introduzida anteriormente, temos

$$A_c = \{u \in X \,;\, f(u) \leqslant c\},$$

$$K_c = \{u \in X \,;\, f'(u) = 0 \text{ e } f(u) = c\}.$$

Lema A.1 (Lema da Deformação)
Sejam X um espaço de Banach e $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional que satisfaz a condição C em (c_1, c_2). Se $c \in (c_1, c_2)$ e N é qualquer vizinhança de K_c, então existe um homeomorfismo limitado $\eta : X \to X$ e existem constantes $\overline{\varepsilon} > \varepsilon > 0$ tais que $[c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}] \subset (c_1, c_2)$ e que satisfazem:

$$\eta(A_{c+\varepsilon} \backslash N) \subseteq A_{c-\varepsilon}, \tag{A.1}$$

$$\eta(A_{c+\varepsilon}) \subseteq A_{c-\varepsilon} \quad \text{se} \quad K_c = \emptyset, \tag{A.2}$$

$$\eta(x) = x \quad \text{se} \;\; x \notin f^{-1}\big([c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}]\big). \tag{A.3}$$

Seja G um grupo de transformações definidas em um conjunto E.

Definição A.3 Um funcional $f : E \to \mathbb{R}$ é G-invariante se

$$f \circ g = f \qquad \forall\, g \in G.$$

Definição A.4 Uma transformação $h : E \to E$ é G-equivariante se

$$h \circ g = g \circ h \qquad \forall\, g \in G.$$

Definição A.5 Um subconjunto $A \subseteq E$ é G-invariante se

$$g(A) = A \qquad \forall\, g \in G.$$

Exemplo 1 Sejam E um espaço vetorial e $G_2 = \{i_E \ , w_E\}$, onde i_E é a aplicação identidade em E e w_E é a aplicação antipodal $w_E(x) = -x$, para todo $x \in E$. Então um funcional é G_2-invariante se e somente se ele é par. E uma transformação $h : E \to E$ é G_2-equivariante se e somente se for ímpar.

O seguinte resultado é válido:

Lema A.2 *Seja G um grupo compacto de transformações lineares unitárias definidas em um espaço de Hilbert H. Seja $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ um funcional G-invariante que satisfaz as hipóteses do Lema da Deformação. Então o homeomorfismo η que satisfaz* (A.1),(A.2),(A.3), *pode ser escolhido G-equivariante.*

Definição A.6 Sejam H um espaço de Hilbert, S um conjunto fechado em H e Q uma variedade de Hilbert com fronteira ∂Q. Dizemos que S e ∂Q "link" se:

L_1) $S \cap \partial Q = \emptyset$;

L_2) se $\varphi : H \to H$ é uma aplicação contínua tal que $\varphi(u) = u \ \forall\, u \in \partial Q$, então $\varphi(Q) \cap S \neq \emptyset$.

Exemplo 2 Sejam H_1, H_2 subespaços fechados de H tais que $H = H_1 \oplus H_2$ e $\dim H_2 < +\infty$. Então para $Q = B_R \cap H_2$ e $S = H_1$, temos que ∂Q e S link.

Exemplo 3 Sejam H_1, H_2 subespaços fechados de H tais que $H = H_1 \oplus H_2$ e $\dim H_2 < +\infty$. Considere $e \in H_1$ com $\|e\| = 1$ e sejam também R_1, R_2, $\rho > 0$, $T = \{te\,;\, 0 \leqslant t \leqslant R_1\}$ e $S_\rho = \{u \in H\,;\, \|u\| = \rho\}$. Definindo

$$S = H_1 \cap S_\rho \quad \text{e} \quad Q = \{u + v\,;\, u \in H_2 \cap B_{R_2},\, v \in T\},$$

para $R_1 > \rho$ temos que S e ∂Q link.

Definição A.7 Seja H um espaço de Hilbert e considere um grupo compacto G de transformações unitárias que atuam em H. Uma teoria de índice em H relativa ao grupo G é uma tripla $(\Sigma, \mathcal{H}, i)$, onde

Σ é a família de subconjuntos fechados de H que são G-invariantes,
$\mathcal{H}$ é o conjunto de aplicações contínuas em H que são G-equivariantes,
$i : \Sigma \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ é uma aplicação que satisfaz as seguintes propriedades:

(i_1) $i(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \emptyset$;

(i_2) $A, B \in \Sigma,\ A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad i(A) \leqslant i(B)$ (monotocidade);

(i_3) $i(A \cup B) \leqslant i(A) + i(B), \quad \forall\, A, B \in \Sigma$ (subaditividade);

(i_4) $i(A) \leqslant i(\overline{h(A)}) \quad \forall\, A \in \Sigma,\ \forall\, h \in \mathcal{H}$ (superinvariância);

(i_5) se $A \in \Sigma$ é um conjunto compacto, então existe $\delta > 0$ tal que $i(N_\delta(A)) = i(A)$, onde $N_\delta(A)$ denota a δ-vizinhança fechada de A (continuidade).

Exemplo 4 Seja $G_1 = \{i_H\}$, onde i_H é a aplicação identidade em H. Então

Σ consiste em todos os conjuntos fechados de H e
$\mathcal{H}$ consiste em todas as aplicações contínuas em H.

Definindo

$$i_1(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset \\ 1 & \text{se } A \in \Sigma \backslash \emptyset, \end{cases}$$

obtemos a teoria de índice $I_1 = (\Sigma, \mathcal{H}, i_1)$ relativa a G_1, chamada de “teoria trivial de índice”.

Exemplo 5 Seja $G_2 = \{i_E, w_E\}$ como no exemplo 1. Então temos que

$\Sigma = \{A \in H\,;\, A$ é fechado em H e simétrico em relação à origem$\}$ e

$\mathcal{H} = \{h : H \to H\,;\, h$ é contínua e ímpar$\}$.

Seja i_2 denotando o *genus*, isto é, $i_2(A) = k$ para $A \in \Sigma$, onde k é o menor inteiro tal que existe uma transformação contínua e ímpar $\varphi : A \to \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$.

Se não existir tal transformação, definimos $i_2(A) = +\infty$. Também colocamos $i_2(\emptyset) = 0$. Obtemos então a teoria de índice $(\Sigma, \mathcal{H}, i_2)$ relativa ao grupo G_2, também chamada de “genus”.

Além das propriedades da definição A.7, de acordo com [25], i_2 também satisfaz:

(i_6) se $i_2(A) > k$ e V é um subespaço de H com $\dim V = k$, então $A \cap V^{\perp} \neq \emptyset$;

(i_7) se h é um homeomorfismo ímpar e W é um subespaço de H com dimensão finita, então $i_2\big(h(S_\rho \cap W)\big) = \dim W$.

Definição A.8 Sejam $I = (\Sigma, \mathcal{H}, i)$ uma teoria de índice em H, relativa ao grupo G e $S \in \Sigma$. Uma teoria de pseudo-índice (relativa a S e I) é uma tripla

$$I^* = (S, \mathcal{H}^*, i^*),$$

onde $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{H}$ é um grupo de homeomorfismos em H e $i^* : \Sigma \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ é a transformação definida por

$$i^*(A) = \min_{h \in \mathcal{H}^*} i\big(h(A) \cap S\big).$$

Teorema A.1 *Sejam H um espaço de Hilbert no qual a teoria de índice $I = (\Sigma, \mathbb{R}, i)$ relativa ao grupo G atua e $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ um funcional G-invariante. Sejam também $S \in \Sigma$, a, b, c_0, $c_\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ tais que*

$$-\infty \leqslant a < c_0 < c_\infty < b \leqslant +\infty.$$

Considere a teoria de pseudo-índice $I^* = (S, \mathcal{H}^*, i^*)$, onde $\mathcal{H}^*$ é o grupo de homeomorfismos G-equivariantes $h : H \to H$ tais que

$$h(u) = u \quad \text{se} \quad u \notin f^{-1}\big((a, b)\big).$$

Suponha que:

(a_1) f satisfaz a condição C em (a, b), conforme a definição A.2;

(a_2) $S \subseteq f^{-1}\big([c_0, +\infty)\big)$;

(a_3) existem $\overline{A} \in \Sigma$ e um inteiro $\overline{k} \geqslant 1$ tais que $\overline{A} \subseteq f^{-1}\big((-\infty, c_\infty)\big)$ e $i^*(\overline{A}) = \overline{k}$.

Então os números

$$c_k = \inf_{A \in \Sigma_k} \sup_{u \in A} f(u), \qquad k = 1, 2, ..., \overline{k}, \qquad \Sigma_k = \{A \in \Sigma\,;\, i^*(A) \geqslant k\},$$

são valores críticos de f e

$$c_0 \leqslant c_1 \leqslant ... \leqslant c_{\overline{k}} \leqslant c_\infty.$$

Além disso, se $c = c_k = ... = c_{k+r}$ com $k \geqslant 1$ e $k + r \leqslant \overline{k}$, então

$$i(K_c) \geqslant r + 1.$$

Demonstração: Inicialmente vamos provar que $c_0 \leqslant c_k \leqslant c_\infty$ para $k = 1, 2, ..., \overline{k}$ e, em particular, vamos deduzir que os números c_k's estão bem definidos, ou seja, não podem assumir os valores $\pm\infty$.

Suponhamos, por contradição, que $c_k < c_0$ (note que assim poderia ocorrer o caso $c_k = -\infty$). Então, pela definição de c_k, existe $\overline{A} \in \Sigma_k$ tal que

$$\sup_{u \in \overline{A}} f(u) < c_0,$$

ou seja, que $i^*(\overline{A}) \geqslant k$ e $\overline{A} \subseteq f^{-1}\big((-\infty, c_0)\big)$. Como $S \subseteq f^{-1}\big([c_0, +\infty)\big)$, concluímos que $\overline{A} \cap S = \emptyset$. Assim, como $id \in \mathcal{H}^*$, obtemos

$$i^*(\overline{A}) = \min_{h \in \mathcal{H}^*} i\big(h(\overline{A}) \cap S\big) \leqslant i(\overline{A} \cap S) = i(\emptyset) = 0,$$

o que contradiz o fato de $i^*(\overline{A}) \geqslant k$.

Ainda por contradição, se $c_k > c_\infty$ (podendo então ocorrer o caso $c_k = +\infty$) teríamos que

$$\sup_{u \in A} f(u) > c_\infty \qquad \forall\, A \in \Sigma_k,$$

ou seja, $A \nsubseteq f^{-1}\big((-\infty, c_\infty]\big)$ para todo $A \in \Sigma_k$, contradizendo (a_3).

Agora, como $\Sigma_{k+1} \subseteq \Sigma_k$, temos que

$$c_{k+1} = \inf_{A \in \Sigma_{k+1}} \sup_{u \in A} f(u) \geqslant \inf_{A \in \Sigma_k} \sup_{u \in A} f(u) = c_k.$$

Portanto, concluímos que $c_0 \leqslant c_1 \leqslant ... \leqslant c_{\overline{k}} \leqslant c_\infty$.

Para provar que os c_k's são valores críticos é suficiente demostrar a última afirmação do teorema.

Novamente por contradição, suponhamos que $i(K_c) \leqslant r$.

Considerando $\{u_k\} \subseteq K_c$, temos $f(u_k) = c$ e $f'(u_k) = 0$. Utilizando a hipótese (a_1), obtemos que u_k possui uma subseqüência convergente. Portanto, K_c é compacto e, pela propriedade de continuidade (item (i_5) da definição A.7), existe uma vizinhança fechada N de K_c, com $N \in \Sigma$ e

$$i(N) = i(K_c) \leqslant r. \tag{A.4}$$

Além disso, pelos Lemas A.1 e A.2, existem $\delta > 0$ com $c - \delta > a$, $c + \delta < b$ e um homeomorfismo $\eta : H \to H$ G-equivariante, tais que

$$\eta(A_{c+\delta} \backslash N) \;\subseteq\; A_{c-\delta},$$

$$\eta(u) = u \quad \text{se} \quad u \notin f^{-1}\big((a, b)\big).$$

Também, como

$$c + \delta > c = c_{k+r} = \inf_{A \in \Sigma_{k+r}} \sup_{u \in A} f(u),$$

temos que existe $A \in \Sigma_{k+r}$ tal que

$$\sup_{u \in A} f(u) < c + \delta,$$

ou seja, $A \subseteq A_{c+\delta}$. Assim, temos que

$$\eta(A \backslash N) \subseteq A_{c-\delta} \quad \text{e} \quad i^*(A) \geqslant k + r. \tag{A.5}$$

Logo, $f(u) \leqslant c - \delta$ para todo $u \in \eta(A \backslash N)$ e, pela continuidade de f,

$$f(u) \leqslant c - \delta \qquad \forall\, u \in \eta(\overline{A \backslash N}). \tag{A.6}$$

Agora, usando que $i^*(\overline{A \backslash N}) > i^*(A) - i(N)$, por (A.4) e (A.5) obtemos que

$$i^*(\overline{A \backslash N}) \geqslant k + r - r = k. \tag{A.7}$$

Note que $\eta \in \mathcal{H}^*$ e, então,

$$\begin{aligned} i^*\big(\eta(\overline{A \backslash N})\big) &= \min_{h \in \mathcal{H}^*} i\big(h(\eta(\overline{A \backslash N})) \cap S\big) \\ &= \min_{h \in \mathcal{H}^*} i\big(\eta(h(\overline{A \backslash N})) \cap S\big) = i^*(\overline{A \backslash N}). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Assim, por (A.7) e (A.8), temos que

$$i^*\big(\eta(\overline{A \backslash N})\big) = i^*(\overline{A \backslash N}) \geqslant k,$$

ou seja, $\eta(\overline{A \backslash N}) \in \Sigma_k$. Mas como $c = c_k$, temos que

$$\sup_{u \in \eta(\overline{A \backslash N})} f(u) \geqslant c > c - \delta,$$

uma contradição com (A.6).

□

Teorema A.2 *Suponha que $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ é tal que:*

(f_1) f satisfaz a condição C em $(0, +\infty)$, conforme a definição A.2;

(f_2) existem um subespaço fechado $S \subseteq H$ e uma variedade de Hilbert $Q \subseteq H$, com fronteira ∂Q, que verificam as seguintes propriedades:

(a) existem constantes $\beta > \alpha \geqslant 0$ tais que

$$f(u) \leqslant \alpha \quad \forall\, u \in \partial Q \qquad e \qquad f(u) \geqslant \beta \quad \forall\, u \in S,$$

(b) S e ∂Q link,

(c) $\sup_{u \in Q} f(u) < +\infty$.

Então f possui um valor crítico $c \geqslant \beta$.

Demonstração: Considere

$$\mathcal{H}^* = \{h : H \to H\,;\, h \text{ é homeomorfismo e } h(u) = u \text{ se } u \notin f^{-1}\big((\alpha,\infty)\big)\}$$

e a teoria de pseudo-índice $I_1^* = (S, \mathcal{H}^*, i_1^*)$ relativa a S, onde i_1 é a teoria trivial de índice, conforme o exemplo 4.

Considere também c_0, c_∞ constantes positivas tais que

$$c_\infty > \max\{\sup f(Q), \beta\} \qquad \text{e} \qquad \alpha < c_0 < \beta.$$

Mostraremos que as hipóteses do Teorema A.1 são satisfeitas para

$$a = \alpha, \qquad b = \infty, \qquad \overline{A} = Q, \qquad \overline{k} = 1.$$

Obviamente, (f_1) garante que condição (a_1) seja válida.

Como $f(u) \geqslant \beta > c_0$ para todo $u \in S$, temos que $S \subseteq f^{-1}\big([c_0, +\infty)\big)$ e, assim, (a_2) também é válida.

Como

$$u \in \partial Q \;\Rightarrow f(u) \leqslant \alpha \;\Rightarrow u \notin f^{-1}\big((\alpha,\infty)\big) \;\Rightarrow h(u) = u \;\; \forall\, h \in \mathcal{H}^*$$

e como ∂Q e S link, temos que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$ para todo $h \in \mathcal{H}^*$ e, portanto,

$$i_1(h(Q) \cap S) = 1 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}^*.$$

Logo,

$$i_1^*(Q) = \min_{h \,\in\, \mathcal{H}^*} i_1\big(h(Q) \cap S\big) = 1$$

e como

$$u \in Q \;\Rightarrow\; f(u) \leqslant \sup f(Q) < c_\infty \;\Rightarrow\; Q \subseteq f^{-1}\big((-\infty, c_\infty)\big),$$

temos que a condição (a_3) também é satisfeita.

Portanto, podemos utilizar o Teorema A.1 e obter que

$$c = \inf_{A \,\in\, \Sigma_1} \sup f(A)$$

é um valor crítico de f, pertencente ao intervalo $[c_0, c_\infty]$. Além disso, como

$$i_1^*(A) = 1 \Rightarrow i_1(h(A) \cap S) = 1 \;\forall\, h \in \mathcal{H}^* \Rightarrow h(A) \cap S \neq \emptyset \;\forall\, h \in \mathcal{H}^* \Rightarrow A \cap S \neq \emptyset,$$

vemos que existe $u_0 \in A \cap S$ para todo $A \in \Sigma_1$. Portanto, pela hipótese (a), obtemos que

$$\sup f(A) \geqslant f(u_0) \geqslant \beta \qquad \forall\, A \in \Sigma_1,$$

ou seja,

$$c \geqslant \beta.$$

$\square$

Teorema A.3 *Seja H um espaço de Hilbert no qual a teoria de índice do genus, $I_2 = (\Sigma, \mathcal{H}^*, i_2)$, atua conforme o exemplo 5. Sejam V e W subespaços fechados de H com*

$$\textit{codim}\, V < +\infty \quad e \quad \dim W < +\infty.$$

Se h é um homeomorfismo ímpar e limitado em H, então

$$i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big) \geqslant \dim W - \textit{codim}\, V.$$

Demonstração: Como W e V são fechados, a dimensão de W é finita e h é um homeomorfismo limitado em H, temos que $W \cap h(S_\rho \cap V)$ é compacto. Logo, pela propriedade (i_5) da definição A.7, existe uma vizinhança fechada de $W \cap h(S_\rho \cap V)$, denotada por $N_\delta\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big)$, tal que

$$i_2\big(N_\delta(W \cap h(S_\rho \cap V))\big) = i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big). \tag{A.9}$$

Afirmação: Existe uma vizinhança $N_\varepsilon(V) = V_\varepsilon$ de V tal que

$$W \cap h(S_\rho \cap V_\varepsilon) \subseteq N_\delta\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big).$$

De fato, supondo por contradição que para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$W \cap h(S_\rho \cap V_\varepsilon) \nsubseteq N_\delta\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big)$$

e tomando $\varepsilon_n = 1/n$, vemos que existe $y_n \in W \cap h(S_\rho \cap V_{\varepsilon_n})$ tal que $y_n \notin N_\delta\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big)$. Como $y_n \in h(S_\rho \cap V_{\varepsilon_n})$, temos que y_n é limitada. Além disso, como $y_n \in W$ e $\dim W < \infty$, existe uma subseqüência y_{n_k} convergente.

Seja $y = \lim y_{n_k}$. Temos que $y \in W$, pois W é fechado.

Como $y_{n_k} \in h(S_\rho \cap V_{\varepsilon_n})$, existe $x_{n_k} \in S_\rho \cap V_{\varepsilon_n}$ tal que $h(x_{n_k}) = y_{n_k}$ e, como h é um homeomorfismo, também temos que $x_{n_k} = h^{-1}(y_{n_k})$ é convergente.

Seja $x = h^{-1}(y)$. Então $\lim x_{n_k} = x$ e como

$$x_{n_k} \in V_{\varepsilon_n} \Rightarrow d(x_{n_k}, V) < \varepsilon_n \to 0 \Rightarrow d(x, V) \leqslant d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, V) \to 0,$$

temos que $d(x, V) = 0$ e, por V ser fechado, concluímos que $x \in V$.

Assim, temos que $x \in V \cap S_\rho$ e então, $y = h(x) \in h(V \cap S_\rho)$. Portanto, $y \in W \cap h(V \cap S_\rho)$ e daí

$$y \in N_\delta(W \cap h(V \cap S_\rho)),$$

mas isto contradiz o fato que $y = \lim y_{n_k}$, com $y_{n_k} \in \big(N_\delta(W \cap h(V \cap S_\rho))\big)^c$.

Desta forma, a afirmação está provada.

Consideremos então a vizinhança V_ε de V tal que

$$W \cap h(S_\rho \cap V) \subseteq W \cap h(S_\rho \cap V_\varepsilon) \subseteq N_\delta\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big).$$

Pela propriedade (i_2), temos que

$$i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big) \leqslant i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V_\varepsilon)\big) \leqslant i_2\big(N_\delta\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big)\big)$$

e por (A.9), obtemos que

$$i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big) = i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V_\varepsilon)\big). \tag{A.10}$$

Agora vamos considerar $R = \overline{H \backslash V_\varepsilon}$ e $P_{V^\perp} : H \to V^\perp$ o operador que realiza a projeção no complemento ortogonal de V. Como $P_{V^\perp} \in \mathcal{H}^*$ e R é fechado temos que

$$\overline{P_{V^\perp}(R)} = P_{V^\perp}(R).$$

Assim, pela propriedade (i_4), deduzimos que

$$i_2(R) \leqslant i_2(\overline{P_{V^\perp}(R)}) = i_2(P_{V^\perp}(R)). \tag{A.11}$$

Inicialmente vamos mostrar que

$$i_2(P_{V^\perp}(R)) \leqslant codim\, V. \tag{A.12}$$

Suponhamos, por contradição, que

$$i_2(P_{V^\perp}(R)) > codim\, V = \dim V^\perp.$$

Então, pela propriedade (i_6) do exemplo 5, temos que

$$P_{V^\perp}(R) \cap V \neq \emptyset.$$

Assim, como $P_{V^\perp}(R) \subseteq V^\perp$ e $V \cap V^\perp = \{0\}$, vemos que $0 \in P_{V^\perp}(R)$ e portanto,

$$V \cap R \neq \emptyset,$$

contradizendo o fato que $R = \overline{H \backslash V_\varepsilon}$. Desta forma, (A.12) é válida.

Agora, para $\varepsilon < \rho$ temos que $S_\rho \cap V^\perp \subseteq R$ e, assim, $i_2(S_\rho \cap V^\perp) \leqslant i_2(R)$. Sabendo que $i_2(S^{n-1}) = n$ (conforme [25]) ou pela propriedade (i_7) do exemplo 5, obtemos que

$$codim\, V = \dim V^\perp = i_2(S_\rho \cap V^\perp). \tag{A.13}$$

Daí, por (A.11), (A.12) e (A.13), temos que

$$i_2(R) \leqslant i_2(P_{V^\perp}(R)) \leqslant codim\, V = i_2(S_\rho \cap V^\perp) \leqslant i_2(R).$$

Portanto, deduzimos que

$$i_2(R) = codim\, V. \tag{A.14}$$

Por outro lado, como $S_\rho = \big(S_\rho \cap V_\varepsilon\big) \cup \big(S_\rho \cap R\big)$ e esta é uma união disjunta, temos que

$$h(S_\rho) = h(S_\rho \cap V_\varepsilon) \cup h(S_\rho \cap R),$$

logo,

$$W \cap h(S_\rho) = \big(W \cap h(S_\rho \cap V_\varepsilon)\big) \cup \big(W \cap h(S_\rho \cap R)\big).$$

Assim, usando a propriedade (i_3) e (A.10), obtemos que

$$\begin{aligned} i_2\big(W \cap h(S_\rho)\big) &\leqslant i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V_\varepsilon)\big) + i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap R)\big) \\ &= i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big) + i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap R)\big). \end{aligned} \tag{A.15}$$

Pelo exemplo 5, temos que

$$i_2\big(h(S_\rho) \cap W\big) = \dim W \tag{A.16}$$

e também, por (i_2), (i_4) e (A.14),

$$\begin{aligned} i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap R)\big) &\leqslant i_2\big(h(S_\rho \cap R)\big) \leqslant i_2\big(h^{-1}\overline{h(S_\rho \cap R)}\,\big) \\ &= i_2(S_\rho \cap R) \leqslant i_2(R) = codim\, V. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Portanto, por (A.15), (A.16) e (A.17), finalmente obtemos

$$\begin{aligned} i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap V)\big) &\geqslant i_2\big(W \cap h(S_\rho)\big) - i_2\big(W \cap h(S_\rho \cap R)\big) \\ &\geqslant dim\, W - codim\, V. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema A.4 *Suponha que $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ possua as seguintes propriedades:*

(f_1) *f satisfaz a condição C em $(0, \infty)$ e $f(0) \geqslant 0$;*

(f_2) *existem subespaços fechados H^+ e H^- de H, com $codim\, H^+ < \infty$ e constantes $c_\infty > c_0 > f(0)$ tais que*

$$\begin{array}{ll} (a)\ f(u) \geqslant c_0 & \forall\, u \in S_\rho \cap H^+ \text{ para algum } \rho > 0, \\ (b)\ f(u) < c_\infty & \forall\, u \in H^-; \end{array}$$

(f_3) *f é par.*

Se $\dim H^- > codim\, H^+$, então f possui ao menos $m = \dim H^- - codim\, H^+$ pares distintos de pontos críticos, cujos valores críticos correspondentes pertencem ao intervalo $[c_0, c_\infty]$.

Demonstração: Considere a teoria de índice do genus $I_2 = (\Sigma, \mathcal{H}, i_2)$, conforme o exemplo 5, e a teoria de pseudo-índice $I_2^* = (S_\rho \cap H^+, \mathcal{H}^*, i_2^*)$, onde

$$\mathcal{H}^* = \{h : H \to H\,;\, h \text{ é um homeomorfismo ímpar e limitado, com } h(u) = u \ \text{ se } u \notin f^{-1}\big((0, +\infty)\big)\}.$$

Vamos mostrar que as hipótese do Teorema A.1 são satisfeitas para $a = 0$ e $b = \infty$.

Obviamente, (f_1) garante que a condição (a_1) seja válida.

Como

$$u \in S = S_\rho \cap H^+ \;\Rightarrow\; f(u) \geqslant c_0 \;\Rightarrow\; u \in f^{-1}\big([c_0, c_\infty)\big),$$

temos que $S \subseteq f^{-1}\big([c_0, c_\infty)\big)$ e, assim, a condição (a_2) também é válida.

Agora, tomando $\overline{A} = H^-$, vemos que $\overline{A} \subseteq f^{-1}\big((-\infty, c_\infty)\big)$, pois

$$u \in \overline{A} \;\Rightarrow f(u) \; < c_\infty \;\Rightarrow\; u \in f^{-1}\big((-\infty, c_\infty)\big).$$

Ainda, pela superinvariância do índice, temos que

$$\begin{aligned} i_2^*(\overline{A}) = i_2^*(H^-) &= \min_{h \in \mathcal{H}^*} i_2\big(h(H^-) \cap S_\rho \cap H^+\big) \\ &= \min_{h \in \mathcal{H}^*} i_2\big(h^{-1}\big[h(H^-) \cap S_\rho \cap H^+\big]\big) \\ &= \min_{h \in \mathcal{H}^*} i_2\big(H^- \cap h^{-1}(S_\rho \cap H^+)\big). \end{aligned}$$

Pelo Teorema A.3, para todo $h \in \mathcal{H}^*$ temos

$$i_2(H^- \cap h^{-1}(S_\rho \cap H^+)) \geqslant \dim H^- - \text{codim } H^+.$$

Assim, obtemos que

$$i_2^*(\overline{A}) \geqslant \dim H^- - \text{codim } H^+ = \overline{k} \geqslant 1$$

e a condição (a_3) também é satisfeita.

Portanto, podemos utilizar o Teorema A.1 e obter que

$$c_k = \inf_{A \in \Sigma_k} \sup_{u \in A} f(u), \qquad k = 1, ..., \dim H^- - \text{codim } H^+$$

são valores críticos de f e

$$f(0) < c_0 \leqslant c_k \leqslant c_\infty, \qquad k = 1, ..., \dim H^- - \text{codim } H^+.$$

Se ocorrer que $c_k \neq c_{k+1}$ para cada k, teremos que existem ao menos

$$\overline{k} = \dim H^- - \text{codim } H^+$$

pontos críticos distintos de f no intervalo $[c_0, c_\infty]$. E como f é par, obtemos o resultado desejado.

Porém, se ocorrer que $c = c_k = ... = c_{k+r}$ para algum $k \geqslant 1$ e $k + r \leqslant \overline{k}$, pelo Teorema A.1, teremos que

$$i_2(K_c) \geqslant r + 1 \geqslant 2 \tag{A.18}$$

e como $f(0) < c_0 \leqslant c_k = c$, obtemos que $0 \notin K_c$. Assim, podemos concluir que K_c possui infinitos pontos críticos, pois se K_c fosse um conjunto finito (mas que não contém a origem), teríamos que $i_2(K_c) = 1$, contradizendo (A.18).

□

Apêndice B

Neste apêndice, vamos enunciar o teorema utilizado na demonstração do Lema 5.2. Trata-se de uma variação do Mountain Pass Theorem, onde não se exige a condição de compacidade de Palais-Smale.

Teorema B.1 *Seja f uma função de classe C^1 definida em um espaço de Banach X. Suponhamos que existem uma vizinhança U da origem, contida em X, e uma constante positiva ρ tal que*

i) $f(u) \geqslant \rho$ *para todo* $u \in \partial U$,
ii) $f(0) < \rho$,
iii) $f(v) < \rho$ *para algum* $v \notin U$.

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{w \in \gamma} f(w) \geqslant \rho,$$

onde Γ denota o conjunto de todas as curvas contínuas que ligam 0 a v.

Então, existe uma seqüência $\{u_k\}$ em X tal que

$$f(u_k) \to c \quad \text{e} \quad f'(u_k) \to 0 \text{ em } X'.$$

A demonstração desse resultado pode ser obtida tanto em [2] quanto em [7].

Observe que a conclusão deste Teorema, juntamente com a condição de compacidade de PS, permite demonstrar o Mountain Pass Theorem.

REFERÊNCIAS

[1] F. Almgren and E. Lieb, *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous,* J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 683-773.

[2] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications,* J. Functional Analysis **14** (1973), 349-381.

[3] A. Ambrosetti, *Critical points and nonlinear variational problems,* Mémoire de la Societé Mathématique de France, **49** (1992).

[4] P. Bartolo, V. Benci and D. Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity,* Nonlinear Anal. **7** (1983), 981-1012.

[5] H. Berestycki, J. M. Lasry, G. Mancini and B. Ruf, *Existence of multiple periodic orbits on star-shaped Hamiltonian surfaces,* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 253-290.

[6] H. Brezis, J. M. Coron and L. Nirenberg, *Free vibrations for a nonlinear equation a theorem of P. Rabinowitz,* Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 667-684.

[7] H. Brezis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[8] F. Browder, *Infinite dimensional manifolds and nonlinear eigenvalue problems,* Ann. of Math. **82** (1965), 459-477.

[9] A. Capozzi, D. Fortunato and G. Palmieri, *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **2** (1985), 463-470.

[10] G. Cerami, D. Fortunato and M. Struwe, *Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **1** (1984), 341-350.

[11] H. Egnell, *Elliptic boundary value problems with singular coefficients and critical nonlinearities,* Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 235-251.

[12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, vol 19, American Mathematical Society, (1998).

[13] A. Ferrero, *Esistenza di soluzioni per equazioni ellittiche singolari a crescita critica,* Tesi di Laurea, Alessandria, (2000).

[14] A. Ferrero and F. Gazzola, *Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **177** (2001), 494-522.

[15] N. Ghoussoub and D. Preiss *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **6** (1989), 321-330.

[16] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlim, (1983).

[17] S. J. Gustafson and I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics,* Springer-Verlag, Berlim, (2003).

[18] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities,* Cambridge University, Cambridge, (1952).

[19] E. Jannelli, *The role played by space dimension in elliptic critical problems,* J. Differential Equations **156** (2000), 407-426.

[20] M. A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the theory of nonlinear integral equations,* Pergamon, Oxford, (1965).

[21] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis,* Graduate Studies in Mathematics, vol 14, American Mathematical Society, (1997).

[22] L. Lusternick and L. Schnirelman, *Méthode topologique dans les problémes varationelles,* Hermann, Paris, (1934).

[23] R. Palais, *Lusternick-Schnirelman theory on Banach manifolds,* Topology **5** (1966), 115-132.

[24] R. Palais and S. Smale, *A generalized Morse theory,* Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 165-171.

[25] P. H. Rabinowitz, *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems,* Edizioni Cremonese. Roma, (1974), 141-195.

[26] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations,* CBMS Reg. Conf. Series Math., vol 65, Amer. Math. Soc., Providence, (1986).

[27] J. T. Schwartz, *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points,* Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 307-315.