

No mundo que envolve os esportes existe uma expressão chamada "matematicamente eliminado" a qual se refere a impossibilidade de um time alcançar o título da competição. A situação mais simples refere-se a quando uma equipe, mesmo vencendo todos os jogos, não tem condições de superar as vitórias de seu adversário. Entretanto, a mais interessante situação envolve um número maior de equipes com culminando em diferentes resultados.

Podemos mostrar matematicamente como uma equipe pode ou não estar matematicamente eliminada. Tomaremos uma equipe B. Chamaremos T o conjunto das outras equipes que não aquela. Para cada  $i \in T$ , chamaremos de  $\omega_i$  o número de vitórias da equipe i, e para  $i, j \in T$ ,  $r_{ij}$  será o número de jogos restantes entre as equipes i e j. Chamaremos P o conjunto de equipes de T com jogos a disputar. Finalmente, chamaremos M o número de vitórias de B caso ela vença todos os jogos.

Seja A um subconjunto de T. Cada jogo disputado por duas equipes de A é contabilizado como uma vitória certa, e o número total de vitórias de A no final do campeonato é  $\omega(A) + \sum(r_{ij} : i, j \subseteq A, i, j \in P)$ . Portanto, a equipe B está eliminada caso haja um subconjunto  $A \subseteq T$  tal que:  $\omega(A) + \sum(r_{ij} : i, j \subseteq A, i, j \in P) > M|A|$

Para provar que a equipe B não está eliminada, encontraremos um conjunto com uma combinação de resultados que implique na vitória de B. Seja  $Y_{ij}$  o número de vitórias de i sobre j. Então a equipe B não está eliminada se existir um valor pra  $Y_{ij}$  satisfazendo:  $Y_{ij} + Y_{ji} = r_{ij}$ , para todo  $i, j \in P$ ;  $\omega_i + \sum(Y_{ij} : j \in T, j \neq i) \leq M$ , para todo  $i \in T$ ;  $Y_{ij} \geq 0$ , para todo  $i, j \in P$ ;  $Y_{ij}$  inteiro, para todo  $i, j \in P$

Para executarmos a tarefa desejada, criamos um grafo  $G = (V, E)$ .  $V = T \cup P \cup r, s$ . Para cada  $i \in T$ , existe um arco  $(r, i)$  com capacidade  $(M - \omega_i)$  correspondente ao número de vitórias possíveis as quais o time i poderão ter e, mesmo assim, B sair campeão. Para cada  $i \in T$  e  $j \in T$  com  $i, j \in P$ , existem arcos  $(i, i, j)$  e  $(j, i, j)$  com capacidade  $\infty$ , e arcos  $(i, j, s)$  com capacidade  $r_{ij}$  que condizem com o número de vitórias certas do subconjunto A. Supomos que neste grafo existe viável  $(r, s)$ -fluxo de valor  $\sum(r_{ij} : i, j \in P)$ . Então se colocarmos  $Y_{ij}$  como sendo o fluxo nos arcos  $(i, j, s)$ , nós iremos satisfazer as condições.

É fácil de ver que as capacidades das arestas  $(i, j, s)$  do grafo devem estar saturadas, pois elas correspondem aos jogos que contarão como vitórias certas para o subconjunto A. Portanto, para que a equipe B esteja eliminada deve existir um subconjunto A cujo fluxo máximo não seja igual ao corte mínimo que corresponde ao  $\sum(r_{ij}, \text{ para todo } i, j \in P)$  para assim satisfazer a saturação das arestas.