Na modelagem do transporte de fótons para tratamento de câncer por radioterapia, em faixas de baixa energia, o efeito conhecido como espalhamento Compton é predominante. Neste caso, as interações das partículas seguem a lei de espalhamento de Klein-Nishina, cuja formulação matemática determina dependência dos limites de integração, do termo integral da equação do transporte de fótons, com relação ao comprimento de onda do fóton, caracterizando uma equação integral de Volterra, tema central de estudo, neste trabalho.

Muitos problemas de ciência e tecnologia levam em consideração uma equação da forma

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (1)$$

onde, $\varphi(x)$ é uma função desconhecida. Esta equação é chamada *equação integral*, uma vez que a função desconhecida encontra-se como parte do integrando. Na equação (1) temos que a função $f(x)$ é o termo livre da equação, λ é parâmetro e $K(x,s)$ é o núcleo da equação. Aqui, $f(x)$, λ, $K(x,s)$ e $\varphi(x)$ podem assumir valores complexos e os limites de integração, a e b são constantes. As características de uma equação integral são, fundamentalmente, determinadas pelo núcleo. Quando $K(x,s)$ é contínuo para $a \leq x \leq b$, ou ainda para certas condições restritivas de descontinuidade, a equação (1) é chamada ***equação integral de Fredholm***, particularmente, de segundo tipo, sendo, a equação integral de Fredholm de primeiro tipo, da forma

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)\,. \qquad (2)$$

Neste estudo, inicialmente, relações entre os dois tipos da equação de Fredholm, bem como, algumas propriedades destas equações foram analisadas. Na sequência, como caso especial, as ***equações integrais de Volterra*** foram enfocadas. Nesse caso, $K(x,s)$ é nulo quando $x < s \leq b$, e a equação (1) assume a forma

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \quad (3)$$

onde se observa a dependência dos limites de integração em termos da variável independente.

De forma geral, para essa classe de equações, classificações de acordo com as propriedades do núcleo integral, bem como solução a partir do método de resolução denominado aproximações sucessivas, foram estudadas. Condições de existência e unicidade de solução e as condições de convergência das aproximações foram ainda detalhadas.

No estágio atual, segue, em andamento, o estudo de algumas abordagens numéricas para a solução das equações integrais de Volterra, como as que utilizam polinômios de Chebyshev. Testes em problemas simples disponíveis na literatura estão sendo feitos. É objetivo final do projeto utilizar tal abordagem na solução do problema de transporte de fótons com núcleo de espalhamento de Klein-Nishina.