

Luísa Bürgel Borsato
Orientadora: Profª Virgínia Maria Rodrigues

Um *grafo* $G = G(V,E)$ é uma estrutura formada por um conjunto não vazio de vértices V e um conjunto de arestas E , onde cada aresta é um par não ordenado de vértices distintos, visto que consideramos apenas grafos sem laços. *Árvores* são grafos simples, conexos e sem ciclos.

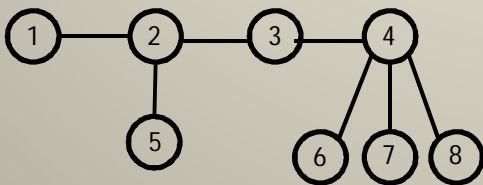


Fig. 1: Árvore com 8 vértices

A Teoria Espectral de Grafos busca analisar propriedades de grafos através do espectro de algumas matrizes a eles associadas, como a *Matriz de Adjacência* e a *Matriz Laplaciana*.

A Matriz Laplaciana, L , associada a um grafo $G=G(V,E)$, com vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é a matriz quadrada de ordem n , cujas entradas l_{ij} são:

- $l_{ij} = -1$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes, isto é, estão ligados por uma aresta;
- $l_{ii} = d(v_i)$, onde $d(v_i)$ é o grau do vértice v_i . Ou seja, quantas arestas são incidentes a v_i .
- $l_{ij} = 0$, nos outros casos.

Sendo assim, para a árvore da Figura 1, obtemos a seguinte Matriz Laplaciana:

$$\begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

Fig. 2: Matriz Laplaciana da árvore da Fig. 1

Em 2011, Trevisan, Carvalho, Del Vecchio e Vinagre [1] conjecturaram:

“Em toda árvore, o número de autovalores Laplacianos menores do que a média dos graus dos vértices é pelo menos a metade.”

Esta conjectura já foi provada [2] para alguns tipos de grafos, incluindo caminhos, estrelas e *caterpillars*.

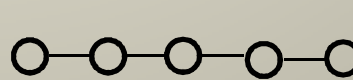


Fig. 3: Caminho

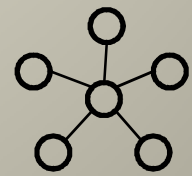


Fig. 4: Estrela

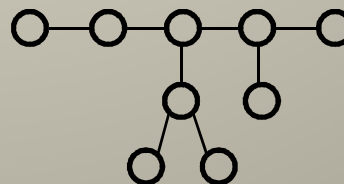


Fig. 5: Caterpillar

Neste trabalho, estamos investigando a validade desta conjectura para os casos ainda em aberto, como as árvores do tipo *starlikes* não-balanceadas.

Em particular, estamos interessados nas *starlikes* não-balanceadas que contêm caminhos pendentes com a diferença de, no máximo, um vértice.

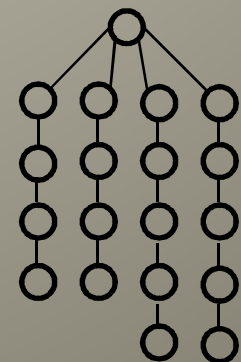


Fig. 6: Starlike não-balanceada

Referências:

- [1] V. Trevisan, J. B. Carvalho, R. R. Del-Vecchio e C. T. M. Vinagre. Laplacian energy of diameter 3 trees. *Applied Mathematics Letters* 24 (2011), 918-923.
- [2] R. O. Braga, V. M. Rodrigues e V. Trevisan. On the Distribution of the Laplacian Eigenvalues of Trees, *preprint* (2012).