UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Equação de Burgers: Propriedades e comportamento assintótico

por

Bárbara Cristina Pasa

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano
Orientador

Porto Alegre, Outubro de 2005.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Pasa, Bárbara Cristina

Equação de Burgers: Propriedades e comportamento assintótico / Bárbara Cristina Pasa.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2005.

80 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005.
Orientador: Zingano, Paulo Ricardo de Ávila

Dissertação: Matemática Aplicada
Equação de Burgers, Comportamento Assintótico, Desigualdades de Energia, Taxas de Decaimento

Equação de Burgers: Propriedades e comportamento assintótico

por

Bárbara Cristina Pasa

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano

Banca examinadora:

Prof. Dr. Oclide José Dotto
UCS

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
PPGMAT/IM/UFRGS

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva
PPGMAP/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
16 de Agosto de 2002.

Prof^{a}. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenador

Aos meus pais,

Ivo e Delires,

e à minha irmã,

Suelem.

SUMÁRIO

RESUMO

No presente trabalho, obtemos e analisamos diversas propriedades das soluções $u(\cdot,t)$ da equação de difusão linear (equação do calor em meios unidimensionais homogêneos)

$$u_t = \mu u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

correspondentes a estados iniciais $u(x,0) = u_0(x)$, com $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, para algum $1 \leq p < \infty$; bem como da equação de Burgers

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

onde c, μ são constantes dadas, sendo $c \neq 0$ e $\mu > 0$ e ainda assumindo $u(x,0) = u_0(x)$ com $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$, e limitado.

Estudamos também a equação mais geral da forma

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

discutindo várias propriedades importantes das soluções, associadas a estados iniciais $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p < \infty$. Em particular, examinamos o comportamento de $\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$, $p \leq r \leq \infty$, para $t >> 1$, e diversas propriedades relacionadas.

ABSTRACT

In this work, we discuss a number of fundamental properties of the solutions $u(\cdot,t)$ of the linear diffusion equation (the so-called heat equation for uni-dimensional, homogeneous media)

$$u_t = \mu u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

with initial date $u(x,0) = u_0(x)$, when $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ for some $1 \leq p < \infty$. We also investigate the correspoading properties for the Burgers' equation

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

with c, $\mu \in \mathbb{R}$ constant, $\mu > 0$, under the assumption that $u(x,0) = u_0(x)$ with $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, with u_0 bounded. This analysis is further extended to slightly more general equations of the form

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

with bounded initial date in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Particular attention is given to the study of the large time behavior of solution norms $\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$, $p \leq r \leq \infty$, and some closely related properties.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos analisar várias propriedades das soluções $u(\cdot,t)$ de problemas de valor inicial de certas equações (escalares) parabólicas em 1-D. Esta investigação é iniciada no Capítulo 2 com o problema linear

$$u_t = \mu u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{1.1}$$

$$u(\cdot,0) = u_0, \qquad u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \tag{1.2}$$

onde $1 \leq p < \infty$ e μ denota uma constante positiva, dita "coeficiente de difusividade". A condição inicial (1.2) é entendida no sentido de se ter $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$ ao $t \to 0^+$, ou seja,

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to 0^+. \tag{1.3}$$

onde $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ denota a norma dada por

$$\|w\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

Dado (1.3), é natural impor que se busquem soluções $u(\cdot,t)$ para (1.1), (1.2) variando continuamente em $t \in [0,\infty[$ no espaço $L^p(\mathbb{R})$, de modo a se ter

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_*)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to t_* \tag{1.5}$$

para cada $t_* \geq 0$ dado; em símbolos, $u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}))$. Com essa condição, a solução de (1.1), (1.2) é única, infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}\times]0,\infty[$, e dado pela conhecida expressão

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\, u_0(y)\, dy \tag{1.6}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Esta representação explícita permite a obtenção direta de diversas propriedades importantes de $u(\cdot,t)$ que formam o tema do Capítulo 2. Em particular, verificamos que $u(\cdot,t) \in L^r(\mathbb{R})$ para cada $p \leq r \leq \infty$ e todo $t > 0$, com

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p)\ \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}\ (\mu t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \tag{1.7}$$

para todo $t > 0$, $p \leq r \leq \infty$ e certa constante $C(p) > 0$ que depende apenas do parâmetro p. (Em geral, neste trabalho, constantes serão denotadas pela letra C, indicando-se entre parênteses os parâmetros que influem em seu valor numérico; um mesmo símbolo em instâncias diferentes denotam em geral valores distintos.)

Resulta de (1.7) que $t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$ é limitado por $C(p)\,\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\mu^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}$ para todo $t > 0$, e cada $p \leq r \leq \infty$; o objetivo maior do Capítulo 2 é mostrar que estes produtos tendem a limites bem definidos ao $t \to +\infty$, dados por

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \qquad \textit{se } p > 1 \tag{1.8}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r, e por valores em geral não nulos no caso $p = 1$, dados por

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m|, \qquad p = 1 \tag{1.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}}\left(\frac{4\pi\mu}{r}\right)^{\frac{1}{2r}}, \qquad p = 1 \tag{1.10}$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}}, \qquad p = 1 \tag{1.11}$$

onde m denota a massa da solução, invariante em t,

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx. \tag{1.12}$$

No Capítulo 3, essas propriedades são investigadas no caso do problema

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{1.13}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \tag{1.14}$$

onde c, μ denotam constantes dadas, com $\mu > 0$. Como a equação (1.1), a equação (1.13) representa um modelo fundamental em Física Matemática, tendo sido introduzido por J. Burgers no final dos anos 30 como um modelo simplificado no estudo de turbulência em fluidos [1]. E como no problema (1.1), (1.2) para a equação do calor, a solução $u(\cdot,t)$ de (1.13), (1.14), única no espaço $C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$, decai em várias normas ao $t \to +\infty$; utilizando técnicas baseadas em estimativas de energia apropriadas, mostraremos que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p)\ \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}\ (\mu t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall\ t > 0 \tag{1.15}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, e certa constante $C(p) > 0$ que, mais uma vez, pode ser escolhida de modo a depender só de p. (Para evitar repetição de argumentos, o caso $p > 2$ é examinado, na verdade, no Capítulo 4.) Novamente, os limites

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} =: \gamma_r(p) \tag{1.16}$$

existem, tendo-se $\gamma_r(p) = 0$ para todo $p \leq r \leq \infty$ quando $p > 1$, enquanto para $p = 1$ temos

$$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m|, \qquad (p = 1) \tag{1.17}$$

onde m é a massa da solução, ver (1.12) acima, como no caso anterior da equação do calor; por outro lado, os demais limites $\gamma_r(1)$ (para $r > 1$) são mais complicados, e é mostrado no Capítulo 3 que

$$\lim_{t\to\infty}\ t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}}(4\mu)^{\frac{1}{2r}}\left|\frac{2\mu}{cm}(1-e^{-\frac{cm}{2\mu}})\right|\ \|\mathcal{F}\|_{L^r(\mathbb{R})} \tag{1.18}$$

para $p < r < \infty$, e

$$\lim_{t\to\infty}\ t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}}\left|\frac{2\mu}{cm}(1-e^{-\frac{cm}{2\mu}})\right|\ \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \tag{1.19}$$

para $r = \infty$, sendo $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sigma - h\ \mathsf{erf}(\xi)},$$

onde

$$\mathsf{erf}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi e^{s^2}ds,$$

$$\sigma = \frac{1+e^{-\frac{cm}{2\mu}}}{2}$$

e

$$h = \left|1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}\right|$$

e

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)dx.$$

Finalmente no Capítulo 4 examinamos uma generalização do problema (1.13), (1.14), da forma

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= \mu u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 & (1.20)\\ u(\cdot, 0) &= u_0 \in\ L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), & (1.21)\end{aligned}$$

onde, novamente, p é um dado real maior ou igual a 1. Após examinarmos as propriedades básicas das soluções $u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$ deste problema, obtemos por desigualdades de energia a estimativa

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p)\ \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}\ (\mu t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall\ t > 0 \tag{1.22}$$

para todo $p \leq r \leq \infty$ e cada $p \geq 1$, e certa constante $C(p) > 0$ adequada. O objetivo seguinte deste capítulo é, novamente, computar os limites $\gamma_r(p)$ dados em (1.16) acima. No caso $p > 1$, reobtém-se o resultado anterior

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \qquad (p > 1) \tag{1.23}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r, enquanto, uma vez mais, o caso $p = 1$ requer uma análise mais trabalhosa. Neste último caso, é mostrado no Capítulo 4 que, tendo-se f suave, resulta

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \tag{1.24}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r, onde $v(\cdot,t)$ é solução da equação de Burgers

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = \mu v_{xx} \tag{1.25}$$

correspondente a qualquer estado inicial $v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$ de mesma massa que $u(\cdot,0)$, isto é,

$$v(\cdot,0) = v_0 \in L^1(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} v_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx. \tag{1.26}$$

Em particular, obtém-se para $\gamma_r(1)$ os mesmos valores dados em (1.9), (1.11) acima, onde $c = f^{''}(0)$.

Para finalizar esta introdução, observamos que os resultados aqui obtidos não são originais, nem os argumentos utilizados; tratamos, ao invés, de reunir numa discussão uniforme resultados e métodos encontrados nas referências citadas, especialmente [11], [12], [13] e [14].

2 EQUAÇÃO DO CALOR EM 1-D

2.1 Introdução

O objeto de investigação deste capítulo será a solução $u(.,t)$ da equação de difusão linear

$$u_t \;=\; \mu\, u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

sendo $\mu > 0$ constante (coeficiente de difusividade ou viscosidade), correspondente a estados iniciais $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p < \infty$,

$$u(x,0) \;=\; u_0(x), \qquad u_0 \in L^p(\mathbb{R}), \tag{2.2}$$

no sentido de se ter $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$ ao $t \to 0$, isto é,

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to 0,$$

onde $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ denota a norma L^p em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\| \mathsf{u} \|_{L^p(\mathbb{R})} = (\int_{\mathbb{R}} |\, \mathsf{u}(x)\, |^p \; dx)^{1/p}.$$

Nessas condições (ver Teorema 2.5), existe uma única solução para o problema (2.1) em $C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}))$, (2.2), dada por

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u_0(y)\; dy \tag{2.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

De (2.3), temos que $u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[)$, satisfaz a equação (2.1) no sentido clássico e $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$ ao $t \to 0$ (ver Teorema 2.3).

Definindo $K : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, ("heat Kernel") via

$$K(\xi,t) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\; e^{-\frac{\xi^2}{4\mu t}} \tag{2.4}$$

para $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$ quaisquer, tem-se $K(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ e (2.3) pode ser escrita como

$$u(\cdot, t) \;=\; K(\cdot, t) \;*\; u_0 \qquad \forall\, t > 0 \tag{2.5}$$

onde $*$ denota o produto convolutivo em $L^1(\mathbb{R}) \;\times\; L^p(\mathbb{R})$, ou seja,

$$(f \;*\; g)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\; g(y)\; dy \tag{2.6}$$

para $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$, ver [9], [10].

Na seção 2.2, várias propriedades básicas das soluções $u(., t)$ de (2.1), (2.2) são revistas, por exemplo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \;\leq\; \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0, \tag{2.7}$$

que decorre da desigualdade de Young (A.7), e também a propriedade de monotonicidade

$$u(\cdot, 0) \;\leq\; \hat{u}(\cdot, 0) \;\Longrightarrow\; u(\cdot, t) \;\leq\; \hat{u}(\cdot, t) \qquad \forall\, t > 0, \tag{2.8}$$

onde $u(\cdot, t) \;=\; K(\cdot, t) * u(\cdot, 0)$ e $\hat{u}(\cdot, t) \;=\; K(\cdot, t) * \hat{u}(\cdot, 0)$ denotam as soluções de (2.1) correspondentes aos estados iniciais $u(\cdot, 0)$, $\hat{u}(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$ dados. Outras propriedades são também discutidas.

Na seção 2.3, mostramos que as soluções $u(\cdot, t)$ acima decaem em $L^r(\mathbb{R})$, $r > p$, bem como suas derivadas, tendo-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(r, p, \mu)\; \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}\; t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \qquad \forall\, t > 0,$$

para cada $p < r \leq \infty$ e certa constante $C(r, p, \mu) > 0$ que depende de r, p, μ; e

$$\|D^\ell u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C_\ell(r, p, \mu)\; \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}\; t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) - \frac{\ell}{2}} \qquad \forall\, t > 0,$$

para cada $\ell = 1, 2, 3...$, onde $C_\ell(r, p, \mu)$ depende novamente dos parâmetros r, p e μ.

Na seção 2.4, consideramos o caso $p = 1$, (isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$) e computamos os limites

$$\lim_{t \to \infty} t^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r})}\; \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \gamma_r,$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$. Em particular, tem-se $\gamma_1 = |m|$, onde m é a massa (invariante no tempo) de $u(\cdot, t)$, isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to |m| \qquad ao \qquad t \to \infty,$$

onde

$$m = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx \qquad \forall\ t > 0.$$

Para $r = \infty$, temos

$$t^{\frac{1}{2}}\ \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}} \qquad ao \qquad t \to \infty,$$

enquanto, para $1 < r < \infty$,

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\ \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \to \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}} \left(\frac{4\pi\mu}{r}\right)^{\frac{1}{2r}} \qquad ao \qquad t \to \infty.$$

Se $u_0,\ \hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R})$ são dois estados iniciais com a mesma massa, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(x)dx,$$

então as soluções correspondentes $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0$, $\hat{u}(\cdot,t) = K(\cdot,t) * \hat{u}_0$ satisfazem

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\ \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0,$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Finalmente, na seção 2.5, mostramos que os resultados correspondentes no caso $p > 1$ são triviais: sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$, tem-se

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\ \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0,$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

2.2 Propriedades básicas

Nesta seção, derivamos certas propriedades básicas das soluções de (2.1), (2.2), que serão úteis mais adiante. Estes resultados são obtidos de modo simples a partir da representação (2.5) para $u(\cdot,t)$,

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)u_0(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{2.9}$$

onde $K(\cdot,t)$ é dada por (2.4).

Lema 2.1. *Sendo $K(\cdot,t)$ satisfazendo (2.4), tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} K(x,t)\ dx \ = \ 1, \qquad \forall\ t > 0. \tag{2.10}$$

Demonstração. Tomando $I \ = \ \int_{\mathbb{R}}\ e^{-\gamma x^2}\ dx$, $\gamma > 0$ tem-se pelo Teorema de Fubini [9], [10] que

$$\begin{aligned} I^2 \ &= \ \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2}\ dx \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma y^2}\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\gamma(x^2+y^2)}\ dx\ dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma r^2}\ r\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma r^2}\ r\ \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\ dr \\ &= \frac{\pi}{\gamma}\int_0^{\infty} e^{-\gamma r^2}\ \gamma\ 2r\ dr \ = \ \frac{\pi}{\gamma}, \end{aligned}$$

logo,

$$I \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2}\ dx \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}, \qquad \gamma \ > \ 0. \tag{2.11}$$

Agora, tomando $\gamma \ = \ \frac{1}{4\mu t}$, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}\ dx \ = \ \sqrt{4\pi\mu t}$$

e, por (2.4)

$$\int_{\mathbb{R}} K(x,t)\ dx \ = \ \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}\ dx \ = \ 1 \qquad \forall\ t > 0,$$

como afirmado. $\square$

Teorema 2.1 (Monotonicidade de $\| \cdot \|_{L^p(\mathbb{R})}$). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) então $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$ e*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \;\leq\; \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \forall\; t > 0. \tag{2.12}$$

Demonstração. Temos por (2.5) que $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u(\cdot,0)$, para todo $t > 0$. Como $K(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$ e $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R})$, pela desigualdade de Young (A.7) temos $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$ e,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \;\leq\; \|K(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}\, \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \;=\; \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

visto que, por termos $K(\cdot,t) > 0$,

$$\|K(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1, \tag{2.13}$$

por (2.10) acima. □

Teorema 2.2 (Princípio do Máximo). *Sendo $u(\cdot,0) \in L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se $u(\cdot,t)$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ e*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \;\leq\; \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall\; t > 0. \tag{2.14}$$

Demonstração. Temos que $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u(\cdot,0)$ para todo $t > 0$, onde $K(\cdot,t)$ é dada por (2.4). Aplicando a desigualdade de Young (A.7) e valendo (2.13), obtém-se

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \;\leq\; \|K(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}\, \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \;=\; \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. □

Teorema 2.3. *Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, e $u(\cdot,t)$ dada por (2.9), tem-se*

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to 0. \tag{2.15}$$

Demonstração. Considerando primeiramente o caso $p = 1$, podemos proceder como segue: pelo Lema 2.1,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)-u_0(x)|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} (u_0(y)-u_0(x))dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u_0(y)-u_0(x)|dy \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} |u_0(x+s\sqrt{4\mu t})-u_0(x)|ds \right) dx,\end{aligned}$$

onde $s = \frac{(y-x)}{\sqrt{4\mu t}}$. Pelo Teorema de Fubini, resulta

$$\|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+s\sqrt{4\mu t})-u_0(x)|dx \right) ds. \tag{2.16}$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $R > 0$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s|\geq R} e^{-s^2} ds \leq \epsilon$, de modo que

$$\|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}\epsilon + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s|<R} e^{-s^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+s\sqrt{4\mu t})-u_0(x)|dx \right) ds, \tag{2.17}$$

para todo $t > 0$. Tomando $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+a)-u_0(x)|dx \leq \epsilon,$$

para todo $|a| \leq \delta$, ver [9], [10], temos, por Fubini,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)-u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} |u_0(x+s\sqrt{4\mu t})-u_0(x)|^p ds \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+s\sqrt{4\mu t})-u_0(x)|^p dx \right) ds.\end{aligned}$$

Procedendo como antes, dado $\epsilon > 0$ tomamos $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s|\geq R} e^{-s^2} ds \leq \epsilon,$$

de modo que

$$\|u(\cdot,t)-u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^{p+1}\|u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\epsilon + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s|<R} e^{-s^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+s\sqrt{4\mu t})-u_0(x)|^p dx \right) ds.$$

Assim, sendo $\delta > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+a) - u_0(x)|^p dx \leq \epsilon$, para $|a| \leq \delta$, teremos, para $0 < t \leq \frac{\delta^2}{R^2 4\mu}$,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}\epsilon \ + \epsilon\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{|s|<R} e^{-s^2} ds \\ &\leq (1 + 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})})\epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra o resultado quando $p = 1$.

Finalmente, quando $1 < p < \infty$, temos, usando novamente o Lema 2.1,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - u_0(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} (u_0(y) - u_0(x)) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u_0(y) - u_0(x)|^p dy \right) dx, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder (A.4). Assim, fazendo $s = \frac{(y-x)}{\sqrt{4\mu t}}$,

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq (2^{p+1}\|u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + 1)\ \epsilon,$$

o que conclui o argumento. □

Teorema 2.4. *Dado $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $0 \leq p < \infty$ e $u(\cdot,t)$ definida em (2.9), temos, para cada $t_0 > 0$,*

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to t_0. \tag{2.18}$$

Demonstração. No caso $p = 1$, temos, por Fubini,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u_0(y) dy - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} u_0(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| dx\ dy. \end{aligned}$$

Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| \to 0,$$

ao $t \to t_0$, e, para $t \in [t_0/2, 2t_0]$, temos

$$\left|\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}}\right| |u_0(y)| \;\leq\; \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu t_0}}e^{-\frac{(x-y)^2}{8\mu t_0}}|u_0(y)| \;=\; F(x,y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$; logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver [9], [10]), segue

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}}\right| |u_0(y)|dx\, dy \to 0,$$

ao $t \to t_0$ como afirmado.

O caso $1 < p < \infty$ é análogo: tomando $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se, pela desigualdade de Hölder (A.4) e Lema 2.1,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_0)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u_0(y)dy - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} u_0(y)dy\right|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}}\right| |u_0(y)|dy\right)^p dx \\
&\leq 2^{p/q}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}}\right| |u_0(y)|^p dy\right) dx \\
&\to 0
\end{aligned}$$

ao $t \to t_0$ pelo Teorema da Convergência Dominada, como no caso anterior. □

Teorema 2.5 (Unicidade da solução). *Para o problema (2.1), (2.2), existe somente uma solução $u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}))$, dada por (2.9).*

Demonstração. O argumento a seguir é adaptado de [5], Capítulo 5 (Teorema 4.3). Sendo $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{t} > 0$ dados, fixos no que segue, e $u(x,t)$ em $C^0([0,+\infty[,\ L^p(\mathbb{R}))$ solução de (2.1), (2.2), vamos mostrar que

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu\bar{t}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\bar{x}-y)^2}{4\mu\bar{t}}}\ u(y,0)\ dy. \tag{2.19}$$

Para isso tomemos, para $\epsilon \in]0,\bar{t}[$, $R > |\ \bar{x}\ |$ dados, $v \in C^\infty(\mathbb{R}\times]-\infty,\bar{t}\ [)$ dada por

$$v(x,t) = K(\bar{x}-x, \bar{t}-t) \tag{2.20}$$

onde $K(\xi, \tau)$ satisfazendo

$$\zeta_R = \begin{cases} 1, & |x| \leq R \\ 0, & |x| \geq R+1 \end{cases} \tag{2.21}$$

com $\|\zeta_R'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$, $\|\zeta_R''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$ para $M > 0$ fixo, independente de R.

Como $v_t = -\mu v_{xx}$ e $u_t = \mu u_{xx}$ para todos $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < \bar{t}$, obtemos

$$(u\zeta_R v)_t + \mu(u(\zeta_R v)_x - \zeta_R v u_x)_x = \mu u(2\zeta_R' v_x + \zeta_R'' v). \tag{2.22}$$

Integrando em $[-R-1, R+1] \times [\epsilon, \bar{t}-\epsilon]$, obtém-se, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_{-R-1}^{R+1} u(x,\bar{t}-\epsilon)\zeta_R(x)v(x,\bar{t}-\epsilon)dx \quad - \quad \int_{-R-1}^{R+1} u(x,\epsilon)\zeta_R(x)v(x,\epsilon)dx &= \\ = \mu \int_{\epsilon}^{\bar{t}-\epsilon} \int_{-R-1}^{R+1} u(2\zeta_R' v_x + \zeta_R'' v)\ dx\ dt& \end{aligned}$$

visto que $\zeta_R(x) = \zeta_R'(x) = 0$ se $|x| \geq R+1$; como tem-se também $\zeta_R'(x) = \zeta_R''(x) = 0$ se $|x| \leq R$,

$$\begin{aligned} \int_{-R-1}^{R+1} u(x,\bar{t}-\epsilon)\zeta_R(x)v(x,\bar{t}-\epsilon)dx \quad - \quad \int_{-R-1}^{R+1} u(x,\epsilon)\zeta_R(x)v(x,\epsilon)dx &= \\ = \mu \int_{\epsilon}^{\bar{t}-\epsilon} \int_{R\leq|x|\leq R+1} u(2\zeta_R' v_x + \zeta_R'' v)\ dx\ dt.& \end{aligned} \tag{2.23}$$

Como $u \in C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}))$, segue pela desigualdade de Hölder (A.4) que

$$uv_x,\ uv \quad \in \quad L^1(\mathbb{R} \times [0, \bar{t}-\epsilon]),$$

portanto

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\epsilon}^{\bar{t}-\epsilon} \int_{R\leq|x|\leq R+1} u(2\zeta_R' v_x + \zeta_R'' v)\ dx\ dt = 0. \tag{2.24}$$

Por outro lado, ao $R \to +\infty$, obtém-se

$$\int_{-R-1}^{R+1} u(x,\bar{t}-\epsilon)\zeta_R(x)v(x,\bar{t}-\epsilon)dx \to \int_{\mathbb{R}} u(x,\bar{t}-\epsilon)v(x,\bar{t}-\epsilon)dx$$

$$\int_{-R-1}^{R+1} u(x,\epsilon)\zeta_R(x)v(x,\epsilon)dx \to \int_{\mathbb{R}} u(x,\epsilon)v(x,\epsilon)dx$$

de modo que, por (2.20), (2.23) e (2.24), temos

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,\bar{t}-\epsilon)K(\bar{x}-x,\epsilon)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,\epsilon)K(\bar{x}-x,\bar{t}-\epsilon)dx.$$

Fazendo $\epsilon \to 0^+$, tem-se então

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \int_{\mathbb{R}} K(\bar{x}-x,\bar{t})u(x,0)dx$$

visto que u é contínua em $(\bar{x},\bar{t})$. O que mostra (2.19). □

Teorema 2.6. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1) e (2.2), tem-se*

$$u(x,0) \;\geq\; \gamma \;\; \textit{para quase todo } x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; u(x,t) \;\geq\; \gamma \qquad \forall\, x\in\mathbb{R},\; t>0 \quad (2.25)$$

$$u(x,0) \;\leq\; \Gamma \; \textit{para quase todo } x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; u(x,t) \;\leq\; \Gamma \qquad \forall\, x\in\mathbb{R},\; t>0. \quad (2.26)$$

Demonstração. Supondo $u(\cdot,0) \;\geq\; \gamma$, tem-se por (2.3) e (2.10),

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u(y,0)\;dy \;\geq\; \gamma\;\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}dy \;=\; \gamma,$$

ou seja,

$$u(x,t) \;\geq\; \gamma \qquad \forall\, t>0,\; x\in\mathbb{R}.$$

A demonstração da (2.26) é análoga. □

Generalizando o Teorema 2.6, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.7 (Monotonicidade do Operador Solução). *Sendo $u(\cdot,t)$, $v(\cdot,t)$ soluções de (2.1) com $u(\cdot,0)$, $v(\cdot,0)\in L^p(\mathbb{R})$ para algum $1\leq p\leq\infty$. Então*

$$u(\cdot,0) \;\leq\; v(\cdot,0) \;\Rightarrow\; u(\cdot,t) \;\leq\; v(\cdot,t) \qquad \forall\, t>0. \quad (2.27)$$

Demonstração. Dado $t>0$, tem-se, por (2.3),

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u(y,0)\;dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; v(y,0)\;dy \\ &= v(x,t) \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$u(x,t) \;\leq\; v(x,t) \qquad \forall\ t > 0.$$

□

Quando $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$, a quantidade m definida por

$$m \;=\; \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\ dx, \tag{2.28}$$

chamada de *massa*, é fundamental para a descrição do comportamento assintótico ($t \;\to\; +\infty$) de $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Além disso, é válido observar que a *massa* de $u(\cdot,t)$ não varia no tempo, como mostrado a seguir.

Teorema 2.8 (Conservação da massa). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), com $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\ dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\ dx \qquad \forall\ t > 0. \tag{2.29}$$

Demonstração. Dado $t > 0$, temos por (2.3) e pelo Teorema de Fubini [9], [10] que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\ dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\ u(y,0)\ dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\ dx \right)\ u(y,0)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(y,0)\ dy
\end{aligned}$$

devido a (2.10). □

Para finalizar, vamos observar que as soluções $u(\cdot,t)$ de (2.1), (2.2), possuem a propriedade TVD ("*Total Variation Diminishing*"), sendo $TV_{\mathbb{R}}u(\cdot,t)$ a variação total de $u(\cdot,t)$ no instante t, isto é,

$$TV_{\mathbb{R}}u(\cdot,t) = sup \sum_{j=1}^{N} |u(x_j,t) - u(x_{j-1},t)|, \tag{2.30}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coleções finitas de pontos $x_0 < x_1 < ... < x_N$, e sendo $TV_{\mathbb{R}}u_0$ a variação total do estado inicial $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.9 (Propriedade TVD). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2), tem-se*

$$TV_{\mathbb{R}}u(\cdot,t) \leq TV_{\mathbb{R}}u_0 \qquad \forall\ t > 0. \tag{2.31}$$

Em particular, $TV_{\mathbb{R}}u(\cdot,t)$ decresce com t.

Demonstração. De [14], tem-se $u_0(\cdot + h) - u_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $0 < h < h_0$, $h_0 << 1$, de modo que, pelo Teorema 2.1, temos $u(\cdot + h, t) - u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$ e $0 < h < h_0$, e

$$\|u(\cdot + h, t) - u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0(\cdot + h) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \tag{2.32}$$

para todo $t > 0$. Como (ver [14])

$$TV_{\mathbb{R}}u(\cdot,t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} |u(x+h,t) - u(x,t)|dx,$$

resulta então, por (2.32) acima,

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}u(\cdot,t) &\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+h) - u_0(x)|dx \\ &= TV_{\mathbb{R}}u_0, \end{aligned}$$

como afirmado. □

2.3 Decaimento em $L^r(\mathbb{R})$

Nesta seção, obteremos taxas para o decaimento de $u(\cdot,t)$ e suas derivadas em várias normas.

Teorema 2.10. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2), tem-se $u(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$, com*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu,p)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}t^{-\frac{1}{2p}} \qquad \forall\ t > 0, \tag{2.33}$$

onde $C(\mu,p) = (4\pi\mu)^{-\frac{1}{2p}}(1-\frac{1}{p})^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ quando $p > 1$ e $C(\mu,1) = (4\pi\mu)^{-\frac{1}{2}}$ se $p = 1$.

Demonstração. Primeiro analisemos para $p = 1$:

Dado $t > 0$, tem-se, por (2.3),

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u(y,0)| dy \\ &\leq (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |u(y,0)| dy \\ &= C(\mu,1) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu,1)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $C(\mu,1) = (4\mu\pi)^{-\frac{1}{2}}$.

Para $1 < p < \infty$:

Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se pela desigualdade de Hölder (A.4),

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u(y,0)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-q\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(y,0)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}$, $\gamma > 0$, tomando $\gamma = \frac{q}{4\mu t}$, temos

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left(\frac{4\pi\mu t}{q} \right)^{\frac{1}{2q}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})} \left(\frac{1}{q} \right)^{\frac{1}{2q}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2p}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, para cada $t > 0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu,p)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}},$$

onde $C(\mu,p) = (4\mu\pi)^{-\frac{1}{2p}}(1-\frac{1}{p})^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$, como afirmado. $\square$

O próximo resultado é consequência imediata do teorema anterior e a propriedade de monotonicidade (2.12), em vista da desigualdade (A.8).

Teorema 2.11. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2), tem-se, para cada $t > 0$, $u(\cdot,t) \in L^r(\mathbb{R})$ para todo $r \geq p$, com*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(\mu,p)^{1-\frac{p}{r}}\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall\ t>0,\ p \leq r \leq \infty$$

onde $C(\mu,p)$ é a constante dada no Teorema (2.10).

Demonstração. Dado $t > 0$, temos $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ pelo Teorema 2.1 e Teorema 2.10, de modo que $u(\cdot,t) \in L^r(\mathbb{R})$ para cada $p \leq r \leq \infty$ e

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} \\
&\leq \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}}C(\mu,p)^{1-\frac{p}{r}}\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}}t^{-\frac{1}{2p}(1-\frac{p}{r})} \\
&= C(\mu,p)^{1-\frac{p}{r}}\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, pelos Teoremas 2.1 e 2.10 e a desigualdade de Interpolação (A.8).

$\square$

A seguir obtemos estimatias para as derivadas de $u(\cdot,t)$.

Teorema 2.12. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2), com $1 \leq p < \infty$, tem-se, para cada $\ell \in \mathbb{N}$,*

$$\left\|\frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell}(\cdot,t)\right\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C_\ell(\mu,p,r)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})-\frac{\ell}{2}}, \tag{2.34}$$

para todo $t > 0$, onde $C_\ell(\mu,p,r)$ é uma constante que depende de ℓ, μ, p e r.

Demonstração. Lembrando que $u(\cdot,t)$ é dado por (2.3), isto é,

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\ u(y,0)\ dy,$$

obtém-se, derivando com respeito a x,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} -\frac{(x-y)}{2\mu t}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u(y,0)\; dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\frac{1}{\sqrt{\mu t}}\int_{\mathbb{R}} -\frac{(x-y)}{\sqrt{4\mu t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u(y,0)\; dy, \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{2\mu t}+\left(\frac{x-y}{2\mu t}\right)^2\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u(y,0)\; dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\;\frac{1}{\mu t}\int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{2}+\left(\frac{x-y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u(y,0)\; dy, \end{aligned} \tag{2.36}$$

e, em geral, para cada $\ell \geq 1$,

$$\frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\;\frac{1}{(\mu t)^{\ell/2}}\int_{\mathbb{R}} P_\ell\left(\frac{x-y}{\sqrt{4\mu t}}\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u(y,0)\; dy, \tag{2.37}$$

onde $P_\ell(\cdot)$ é um polinômio real de grau ℓ. Em particular, de (2.37) obtém-se,

$$\left|\frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell}(x,t)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\;\frac{1}{(\mu t)^{\ell/2}}\;\hat{C}_\ell\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{8\mu t}}\;|u(y,0)|\; dy \tag{2.38}$$

onde $\hat{C}_\ell := \sup_{s>0} |P_\ell(s)|e^{-s^2}$. Assim, repetindo o argumento dos Teoremas 2.10 e 2.11, obtemos o resultado. □

2.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$

Consideramos agora, as soluções $u(\cdot,t)$ de (2.1), (2.2) para $p = 1$ (isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$), e vamos mostrar que os limites

$$\gamma_r = \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}, \tag{2.39}$$

estão bem definidos para todo $1 \leq r \leq \infty$, sendo todos não nulos quando a massa de $u(\cdot,t)$ for diferente de zero. A discussão a seguir é baseada em [13].

Lema 2.2. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1) e (2.2) com $p = 1$, e sendo $\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx = 0$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \;\to\; 0 \qquad t \;\to\; \infty. \tag{2.40}$$

Demonstração. Por (2.3), temos que $u(\cdot, t)$ é dada por

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}}\; u(y,0)\; dy \qquad \forall\; x \in \mathbb{R},\; t > 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $R = R(\epsilon) > 0$ tal que $\int_{|y| \,\geq\, R} \; |u(y,0)|\; dy \;\; \leq \;\; \epsilon.$ Então,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left[\left| \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy + \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| \right] dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left[\left| \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| + \left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)\; dy \right| \right] dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|y|\geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u(y,0)| dy \right) dx + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| dx$$

Utilizando, no primeiro termo, o Teorema de Fubini e (2.13), tem-se

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \int_{|y|\geq R} |u(y,0)| dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| dx$$

ou seja,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| dx, \qquad \forall\; t > 0.$$

Note que

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| dx \;\; \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0) dy - \int_{|y|<R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| + \left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} u(y,0) dy \right| \right) dx$$

Como $\int_{\mathbb{R}} u(y,0)\ dy \ = \ 0$, obtemos

$$\int_{|y|<R} u(y,0)\ dy \ = \ - \int_{|y|\geq R} u(y,0)\ dy$$

dessa forma

$$\int_{|y|<R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} u(y,0)dy \ = \ - \ e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \int_{|y|\geq R} u(y,0)dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y,0)dy \right| dx \\
\\
\leq \ & \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \ - \ e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \right) u(y,0)dy \right| dx \\
+ \ & \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \left| \int_{|y|\geq R} u(y,0)dy \right| dx \\
\leq \ & \epsilon \ + \ \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \ - \ e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \right) u(y,0)dy \right| dx
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \ &\leq \ 2\epsilon \ + \ \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \ - \ e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \right) u(y,0)dy \right| dx \\
&\leq \ 2\epsilon \ + \ \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \int_{|y|<R} \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \ - \ e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \right| |u(y,0)| dy dx.
\end{aligned}$$

Introduzindo $\xi \ = \ \frac{x}{\sqrt{4\mu t}}$, tem-se

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \ \leq \ 2\epsilon \ + \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{|y|<R} \left| e^{-\left(\xi \ - \ \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} \ - \ e^{-\xi^2} \right| |u(y,0)| dy d\xi$$

Seja $g(\xi,y) \ = \ \left| e^{-\left(\xi \ - \ \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} \ - \ e^{-\xi^2} \right| |u(y,0)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \ y \in [-R,R].$

Note que para cada $\xi \in \mathbb{R}$, e para quase todo $y \in [-R, R]$ dados, temos $g(\xi, y) \to 0$ ao $t \to \infty$; por outro lado,

$$\begin{aligned}
|g(\xi,y)| &= \left| e^{-\left(\xi^2 - \frac{2y\xi}{\sqrt{4\mu t}} + \frac{y^2}{4\mu t}\right)} - e^{-\xi^2} \right| |u(y,0)| \\
&\leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\xi^2} e^{\frac{2y\xi}{\sqrt{4\mu t}}} e^{-\frac{y^2}{4\mu t}} \right) |u(y,0)| \\
&\leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\xi^2} e^{\frac{2y^2}{4\mu t}} e^{\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{4\mu t}} \right) |u(y,0)| \\
&= \left(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{\frac{y^2}{4\mu t}} \right) |u(y,0)| \\
&\leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{\frac{R^2}{4\mu t}} \right) |u(y,0)|
\end{aligned}$$

que obtemos utilizando a desigualdade de Young (A.2).

Para todo $t \geq \frac{R^2}{4\mu}$, temos

$$e^{\frac{R^2}{4\mu t}} \leq e$$

e, dessa forma,

$$|g(\xi,y)| \leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2} + 1} \right) |u(y,0)| := G(\xi,y),$$

com $G \in L^1(\mathbb{R} \times [-R, R])$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{|y|<R} |g(\xi,y)| \, d\xi \, dy \to 0 \qquad ao \qquad t \to \infty,$$

de modo que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 3\epsilon$$

para t suficientemente grande.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue o resultado. $\square$

Teorema 2.13. *Se $u(\cdot,t)$, $v(\cdot,t)$ são soluções de (2.1), (2.2) com $p = 1$, tendo a mesma massa, ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,0) \, dx = \int_{\mathbb{R}} v(x,0) \, dx,$$

então

$$\|u(\cdot,t) \ - \ v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to \infty. \tag{2.41}$$

Demonstração. Sendo $\theta(x,t) := u(x,t) \ - \ v(x,t)$, temos que θ satisfaz

$$\theta_t \ = \ \mu\theta_{xx}$$

$$\theta(\cdot,0) \ = \ u(\cdot,0) \ - \ v(\cdot,0) \ \in \ L^1(\mathbb{R})$$

com massa nula,

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(x,0)\ dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\ dx \ - \ \int_{\mathbb{R}} v(x,0)\ dx \ = \ 0;$$

pelo Lema 2.2, segue então

$$\|\theta(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to \infty$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t) \ - \ v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to \infty,$$

como afirmado. □

Em particular, obtemos o seguinte resultado fundamental.

Teorema 2.14. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) com $p = 1$. Então,*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to \ |m| \qquad ao \qquad t \to \infty \tag{2.42}$$

onde m é a massa da solução

$$m \ = \ \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\ dx. \tag{2.43}$$

Demonstração. Tome $v(\cdot,t)$ dada por

$$v_t \ = \ \mu v_{xx} \tag{2.44}$$

$$v(\cdot,0) \ = \ v_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

com v_0 dada por

$$v_0(x) \ = \begin{cases} m & se\ 0 \le x \le 1 \\ 0 & caso\ contrário, \end{cases} \tag{2.45}$$

de modo que
$$\int_{\mathbb{R}} v(x,0)\ dx \ = \ \int_0^1 m\ dx \ = \ m,$$
isto é, $v(\cdot,t)$ e $u(\cdot,t)$ tem a mesma massa.

Observando que, pelo Teorema 2.6,

Se $m \geq 0:\quad v(x,t) \geq 0, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

se $m < 0:\quad v(x,t) < 0, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

obtemos em qualquer caso

$$|v(x,t)| \ = \ (sgn\ m)\ v(x,t) \qquad \forall t > 0,$$

onde $sgn\ m$ denota o sinal de m, ou seja,

$$sgn\ m \ = \begin{cases} \ \ 1 & se\ m\ >\ 0 \\ \ \ 0 & se\ m\ =\ 0 \\ -1 & se\ m\ <\ 0 \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 2.8, obtemos

$$\begin{aligned} \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \ &= \ \int_{\mathbb{R}} |v(x,t)|\ dx \\ &= \ (\ sgn\ m)\ \int_{\mathbb{R}} v(x,t)\ dx \\ &= \ (\ sgn\ m)\ \int_{\mathbb{R}} v(x,0)\ dx \\ &= \ (\ sgn\ m)\ m \ = \ |m| \end{aligned}$$

isto é,

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \ = \ |m|$$

para todo $t > 0$, e em particular:

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to \ |m| \qquad ao \qquad t \to \infty.$$

Pelo Teorema 2.13 tem-se

$$\|u(\cdot,t) \ - \ v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to \ 0 \qquad ao \qquad t \to \infty,$$

e assim,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to \ |m| \qquad ao \qquad t\to\infty,$$

como afirmado. $\square$

No que segue, vamos examinar $\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$, para $r>0$. Começamos pelo caso $r=\infty$.

Lema 2.3. *Se $u(.,0)\in L^1(\mathbb{R})$ tem massa nula, então, para cada $1\le r\le\infty$ tem-se*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}=0, \tag{2.46}$$

uniformemente em r.

Demonstração. O caso $r=1$ já visto no Teorema 2.14. Consideremos então o caso $r=2$. Pela desigualdade de Interpolação (A.8),

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\le t^{\frac{1}{4}}(\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R})}) \\ &\le \|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e daí por (2.40) e (2.33) tem-se

$$t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\to 0 \qquad t\to+\infty.$$

Para o caso $r=\infty$, usando a desigualdade de Sobolev (A.10), temos

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\le \sqrt{2}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\|Du(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \\ t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\le \sqrt{2}(t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{3}{4}}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e então

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\to 0 \qquad t\to+\infty,$$

pelo resultado anterior $r=2$.

Finalmente, para o caso $1<r<\infty$, tem-se pela desigualdade (A.8)

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\le \|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{r}}_{L^1(\mathbb{R})}(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{1-\frac{1}{r}} \\ &\le \|u(\cdot,0)\|^{\frac{1}{r}}_{L^1(\mathbb{R})}(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{1-\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

de modo que

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao } t \to \infty,$$

pelo resultado anterior $p = \infty$. □

Utilizando o Lema 2.3, resulta fácil computar os limites γ_r, definidos em (2.39) para $r > 1$.

Teorema 2.15. *Ao $t \to \infty$ tem-se*

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \;\to\; \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}}, \tag{2.47}$$

onde m é a massa de $u(\cdot,t)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3, é suficiente mostrar esse resultado para a solução $v(x,t)$ dada por (2.44) com $v_0(x)$ dada por (2.45).

De fato, $w_0(x) = u_0(x) - v_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tem massa nula, e assim, pelo Lema 2.3 temos:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}}\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0$$

sendo $w(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} w_t &= \mu w_{xx} \\ w(x,0) &= w_0(x) \end{aligned} \tag{2.48}$$

ou seja,

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$$

de modo que

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} |v(x,t)| &= \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 e^{\frac{-|x-y|^2}{4\mu t}}dy \\ t^{\frac{1}{2}}|v(x,t)| &= \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 e^{\frac{-(x-y)^2}{4\mu t}}dy \end{aligned}$$

Em particular,

$$t^{\frac{1}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq t^{\frac{1}{2}}|v(0,t)| = \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 e^{\frac{-y^2}{4\mu t}}dy$$

fazendo $t \to \infty$,

$$t^{\frac{1}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}} \qquad \forall\ t > 0,$$

assim,

$$\liminf_{t\to\infty}\ t^{\frac{1}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}.$$

Analogamente,

$$|v(x,t)| = \frac{1}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4\mu t}}v(y,0)dy\right| \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 e^{\frac{-(x-y)^2}{4\mu t}}dy \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}},$$

logo,

$$|v(x,t)| \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

e assim,

$$\|v(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}} \implies t^{\frac{1}{2}}\|v(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}$$

fazendo $t \to \infty$ obtemos

$$\limsup_{t\to\infty}\ t^{\frac{1}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}$$

o que completa a demostração. $\square$

Teorema 2.16. *Sendo $u(x,t)$ solução de (2.1) com $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$ e $1 \leq r < \infty$ tem-se*

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \ \to\ \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}}\left(\frac{4\pi\mu}{r}\right)^{\frac{1}{2r}} \qquad ao \qquad t \to +\infty, \tag{2.49}$$

onde m é a massa de $u(\cdot,t)$.

Demonstração. Seja $v(x,t)$ dada por (2.44) com $v_0(x)$ dada por (2.45), e além disso, $w_0(x) = u_0(x) - v_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tem massa nula. Assim, pelo Lema 2.3 obtemos,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|w(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \to 0$$

sendo $w(\cdot,t)$ solução de (2.48) ou seja,

$$w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$$

de modo que

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}=0.$$

Portanto, basta mostrar

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|v(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}=\frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}}\left(\frac{(4\pi\mu)}{r}\right)^{\frac{1}{2r}}, \quad 1<r<\infty.$$

Dessa forma temos,

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}(r-1)}\|v(\cdot,t)\|^r_{L^r(\mathbb{R})} &= t^{\frac{1}{2}(r-1)}\int_{\mathbb{R}}|v(\cdot,t)|^r dx\\
&= t^{\frac{1}{2}(r-1)}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\pi\mu}}v(\cdot,0)dy\right|^r dx\\
&= t^{\frac{1}{2}(r-1)}\int_{\mathbb{R}}\frac{|m|^r}{(4\pi\mu t)^{\frac{r}{2}}}\left(\int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4\pi\mu}}dy\right)^r dx\\
&= t^{\frac{1}{2}(r-1)}\frac{|m|^r}{(4\pi\mu t)^{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4\pi\mu}}dy\right)^r dx,
\end{aligned}$$

tomando $\xi=\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}$ e $d\xi=\sqrt{4\mu t}\ dx$ então,

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}(r-1)}\|v(\cdot,t)\|^r_{L^r(\mathbb{R})} &= t^{-\frac{1}{2}}\frac{|m|^r}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}}(4\mu t)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^1 e^{-\left(\xi-\frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2}dy\right)^r d\xi\\
&= \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}}|m|^r\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^1 e^{-\left(\xi-\frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2}dy\right)^r d\xi
\end{aligned}$$

logo, para cada $\xi\in\mathbb{R}$ dado e $t\to\infty$ temos

$$\int_0^1 e^{-\left(\xi-\frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2}dy \longrightarrow \int_0^1 e^{-\xi^2}dy=e^{-\xi^2}\int_0^1 dy=e^{-\xi^2}$$

e

$$\int_0^1 e^{-\left(\xi-\frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2}dy\le \mathcal{C}e^{-\xi^2}.$$

Pelo teorema de Convergência Dominada da Lebesgue obtemos:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(r-1)}\|v(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}}|m|^r\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^1 e^{-\left(\xi-\frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2}dy\right)^r d\xi.$$

Seja $g(\xi, y) = \int_0^1 e^{-\left(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} dy$ então $g(\xi, y) \to e^{-r\xi^2}$ e $g(\xi, y) \leq \mathcal{C}\, e^{-r\xi^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Assim, pelo Lema 2.1

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} |m|^r \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 e^{-\left(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} dy \right)^r d\xi &= \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} |m|^r \int_{\mathbb{R}} e^{-r\xi^2} d\xi \\
&= \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}}\ |m|^r\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \\
&= \frac{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}}\ \frac{|m|^r}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}\ \left(\frac{4\pi\mu}{r}\right)^{\frac{1}{2r}},
\end{aligned}$$

como afirmado. □

2.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p > 1$

Nesta seção vamos mostrar que, no caso $p > 1$, os limites correspondentes para a solução de (2.1), (2.2), são todos nulos, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \tag{2.50}$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Teorema 2.17. *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2), onde $1 < p$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to \infty. \tag{2.51}$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{|x|\geq R} |u(x, 0)|^p dx \leq \epsilon^p \tag{2.52}$$

e considere $v(\cdot, t)$ dada por

$$\begin{aligned}
v_t &= \mu v_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\
v(x, 0) &= v_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

onde $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ é dada por

$$v_0(x) = \begin{cases} u(x, 0), & |x| \leq R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.11 (com $p = 1$, $r = p$), temos

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(\mu,1)^{1-\frac{1}{p}} \|v(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})},$$

de modo que

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to \infty$$

visto que $p > 1$.

Logo, pela desigualdade triangular, usando o Teorema 2.1 e (2.52)

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq \|u(\cdot,0) - v(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq \epsilon + \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq 2\epsilon
\end{aligned}$$

para todo t suficientemente grande. □

Os seguintes resultados são consequências imediatas.

Teorema 2.18. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) com $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$ e $p > 1$ tem-se,*

$$t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0. \tag{2.53}$$

Demonstração. Analisando a desigualdade de Sobolev (A.12), verificamos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2}{2+p}} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}}.$$

Dessa forma,

$$t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq t^{\frac{1}{2p}} C \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2}{2+p}} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}},$$

e, pelo Teorema 2.12,

$$t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \tilde{C} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}}.$$

O resultado segue, pelo Teorema 2.17. □

Teorema 2.19. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2) com $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$ então,*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \tag{2.54}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

Demonstração. Os casos $r = p$ e $r = \infty$ já foram feitos. Analisemos para $p < r < \infty$. Utilizando a desigualdade de Interpolação (A.8) tem-se,

$$t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|^{1-\frac{p}{r}}_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u(\cdot,t)\|^{\frac{p}{r}}_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Assim, por (2.33),

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq (C(\mu)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}})^{1-\frac{p}{r}}\ t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|^{\frac{p}{r}}_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq C(\mu)^{1-\frac{p}{r}} \|u(\cdot,0)\|^{1-\frac{p}{r}}_{L^p(\mathbb{R})} \|u(\cdot,t)\|^{\frac{p}{r}}_{L^p(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

e o resultado segue pelo Teorema 2.17. □

3 EQUAÇÃO DE BURGERS

3.1 Introdução

A equação analisada neste capítulo é a equação clássica de Burgers,

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{3.1}$$

onde c, μ são constantes dadas, com $c \neq 0$ e $\mu > 0$. Esta equação foi introduzida originalmente por J. M. Burgers [1] em seus estudos sobre turbulência em fluidos, aparecendo como um modelo básico em diversos outros fenômenos onde efeitos de adveccção não lineares e difusão linear desempenham papel importante, conforme [4]. Com efeito, mostraremos no Capítulo 4 que soluções $u(\cdot, t)$ de equações de advecção-difusão mais gerais da forma

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.2}$$

onde f é dada (suave), podem ser bem aproximadas para $t >> 1$ por soluções da equação (3.1), com $c = f''(0)$, na variável espacial $\xi = x - f'(0)t$. A equação de Burgers pode ser considerada como uma das equações fundamentais da Física Matemática.

Em (3.1), assumimos que $u(\cdot, t)$ é conhecida no instante $t = 0$, com

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

onde se supõe $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p < \infty$ e limitada (isto é, $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$); a condição (3.3) é entendida no sentido de se ter $u(\cdot, t) \to u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$, isto é,

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to 0. \tag{3.4}$$

Para $p = 1$, E. Hopf [7] e J. Cole [2] mostraram a existência de uma única solução $u(\cdot, t) \in C^0([0, +\infty[, L^1(\mathbb{R}))$, infinitamente diferenciável em $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, e obtiveram a representação explícita

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) u_0(y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) dy} \tag{3.5}$$

onde $\varphi_0(y) = e^{-\frac{c}{2\mu}\int_{-\infty}^{y} u_0(\xi)d\xi}$, introduzindo a mudança de variável

$$\varphi(x,t) = e^{-\frac{c}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)d\xi}. \tag{3.6}$$

Mais geralmente, no caso $p > 1$, existe uma única solução $u(\cdot,t)$ em $C^0([0,\infty[, L^p(\mathbb{R}))$ limitada satisfazendo $u(\cdot,0) = u_0$ conforme (3.4) acima, que é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ e satisfaz, assim, a equação (3.1) no sentido clássico para todo $t > 0$.

Na seção 3.2, derivamos algumas propriedades básicas destas soluções, análogas às propriedades obtidas no capítulo anterior para a equação do calor; estas propriedades serão úteis na análise desenvolvida no restante do capítulo. A análise apresentada detalha os resultados discutidos em [12], [13] e [11].

Na seção 3.3, obtemos diversas estimativas para $u(\cdot,t)$ e, no caso $p = 1$, suas derivadas; em particular, mostraremos que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(\mu,p,r)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}\, t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall\, t > 0 \tag{3.7}$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, onde $C(\mu,p,r)$ é uma constante positiva que depende dos parâmetros μ, p e r.

A seguir, nas seções 3.4 e 3.5, é mostrado que os limites

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \gamma(r,p), \qquad p \leq r \leq \infty \tag{3.8}$$

estão todos bem definidos; como no caso da equação do calor, tem-se $\gamma(r,p) = 0$ para todo $r \geq p$ quando $p > 1$, e no caso $p = 1$ estes limites dependem fundamentalmente da massa de $u(\cdot,t)$, isto é, a quantidade $m \in \mathbb{R}$ (invariante no tempo) dada por

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx. \tag{3.9}$$

3.2 Propriedades básicas

Será conveniente iniciarmos considerando o caso $p = 1$ (isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$) e examinarmos o comportamento das soluções $u(\cdot, t)$ de (3.1), (3.3) em $L^1(\mathbb{R})$. Para isso, utilizemos as chamadas "*funções sinal regularizadas*",ver [8], [12] tomando $S \in C^1(\mathbb{R})$ uma função crescente tal que,

$$S(x) \;=\; 1 \quad se \quad x \geq 1 \tag{3.10}$$

$$S(0) \;=\; 0 \quad se \quad x = 0 \tag{3.11}$$

$$S(x) \;=\; -1 \quad se \quad x \leq -1 \tag{3.12}$$

e, para cada $\delta > 0$, definindo $L_\delta \in C^2(\mathbb{R})$ como

$$L_\delta(x) = \int_0^x S\left(\frac{\xi}{\delta}\right) d\xi, \tag{3.13}$$

temos $L_\delta \geq 0,\ L''_\delta \geq 0$ e

$$L_\delta(x) \to |x| \qquad ao \qquad \delta \to 0 \tag{3.14}$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}$, com

$$L'_\delta(x) \to sgn\ x \qquad ao \qquad \delta \to 0 \tag{3.15}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, onde *sgn* denota a *função sinal*, ou seja,

$$sgn\ (x) \ = \begin{cases} \ 1 & se\ x \ > \ 0 \\ \ 0 & se\ x \ = \ 0 \\ -1 & se\ x \ < \ 0 \end{cases}$$

Aproximando $|\cdot|$ por meio de funções L_δ obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.1 (Monotonicidade de $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$). *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > 0. \tag{3.16}$$

Demonstração. Seja $T > 0$ dado e $0 < t_0 < T$ qualquer. Tomando as funções L_δ, $\delta > 0$ conforme (3.13), multiplicando (3.1) por $L_\delta'(u(x,t))$ e ainda integrando em $[t_0, T] \times \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))u_t(x,t)dxdt \;&+\; \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))f(u(x,t))_x dxdt = \\ &= \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))\mu u_{xx}(x,t)dxdt,\end{aligned}$$

onde $f(\mathsf{u}) = c\mathsf{u}^2/2$. Com respeito ao primeiro termo, temos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))u_t(x,t)dxdt &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{t_0}^{T} L_\delta'(u(x,t))u_t(x,t)dt\right]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta(u(x,T))dx - \int_{\mathbb{R}} L_\delta(u(x,t_0))dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, para o segundo termo, temos

$$\begin{aligned}L_\delta'(u(x,t))f(u(x,t))_x &= L_\delta'(u(x,t))f'(u(x,t))u_x(x,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}F(u(x,t)),\end{aligned}$$

e então

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))f(u(x,t))_x dx = \int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))\frac{\partial}{\partial x}f(u(x,t))dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}F(u(x,t))dx = 0,$$

onde $F(\mathsf{u}) := \int_0^{\mathsf{u}} L_\delta'(v)f'(v)dv$, de modo que

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))f(u(x,t))_x dx = 0 \qquad \forall\; t_0 \le t \le T.$$

Finalmente, para o terceiro termo, temos, integrando por partes,

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))\mu u_{xx}(x,t)dxdt = -\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta''(u(x,t))\mu u_x^2(x,t)dxdt,$$

de modo que, como $L_\delta'' \ge 0$, resulta

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta'(u(x,t))\mu u_{xx}(x,t)dxdt = -\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta''(u(x,t))\mu u_x^2(x,t)dxdt \le 0, \quad \forall\, t, \delta > 0.$$

Dessa forma, fazendo $\delta \to 0^+$, obtemos, por (3.14),

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,T)|dx - \int_{\mathbb{R}} |u(x,t_0)|dx \le 0;$$

para $t_0 > 0$ arbitrário; fazendo $t_0 \to 0^+$, resulta então

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,T)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x,0)|dx \qquad \forall\, T > 0,$$

como afirmado. □

O resultado acima mostra, em particular, que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\, 0 \leq t_0 \leq t, \tag{3.17}$$

de modo que $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ decresce monotonicamente com t, quando $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$.

Outra propriedade bastante importante é o Princípio do Máximo,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t > 0, \tag{3.18}$$

o qual pode ser derivado do seguinte resultado.

Teorema 3.2 (Monotonicidade de $\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.3), onde $1 \leq p < \infty$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^r(\mathbb{R})} \qquad \forall\, t \geq t_0 \geq 0, \tag{3.19}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

Demonstração. O caso $p = r = 1$ já foi visto no teorema anterior. Analisemos então quando $r > 1$, $r \geq p$. Para $T > 0$ dado, tomando $t_0 \in]0,T]$, as funções L_δ dadas e ainda multiplicando (3.1) por $rL_\delta^{r-1}(u(x,t))L_\delta'(u(x,t))$ e integrando $\mathbb{R} \times [t_0,T]$ temos,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} rL_\delta^{r-1}(u)L_\delta'(u)u_t dxdt \;&+\; \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} rL_\delta^{r-1}(u)L_\delta'(u)f'(u)u_x dxdt = \\ &= \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} rL_\delta^{r-1}(u(x,t))L_\delta'(u(x,t))\mu u_{xx} dxdt,\end{aligned}$$

onde, como acima, $f(\mathsf{u}) = c\mathsf{u}^2/2$.

Por Fubini obtemos,

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} rL_\delta^{r-1}(u(x,t))L_\delta'(u(x,t))u_t dxdt = \int_{\mathbb{R}} L_\delta^r(u(x,T))dx - \int_{\mathbb{R}} L_\delta^r(u(x,t_0))dx.$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{r-1}(u(x,t))L_\delta'(u(x,t))f'(u)u_x dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} A(u(x,t))dx = 0$$

onde $A(\mathsf{u}) = \int_0^{\mathsf{u}} L_\delta^{r-1}(v)L_\delta'(v)f'(v)dv$.

Lembrando que $L_\delta \geq 0$ e $L_\delta'' \geq 0$ obtemos que,

$$\begin{aligned} r\mu \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta^{r-1}(u)L_\delta'(u)u_{xx} dxdt &= -r\mu \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta^{r-1}(u)L_\delta''(u)u_x^2 dxdt \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta^r(u(x,T))dx \leq \int_{\mathbb{R}} L_\delta^r(u(x,t_0))dx,$$

para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Fazendo $\delta \to 0^+$ obtém-se

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^r(\mathbb{R})}, \tag{3.20}$$

em virtude de (3.14).

Finalmente, fazendo $r \to \infty$ em (3.20), obtém-se (3.18) como afirmado. □

Outra propriedade fundamental das soluções $u(\cdot,t)$ de (3.1), no caso $p = 1$ (isto é, $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$), é o fato de a massa de $u(\cdot,t)$ ser invariante no tempo, conforme mostramos a seguir.

Teorema 3.3 (Conservação da Massa). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx \qquad \forall\ t \geq 0. \tag{3.21}$$

Demonstração. Seja $T > 0$ e tomemos $0 < t_0 < T$. Integrando (3.1) em $[t_0,T] \times \mathbb{R}$ obtemos

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)dxdt + \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} f(u(x,t))_x dxdt = \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} \mu u_{xx}(x,t)dxdt,$$

onde $f(\mathsf{u}) = c\mathsf{u}^2/2$.

Pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)dxdt &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{t_0}^{T} u_t(x,t)dt\right]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x,T)dx - \int_{\mathbb{R}} u(x,t_0)dx.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} f(u(x,t))_x dxdt = \int_{t_0}^{T}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t))dx\right]dt = 0,$$

e

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} \mu u_{xx}(x,t)dxdt = \mu\int_{t_0}^{T}\left[\int_{\mathbb{R}} u_{xx}dx\right]dt = 0.$$

Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,T)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t_0)dx;$$

fazendo $t_0 \to 0^+$ obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,T)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx,$$

como afirmado. □

Teorema 3.4 (Contratividade em $L^1(\mathbb{R})$). *Sendo $u(\cdot,t)$, $\tilde{u}(\cdot,t)$soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0)$, $\tilde{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,0) - \tilde{u}(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall\ t > 0. \tag{3.22}$$

Demonstração. O argumento a seguir é tomado de [6] e [8]. Seja $T > 0$ dado, e $0 < t_0 < T$ qualquer. Tomando as funções L_δ, $\delta > 0$ dadas em (3.13) e, sendo $w(\cdot,t) = u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)$, $f(\mathsf{u}) = c\mathsf{u}^2/2$, temos de

$$\begin{aligned}u_t + f(u(x,t))_x &= \mu u_{xx}(x,t) \\ \tilde{u}_t + f(\tilde{u}(x,t))_x &= \mu \tilde{u}_{xx}(x,t)\end{aligned}$$

que $w(\cdot,t)$ satisfaz

$$w_t + [f]_x = \mu w_{xx}, \tag{3.23}$$

onde $[f] := f(\tilde{u}+w) - f(\tilde{u})$.

Multiplicando (3.23) por $L_\delta^{'}(w)$ e integrando em $[t_0,T]\times\mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{'}(w(x,t))w_t(x,t)dxdt \;&+\; \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{'}(w(x,t))[f]_x dxdt = \\ &= \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{'}(w(x,t))\mu w_{xx}(x,t)dxdt.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Examinando o primeiro termo em (3.24) acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{'}(w(x,t))w_t(x,t)dxdt &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{t_0}^{T} L_\delta^{'}(w(x,t))w_t(x,t)dt\right]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta(w(x,T))dx - \int_{\mathbb{R}} L_\delta(w(x,t_0))dx.\end{aligned}$$

Para o segundo termo, obtemos, integrando por partes

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{'}(w(x,t))[f]_x dxdt = -\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{''}(w(x,t))[f]w_x(x,t)dxdt.$$

Como, para cada (x,t) fixado, temos

$$L_\delta^{''}(w(x,t))[f]w_x(x,t) \to 0 \qquad ao \qquad \delta \to 0^+,$$

e vale a estimativa

$$\begin{aligned}|L_\delta^{''}(w(x,t))[f]w_x(x,t)| &= L_\delta^{''}(w(x,t))|w_x(x,t)||f(\tilde{u}+w)-f(\tilde{u})| \\ &\leq EC_0|w_x(x,t)|\end{aligned}$$

para $E > 0$, $C_0 > 0$ constantes (C_0 dependendo de t_0), pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{''}(w(x,t))[f]w_x(x,t)dxdt \to 0 \qquad ao \qquad \delta \to 0^+.$$

Finalmente, considerando o terceiro termo em (3.24), obtemos, integrando por partes,

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{'}(w(x,t))\mu w_{xx}(x,t)dxdt = -\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_\delta^{''}(w(x,t))\mu w_x^2(x,t)dxdt \leq 0,$$

visto que $L''_\delta \geq 0$. Portanto, resulta de (3.24) acima, a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta(w(x,T))dx - \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L''_\delta(w(x,t))[f]w_x(x,t)dxdt \leq \int_{\mathbb{R}} L_\delta(w(x,t_0))dx$$

para cada $\delta > 0$, $0 < t_0 < T$. Fazendo $\delta \to 0^+$ e $t_0 \to 0^+$, obtemos então

$$\int_{\mathbb{R}} |w(x,T)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |w(x,0)|dx,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,T) - \tilde{u}(x,T)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x,0) - \tilde{u}(x,0)|dx,$$

como afirmado em (3.22). □

Usando argumento da literatura [3] e as propriedades (3.21) e (3.22), podemos estabelecer a seguinte propriedade de monotonicidade.

Teorema 3.5 (Monotonicidade do Operador Solução). *Sendo $u(\cdot,t)$, $\tilde{u}(\cdot,t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0)$, $\tilde{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, respectivamente, temos que*

$$u(\cdot,0) \leq \tilde{u}(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq \tilde{u}(\cdot,t), \qquad \forall\ t > 0$$

Demonstração. Dado $t > 0$ tem-se, pelos Teoremas (3.3) e (3.4) acima,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| + u(x,t) - \tilde{u}(x,t)\right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)|dx + \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x,t)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |u(x,0) - \tilde{u}(x,0)|dx + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x,0)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x,0)dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, como $|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| + u(x,t) - \tilde{u}(x,t) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| + u(x,t) - \tilde{u}(x,t) = 0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

o que prova o resultado. □

O Teorema 3.4 garante, em particular, a unicidade da solução $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^1(\mathbb{R}))$ do problema (3.1), (3.3) no caso $p = 1$. Para $p > 1$, a unicidade da solução $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^p(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$ decorre da seguinte generalização do Teorema 3.4 a este caso.

Teorema 3.6. *Sendo u_0, $\hat{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $0 < p < \infty$ e $u(\cdot,t)$, $\hat{u}(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^p(\mathbb{R}))$ soluções de (3.1) correspondentes aos estados iniciais u_0, $\hat{u}_0$, respectivamente, tem-se*

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R})} e^{C(\mu,p,K_\infty)t}$$

para cada $t > 0$, onde $C(\mu,p,K_\infty)$ denota uma constante cujo valor depende apenas de μ, p e $K_\infty > 0$ tal que $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty$, $\|\hat{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty$.

A prova deste resultado será vista para equações mais gerais no Capítulo 4.

3.3 Decaimento em $L^r(\mathbb{R})$

Nesta seção, obteremos certas estimativas para $u(\cdot,t)$ e algumas derivadas, que serão importantes na análise a seguir. Iniciaremos considerando o caso $p = 1$ (isto é, $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$).

Teorema 3.7 (Desigualdade de Energia 1). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq 2\sqrt{2}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{1/2}\mu^{-1/2} \qquad (3.25)$$

para todo $T > 0$.

Demonstração. Os argumentos aqui usados são obtidos analisando a literatura, [12]. Seja $T > 0$ dado, multiplicando (3.1) por $tu(x,t)$ e integrando em $\mathbb{R} \times [0,T]$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(x,t)u_t(x,t)dxdt \quad &+ \quad \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(x,t)f'(u(x,t))u_x(x,t)dxdt = \\ &= \quad \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} \mu u(x,t)u_{xx}(x,t)dxdt, \end{aligned}$$

onde $f(\mathsf{u}) = c\mathsf{u}^2/2$.

Usando o Teorema de Fubini e integração por partes,

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(x,t)u_t(x,t)dxdt = \frac{T}{2}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{2}\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \qquad (3.26)$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)f'(u(x,t))u_x(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} g(u(x,t))dx = 0, \qquad (3.27)$$

onde $g(\mathsf{u}) = \int_0^{\mathsf{u}} vf'(v)dv$, e

$$\begin{aligned} \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} \mu u(x,t)u_{xx}(x,t)dxdt &= -\mu \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dxdt \\ &= -\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \qquad (3.28) \end{aligned}$$

Portanto, devido a (3.26), (3.27) e (3.28) obtemos,

$$\frac{T}{2}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{2}\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt = -\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt,$$

isto é,

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt = \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.$$

Usando a desigualdade de Sobolev (A.11) e posteriormente a desigualdade de Hölder (A.4), tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt &\leq \sqrt[3]{4}\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^{4/3}_{L^1(\mathbb{R})}\|u_x(\cdot,t)\|^{2/3}_{L^2(\mathbb{R})}dt \\ &\leq \sqrt[3]{4}\|u(\cdot,0)\|^{4/3}_{L^1(\mathbb{R})}\int_0^T \|u_x(\cdot,t)\|^{2/3}_{L^2(\mathbb{R})}dt \\ &\leq 2^{2/3}\|u(\cdot,0)\|^{4/3}_{L^1(\mathbb{R})}(2\sqrt{T})^{2/3}(2\mu)^{-1/3}\left(2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Assim, sendo

$$E(T) := T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$

temos

$$E(T) \leq 2\|u(\cdot,0)\|^{4/3}_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-1/3}T^{1/3}E(T)^{1/3}$$

o que implica

$$E(T)^{2/3} \leq 2\|u(\cdot,0)\|^{4/3}_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-1/3}T^{1/3}$$

ou seja

$$E(T) \leq 2^{3/2}\|u(\cdot,0)\|^{2}_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-1/2}T^{1/2}$$

de onde segue o resultado. □

Em particular,

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}(\mu T)^{-1/4} \qquad \forall\ T > 0, \tag{3.29}$$

e ainda,

$$\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \sqrt{2}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-3/2}T^{1/2}. \tag{3.30}$$

Uma consequência do resultado acima é dada a seguir.

Teorema 3.8. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-1/2}T^{-1/2} \qquad \forall\ T > 0. \tag{3.31}$$

Demonstração. Dado $T > 0$ temos, por (3.30),

$$\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \sqrt{2}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-3/2}T^{1/2}$$

e então, por (A.9), existe $\hat{t} \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ tal que

$$\hat{t}\|u_x(\cdot,\hat{t})\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\sqrt{2}\mu^{-3/2}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{1/2}}{T - \frac{T}{2}}$$

isto é,

$$\|u_x(\cdot,\hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}\mu^{-3/4}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}T^{-1/4}\hat{t}^{-1/2}. \tag{3.32}$$

Pela desigualdade de Sobolev (A.10), (3.31) e (3.32) tem-se,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq 2\sqrt[4]{2}\mu^{-1/2}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}T^{-1/8}\hat{t}^{-3/8} \\ &\leq 2^{13/8}\mu^{-1/2}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}T^{-1/2},\end{aligned}$$

uma vez que $T \geq \hat{t} \geq \frac{T}{2}$.

Assim,

$$\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\mu^{-1/2}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}T^{-1/2}$$

e o resultado segue, visto que $\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pelo Princípio do Máximo. $\square$

Teorema 3.9. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C_r\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}(\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \tag{3.33}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, onde $C_r = 2^{\frac{13}{8}(1-\frac{1}{r})}$.

Demonstração. Os casos $r = 1$ e $r = \infty$ já foram estabelecidos (ver Teorema 3.1 e 3.8). Considerando $1 < r < \infty$, tem-se, para $t > 0$, usando (A.8),

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{r}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{r}} \\
&\leq \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{r}}\left(2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}(\mu t)^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{r}} \\
&= 2^{\frac{13}{8}(1-\frac{1}{r})}(\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

como afirmado em (3.33). $\square$

Os resultados a seguir tem o objetivo de estabelecer estimativas para $\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Para isso será conveniente introduzirmos $K_1 > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq K_1. \tag{3.34}$$

Note que, pelo Teorema 3.8, temos $u(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$, com

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty(t_0,\mu,K_1) \qquad \forall\ t \geq t_0$$

para cada $t_0 > 0$ dado, onde

$$K_\infty(t_0,\mu,K_1) = 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\ K_1(\mu t_0)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.35}$$

Do Teorema 3.7, segue que, dado $\hat{t}_0 > 0$ qualquer, temos

$$\int_0^{\hat{t}_0} t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu, K_1)\hat{t}_0^{\frac{1}{2}}$$

para $C(\mu, K_1)$ constante apropriada dependendo apenas de μ, K_1 dados. Pelo Teorema A.9, Anexo A, existe $t_0 \in]0, \hat{t}_0[$ tal que

$$t_0\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, K_1)\hat{t}_0^{-\frac{1}{2}},$$

de modo que, multiplicando por t_0, obtemos

$$t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu, K_1)\hat{t}_0^{\frac{1}{2}};$$

assim, como $\hat{t}_0 > 0$ é arbitrário, resulta de (3.25) que podemos tomar uma sequência $(t_0^{(\ell)})_\ell$ com

$$t_0^{(\ell)^2}\|u_x(\cdot,t_0^{(\ell)})\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \to 0, \qquad t_0^{(\ell)} \to 0 \tag{3.36}$$

ao $\ell \to \infty$. Esta observação permite obter o seguinte resultado.

Teorema 3.10 (Desigualdade de Energia 2). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se,*

$$T^2\|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_0^T t^2\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu, K_1)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}} \tag{3.37}$$

para todo $T > 0$, onde $C(\mu, K_1) > 0$ é uma constante que depende dos parâmetros μ, $K_1 > 0$ dados em (3.1) e (3.34) acima.

Demonstração. Dado $T > 0$, tomemos $t_0 \in]0, T[$ verificando (3.36). Derivando (3.1) em relação a x, multiplicando por t^2u_x e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^T\int_{\mathbb{R}} t^2u_x(x,t)u_{tx}(x,t)dxdt \;&+\; \int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}} u_x(x,t)(f'(u)u_x(x,t))_xdxdt = \\ &= \mu\int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}} u_x(x,t)u_{xxx}(x,t)dxdt.\end{aligned}$$

onde $f(\mathsf{u}) = c\mathsf{u}^2/2$.

Usando Fubini, concluímos que:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} t^2 u_x(x,t)u_{tx}(x,t)dxdt &= \int_{\mathbb{R}}\int_{t_0}^{T} t^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_x(x,t)^2\right)dtdx\\ &= \frac{T^2}{2}\|u_x(x,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}-\frac{t_0^2}{2}\|u_x(x,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\\ &- \int_{t_0}^{T} t\|u_x(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_x(x,t)(f^{'}(u)u_x(x,t))_x dx &= -\int_{\mathbb{R}} f^{'}(u)u_x(x,t)u_{xx}(x,t)dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}}(f^{'}(u)-f^{'}(0))u_x(x,t)u_{xx}(x,t)dx,\end{aligned}$$

e também

$$\mu\int_{t_0}^{T} t^2\int_{\mathbb{R}} u_x(x,t)u_{xxx}(x,t)dxdt = -\mu\int_{t_0}^{T} t^2\|u_{xx}(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.$$

Portanto, obtém-se

$$\begin{aligned}T^2\|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &+ 2\mu\int_{t_0}^{T} t^2\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt = t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\\ &+ 2\int_{t_0}^{T} t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt+\\ &+ 2\int_{t_0}^{T} t^2\left[\int_{\mathbb{R}}(f^{'}(u)-f^{'}(0))u_x(x,t)u_{xx}(x,t)dx\right]dt.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Por (3.36), temos

$$t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\to 0 \qquad ao \qquad t_0\to 0,$$

e, por (3.25),

$$2\int_{t_0}^{T} t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \le 2\sqrt{2}\mu^{-\frac{3}{2}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}}.$$

Analisemos agora o último termo em (3.38). Pela desigualdade de Cauchy (A.1), com $\epsilon=\mu$, temos

$$\begin{aligned}|f^{'}(u)-f^{'}(0)||u_x(x,t)||u_{xx}(x,t)| &\le \mu|u_{xx}(x,t)|^2+\frac{1}{4\mu}|f^{'}(u)-f^{'}(0)|^2|u_x(x,t)|^2\\ &\le \mu|u_{xx}(x,t)|^2+\frac{c^2}{4\mu}|u(x,t)|^2|u_x(x,t)|^2.\end{aligned}$$

Portanto, para cada $t \in [t_0, T]$, resulta

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)||u_x(x,t)||u_{xx}(x,t)|dx \leq \mu \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{c^2}{4\mu} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 u_x^2(x,t)dx.$$

Por (3.31), resulta

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)||u_x(x,t)||u_{xx}(x,t)|dx \leq \mu \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu, K_1) t^{-1} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Portanto, segue de (3.38) que

$$\begin{aligned} T^2 \|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &+ \mu \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq t_0^2 \|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \\ &+ C(\mu) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} + \\ &+ C(\mu, K_1) \int_{t_0}^T t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt, \end{aligned}$$

ou seja, por (3.25),

$$\begin{aligned} T^2 \|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &+ \mu \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq t_0^2 \|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \\ &+ C(\mu) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^2 + \\ &+ C(\mu, K_1) \int_{t_0}^T t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \end{aligned}$$

Fazendo $t_0 \to 0$, resulta

$$\begin{aligned} T^2 \|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt &\leq C(\mu) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} + \\ &+ C(\mu, K_1) \int_0^T t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt, \\ &\leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pelo Teorema 3.7, o que conclui o argumento. □

O argumento usado na prova do teorema anterior pode ser repetido para estimar $\|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e obter o seguinte resultado.

Teorema 3.11 (Desigualdade de Energia 3). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se,*

$$T^3 \|u_{xx}(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

para todo $T > 0$, para alguma constante $C(\mu, K_1) > 0$ que depende dos parâmetros μ, $K_1 > 0$ introduzidos em (3.1) e (3.34) acima.

Demonstração. Como na derivação de (3.36) acima, obtém-se de (3.37) que existe sequência $(t_0^{(\ell)})_\ell$ com

$$t_0^{(\ell)^3} \|u_{xx}(\cdot, t_0^{(\ell)})\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \to 0, \qquad t_0^{(\ell)} \to 0 \tag{3.40}$$

ao $\ell \to \infty$. Assim, dado $T > 0$ qualquer, e tomando $t_0 \in]0, T[$ satisfazendo (3.40), temos, derivando (3.1) em relação a x duas vezes, multiplicando o resultado por $2t^3 u_{xx}$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$,

$$\begin{aligned} T^3 \|u_{xx}(\cdot, T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \;&+\; 2\mu \int_{t_0}^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \;=\; t_0^3 \|u_{xx}(x, t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \\ &+\; 3 \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(x, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + \\ &+\; 2 \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} c u(x, t) u_{xx}(x, t) u_{xxx}(x, t) dx dt + \\ &+\; 2c \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x, t) u_{xxx}(x, t) dx dt. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Por outro lado,

$$\left| 2c \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} u(x, t) u_{xx} u_{xxx} dx dt \right| \leq 2|c| \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)||u_{xx}||u_{xxx}| dx dt,$$

e

$$\left| 2c \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 u_{xxx} dx dt \right| \leq 2|c| \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 |u_{xxx}| dx dt;$$

utilizando a desigualdade de Cauchy (A.1) com $\epsilon = \mu/4$,

$$\begin{aligned} 2|c| \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)||u_{xx}||u_{xxx}| dx dt \;&\leq\; \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}|^2 dx dt + \\ &+\; \frac{2c^2}{\mu} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u(x, t))|^2 |u_{xx}|^2 dx dt, \end{aligned} \tag{3.42}$$

e também,

$$\begin{aligned} 2|c| \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 |u_{xxx}| dx dt \;&\leq\; \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}|^2 dx dt + \\ &+\; \frac{2c^2}{\mu} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^4 dx dt. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Pelo Teorema 3.8 e por (3.37),

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 |u_{xx}|^2 dx dt &\leq \int_{t_0}^{T} t^3 \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\ &\leq C(\mu, K_1) \int_{t_0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\ &\leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{1/2}. \qquad (3.44)\end{aligned}$$

Por outro lado, também pelo Teorema 3.8 e pela desigualdade (A.12), Anexo A, temos,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T} t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^4 dx dt &\leq \int_{t_0}^{T} t^3 \|u_x(\cdot,t)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 dt \\ &\leq C \int_{t_0}^{T} 2t^3 \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^3 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq C(\mu, K_1) \int_{t_0}^{T} t^{3/2} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq C(\mu, K_1) \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + \int_{t_0}^{T} t^2 \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\ &\leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{1/2}, \qquad (3.45)\end{aligned}$$

pela Desigualdade de Energia (3.25) e (3.37), para $C(\mu, K_1)$ apropriada. Fazendo $t_0 \to 0$, obtemos o resultado por (3.44), (3.45) e (3.40). $\square$

No que segue, vamos examinar o caso em que $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R})$ para $p > 1$. O caso mais simples é quando $1 < p \leq 2$, que será examinado no resultado abaixo. O caso $p > 2$ resulta de uma análise mais geral apresentada no Capítulo 4 (ver Teorema 4.5).

Teorema 3.12. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, tem-se*

$$T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{2p}} \mu^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \qquad (3.46)$$

para todo $T > 0$.

Demonstração. No caso $p=2$, temos, multiplicando (3.1) por $u(x,t)$ e integrando em $[0,T]$,

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = \|u(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

o que mostra (3.46) neste caso.

Considerando agora $1<p<2$, multiplicando (3.1) por $2\ t^{\frac{1}{p}}\ u(x,t)$ e integrando em $[0,T]$, obtemos, integrando por partes,

$$T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = \frac{2}{p} \int_0^T t^{\frac{1}{p}-1} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

de modo que, por (A.11), Anexo A, obtemos

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &+ 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \\ &\leq \frac{2}{p}\ 4^{\frac{2-p}{2+p}} \int_0^T t^{\frac{1}{p}-1} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{4p}{2+p}} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{4-2p}{2+p}} dt \\ &\leq \frac{2}{p}\ 4^{\frac{2-p}{2+p}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{4p}{2+p}} \int_0^T t^{\frac{1}{p}-1} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{4-2p}{2+p}} dt \\ &\leq \frac{4}{p}\ \mu^{-\frac{2-p}{2+p}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{4p}{2+p}} T^{\frac{p}{p+2}} \left(2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt\right)^{\frac{2-p}{2+p}} \end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder. Isso implica que

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &+ 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \\ &\leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{2p}} \mu^{-\frac{2-p}{2p}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para todo $T>0$, o que conclui o argumento. □

Uma consequência importante deste resultado é dada a seguir.

Teorema 3.13. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1<p\leq 2$, temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_p\ \mu^{-\frac{1}{2p}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}} \tag{3.47}$$

para todo $t>0$, onde $C_p = \dfrac{\sqrt[4]{2\sqrt{2}}\ 2^{\frac{p+3}{2p}}}{p^{\frac{2+p}{4p}}}$.

Demonstração. Do Teorema 3.12, temos, para $T > 0$ qualquer,

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{4p}} \mu^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \tag{3.48}$$

e

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T} t^{\frac{1}{p}}\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{2p}} \mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^p(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}}, \tag{3.49}$$

de modo que, por (A.9), Anexo A, existe $t_* \in [\frac{T}{2}, T]$ tal que

$$t_*^{\frac{1}{p}}\|u_x(\cdot,t_*)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{2p}} \mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^p(\mathbb{R})}T^{-\frac{1}{2}},$$

isto é

$$\|u_x(\cdot,t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{4p}} \mu^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})}\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}T^{-\frac{1}{4}}t_*^{-\frac{1}{2p}}. \tag{3.50}$$

Portanto, por (A.10), resulta

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2}\ \|u(\cdot,t_*)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\|u_x(\cdot,t_*)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \sqrt{2}\left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{4p}} \mu^{-\frac{1}{2p}}\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}T^{-\frac{1}{8}}t_*^{-\frac{1}{2p}+\frac{1}{8}},
\end{aligned}$$

e então, pelo princípio do máximo,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\ 2^{\frac{p+3}{2p}} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2+p}{4p}} \mu^{-\frac{1}{2p}}\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}T^{-\frac{1}{2p}}.
\end{aligned}$$

□

Em particular, por interpolação, obtemos a seguinte estimativa.

Teorema 3.14. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, tem-se, para cada $p \leq r \leq \infty$,*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(r,p)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}(\mu t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \tag{3.51}$$

para todo $t > 0$, onde $C(r,p) = C_p^{1-\frac{r}{p}}$, $C_p > 0$ dada no Teorema 3.13.

Demonstração. De (A.8), Anexo A,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{r}{p}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{r}{p}} \\ &\leq \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{r}{p}} (C_p \, \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \mu^{-\frac{1}{2p}} t^{-\frac{1}{2p}})^{1-\frac{r}{p}},\end{aligned}$$

usando Teorema 3.2 e 3.13. □

Finalmente, como será mostrado em maior generalidade no Capítulo 4 a seguir (ver Teorema 4.5), temos a seguinte estimativa para as soluções $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^p(\mathbb{R}))$ limitadas no caso $1 \leq p < \infty$ qualquer.

Teorema 3.15. *Sendo f continuamente diferenciável, e supondo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, a solução $u(\cdot,t)$ de (3.1), (3.3) satisfaz*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p,\mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall \; t > 0 \tag{3.52}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

3.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$

Nesta seção, obteremos vários resultados assintóticos (ao $t \to +\infty$) para as soluções $u(\cdot,t)$ da equação de Burgers (3.1) correspondentes a estados iniciais $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Seria útil no que segue, introduzirmos a transformação de Hopf-Cole [7], [2],

$$\varphi(x,t) = e^{-\frac{c}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)d\xi} \tag{3.53}$$

cuja inversa é dada por

$$u(x,t) = -\frac{2\mu}{c}\frac{\varphi_x(x,t)}{\varphi(x,t)}. \tag{3.54}$$

Em termos de $\varphi(\cdot,t)$ a equação (3.1) produz

$$\varphi_t = \mu\varphi_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \; t > 0 \tag{3.55}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \tag{3.56}$$

onde

$$\varphi_0(x) = e^{-\frac{c}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u_0(\xi)d\xi}. \tag{3.57}$$

Como $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, obtemos $\varphi_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, com

$$e^{-\frac{c}{2\mu}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}} \leq \varphi_0(x) \leq e^{\frac{c}{2\mu}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}} \tag{3.58}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que $1/\varphi_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Mais geralmente, por (A.1), temos

$$e^{-\frac{c}{2\mu}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}} \leq \varphi(x,t) \leq e^{\frac{c}{2\mu}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}} \tag{3.59}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. De (3.55) e (3.56), obtemos

$$\varphi(x,t) \ = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \ \varphi_0(y) \ dy, \tag{3.60}$$

de modo que, por (3.54), obtemos a seguinte representação explícita para a solução $u(\cdot,t)$,

$$u(x,t) \ = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\varphi(x,t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \ e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \ \varphi_0(y) \ u_0(y) \ dy, \tag{3.61}$$

onde φ, φ_0 são dadas em (3.53) e (3.57) acima.

Lema 3.1. *Sendo $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)dx = 0$. Então, para todo $p \leq r \leq \infty$ tem-se,*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Demonstração. De fato, por (3.55) e (3.56) vemos que φ_x satisfaz o Lema 2.3, então, para todo $p \leq r \leq \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\varphi_x(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Visto que $1/\varphi$ é uniformemente limitado, o mesmo é verdade para $u(\cdot,t)$ dado em (3.61). □

Lema 3.2. *Sendo u_0, $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(x)dx$$

onde $u(\cdot,t)$ e $v(\cdot,t)$ são soluções de (3.1) correspondendo a estados iniciais u_0 e v_0 respectivamante. Então, para todo $1 \leq r \leq \infty$, tem-se

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Demonstração. Sendo φ, ψ transformações de Hopf-Cole de u, v respectivamente, isto é,

$$\varphi(x,t) = e^{-\frac{c}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)d\xi} \quad , \quad \psi(x,t) = e^{-\frac{c}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} v(\xi,t)d\xi}$$

e, tomando $\omega = \varphi_x - \psi_x$, temos que ω tem massa nula e satisfaz $\omega_t = \mu\omega_{xx}$, assim, pelo Lema 2.3,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\varphi_x(\cdot,t) - \psi_x(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\varphi(\cdot,t)u(\cdot,t) - \psi(\cdot,t)v(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Sendo $1/\varphi(\cdot,t)$, $1/\psi(\cdot,t)$ uniformemente limitados e

$$\lim_{t\to\infty}\|\varphi(\cdot,t) - \psi(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

segue o resultado.

□

Teorema 3.16. *Dado $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, a solução $u(\cdot,t)$ de (3.1) satisfaz*

$$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m| \tag{3.62}$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}}(4\mu)^{\frac{1}{2r}}\left|\frac{2\mu}{cm}(1-e^{-\frac{cm}{2\mu}})\right|\|\mathcal{F}\|_{L^r(\mathbb{R})} \tag{3.63}$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}}\left|\frac{2\mu}{cm}(1-e^{-\frac{cm}{2\mu}})\right|\|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \tag{3.64}$$

onde $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e é dada por

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sigma - h\ \mathit{erf}(\xi)},$$

onde

$$\mathit{erf}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi e^{s^2}ds,$$

$$\sigma = \frac{1+e^{-\frac{cm}{2\mu}}}{2}$$

e

$$h = \left|1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}\right|$$

e

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)dx.$$

Demonstração. Devido ao Lema 3.2, é suficiente mostrar o resultado para o estado particular inicial $u_0 = m\mathcal{X}_{[0,1]}$, no caso $u(x,t)$ é dado por

$$u(x,t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\varphi(x,t)} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y-at)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) dy$$

onde

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y-at)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) dy$$

com

$$\varphi_0(x) = e^{-\frac{c}{2\mu}\int_{-\infty}^{x} u_0(\xi)d\xi}.$$

Em particular, para todo $t > 0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)dx \right| = |m|$$

o qual mostra (3.62). Para mostrar (3.63) e (3.64), introduziremos,

$$\mathcal{H}_0(x) \ = \begin{cases} 1, & x < \alpha \\ e^{-\frac{cm}{2\mu}}, & x > \alpha \end{cases} \tag{3.65}$$

onde $\alpha > 0$ satisfaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}_0(x) - \varphi_0(x))dx = 0 \tag{3.66}$$

isto é,

$$\alpha + (1-\alpha)e^{-\frac{cm}{2\mu}} \ = \frac{2\mu}{cm}(1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}).$$

Sendo

$$\mathcal{H}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \mathcal{H}_0(y) dy \tag{3.67}$$

temos, por (3.66) e Lema 2.3,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|\mathcal{H}(\cdot,t) - \varphi(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, tal que

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t) - \omega(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0$$

onde ω é definido por

$$\omega(x,t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\mathcal{H}(x,t)} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y-at)^2}{4\mu t}} \mathcal{H}_0(y) dy$$

e $\mathcal{H}(x,t)$ é dado em (3.67), isto é,

$$\mathcal{H}(x,t) = \sigma - \gamma\ h\ \mathsf{erf}(\frac{x-\alpha}{\sqrt{4\mu t}}),$$

onde γ é o sinal do produto cm (isto é, $\gamma = 1$ se $cm > 0$, $\gamma = -1$ se $cm < 0$). Queremos agora derivar (3.63), para $p \leq r \leq \infty$. Dado $\xi \in \mathbb{R}$, temos

$$\omega(\alpha + \xi\sqrt{4\mu t}, t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu t}}\ \frac{1}{\sigma - \gamma\ h\ \mathsf{erf}(\xi)} \int_0^1 e^{-(\xi + \frac{\alpha - y}{\sqrt{4\mu t}})^2} \mathcal{H}_0(y)dy, \tag{3.68}$$

tal que

$$t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot,t)\|^r_{L^r(\mathbb{R})} = (\frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}})^r \sqrt{4\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\sigma - \gamma\ h\ \mathsf{erf}(\xi)|^r} \left| \int_0^1 e^{-(\xi + \frac{\alpha - y}{\sqrt{4\mu t}})^2} \mathcal{H}_0(y)dy \right|^r d\xi.$$

Dessa forma, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e $t \geq 1/4\mu$, temos,

$$\left| \int_0^1 e^{-(\xi + \frac{\alpha - y}{\sqrt{4\mu t}})^2} \mathcal{H}_0(y)dy \right|^r \leq e^{-\frac{r}{2}\xi^2 + 1} \|\mathcal{H}_0\|^r_{L^r(0,1)},$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|\omega(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &= \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} (4\mu)^{\frac{1}{2r}} \left(\int_0^1 \mathcal{H}_0(y)dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{-\xi^2}}{\sigma - \gamma\ h\ \mathsf{erf}(\xi)} \right|^r d\xi \right)^{1/r} \\ &= \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} (4\mu)^{\frac{1}{2r}} \left| \frac{2\mu}{cm}(1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^r(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

por (3.65) e (3.66). Isto nos mostra (3.63). Finalmente, para $p = \infty$, nos observamos que, fazendo $t \to \infty$ em (3.68), obtemos,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \frac{2\mu}{cm}(1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \frac{e^{-\xi^2}}{\sigma - \gamma\ h\ \mathsf{erf}(\xi)}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \frac{2\mu}{cm}(1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{3.69}$$

Por outro lado, para $t > 0$ seja $\xi_t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = |\omega(\alpha + \xi_t\sqrt{4\mu t}, t)|. \tag{3.70}$$

Assim, $\liminf\limits_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} > 0$ por (3.69). Agora, tomando qualquer sequência $t_n \to \infty$ tal que $\xi_n \to \xi_*$, então temos, por (3.68), (3.70),

$$\sqrt{t_n} \|\omega(\cdot,t_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}}\ \frac{1}{\sigma - \gamma\ h\ \mathsf{erf}(\xi)} \int_0^1 e^{-(\xi_n + \frac{\alpha - y}{\sqrt{4\mu t_n}})^2} \mathcal{H}_0(y)dy$$

assim, fazendo $n \to \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t_n} \|\omega(\cdot, t_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \frac{2\mu}{cm}(1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \frac{e^{-\xi_*^2}}{\sigma - \gamma\ h\ \mathsf{erf}(\xi_*)}.$$

Isto resulta,

$$\limsup_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \frac{2\mu}{cm}(1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

a qual, juntamente com (3.70), mostra (3.64). □

3.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R}),\ r \geq p,\ p > 1$

Vejamos como a solução $u(\cdot, t)$ de (3.1), (3.3) se comporta, com respeito a suas normas $\|\cdot\|_{L^r}$, quando $r \geq p$ e $1 < p < \infty$.

Teorema 3.17. *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (3.1), (3.3) com $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to \infty. \tag{3.71}$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, tome $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{|x|\geq R} |u_0(x)|^p dx \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \tag{3.72}$$

e seja $v_0 \in L^p(\mathbb{R})$ dada por

$$v_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq R \\ u_0(x), & |x| > R \end{cases} \tag{3.73}$$

Em particular, $|v_0(x)| \leq |u_0(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} |v_0(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^p dx \leq K_p^p < \infty.$$

Sendo $v(\cdot, t)$ solução de $v_t + cvv_x = \mu v_{xx}$ com $v(\cdot, 0) = v_0$, temos, pelo Teorema 3.2,

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|v_0\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |v_0(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{|x|\geq R} |u_0(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $t > 0$, ou seja,

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall\ t > 0.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Interpolação (A.8),

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/p} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-1/p} \\
&\leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/p} (\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{1-1/p} \\
&\leq C\ t^{-1/2p} \ \to\ 0
\end{aligned}$$

por (3.22) e Teorema 3.13. Assim, podemos tomar $t_0 = t_0(\epsilon) > 0$ suficientemente grande tal que

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ t \geq t_0. \tag{3.74}$$

Daí temos,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $t \geq t_0$. □

Teorema 3.18. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (3.1), (3.3) com $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e $1 < p < \infty$, tem-se*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \tag{3.75}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Demonstração. O caso $r = p$ foi examinado no Teorema 3.17 acima, e $r = \infty$ resulta do Teorema 4.10 (mais geral) a ser visto no Capítulo 4. Uma vez obtido (3.75) para $r = p$ e $r = \infty$, obtém-se a mesma propriedade para todo $p < r < \infty$, por interpolação: pela desigualdade (A.8), tem-se

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}}\ t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} \\
&\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \left(t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)^{1-\frac{p}{r}} \\
&\to 0 \qquad \textit{ao} \qquad t \to +\infty,
\end{aligned}$$

o que conclui o argumento. □

4 EQUAÇÃO DE BURGERS GENERALIZADA

4.1 Introdução

Neste capítulo vamos estender os resultados anteriores às soluções $u(\cdot, t)$ de equações da forma

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{4.1}$$

associadas a estados iniciais $u_0 \in\ L^p(\mathbb{R})$ limitados,

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in\ L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \tag{4.2}$$

onde $1 \leq p < \infty$. Em (4.1), μ denota uma constante positiva, dita "constante (ou coeficiente) de viscosidade", e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função (suave) dada. Nestas condições, existe uma única $u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}))$ limitada satisfazendo (4.1) no sentido clássico em $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ e tal que $u(\cdot, 0) = u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$, isto é,

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to 0^+. \tag{4.3}$$

Na seção 4.2, vamos revisar algumas propriedades básicas de $u(\cdot, t)$, que serão úteis na análise do restante do capítulo. Na seção 4.3, taxas de decaimento (ao $t \to +\infty$) serão obtidas, e em particular será mostrado que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu, K_p, K_\infty).t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \tag{4.4}$$

para todo $t > 0$ e cada $p \leq r \leq \infty$, onde $C(p, \mu, K_p, K_\infty)$ é uma constante dependendo de p, μ, e K_p, K_∞ escolhidas de modo a se ter

$$\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq K_p, \qquad\qquad \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty. \tag{4.5}$$

No caso $p = 1$, isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, é mostrado na seção 4.4 que

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad ao \qquad t \to +\infty \tag{4.6}$$

onde $v(\cdot,t)$ é solução da equação de Burgers

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = \mu v_{xx} \tag{4.7}$$

com $v(\cdot,0)$ tendo a mesma massa de u_0, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} v(x,0)dx \ = \ \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx \ \equiv \ m. \tag{4.8}$$

Este resultado permite estender as propriedades assintóticas vistas para a equação de Burgers (Capítulo 3) para as soluções $u(\cdot,t)$ de (4.1) acima; em particular, no caso $p=1$, para quaisquer soluções $u(\cdot,t)$, $\hat{u}(\cdot,t)$ de (4.1) transportando a mesma massa, tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0, \tag{4.9}$$

tendo-se os limites

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \gamma_r \tag{4.10}$$

bem definidos para cada $1 \leq r \leq \infty$ e não nulos para $m \neq 0$, com

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m|. \tag{4.11}$$

Finalmente, na seção 4.5, examinamos o caso $p>1$, obtendo (como no Capítulo 3)

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{4.12}$$

e, em conseqüência,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \tag{4.13}$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

4.2 Propriedades básicas

Sendo $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^p(\mathbb{R}))$ solução de (4.1), (4.2), podemos obter, repetindo os argumentos utilizados no Capítulo 3 para a equação de Burgers, os resultados dados nos Teoremas 4.1 e 4.2 a seguir.

Teorema 4.1 (Monotonicidade de $\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$). *Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, e $u(\cdot,t)$ a solução de (4.1), (4.2) correspondente, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^r(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > 0 \tag{4.14}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

O caso $r = \infty$ correspondente ao princípio do máximo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x,t)| \leq ess \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x)| \qquad \forall\ t > 0, \tag{4.15}$$

onde *ess sup* denota o supremo essencial de $|u_0(\cdot)|$.

Teorema 4.2 (Contratividade em $L^1(\mathbb{R})$). *Sendo u_0, $\hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R})$, as soluções correspondentes $u(\cdot,t)$, $\hat{u}(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^1(\mathbb{R}))$ satisfazem*

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > 0. \tag{4.16}$$

No caso $p > 1$, obtém-se a seguinte versão para a desigualdade (4.16) acima.

Teorema 4.3. *Sendo u_0, $\hat{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ e $u(\cdot,t)$, $\hat{u}(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^p(\mathbb{R}))$ soluções limitadas de (4.1) correspondentes aos estados iniciais, u_0, $\hat{u}_0$, respectivamente, tem-se*

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R})}\ e^{B(\mu,p,K_\infty)t} \qquad \forall\ t > 0, \tag{4.17}$$

onde $B(\mu,p,K_\infty)$ denota uma constante que depende apenas dos valores de μ, p e $K_\infty > 0$ tal que $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty$, $\|\hat{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty$.

Demonstração. Sendo $\theta(\cdot,t) := u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)$, tem-se $\theta(\cdot,t)$ satisfazendo

$$\theta_t + [f]_x = \mu\theta_{xx} \tag{4.18}$$

onde $[f] := f(\hat{u}+\theta) - f(\hat{u})$. Tomando uma família de funções sinal regularizadas $L'_\delta(\cdot)$, obtém-se, multiplicando (4.18) por $pL_\delta(\theta)^{p-1}L'_\delta(\theta)$ e integrando em $\mathbb{R}\times[0,T]$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x,T))^p dx \ &+ \ \mu p(p-1)\int_0^T\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-2}L'_\delta(\theta)^2\theta_x^2 dxdt + \\ &+ \ \mu p\int_0^T\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-1}L''_\delta(\theta)\theta_x^2 dxdt \\ &= \ \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x,0))^p dx + p(p-1)\int_0^T\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-2}L'_\delta(\theta)^2\theta_x[f]dxdt + \\ &+ \ p\int_0^T\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-1}L''_\delta(\theta)\theta_x[f]dxdt.\end{aligned}$$

Como $|\theta_x[f]| \leq C(K_\infty,\mu)\theta^2 + \mu\theta_x^2/2$ para $C(K_\infty,\mu) > 0$ constante apropriada, resulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x,T))^p dx \ &+ \ \frac{\mu}{2}p(p-1)\int_0^T\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-2}L'_\delta(\theta)^2\theta_x^2 dxdt + \\ &+ \ \mu p\int_0^T\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-1}L''_\delta(\theta)\theta_x^2 dxdt \\ &\leq \ \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x,0))^p dx + C(K_\infty,\mu)p(p-1)\int_0^T\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-2}L'_\delta(\theta)^2\theta^2 dxdt + \\ &+ \ p\int_0^T\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-1}L''_\delta(\theta)\theta_x[f]dxdt,\end{aligned}$$

para cada $\delta > 0$; fazendo $\delta \to 0$, obtém-se:

$$\|\theta(\cdot,T)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\theta(\cdot,0)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + C(\mu,p,K_\infty)\int_0^T \|\theta(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}dt$$

para $C(\mu,p,K_\infty)$ constante dependendo apenas de μ, p e K_∞. Pela desigualdade de Gronwall [8], tem-se então

$$\|\theta(\cdot,T)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\theta(\cdot,0)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}e^{C(\mu,p,K_\infty)T},$$

o que mostra o resultado. □

4.3 Decaimento

Considerando inicialmente o caso $p = 1$, isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, obtém-se os seguintes resultados.

Teorema 4.4. *Sendo f continuamente diferenciável, e supondo $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}} \qquad \forall\ t > 0. \tag{4.19}$$

Com efeito, procedendo como no Capítulo 3, resulta que $u(\cdot,t)$ satisfaz a desigualdade

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\|u_0\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}}, \tag{4.20}$$

para cada $T > 0$ dado. Diferenciando (4.1) com relação a x e multiplicando por $2t^2u_x(x,t)$, a integração em $\mathbb{R} \times [0,T]$ produz, então,

$$\begin{aligned} T^2\|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \ &+\ 2\mu \int_0^T t^2\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt = \\ &=\ 2\int_0^T t^2 \int_{\mathbb{R}} f'(u)u_x u_{xx}\ dx\ dt \\ &=\ 2\int_0^T t^2 \int_{\mathbb{R}} (f'(u) - f'(0))u_x u_{xx}\ dx\ dt; \end{aligned} \tag{4.21}$$

como, por (4.20), resulta, repetindo o argumento do Capítulo 3,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}t^{-\frac{1}{2}} \qquad \forall\ t > 0, \tag{4.22}$$

segue imediatamente de (4.20) e (4.21) que

$$T^2\|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_0^T t^2\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu, K_\infty)\|u_0\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}} \tag{4.23}$$

para todo $T > 0$, onde $C(\mu, K_\infty)$ denota uma constante dependendo apenas dos valores de μ, K_∞. Diferenciando (4.1) duas vezes e repetindo o argumento, como no Capítulo 3, resulta

$$T^3\|u_{xx}(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_0^T t^3\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu, K_1, K_\infty)\|u_0\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}} \tag{4.24}$$

para todo $T > 0$, e assim sucessivamente, assumindo f suave.

Por outro lado, no caso $1 < p \leq 2$, obtemos (repetindo o argumento visto no Capítulo 3),

$$T^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}}\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C_p\|u_0\|^2_{L^p(\mathbb{R})}\mu^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{2}} \tag{4.25}$$

para todo $T > 0$, onde $C_p > 0$ é constante dependendo apenas de p. Em particular, resulta

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(p,\mu)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}, \tag{4.26}$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(p,\mu)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}}, \tag{4.27}$$

para todo $t > 0$, e certa constante $C(p,\mu) > 0$ dependendo apenas dos parâmetros p, μ. Por interpolação, resulta

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p,\mu)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall\ t > 0 \tag{4.28}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, e certa constante $C(p,\mu) > 0$ apropriada.

Finalmente, no caso $p > 2$, podemos obter (4.28) como segue. Tomando $q \geq p$ da forma $q = 4\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, multiplicamos (4.1) por $qt^\gamma u(x,t)^{q-1}$, onde $\gamma = \frac{q}{p}$, e integramos em $\mathbb{R}\times$[0,T] para obter

$$T^\gamma \|u(\cdot,T)\|^q_{L^q(\mathbb{R})} + q(q-1)\mu \int_0^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}} u(x,t)^{q-2}u_x^2 dxdt = \gamma \int_0^T t^{\gamma-1}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R})}dt,$$

ou seja, em termos de $w(\cdot,t) := u(\cdot,t)^{\frac{q}{2}}$,

$$T^\gamma \|w(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 4\mu\left(1-\frac{1}{q}\right)\int_0^T t^\gamma \|w_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt = \gamma \int_0^T t^{\gamma-1}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \tag{4.29}$$

Como,

$$\begin{aligned}
\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |w(x,t)|^{2\frac{p}{q}}\ |w(x,t)|^{2\frac{q-p}{q}}\ dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |w(x,t)|^{2\frac{p}{q}}\ \|w(\cdot,t)\|^{2\frac{q-p}{q}}_{L^\infty(\mathbb{R})}\ dt \\
&= \|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\ \|w(\cdot,t)\|^{2\frac{q-p}{q}}_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq 2^{1-\frac{p}{q}}\ \|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\ \|w(\cdot,t)\|^{1-\frac{p}{q}}_{L^2(\mathbb{R})}\ \|w_x(\cdot,t)\|^{1-\frac{p}{q}}_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

resulta

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1-p/q}{1+p/q}}\ \|u(\cdot,t)\|^{\frac{p}{1+p/q}}_{L^p(\mathbb{R})}\ \|w_x(\cdot,t)\|^{\frac{1-p/q}{1+p/q}}_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{4.30}$$

de modo que (4.29) fornece, lembrando (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}
T^\gamma \|w(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &+ 4\mu\left(1-\frac{1}{q}\right)\int_0^T t^\gamma \|w_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \\
&\leq \gamma\ 4^{\frac{1-p/q}{1+p/q}}\|u_0\|^{\frac{2p}{1+p/q}}_{L^p(\mathbb{R})}\int_0^T t^{\gamma-1}\|w_x(\cdot,t)\|^{2\frac{1-p/q}{1+p/q}}_{L^2(\mathbb{R})}dt.
\end{aligned}$$

Como no Capítulo 3, resulta, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} T^{\gamma}\|w(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \;&+\; 4\mu\left(1-\frac{1}{q}\right)\int_0^T t^{\gamma}\|w_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \\ &\leq\; C(p,q,\mu)\;\|u_0\|^q_{L^p(\mathbb{R})}\;T^{\gamma-\frac{1-p/q}{2p/q}}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T^{\frac{q}{p}}\|u(\cdot,T)\|^q_{L^q(\mathbb{R})} \;&+\; q(q-1)\mu\int_0^T t^{\frac{q}{p}}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)^{q-2}u_x^2\,dxdt \leq \\ &\leq\; C(p,q,\mu)\;\|u_0\|^q_{L^p(\mathbb{R})}\;T^{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{p})}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

para todo $T > 0$, e onde $C(p,q,\mu) > 0$ depende apenas dos parâmetros p, q, μ indicados. Em particular, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C(p,q,\mu)t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \tag{4.33}$$

para todo $t > 0$ e cada $q \geq p$ múltiplo de 4, com $C(p,q,\mu) > 0$ constante. Além disso, de (4.32) obtemos, como no Capítulo 3,

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(p,q,\mu)\;\|u_0\|^{\frac{q}{2}}_{L^p(\mathbb{R})}\;t^{-\frac{1}{4p/q}} \tag{4.34}$$

para cada $t > 0$, ou seja,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(p,\mu)\;\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}\;t^{-\frac{1}{2p}} \qquad \forall\; t > 0 \tag{4.35}$$

para certa constante $C(p,\mu) > 0$ adequada. Como $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}$ pelo Teorema 4.1, obtemos novamente (4.28) por um argumento simples de interpolação. Fica, assim, mostrado o resultado abaixo.

Teorema 4.5. *Sendo f continuamente diferenciável, e supondo $u_0 \in L^p(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, a solução $u(\cdot,t)$ de (4.1) e (4.2) satisfaz*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p,\mu)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \qquad \forall\; t > 0 \tag{4.36}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, onde $C(p,\mu)$ denota uma constante que depende dos parâmetros p, μ.

4.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$

Nesta seção, vamos mostrar que, sendo $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, a solução $u(\cdot, t)$ do problema (4.1), (4.2) satisfaz propriedades análogas às examindas no Capítulo 3 para a equação de Burgers. O ponto de partida é dado pelo seguinte resultado fundamental: sendo $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ um estado inicial com mesma massa que u_0, e sendo $v(\cdot, t)$ definida por

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = \mu v_{xx} \tag{4.37}$$

$$v(\cdot, 0) = v_0 \in L^1(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} v_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx, \tag{4.38}$$

então

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$$

ao $t \to +\infty$. Para estabelecer este fato, será preciso que f seja de classe C^2 com $f^{''}$ Hölder-contínua no ponto $\mathsf{u} = 0$, de modo que existem $\Omega > 0$ e constantes Γ, $\alpha > 0$ tais que

$$|f^{''}(\mathsf{u}) - f^{''}(0)| \leq \Gamma |\mathsf{u}|^{\alpha} \qquad se \qquad |\mathsf{u}| \leq \Omega. \tag{4.39}$$

Lema 4.1. *Assumindo (4.39), tem-se que, para cada $\epsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\mu, K_1, \alpha, \Gamma, \Omega; \epsilon)$ suficientemente grande, dependendo apenas dos parâmetros indicados, tal que a solução $w(\cdot, t)$, $t \geq t_0$, de*

$$\begin{cases} w_t + f^{'}(0)w_x + f^{''}(0)ww_x = \mu w_{xx}, & t > t_0 \\ w(\cdot, t_0) = u(\cdot, t_0) \end{cases}$$

satisfaz $\|u(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon$, para todo $t \geq t_0$.

Demonstração. Tomando $\hat{t}_0 = \hat{t}_0(\mu, K_1, \Omega)$ suficientemente grande de modo a se ter

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \Omega \qquad \forall\, t \geq \hat{t}_0,$$

vamos escolher $t \geq \hat{t}_0$ em (4.40) a seguir. Seja $w : \mathbb{R} \times [t_0, \infty[$ a solução de (4.37), (4.38); então a diferença $\theta(\cdot, t) = u(\cdot, t) - w(\cdot, t)$ satisfaz

$$\theta_t + f^{'}(0)\theta_x + f^{''}(0)\left(\frac{\theta^2}{2} + \theta w\right)_x = \mu\theta_{xx} - \mathcal{F}(u)u_x$$

onde

$$\mathcal{F}(u) = f'(u) - f'(0) - f''(0)u;$$

como $|\mathcal{F}(u)| \leq \Gamma |u|^{1+\alpha}$ por (4.39), resulta, repetindo o argumento do Teorema 3.4 (Capítulo 3), para cada $T \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
\|\theta(\cdot, T)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \Gamma \int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}} |u|^{1+\alpha} |u_x| dx dt \\
&\leq \Gamma \int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|^{\alpha}_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\
&\leq C(\mu, K_1)\Gamma \int_{t_0}^{T} t^{-\frac{\alpha}{2}-1} dt \leq \epsilon
\end{aligned}$$

se $t_0 \geq \hat{t}_0$ for tomado de tal forma que

$$t_0 = \left(\frac{2\Gamma C(\mu, K_1)}{\epsilon\ \alpha} \right)^{\frac{2}{\alpha}}. \tag{4.40}$$

□

Teorema 4.6. *Assumindo (4.39), e sendo $u(\cdot, t)$ solução de (4.1), (4.2), $v(\cdot, t)$ solução de (4.37), (4.38), tem-se*

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{ao} \qquad t \to +\infty. \tag{4.41}$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sejam t_0, $w(\cdot, t)$ dados no Lema 4.1 tais que $\|u(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ para todo $t \geq t_0$; como $u(\cdot, t_0)$ e $v(\cdot, t_0)$ têm a mesma massa, resulta do Lema 3.2 (Capítulo 3), que $\|v(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ ao $t \to +\infty$, e (4.41) fica provado. □

Teorema 4.7. *Sendo u_0, $\hat{u}_0 \in L_1(\mathbb{R})$ com mesma massa, e $u(\cdot, t)$, $\hat{u}(\cdot, t)$ as soluções de (4.1), correspondentes a u_0, $\hat{u}_0$; então*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \tag{4.42}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Demonstração. Para $r = 1$, isso é consequência direta do Teorema 4.6; para $r = 2$, resulta de se ter

$$t^{\frac{1}{4}} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})} \left(t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + t^{\frac{1}{2}} \|\hat{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e, para $r = \infty$, da desigualdade

$$t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} \left(t^{\frac{1}{4}} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{3}{4}} \|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + t^{\frac{3}{4}} \|\hat{u}_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, dado $1 < r < \infty$, temos

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{r}} \left(t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right)^{1-\frac{1}{r}},$$

e o resultado está mostrado. □

Teorema 4.8. *Sendo $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, então a solução $u(\cdot,t)$ de (4.1), (4.2) satisfaz*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m| \tag{4.43}$$

onde m é a massa transportada, $m = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$.

Demonstração. Imediata de (3.62), Teorema 3.16 (Capítulo 3), e do fato de se ter, pelo Teorema 4.6,

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} - \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

□

Analogamente, os demais limites

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \gamma_r \tag{4.44}$$

obtidos na seção 3.4, Capítulo 3, continuam válidas, em vista do Teorema 4.7.

4.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p > 1$

Nesta seção, vamos examinar as questões consideradas na seção 4.3, no caso $p > 1$, isto é, $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Neste caso, como mostram os dois resultados abaixo, as respostas são triviais.

Teorema 4.9. *Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ com $p > 1$, então a solução $u(\cdot,t)$ de (4.1), (4.2) satisfaz*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \tag{4.45}$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $R > 0$ tal que $\int_{|x|\geq R} |u_0(x)|^p dx \leq \epsilon^p$; então, sendo $u_1(\cdot,t)$ a solução de (4.1) correspondente ao estado inicial $u_1(\cdot,0) = u_0 : (1-\mathcal{X}_{[-\mathcal{R},\mathcal{R}]})$, temos por (4.14),

$$\|u_1(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_1(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon \tag{4.46}$$

para todo $t > 0$, enquanto

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - u_1(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t) - u_1(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot,t) - u_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \|u_0\ \mathcal{X}_{[-R,R]}\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{p}} \left(\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{p}} + \|u_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{p}} \right) \end{aligned}$$

produz $\|u(\cdot,t) - u_1(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ para todo t suficientemente grande, pelos resultados da seção 4.3. □

Teorema 4.10. *Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ com $p > 1$, então a solução $u(\cdot,t)$ de (4.1), (4.2) satisfaz*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0. \tag{4.47}$$

Demonstração. Sendo $w(\cdot,t) := t^{\frac{1}{2p}} u(\cdot,t)$, temos $w(\cdot,t)$ satisfazendo

$$w_t + f^{'}(u)w_x = \mu w_{xx} + \frac{1}{2p}\ \frac{1}{t}\ w$$

para cada $t > 0$. Sendo $\Gamma(t,s;x,y)$ a solução fundamental da equação $w_t + f^{'}(u)w_x = \mu w_{xx}$, e tomando $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ para $t \geq t_0$, obtemos, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} w(x,t_0+t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,s;x,y) \frac{1}{2p}\ \frac{1}{t_0+s}\ w(y,t_0+s) dy\ ds \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,0;x,y)\ w(y,t_0) dy\ =:\ w_1(x,t) + w_2(x,t), \end{aligned}$$

com $|\Gamma(t,s;x,y)| \leq \frac{\Lambda}{\sqrt{t-s}}\ e^{-\frac{\lambda(x-y)^2}{t-s}}$ para constantes Λ, $\lambda > 0$ apropriadas, segue, pela desigualdade de Hölder (A.4),

$$\begin{aligned} |w_1(x,t)| &\leq \frac{\Lambda}{2p} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda(x-y)^2}{t-s}} \frac{1}{t_0+s} |w(y,t_0+s)| dy\ ds \\ &\leq C(\lambda,\Lambda,p) \int_0^t (t_0+s)^{\frac{1}{2p}-1} (t-s)^{-\frac{1}{2p}}\ ds\ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \epsilon\ C(\lambda,\Lambda,p) \int_0^t (t_0+s)^{\frac{1}{2p}-1} (t-s)^{-\frac{1}{2p}}\ ds \end{aligned}$$

para $C(\lambda,\Lambda,p)>0$ constante independente de ϵ. Como

$$\begin{aligned}\int_0^{t/2}(t_0+s)^{\frac{1}{2p}-1}(t-s)^{-\frac{1}{2p}}ds &\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2p}}\int_0^{t/2}(t_0+s)^{\frac{1}{2p}-1}ds\\ &\leq 2^{\frac{1}{2p}}2p\left(\frac{t_0+t}{t}\right)^{\frac{1}{2p}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{t/2}^{t}(t_0+s)^{\frac{1}{2p}-1}(t-s)^{-\frac{1}{2p}}ds &\leq \left(t_0+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2p}-1}\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2p}}ds\\ &\leq \frac{2p}{2p-1}\left(\frac{t/2}{t_0+t/2}\right)^{1-\frac{1}{2p}}\leq\frac{2p}{2p-1}\end{aligned}$$

para todo $t>0$, obtemos

$$\int_0^{t}(t_0+s)^{\frac{1}{2p}-1}(t-s)^{-\frac{1}{2p}}ds\leq 2p\left(2^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{2p-1}\right)$$

para todo $t\geq t_0$, de modo que $\|w_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq C(\lambda,\Lambda,p)\epsilon$ para todo $t\geq t_0$ e certa constante $C(\lambda,\Lambda,p)$ independente de ϵ.

Analogamente,

$$|w_2(x,t)|\leq C(\lambda,\Lambda,p)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{1}{2p}}$$

para todo $t>0$, e certa constante $C(\lambda,\Lambda,p)$ que depende apenas dos parâmetros λ, Λ e p de modo que $\|w_2(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq C\epsilon$ para todo $t\geq t_0$ e certa constante $C>0$ independente de ϵ. Resulta, assim, $\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq C\epsilon$ para todo $t\geq 2t_0$ e uma dada constante independente de ϵ, o que mostra o resultado. □

Por um argumento simples de interpolação, obtém-se então a seguinte propriedade.

Teorema 4.11. *Sendo $u_0\in L^p(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ com $p>1$, tem-se que a solução $u(\cdot,t)$ de(4.1), (4.2) satisfaz*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}=0 \tag{4.48}$$

para cada $p\leq r\leq\infty$, uniformemente em r.

ANEXO A

Teorema A.1 (Desigualdade de Cauchy). *Sendo* $a, b \geq 0$*, tem-se*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2 \qquad \forall\ \epsilon > 0. \tag{A.1}$$

Demonstração. Tem-se, para todo $\epsilon > 0$ dado,

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{2\epsilon} a)\frac{b}{\sqrt{2\epsilon}} \leq \frac{2\epsilon a^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{2\epsilon} \\ &= \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \end{aligned}$$

visto que $2ab \leq a^2 + b^2$. $\square$

Teorema A.2 (Desigualdade de Young: Primeira Versão). *Sendo* $p, q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, tem-se*

$$ab \leq \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q \qquad \forall\ a, b \geq 0. \tag{A.2}$$

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, (A.2) é trivial. Basta então considerar $a, b > 0$. Como e^x é convexa, tem-se

$$\begin{aligned} ab &= exp\left(\frac{1}{p}\ ln\ (a^p) + \frac{1}{q}\ ln\ (b^q)\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\ exp\ (ln\ (a^p)) + \frac{1}{q}\ exp\ (ln\ (b^q)) \\ &= \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q, \end{aligned}$$

como afirmado. $\square$

Teorema A.3 (Desigualdade de Young: Segunda Versão). *Sendo* $p, q > 1$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, tem-se*

$$ab \leq \epsilon\ a^p\ +\ C(\epsilon)\ b^q \qquad \forall\ a, b \geq 0, \quad \epsilon > 0 \tag{A.3}$$

onde $C(\epsilon) = \frac{1}{q(p\epsilon)^{\frac{p}{q}}}$.

Demonstração. Tem-se, para $\epsilon > 0$ dado,

$$\begin{aligned} ab &= (p\epsilon)^{\frac{1}{p}}\ a\ \frac{b}{(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{1}{p}\ ((p\epsilon)^{\frac{1}{p}}\ a)^p\ +\ \frac{1}{q}\ \left(\frac{b}{(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}}\right)^q \\ &= \epsilon\ a^p\ +\ \frac{b^q}{q(p\epsilon)^{\frac{q}{p}}} \end{aligned}$$

devido à (A.2). □

Teorema A.4 (Desigualdade de Hölder). *Sendo Ω mensurável $\subseteq \mathbb{R}^n$, e sendo $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)}\ \leq\ \|f\|_{L^p(\Omega)}\ \|g\|_{L^q(\Omega)} \tag{A.4}$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

Demonstração. Se $p = 1$ e $q = \infty$ ou ainda $p = \infty$ e $q = 1$ a desigualdade é óbvia. Se $p, q\ > 1$ finitos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o procedimento é o seguinte: caso $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|g\|_{L^q(\Omega)} = 0$, (A.4) é óbvia; dessa forma, vamos supor $\|f\|_{L^p(\Omega)} > 0$ e $\|g\|_{L^q(\Omega)} > 0$.

Definindo $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$, $\tilde{g} \in L^q(\Omega)$, via

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &:= \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \\ \tilde{g}(x) &:= \frac{g(x)}{\|g\|_{L^q(\Omega)}} \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, obtém-se

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\Omega)} = 1, \qquad \|\tilde{g}\|_{L^q(\Omega)} = 1$$

e, pela Desigualdade de Young (A.2) tem-se,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\tilde{f}(x)|\ |\tilde{g}(x)| dx &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\tilde{f}(x)|^p\ +\ \frac{1}{q}|\tilde{g}(x)|^q\right) dx \\ &= \frac{1}{p}\int |\tilde{f}(x)|^p dx\ +\ \frac{1}{q}\int |\tilde{g}(x)|^q dx \\ &= \frac{1}{p}\|\tilde{f}\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|\tilde{g}\|^q_{L^q(\Omega)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\ =\ 1 \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_\Omega |f(x)|\ |g(x)|\ dx \ \leq\ 1$$

ou seja,

$$\int_\Omega |f(x)|\ |g(x)|\ dx \ = \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

como afirmado. □

Teorema A.5 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sendo* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *mensurável, então*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \ \leq\ \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{A.5}$$

para toda $f, g \in L^2(\Omega)$*.*

Demonstração. Resultado de (A.4) tomando p = q = 2. □

Teorema A.6 (Desigualdade de Minkowski). *Sendo* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *mensurável e f, g em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p \leq \infty$*, tem-se*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \ \leq\ \|f\|_{L^p(\Omega)} \ + \|g\|_{L^p(\Omega)} \tag{A.6}$$

Demonstração. Se $p = 1$ ou $p = \infty$, a desigualdade é óbvia. Se $1 \leq p \leq \infty$, procedemos do seguinte modo: se $\|f+g\|_{L^p(\Omega)} = 0$, (A.6) é óbvia; se $\|f+g\|_{L^p(\Omega)} > 0$ tomando $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se por (A.4)

$$\begin{aligned}
\|f\ +\ g\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |f(x)\ +\ g(x)|^p\ dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x)\ +\ g(x)|^{p-1}\ (|f(x)|\ +\ |g(x)|)\ dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x)\ +\ g(x)|^{p-1}\ |f(x)|\ dx\ +\ \int_\Omega |f(x)\ +\ g(x)|^{p-1}\ |g(x)|\ dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x)\ +\ g(x)|^{(p-1)q}\ dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_\Omega |f(x)\ +\ g(x)|^{(p-1)q}\ dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x)\ +\ g(x)|^{(p-1)q}\ dx\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ +\ \left(\int_\Omega |g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= \|f\ +\ g\|^{p/q}_{L^p(\Omega)}\ \left(\|f\|_{L^p(\Omega)}\ \|g\|_{L^p(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|f \; + \; g\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-p/q} \; \leq \; \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \; + \; \|g\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

que é a Desigualdade de Minkowski, visto que $p \; - \; \frac{p}{q} \; = \; 1.$ □

Teorema A.7 (Desigualdade de Young para Convolução). *Sendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, tem-se $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f \; * \; g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \; \leq \; \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \; \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{A.7}$$

Demonstração. Se $p \; = \; 1$ ou $p \; = \; \infty$, a desigualdade é óbvia. Se $1 \; < \; p \; < \; \infty$, procedemos do seguinte modo: tomando $1 \; \leq \; p \; \leq \; \infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|f \; * \; g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f \; * \; g)(x)|^p \; dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \; g(x-y) \; dy \; \right|^p \; dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \; |g(x-y)| \; dy \; \right]^p \; dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} \; |f(y)|^{\frac{1}{p}} \; |g(x-y)| \; dy \; \right]^p \; dx \\
&\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \; |g(x-y)|^p \; dy \; \right] dx \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p \; dx \; \right] dy \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1+p/q} \; \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p
\end{aligned}$$

onde foi usada a desigualdade de Hölder (A.4) e o Teorema de Fubini(ver e.g. 11). Logo, elevando na 1/p, obtém-se

$$\|f \; * \; g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \; \leq \; \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \; \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

que é a Desigualdade (A.7) visto que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ □

Teorema A.8 (Desigualdade de Interpolação). *Sendo $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$, tem-se $f \in L^r(\mathbb{R})$ para cada $p \leq r \leq \infty$, com*

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{R})} \; \leq \; \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \; \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} \tag{A.8}$$

Demonstração. Basta considerar o caso $p < r < \infty$: claramente,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p |f|^{r-p} dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \|f\|^{r-p}_{L^\infty(\mathbb{R})} dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= (\|f\|^{r-p}_{L^\infty(\mathbb{R})})^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|f\|^{1-\frac{p}{r}}_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|^{\frac{p}{r}}_{L^p(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

□

Teorema A.9. *Se $f \in C^0([a,b])$ e $\int_a^b f(t)\ dt \leq M$, para $a, b, M \in \mathbb{R}$, $a < b$, então existe $t_* \in [a,b]$ tal que*

$$f(t_*) \ \leq\ \frac{M}{b-a}. \tag{A.9}$$

Demonstração. Se não houvesse tal t_*, teríamos

$$f(t) \ >\ \frac{M}{b-a} \qquad \textit{para todo } t \in [a,b]$$

e então teríamos de ter

$$\int_a^b f(t)\ dt \ >\ \int_a^b \frac{M}{b-a}\ dt \ = M\ ,$$

contradizendo a hipótese sobre f. □

Teorema A.10 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 1). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, *tem-se* $\mathrm{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ *e*

$$\|\mathrm{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \ \leq\ \sqrt{2}\ \|\mathrm{u}\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}\ \|\mathrm{u}_x\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})} \tag{A.10}$$

Demonstração. Tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.5),

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(\bar{x})^2 &= 2 \int_{-\infty}^{\bar{x}} \mathrm{u}(x)\ \mathrm{u}_x(x)\ dx \\
&\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} (\mathrm{u}(x))^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} (\mathrm{u}_x(x))^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{u}(x))^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{u}_x(x))^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\ \|\mathrm{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}\ \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$|\mathrm{u}(\bar{x})| \;\leq\; \sqrt{2}\, \|\mathrm{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}\, \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \qquad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R},$$

de onde segue (A.10) □

Teorema A.11 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 2). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} \;\leq\; C\, \|\mathrm{u}\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{2p}{p+2}}\, \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2-p}{p+2}} \tag{A.11}$$

onde $C = 2^{\frac{2-p}{2+p}}$.

Demonstração. Usando (A.8), temos

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|\mathrm{u}\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{2}} \|\mathrm{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leq \|\mathrm{u}\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{2}}\, (\sqrt{2}\|\mathrm{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}})^{1-\frac{p}{2}} \\
&= 2^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}} \|\mathrm{u}\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{2}}\, \|\mathrm{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}} \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}},
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Teorema A.12 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 3). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \;\leq\; C\, \|\mathrm{u}\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}}\, \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2}{p+2}} \tag{A.12}$$

onde $C = 2^{\frac{2}{2+p}}$.

Demonstração. Usando (A.10) e (A.11),obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2}\|\mathrm{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{2}{p+2}} \|\mathrm{u}\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}}\, \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2}{p+2}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema A.13 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 4). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R})} \;\leq\; \sqrt[4]{2}\, \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{3/4}\, \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/4} \tag{A.13}$$

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R})}^4 &= \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{u}(x)|^4 \, dx \\ &\leq \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}^2 \, \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

e, devido a (A.10),

$$\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R})}^4 \leq 2 \, \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^3 \, \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})},$$

de onde segue (A.13). □

Teorema A.14 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 5). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^6(\mathbb{R})} \leq \sqrt[3]{2} \, \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{2/3} \, \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/3} \tag{A.14}$$

Demonstração. Por (A.10) tem-se,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^6(\mathbb{R})} &\leq \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}^{2/3} \, \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/3} \\ &\leq \left(\sqrt{2} \, \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \, \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2}\right)^{2/3} \, \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/3}, \end{aligned}$$

que corresponde a desigualdade (A.14). □

Teorema A.15 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 6). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \, \|\mathrm{u}_{\mathrm{xx}}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{1/2} \tag{A.15}$$

Demonstração. Integrando por partes tem-se,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x \, \mathrm{u}_x \, dx = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u} \, \mathrm{u}_{xx} \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{u}| \, |\mathrm{u}_{xx}| \, dx \leq \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \, \|\mathrm{u}_{\mathrm{xx}}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

pela desigualdade (A.5). □

BIBLIOGRAFIA

[1] BURGERS, J. M. Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence. *Nederl. Akad. Wefensh. Proc 43* (1940), 2–12.

[2] COLE, J. D. On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math 9* (1951), 225–236.

[3] CRANDALL, M., AND TARTAR, L. Some relations betwen nonexpansive and order preserving mappings. *Proc. Amer. Math. Soc. 78* (1980), 385–390.

[4] FLETCHER, C. A. J. Burgers equation: a model for all reasons. In *Numerical solutions of partial differential equations (Parkville, 1981).* North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 139–225.

[5] GUENTHER, R. B., AND LEE, J. W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations.* Prentice-Hall, Englewood Clifs, 1988. Reimpresso por Dover, New York, 1996.

[6] HARABETIAN, E. Rarefactions and large time behavior for parabolic equations and monotone schemes. *Communications in Mathematical Physics*, 114 (1988), 527–536.

[7] HOPF, E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math. 3* (1950), 201–230.

[8] KREISS, H., AND LORENZ, J. *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations.* Academic Press, New York, 1989.

[9] ROYDEN, H. L. *Real Analysis*, 2nd ed. Macmillan, New York, 1968.

[10] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, 3nd ed. Mcgraw-Hill, Singapore, 1986.

[11] ZINGANO, P. Some asymptotic limits for burgers equation. Submitted.

[12] ZINGANO, P. R. Nonlinear L^2 stability under large disturbances. *J. Comp. Appl. Math. 103* (1999), 207–219.

[13] ZINGANO, P. R. Asymptotic behavior of the L^1 norm of solutions to nonlinear parabolic equations. 2003.

[14] ZINGANO, P. R., AND STEINBERG, S. L. On the hardy-litllewood theorem for functions of bounded variation. *SIAM J. Math. Anal. 33* (2002), 1199–1210.