

Método de Elementos Finitos e Solução da Equação de Poisson em duas dimensões

Autor: Cássio Baissvenger Pazinato*

Orientador: Carolina Cardoso Manica

*Contato: cpazinatto.ufrgs@me.com

INTRODUÇÃO

Muitos dos modelos da física-matemática e da engenharia são descritos através de problemas de valores de contorno, os quais raramente possuem solução analítica de fácil obtenção. Como abordagem para estes problemas, busca-se aproximações numéricas, sendo o método de Elementos Finitos uma das principais escolhas.

O método consiste na divisão do domínio do problema em um número finito de subdomínios simples [1] e na substituição do problema de valor de contorno por uma formulação variacional discreta do mesmo. O resultado da aplicação do método é um sistema de equações lineares.

OBJETIVOS

O objetivo do trabalho é apresentar o Método de Elementos Finitos, exemplificando sua utilização através do problema homogêneo de Poisson: encontre u tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma região limitada com fronteira $\partial\Omega$ suave, e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$ função conhecida.

Serão apresentados resultados numéricos, com a finalidade de comparar a aproximação obtida em código desenvolvido com resultados teóricos esperados.

DESENVOLVIMENTO

Através de integração por partes, ao multiplicar a Equação (1) por $v \in V = H_0^1(\Omega)$, é obtida a formulação variacional do problema (1): encontre $u \in V$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) &\equiv \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_{\Omega} f v \equiv F(v), \end{aligned} \quad (2)$$

$\forall v \in V$, onde $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear simétrica, contínua e coerciva em V , e F é um funcional linear contínuo.

Dado $V_h \subseteq V$, subespaço de dimensão finita, e $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ base de V_h , é obtido de (2) o sistema de equações lineares

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_j), \quad (3)$$

para $j = 1, \dots, n$.

A região Ω pode ser discretizada através de triângulos e a base de V_h pode ser escolhida de maneira que $v \in V_h$ seja um polinômio de grau k quando restrita a cada triângulo, bastando escolher um número suficiente de pontos $p_j = (x_j, y_j)$ em cada triângulo para os graus de liberdade dos polinômios. Para que as funções de V_h sejam contínuas, é exigido $\phi_i(p_j) = \delta_{ij}$.

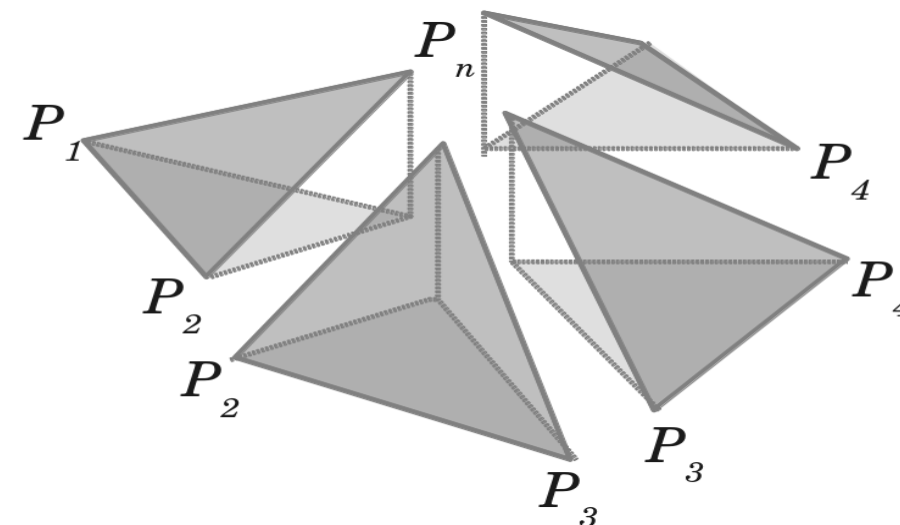


Figura 1: Uma das funções da base de V_h , composta por polinômios lineares em cada triângulo.

TEORIA

O Teorema da Representação de Riesz mostra que, dada a continuidade de $a(\cdot, \cdot)$ e F , e a coercividade de $a(\cdot, \cdot)$, o problema (2) possui solução única em V . A coercividade de $a(\cdot, \cdot)$ também mostra que a matriz $K = (k_{ij})$, $k_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$ é positiva definida, implicando que o sistema (3) possui solução única em V_h [2].

Com suficiente regularidade da solução exata u , é possível mostrar as seguintes estimativas de erro *a priori* para a aproximação u_h de Elementos Finitos

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^{\gamma_{L^2}}, \\ \|u - u_h\|_V &\leq Ch^{\gamma_V}, \end{aligned} \quad (4)$$

onde h é o maior entre os diâmetros dos triângulos que discretizam Ω , e $\gamma_{L^2} = \gamma_V + 1$ são as taxas de convergência do método. No caso linear, é esperado $\gamma_V = 1$.

RESULTADOS

Um código baseado no método aqui descrito foi confeccionado para testes. Com $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, o Problema (1) tem como solução exata $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Seguem os resultados obtidos.

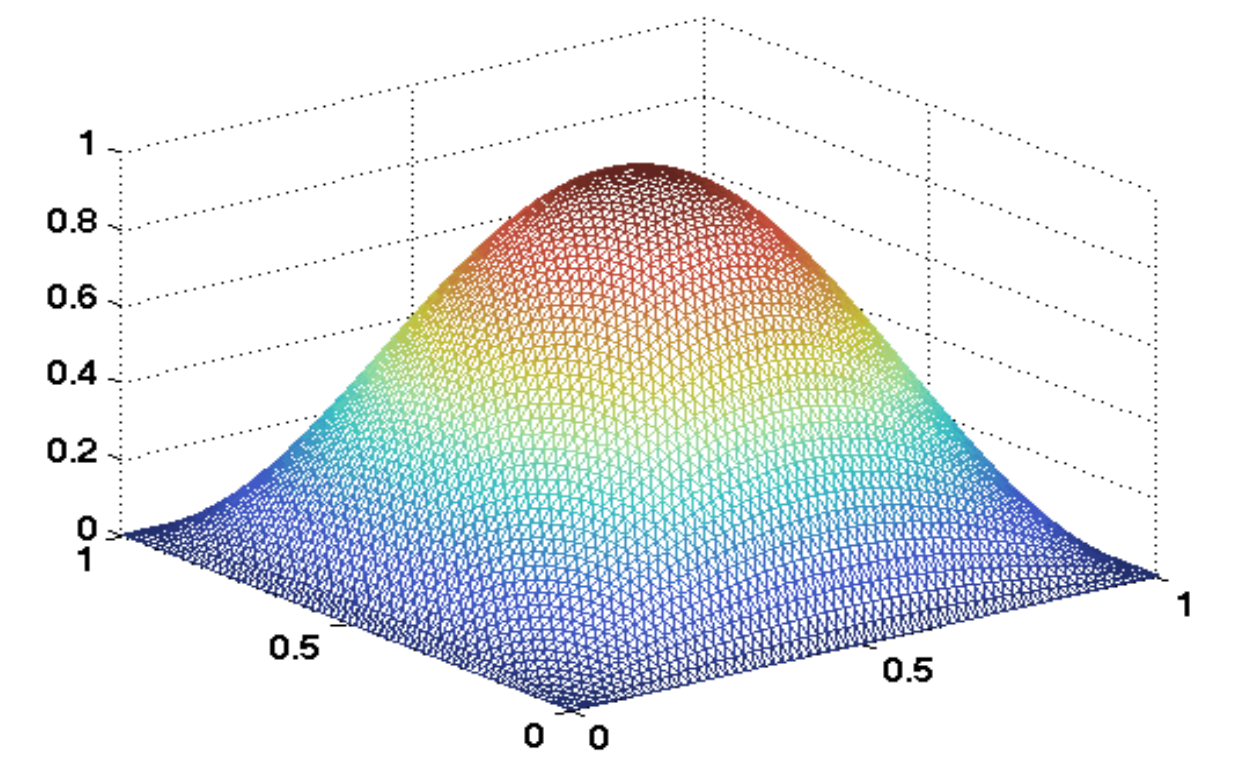


Figura 2: Gráfico da aproximação de Elementos Finitos do Problema (1), com os dados definidos acima.

Tabela 1: Valores de erro e taxa convergência para malha uniforme com valores fixos de h .

h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	γ_{L^2}	$\ u - u_h\ _V$	γ_V
1/2	1.458×10^{-1}	-	1.129	-
1/4	6.240×10^{-2}	1.225	7.399×10^{-1}	0.610
1/8	1.343×10^{-2}	2.217	3.450×10^{-1}	1.100
1/16	3.024×10^{-3}	2.151	1.644×10^{-1}	1.070
1/32	7.087×10^{-4}	2.093	7.982×10^{-2}	1.042
1/64	1.702×10^{-4}	2.058	3.915×10^{-2}	1.028

CONSIDERAÇÕES

Apesar do caso simples aqui apresentado, o Método de Elementos Finitos se mostra muito poderoso e versátil quando é necessário aproximar problemas de valores de contorno em regiões de geometria complexa, ou quando níveis diferentes de precisão são necessários em porções distintas do domínio do problema. Além de triângulos, poderiam ter sido utilizados retângulos, ou outros tipos de elementos na discretização da região Ω [1,2]. Seu arcabouço teórico permite que diversas estimativas de erro sejam geradas, inclusive estimativas locais (*a posteriori*), sobre os elementos, geralmente utilizadas para atualização de malhas adaptativas.

REFERENCIAS

- [1] BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**. Prentice-Hall. 1981.
- [2] BRENNER, S.; SCOTT, L. **The Mathematical Theory of Finite Element Methods**. Springer. 2008.

AGRADECIMENTO

Agradecimentos ao CNPq pela concessão de bolsa de Iniciação Científica.