

Implementação do Método das Frações Parciais para obtenção de propriedades viscoelásticas de misturas asfálticas



ARMÃO, Tiago Pereira¹; THEISEN, Klaus Machado²

¹Aluno do curso de Engenharia Civil - Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias
²Professor do curso de Engenharia Civil - Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias



Introdução

A obtenção de propriedades constitutivas em que é imposta uma carga (tensão) no ensaio e os deslocamentos resultantes (deformação) são medidos, ou seja, no caso de misturas asfálticas, propriedades como a curva de fluência $D(t)$, são de mais fácil obtenção experimental. Contudo, a obtenção das propriedades inversas, como o módulo de relaxação $E(t)$, não é trivial pois exige uma estrutura experimental mais complexa. Como solução para o problema, a inversão das propriedades obtidas experimentalmente pode ser feita através de métodos numéricos, obtendo as propriedades invertidas indiretamente. O Método das Frações Parciais (MFP), apresenta a vantagem de todos os parâmetros serem calculados diretamente, sem arbítrios e/ou métodos iterativos, fornecendo a solução exata do problema.

Objetivo:

Implementar o Método das Frações Parciais, de modo a se obter um procedimento para inversão de propriedades constitutivas viscoelásticas.

Metodologia:

No Método das Frações Parciais (MFP), considera-se $C(t)$ uma compliância qualquer e $H(t)$ o módulo correspondente à compliância $C(t)$. O modelo genérico empregado para descrever a compliância $C(t)$ é uma série de Prony, expressa pela equação 1:

$$C(t) = C_{\infty} - \sum_{i=1}^n C_i e^{-t/\tau_i} \quad (1)$$

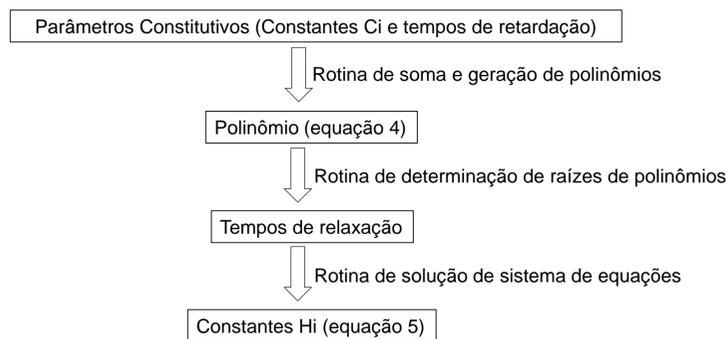
A curva a ser obtida pelo método, denominada de $H(t)$, é modelada conforme a equação 2:

$$H(t) = H_{\infty} + \sum_{i=1}^n H_i e^{-t/\rho_i} \quad (2)$$

As equações 1 e 2 relacionam-se através da equação 3, expressa no domínio tempo.

$$\int C(t-t')H(t)dt' = t \quad (3)$$

As etapas numéricas planejadas para implementação do MFP podem ser simplificadas no fluxograma que segue.



$$i\omega \left[C_{\infty} \left(\prod_{i=1}^n i\omega + \frac{1}{\tau_i} \right) - \sum_{i=1}^n C_i \frac{\prod_{j=1}^n i\omega + \frac{1}{\tau_j}}{i\omega + \frac{1}{\tau_i}} \right] = 0 \quad (4)$$

$$H_{\infty} \left(\prod_{i=1}^n i\omega - r_i \right) + \sum_{k=1}^n H_k \frac{\prod_{j=1}^n i\omega - r_j}{i\omega - r_k} = \frac{1}{C_{\infty} - \sum_{i=1}^n C_i} \prod_{j=1}^n i\omega - \frac{1}{\tau_j} \quad (5)$$

Resultados

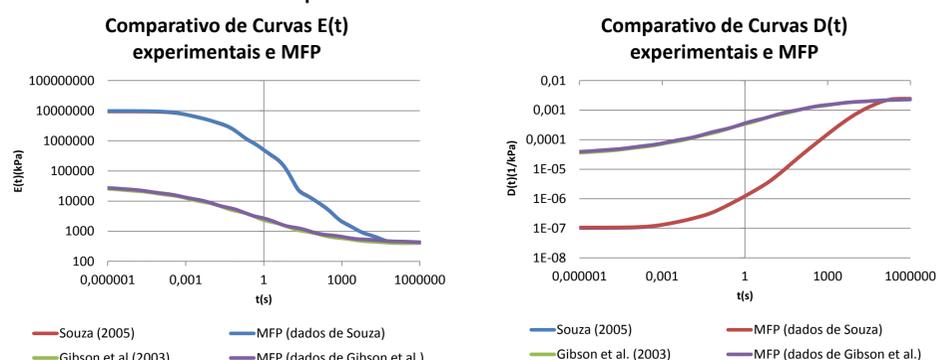
| i | Souza (2005) | | Resultado MFP | | Erro % | | Souza (2005) | | Resultado MFP | | Erro % | |
|-----|--------------|---------|---------------|-----------|-------------|-------------|--------------|--------|---------------|----------|-------------|-------------|
| | Ei (kPa) | pi (s) | Ei (kPa) | pi (s) | Erro Ei (%) | Erro pi (%) | Di (1/kPa) | ti (s) | Di (1/kPa) | ti (s) | Erro Di (%) | Erro ti (%) |
| inf | 407.9 | - | 408.0104 | - | 0.03 | - | 2.451E-03 | - | 2.452E-03 | - | 0.03 | - |
| 1 | 2179000 | 0.00087 | 2887581 | 0.000871 | 32.52 | 0.10 | 3.487E-08 | 0.0012 | 2.631E-08 | 0.001107 | -24.54 | -7.68 |
| 2 | 2675000 | 0.0057 | 2241803 | 0.005703 | -16.19 | 0.06 | 5.978E-08 | 0.0083 | 6.789E-08 | 0.008816 | 13.56 | 6.22 |
| 3 | 3125000 | 0.062 | 3311254 | 0.061979 | 5.96 | -0.03 | 2.509E-07 | 0.17 | 2.455E-07 | 0.162893 | -2.15 | -4.18 |
| 4 | 992900 | 0.46 | 931111.2 | 0.456321 | -6.22 | -0.80 | 8.123E-07 | 1.3 | 8.234E-07 | 1.360029 | 1.37 | 4.62 |
| 5 | 447700 | 4.5 | 464660.8 | 4.470473 | 3.79 | -0.66 | 2.178E-06 | 34 | 2.36E-06 | 32.97842 | 8.36 | -3.00 |
| 6 | 15200 | 41 | 13213.0 | 41.20109 | -13.07 | 0.49 | 1.699E-05 | 140 | 1.625E-05 | 141.8726 | -4.37 | 1.34 |
| 7 | 9284 | 240 | 9722.678 | 244.5622 | 4.73 | 1.90 | 7.829E-05 | 1200 | 7.849E-05 | 1143.939 | 0.26 | -4.67 |
| 8 | 1748 | 1900 | 1617.159 | 1941.861 | -7.49 | 2.20 | 5.392E-04 | 7900 | 5.448E-04 | 8031.297 | 1.05 | 1.66 |
| 9 | 553.5 | 24000 | 563.0136 | 23745.186 | 1.72 | -1.06 | 1.813E-03 | 71000 | 1.808E-03 | 71109.56 | -0.26 | 0.15 |

| i | Gibson et al. (2003) | | Resultado MFP | | Erro % | | Gibson et al. (2003) | | Resultado MFP | | Erro % | |
|-----|----------------------|----------|---------------|----------|-------------|-------------|----------------------|----------|---------------|----------|-------------|-------------|
| | Ei (kPa) | pi (s) | Ei (kPa) | pi (s) | Erro Ei (%) | Erro pi (%) | Di (1/kPa) | ti (s) | Di (1/kPa) | ti (s) | Erro Di (%) | Erro ti (%) |
| inf | 4.13E+05 | - | 4.14E+05 | - | 0.32 | - | 2.41E-06 | - | 2.42E-06 | - | 0.32 | - |
| 1 | 2.16E+06 | 1.50E-07 | -5.19E+04 | 1.13E-07 | -102.40 | -24.53 | -6.10E-11 | 1.13E-07 | -2.74E-09 | 1.62E-07 | -4595.97 | 43.36 |
| 2 | 3.85E+06 | 2.81E-06 | 3.26E+06 | 1.88E-06 | -15.15 | -33.23 | 4.22E-09 | 2.11E-06 | 6.11E-09 | 3.28E-06 | 44.74 | 55.26 |
| 3 | 5.73E+06 | 5.27E-05 | 6.17E+06 | 3.02E-05 | 7.69 | -42.74 | 1.17E-08 | 3.95E-05 | 1.39E-08 | 6.99E-05 | 18.65 | 77.01 |
| 4 | 6.53E+06 | 9.87E-04 | 6.48E+06 | 4.99E-04 | -0.84 | -49.42 | 2.37E-08 | 7.40E-04 | 3.33E-08 | 1.58E-03 | 40.55 | 112.95 |
| 5 | 5.29E+06 | 1.85E-02 | 5.86E+06 | 7.75E-03 | 10.92 | -58.09 | 5.67E-08 | 1.39E-02 | 8.42E-08 | 3.62E-02 | 48.54 | 160.97 |
| 6 | 2.96E+06 | 3.47E-01 | 3.79E+06 | 1.24E-01 | 28.21 | -64.19 | 1.41E-07 | 2.60E-01 | 2.10E-07 | 7.68E-01 | 49.29 | 195.32 |
| 7 | 1.23E+06 | 6.49E+00 | 1.86E+06 | 2.18E+00 | 51.34 | -66.41 | 3.40E-07 | 4.87E+00 | 4.24E-07 | 1.35E+01 | 24.75 | 176.87 |
| 8 | 4.59E+05 | 1.22E+02 | 7.29E+05 | 4.71E+01 | 58.97 | -61.33 | 5.96E-07 | 9.13E+01 | 5.64E-07 | 2.03E+02 | -5.33 | 122.73 |
| 9 | 1.80E+05 | 2.28E+03 | 2.50E+05 | 1.17E+03 | 39.19 | -48.75 | 5.77E-07 | 1.71E+03 | 4.91E-07 | 3.07E+03 | -14.89 | 79.62 |
| 10 | 7.42E+04 | 4.27E+04 | 8.91E+04 | 2.68E+04 | 20.10 | -37.19 | 3.53E-07 | 3.20E+04 | 3.11E-07 | 4.97E+04 | -11.64 | 55.25 |
| 11 | -3.21E+04 | 8.01E+05 | 3.73E+04 | 5.52E+05 | -216.17 | -31.03 | 1.89E-07 | 6.00E+05 | 1.66E-07 | 8.61E+05 | -11.84 | 43.43 |
| 12 | 1.43E+04 | 1.50E+07 | 1.59E+04 | 1.08E+07 | 11.48 | -27.79 | 9.04E-08 | 1.13E+07 | 8.19E-08 | 1.55E+07 | -9.46 | 37.97 |

Para verificação do MFP, foram utilizados os dados das publicações de Souza(2005) e Gibson *et al.* (2003). Para os dados de Souza (2005), os erros percentuais mantiveram-se baixos, sendo máximos em 8% para τ , 25% para D , 2% para ρ e 33% para E . Contudo, para os dados de Gibson *et al.* não se obteve o mesmo sucesso, obtendo-se erros máximos de 195% para τ , 4596% para D , 66% para ρ e 216% para E e constantes E_i negativas foram encontradas. As possíveis razões para tal fato devem-se a questões numéricas de precisão de armazenamento numérico do programa utilizado.

Para testar a sensibilidade do método à precisão numérica, reduziu-se as casas decimais das constantes, e submeteu-se a matriz utilizada na rotina de solução de sistema de equações ao duplo processo de inversão no Excel2007 e no Mathematica 8. Para curvas experimentais de Souza (2005) observa-se um erro percentual entre $1 \times 10^{-14}\%$ e $7 \times 10^{-9}\%$ quando realizadas no Software Excel2007 e entre $6 \times 10^{-6}\%$ e $9 \times 10^{-3}\%$ quando realizadas no software Mathematica, e para a série de Gibson *et al.* (2003), os erros ficaram entre $3 \times 10^{-14}\%$ e $9 \times 10^8\%$ para o Software Excel2007 e entre $3 \times 10^{-6}\%$ e $2 \times 10^9\%$ para o software Mathematica, resultando em dados mais precisos em ambos os casos para o software Excel2007.

Contudo, embora tenham sido encontrados erros significativos nas constantes obtidas pelo MFP, o comportamento das curvas $E(t)$ e $D(t)$ é essencialmente o mesmo quando comparados com os dados da literatura, conforme mostra os gráficos a seguir, comprovando a eficiência das rotinas implementadas.



Conclusão:

- O MFP mostra-se significativamente dependente da precisão de armazenamento numérico do software utilizado na implementação do método;
- O MFP mostra-se sensível ao aumento no número de parâmetros da série, devido a grande variação na ordem de grandeza das constantes.
- Embora a existência de erros significativos nas constantes obtidas, os resultados aproximam-se dos resultados reais, comprovando a eficácia do método.