GRUPOS DE ORDEM $\leq$ 60

HASELEIN, Walter Mendes – Bolsista
POGORELSKY, Barbara Seelig - Orientadora

Mostraremos que todo grupo de ordem menor que sessenta possui um subgrupo normal não trivial, exceto os cíclicos de ordem prima. Para isso, dividimos estes números em categorias..

TEOREMAS DE SYLOW

DEFINIÇÃO: Sejam G um grupo finito, p um número primo e p^m a maior potência de p que divide |G|. Os subgrupos de G que têm ordem p^m são chamados p-subgrupos de Sylow de G.

1° TEOREMA DE SYLOW: Sejam p um número primo e G um grupo de ordem $p^m \cdot b$ com MDC(p,b)=1. Então, para cada n, $0 \leq n \leq m$, existe um subgrupo H de G tal que $|H| = p^n$.

2° TEOREMA DE SYLOW: Sejam G um grupo finito, p um número primo e n_p o número de p-subgrupos de Sylow de G. Então:

a) Todos os p-subgrupos de Sylow de G são conjugados entre si.

b) Se P é p-subgrupo de G, existe um p-subgrupo de Sylow S de G tal que $P \subseteq S$.

c) Se S é um p-subgrupo de Sylow, temos $n_p = (G:N_G(S))$.

3° TEOREMA DE SYLOW: Sejam p um número primo e G um grupo finito de ordem $p^m b$, com MDC(p,b)=1. Seja n_p o número de p-subgrupos de Sylow de G. Então n_p divide b e $n_p \equiv 1 \pmod p$.

TEOREMA DE LAGRANGE

Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então, |G| = |H|.(G : H); em particular, a ordem e o índice de H dividem a ordem de G.

P-Grupos

a) Grupos de Ordem Prima:

|G| = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59

São todos cíclicos e não possuem subgrupos não triviais.

b) Grupos de Ordem p^n, $n \geq 2$:

|G| = 2, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49

Se G é abeliano, G possui subgrupo normal de ordem p.

Se G não é abeliano, $p \leq |Z(G)| \leq |G|$ e $Z(G) \triangleleft G$.

Grupos de Ordem p.q, com p>q primos

|G| = 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55, 57, 58

Pelo 3º Teorema de Sylow, $n_p = 1$. Se q não divide p-1, $n_q = 1$. Se q divide p-1, então $n_q = 1$ ou $n_q = p$.

Grupos de ordem 2^2p, com $p \geq 5$ primo

|G| 20, 28, 44, 52

Pelo 3º Teorema de Sylow, $n_p = 1$.

Grupos de Ordem p.q.r, p < q < r primos

|G| = 30, 42

G possui subgrupo normal de ordem r, p ou q.

Grupos de Ordem $2.p^n$, p primo

|G| = 18, 50, 54

Pelo 1º Teorema de Sylow e pelo Teorema de Lagrange, G possui um subgrupo normal.

Grupos de Ordem $2^n.3$, $n \geq 2$

|G| = 12, 24, 48

G possui subgrupo normal de ordem 2^n ou 2^{n-1}.

Grupos de Ordem 36, 40, 45, 56, 60

Cada ordem é um caso particular.