

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA  
CONSTANTE EM  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Tese de Doutorado

Rodrigo Barbosa Soares

Porto Alegre, Dezembro de 2012.

Tese de Doutorado submetida por Rodrigo Barbosa Soares<sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:

Dr. Pedro Fusieger (UFSM)

Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)

Dra. Maria Fernanda Elbert (UFRJ)

Dr. Paulo Ricardo Zingano (UFRGS)

Data da Apresentação: 12 de Dezembro de 2012.

---

<sup>1</sup>Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes, de fevereiro de 2009 a agosto de 2010.

## Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados de existência e unicidade para gráficos de curvatura média constante em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , com bordo prescrito em planos paralelos, obtidos através da resolução de problemas de Dirichlet para a equação da curvatura média.

Palavras-chave: superfícies, curvatura média,

## Abstract

In this work we investigate the existence and uniqueness of constant mean curvature graphs in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , with boundary in parallel planes, by solving a Dirichlet problems for the mean curvature equation.

## Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por ter me dado saúde para concluir este trabalho.

À minha mãe Marluce Soares e ao meu pai Waldenir Soares por sempre terem trabalhado muito para que eu pudesse estudar.

Aos meus irmãos Ligia e Marcelo, sobrinhos, cunhados, primos e amigos por todo o apoio concedido

Ao professor Jaime Ripoll pela paciência, conselhos e valiosa orientação.

Aos professor Ari Aiofi, orientador de mestrado.

Aos professores Pedro Fusieger, Leonardo Bonorino e Paulo Zingano e à professora Maria Fernanda Elbert por terem aceitado participar da banca.

Aos colegas de doutorado da UFRGS por terem me acolhido de maneira extraordinária.

Aos meus colegas do IMEF-FURG por terem me possibilitado uma carga horária organizada, fato este, fundamental para a conclusão deste trabalho.

Por fim, agradeço à minha esposa Taina Chimieski, companheira nesta jornada desde o começo.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1	O espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	9
1.2	Operador Curvatura Média . . . . .	10
1.3	Método da Continuidade . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Superfícies Rotacionais de Curvatura Média Constante em</b>	
	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	<b>17</b>
2.1	Caso $H = 0$ . . . . .	18
2.2	Caso $H = \frac{1}{2}$ . . . . .	19
2.3	Caso $H > \frac{1}{2}$ . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Resultados Principais</b>	<b>26</b>
3.1	Caso $H \in [0, \frac{1}{2}]$ . . . . .	26
3.2	Caso $H > \frac{1}{2}$ . . . . .	36
3.3	Exemplo . . . . .	45

## Introdução

A existência de superfícies com curvatura média constante, tendo como bordo duas curvas dadas  $\gamma$  e  $\beta$ , contidas em planos paralelos distintos, vem sendo objeto de estudo há muito tempo, especialmente o caso  $H = 0$ . Os catenóides e, mais geralmente, as superfícies mínimas de Riemann, são exemplos famosos nos quais  $\gamma$  e  $\beta$  são círculos. Shiffman em [20] provou que a intersecção de um anel mínimo cujo bordo são duas curvas convexas  $\gamma$  e  $\beta$ , com um plano paralelo ao plano que contém  $\gamma$  e  $\beta$ , é uma curva convexa. Meeks e White em [13] provaram que ou  $\gamma \cup \beta$  não é o bordo de nenhuma superfície mínima conexa compacta ou  $\gamma \cup \beta$  é o bordo de exatamente um anel mínimo ou  $\gamma \cup \beta$  é o bordo de exatamente dois anéis mínimos.

Em meados da década de 90, Antonio Ros e Harold Rosenberg em [16] propuseram a seguinte questão:

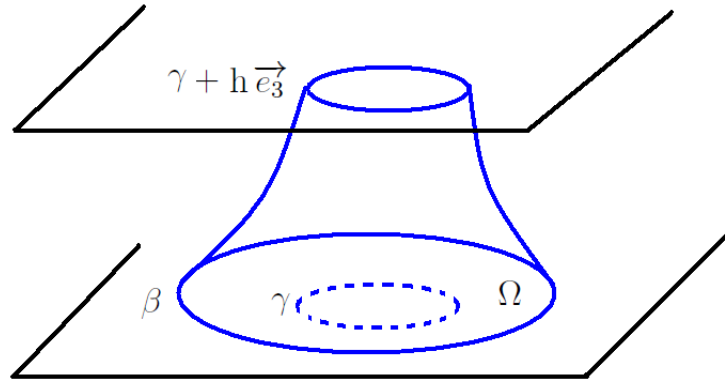
*Dadas duas curvas de Jordan  $\gamma$  e  $\beta$  em planos paralelos distintos, existe uma superfície com curvatura média constante, topologicamente um anel, que tem por bordo tais curvas?*

Os mesmo autores conjecturaram que para o caso em que  $\gamma$  e  $\beta$  são convexas, a resposta seria sim. Desde então, vários artigos foram publicados, apresentando condições sobre as quais é possível obter uma resposta positiva para a questão colocada acima, no caso em que o espaço ambiente é o  $\mathbb{R}^3$ .

Uma abordagem desta questão, em termos de superfícies dadas como gráficos verticais, é feita através da resolução de um Problema de Dirichlet, associado à equação das superfícies com curvatura média constante em  $\mathbb{R}^3$ , no caso em que  $\gamma$  está contida no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Mais precisamente, dado  $H \geq 0$ , deve-se encontrar uma função

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que

$$(P^H) = \begin{cases} Q_H(u) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\gamma} = h \quad u|_{\beta} = 0 & \partial\Omega = \gamma \cup \beta \end{cases}$$



$$H \geq 0 \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \quad \text{Problema de Dirichlet}$$

onde  $h$  é uma constante que depende, em geral, da geometria das curvas, da distância entre elas e do  $H$  que for dado, onde a curvatura média do gráfico de  $u$  calculada com relação ao campo unitário normal  $N$  satisfazendo  $\langle N, \vec{e}_3 \rangle \leq 0$  e  $\Omega$  é uma região anelar tal que  $\partial\Omega = \gamma \cup \beta$ . Observe que, podemos supor ambas as curvas contidas no  $\{z = 0\}$ , e que impondo a condição  $u|_{\gamma} = h$  recaímos sobre a situação da pergunta inicial.

Entre os artigos que tratam do sistema  $(P^H)$  citamos, [8] onde a pergunta acima foi respondida positivamente para o caso  $H = 0$  em que  $\gamma$  e  $\beta$  não são necessariamente convexas e também para o caso  $H > 0$  com  $\gamma$  convexa e  $\beta$  não necessariamente convexa. Cabe salientar que, nesse mesmo artigo, os autores não consideram somente duas curvas (Teoremas 2.1 e 2.5) e sim o caso de um número finito de curvas  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  todas contidas no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ , impondo que  $u$  admita o valor  $h$  ao longo de cada curva  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e 0 ao longo de  $\beta$ .



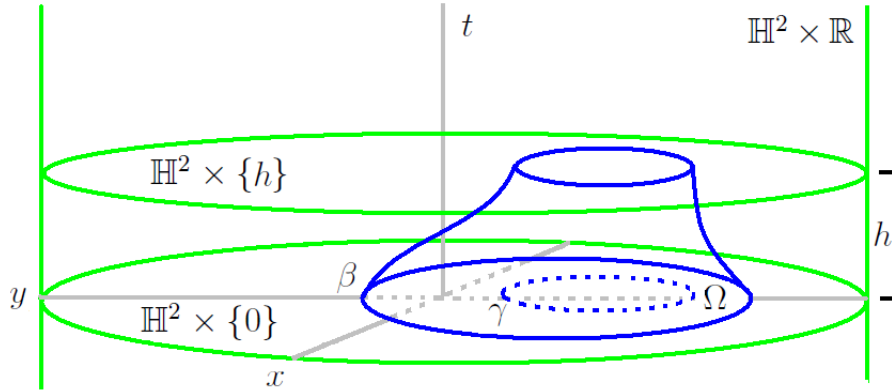
Já em [2], [1] e [9] os autores consideraram as situações onde  $\beta$  é igual a projeção ortogonal de  $\gamma$  sobre um plano paralelo ao plano que contém  $\gamma$  e também o caso em que  $\beta$  é obtida por meio de um deslocamento horizontal da projeção ortogonal de  $\gamma$ . Observe que, nessas condições, a posição das curvas não permite que a superfície cujo bordo é  $\gamma \cup \beta$  seja dada como gráfico sobre nenhum dos planos que contém as curvas. Sendo assim, foi conveniente, a utilização de gráficos sobre domínios anelares, contidos em uma esfera unitária, devidamente posicionada com relação as curvas. Esse tipo de gráfico é conhecido como gráfico radial e permitiu que fossem obtidos resultados de existência para anéis mínimos e de curvatura média constante, até mesmo, no caso em que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  não são necessariamente convexas, novamente através de um Problema de Dirichlet, mas com uma expressão para o operador curvatura média diferente daquela apresentada em  $(P^H)$ .

A busca pela adaptação ao espaço ambiente  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , de alguns dos resultados contidos nos artigos citados acima, é o objetivo principal desta tese. Para isso, é natural considerar que serão necessárias algumas mudanças, ou seja, será usado o conjunto  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  ao invés do  $\mathbb{R}^2$  com  $\gamma$  e  $\beta$  contidas em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ ,  $\gamma$  contida no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Além disso, a noção de gráfico relacionada à  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  será dada por

$$Graf(u) = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \mid (x, y) \in \Omega, t = u(x, y)\}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e  $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  é uma função suficientemente suave. A principal alteração no sistema  $(P^H)$  quando considerado o espaço ambiente  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , é dada pelo operador curvatura média. Mais precisamente temos:

$$(P^H) = \begin{cases} Q_H(u) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+F|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\beta} = 0 \quad u|_{\gamma} = h \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \end{cases}$$



onde  $h > 0$  é uma constante,  $F = F(x, y) = \left(\frac{1-(x^2+y^2)}{2}\right)^2$  e  $\nabla$ ,  $\text{div}$  e  $|\cdot|$  representam o gradiente, o divergente e a norma no sentido euclidiano e  $\Omega$  é um domínio anelar tal que  $\partial\Omega = \gamma \cup \beta$ .

Uma característica comum entre os resultados citados com relação ao  $\mathbb{R}^3$  é a utilização, durante as demonstrações, de pedaços de superfícies de rotação que possam ser descritos como gráficos de funções, definidas por exemplo, em domínios no plano  $z = 0$ . Sendo assim, qualquer estudo do sistema acima, que seja de certa forma semelhante àquele feito em  $\mathbb{R}^3$ , sugere uma análise prévia do comportamento das superfícies de rotação do espaço em questão e para isso são fundamentais os seguintes artigos: [19] onde destacamos o fato dos autores estabelecerem equações explícitas de uma família a 1-parâmetro de superfícies rotacionais com curvatura média constante e [14], no qual aparece uma análise completa do comportamento das superfícies de acordo com o valor de sua curvatura média e a relação deste com o parâmetro da família.

Recentemente, em [3] de 2010, a autora estabeleceu uma versão do Teorema 2.1 de [8] para  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , obtendo existência de solução para o sistema  $(P^H)$  no caso  $H = 0$ , por meio da aplicação do Método de Perron. Ainda no caso de domínios limitados e dados finitos no bordo é importante citar o Teorema 2.1 de [14], onde é considerado o caso em que o dado no bordo é

identicamente nulo, a  $\partial\Omega$  é de classe  $C^{2,\alpha}$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $H \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  e a função  $u$  obtida é suave até a fronteira, ou seja,  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Em [11] também são obtidos resultados para domínios limitados, no entanto, nesse caso o dado no bordo é infinito. Já em [18], [4] e [7] o problema de Dirichlet associado a equação da curvatura média é considerado sobre domínios ilimitados com  $H = 0$ ,  $H \in (0, \frac{1}{2})$  e  $H = \frac{1}{2}$  respectivamente.

Sendo assim, até onde temos notícia, não foram considerados resultados relacionados a  $(P^H)$ , onde o domínio  $\Omega$  tem fronteira suave formada por duas curvas, o dado no bordo é finito em cada componente conexa, a curvatura média é  $H \geq 0$  e a função  $u$  é de classe  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  para algum  $\alpha \in (0, 1)$ . Através de hipóteses relacionando a geometria das curvas e o  $H \geq 0$  dado, obtemos valores para o termo  $h$ , de tal forma que o sistema  $(P^H)$  tenha solução de classe  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , via Método da Continuidade. Em outras palavras, provamos

**Teorema 3.1** *Seja  $\Omega$  um domínio anelar de classe  $C^{2,\alpha}$ , onde  $\alpha \in (0, 1)$ , contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  cujo bordo consiste de duas curvas  $\gamma$  e  $\beta$  com  $\gamma$  contida no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Sejam  $r > 0$  e  $D < -1$  satisfazendo:*

$$\ln(-D) < r < \cosh^{-1}(-D)$$

*Suponha que  $\text{diam}(\beta) < r + R$ , onde  $R = \cosh^{-1}(-D)$ , que  $\gamma$  satisfaz a condição do círculo interior de raio  $r$  (isto é, dado  $p \in \gamma$  existe um círculo de raio  $r$  passando por  $p$  e contido no fecho da região limitada por  $\gamma$ ) e que  $k_\beta \geq \coth R$ . Denote por  $d = d_{\mathbb{H}}(\gamma, \beta)$ . Nessas condições, dados*

$$0 \leq h \leq \frac{d(1 - D^2)}{4D \sinh(r + \frac{d}{2})}$$

*e  $H \in [0, \frac{1}{2}]$  existe uma única  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  tal que  $Q_H(u) = 0$  em  $\Omega$ ,  $u|_\gamma = h$*

e  $u|_{\beta} = 0$ , onde a curvatura média é calculada com relação ao campo  $N$ , normal unitário (no sentido hiperbólico) satisfazendo  $\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \leq 0$ .

Observe que a altura  $h$  não depende do valor de  $H$  dado em  $[0, \frac{1}{2}]$ . Conforme veremos, isso decorre do fato das superfícies rotacionais de curvatura média constante  $H = \frac{1}{2}$  serem gráficos ilimitados na direção  $t$ .

**Teorema 3.2** *Seja  $\Omega$  um domínio anelar de classe  $C^{2,\alpha}$ , onde  $\alpha \in (0, 1)$ , contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  cujo bordo consiste de duas curvas  $\gamma$  e  $\beta$  com  $\gamma$  contida no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Dado  $H > \frac{1}{2}$  sejam*

$$0 < r \leq \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left( \frac{4H^2 \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right) - \sqrt{4H^2 \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right)^2 - (4H^2 - 1)}}{4H^2 - 1} \right)$$

e  $D < -2H$  satisfazendo:

$$\cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right) < r < \cosh^{-1} \left( \frac{-D}{2H} \right)$$

Suponha que  $\gamma$  satisfaz a condição do círculo interior de raio  $r$  e que  $\text{diam}(\beta) \leq r + R$ , onde  $R = \cosh^{-1} \left( \frac{-D}{2H} \right)$ . Além disso, suponha que  $k_{\beta} \geq \coth R$ . Denote por  $d = d_{\mathbb{H}}(\gamma, \beta)$ . Nessas condições, dado

$$0 \leq h \leq \min \left\{ \frac{d \left( \sinh \left( \cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right) \right) \right)}{2 \sinh \left( r + \frac{d}{2} \right)}, \frac{Hd \left( \cosh \left( R - \frac{d}{2} \right) - 1 \right)}{2 \sinh \left( R - \frac{d}{2} \right)} \right\}$$

existe uma única  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $Q_H(u) = 0$  em  $\Omega$ ,  $u|_{\gamma} = h$  e  $u|_{\beta} = 0$ , onde a curvatura média é calculada com relação ao campo  $N$ , normal unitário (no sentido hiperbólico) satisfazendo  $\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \leq 0$ .

Esta tese foi dividida em três capítulos. No Capítulo 1 exibimos o operador curvatura média para gráficos verticais em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  e apresentamos um resumo da teoria relativa e este operador necessária para o restante do texto, bem como sua relação com o Método da Continuidade. No Capítulo

2 tratamos de alguns resultados úteis para a construção de barreiras relativas ao operador citado acima. Em particular, apresentamos as equações das superfícies rotacionais de curvatura média constante em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , baseadas nas bibliografias [19] e [14]. Neste capítulo, fica clara a diferença de comportamento dessas superfícies no caso da curvatura média menor ou igual a  $\frac{1}{2}$  e maior que  $\frac{1}{2}$  e conseqüentemente o motivo pelo qual os resultados acima são divididos em  $H \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $H > \frac{1}{2}$ . No Capítulo 3 exibimos as demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.2 e também exemplos de domínios onde valem as hipóteses dos Teoremas acima.

É importante salientar, que no caso  $H = 0$  do Teorema 3.1, o resultado obtido aqui não melhora o Teorema 2.1 de [3] pois a altura  $h$  do gráfico de  $u$ , em nosso caso, é menor que aquela obtida em [3] e, além disso, o domínio  $\Omega$ , no qual trabalhamos, admite somente duas curvas formando sua fronteira.

# 1 Preliminares

Neste capítulo introduzimos o espaço ambiente  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , o operador curvatura média constante (hiperbólico) no caso de gráficos verticais sobre domínios contidos em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e o Problema de Dirichlet associado e este operador. Além disso, apresentamos alguns resultados que serão utilizados durante as demonstrações que aparecem no Capítulo 3.

## 1.1 O espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

O modelo do plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  a ser utilizado nesta tese é conhecido como disco de Poincaré, isto é:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

munido da seguinte métrica:

$$dr^2 = \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2} (dx^2 + dy^2) = \frac{1}{F(x, y)} (dx^2 + dy^2).$$

Usando a métrica acima é possível provar que  $\mathbb{H}^2$  é uma variedade Riemanniana completa de curvatura seccional constante igual a  $-1$  e que suas geodésicas neste modelo são ou diâmetros do disco aberto unitário centrado na origem ou arcos de circunferência que interceptam o bordo deste disco ortogonalmente. Entre as curvas contidas nessa variedade destacamos:

- 1) horociclos: círculos euclidianos tangentes a  $\partial\mathbb{H}^2$  que tem como característica a curvatura geodésica hiperbólica constante igual a 1.
- 2) círculos hiperbólicos: são círculos euclidianos, contudo seu centro hiperbólico posiciona-se deslocado com relação ao centro euclidiano.

A variedade produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  onde serão desenvolvidos os resultados de existência é o conjunto:

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{H}^2, t \in \mathbb{R}\}$$

munido da métrica  $ds^2$  dada por

$$ds^2 = \frac{1}{F(x, y)}(dx^2 + dy^2) + dt^2$$

com a noção de gráfico dada pela:

**Definição 1.1.1** Seja  $\Omega \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$  um domínio (subconjunto aberto e conexo) e  $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  uma função suave, chamamos  $Graf(u)$  ao conjunto

$$Graf(u) = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \mid (x, y) \in \Omega, t = u(x, y)\}$$

## 1.2 Operador Curvatura Média

**Proposição 1.2.1** Dado  $H \geq 0$  e  $u \in C^2(\Omega)$ , onde  $\Omega$  é um domínio aberto e limitado contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

- i)  $Graf(u)$  tem curvatura média hiperbólica constante  $H$  com relação ao campo unitário normal  $N$  satisfazendo  $\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \leq 0$  na métrica  $ds^2$ .
- ii)  $Q_H(u) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+F|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0$ , onde  $\nabla$ ,  $\operatorname{div}$  e  $|\cdot|$  representam o gradiente, divergente e a norma euclidianos.

*Demonstração.* Ver [12].

Nos resultados que estamos interessados, para dado  $H$ , não nos basta encontrar  $u \in C^2(\Omega)$  que satisfaça (ii) da Proposição acima, já que a função  $u$  deve satisfazer um valor prescrito na  $\partial\Omega$ , isto é, estamos interessados em soluções do seguinte sistema:

$$(P^H) = \begin{cases} Q_H(u) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+F|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

onde  $\varphi : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$  é uma função, a princípio somente contínua, dada a priori. O sistema acima é conhecido como problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média hiperbólica constante em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Note que a segunda linha do sistema exige que  $u$  estenda-se continuamente até o fecho de  $\Omega$ . No entanto, na continuação deste trabalho passamos a procurar soluções de  $Q_H(u) = 0$  com características mais "fortes", como por exemplo  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  ou ainda  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  onde  $\alpha \in (0, 1)$  indica o coeficientes de Holder. Em geral, estamos interessados de fato no sistema

$$(P^H) = \begin{cases} Q_H(u) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+F|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

onde  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  é dada a priori e  $\Omega$  é um domínio limitado cuja fronteira é de classe  $C^{2,\alpha}$ . Uma observação importante é que para o caso  $H = 0$  as funções constantes definidas sobre  $\Omega$  são soluções de  $Q_0(u) = 0$  e sendo assim podemos afirmar que as "fatias",  $\mathbb{H}^2 \times \{l\}$  com  $l \in \mathbb{R}$  de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , são superfícies de curvatura média constante  $H = 0$  em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Através da análise dos coeficientes das derivadas de ordem 2 da equação (ii) temos que o operador curvatura média (hiperbólico) é um operador quasilinear elíptico de segunda ordem. Esta classificação, juntamente com o fato do domínio  $\Omega$  ser limitado, são características fundamentais para podermos utilizar o Método da Continuidade, sobre o qual falaremos na próxima seção.



### 1.3 Método da Continuidade

Antes de falarmos diretamente da abordagem de  $(P^H)$  através do Método da Continuidade são necessárias algumas definições.

**Definição 1.3.1** (BARREIRAS) Seja  $\Omega$  um domínio limitado cuja fronteira é de classe  $C^{2,\alpha}$  contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ . Dizemos que  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  admite barreiras relativas ao operador  $Q_H$ , em  $p \in \partial\Omega$  se existem funções  $v_p$  (barreira por baixo) e  $w_p$  (barreira por cima) de classe  $C^1(\bar{\Omega})$  e  $M \geq 0$  ( $M$  independente de  $p$ ) tais que, para qualquer solução  $u : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$  de  $(P^H)$  tenhamos:

$$v_p \leq u \leq w_p \quad \text{em } \bar{\Omega},$$

$$w_p(p) = v_p(p) = \varphi(p)$$

$$\max\{|\nabla w_p(p)|, |\nabla v_p(p)|\} \leq M \quad \forall p \in \partial\Omega.$$

Observe que a limitação da norma do gradiente das funções  $v_p$  e  $w_p$  em  $p$  envolve somente termos euclidianos, mas isto não é problema, pois podemos estimar a norma hiperbólica do gradiente hiperbólico dessas funções lembrando que  $\|\nabla^{\mathbb{H}}(w_p)\|_{\mathbb{H}}^2 = F|\nabla w_p|^2 \leq |\nabla w_p|^2$ .

Encontrar barreiras, conforme a definição acima, não somente em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , mas até mesmo em outros espaços tem sido uma questão muito trabalhada na pesquisa em GEOMETRIA/EDP nos últimos anos devido a sua relação direta com o Método da Continuidade e conseqüentemente com a existência de solução para  $(P^H)$ . Não existe uma regra geral para obter tais funções, no entanto, a literatura nos mostra como candidatas naturais, tanto em  $\mathbb{R}^3$  como em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , partes de superfícies de rotação dadas como

gráficos verticais, com curvatura média constante. Vejamos alguns resultados que nos auxiliam na determinação de quais superfícies, servem ou não, como barreiras.

**Teorema 1.3.1** (Princípio da Comparação)(Adaptação do Teorema 17.1 de [10]) Sejam  $u$  e  $v$  funções de classe  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  satisfazendo  $Q_H(u) \geq Q_H(v)$  em  $\Omega$  e  $u \leq v$  em  $\partial\Omega$ . Então  $u \leq v$  em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Ver [10].

**Lema 1.3.2** Sejam  $u$  uma função de classe  $C^2(\Omega)$  tal que o gráfico de  $u$  tem curvatura média constante hiperbólica  $H$  e  $h \in [0, H)$ . Então  $Q_h(u) \leq 0$ . (Analogamente temos  $Q_h(u) \geq 0$  se  $h \in [H, +\infty)$ ).

*Demonstração.* Como o gráfico de  $u$  tem curvatura média hiperbólica constante  $H$  então  $Q_H(u) = 0$  e sendo assim

$$Q_h(u) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+F|\nabla u|^2}} \right) + 2h = -2H + 2h = -2(H - h) \leq 0.$$

**Lema 1.3.3** Sejam  $\Omega$  um domínio limitado com fronteira de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $p \in \partial\Omega$  e  $u$ ,  $v$  e  $w$  funções de classe  $C^1(\bar{\Omega})$  satisfazendo  $v \leq u \leq w$  e  $v(p) = u(p) = w(p)$ , então

$$|\nabla u(p)| \leq \max\{|\nabla w(p)|, |\nabla v(p)|\}$$

*Demonstração.* Ver [15].

Uma combinação adequada do Lema 1.3.2 e do Teorema 1.3.1, nos sugere usar, como barreiras por baixo, relativas ao operador  $Q_H$ , funções cujos gráficos tem curvatura média menor que  $H$  e como barreiras por cima funções cujos gráficos tem curvatura média maior que  $H$ . Já o Lema 1.3.3 nos fornece uma maneira de relacionar a norma do gradiente (no bordo) das barreiras com a norma do gradiente de qualquer solução de  $(P^H)$ .

Veamos agora como funciona o Método da Continuidade. Esta técnica baseia-se em mergulhar o sistema

$$(P^H) = \begin{cases} Q_H(u) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+F|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, & u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

onde  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  é dada a priori e  $\Omega$  é um domínio limitado cuja fronteira é de classe  $C^{2,\alpha}$ , em uma família de sistemas indexada pelo intervalo  $[0, 1]$  da seguinte maneira:

$$(P^{tH}) = \begin{cases} Q_{tH}(u) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+F|\nabla u|^2}} \right) + 2Ht = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = t\varphi, & u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

e considerar o conjunto  $W$  dado por

$$W = \{t \in [0, 1] \mid (P^{tH}) \text{ tem solução}\}.$$

Após definirmos o conjunto  $W$  o objetivo é mostrar que  $W = [0, 1]$ . O argumento usado para isso será garantir que  $W$  é não vazio, aberto e fechado. Usando a conexidade de  $[0, 1]$  teremos  $W = [0, 1]$  e assim  $(P^H)$  estará resolvido. Observe que  $W$  não é vazio pois  $t = 0$  pertence a  $W$ , levando em conta que  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  tem curvatura média hiperbólica constante  $H = 0$ . O fato de  $W$  ser aberto decorre do Teorema das Funções Implícitas em Espaços de Banach, pois a derivada do operador  $Q_{tH}$  calculada em coordenadas locais é um homeomorfismo linear. Para o fechamento de  $W$  considere uma sequência  $t_n \subset W$  tal que  $t_n \rightarrow t_0$ . Como  $[0, 1]$  é compacto,  $t_0 \in [0, 1]$ , para garantir que  $W$  é fechado devemos mostrar que  $t_0 \in W$ . Seja  $u_{t_n}$  a sequência de soluções de  $(P^{t_n H})$  associada a  $t_n$ . Dado  $t \in [0, 1]$  e  $p \in \partial\Omega$ , admitindo a

existência de barreiras  $v_{p,t}$  e  $w_{p,t}$ , relativas ao operador  $Q_{tH}$ , por baixo e por cima respectivamente, obtemos uma estimativa *a priori* dada por

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq M$$

onde  $u$  é qualquer solução de  $(P^{tH})$ . Em particular temos

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u_{t_n}| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

que juntamente com o resultado abaixo. (Lema 2.5 de [5])

**Lema 1.3.4** Seja  $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  solução de  $Q_H = 0$  em  $\Omega$ . Assuma que  $u$  é limitada em  $\Omega$  e que  $|\text{gradu}|$  é limitado em  $\partial\Omega$ . Então  $|\text{gradu}|$  é limitado em  $\Omega$  por uma constante que depende somente da  $|u|_0$  e de  $\sup_{\partial\Omega} |\text{gradu}|$ .

*Demonstração.* Ver [5].

E lembrando que qualquer solução de  $(P^{t_n H})$  é limitada em  $\Omega$ , por uma constante que não depende de  $t_n$ , devido a existência das barreiras, nos permite estender a estimativa acima para  $\Omega$ , isto é:

$$\sup_{\Omega} |\nabla u_{t_n}| \leq \overline{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Através de reduções apropriadas para um problema linear elíptico, aplicando as estimativas de Holder para o gradiente (Teoremas 12.2 e 6.6 de [10]) obtemos uma estimativa uniforme da norma  $C^{2,\alpha}$  da sequência  $u_{t_n}$ , isto é

$$|u_{t_n}|_{2,\alpha} \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e de posse dessa estimativa aplicando Arzelá - Ascoli temos que  $u_{t_n}$  possui uma subsequência que converge uniformemente na norma  $C^2$  a uma função  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . A regularidade da  $\partial\Omega$  e o Teorema 6.19 de [10] garantem que  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . A continuidade do operador  $Q_{t_0 H}$  assegura que  $u$  é solução de

$(P^{t_0H})$  e sendo assim  $t_0 \in W$ . Portanto, a parte da demonstração referente ao fechamento de  $W$  se resume a garantir a existência de barreiras relativas ao operador  $Q_{tH}$  para todo ponto  $p \in \partial\Omega$  e para todo  $t \in [0, 1]$ .

No contexto desta tese, procuramos soluções do sistema  $(P^H)$  para o caso de um domínio anelar  $\Omega$ , isto é,  $\Omega$  é uma região limitada de  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  cuja fronteira é formada por duas curvas, digamos  $\gamma$  e  $\beta$ , com  $\gamma$  contida no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Além disso, exigimos que as soluções, quando restritas a  $\gamma$  se anulem e quando restritas a  $\beta$  tenham uma determinada altura constante  $h$ . Sendo assim, é natural que as condições sobre as quais o sistema  $(P^H)$  tenha solução, dependam da geometria das curvas e da altura  $h$ . Uma das principais condições sobre a curva  $\gamma$  segue na definição abaixo:

**Definição 1.3.5** Seja  $\gamma$  uma curva de Jordan de classe  $C^{2,\alpha}$  contida em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ . Dizemos que  $\gamma$  satisfaz a condição do círculo interior de raio  $r$  se dado qualquer ponto  $p \in \gamma$  existe um círculo de raio  $r$  tangente a  $\gamma$  em  $p$  e contido na região limitada cuja fronteira é  $\gamma$ .

As outras condições sobre as curvas serão dadas diretamente em termos da curvatura geodésica e das quantidades abaixo:

$$\text{diam}(\beta) = \sup\{d_{\mathbb{H}}(p, q), p, q \in \beta\}$$

$$d = d_{\mathbb{H}}(\gamma, \beta) = \inf\{d_{\mathbb{H}}(p, q) \mid p \in \gamma, q \in \beta\}$$

onde  $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \mapsto \mathbb{R}$  é a distância hiperbólica.

## 2 Superfícies Rotacionais de Curvatura Média Constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Veremos que, levando em consideração as hipóteses das curvas envolvidas no resultados de existência, é conveniente usar como barreiras, pedaços de superfícies de rotação que tenham por bordo dois círculos em "fatias paralelas". Para isso é necessário o conhecimento do comportamento de tais superfícies neste espaço ambiente, principalmente através das equações que as definem. Como base para esse assunto utilizamos os artigos, [14], [19] e [17]. De acordo com os interesses desta tese, é suficiente considerar o estudo dessas superfícies de rotação, através de três situações, que serão estudadas em 3 casos separadamente: curvatura média constante  $H = 0$ ,  $H = \frac{1}{2}$  e  $H > \frac{1}{2}$ .

Considere o modelo de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  do capítulo anterior, bem como a métrica associada e ele. Seja  $\Gamma = \{(x, 0) \in \mathbb{H}^2 \mid x \in (-1, 1)\}$  uma geodésica completa passando por  $(0, 0)$ . A menos de uma isometria podemos supor que as superfícies de rotação de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  são geradas por curvas no plano geodésico  $\mathbb{P} = \Gamma \times \mathbb{R}$  e que seu eixo de rotação é  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ . Considere uma curva  $c(s) = (s, \lambda(s))$  contida em  $\mathbb{P}$  que seja um gráfico vertical sobre  $\Gamma$ , onde  $s \in (0, \infty)$  é a distância hiperbólica até  $(0, 0)$ . Orientando a superfície de rotação  $S$ , obtida através de  $c(s)$ , pelo campo unitário normal  $N$  com terceira componente maior ou igual a zero, temos que  $S$  tem curvatura média constante  $H$  se e somente se  $\lambda(s)$  é dada por

$$\lambda_{H,r_0}(s) = \int_{r_0}^s \frac{D + 2H \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (D + 2H \cosh(t))^2}} dt.$$

onde  $D$  é um parâmetro e  $r_0$  é o valor mínimo de  $t$  tal que

$$\sinh^2 t - (D + 2H \cosh(t))^2 \geq 0.$$

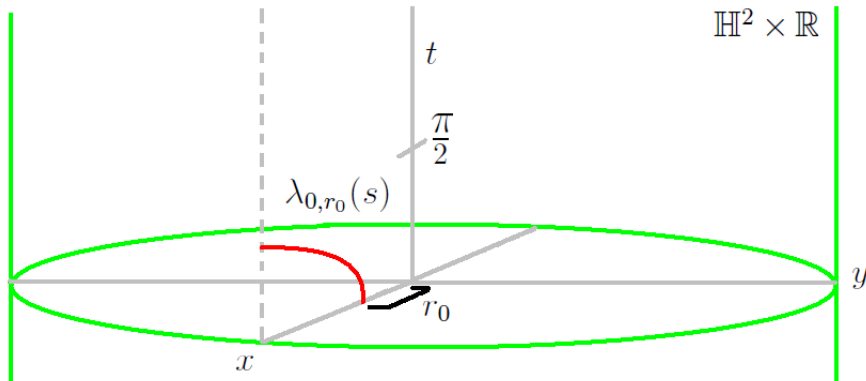
Para uma demonstração em detalhes ver [19].

## 2.1 Caso $H = 0$

**Proposição 2.1.1** (Proposição 5.1 de [14] - adaptada) Para cada  $D \geq 0$  existe  $M_D$ , uma superfície rotacional completa com curvatura média constante  $H = 0$ . A superfície  $M_0$  é a fatia  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ . Para  $D > 0$  a superfície  $M_D$  é mergulhada, homeomorfa a um anel e a distância entre o eixo de rotação e a superfície  $M_D$  é  $r_0 = \sinh^{-1} D$ .

*Demonstração.* Basta fazer  $H = 0$  na expressão de  $\lambda_{H,r_0}(s)$  obtendo

$$\lambda_{0,r_0}(s) = \int_{r_0}^s \frac{D}{\sqrt{\sinh^2 t - D^2}} dt = \int_{\sinh^{-1} D}^s \frac{D}{\sqrt{\sinh^2 t - D^2}} dt.$$



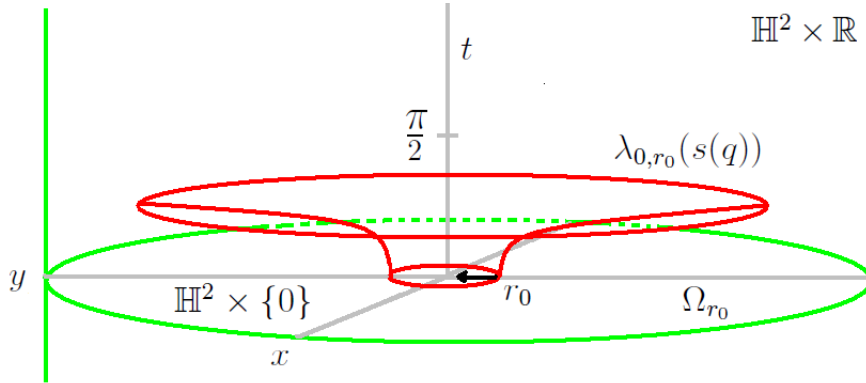
Note que o denominador do integrando de  $\lambda_{0,r_0}(s)$  se anula em  $t = r_0$  e sendo assim a curva  $\lambda_{0,r_0}(s)$  tem tangente vertical nesse ponto. Além disso, observe que a função acima está definida para todo  $s \geq r_0$  e sendo assim

podemos escrever a superfície  $M_D$  como gráfico vertical de uma função de duas variáveis sobre o domínio  $\Omega_{r_0} = \{q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\} \mid d_{\mathbb{H}}(q, (0, 0)) \geq r_0\}$  quando consideramos a composta  $\lambda_{0,r_0}(s(q))$  onde  $s = s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, (0, 0))$ , ou seja:

$$\lambda_{0,r_0}(s(q)) = \int_{r_0}^{s(q)} \frac{D}{\sqrt{\sinh^2 t - D^2}} dt$$

ou ainda, através da substituição  $\sinh r_0 = D$ ,

$$\lambda_{0,r_0}(s(q)) = \int_{r_0}^{s(q)} \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}} dt.$$



## 2.2 Caso $H = \frac{1}{2}$

Nessa caso a função  $\lambda_{H,r_0}$  tem o seguinte formato

$$\lambda_{\frac{1}{2},r_0}(s) = \int_{r_0}^s \frac{D + \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (D + \cosh(t))^2}} dt.$$

com três possibilidades para o parâmetro  $D < 0$  separadas através do resultado abaixo:



**Lema 2.2.1** (Lema 5.2 de [14] - adaptado) Assuma que  $H = \frac{1}{2}$  e  $D < 0$ . Então  $\sinh^2 t - (D + \cosh(t))^2 \geq 0$  se e somente se,  $t \geq \cosh^{-1}\left(\frac{1+D^2}{-2D}\right) = \ln(-D)$ . Seja  $r_0 \geq 0$  tal que  $\ln(-D) = r_0$  então  $\sinh^2 r_0 - (D + \cosh(r_0))^2 = 0$  e  $r_0 = 0$  se e somente se  $D = -1$ .

(1) Se  $D \in (-1, 0)$ , então  $-D < \cosh r_0$ . Consequentemente a função  $\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s)$  é não decrescente para  $s \geq r_0 > 0$  e tem derivada infinita em  $r_0$ .

(2) Se  $D = -1$ , então  $\lambda'_{\frac{1}{2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cosh(s) - 1}$  e  $r_0 = 0$ . Portanto a função  $\lambda_{\frac{1}{2}}(s)$  está definida para todo  $s \geq 0$ , tem derivada 0 em  $s = 0$  e é não decrescente para  $s > 0$ .

(3) Se  $D < -1$  existe  $R > r_0 > 0$  tal que  $\cosh^{-1}(-D) = R$ . Consequentemente a função  $\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s)$  está definida para todo  $s \geq r_0 > 0$  com derivada infinita em  $r_0$ , é não crescente para  $r_0 < s < R$ , tem derivada 0 em  $R$  e é não decrescente para  $s > R$ .

(4) Para todo  $D < 0$  e  $r_0 \geq 0$  temos

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s) = +\infty$$

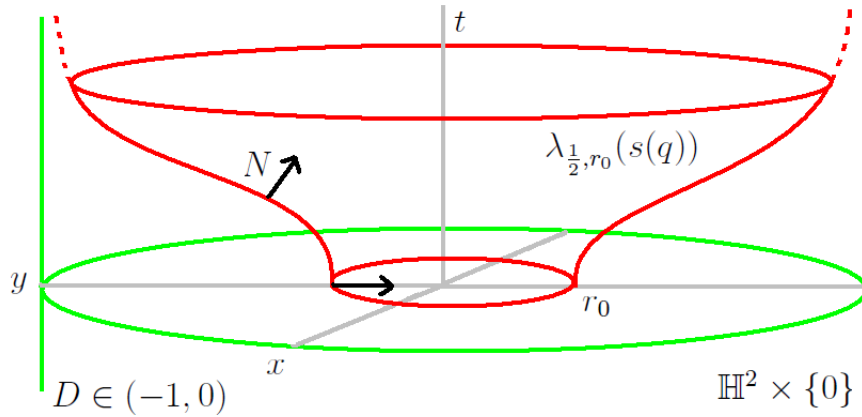
*Demonstração.* Basta analisar a integral que define a função  $\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s)$  e sua derivada.

Cabe salientar, que nesse caso o valor de  $r_0$  depende somente do parâmetro  $D$ , e além disso, que  $D \rightarrow -1$  implica em  $r_0 \rightarrow 0$ . O conteúdo do Lema acima pode ser escrito em termos de superfícies conforme segue.

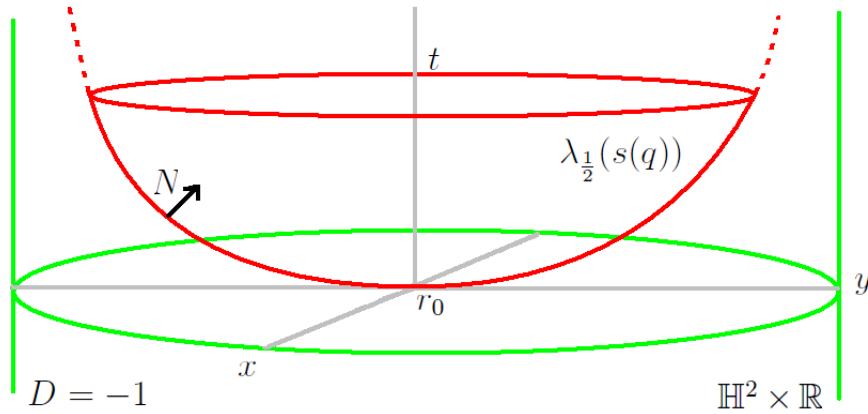
**Proposição 2.2.2.** (Proposição 5.2 de [14]) Existe uma família a um parâmetro  $S_D$  onde  $D < 0$  de superfícies rotacionais completas com curvatura

média hiperbólica constante  $H = \frac{1}{2}$ .

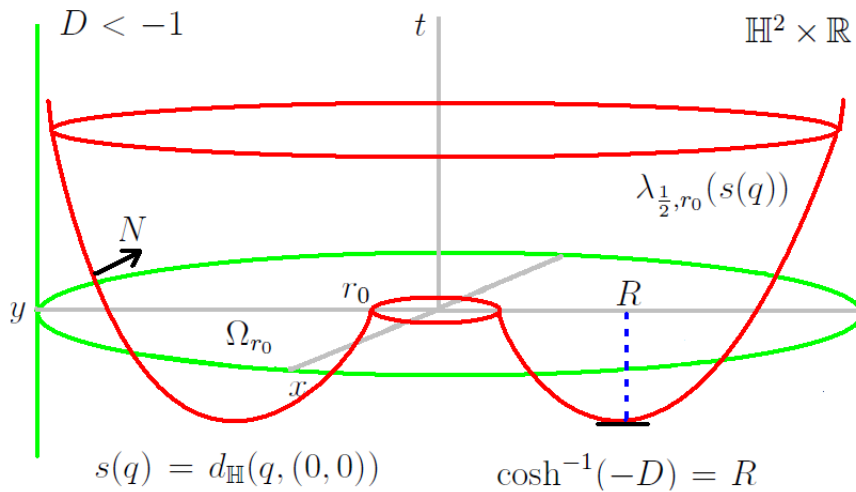
(1) Se  $D > -1$ , a superfície  $S_D$  é um anel propriamente mergulhado, simétrico com relação à  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e cuja distância ao eixo de rotação é  $\ln(-D)$ .



(2) Se  $D = -1$ , então a superfície  $S_{-1}$  é um gráfico vertical inteiro tangente a  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  em  $(0, 0, 0)$  e contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{t\}$  com  $t \geq 0$ .



(3) Se  $D < -1$ , a superfície  $S_D$  é um anel propriamente imerso (e não mergulhado), simétrico com relação à  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e cuja distância ao eixo de rotação é  $\ln(-D)$ .



(4) Em todos os casos anteriores a superfície é ilimitada na direção da coordenada  $t$ . Além disso, qualquer superfície rotacional com curvatura média constante  $H = \frac{1}{2}$  é, a menos de uma isometria do ambiente, parte de alguma superfície desta família.

*Demonstração.* Consequência direta do Lema anterior.

Dado  $D < 0$ , observe que a função abaixo está definida para todo  $s \geq r_0 = \ln(-D)$

$$\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s) = \int_{r_0}^s \frac{D + \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (D + \cosh(t))^2}} dt.$$

e considere o domínio  $\Omega_{r_0} = \{q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\} \mid d_{\mathbb{H}}(q, (0, 0)) \geq r_0\}$ . Defina a composta  $\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s(q))$ , onde  $s = s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, (0, 0))$  e  $r_0 = \ln(-D)$ , por:

$$\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s(q)) = \int_{r_0}^{s(q)} \frac{D + \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (D + \cosh(t))^2}} dt.$$

Sendo assim podemos escrever  $S_D$  como gráfico de  $\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s(q))$  sobre  $\Omega_{r_0}$  e além disso, para o caso  $D = -1$  a expressão obtida para  $\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s(q))$  admite a seguinte simplificação:

$$\lambda_{\frac{1}{2}}(s(q)) = \int_0^{s(q)} \frac{-1 + \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (-1 + \cosh(t))^2}} dt = 2 \cosh\left(\frac{s(q)}{2}\right) - 2$$

com  $\Omega_{r_0} = \mathbb{H}^2 \times \{0\}$  pois  $r_0 = 0$ .

### 2.3 Caso $H > \frac{1}{2}$

Nessa caso o parâmetro  $D$  admite somente valores tais que  $D \leq -\sqrt{4H^2 - 1}$ . Dentro dessa situação serão consideradas as possibilidades  $D < -2H$ ,  $D = -2H$  e  $-2H < D \leq -\sqrt{4H^2 - 1}$ .

**Lema 2.3.1** (Lema 5.3 de [14]) Sejam  $H$  e  $D$  satisfazendo  $H > \frac{1}{2}$  e  $D < -\sqrt{4H^2 - 1}$ . Então existem números  $0 \leq r_0 < r_1$  tais que

$$r_0 = \cosh^{-1}\left(\frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2}\right)$$

e

$$r_1 = \cosh^{-1}\left(\frac{2DH - \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2}\right).$$

Portanto  $\sinh^2 t - (D + 2H \cosh(t))^2 > 0$  se e somente se,  $r_0 < t < r_1$  e além disso  $\sinh^2 r_0 - (D + 2H \cosh(r_0))^2 = \sinh^2 r_1 - (D + 2H \cosh(r_1))^2 = 0$ .

(1) Se  $D < -2H$ , então  $r_0 > 0$  e existe um único número  $R \in (r_0, r_1)$  satisfazendo  $D + 2H \cosh(R) = 0$ . Além disso,  $D + 2H \cosh(t) \leq 0$  em  $[r_0, R)$  e  $D + 2H \cosh(t) \geq 0$  em  $(R, r_1]$ . Conseqüentemente, a função  $\lambda_{H,r_0}(s)$  está definida em  $[r_0, r_1]$ , tem derivada infinita em  $r_0$  e  $r_1$ , é não crescente em  $(r_0, R)$  e não decrescente em  $(R, r_1)$ .

(2) Se  $D = -2H$ , então  $r_0 = 0$  e

$$\lambda'_H(s) = \frac{2H\sqrt{\cosh(s) - 1}}{\sqrt{(1 - 4H^2)\cosh(s) + 4H^2 + 1}}.$$

Consequentemente, a função  $\lambda_H(s)$  está definida em  $[0, r_1]$ , tem derivada 0 em  $s = 0$ , é não decrescente e tem derivada infinita em  $r_1$ .

(3) Se  $-2H < D < -\sqrt{4H^2 - 1}$ , então  $r_0 > 0$  e  $D + 2H \cosh(t) \geq 0$  em  $[r_0, r_1]$ . Portanto a função  $\lambda_H(s)$  está definida em  $[r_0, r_1]$ , é não decrescente e tem derivada infinita em  $r_0$  e  $r_1$ .

*Demonstração.* Cálculos diretos aplicados a expressão de  $\lambda_H(s)$ .

**Proposição 2.3.2** (Proposição 5.3 de [14]) Assuma que  $H > \frac{1}{2}$ . Então existe uma família a um parâmetro  $A_D$  de superfícies rotacionais completas com curvatura média hiperbólica constante  $H$  para  $D \leq -\sqrt{4H^2 - 1}$ . Além disso:

(1) Para  $D < -2H$ , a superfície  $A_D$  é um anel imerso (não mergulhado), contido no fecho da região limitada pelos dois cilindros verticais  $s = r_0$  e  $s = r_1$ . Além disso,  $r_0 \rightarrow +\infty$  e  $r_1 \rightarrow +\infty$  quando  $D \rightarrow -\infty$  e  $r_0 \rightarrow 0$  e  $r_1 \rightarrow \cosh^{-1}\left(\frac{4H^2+1}{4H^2-1}\right)$  quando  $D \rightarrow -2H$ . Essas superfícies são análogas aos nodóides de Delaunay em  $\mathbb{R}^3$ .

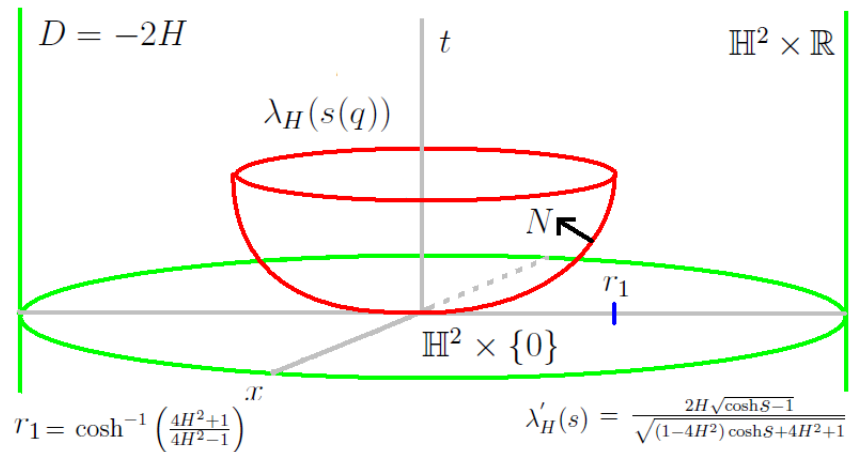
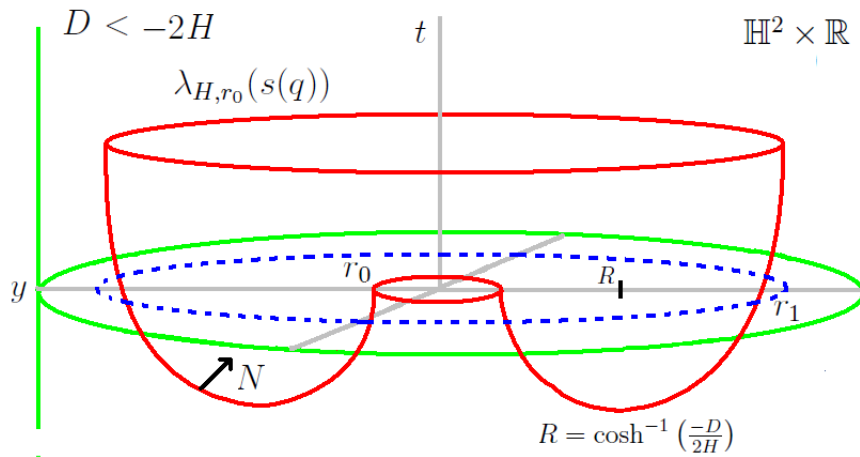
(2) Para  $D = -2H$ , a superfície  $A_{-2H}$  é uma esfera mergulhada cuja distância máxima ao eixo de rotação é  $r_1 = \cosh^{-1}\left(\frac{4H^2+1}{4H^2-1}\right)$ . (A figura abaixo caracteriza a parte da superfície dada como gráfico)

(3) Para  $-2H < D < -\sqrt{4H^2 - 1}$ , a superfície  $A_D$  é um anel mergulhado, invariante por uma translação vertical e contido no fecho da região limitada pelos dois cilindros verticais  $s = r_0$  e  $s = r_1$ . Além disso,  $r_0 \rightarrow 0$  e  $r_1 \rightarrow \cosh^{-1}\left(\frac{4H^2+1}{4H^2-1}\right)$  quando  $D \rightarrow -2H$  e ambos  $r_0$  e  $r_1 \rightarrow \cosh^{-1}\left(\frac{2H}{\sqrt{4H^2-1}}\right)$

quando  $D \rightarrow -\sqrt{4H^2 - 1}$ . Além disso,  $r_0 < \cosh^{-1}\left(\frac{2H}{\sqrt{4H^2 - 1}}\right) < r_1$ . Essas superfícies são análogas aos ondulóides de Delaunay em  $\mathbb{R}^3$ .

(4) Para  $D = -\sqrt{4H^2 - 1}$ , a superfície  $A_{\sqrt{4H^2 - 1}}$  é um cilindro vertical sobre um círculo de raio hiperbólico  $\cosh^{-1}\left(\frac{2H}{\sqrt{4H^2 - 1}}\right)$ .

*Demonstração.* Uma consequência direta do Lema anterior.



### 3 Resultados Principais

Neste capítulo, apresentamos as demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.2 citados na Introdução. Além disso, na Seção 3.3, construímos um exemplo não trivial do domínio  $\Omega$  relacionado aos resultados de existência.

#### 3.1 Caso $H \in [0, \frac{1}{2}]$

**Teorema 3.1.** *Seja  $\Omega$  um domínio anelar de classe  $C^{2,\alpha}$  onde  $\alpha \in (0,1)$ , contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  cujo bordo consiste de duas curvas  $\gamma$  e  $\beta$  com  $\gamma$  contida no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Sejam  $r > 0$  e  $D < -1$  satisfazendo:*

$$\ln(-D) < r < \cosh^{-1}(-D)$$

*Suponha que  $\text{diam}(\beta) < r + R$ , onde  $R = \cosh^{-1}(-D)$ , que  $\gamma$  satisfaz a condição do círculo interior de raio  $r$  e que  $k_\beta \geq \coth R$ . Denote por  $d = d_{\mathbb{H}}(\gamma, \beta)$ . Nessas condições, dados*

$$0 \leq h \leq \frac{d(1 - D^2)}{4D \sinh(r + \frac{d}{2})}$$

*e  $H \in [0, \frac{1}{2}]$  existe  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $Q_H(u) = 0$  em  $\Omega$ ,  $u|_\gamma = h$  e  $u|_\beta = 0$ , onde a curvatura média é calculada com relação ao campo  $N$ , normal unitário (no sentido hiperbólico) satisfazendo  $\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \leq 0$ .*

*Demonstração.* O primeiro passo da demonstração consiste em mergulhar o problema:

$$(P^H) = \begin{cases} Q_H(u) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+F|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_\gamma = h \quad u|_\beta = 0 \quad u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

em uma família de problemas do tipo:

$$(P^{tH}) = \begin{cases} Q_{tH}(u_t) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u_t}{\sqrt{1+F|\nabla u_t|^2}} \right) + 2Ht = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\gamma} = th \quad u|_{\beta} = 0 \quad u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

onde  $H \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $F = F(x, y) = \left( \frac{1-(x^2+y^2)}{2} \right)^2$ ,  $h$  é dado no enunciado e  $\nabla$ ,  $\operatorname{div}$  e  $|\cdot|$  representam o gradiente, o divergente e a norma euclidianos. Considere o seguinte conjunto:

$$W = \{t \in [0, 1] \mid (P^{tH}) \text{ tem solução}\}$$

Observe que  $W$  não é vazio pois  $t = 0$  pertence a  $W$ . O fato de  $W$  ser aberto decorre do Teorema das Funções Implícitas em Espaços de Banach pois a derivada do operador  $Q_{tH}$  calculada em coordenadas locais é um homeomorfismo linear. Conforme antecipado no Capítulo 1 o fechamento de  $W$  depende da existência de barreiras relativas ao operador  $Q_{tH}$  em todos os pontos da  $\partial\Omega$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Como a  $\partial\Omega$  é formada por duas curvas  $\gamma$  e  $\beta$  então é conveniente utilizar duas barreiras, uma por cima e outra por baixo, em cada ponto de cada uma das curvas para todo  $t \in [0, 1]$ . Começamos obtendo uma barreira por cima com relação à curva  $\beta$ . Considere  $H \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $0 \leq h \leq \frac{d(D^2-1)}{4D^2 \sinh(r+\frac{d}{2})}$  e  $t \in [0, 1]$ . Sejam  $p \in \beta$  e  $R = \cosh^{-1}(-D)$ . Considere  $L$  suficientemente grande tal que

$$L > R,$$

e que

$$2 \cosh \left( \frac{L}{2} \right) - 2 \cosh \left( \frac{L - \frac{d}{2}}{2} \right) > h$$



Seja  $C_L(\bar{p})$  um círculo de raio  $L$ , centro  $\bar{p}$ , tangente a  $\beta$  em  $p$ , contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e que contenha  $\beta$ . Considere a função

$$(\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*) \circ s : \overline{B_{\bar{p}}} \mapsto \mathbb{R}$$

dada por

$$((\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*) \circ s)(q) = \lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*(s(q)) = -2 \cosh\left(\frac{s(q)}{2}\right) + 2 \cosh\left(\frac{L}{2}\right)$$

onde  $s = s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p})$  e  $B_{\bar{p}} = \{q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\} \mid d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) < L\}$ . Note que  $\partial(B_{\bar{p}}) = C_L(\bar{p})$ ,

$$((\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*) \circ s)|_{\partial(B_{\bar{p}})} = 0, \quad ((\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*) \circ s)|_{(B_{\bar{p}})} > 0$$

e em particular

$$\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*(s(p)) = -2 \cosh\left(\frac{L}{2}\right) + 2 \cosh\left(\frac{L}{2}\right) = 0.$$

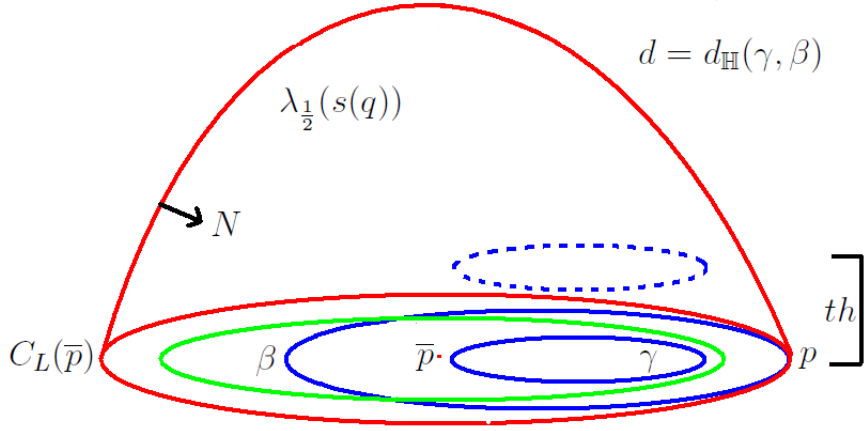
Como  $\bar{\Omega} \cap \partial(B_{\bar{p}}) = \{p\}$ ,  $\bar{\Omega} \subset \overline{B_{\bar{p}}}$  e  $d = d_{\mathbb{H}}(\gamma, \beta)$  então  $\gamma$  está contida em um círculo de centro  $\bar{p}$  e raio  $L - \frac{d}{2}$  pois todos os pontos de  $\gamma$  estão a uma distância pelo menos  $d$  de  $C_L(\bar{p})$ . Usando a segunda desigualdade acima envolvendo  $L$  temos que:

$$\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*\left(L - \frac{d}{2}\right) = 2 \cosh\left(\frac{L}{2}\right) - 2 \cosh\left(\frac{L - \frac{d}{2}}{2}\right) > h \geq th$$

o que nos leva a

$$((\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*) \circ s)|_{\gamma} > th, \quad ((\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*) \circ s)|_{\beta} \geq 0$$

pois a função  $\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*(s(q))$  aumenta conforme os pontos  $q$  se aproximam de  $\bar{p}$ . Segue abaixo o gráfico da função  $((\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*) \circ s)(q)$ .



Defina a seguinte função:

$$w_{p,t}^- = (\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^* \circ s)|_{\bar{\Omega}} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}.$$

Note que a expressão de  $(\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*)$  não depende  $t$  e, portanto,  $w_{p,t}^-$  também não, e isto significa, que a mesma função  $((\lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*) \circ s)$  quando restrita a  $\bar{\Omega}$ , será usada como barreira de  $Q_{tH}$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Em particular temos

$$w_{p,t}^-(p) = \lambda_{\frac{1}{2}, \bar{p}}^*(s(p)) = 0$$

Como o gráfico de  $w_{p,t}^-$  tem curvatura média hiperbólica constante  $H = \frac{1}{2}$  (Ver capítulo anterior - Lema 2.2.1), o Lema 1.3.2 do Capítulo 1 garante que  $Q_{tH}(w_{p,t}^-) \leq 0$  e pelas condições de  $w_{p,t}^-$  sobre  $\partial\Omega$  juntamente com o Princípio da Comparação (Teorema 1.3.1 do Capítulo 1) temos que  $w_{p,t}^- \geq u_t$  para toda  $u_t$  solução de  $(P^{tH})$ . Vejamos agora como obter uma barreira (por baixo) que se anule ao longo de  $\beta$ . Seja  $p \in \beta$  e defina a seguinte função:

$$v_{p,t}^- : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$$

dada por:

$$v_{p,t}^-(q) = 0 \quad \forall q \in \bar{\Omega}$$

Como o gráfico de  $v_{p,t}^-$  tem curvatura média hiperbólica constante  $H = 0$  temos que  $Q_{tH}(v_{p,t}^-) \geq 0$ ,  $v_{p,t}^-|_\gamma = v_{p,t}^-|_\beta = 0 \leq th$  então, novamente pelo Princípio da Comparação,  $v_{p,t}^- \leq u_t$  para toda  $u_t$  solução  $(P^{tH})$ . Agora passamos à situação em que devemos exibir uma barreira por cima com relação à curva  $\gamma$ . Seja  $p \in \gamma$ . Como  $\gamma$  satisfaz a condição do círculo interior de raio  $r$  podemos considerar  $C_p^r$  um círculo de raio  $r$  contido na região limitada cuja fronteira é  $\gamma$  e tangente a  $\gamma$  em  $p$ . Denote por  $\bar{p}$  o centro de  $C_p^r$ . Considere a função

$$(\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2},r,t} \circ s) : B_{\bar{p}} \mapsto \mathbb{R}$$

dada por

$$(\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2},r,t} \circ s)(q) = \tilde{\lambda}_{\frac{1}{2},r,t}(s(q)) = -\lambda_{\frac{1}{2},r_0}(s(q)) + \lambda_{\frac{1}{2},r_0}(r) + th$$

onde  $s = s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p})$ ,  $B_{\bar{p}} = \{q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\} \mid r \leq d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) \leq \cosh^{-1}(-D)\}$ ,  $r_0 = \ln(-D)$  e

$$\lambda_{\frac{1}{2},r_0}(s) = \int_{r_0}^s \frac{D + \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (D + \cosh(t))^2}} dt.$$

Como  $\text{diam}(\beta) \leq r + \cosh^{-1}(-D)$  temos que  $\bar{\Omega} \subset B_{\bar{p}}, \forall p \in \gamma$ . Além disso

$$\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2},r,t}(s(p)) = -\lambda_{\frac{1}{2},r_0}(s(p)) + \lambda_{\frac{1}{2},r_0}(r) + th,$$

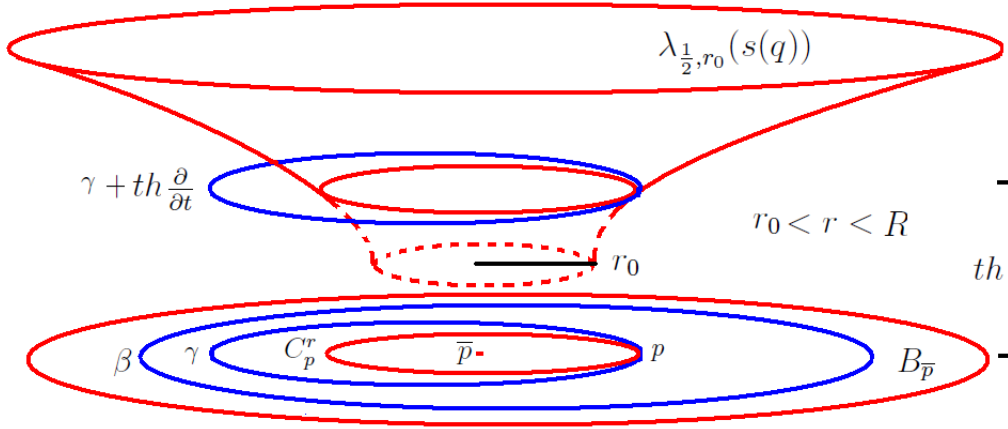
ou seja

$$\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2},r,t}(s(p)) = -\lambda_{\frac{1}{2},r_0}(r) + \lambda_{\frac{1}{2},r_0}(r) + th = th.$$

Note que para  $q \in \bar{\Omega}$  temos  $s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) \geq r$  e assim

$$\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2}, r, t}(s(q)) = \underbrace{-\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(s(q)) + \lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(r)}_{\geq 0} + th \geq th \geq 0,$$

em particular  $(\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2}, r, t} \circ s)|_{\gamma} \geq th$  e  $(\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2}, r, t} \circ s)|_{\beta} \geq 0$ . Segue o gráfico de  $(\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2}, r, t} \circ s)$ .



Defina a seguinte função:

$$w_{p,t}^+ = (\tilde{\lambda}_{\frac{1}{2}, r, t} \circ s)|_{\bar{\Omega}} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}.$$

Note que  $w_{p,t}^+(p) = \tilde{\lambda}_{\frac{1}{2}, r, t}(s(p)) = -\lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(r) + \lambda_{\frac{1}{2}, r_0}(r) + th = th$ . Usando o mesmo argumento aplicado à função  $w_{p,t}^-$  obtemos  $w_{p,t}^+ \geq u_t$  para toda  $u_t$  solução de  $(P^{tH})$ . Ainda no caso em que  $p \in \gamma$  vejamos como obter uma barreira por baixo relacionada a esta curva. Seja  $C_p^r$  um círculo de raio  $r$  contido na região limitada cuja fronteira é  $\gamma$  e tangente a  $\gamma$  em  $p$ . Denote por  $\bar{p}$  o centro de  $C_p^r$ . Considere a função

$$(\tilde{\lambda}_{0, r, t} \circ s) : B_{\bar{p}} \mapsto \mathbb{R}$$

dada por

$$(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)(q) = \tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(q)) = -\lambda_{0,r_0}(s(q)) + \lambda_{0,r_0}(r) + th$$

onde  $s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p})$ ,  $B_{\bar{p}} = \{q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\} \mid d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) \geq r\}$ ,  $r_0 = \ln(-D)$  e

$$\lambda_{0,r_0}(s) = \int_{r_0}^s \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}} dt.$$

Observe que  $\bar{\Omega} \subset B_{\bar{p}}$  e que

$$\tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(p)) = -\lambda_{0,r_0}(s(p)) + \lambda_{0,r_0}(r) + th,$$

isto é,

$$\tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(p)) = -\lambda_{0,r_0}(r) + \lambda_{0,r_0}(r) + th = th.$$

Além disso, afirmamos que  $\tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(q)) \leq 0$  para todo ponto  $q$  tal que  $d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) = (r + \frac{d}{2})$ . De fato,

$$\lambda_{0,r_0}\left(r + \frac{d}{2}\right) - \lambda_{0,r_0}(r) = \int_{r_0}^{r+\frac{d}{2}} \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}} dt - \int_{r_0}^r \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}} dt$$

e o lado direito desta igualdade pode ser escrito como

$$\int_r^{r+\frac{d}{2}} \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}} dt$$

que por sua vez admite a seguinte desigualdade

$$\int_r^{r+\frac{d}{2}} \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}} dt \geq \left(r + \frac{d}{2} - r\right) \min_{t \in [r, r+\frac{d}{2}]} \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}}.$$

Mas

$$\left(r + \frac{d}{2} - r\right) \min_{t \in [r, r + \frac{d}{2}]} \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}} = \frac{d}{2} \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2(r + \frac{d}{2}) - \sinh^2 r_0}}$$

e, assim

$$\frac{d}{2} \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2(r + \frac{d}{2}) - \sinh^2 r_0}} \geq \frac{d}{2} \frac{\sinh r_0}{\sinh(r + \frac{d}{2})}.$$

Substituindo  $r_0$  por  $\ln(-D)$  obtemos

$$\frac{d}{2} \frac{\sinh r_0}{\sinh(r + \frac{d}{2})} = \frac{d(\sinh(\ln(-D)))}{2 \sinh(r + \frac{d}{2})} = \frac{d(1 - D^2)}{4D \sinh(r + \frac{d}{2})}.$$

Por hipótese

$$\frac{d(1 - D^2)}{4D \sinh(r + \frac{d}{2})} \geq h \geq th$$

logo

$$\lambda_{0,r_0} \left(r + \frac{d}{2}\right) - \lambda_{0,r_0}(r) - th \geq 0.$$

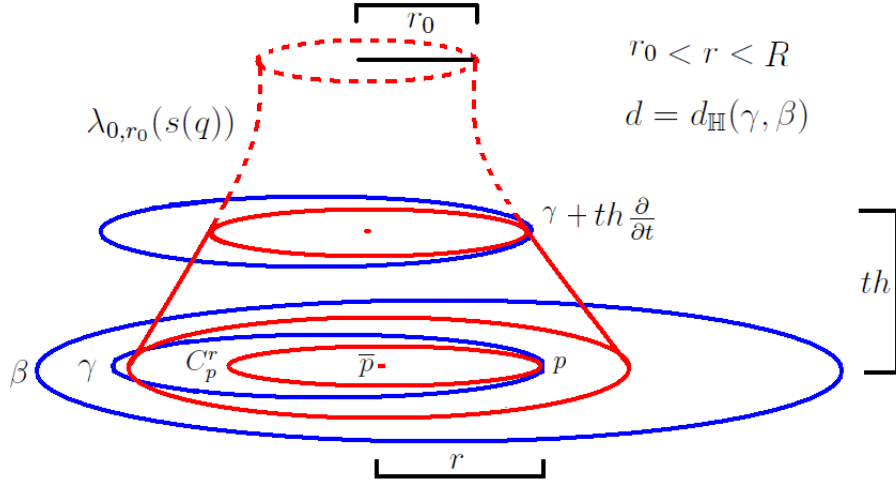
Portanto

$$-\lambda_{0,r_0} \left(r + \frac{d}{2}\right) + \lambda_{0,r_0}(r) + th \leq 0,$$

isto é,  $\tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(q)) \leq 0$  com  $s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) = (r + \frac{d}{2})$  e, sendo assim,

$$\{graf(\tilde{\lambda}_{0,r,t})\} \cap \{\mathbb{H}^2 \times \{0\}\} = \tilde{C},$$

onde  $\tilde{C}$  representa um círculo de raio  $l$  com  $l \leq r + (d/2)$  e centro  $\bar{p}$ . Levando em consideração o raio  $l$ , a posição de  $\bar{p}$  e a distância  $d$  entre  $\gamma$  e  $\beta$  temos que  $\tilde{C}$  está contido no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Observe que  $(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)|_{\gamma} \leq th$  e  $(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)|_{\beta} < 0$  pois a função  $(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)$  é decrescente.



Defina a função

$$v_{p,t}^+ = (\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)|_{\bar{\Omega}} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}.$$

Note que  $v_{p,t}^+(p) = \tilde{\lambda}_{0,r}(s(p)) = th$ . Pelo fato do gráfico de  $v_{p,t}^+$  ter curvatura média constante  $H = 0$  e pelo comportamento da função  $v_{p,t}^+$  em  $\partial\Omega$  temos que  $v_{p,t}^+ \leq u_t$  para toda  $u_t$  solução de  $(P^{tH})$ . Levando em conta o comportamento das funções  $v_{p,t}^-$ ,  $w_{p,t}^-$ ,  $v_{p,t}^+$  e  $w_{p,t}^+$  com relação a qualquer solução  $u_t$  de  $(P^{tH})$  temos:

$$v_{p,t}^- \leq u_t \leq w_{p,t}^- \quad \text{em } \bar{\Omega},$$

$$v_{p,t}^+ \leq u_t \leq w_{p,t}^+ \quad \text{em } \bar{\Omega},$$

$$v_{p,t}^-(p) = w_{p,t}^-(p) = 0 \quad \text{se } p \in \beta,$$

$$v_{p,t}^+(p) = w_{p,t}^+(p) = th \quad \text{se } p \in \gamma.$$

Além disso, afirmamos que existe  $M \geq 0$  tal que

$$\max\{|\nabla v_{p,t}^\pm(p)|, |\nabla w_{p,t}^\pm(p)|\} \leq M \quad \forall p \in \partial\Omega, \forall t \in [0, 1].$$

O artifício usado para garantir a afirmação será baseado na análise do ângulo entre o vetor normal unitário (no sentido euclidiano) e o vetor  $\frac{\partial}{\partial t} = (0, 0, 1)$ . De fato, fixado  $t \in [0, 1]$ , para qualquer  $p \in \gamma$ , por construção, mais precisamente do fato de que  $r > r_0 = \ln(-D)$  temos

$$|\langle \bar{N}(w_{p,t}^+(p)), \frac{\partial}{\partial t} \rangle| > 0$$

onde  $\bar{N}(w_{p,t}^+(p))$  é o vetor normal (no sentido euclidiano) ao gráfico da função  $w_{p,t}^+$  no ponto  $(p, w_{p,t}^+(p))$  e  $\langle \cdot \rangle$  representa o produto interno euclidiano. Por continuidade, existem  $\delta_p > 0$  e uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  em  $\gamma$  tal que

$$|\langle \bar{N}(w_{q,t}^+(q)), \frac{\partial}{\partial t} \rangle| \geq \delta_p > 0 \quad \forall q \in V_p.$$

Por compacidade, podemos cobrir  $\gamma$  por um número finito de vizinhanças  $V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_n}$ . Sendo  $\delta = \min\{\delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \dots, \delta_{p_n}\}$ , então

$$|\langle \bar{N}(w_{q,t}^+(q)), \frac{\partial}{\partial t} \rangle| \geq \delta > 0 \quad \forall q \in \gamma.$$

A princípio,  $\delta$  poderia depender de  $t$ , mas isto não ocorre pois a diferença entre as funções  $w_{q,t_0}^+$  e  $w_{q,t_1}^+$  com  $t_0 \neq t_1$  é uma translação vertical e isto não altera o valor de  $|\langle \bar{N}(w_{q,t}^+(q)), \frac{\partial}{\partial t} \rangle|$ . Portanto,

$$|\langle \bar{N}(w_{q,t}^+(q)), \frac{\partial}{\partial t} \rangle| \geq \delta > 0 \quad \forall q \in \gamma \quad \forall t \in [0, 1].$$

Disto segue que existe  $M_1 \geq 0$  tal que

$$|\nabla w_{p,t}^+(p)| \leq M_1 \quad \forall p \in \gamma, \forall t \in [0, 1].$$



Analogamente, para  $w_{q,t}^-$  e  $v_{q,t}^\pm$  obtemos constantes  $M_2, M_3$  e  $M_4$ . Definindo  $M = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$  decorre a afirmação. Nessas condições podemos afirmar que as funções  $v_{p,t}^-, w_{p,t}^-, v_{p,t}^+$  e  $w_{p,t}^+$  são barreiras relativas ao operador  $Q_{tH}$  com gradiente limitado em  $p$  para todo  $p \in \partial\Omega$  e para todo  $t \in [0, 1]$  por uma mesma constante  $M$  (independente de  $p$  e de  $t$ ). Sendo assim, usando o Lema 1.3.3, temos

$$|\nabla u_t(p)| \leq \max\{|\nabla v_{p,t}^\pm(p)|, |\nabla w_{p,t}^\pm(p)|\} \leq M \quad \forall p \in \partial\Omega \quad \forall t \in [0, 1].$$

Portanto

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u_t| \leq M \quad \forall t \in [0, 1].$$

Observe que a constante  $M$  é a mesma para toda solução  $u_t$  de  $(P^{tH})$ , sendo assim podemos usar os mesmos argumentos apresentados na subseção 1.3 do Capítulo 1, garantido que  $W$  é fechado e encerrando assim a demonstração.

### 3.2 Caso $H > \frac{1}{2}$

**Teorema 3.2.** *Seja  $\Omega$  um domínio anelar de classe  $C^{2,\alpha}$  onde  $\alpha \in (0, 1)$ , contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  cujo bordo consiste de duas curvas  $\gamma$  e  $\beta$  com  $\gamma$  contida no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Dado  $H > \frac{1}{2}$  sejam*

$$0 < r \leq \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left( \frac{4H^2 \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right) - \sqrt{4H^2 \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right)^2 - (4H^2 - 1)}}{4H^2 - 1} \right)$$

e  $D < -2H$  satisfazendo:

$$\cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right) < r < \cosh^{-1} \left( \frac{-D}{2H} \right)$$

Suponha que  $\gamma$  satisfaz a condição do círculo interior de raio  $r$  e que  $\text{diam}(\beta) \leq r + R$ , onde  $R = \cosh^{-1}\left(\frac{-D}{2H}\right)$ . Além disso, suponha que  $k_\beta \geq \coth R$ . Denote por  $d = d_{\mathbb{H}}(\gamma, \beta)$ . Nessas condições, dado

$$0 \leq h \leq \min \left\{ \frac{d \left( \sinh \left( \cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right) \right) \right)}{2 \sinh \left( r + \frac{d}{2} \right)}, \frac{Hd \left( \cosh \left( R - \frac{d}{2} \right) - 1 \right)}{2 \sinh \left( R - \frac{d}{2} \right)} \right\}$$

existe  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $Q_H(u) = 0$  em  $\Omega$ ,  $u|_\gamma = h$  e  $u|_\beta = 0$ , onde a curvatura média é calculada com relação ao campo  $N$ , normal unitário (no sentido hiperbólico) satisfazendo  $\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \leq 0$ .

*Demonstração.* Dado  $H > \frac{1}{2}$ , sejam  $d$ ,  $r$  e  $D < -2H$  conforme o enunciado. Dado

$$0 \leq h \leq \min \left\{ \frac{d \left( \sinh \left( \cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right) \right) \right)}{2 \sinh \left( r + \frac{d}{2} \right)}, \frac{Hd \left( \cosh \left( R - \frac{d}{2} \right) - 1 \right)}{2 \sinh \left( R - \frac{d}{2} \right)} \right\}$$

Considere a seguinte família de problemas

$$(P^{tH}) = \begin{cases} Q_{tH}(u_t) = F \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u_t}{\sqrt{1 + F|\nabla u_t|^2}} \right) + 2Ht = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_\gamma = h \quad u|_\beta = 0 \quad u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

e o conjunto  $W$  dado por

$$W = \{t \in [0, 1] \mid (P^{tH}) \text{ tem solução}\},$$

onde  $F = F(x, y) = \left(\frac{1 - (x^2 + y^2)}{2}\right)^2$ ,  $\nabla$ ,  $\operatorname{div}$  e  $|\cdot|$  representam o gradiente, o divergente e a norma euclidianos. As principais mudanças dessa demonstração com relação à anterior são as funções  $v_{p,t}^+$ ,  $v_{p,t}^-$ ,  $w_{p,t}^+$ ,  $w_{p,t}^-$ :  $\bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ , com  $p \in \partial\Omega$ , a serem consideradas como barreiras. Vejamos então quem serão

essas funções nesse caso. Dado  $t \in [0, 1]$  começamos obtendo uma barreira por cima para relacionada a curva  $\beta$ . Sejam  $p \in \beta$  e  $R = \cosh^{-1}(\frac{-D}{2H})$ . Como  $k_\beta \geq \coth R$ , podemos considerar  $C_R(\bar{p})$  um círculo de raio  $R$  centro  $\bar{p}$  tangente a  $\beta$  em  $p$ , contido em  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  e que contenha  $\beta$ . Considere a função

$$(\lambda_H^*) \circ s : \overline{B_{\bar{p}}} \mapsto \mathbb{R}$$

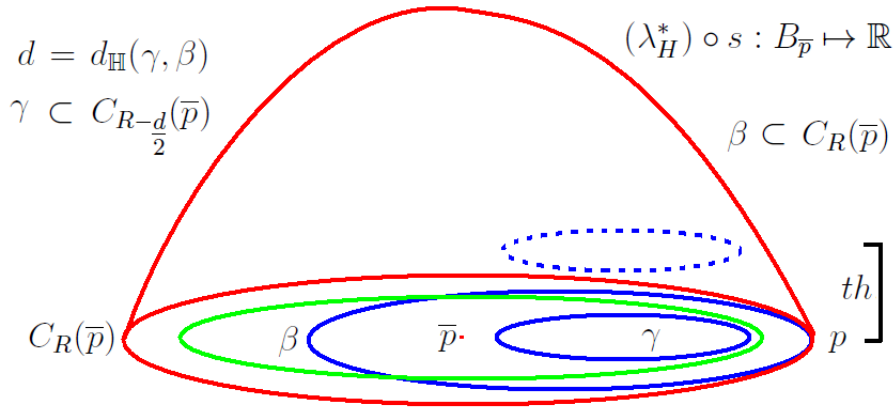
dada por

$$((\lambda_H^*) \circ s)(q) = \lambda_H^*(s(q)) = -\lambda_H(s(q)) + \lambda_H(R)$$

onde  $s = s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p})$ ,  $B_{\bar{p}} = \{q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\} \mid 0 \leq d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) < R\}$  e

$$\lambda_H(s) = \int_0^s \frac{-2H + 2H \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (-2H + 2H \cosh(t))^2}} dt.$$

Observe que  $\partial(B_{\bar{p}}) = C_R(\bar{p})$ ,  $\Omega \subset B_{\bar{p}}$  e  $\overline{\Omega} \cap \overline{B_{\bar{p}}} = \{p\}$ .



Defina a seguinte função

$$w_{p,t}^- = (\lambda_H^* \circ s)|_{\overline{\Omega}} : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}.$$

Observe que a expressão de  $((\lambda_H^*) \circ s)$  não depende  $t$ , e isto significa que a mesma função  $((\lambda_H^*) \circ s)$  quando restrita a  $\bar{\Omega}$ , será usada como barreira (por cima) de  $Q_{tH}$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Além disso,

$$w_{p,t}^-|_{C_R(\bar{p})} = \lambda_H^*(C_R(\bar{p})) = -\lambda_H(R) + \lambda_H(R) = 0.$$

Em particular

$$w_{p,t}^-(p) = \lambda_H^*(R) = -\lambda_H(R) + \lambda_H(R) = 0.$$

Como a função é decrescente o valor de  $\lambda_H^*(s(q))$  aumenta conforme os pontos  $q$  se aproximam de  $\bar{p}$  e sendo assim  $w_{p,t}^-|_{\beta} \geq 0$ . Por outro lado, como  $d = d_{\mathbb{H}}(\gamma, \beta)$  temos que  $\gamma$  está contida em um círculo de raio  $R - d$  e centro  $\bar{p}$ . Seja  $C_{R-d}(\bar{p})$  esse círculo. Sendo assim

$$\lambda_H^*(C_{R-d}(\bar{p})) = -\lambda_H(R - d) + \lambda_H(R) > -\lambda_H\left(R - \frac{d}{2}\right) + \lambda_H(R).$$

Mas

$$-\lambda_H\left(R - \frac{d}{2}\right) + \lambda_H(R)$$

é igual a

$$\int_0^R \frac{-2H + 2H \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (-2H + 2H \cosh(t))^2}} dt - \int_0^{R-\frac{d}{2}} \frac{-2H + 2H \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (-2H + 2H \cosh(t))^2}} dt.$$

Observe que a expressão acima pode ser escrita como

$$\int_{R-\frac{d}{2}}^R \frac{-2H + 2H \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (-2H + 2H \cosh(t))^2}} dt$$

e que o termo obtido admite a seguinte desigualdade:

$$\int_{R-\frac{d}{2}}^R \frac{-2H + 2H \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (-2H + 2H \cosh(t))^2}} dt \geq$$

$$\left( R - \left( R - \frac{d}{2} \right) \right) \min_{t \in [R-\frac{d}{2}, R]} \frac{-2H + 2H \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (-2H + 2H \cosh(t))^2}}.$$

Como o argumento da integral é uma função crescente, a segunda linha da desigualdade acima é

$$\frac{d}{2} \frac{-2H + 2H \cosh(R - \frac{d}{2})}{\sqrt{\sinh^2(R - \frac{d}{2}) - (-2H + 2H \cosh(R - \frac{d}{2}))^2}}.$$

Mas

$$\frac{d}{2} \frac{-2H + 2H \cosh(R - \frac{d}{2})}{\sqrt{\sinh^2(R - \frac{d}{2}) - (-2H + 2H \cosh(R - \frac{d}{2}))^2}} \geq \frac{d(-2H + 2H \cosh(R - \frac{d}{2}))}{2 \sinh(R - \frac{d}{2})}$$

e o lado direito da desigualdade acima é

$$\frac{Hd[\cosh(R - \frac{d}{2}) - 1]}{\sinh(R - \frac{d}{2})}.$$

Por hipótese,

$$\frac{Hd[\cosh(R - \frac{d}{2}) - 1]}{\sinh(R - \frac{d}{2})} \geq h \geq th.$$

Portanto  $\lambda_H^*(C_{R-d}(\bar{p})) \geq th$ , e novamente pelo fato da função  $((\lambda_H^*) \circ s)$  ser decrescente temos  $w_{p,t}^-|_\gamma \geq th$ . Usando o Princípio da Comparação e o fato do gráfico de  $w_{p,t}^- = ((\lambda_H^*) \circ s)|_{\bar{\alpha}}$  ter curvatura média hiperbólica constante  $H$  segue que  $w_{p,t}^- \geq u_t$  para toda  $u_t$  solução de  $(P^{tH})$ . Como

$$r < \cosh^{-1} \left( \frac{4H^2 \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right) - \sqrt{4H^2 \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right)^2 - (4H^2 - 1)}}{4H^2 - 1} \right)$$

tem-se  $D > -2H\left(\frac{4H^2+1}{4H^2-1}\right)$  pois a função  $f_H : (-\infty, -2H] \mapsto \mathbb{R}$  dada por

$$f_H(t) = \cosh^{-1} \left( \frac{2tH + \sqrt{1 - 4H^2 + t^2}}{1 - 4H^2} \right)$$

é decrescente,

$$f_H \left( -2H \left( \frac{4H^2 + 1}{4H^2 - 1} \right) \right) = \cosh^{-1} \left( \frac{4H^2 \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right) - \sqrt{4H^2 \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right)^2 - (4H^2 - 1)}}{4H^2 - 1} \right).$$

e, por hipótese,

$$f_H(D) < r < f_H \left( -2H \left( \frac{4H^2 + 1}{4H^2 - 1} \right) \right).$$

Mas

$$D > -2H \left( \frac{4H^2 + 1}{4H^2 - 1} \right) \Rightarrow 0 < \frac{-D}{2H} < \frac{4H^2 + 1}{4H^2 - 1}$$

e assim

$$R = \cosh^{-1} \left( \frac{-D}{2H} \right) < \cosh^{-1} \left( \frac{4H^2 + 1}{4H^2 - 1} \right).$$

Observe que a função  $\lambda_H$  (definida por uma integral) possui derivada infinita em  $s = \cosh^{-1} \left( \frac{4H^2+1}{4H^2-1} \right)$  tendo em vista que o denominador de  $\lambda'_H$  se anula nesse valor. Sendo assim a reta tangente ao gráfico nesse ponto é vertical e, portanto, o vetor normal (no sentido euclidiano) ao gráfico de  $(\lambda_H^* \circ s)$  (superfície de rotação gerada por  $\lambda_H$ ) no mesmo ponto forma um ângulo de  $90^\circ$  com  $\frac{\partial}{\partial t}$ . No entanto, a função  $(\lambda_H^* \circ s)$  definida no domínio  $\overline{B_p}$  exclui do gráfico pontos nos quais o vetor unitário normal (euclidiano) tem o esse comportamento, garantindo assim que a derivada de  $(\lambda_H^* \circ s)$  é finita ao longo do conjunto  $\overline{B_p}$ . Ainda no caso em que  $p \in \beta$  vejamos como obter uma

barreira por baixo. Considere a seguinte função:

$$v_{p,t}^- : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$$

dada por:

$$v_{p,t}^-(q) = 0 \quad \forall q \in \bar{\Omega} \quad \forall t \in [0, 1]$$

Como o gráfico de  $v_{p,t}^-$  tem curvatura média hiperbólica constante  $H = 0$ ,  $v_{p,t}^-|_{\gamma} = v_{p,t}^-|_{\beta} = 0 \leq th$  então, novamente pelo Princípio da Comparação para Operadores Quasilineares,  $v_{p,t}^- \leq u$  para toda  $u$  solução ( $P^{tH}$ ). Agora considere  $p \in \gamma$  e vejamos como obter uma barreira por cima com relação à curva  $\gamma$ . Seja  $C_p^r$  um círculo de raio  $r$  contido na região limitada cuja fronteira é  $\gamma$  e tangente a  $\gamma$  em  $p$ . Denote por  $\bar{p}$  o centro de  $C_p^r$ . Considere a função

$$(\tilde{\lambda}_{H,r,t} \circ s) : B_{\bar{p}} \mapsto \mathbb{R}$$

dada por

$$(\tilde{\lambda}_{H,r,t} \circ s)(q) = \tilde{\lambda}_{H,r,t}(s(q)) = -\lambda_{H,r_0}(s(q)) + \lambda_{H,r_0}(r) + th$$

onde  $s = s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p})$ ,  $B_{\bar{p}} = \{q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\} \mid r \leq d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) \leq \cosh^{-1}(\frac{-D}{2H})\}$ ,

$$r_0 = \cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right)$$

e

$$\lambda_{H,r_0}(s) = \int_{r_0}^s \frac{D + 2H \cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2 t - (D + 2H \cosh(t))^2}} dt.$$

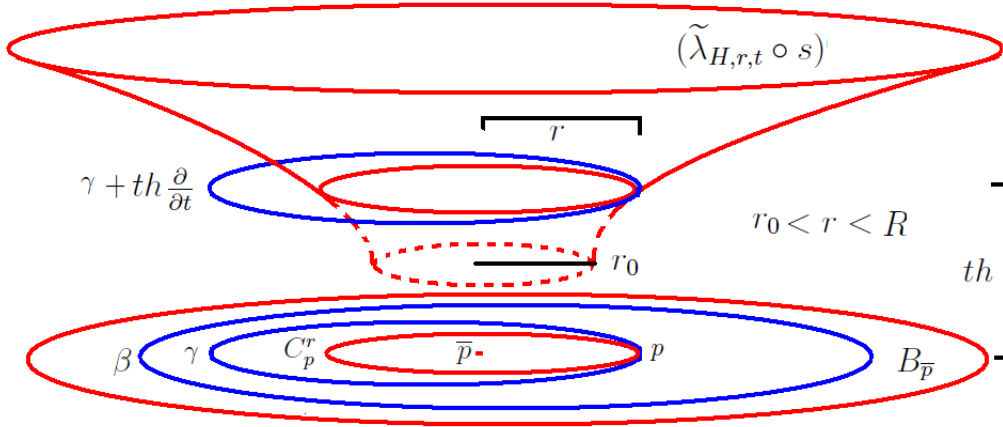
Como  $\text{diam}(\beta) \leq r + \cosh^{-1}(\frac{-D}{2H})$  temos que  $\bar{\Omega} \subset \bar{B}_{\bar{p}}, \forall p \in \gamma$ . Além disso

$$\tilde{\lambda}_{H,r,t}(s(p)) = -\lambda_{H,r_0}(s(p)) + \lambda_{H,r_0}(r) + th = -\lambda_{H,r_0}(r) + \lambda_{H,r_0}(r) + th = th.$$

Note que para  $q \in \bar{\Omega}$  temos  $s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) \geq r$  e assim

$$\tilde{\lambda}_{H,r,t}(s(q))|_{\bar{\Omega}} = \underbrace{-\lambda_{H,r_0}(s(q)) + \lambda_{H,r_0}(r)}_{\geq 0} + th \geq th \geq 0,$$

em particular  $(\tilde{\lambda}_{H,r,t} \circ s)|_{\gamma} \geq th$  e  $(\tilde{\lambda}_{H,r,t} \circ s)|_{\beta} \geq 0$ .



Defina a seguinte função:

$$w_{p,t}^+ = (\tilde{\lambda}_{H,r,t} \circ s)|_{\bar{\Omega}} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}.$$

Usando o mesmo argumento aplicado anteriormente obtemos  $w_{p,t}^+ \geq u_t$  para toda  $u_t$  solução de  $(P^{tH})$ . Ainda no caso em que  $p \in \gamma$  vejamos como obter uma barreira por baixo. Sejam  $C_p^r$  e  $\bar{p}$  definidos acima. Considere a função

$$(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s) : B_{\bar{p}} \mapsto \mathbb{R}$$

dada por

$$(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)(q) = \tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(q)) = -\lambda_{0,r_0}(s(q)) + \lambda_{0,r_0}(r) + th$$

onde  $s = s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p})$ ,  $B_{\bar{p}} = \{q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\} \mid d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) \geq r\}$ ,



$$r_0 = \cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right)$$

e

$$\lambda_{0,r_0}(s) = \int_{r_0}^s \frac{\sinh r_0}{\sqrt{\sinh^2 t - \sinh^2 r_0}} dt.$$

Observe que  $\bar{\Omega} \subset B_{\bar{p}}$  e que

$$\tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(p)) = -\lambda_{0,r_0}(s(p)) + \lambda_{0,r_0}(r) + th$$

isto é

$$\tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(p)) = -\lambda_{0,r_0}(r) + \lambda_{0,r_0}(r) + th = th.$$

Além disso, segue do Teorema 3.1 que

$$\lambda_{0,r_0} \left( r + \frac{d}{2} \right) - \lambda_{0,r_0}(r) \geq \frac{d}{2} \frac{\sinh r_0}{\sinh \left( r + \frac{d}{2} \right)}.$$

Substituindo  $r_0$  por  $\cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right)$  obtemos

$$\frac{d}{2} \frac{\sinh r_0}{\sinh \left( r + \frac{d}{2} \right)} = \frac{d \left( \sinh \left( \cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right) \right) \right)}{2 \sinh \left( r + \frac{d}{2} \right)}.$$

Por hipótese

$$\frac{d \left( \sinh \left( \cosh^{-1} \left( \frac{2DH + \sqrt{1 - 4H^2 + D^2}}{1 - 4H^2} \right) \right) \right)}{2 \sinh \left( r + \frac{d}{2} \right)} \geq h \geq th$$

logo

$$\lambda_{0,r_0} \left( r + \frac{d}{2} \right) - \lambda_{0,r_0}(r) - th \geq 0.$$

Portanto

$$-\lambda_{0,r_0} \left( r + \frac{d}{2} \right) + \lambda_{0,r_0}(r) + th \leq 0,$$

isto é,  $\tilde{\lambda}_{0,r,t}(s(q)) \leq 0$  com  $s(q) = d_{\mathbb{H}}(q, \bar{p}) = (r + \frac{d}{2})$  e, sendo assim,

$$\{graf(\tilde{\lambda}_{0,r,t})\} \cap \{\mathbb{H}^2 \times \{0\}\} = \tilde{C},$$

onde  $\tilde{C}$  representa um círculo de raio  $l$  com  $l \leq r + (d/2)$  e centro  $\bar{p}$ . Levando em consideração o raio  $l$ , a posição de  $\bar{p}$  e a distância  $d$  entre  $\gamma$  e  $\beta$  temos que  $\tilde{C}$  está contido no interior da região limitada cuja fronteira é  $\beta$ . Observe que  $(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)|_{\gamma} \leq th$  e  $(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)|_{\beta} < 0$  pois a função  $(\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)$  é decrescente. O gráfico desta função tem o mesmo aspecto daquele considerado no resultado anterior. Defina a função

$$v_{p,t}^+ = (\tilde{\lambda}_{0,r,t} \circ s)|_{\bar{\Omega}} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}.$$

Note que  $v_{p,t}^+(p) = \tilde{\lambda}_{0,r}(s(p)) = th$ . Pelo fato do gráfico de  $v_{p,t}^+$  ter curvatura média constante  $H = 0$  e pelo comportamento da função  $v_{p,t}^+$  em  $\partial\Omega$  temos que  $v_{p,t}^+ \leq u_t$  para toda  $u_t$  solução de  $(P^{tH})$ . A constante  $M$  que fornece a estimativa procurada com relação à norma do gradiente das barreiras em  $p \in \partial\Omega$  também é obtida como no Teorema anterior, encerrando assim esta demonstração.

### 3.3 Exemplo

Do fato da métrica de  $\mathbb{H}^2$  ser conforme à métrica euclidiana existe uma relação especial entre suas conexões, vejamos que relação é essa. Se indicarmos por  $\bar{g}$  a métrica hiperbólica, por  $g$  a métrica euclidiana temos a seguinte relação:

$$\bar{g} = \frac{1}{F}g$$

que nos leva a:

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, Z \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{F} \langle \bar{D}_Y X, Z \rangle + \frac{1}{F^{\frac{3}{2}}} \{ \langle p, Y \rangle \langle Z, X \rangle + \langle p, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle p, Z \rangle \langle X, Y \rangle \}$$

onde  $F = F(x, y) = \frac{(1-(x^2+y^2))^2}{4}$ ,  $\bar{D}$  é a derivação de campos no sentido euclidiano,  $\langle, \rangle$  indica o produto interno euclidiano e os campos  $X, Y, Z$  e suas derivadas são calculados no ponto  $p$ . Considere uma curva diferenciável  $\gamma$  contida em  $\mathbb{H}^2$ . Através da relação acima podemos obter uma expressão para a curvatura geodésica hiperbólica de  $\gamma$  por meio de sua curvatura euclidiana. Mais precisamente temos:

$$k_{\bar{g}} = \sqrt{F}k_g - F d\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right)(\vec{n})$$

onde  $d\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right)(\vec{n}) = \langle \nabla \frac{1}{\sqrt{F}}, n \rangle = \langle \gamma, n \rangle$  indica a derivada da função  $\frac{1}{\sqrt{F}}$  na direção do vetor  $\vec{n}$  normal unitário interior a  $\gamma$  no sentido euclidiano ao longo da curva  $\gamma$ . Usando a expressão acima para um círculo euclidiano centrado na origem de raio  $l$  obtemos:

$$k_{\bar{g}}(C_l) = \sqrt{F(C_l)} \left(\frac{1}{l}\right) - (-r) = \frac{1-l^2}{2l} + l = \frac{1+l^2}{2l}$$

Lembrando que a relação entre o raio euclidiano  $l$  e o raio hiperbólico  $\varrho$  é  $\varrho = 2 \arg \tanh(l)$ , ou seja  $l = \tanh \frac{\varrho}{2}$ , temos que a curvatura hiperbólica de um círculo hiperbólico de centro na origem de  $\mathbb{H}^2$  e raio  $\varrho$  é

$$k_{\bar{g}}(C_{\varrho}) = \frac{1 + (\tanh \frac{\varrho}{2})^2}{2 \tanh \frac{\varrho}{2}} = \coth(\varrho).$$

Sejam  $r > 0$  e  $D < -1$  satisfazendo:

$$\ln(-D) < r < \cosh^{-1}(-D) = R.$$

Considere  $\delta$  suficientemente pequeno tal que  $2r < 2r + \delta < R + r$  e defina  $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{H}^2$  por

$$\gamma(t) = \left( \tanh\left(\frac{r}{2} + \frac{\delta}{4}\right) \cos(t), \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \sin(t) \right)$$

Note que a curva  $\gamma$  é uma elipse euclidiana contida em  $\mathbb{H}^2$  de centro  $(0, 0)$  com eixo maior e eixo menor de medida euclidiana  $\tanh(\frac{r}{2} + \frac{\delta}{4})$  e  $\tanh(\frac{r}{2})$  respectivamente. Além disso existe um círculo hiperbólico centrado em  $(0, 0)$  de raio hiperbólico  $r$  contido na região limitada cuja fronteira é  $\gamma$  e tangente a mesma curva nos pontos  $(0, \pm r)$ . Como as geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  partindo de  $(0, 0)$  são raios então o diâmetro hiperbólico de  $\gamma$  é  $2r + \delta$ . Vejamos como obter a curvatura hiperbólica de  $\gamma$  através de sua curvatura euclidiana. Para simplificar a notação usamos:

$$A = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) < 1$$

$$A + \bar{\delta} = \tanh\left(\frac{r}{2} + \frac{\delta}{4}\right) < 1$$

com  $\bar{\delta}$  suficientemente pequeno. Nessas condições, lembramos que a curvatura euclidiana  $k_g$  de  $\gamma$  com relação ao campo unitário normal interior  $n$  é dada por

$$k_g(\gamma) = \frac{A(A + \bar{\delta})}{[(A + \bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

Aplicando essa expressão em  $k_{\bar{g}}$  obtemos:

$$k_{\bar{g}}(\gamma) = \frac{1 - |\gamma|^2}{2} k_g(\gamma) - \langle \gamma, n \rangle,$$

$$= \frac{1-|\gamma|^2}{2} \frac{A(A+\bar{\delta})}{[(A+\bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{3}{2}}} - \langle \gamma, n \rangle$$

e como

$$\langle \gamma, n \rangle = \frac{-A(A+\bar{\delta})}{[(A+\bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{1}{2}}}$$

tem-se

$$k_{\bar{g}}(\gamma) = \frac{1-|\gamma|^2}{2} \frac{A(A+\bar{\delta})}{[(A+\bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{A(A+\bar{\delta})}{[(A+\bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Aplicando as coordenadas de  $\gamma$  em  $(1-|\gamma|^2)$  obtemos

$$\frac{(1 - [(A+\bar{\delta})^2 \cos^2(t) + A^2 \sin^2(t)])(A+\bar{\delta})A}{2[(A+\bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{A(A+\bar{\delta})}{[(A+\bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{1}{2}}}$$

e desenvolvendo o produto dentro do colchete chegamos a

$$k_{\bar{g}}(\gamma) = \frac{[1 - A^2 \cos^2(t) - 2A\bar{\delta} \cos^2(t) - \bar{\delta}^2 \cos^2(t) - A^2 \sin^2(t)](A+\bar{\delta})A}{2[(A+\bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{A(A+\bar{\delta})}{[(A+\bar{\delta})^2 \sin^2(t) + A^2 \cos^2(t)]^{\frac{1}{2}}}$$

cuja simplificação usando  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$  nos dá

$$k_{\bar{g}}(\gamma) = \frac{[1 - A^2 - 2A\bar{\delta} \cos^2(t) - \bar{\delta}^2 \cos^2(t)](A+\bar{\delta})A}{2[1 + 2A\bar{\delta} \sin^2(t) + \bar{\delta}^2 \sin^2(t)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{A(A+\bar{\delta})}{[1 + 2A\bar{\delta} \sin^2(t) + \bar{\delta}^2 \sin^2(t)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Sendo assim

$$k_{\bar{g}}(\gamma) \leq \frac{[1 - A^2](A + \bar{\delta})A}{2} + (A + \bar{\delta})A$$

e como  $0 < (A + \bar{\delta}) < 1$  então

$$k_{\bar{g}}(\gamma) \leq \frac{[1 - A^2]A}{2} + A = \frac{[1 - A^2]A^2}{2A} + A.$$

Mas  $A^2 < 1$  logo

$$k_{\bar{g}}(\gamma) \leq \frac{[1 - A^2]}{2A} + A = \frac{[1 + A^2]}{2A}$$

e, substituindo  $A$  por  $\tanh(\frac{r}{2})$ , temos

$$k_{\bar{g}}(\gamma) \leq \frac{[1 + (\tanh(\frac{r}{2}))^2]}{2(\tanh(\frac{r}{2}))} = \coth(r)$$

Sendo assim a curvatura hiperbólica de  $\gamma$  é menor ou igual a curvatura do círculo de centro  $(0, 0)$  e raio hiperbólico  $r$  em todos os pontos de  $\gamma$ , o que nos permite afirmar que a curva  $\gamma$  definida acima satisfaz a condição do círculo interior de raio  $r$ . Além disso vimos que o diâmetro de  $\gamma$  é menor que  $r + R$ . Para obter um exemplo da curva  $\beta$  do Teorema 3.1 considere um círculo hiperbólico centrado em  $(0, 0)$  de raio  $\frac{R+r}{2}$ . No caso das curvas do Teorema 3.2 o raciocínio é análogo.

## Referências

- [1] Aiolfi, A. ; Fusieger, P. - *Some Existence results about Radial Graphs with Boundary in Parallel Planes*, Annals of Global Analysis and Geometry **34** (2008) pp.415-430.
- [2] Aiolfi, A. ; Fusieger, P. e Ripoll, J. - *A Note on Doubly Connected Surfaces of Constant Mean Curvature with Prescribed Boundary*, Annals of Global Analysis and Geometry, **29** (2006) pp. 145-156.
- [3] Barbosa, A.- *Gráficos Verticais Mínimos Compactos com Bordo Não Conexo em  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$*  Tese de doutorado, **UFRJ** (2010).
- [4] Citti, G. ; Senni, C. - *Constant Mean Curvature Graphs on Exterior Domains of the Hyperbolic Plane*, Disponível em <http://arxiv.org/abs/1103.4564v2> (2011). Acesso em 29/05/2012.
- [5] Dajczer, M. ; Ripoll, J. - *An Extension of a Theorem of Serrin to Graphs in Warped Products*, Journal of Geometric Analysis, **15** (2005) No2, pp. 193-205.
- [6] Do Carmo, M. - *Geometria Riemanniana* Editora do IMPA, Rio de Janeiro, (1988) Segunda Edição.
- [7] Elbert, M.; Nelli, B. e Sa Earp, R. - *Existence of Vertical Ends of Mean Curvature  $\frac{1}{2}$  in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Trans. Amer. Mat. Soc. **364** (2012) pp. 1179-1191.
- [8] Espírito Santo, N. ; Ripoll, J. - *Some Existence and Nonexistence Theorems for Compact Graphs of Constant Mean Curvature with Boundary in Parallel Planes*, J. Geom. Analysis, **11** (2001) No4, pp. 601-617.

- [9] Fusieger, P. ; Ripoll J. - *Radial Graphs of Constant Mean Curvature and Doubly Connected Minimal Surfaces with Prescribed Boundary*, Annals of Global Analysis and Geometry, **23** (2003) pp. 373-400.
- [10] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [11] Hauswirth, L. ; Rosenberg, H. e Spruck, J. - *Infinite Boundary Value Problems For Constant Mean Curvature Graphs in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , American Journal of Mathematics, **131**, (2009) No 1, pp. 195-226
- [12] Mathias, C.- *Gráficos Parabólicos de Curvatura Média Constante em  $\mathbb{H}^3$  com bordo Prescrito satisfazendo a Condição de Declividade Limitada* Tese de doutorado, **UFRGS** (2009)
- [13] Meeks III, W. ; White, B. - *Minimal Surfaces Bounded by Convex Curves in Parallel Planes*, Comment Math. (1991), pp. 265-278.
- [14] Nelli, B. ; Sa Earp, R. ; Santos, W. e Toubiana, E. - *Uniqueness of  $\mathbb{H}$  - Surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $|H| \leq \frac{1}{2}$ , with Boundary One or Two Parallel Horizontal Circles*, Annals of Global Analysis and Geometry, **233** (2008) No4 pp. 307-321.
- [15] Ripoll, J.- *Um Guia para Resolver Equações Diferenciais Parciais Elípticas de Segunda Ordem em Dimensão Dois*, preprint, (2003).
- [16] Ros, A. ; Rosenberg, H. - *Constant Mean Curvature Surfaces in a Half-Space of  $\mathbb{R}^3$  with boundary in the boundary of the Half Space*, Journal of Differential Geometry, **44** (1996) No4, pp. 807-817.
- [17] Sa Earp, R. - *Parabolic and Hiperbolic Screw Motion Surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Journal of the Australian Math. Society, **85** (2008) pp. 113-143.



- [18] Sa Earp, R. ; Toubiana, E. - *An Asymptotic Theorem for Minimal Surfaces and Existence Results for Minimal Graphs in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Mathematische Annalen **342**, (2008) pp.309-331.
- [19] Sa Earp, R. ; Toubiana, E. - *Screw Motion Surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , Illinois Jour. of Math. **49** No4 (2005) pp. 1323-1362.
- [20] Shiffman, M. - *On Surfaces of Stationary Area Bounded by two Circles, or Convex Curves, in Parallel Planes*, Ann. of Math. (1956), pp. 77-90.