UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

CARINE MURARO BERTI

AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DOS QUADRILÁTEROS

Porto Alegre
2012

CARINE MURARO BERTI

AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DOS QUADRILÁTEROS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2012

CARINE MURARO BERTI

AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DOS QUADRILÁTEROS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Aprovado em ....

Banca Examinadora

....

Profº. Drº. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS

....

Profª. Drª. Maria Alice Gravina

INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS

Porto Alegre

2012

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, com muito carinho, agradecer por todos os encontros em que orientou e acalmou minha ansiedade, dúvidas e preocupações.

Aos professores Marcus Vinícius de Azevedo Basso e Maria Alice Gravina por aceitaram compor a banca examinadora e por acompanharem outros momentos da minha trajetória acadêmica, que são importantes pedacinhos do meu "ser professora".

Aos educadores e funcionários da Escola Estadual de Ensino Fundamental Rio de Janeiro pelo importante espaço e apoio para a realização desse trabalho, em especial à Profª Mara Regina S. Gonçalves e à diretora Cárin da Silva Ferreira.

Aos colegas pelo companheirismo. Dividimos angústias, vibrações, alegrias e tristezas. Em especial, a colega Francine Dahm que sempre compartilhou cada momento.

À minha família. À minha mãe Salete, ao meu pai Orli e à minha irmã Jéssica, pelo incentivo, carinho, amor e compreensão.

Ao meu marido Vagner, por cada palavra de incentivo, de carinho e pela oportunidade dessa conquista acadêmica. Sou muita grata por todo companheirismo e apoio em cada decisão.

RESUMO

Este trabalho consiste em uma proposta para o estudo da Geometria Euclidiana, especificamente dos quadriláteros, com alunos do Ensino Fundamental, utilizando as construções geométricas com régua e compasso e o software GeoGebra. A fundamentação teórica utilizada para o desenvolvimento da prática baseia-se na teoria de van Hiele que permite analisar a aprendizagem e a formação de conceitos geométricos dos sujeitos participantes, de acordo com os níveis de compreensão e as fases de aprendizagem. Apresentamos um breve estudo sobre o processo histórico do ensino de Geometria e do Desenho Geométrico, assim como, alguns episódios que contribuíram para o seu gradual abandono. Ainda, acrescentamos algumas observações a respeito das orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998). Por último, descrevemos a prática desenvolvida com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, da Escola Estadual de Ensino Fundamental Rio de Janeiro, e a análise de algumas atividades envolvendo as construções geométricas dos quadriláteros. Com a fundamentação teórica utilizada e as análises dos encontros, observamos nos alunos um avanço do 1º Nível para o 2º Nível de van Hiele, pois foi possível perceber que os alunos analisavam e identificavam as figuras geométricas pelas suas propriedades. Identificamos aspectos positivos ao aliar materiais concretos com um recurso tecnológico: a régua e o compasso por aprimorar a coordenação motora fina e os traçados do desenho e o software GeoGebra por proporcionar dinamismo às construções geométricas.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Construções Geométricas. Desenho Geométrico. Teoria de van Hiele. Quadriláteros.

ABSTRACT

This paper consists in a proposition to the study of Euclidian Geometry, specifically the study of the quadrilateral, with Elementary School students, using geometrical constructions with ruler and compass and the GeoGebra software. The theoretical basis used in the development of practice is based on the theory of van Hiele, which allows the analysis of learning and of the construction of geometrical concepts by the participating subjects, according to comprehension levels and learning phases. We present a brief analysis of the historical process of Geometry and Geometric Design teaching, as well as some episodes that contributed for its gradual abandonment. Furthermore, we add a few observations regarding the orientations proposed by the National Curricular Parameters (1998). Finally, we describe the practice developed with 8th grade students in Elementary School attending Escola Estadual de Ensino Fundamental Rio de Janeiro and the analysis of some activities involving geometric construction of quadrilaterals. With the use of the theoretical basis and the analysis of the meetings, we noted that the students advanced from the 1st Level to the 2nd Level of van Hiele, since it was possible to realize that the students analyzed and identified geometrical figures by its properties. We identified positive aspects in the alliance of concrete materials with a technologic resource: the ruler and the compass by improving fine motor coordination and the traces of the drawing, and the GeoGebra software by giving dynamism to geometrical constructions.

Key-words: Geometry Teaching. Geometric Construction. Geometric Design. Van Hiele Theory. Quadrilaterals.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Relembrando os tempos de escola e colocando-me na posição de aluna, faço minhas reflexões sobre o ensino de Geometria, que recaem em forma de perguntas. Qual o aluno que não fez a dobradura de um chapéu de jornal para simbolizar e homenagear o Dia do Soldado? E a Bandeira do Brasil, com o desenho das figuras geométricas? Lembro de não dar tanto valor para o desenho, o importante era fazer os traços o mais perfeito possível para reproduzir a Bandeira que víamos nos livros para receber um elogio da professora pelo capricho. E aquele aviãozinho voando pela sala de aula ou na hora do recreio? Brincadeira de menino, mas eu gostava e prestava atenção nas dobras que se faziam e se diziam serem as mais eficazes para o aviãozinho voar ainda mais longe. Sem falar nas inúmeras pipas com os amigos da rua. E as amarelinhas para ver quem chegava primeiro no céu? E tantos desenhos nas últimas folhas do caderno, colocando a criatividade e a imaginação na ponta de um lápis? Por trás de todos esses objetos e desenhos encontram-se as figuras geométricas usadas de maneira inocente e lúdica. Construindo a pipa, tem-se a armação das varetas paralelas e perpendiculares para sustentar o papel ou o plástico. Desenhar a amarelinha nos recreios para brincar com os colegas envolvia a utilização de quadrados e retângulos. Mesmo tendo esse contato, não necessariamente com essas situações descritas acima, mas também com outras que envolvessem implicitamente conhecimentos geométricos, por que os alunos apresentam dificuldades, em sala de aula, quando o professor trabalha com os conceitos de Geometria?

Não participei, como aluna, das aulas de Desenho Geométrico que, em outra época, já foi disciplina obrigatória do currículo nas escolas. Segundo Zuin (2002), quando isso aconteceu, de 1931 a 1971, ou seja, por quarenta anos consecutivos, os professores ensinavam aos seus alunos conceitos e propriedades geométricas, usando a régua e o compasso e, assim, a Geometria teórica era colocada em prática com as construções geométricas. A régua e o compasso passaram a ser instrumentos importantes na escola e na mochila dos alunos, contribuindo para precisão dos traçados e para a construção de figuras geométricas respeitando as propriedades e definições. Alguns anos depois, a régua e o compasso foram deixados de lado, uma vez que o Desenho Geométrico não é mais uma disciplina obrigatória, em função da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1961 (ZUIN, 2002). Faltam explicações para entender as razões do abandono do Desenho Geométrico. Seriam os professores inseguros? A falta de tempo? O avanço tecnológico?

A escolha pela régua e compasso como material concreto e do software GeoGebra, como recurso tecnológico, para serem utilizados nas aulas de Geometria, com o objetivo de buscar estratégias para superar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, aliado a teoria de van Hiele, são os principais tópicos que nortearam o estudo do presente trabalho. A motivação para fazer o trabalho também foi inspirada pelas palavras de Nasser (1993),

> Muitos professores do curso secundário percebem que, em geral, os alunos sentem mais dificuldades em Geometria do que em outras áreas da Matemática. No Brasil, várias razões podem ser apontadas para esse problema: o enfoque Euclidiano adotado pelos livros-textos, muito teóricos, o número reduzido de aulas dedicadas à Geometria, aliado ao fato de a Geometria ser ensinada no final do ano letivo (7ª e 8 ª séries), e a ausência de manipulação de material concreto e de dispositivos que ressaltem o aspecto dinâmico da Geometria, tais como computador e vídeos [...] (NASSER, 1993, p.29).

E ainda, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998, p.15) recomendam que "a atividade matemática escolar não é 'olhar para coisas prontas e definitivas', mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade".

De fato, se a preocupação do educador é desenvolver o raciocínio lógico ou o raciocínio dedutivo, na prática, isso corresponde aos alunos compreenderem o que está escrito em seu caderno ou nos livros didáticos, ou seja, compreenderem as definições e as propriedades prontas e acabadas. Para isso, é necessário que o aluno tenha contato com procedimentos que justifiquem e demonstrem esses conhecimentos.

Outro ponto a destacar, que contribuiu para a motivação desse estudo, foi o primeiro contato que tive com régua e compasso e com a Geometria Dinâmica, que aconteceu no primeiro semestre do Curso de Licenciatura de Matemática da UFRGS, na disciplina de Geometria I. Sentia muita dificuldade em realizar as construções que eram solicitadas, sem contar com a falta de habilidade em lidar com o compasso. Até então, não tinha conhecimento que ensinar Geometria com régua e compasso fazia parte do conteúdo do Ensino Fundamental e Médio, sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), importante documento a ser considerado pelas escolas e pelos professores. Talvez, dessa ausência, justifica-se a minha dificuldade em organizar e fazer as primeiras construções geométricas que eram solicitadas no curso, mas que fizeram a diferença para entender determinados conceitos geométricos que até o momento não faziam sentido com a bagagem de conhecimento que trazia do Ensino Médio.

Alguns semestres se passaram e as práticas em salas de aula acontecidas durante a graduação, nas disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática e de Estágio em Educação Matemática, permitiram refletir sobre as dificuldades dos alunos em manusear a régua e o compasso, em visualizar as figuras geométricas e em atribuir as propriedades corretas aos objetos geométricos. Dessa maneira, a experiência que tinha vivenciado no início da graduação, refletia-se nesses alunos e despertaram a minha curiosidade e interesse em observar a reação dos mesmos, quando colocados numa situação que precisassem lidar com as construções geométricas. E a oportunidade surgiu com a escrita desse trabalho, permitindo estudar como o Desenho Geométrico auxiliaria os alunos para compreender melhor as definições e propriedades dos tipos de quadriláteros, utilizando o modelo de van Hiele, uma sequência didática adequada, os instrumentos régua e compasso e o software GeoGebra.

A abordagem da História da Matemática foi um processo relevante para o trabalho. Por isso, no Capítulo 1, tratamos sobre os aspectos históricos da Geometria, descrevendo um panorama geral do início do seu uso prático e de sua sistematização que, com o passar do tempo, fundamentou o ensino da Geometria utilizado até os dias de hoje. Buscam-se, também, fatos relacionados com as construções geométricas realizadas com a régua e o compasso, contemplando a compreensão e a construção dos conceitos e das propriedades geométricas, além de situar o momento em que o Desenho Geométrico é suprimido dos currículos escolares. Acrescentamos ainda a esse capítulo, os três problemas clássicos com régua e compasso.

Apresentamos como fundamentação teórica o modelo de van Hiele, descrito no Capítulo 2, para o ensino de Geometria, visando à aprendizagem das habilidades para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesse modelo, destacam-se cinco níveis de compreensão (a saber: 1º Nível ou Nível Básico ou Visualização; 2º Nível ou Nível de Análise; 3º Nível ou Nível de Dedução Informal; 4º Nível ou Nível de Dedução e 5º Nível ou Nível de Rigor), as características desses níveis e uma sequência de fases de aprendizagem que facilitam a passagem de um nível para o outro. Também nesse capítulo, com o uso do software GeoGebra, descrevemos um breve estudo sobre a Geometria Dinâmica.

Os Procedimentos Metodológicos serão abordados no Capítulo 3. Nele, estarão descritos o local e os sujeitos da pesquisa, bem como algumas atividades com a respectiva análise. A análise baseia-se na teoria de van Hiele, mais especificamente, nos níveis de compreensão e nas fases de aprendizagem. Além disso, refletiremos sobre alguns pontos positivos e negativos observados com a prática dos encontros.

Nas Considerações Finais, relacionamos o nível do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, de acordo com a teoria de van Hiele e com o subsídio da análise dos encontros, destacando a importância das construções geométricas para o ensino da Geometria Euclidiana.

2. ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, DA GEOMETRIA E DO DESENHO GEOMÉTRICO

Nas próximas seções, apresentaremos uma breve revisão sobre a situação atual do ensino de Matemática e, em particular, sobre o ensino de Geometria.

2.1. O ENSINO DE MATEMÁTICA

A palavra “Matemática”, para muitas pessoas, remete a traumas na escolarização. É motivo de reprovação nos anos escolares, nos vestibulares e em outros processos avaliativos e seletivos. Percebe-se certa resistência em querer estudar e aprender os conhecimentos dessa disciplina, talvez pelo desinteresse e desmotivação, falta de aptidão, ou ainda pela frequente necessidade de abstração no processo de aprendizagem dos conteúdos. O fato é que alunos reclamam da disciplina de Matemática, mas essa ciência se faz presente e necessária em diversas atividades da rotina dos indivíduos, seja na profissão, no entendimento dos valores da conta bancária, no controle do salário ou com as despesas mensais. Ou seja, trata-se de um conhecimento necessário e importante, útil para muitas situações do cotidiano. Contudo, ainda mostra-se num panorama problemático no que diz respeito a sua aprendizagem.

Diferente do que está escrito em alguns livros didáticos, o aluno pode se motivar em aprender quando estudar o processo de desenvolvimento que se fez necessário para a utilização de determinado conceito matemático. Talvez, compreender e estudar esse processo de construção de conceitos, fórmulas e propriedades matemáticas seja uma estratégia para tornar a aprendizagem dos conteúdos de Matemática mais interessante.

Normalmente, observa-se justamente o contrário: a apresentação de fórmulas e regras para que o aluno memorize-as, momentaneamente, para aplicar em exercícios de um trabalho avaliativo, prejudicando o entendimento e a compreensão do pensamento matemático envolvido nesse resultado final. Mas, cabe ao professor optar pelo ensino de uma Matemática que contribua para a formação de um aluno, capacitando-o em atribuir significados às suas atividades corriqueiras.

> [...] É inquestionável que a vida dos grandes matemáticos (como seres humanos) desperta grande curiosidade nos alunos e episódios ou anedotas a respeito podem ser, quando bem utilizados em sala de aula, de grande valor didático [...] (EVES, 1992, sp).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (1998) encontramos orientações para os professores sobre a importância da função da Educação na formação do aluno. Nos PCN (1998, p.5), observamos a necessidade de revisar os currículos escolares, "que orientam o trabalho cotidianamente realizado pelos professores e especialistas em educação no nosso país", merecendo comprometimento devido ao avanço das tecnologias e ao desenvolvimento científico, que interfere na inserção pelo mercado de trabalho. Ou seja, a escola precisa acompanhar os avanços da sociedade para que a formação do aluno tenha utilidade na sua vida cotidiana, mas para isso é preciso reformular o currículo, para que atenda esses objetivos.

Existe a preocupação em melhorar a qualidade do ensino de Matemática, assim como torná-la uma disciplina que não seja vista como condição de aprovação para o aluno. Por isso, o aluno precisa ter a oportunidade de participar, de maneira crítica e autônoma, para a construção da cidadania. Com esse propósito, a Matemática, segundo os PCN (1998), tem como objetivos destacar

> [...] a importância de o aluno valorizá-la como instrumento para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. [...] (PCN, 1998, p.15)

O que se traz nas discussões em Educação Matemática, sobre as orientações para superar os problemas de aprendizagem, decorrem de um processo histórico de reformas nos currículos, reformas educacionais e outros adventos.

2.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A HISTÓRIA DA GEOMETRIA

A Geometria passou por diferentes etapas: a Geometria subconsciente, a Geometria científica, a Geometria empírica ou experimental e a Geometria demonstrativa ou sistemática. Dessa maneira, abordaremos um pouco da História da Matemática relacionada à Geometria, para compreender como se desenvolveu o processo de construção desse conhecimento ao longo dos anos.

Para a palavra Geometria, atribui-se o significado de medição da terra. Isso tem relação com a Agrimensura, por parecer ser um dos primeiros serviços que relacionavam a técnica com a ciência, então chamada de Geometria. As primeiras considerações sobre a Geometria realizadas pelo ser humano são antigas. Eves (1992) menciona que sua origem parece ter surgido de observações feitas pelos homens, quando expostos em situações que contribuíam para o reconhecimento de configurações físicas, ao lidar com comparações de formas e de tamanhos. Esses acontecimentos são descobertas de uma Geometria subconsciente, pois são situações que fazem parte da vida das pessoas, de maneira circunstancial e depois, percebe-se, que são descobertas importantes e úteis para a Geometria.

A necessidade de lidar com fatos que envolviam ideias de distância favoreceram para que esse fosse um dos primeiros conceitos da Geometria a serem construídos. O conhecimento das figuras geométricas como o retângulo, quadrado e triângulo, resultou da utilidade em demarcar a terra. Para construir os muros e as casas, se fazia uso de conceitos de vertical, paralela e perpendicular. Os acontecimentos pelos quais os homens vivenciavam, obrigavam-nos a usar noções que, intuitivamente, hoje conhecemos como os conceitos geométricos. Mas é preciso compreender que todo um processo de construção foi preciso para se valorizar a Geometria e considerar como conhecimento matemático imprescindível (EVES, 1992). Por isso, envolver o aluno nessa situação, para que perceba a utilidade do ensino de Geometria, pode ser uma maneira de motivar esse estudo.

A passagem da Geometria subconsciente, tratando dos problemas geométricos concretos, para a Geometria científica, aconteceu no vale do rio Nilo, no Egito antigo. Por falta de informações, não há como citar o período em que isso aconteceu. Por Geometria científica podemos entender como sendo generalizações, concluídas a partir das inúmeras observações em situações que os seres humanos enfrentavam corriqueiramente, aplicando-as quando se tratava de um assunto específico.

> A geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório, alguns corretos e alguns apenas aproximados, referentes a áreas, volumes e relações entre várias figuras sugeridas por objetos físicos (EVES, 1992, p.3).

De acordo com Pavanello (1989), algumas comunidades, por estarem localizadas perto dos rios, tiveram um desenvolvimento maior na agricultura, porque podiam aproveitar as suas águas e construir canais de irrigação para aumentar a plantação. Isso ocorreu, principalmente, nos rios Tigres, Eufrates e Nilo. Esse desenvolvimento, segundo Pavanello (1989, p.23), contribuiu para “a cooperação dos seus membros na construção das obras”, como também para “o aparecimento de funções específicas” e a “elaboração de conhecimentos e técnicas” para solucionar os problemas surgidos na sociedade. E, assim, esse aprimoramento na agricultura contribuiu para o desenvolvimento da Geometria empírica nos povos da Mesopotâmia e do Egito.

Algumas tábulas de argila cozida, encontradas por cerca do ano de 3000 a. C, revelaram as mais remotas informações das atividades dos indivíduos sobre a Geometria.

Também, foram encontradas tábulas cuneiformes babilônicas na época do rei Hammurabi. Dos dados dessas tábulas, percebemos que o uso da Geometria da Babilônia antiga estava fortemente vinculado com a prática da mensuração. As regras para calcular áreas e volumes de certas figuras geométricas já eram usadas, assim como já era conhecido o teorema de Pitágoras (EVES, 1992).

Nos papiros - textos matemáticos que possuem problemas - de Moscou e Rhind, encontramos, segundo Eves (1992), informações sobre a Geometria que os antigos egípcios utilizavam e conheciam.

Eves (1992) cita que o poder da Babilônia e do Egito sobre a Geometria regrediu com as mudanças econômicas e políticas e, com isso, os gregos passaram a influenciar o seu desenvolvimento, passando da Geometria empírica ou experimental para a Geometria demonstrativa ou sistemática. Os gregos defendiam que os conhecimentos geométricos não deveriam ser estabelecidos pelos procedimentos empíricos, pela intuição e experimentação, mas sim pelo raciocínio dedutivo. A diferença entre a Geometria babilônica e egípcia para a grega era que essa não possuía uma fonte principal, sendo o Sumário eudemiano de Proclus, o mais primitivo, abordando a evolução da Geometria grega até os tempos de Euclides.

Euclides foi um dos gregos que mais contribuiu para o avanço da Geometria, com a publicação do seu livro Elementos (300 a.C.), que utilizava “a formulação do modelo de axiomática material e a insistência em que a geometria fosse sistematizada de acordo com esse modelo” (EVES, 1992, p.10).

> Nos três primeiros postulados dos *Elementos*, Euclides enuncia as três ‘construções’ permitidas em geometria: (1) traçar uma reta por dois pontos; (2) prolongar uma reta limitada continuamente segundo uma reta; (3) descrever um círculo com qualquer centro e qualquer distância. [...] A restrição de que essas construções devem ser realizadas apenas com o uso de uma régua sem escalas e um compasso tem tradicionalmente sido atribuída a Platão (*c.* 390 a.C.) (RETZ ; KEIHN, 1992, p.29).

A régua utilizada não possuía graduação e o compasso da época era dobradiço, isto é, ao retirar uma das suas pontas do papel, o compasso se fechava, não permitindo transportar a medida de um segmento de reta. Mas esse compasso dobradiço e a régua sem graduação são equivalentes ao compasso e régua atuais (RETZ; KEIHN, 1992).

Nem todas as construções geométricas utilizando régua e compasso foram possíveis de serem resolvidas e ficaram conhecidas como os três famosos problemas da antiguidade (RETZ; KEIHN, 1992). Um dos problemas tratava-se da duplicação do cubo, em que o objetivo era “encontrar uma construção geométrica da aresta de um cubo cujo volume fosse o dobro do de um cubo dado” (ANDERSON, 1992b, p.34). Outro problema consistia na trissecção de um ângulo, ou seja, dividir um ângulo qualquer em três partes iguais (HABEGGER, 1992). E, por último, o problema da quadratura do círculo, que "trata-se de construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado" (ANDERSON, 1992a, p.39).

Utilizando somente régua e compasso não foi possível resolver os três famosos problemas da antiguidade. Para isso, os gregos consideraram outros meios para tentar solucionar esses problemas e, com isso, conseguiram resolver. Também fizeram novas descobertas, como as secções cônicas e curvas como a conchóide e a quadratriz (RETZ; KEIHN, 1992).

2.3. O ENSINO E O ABANDONO DA GEOMETRIA NO BRASIL

Quando os portugueses chegaram ao Brasil, o ensino foi dominado pelos jesuítas. Com a independência, em 1640, da Espanha, D. João IV preocupou-se com a segurança do Brasil. Por isso, em 1699, criou a chamada *Aula de Fortificações*, no Rio de Janeiro, com o interesse de oferecer aos alunos uma preparação para defender o país de possíveis invasões, ensinando-os a desenhar e a construírem fortificações. Segundo Valente (apud PONDE, 2007), em 1710, essa aula ainda não tinha começado, pois faltavam os materiais necessários, como os livros, os compassos e outros instrumentos. Com isso, atribuiu-se o início do ensino de Geometria no Brasil às necessidades da guerra.

Em 1738, com a Ordem Régia, todo militar precisava concluir a *Aula de Artilharia e Fortificações*, que tinha como professor José Fernandes Pinto Alpoim. Alpoim escreveu dois livros, que foram os primeiros a serem escritos no Brasil, em se tratando de livros didáticos.

O livro *Exame de Artilheiros* de 1744 possuía três capítulos: Aritmética, Geometria e Artilharia. Para Valente (2007, p.54), a Geometria era a área de estudo que mais interessava aos artilheiros, em que era ensinado o "graduar uma *esquadra,* construir um *nível* e um *petipé.* Para graduar a *esquadra* era preciso saber manusear um compasso e utilizar os conceitos de ponto, linha, perpendicular, paralelas e ângulos já aprendidos. É interessante notar que, no livro de Alpoim, faziam-se referências ao uso das construções geométricas.

O segundo livro, com o título de *Exame de Bombeiros*, impresso em 1748, organizava-se em dez Tratados que são capítulos, sendo trabalhados, nos dois primeiros, Geometria e Trigonometria. A Geometria abordava os conceitos fundamentais retomados do primeiro livro, *Exame de Artilheiros*, mas o texto se apresentava, segundo Valente (2007), mais aprofundado e seguindo uma maior preocupação com o rigor. Nesse livro, os conteúdos estudados correspondem aos conteúdos atuais do Ensino Médio.

Em 1767, a *Aula de Fortificações* é substituída pela *Aula do Regimento de Artilharia* do Rio de Janeiro que, em 1774, passa a ser chamada de *Aula Militar do Regimento de Artilharia* do Rio de Janeiro por incorporar conhecimentos da Arquitetura Militar. Em 1792, estabeleceu-se no Rio de Janeiro a *Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho* que se desmembra, no ano de 1795, em *Academia de Aritmética, Geometria Plana, Fortificação, Desenho e Língua Francesa*.

Juntamente com a vinda da Corte Portuguesa para o Brasil, veio também a *Academia Real dos Guardas-Marinha* e criou-se, em 1810, a *Academia Real Militar*. Com as Academias Real Militar, constituindo-se depois no Ensino Secundário, e dos Guardas-Marinha, que se constituiu no Ensino Superior, tinha-se a organização dos conteúdos de matemática escolar secundária.

O Ensino Primário gratuito foi estabelecido com a Lei de 15 de novembro de 1827 por D. Pedro I. Cabia aos professores ensinarem aos alunos a escreverem, lerem e contarem.

> [...] Baseada no trabalho de Condorcet, a proposta para o ensino da matemática na primeira escolarização, mencionava que os alunos no primeiro ano deveriam aprender o sistema de numeração, no segundo as quatro operações da aritmética e as 'primeiras noções de geometria, particularmente as que forem necessárias à medição dos terrenos' e, além disso, haveria necessidade de 'exercitar o menino em traçar figuras já à mão, já com compasso e régua' [...] (VALENTE, 2007, p. 111).

No entanto, surgiram debates na Câmara, para mudar o que deveria ser ensinado, sendo sugerido o trabalho com a solução prática dos problemas que envolviam a Geometria elementar, destacando-se as construções geométricas com a régua e o compasso e, que hoje, não se faz tanta referência e incentivo. Porém, o trabalho com noções de Geometria não passou a ser estudado no Ensino Primário.

Outros debates se evidenciaram sobre o que deveria ser estudado em cada ensino escolar. Era no Ensino Secundário, ou seja, um curso preparatório para o Ensino Superior, que o ensino de Geometria era estudado, pois por Valente (2007), os professores do Primário não tinham preparação, além de ser um conhecimento que não era exigido do aluno para ingressar numa instituição de Ensino Secundário.

Para definir os conteúdos do Ensino Secundário, precisou-se de um longo período. Foi, em 1837, com a criação do Imperial Colégio de D. Pedro II que se estabeleceu a organização dos conteúdos a serem estudados, servindo de modelo para o Ensino Secundário de todo país. A Tabela 1 mostra como se organizou a divisão:

Tabela 1 – Grade da disposição da carga horária semanal para as matemáticas

	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano	7º ano	8º ano
Aritmética	5	5	1					
Geometria				2	2			
Álgebra						5		
Matemática							6	3

Fonte: Valente, 2007, p. 118

Comparando a quantidade da carga horária, percebemos que onze períodos semanais eram destinados ao estudo da Aritmética e quatro para a Geometria. Mesmo levando em consideração o fato de a primeira ser estudada nos primeiros três anos e a segunda nos dois próximos anos do Ensino Secundário, há uma diferença considerável entre os períodos semanais destinados ao ensino aritmético e geométrico. Resta-nos refletir se nessa época a Geometria já era menos importante para ser aprendida do que as outras áreas de estudo.

Valente (2007) nos conta que essa configuração da grade de horários, em 1841, sofreu mudanças, em que a ordem de estudo dos conteúdos passou a centralizar-se em Aritmética, Álgebra e, por último, Geometria. É interessante observar que a Geometria escolar foi destinada para o final dos estudos nos livros didáticos e se tornava um conteúdo ensinado cada vez mais de maneira algébrica. Poderíamos dizer que dessa decisão, temos como consequência, uma Geometria relegada aos últimos capítulos nos livros didáticos, como se observa atualmente?

Independente de como tenha se iniciado o ensino da Geometria no Brasil, sua importância ora foi relegada à formação de artilheiros, militares e engenheiros, ora para a preparação dos alunos para ingressar no Ensino Superior. Houve momentos em que se tinha a preocupação em formar cidadãos, para fazer o uso da Geometria nas atividades cotidianas e outros, meramente para uma formação de interesse intelectual. Atualmente, encontramos nos PCN (1998) contribuições para o ensino de Geometria, ao destacar a sua importância no "currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (PCN, 1998, p.51)".

A Matemática se concentra em três grandes áreas de estudo: Aritmética, Álgebra e Geometria. Essa sequência nem sempre se manteve nessa mesma configuração, mas na mais recente, percebemos que a Geometria, na maioria das vezes, é o último conteúdo a ser tratado por livros didáticos e professores. Rara exceção, uma professora que participou da Formação Continuada para Professores do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) em agosto de 2012, em uma conversa informal, comentou que se dedica, semanalmente, ao trabalho com os alunos sobre a Geometria, paralelamente com outros conteúdos. Ainda citou que nem todas as aulas planejadas anualmente eram desenvolvidas, devido a reuniões e outras atividades que não estavam previstas e, com isso, o último conteúdo programado, no caso a Geometria, não acontecia de maneira satisfatória. Por isso, intercalar a Geometria com outras áreas da Matemática foi a solução encontrada para não deixar de trabalhar com esse conteúdo, que julga ser tão importante quanto os demais.

Usiskin (1994) comenta sobre a falta de existência de um currículo padrão para a Geometria, assim como existe para a Aritmética. Não podemos negar que os professores sabem da importância de trabalhar Geometria, mas não chegam a um consenso sobre quais conceitos trabalharem e quanto tempo destinar a esse estudo. De fato, a Geometria merece um espaço adequado nos currículos escolares, pois

> O ser humano é um ente geométrico, mergulhado no espaço: suas ações, seus deslocamentos, sua visão, mesmo praticados espontaneamente, ou quando ocorrem empiricamente, revelam essa condição. Com a ajuda da Geometria, suas capacidades aumentam, e alcança a possibilidade de poder representar e descrever de maneira ordenada o universo em que se insere, e de compreender as informações que dele chegam descritas por terceiros (SILVA apud LORENZATO, 2006, p.43).

Não podemos negar que a Geometria tem sido deixada de lado por muitos professores e a História da Matemática nos fundamenta nisso. Para Matos e Silva (2011), com o Movimento da Matemática Moderna – MMM, a Geometria trabalhada com demonstrações e teoremas e, portanto, tratada com muito formalismo foi renunciada para o estudo mais focado nos procedimentos algébricos. O Movimento influenciou nas propostas curriculares do ensino de Geometria no Brasil. Para entender um pouco mais, é preciso saber que o MMM foi um acontecimento em que, desde a década de 1950, discutiam-se mudanças para melhorar a qualidade do ensino de Matemática, defendendo a união das diversas áreas da Matemática para relacionar o ensino oferecido pela escola básica ao da Universidade, "o que corresponde à linguagem e à estrutura empregada pelos matemáticos da época" (Matos e Silva, 2011, p.172).

Entendendo melhor:

> A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta em destaque por se considerar que ela constituiria uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. Para tanto procurou-se aproximar a Matemática desenvolvida na escola daquela Matemática como é vista pelos estudiosos e pesquisadores (SILVA apud D'AMBRÓSIO, 2006, p.38).

Com a proposta desse Movimento, para Silva (2006), os currículos foram sendo modificados, dando-se preferência, entre outros, ao estudo da Teoria dos Conjuntos e das estruturas algébricas e, assim, o ensino de Matemática deixou de preocupar-se com situações práticas para utilizar um formalismo exagerado.

A aceitação desse Movimento aconteceu com uma readequação, de acordo com a cultura de cada país. Mas, para Matos e Silva (2011) não há um consenso sobre as sugestões de modernização do ensino de Geometria. No período que antecede o MMM, a Geometria de Euclides era estudada em Matemática e se dividia em Geometria Plana para as 3ª e 4ª séries do Ensino Ginasial, que corresponde a alunos de 13 e 14 anos de idade e a Geometria Espacial para a 1ª série do Colegial, alunos de 15 anos. Também foi marcado por uma Geometria Dedutiva e, eram poucos os alunos que entendiam o significado do processo dedutivo. Aos demais alunos, a repetição dos teoremas era a solução para não serem punidos pelos professores.

Nessa ocasião, conforme Perez (1991), vemos professores confusos sobre o quê e como deveriam ensinar aos seus alunos, por isso acabavam dando destaque, a maioria deles, para o ensino da Teoria dos Conjuntos. Com esse motivo, muitos professores justificavam a opção por não ensinar a Geometria, acrescentando ainda, a falta de tempo, não tendo, dessa maneira, como propor para os alunos atividades que exigiam demonstração.

O que é observado há décadas atrás, ainda é argumento para muitos professores de que a Geometria, como último conteúdo programado, não dá tempo de ser trabalhada. Poderíamos dizer que isso ainda são resquícios fiéis do MMM? Não podemos atribuir ao Movimento todos os problemas que o ensino de Geometria apresenta. Mas, também não podemos negar que, com o seu acontecimento, houve mudanças que contribuíram para o seu gradual abandono. Ainda:

> [...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações (PCN, 1998, p.122).

O aluno, quando vai para a escola, já possui muitas noções intuitivas do espaço do qual convive e, naturalmente, interage com os objetos desse espaço construindo parte de uma experiência inicial em Geometria. Com isso, o aluno já tem o conhecimento de algumas formas dos objetos geométricos, por exemplo, de um retângulo. Quando esse aluno chega à escola e se depara com uma aula em que lhe é questionado sobre qual é a figura que está sendo mostrada e respondendo que se trata de um retângulo, esse aluno está reproduzindo o que já conhecia. Ou seja, muitas vezes, a escola faz com que os alunos reproduzam um conhecimento adquirido no seu ambiente de convivência. Para ampliar o conhecimento, ao aluno deveria ser apresentado um conjunto de figuras geométricas para destacar quais seriam retângulos e justificar a escolha feita. Portanto, a aula que poderia ser uma mera repetição de conhecimentos adquiridos de uma experiência da sua rotina, tornaria-se um ambiente propício para a construção de novos conhecimentos, como a definição e propriedades do retângulo.

De fato, a Geometria torna-se importante na formação dos alunos quando:

> - colabora com a capacidade de percepção espacial dos alunos,
> - auxilia com a representação geométrica, a visualização de conceitos geométricos,
> - apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível – que é um dos objetivos do Ensino da Matemática - oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados (PEREZ apud PAVANELLO, 1991, p.37).

Outra contribuição acerca do assunto é de Pavanello (1989), que constatou o frágil ensino de Geometria nas escolas públicas, fato que a motivou pesquisar sobre o seu abandono e suas causas. Também é frisado o pouco incentivo desse ensino, ao ser observado a existência de alguns materiais didáticos e que, muitas vezes, não podem ser adaptados para a realidade escolar, assim como cursos de reciclagem para professores que, na sua grande maioria, estão voltados para o ensino superior, não discutindo estratégias mais adequadas para o ensino de Geometria em sala de aula.

O abandono da Geometria aconteceu de maneira gradual, e hoje, poucos são os professores que se preocupam em ensiná-la. Para Pavanello (1989, p.11), o pouco interesse em ensinar Geometria Euclidiana justifica-se por “questões geralmente relacionadas com o rigor, a visualização e o que se poderia chamar de subordinação da geometria à álgebra”, que são motivos que justificam o desinteresse em destacar a Geometria nos currículos de várias etapas de ensino.

Contudo, mesmo apontando alguns motivos que contribuem para abandono da Geometria, encontramos nos PCN (1998) justificativas para que o seu ensino seja trabalhado pelos professores:

> [...] os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria. Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da construção de argumentos

> plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos (PCN, 1998, p. 86).

2.4. UM BREVE ESTUDO SOBRE A TRAJETÓRIA HISTÓRICA DO ENSINO E DO ABANDONO DO DESENHO GEOMÉTRICO

O objetivo não é julgar se o estudo da Geometria é mais importante que o da Álgebra ou da Aritmética para o aluno. Cada uma dessas áreas tem a sua contribuição para a formação do aluno. Porém, a Geometria tem sido cada vez menos ensinada nas escolas, seja pelos argumentos da falta de tempo e da preparação dos professores, seja pela influência do Movimento da Matemática Modernae dos problemas no currículo de formação do professor.

Quanto ao aspecto da posição dos professores frente ao ensino e ao conhecimento das construções geométricas, Silva (2006) comenta que a Geometria é trabalhada com enfoque nos procedimentos algébricos e aritméticos, devido à formação estar pouco voltada para a Geometria e o Desenho Geométrico aplicadas em sala de aula. A pouca qualificação na formação dos professores para ensinar Desenho Geométrico, deve-se ao fato da diminuição da carga horária nos cursos de licenciatura. Segundo Silva (2006, p.24), “quanto à formação dos alunos, o que se percebe é um desequilíbrio, com prevalência para o raciocínio verbal em detrimento do lógico-matemático e do espacial”.

O material de apoio que professores e alunos utilizam, muitas vezes, é o livro didático, sendo que alguns deles trazem sugestões de atividades sobre as construções geométricas, mas ter essa referência não é suficiente se o professor optar por não utilizá-las. Ensinar Geometria usando as construções geométricas, para Silva (2006), é uma maneira de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, dando oportunidade para que a régua e o compasso sejam usados para se fazerem os traçados das figuras geométricas, aprimorando a coordenação motora e a linguagem utilizada nos procedimentos gráficos. Quando ao aluno for apresentada uma atividade que exige demonstração, é preciso utilizar o raciocínio dedutivo. É a partir da 7ª série ou 8º ano que os alunos devem resolver exercícios de demonstração. Nesse caso, o Desenho Geométrico facilita o entendimento de como organizar e resolver um exercício de demonstração, na Geometria Plana, por proporcionar “variações de formas, tamanhos e posições que ajudam a generalizar as atividades, contando com a criatividade do próprio aluno” (SILVA, 2006, p.43). Construir argumentações lógicas e organizar o raciocínio é uma das maiores dificuldades encontradas nos alunos e, isso faz parte da Geometria Euclidiana, revelando um declínio no seu ensino cada vez maior nos últimos anos.

Entendendo um pouco mais sobre os objetivos das construções geométricas, vemos nos PCN (1998), que:

> No que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras espaciais, sabemos que as principais funções do desenho são as seguintes:
> . visualizar ;
> . fazer ver, resumir;
> . ajudar a provar;
> . ajudar a fazer conjecturas (o que se pode dizer).
> Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de um desenho, buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que têm do objeto (PCN, 1998, p.125).

Para entender o quadro atual do Desenho Geométrico, retomamos os principais fatos históricos para tentar justificar o desuso das construções geométricas com régua e compasso.

Precisamos esclarecer, conforme Zuin (2001, p.14), que "a denominação Desenho Geométrico, como disciplina, se confunde com o ensino das construções geométricas". Mas no Brasil, o termo Desenho Geométrico relaciona-se ao das construções geométricas usando régua e compasso, dentro da Geometria Euclidiana Plana.

A valorização do Desenho Geométrico tem destaque nos anos de 1882 e 1883, com a Família Real já presente no Brasil, devido à reforma ocorrida na educação nos Ensinos Primário, Secundário e Superior, que permaneceu por mais trinta anos depois. Foi nos Ensinos Primário e Secundário que houve maior valorização do Desenho, em função da proposta de Rui Barbosa, que defendia uma educação técnica para que ocorresse um maior desenvolvimento na indústria, a fim de contribuir para o crescimento do país (SILVA apud VIEIRA, 2006).

Em seguida, de acordo com Silva (2006), ocorreu a Reforma Benjamim Constant, visando adaptações no ensino para que fosse mais prático, dando um caráter mais científico e ativo. O Desenho, no Ensino Primário, era utilizado para o ensino de uma Geometria prática. No Ensino Secundário, a Geometria era um conhecimento exigido do aluno ingressante nos Cursos Jurídicos, na Escola de Belas Artes e nos Cursos de Cirurgia

O ensino, que tinha como objetivo contribuir para o desenvolvimento industrial, passou a privilegiar o ingresso ao nível superior, após a implantação do Código Fernando Lobo, ocorrido em 1892. O Desenho Geométrico, nas primeiras décadas do século passado, foi trabalhado no ensino de 1º grau, correspondente aos quatro anos do curso primário e outros quatro anos do curso secundário (SILVA apud ULBRICHT, 2006). Portanto, os alunos possuíam oito anos de contato com o Desenho, e nos resta refletir o porquê no ensino de Matemática atual não encontrarmos qualquer incentivo para que seja trabalhado.

Com o período da industrialização no Brasil e sua crescente expansão, criaram-se cursos técnicos para a população. Com isso, o Desenho Geométrico ganhou importância e destaque dentro da Matemática. Segundo Varhidy (2011, p.24), em 1951, a Portaria 966/51 Brasil enuncia que "o Desenho Geométrico visava adquirir 'conhecimentos indispensáveis para o estudo da Matemática, do qual se deve tornar um auxiliar imediato'". Mas esse quadro continuou por pouco tempo, pois com a LDB-61, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, excluiu-se o Desenho Geométrico, gradualmente, dos programas curriculares. Isso acabou acontecendo, pois se tornou uma disciplina complementar obrigatória, escolhida entre outras três, pela escola.

Com a LDB 5.692/71, o Desenho Geométrico foi substituído na grade curricular do ensino público pela disciplina de Educação Artística, nos níveis de 1º e 2º graus, hoje os ensinos Fundamental e Médio. Quanto a essa situação, é considerável a colocação de Silva (apud RABELLO, 2006, p.20) ao destacar que o Desenho Geométrico "têm base conceitual matemática, não possuindo, em tese, afinidade estrutural com a área artística, salvo quanto à beleza das representações gráficas". Mesmo com essa substituição, muitas escolas continuaram utilizando as construções geométricas, mas dessa vez, incluída na disciplina de Educação Artística.

Determinar com precisão o momento do abandono em que o Desenho Geométrico ocorreu é difícil, mas Zuin (2002) afirma que se manteve nos currículos escolares por quarenta anos consecutivos, do ano de 1931 ao de 1971, mesmo sendo uma disciplina não obrigatória nos currículos em 1961 com a proposta pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diante dessa situação, temos os primeiros indícios de desprestígio do Desenho, devido à liberdade de escolha e organização do currículo dentro das disciplinas optativas, proposta pela Lei n. 5692 de 1971. Observamos que nesse período várias instituições suprimiram o ensino das construções geométricas, que faziam parte da disciplina Desenho Geométrico. Outro ponto a ser acrescentado é a eliminação da cobrança do Desenho Geométrico nos vestibulares, em consequência da Lei da Reforma Universitária, em 1968. E, mais:

> [...] com o advento das provas de múltipla escolha no vestibular e da desobrigação do ensino de Desenho no Ensino Básico, deixou de ser exigida comprovação de conhecimento nessa área. Com isso, segundo o autor, tanto os estabelecimentos de ensino público quanto aos particulares retiraram o desenho dos currículos. [...] as razões dos primeiros seria a histórica falta de professores habilitados e a dos segundos de ordem econômica (SILVA apud RABELLO, 2006, p.19).

Na década de 80, foram publicados livros de Desenho Geométrico para serem usados da 5ª à 8ª série do primeiro grau, simbolizando uma nova importância dada para as construções geométricas, mas permanecia ausente da grade curricular, por ser uma disciplina não mais obrigatória (ZUIN, 2002).

Com os PCN para a Matemática dos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, percebemos a valorização das construções geométricas, que aconteceu somente a partir do ano de 1998, destacando que "os traçados geométricos com régua e compasso" são uma maneira de "trabalhar a geometria que estava esquecida em diversas instituições de ensino básico do país" (ZUIN, 2002, p.2).

Conforme Zuin (2001), na década de 80, muitos educadores concordaram que o desprestígio do ensino da Geometria Euclidiana, ocorrido em função da influência do MMM, não tinha resultado em aspectos positivos. Com isso, em 1981, o II Congresso Nacional de Desenho, ocorrido em Florianópolis, surgiu para debater o ensino do Desenho Geométrico e a importância em mantê-lo como disciplina presente no currículo escolar.

> [...] Foi feita uma avaliação e discussão das modalidades do Desenho, tendo como um dos principais objetivos: realizar uma 'intervenção criteriosa e construtiva nos programas de educação vigentes no país'. Diversos debates, palestras, comunicações e grupos de trabalho levantaram a necessidade do ensino do Desenho no ensino básico – 1º e 2º graus, na época. O grupo de trabalho 'Desenho de 1º e 2º grau – pré-requisito para o 3o grau' concluiu que as construções geométricas deveriam ser abordadas dentro do Desenho Geométrico, a partir da 5ª série do 1º grau, com carga horária específica, separando-se o desenho geométrico da Educação Artística. Esse congresso demonstra a preocupação com o ensino do Desenho no país, desde a promulgação da LDB 5692/71 (ZUIN, 2001, p.17).

Nos PCN (1998) encontramos orientações e objetivos que o professor pode se basear para planejar as suas aulas. Não diferente é com a Geometria, que estabelece as competências que devem ser atingidas, mas não é o que se tem visto na maioria das escolas. Pior ainda, está o Desenho Geométrico que, abolido da grade curricular, é pouco utilizado nas aulas de Geometria para colocar em prática os conhecimentos geométricos teóricos, sendo mencionados nos PCN (1998), indicando quais objetivos devem ser alcançados, mas não descrevendo como o professor deve proceder para que esses aconteçam. Dessa maneira, para aquele professor que já evita ensinar Geometria por insegurança em relação ao conteúdo e dando preferência para outros, o Desenho Geométrico passa despercebido quando mencionado nos livros didáticos ou em outros materiais.

O ensino de Geometria e do Desenho Geométrico são dois estudos que estão fortemente relacionados. Em Zuin (2001), a Geometria procura atender o aprendizado teórico e com a utilização do Desenho temos a aplicação dos conhecimentos geométricos adquiridos anteriormente. Ou seja, é por meio desse que os alunos visualizam e representam os conceitos e propriedades da Geometria, dando suporte para uma compreensão mais significativa do conteúdo. E para fazer sentido para o aluno, as construções geométricas devem estar relacionadas com os conceitos de Geometria, sendo que "o estudo de cada uma dessas disciplinas em separado, inibe o aprendizado das mesmas", ou seja, da Geometria com o Desenho Geométrico (ZUIN apud DIAS, 2001, p.18).

3. CONSIDERAÇÕES SOBRE A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

O ensino da Geometria vem sendo cada vez mais suprimido dos currículos escolares e, em sua maioria, desenvolvido de maneira inadequada, detendo-se na teorização dos conceitos geométricos para a aprendizagem. É um cenário em que professores se sentem inseguros em ensinar os conceitos geométricos por não dominarem o conteúdo e alunos memorizando as definições e propriedades, mas com dificuldade de utilizá-las na resolução de problemas. Assim, a Geometria Dinâmica proporcionada pelo software GeoGebra pode auxiliar o aluno nessas dificuldades.

Encontramos estudos abordando o ensino e a aprendizagem de Geometria com o intuito de apresentar sugestões para os professores sobre como minimizarem essas dificuldades em sala de aula. Entre eles, a utilização da teoria de van Hiele, um estudo que serve para orientar os professores a trabalhar com os conceitos geométricos de maneira que o aluno possa ter uma melhor compreensão e desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Para entender melhor sobre a Geometria Dinâmica e a teoria de van Hiele, utilizadas na pesquisa, apresentamos as principais ideias de cada um desses tópicos.

3.1. TEORIA DE VAN HIELE

O modelo ou teoria de van Hiele de pensamento geométrico é resultado dos trabalhos, na década de 50, de doutorado do casal de educadores Pierre Marie van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, orientados pelo professor Freudenthal. Conforme Nasser e Tinoco (2011), a teoria de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria foi apresentada por Pierre, ao passo que Dina colocava em prática em sala de aula a teoria. Segundo Crowley (1994), a teoria foi elaborada devido às dificuldades observadas nos alunos durante as aulas de Geometria e serve como um material de apoio, que pode ser utilizado para orientar a formação e avaliar a capacidade de cada aluno, em relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

O estudo da teoria de van Hiele foi desenvolvido e publicado em 1959 na Universidade de Utrecht. De acordo com Crowley (1994), pouco tempo depois de concluída a tese, Dina faleceu e foi Pierre quem deu continuidade aos estudos sobre a teoria. Ainda na década de 60, o currículo escolar de Geometria da extinta União Soviética foi readequado, levando em consideração as características do modelo de van Hiele. Dessa maneira, o trabalho do casal holandês começa a se destacar internacionalmente. Na década de 70, o modelo é utilizado em trabalhos de Izaak Wirszup, nos Estados Unidos. Nessa mesma década, o professor de Dina e Pierre van Hiele, Hans Freudenthal, cita seus trabalhos no seu livro *Mathematics as an Educational Task*, que em português significa *Matemática como Tarefa Educacional*. Em 1984, os principais trabalhos do casal são publicados em inglês, devido ao interesse dos benefícios que a teoria oferecia. Com isso, a teoria de van Hiele tornou-se ainda mais conhecida pelos educadores.

A teoria sugere cinco níveis de compreensão, originalmente numerados de 0 a 4, sendo que cada nível foi descrito de acordo com as características do processo de pensamento em Geometria. Porém, em 1986, Pierre van Hiele concordou com alguns pesquisadores americanos, que defendiam que os níveis deferiam ser renumerados de 1 a 5, pelo fato de que muitos alunos não tinham conhecimento suficiente no primeiro nível (NASSER e TINOCO, 2011, p.74).

O aluno progride de um nível de compreensão para outro, conforme a aprendizagem de uma sequência de conceitos, com o desenvolvimento de atividades adequadas e condizentes com o nível (CROWLEY, 1994). A passagem ocorre sequencialmente do primeiro nível, denominado Básico ou Visualização, passando pelos níveis de Análise, Dedução Informal, Dedução e Rigor. Vejamos a descrição de cada um desses níveis de compreensão:

1º Nível ou Nível Básico ou Visualização: as figuras geométricas que os alunos possuem contato são aquelas que fazem parte do seu espaço e ocorre de maneira visual. O reconhecimento e a identificação das figuras se dão pela aparência e não pelas propriedades geométricas definidas. Ou seja, reconhecem pela forma como um todo, isto é, pela aparência física da figura e não por suas partes ou propriedades. Os alunos, nesse nível, reconhecem as figuras e são capazes de reproduzi-las pelas suas formas. Também são capazes de aprender um vocabulário geométrico básico e nomear formas específicas. No espaço conhecido do aluno, por exemplo, a porta de sua casa é uma referência de retângulo, pois sua aparência física é reconhecida como um retângulo. Assim, quando precisa identificar figuras listadas, além de diferenciá-las, ele consegue classificar como um retângulo, uma vez que, a porta de sua casa, objeto já visto anteriormente, lembra o desenho daquela figura. Mas, as propriedades de um retângulo não são reconhecidas pelo aluno (CROWLEY, 1994). Utilizando como exemplo para representar essa situação, citamos Nasser (1990, p. 94), ao destacar que “o aluno identifica a figura de um quadrado, e ao ser perguntado por que, a resposta é do tipo: ‘porque se parece com um quadrado’”.

2º Nível ou Nível de Análise: com atividades empíricas, o aluno é capaz de reconhecer e caracterizar as figuras pelas suas propriedades, ou seja, começa a fazer uma análise e a raciocinar sobre os conceitos geométricos. Com a observação e a experimentação, as figuras geométricas começam a ser diferenciadas pelas suas propriedades. O aluno já é capaz de fazer generalizações depois de realizar vários exemplos e observar as regularidades presentes. Com isso, surge o reconhecimento das figuras por suas partes ou propriedades, mas não consegue estabelecer relações entre elas. Também não compreende as definições e nem as interrelações de propriedades entre as figuras (CROWLEY, 1994). "O aluno sabe que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos", exemplo citado por Nasser (1990, p. 94).

3º Nível ou Nível de Dedução Informal: nesse nível, os alunos conseguem fazer as relações de propriedades, o que no nível anterior não era estabelecido. Associações de propriedades entre diferentes e as mesmas figuras geométricas começam a ser realizadas pelo aluno. E, ainda:

> [...] são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes é compreendida. As definições têm significado. Os alunos acompanham e formulam argumentos informais. Neste nível, porém, não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Resultados obtidos empiricamente são muitas vezes usados em conjunção com técnicas de dedução. Os alunos são capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não vêem como se pode alterar a ordem lógica nem como se pode construir uma prova partindo de premissas diferentes ou não familiares (CROWLEY, 1994, p.3).

Dessa maneira, o aluno sente a necessidade de uma definição para dar continuidade a sua maturação geométrica. O que se observa nesse nível é o aluno que "sabe que um quadrado é um retângulo, e que todo retângulo é um paralelogramo", conforme Nasser (1990, p. 94).

4º Nível ou Nível de Dedução: para Crowley (1994), o aluno começa a compreender a formalização geométrica e, além de memorizar as demonstrações, nesse nível, consegue construí-las e visualizar a possibilidade da existência do desenvolvimento de uma demonstração de mais de uma maneira, mas sem utilizar um rigor matemático. Ele reconhece que as propriedades se deduzem de outras e consegue distinguir entre uma afirmação dada e sua recíproca. Há o entendimento da interrelação e dos termos axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações. Nasser (1993) exemplifica que o aluno realiza demonstrações das propriedades de quadriláteros utilizando a congruência de triângulos.

5º Nível ou Nível de Rigor: o pensamento geométrico que se encontra nesse nível é bem avançado. Conforme Crowley (1994, p. 4), "o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. A geometria é vista no plano abstrato". Também são capazes de desenvolver demonstrações próprias com o rigor matemático necessário.

Os cinco níveis de compreensão que fazem parte do modelo de van Hiele identificam o nível de pensamento geométrico do aluno, que quando atingida a maturidade geométrica adequada, o próximo nível é alcançado. Com isso, numa turma podemos ter alunos que se encontram em diferentes níveis de compreensão e, para o entendimento de um novo conceito geométrico acontecer, é preciso apresentá-lo de acordo com o nível em que se encontra. Por isso, encontramos alunos com dificuldades de aprendizagem, segundo o modelo, uma vez que são ensinados conteúdos matemáticos de um nível de compreensão que o aluno ainda não alcançou (CROWLEY, 1994).

Segundo Crowley (1994, p.4), o casal Dina e Pierre van Hiele, além de descrever cada nível de compreensão, "identificaram algumas generalidades que caracterizam o modelo" que são "significativas para os educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino". O modelo de van Hiele apresenta características para os níveis de compreensão, como segue:

- Sequencial: para que o aluno acompanhe satisfatoriamente cada nível, é necessário satisfazer o pensamento geométrico que pertence ao nível anterior. Ou seja, cada nível é atingido se possuir a maturidade geométrica adequada (CROWLEY, 1994).
- Avanço: segundo Crowley (1994), a passagem de um nível para outro depende mais do conteúdo trabalhado e da metodologia escolhida do que da idade. O aluno até pode memorizar as fórmulas que seria uma habilidade a ser adquirida num nível superior do que se encontra, mas não se teria a compreensão desejada do conceito. Dessa maneira, reproduz um conhecimento memorizado, mas, de fato, sem ter acontecido uma aprendizagem significativa.
- Intrínseco e extrínseco: os objetos de estudo que, não eram entendidos no nível em que o aluno se encontrava, agora são compreendidos no nível seguinte (CROWLEY, 1994).
- Linguística: cada nível possui uma linguagem e símbolos apropriados para serem usados, assim como um sistema de relações ligando esses símbolos. Dessa maneira, uma relação que é determinada num nível, pode ser alterada num nível posterior, devido ao aluno possuir uma melhor compreensão dessa relação (CROWLEY, 1994). Por Exemplo: no 1º Nível, os ângulos com mesma medida são chamados de "iguais", mas no 2º Nível são chamados de "congruentes" (NASSER, 1990, p.95).

- Combinação inadequada: caso não haja uma combinação entre o nível em que o aluno se encontra com a metodologia, o conteúdo e a linguagem avançados, a aprendizagem não será a desejada. O aluno não consegue acompanhar certo nível de compreensão, caso o professor mantenha um diálogo que não condiz com a linguagem, até então, adquirida em níveis anteriores. Assim, segundo Crowley (1994, p.5) não há o acompanhamento dos "processos de pensamento que estarão sendo empregados", prejudicando as habilidades a serem adquiridas no nível em questão.

As fases de aprendizagem que também fazem parte do modelo podem auxiliar o professor em como intervir para que seus alunos alcancem o próximo nível de compreensão mais facilmente, propondo condições adequadas para que os conceitos geométricos desejados sejam entendidos. Segundo Crowley (1994), a passagem de um nível para outro depende mais da aprendizagem do aluno do que apenas da sua idade ou da maturação. Utilizar, sequencialmente, as cinco fases de aprendizagem foi a proposta dos van Hiele para que o aluno progrida de um nível para outro. O professor pode facilitar essa transição ao propor atividades adequadas, ou seja, utilizando uma linguagem, conteúdos, materiais e métodos condizentes com o nível do aluno.

As fases de aprendizagem consistem em cinco fases, que são: informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Para um melhor entendimento de cada etapa, uma breve descrição será feita nos parágrafos a seguir.

Na primeira fase, a de interrogação ou informação, o diálogo entre professor e aluno é importante. Para o professor é um momento em que observa os conhecimentos prévios que seus alunos possuem, ao informar qual vai ser o tema de estudo e ao realizar questionamentos. E, para o aluno, é o momento em que fica sabendo como o conteúdo se desenvolverá, isto é, com os questionamentos, terá certa noção de como os estudos avançarão. As atividades que são desenvolvidas devem estar de acordo com o nível de compreensão em que se encontra o aluno, trabalhando com questões e a introdução de uma linguagem adequada (CROWLEY apud HOFFER, 1994).

Crowley (1994) explica que na segunda fase, a de orientação dirigida, o aluno tem contato com o tema de estudo ao manipular e explorar o material didático proposto pelo professor, que organizou uma sequência de atividades a serem trabalhadas. Esse material será utilizado para o desenvolvimento de tarefas curtas, possibilitando respostas pontuais e objetivas.

Na fase seguinte, da explicação, o diálogo entre os alunos expressa as suas opiniões e permite a troca de experiências anteriores sobre o objeto de estudo, como as regularidades e as propriedades percebidas e descobertas, que tem a mínima interferência do professor. A partir dessas experiências, os alunos são capazes de justificar e analisar as suas respostas e as do colega, fazendo as observações e modificações necessárias para formular suas conclusões sobre o assunto trabalhado. O professor, como orientador, estimula o vocabulário de uma linguagem coerente e as relações entre os níveis de compreensão (CROWLEY, 1994).

Na quarta fase, denominada orientação livre, segundo Crowley (1994), o aluno tem contato com atividades de diferentes etapas, que possibilitem diferentes respostas ou até mesmo atividades em aberto. Ao resolver as tarefas, os alunos adquirem experiências ao buscarem sua própria orientação. Com isso, de acordo com Crowley (apud HOFFER, 1994, p. 7), "muitas relações entre os objetos de estudo tornam-se explícitas para os alunos", quando utilizam os conhecimentos e a linguagem da fase anterior.

A última fase, de acordo com Crowley (1994, p.7) corresponde à integração, caracterizada pela formação de "uma visão geral da nova rede de objetos e relações", no momento em que o aluno revisa e sintetiza o que aprendeu. O professor pode contribuir para que isso aconteça ao fornecer um resumo de tudo o que foi trabalhado, sem introduzir novos conhecimentos.

> No final da quinta fase, os alunos alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizagem no nível seguinte (CROWLEY, 1994, p.8).

Os níveis de compreensão do pensamento geométrico, as propriedades do modelo e as fases de aprendizagem desenvolvidas pelos van Hiele, segundo Crowley (1994), auxiliam o professor na identificação da maturidade geométrica para ajudar o aluno na transição de um nível para outro, possibilitando a compreensão e o raciocínio geométrico com o uso de materiais didáticos, de uma linguagem e atividades adequadas à teoria de van Hiele.

3.2. GEOMETRIA DINÂMICA: O SOFTWARE GEOGEBRA

Entendemos por Geometria Dinâmica, segundo Gravina et al. (2012), como sendo a capacidade do software oferecer os recursos de régua e compasso, possibilitando dinamismo para as construções geométricas, de uma maneira diferente do que quando realizada com os instrumentos concretos régua e compasso. E o GeoGebra[1] representa um exemplo de um software de Geometria Dinâmica.

[1] Disponível em http://geogebra.org

Vejamos a seguinte situação utilizando o GeoGebra: ao selecionar a opção de ferramentas “Mover”, localizada na primeira caixa da barra de ferramentas, e movimentar os pontos livres, que fazem parte da construção, percebemos a consistência de uma propriedade ou de um teorema da Geometria. Por exemplo, observemos a Figura 1, que representa dois paralelogramos:

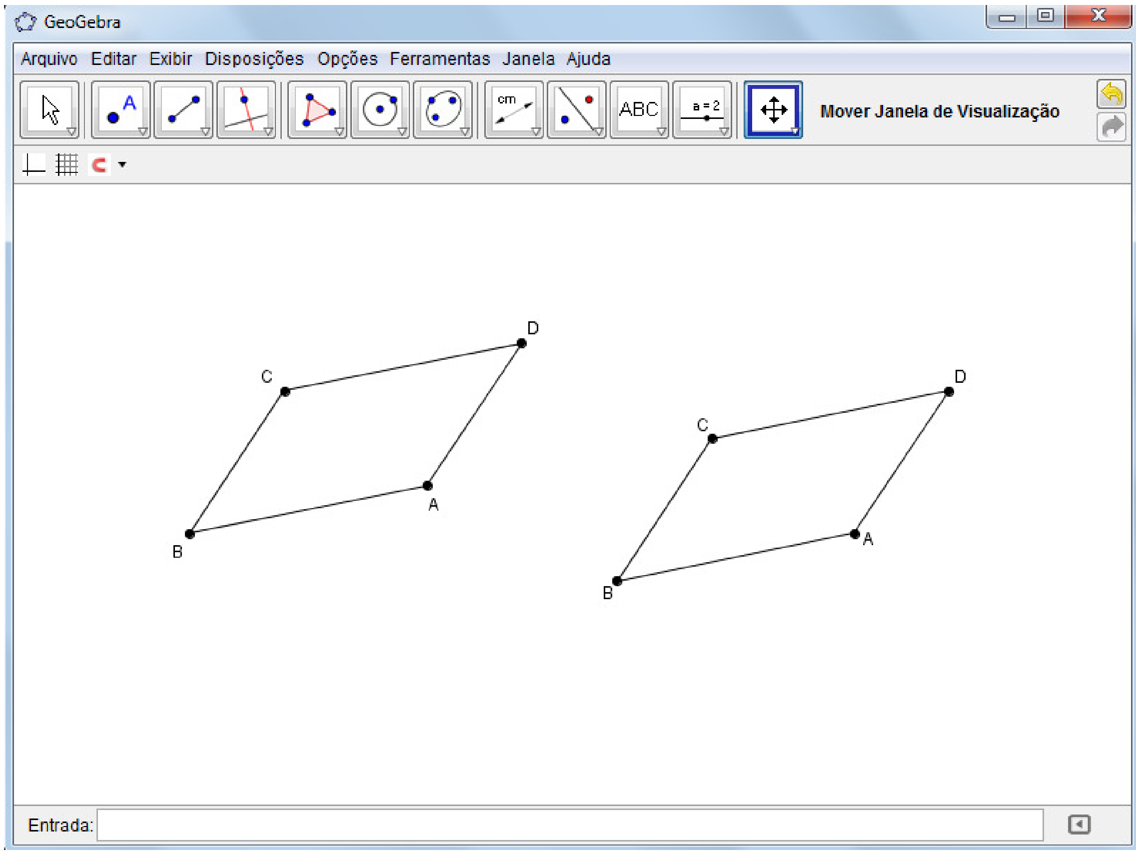


Figura 1 - Construção do paralelogramo

Na imagem da Figura 1, os dois paralelogramos estão na mesma posição e são, aparentemente, do mesmo tamanho. Quando movimentados um dos vértices, por exemplo, o vértice C, como ilustra a Figura 2, percebemos que apenas uma das figuras geométricas construídas representa, de fato, um paralelogramo. É possível perceber que o primeiro paralelogramo conserva as propriedades, mudando apenas de tamanho e de posição, sendo realmente um paralelogramo, na medida em que o segundo quadrilátero, ao ser movimentado, não preserva, por exemplo, a propriedade dos lados opostos serem congruentes ou paralelos.

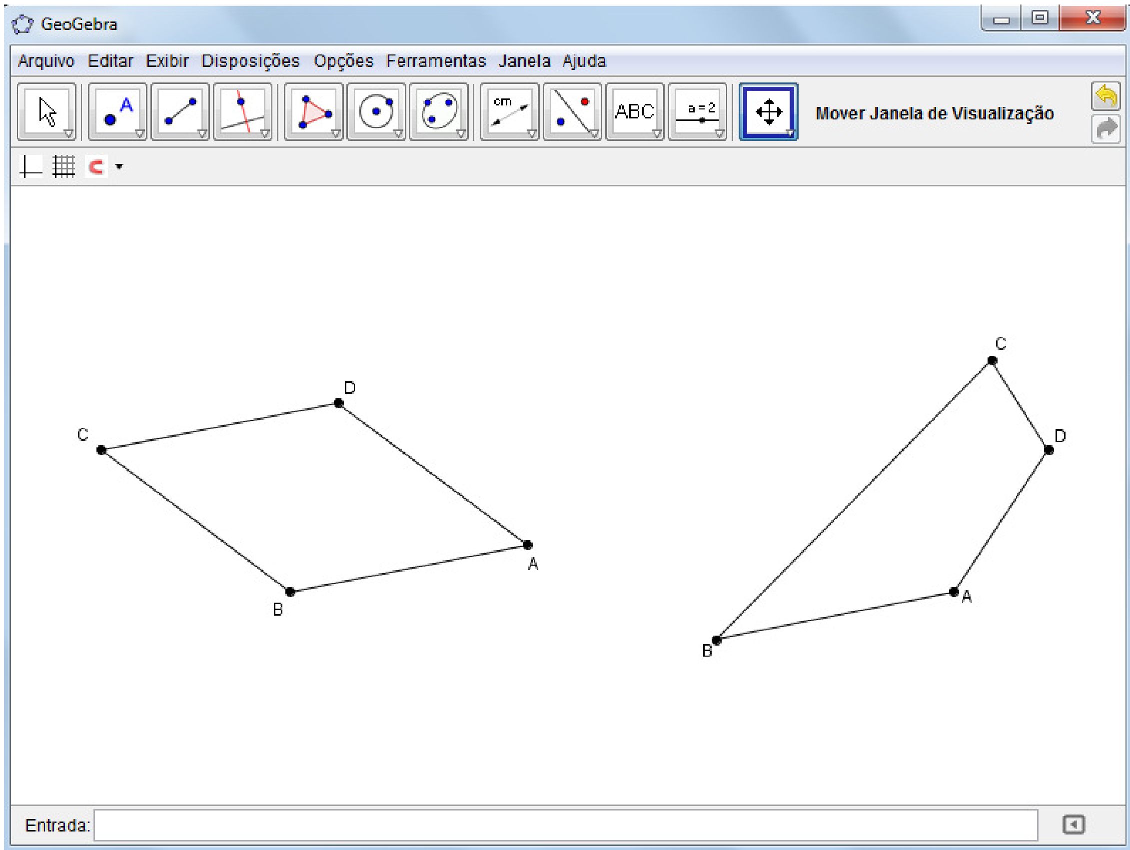


Figura 2 - Movimentando o vértice C do paralelogramo

A conservação das propriedades, mesmo quando movimentamos o vértice C, se justifica pela maneira como a figura foi construída. O paralelogramo que não conserva as propriedades foi construído como se fosse um desenho à mão livre, utilizando um lápis e uma régua para traçar os segmentos de retas que correspondem aos lados. Por outro lado, o paralelogramo que preserva as propriedades ao ser movimentado, foi construído com base em uma sequência lógica de passos de construção, utilizando os recursos régua e compasso do GeoGebra e a partir das propriedades que definem paralelogramo, como lados opostos paralelos. Esse paralelogramo que preserva as propriedades, mesmo sendo movimentando, é uma figura geométrica que exemplifica o significado de Geometria Dinâmica (GRAVINA et al, 2012).

Geralmente, nas construções geométricas utilizamos retas e círculos. Para isso, o aluno precisa entender que a reta inicialmente construída no GeoGebra utiliza a opção de ferramenta "Reta definida por dois pontos" e o compasso utiliza a ferramenta "Círculo com centro e ponto". Para a construção do paralelogramo, o procedimento utilizado pode ser visualizado na Figura 3, que foi gerada pelo próprio programa, ao selecionarmos a opção da barra de menus

“Exibir” seguido de “Protocolo de Construção”. Percebe-se que na construção utilizou-se apenas a definição de paralelogramo, ou seja, o paralelismo dos lados opostos.

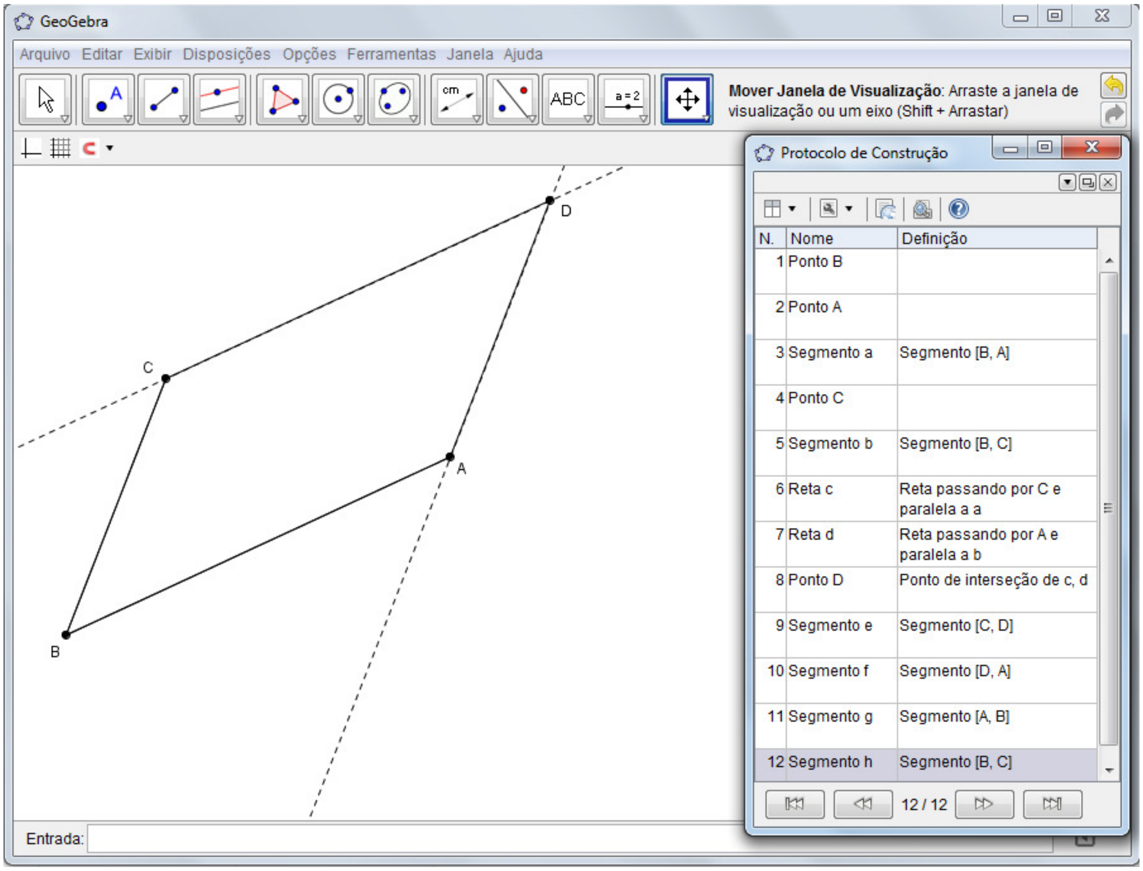


Figura 3 - Protocolo de construção do paralelogramo

Com a construção finalizada e movendo os vértices, o paralelogramo pode mudar de tamanho e de posição, transformando-se em quadrado, retângulo ou losango, como podemos observar na Figura 4.

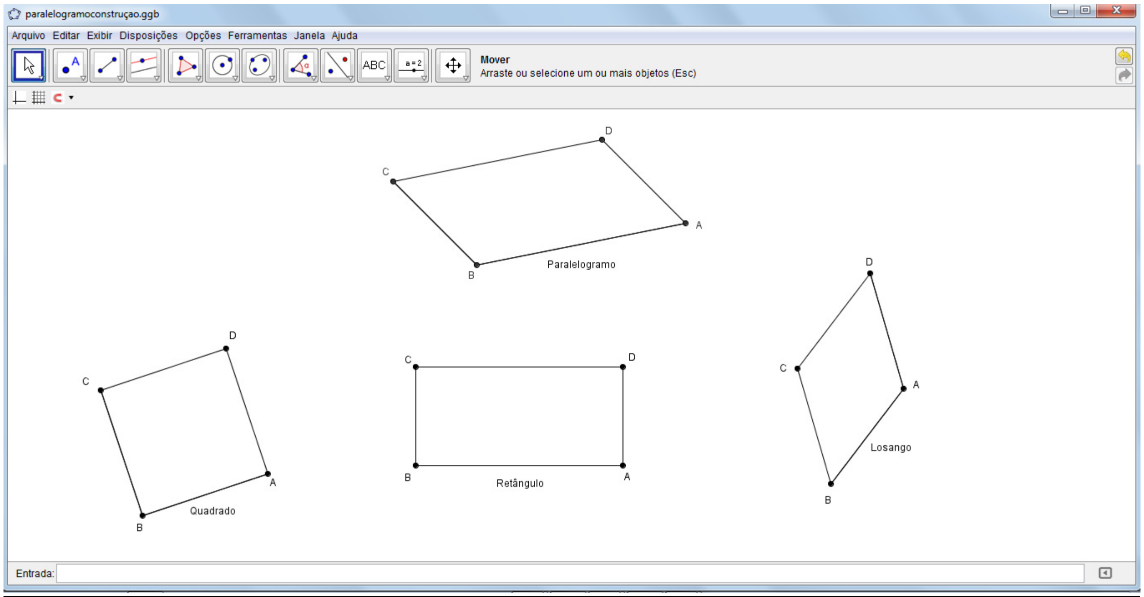


Figura 4 - Transformação do paralelogramo em quadrado, retângulo e losango a partir do movimento dos vértices

A partir desses movimentos, ou seja, do dinamismo da figura, os alunos podem observar a permanência das propriedades, tanto no paralelogramo inicial, quanto nas figuras que se transformaram com o movimento dos seus vértices. Isto é, com a transformação da figura geométrica em quadrado, retângulo ou losango, os lados opostos continuaram preservando o paralelismo, por definição de paralelogramo, e a propriedade dos lados opostos serem congruentes ou das diagonais se interceptarem nos respectivos pontos médios, permaneceram consistentes, mesmo com o movimento dos pontos iniciais da construção, como mostra a Figura 5.

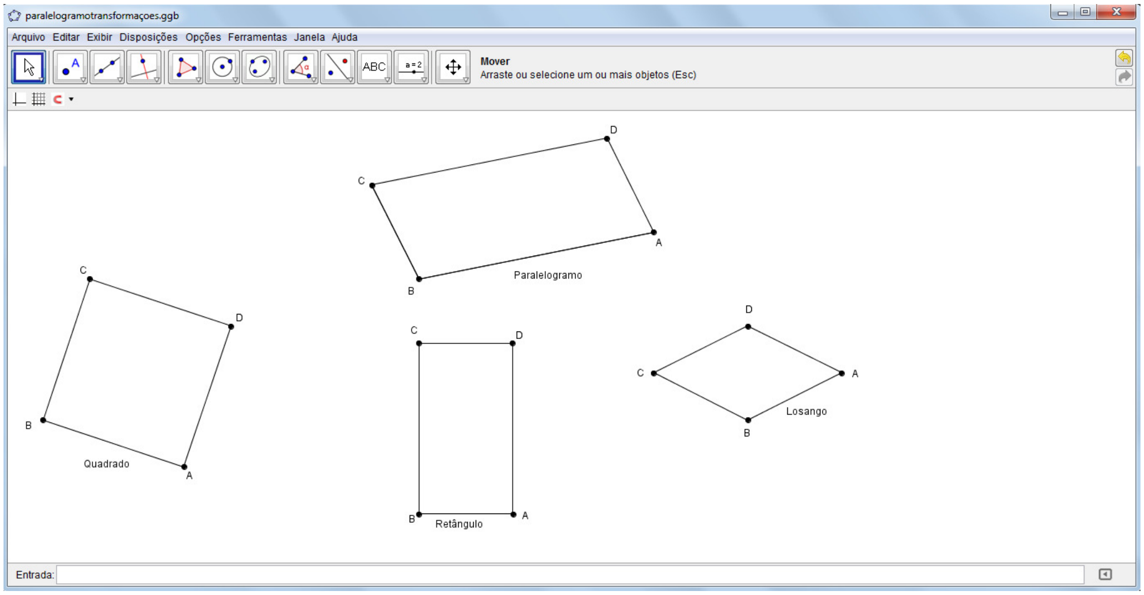


Figura 5 - Conservação das propriedades do paralelogramo no quadrado, retângulo e losango

Observando a conservação das propriedades e a transformação do paralelogramo nos quadriláteros quadrado, losango e retângulo, o aluno pode perceber que esses quadriláteros são tipos especiais de paralelogramo, construindo uma parte da inclusão de classes dos quadriláteros. Novamente, como essas figuras preservam as propriedades, dizemos que se trata de um ambiente de Geometria Dinâmica (GRAVINA et al., 2012).

Se existem outros softwares de Geometria Dinâmica, por que optamos pelo GeoGebra? A escolha desse programa, que serviu como um recurso tecnológico para a realização das construções geométricas, deve-se ao fato da facilidade da instalação, sendo disponibilizado um manual, em português, para iniciantes e encontrado com facilidade na rede virtual de computadores, além de ser um software gratuito. Outro motivo dessa escolha é pelo contato da pesquisadora com o software desde o primeiro semestre do Curso de Licenciatura e pela motivação em analisar a prática com alunos em uma atividade com o uso do GeoGebra. Outra vantagem que percebemos é a linguagem simples utilizada pelo programa, que proporciona ao aluno uma familiarização com a linguagem geométrica, importante para a comunicação universal. Com o exemplo da construção do paralelogramo, apresentado acima, o aluno precisa compreender as propriedades para justificar que, de fato, a figura é um paralelogramo.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesse capítulo, detalharemos o desenvolvimento de algumas atividades de cada encontro planejado, tendo como suporte teórico o modelo de van Hiele. Levando em consideração o processo histórico das construções geométricas e as dificuldades sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria, realizou-se a presente pesquisa com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, na Escola Estadual de Ensino Fundamental Rio de Janeiro, localizada em Porto Alegre (RS). Com o objetivo de compreender as contribuições que o processo da construção geométrica proporciona, organizamos seis encontros para buscar subsídios para fazer uma análise, a partir do comportamento dos alunos, ao longo do envolvimento com as construções geométricas com os instrumentos régua e compasso e com o programa GeoGebra.

O desenvolvimento desse trabalho sobre quadriláteros justifica-se pela dificuldade que os alunos apresentam em compreender as definições e propriedades e, consequentemente, a inclusão de classe dessas figuras geométricas. Por exemplo, para o aluno, é difícil compreender que o quadrado é um tipo de retângulo, pois existe uma carência no trabalho dessas definições e propriedades. Isso acontece, pois o ensino da Geometria e, em particular o ensino dos quadriláteros, são pouco trabalhados, já que é um dos últimos conteúdos do livro didático e, geralmente, não há tempo suficiente. E, quando estudado, apresenta-se de maneira pronta e acabada, não oportunizando ao aluno explorar e interpretar o significado desses conceitos. Dessa maneira, alguns alunos até conseguem representar o desenho de um retângulo, mas quando questionados sobre suas propriedades, não conseguem enunciá-las.

Como estávamos esperando certa liberdade para realizar essa pesquisa, no sentido da escola ceder a quantidade de horas/aula que fosse preciso, inicialmente, os planos foram organizados de maneira que a maioria dos conceitos matemáticos envolvidos nas construções geométricas dos quadriláteros fosse trabalhado. Em acordo com a escola contatada e a professora regente da turma, delimitamos a prática em duas semanas, ou seja, em dez períodos. Mas para isso acontecer, precisávamos reduzir o número total de planos, até então organizados em dez, que com os dez períodos cedidos, teríamos que desenvolver um plano por período, o que seria inviável. Como o enfoque da pesquisa eram as construções geométricas, eliminamos a revisão de certos conceitos, mas que poderiam ser brevemente relembrados na medida em que fossem necessários e, assim, reduzimos para seis planos, organizados para serem trabalhados em duas horas/aula ou uma hora/aula, dependo da data prevista.

Esse capítulo está organizado em três seções: a primeira descreve o local e os sujeitos da pesquisa; a segunda, a sequência didática e a análise de algumas atividades dos encontros, que se encontra dividida em seis subseções; na terceira seção, são feitas reflexões sobre alguns momentos dos encontros.

4.1. O LOCAL E OS SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisadora contatou a direção de duas escolas de Porto Alegre (RS), sendo uma delas municipal e a outra estadual. Num primeiro contato, foi exposta a intenção de realizar a sequência de atividades com os alunos como parte integrante do Trabalho de Conclusão de Curso, analisando o desenvolvimento do ensino e aprendizagem das definições e propriedades dos tipos de quadriláteros, a partir da utilização dos materiais régua e compasso e do computador, especificamente, do software GeoGebra. Os objetivos e a proposta do trabalho estavam descritos no documento que foi entregue para a escola (a carta de autorização para o desenvolvimento do trabalho encontra-se no Apêndice A). As duas escolas aceitaram participar da pesquisa, mas devido às circunstâncias e contexto, a pesquisadora optou por uma delas, a da rede estadual.

Tivemos dificuldade em encontrar uma escola que disponibilizasse espaço para que os encontros acontecessem em turno inverso às aulas regulares dos alunos, alegando o desinteresse em participarem de atividades em outro turno e também a falta da presença de uma pessoa responsável pelo Laboratório de Informática, que pudesse acompanhar os encontros. Como consequência, optamos pela realização da prática durante o horário de aula de Matemática dos alunos. Na escola da rede municipal, os horários das aulas de Matemática eram organizados em módulos, sendo dois por semana, totalizando uma hora e quinze minutos de aula semanal, sendo que trinta alunos participariam da pesquisa. Com a intenção de realizar uma pesquisa com a posterior análise das atividades, julgamos ser um número elevado de alunos, além de não ter disponível um computador por aluno.

Na outra escola procurada, a estadual, a resposta em relação à realização da pesquisa em turno contrário ao de aula dos alunos foi a mesma: poucos alunos estariam presentes. Como essa escola também aceitou participar da pesquisa e cedeu o Laboratório de Informática e sem a presença de um responsável, a direção orientou o contato com a professora de Matemática, que disponibilizou-se em oferecer os cincos períodos semanais e alguns alunos para participarem dos encontros. Assim, optamos por realizar a pesquisa nessa escola. A professora-pesquisadora se propôs a recuperar o conteúdo estudado em sala de aula, para não prejudicar o posterior acompanhamento das aulas com os demais colegas da turma.

Portanto, a escola escolhida foi a Escola Estadual de Ensino Fundamental Rio de Janeiro, localizada na cidade de Porto Alegre (RS) no bairro Cidade Baixa, próximo ao centro da cidade.

Os encontros aconteceram no turno da manhã, no horário habitual da aula de Matemática, totalizando seis encontros, correspondente a dez horas/aula, que aconteceram durante três semanas do mês de outubro de 2012. Acrescentamos mais um encontro de duas horas/aula que foi destinado para recuperar o conteúdo de sistema de equações de primeiro grau com uma incógnita e início do conteúdo de ângulos, estudado em sala de aula pela professora com os demais alunos da turma. Nove alunos foram sorteados, dos que se candidataram voluntariamente, para participar da pesquisa, sendo cinco meninas e quatro meninos, com faixa etária dos de 13 a 15 anos. Os pais desses alunos foram informados, por meio de um termo de consentimento (Apêndice B), sobre a pesquisa que se desenvolveria.

Os encontros organizados foram gravados para posterior análise e para manter a fidelidade das falas dos sujeitos participantes. Utilizou-se a letra PP para identificar a fala da professora-pesquisadora e a letra inicial do nome do aluno para identificar a fala de cada um, preservando a identidade dos alunos participantes. Abaixo, na Tabela 2, segue a relação dos nomes dos alunos e o número de encontros que estiveram presentes.

Tabela 2 - Relação do nome dos alunos e o número de encontros presentes

Aluno (Letra inicial do nome)	Encontros Presentes
A	Seis encontros
B	Um encontro
C	Seis encontros
F	Quatro encontros
G	Seis encontros
O	Seis encontros
P	Cinco encontros
T	Seis encontros
V	Seis encontros

Fonte: a autora (2012)

A aluna P faltou o primeiro encontro, mas não comprometeu tanto o andamento dos encontros seguintes, pois foi um momento de familiarização com o GeoGebra e os instrumentos régua e compasso. O mesmo não podemos afirmar sobre a aluna F, que faltou encontros que seguiam uma sequência de raciocínio das construções anteriores. Tivemos uma desistência no grupo, a da aluna B. Com isso, consideraremos para a análise do trabalho, a participação de sete alunos.

Os encontros foram desenvolvidos no Laboratório de Informática, que possuía treze computadores em funcionamento e com o software GeoGebra já instalado. Como nessa sala havia uma mesa central e um quadro disponível, as construções com o uso dos instrumentos régua e compasso também aconteceram nesse espaço.

Todo material utilizado, como régua, compasso, folha de ofício e cópias de atividades, foi custeado pela professora-pesquisadora para que os encontros pudessem acontecer sem contratempos. No final da pesquisa, cada aluno recebeu o material intitulado “Régua, compasso e computador: uma combinação para estudar quadriláteros” (Apêndice C), que foi utilizado durante as atividades, com exceção das construções geométricas realizadas pelos alunos, pois foram utilizadas pela professora-pesquisadora para análise.

Descrito brevemente o espaço e os alunos participantes dos encontros, a seguir, apresentamos o desenvolvimento de algumas atividades juntamente com a análise.

4.2. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E A ANÁLISE DE ALGUNS MOMENTOS DOS ENCONTROS

Os alunos possuem uma bagagem de conhecimento geométrico que se forma com o contato com situações do cotidiano e também dos anos de escolarização. Juntamente com esse conhecimento, as atividades organizadas para os alunos se basearam nos níveis de compreensão de van Hiele, para poder observar o envolvimento do grupo na formação e compreensão dos conceitos e propriedades dos quadriláteros.

A sequência das atividades organizadas envolveram as construções geométricas dos quadriláteros usando régua e compasso e o software GeoGebra. Outras atividades planejadas tiveram inspiração na proposta do Projeto Fundão, elaborada por Nasser e colaboradores (2011), que utilizou os níveis de compreensão do pensamento geométrico de van Hiele. Com as construções geométricas, pretendeu-se envolver os alunos em situações para que percebessem a necessidade do uso da definição e das propriedades e, posteriormente, a percepção da inclusão de classes. Também, teve-se como objetivo aprimorar a linguagem geométrica e os traçados dos desenhos exigidos pelos passos de uma construção geométrica.

Observemos, resumidamente, as principais atividades desenvolvidas em cada encontro, como segue na Tabela 3.

Tabela 3 - Organização das principais atividades

Encontro	Atividade
Primeiro Encontro	Familiarização com o software GeoGebra e os instrumentos régua e compasso.
Segundo Encontro	Definição de reta, semirreta e segmento. Identificação e conceito de retas paralelas, concorrentes, perpendiculares e oblíquas a partir de recortes de figuras de jornal. Construção de retas paralelas com régua e compasso.
Terceiro Encontro	Continuação da construção de retas paralelas com régua e compasso. Construção de retas paralelas no GeoGebra. Construção de retas perpendiculares no GeoGebra e com régua e compasso.
Quarto Encontro	Identificação e definição de quadriláteros. Elaboração dos cartazes de cada tipo de quadrilátero escrevendo as suas propriedades. Construção do paralelogramo no GeoGebra e com régua e compasso.
Quinto Encontro	Finalização da construção do paralelogramo com régua e compasso. Construção do retângulo e do losango no GeoGebra e com régua e compasso.
Sexto Encontro	Construção do quadrado no GeoGebra e com régua e compasso. Confecção do cartaz com o diagrama da inclusão de classes dos quadriláteros.

Fonte: a autora (2012)

Nas subseções que seguem adiante, apresentamos a descrição e a análise de algumas atividades de cada encontro.

4.2.1. Primeiro Encontro

O primeiro encontro aconteceu no dia oito de outubro de dois mil e doze, durante o quinto período da manhã. Estavam presentes oito alunos, com a ausência da aluna P.

A primeira atividade consistiu na familiarização com o software GeoGebra (o plano de ensino do primeiro encontro pode ser visualizado no Apêndice D). Cada aluno, utilizando um computador e as duas folhas que continham informações básicas, explorou o programa. A partir da leitura do material, os alunos observaram e identificaram no programa a barra de menus, a barra de ferramentas, a Zona Gráfica e a Zona Algébrica. Para familiarizarem-se um pouco mais, os alunos exploraram livremente o funcionamento do GeoGebra, fazendo construções livres.

Finalizando essa primeira atividade, para cada aluno foi entregue uma régua e um compasso, para que pudessem manipular e conhecer cada parte destes instrumentos, como ilustra a Figura 6. A régua é graduada, mas para as construções geométricas realizadas, não utilizamos essa graduação; a régua foi usada apenas para traçar retas dados dois pontos. O compasso apresenta a ponta seca, a ponta mina e a haste, sendo utilizado para desenhar circunferências dados dois pontos, sendo um deles o centro e o outro pertencente à circunferência. Como utilizaríamos o conceito de raio e diâmetro em construções futuras, foi conveniente trabalhar com os alunos essas definições rapidamente. A professora-pesquisadora também possuía uma régua e um compasso de madeira, utilizando-os para mostrar essas construções citadas acima. Os alunos tiveram esse tipo de familiarização no encontro seguinte.

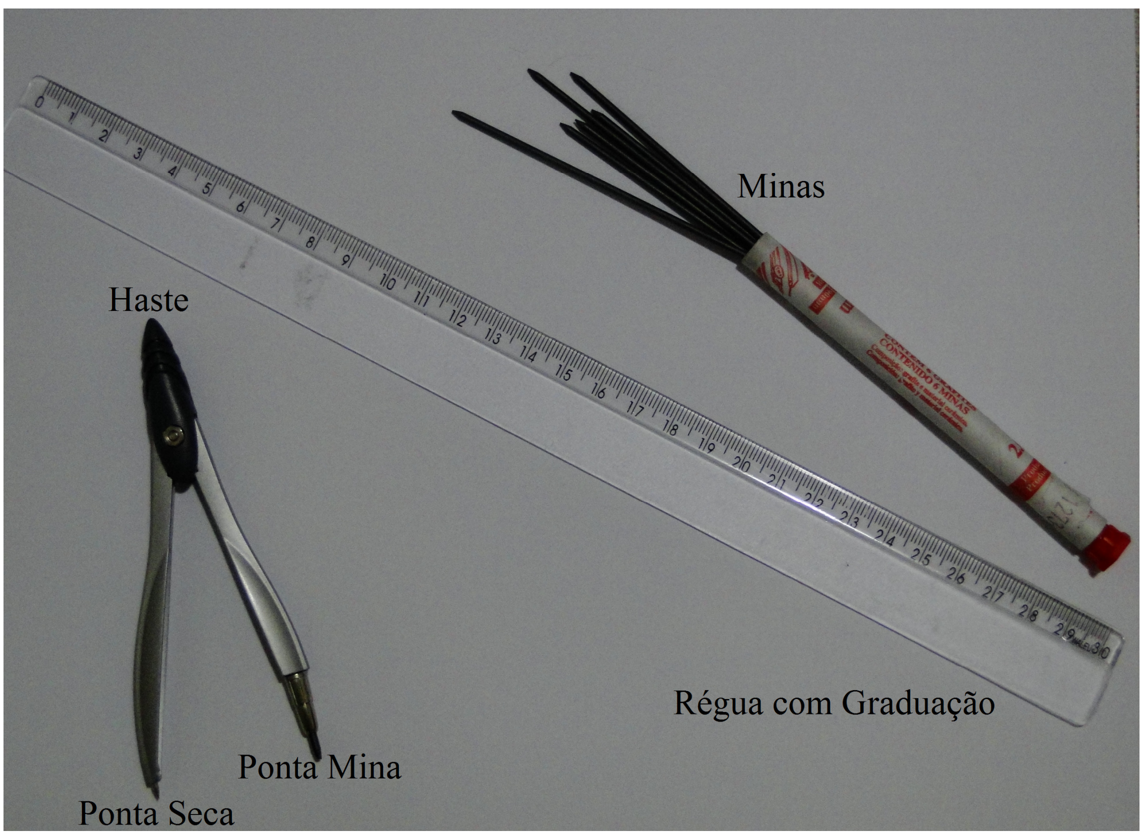


Figura 6 - Compasso, régua e minas

Como nos detemos na conversação sobre como a prática dos encontros aconteceria e na familiarização do GeoGebra e dos instrumentos régua e compasso, não tivemos acontecimentos relevantes para ser destacados e discutidos. O encontro caracterizou-se como uma novidade e curiosidade na exploração do programa e dos materiais concretos régua e compasso.

4.2.2. Segundo Encontro

O segundo encontro aconteceu no dia nove de outubro de dois mil e doze nos primeiro e segundo períodos do turno da manhã, dando continuidade ao Plano 01 (localizado no Apêndice D). Estavam presentes seis alunos, estando ausentes as alunas F e B. A aluna B desistiu de participar da pesquisa.

Com a interface do GeoGebra na tela do computador, os alunos foram orientados a explorarem as ferramentas “Reta definida por dois pontos”, “Segmento definido por dois pontos” e “Semirreta definida por dois pontos”. Com as construções na tela, os alunos foram convidados a definir reta, segmento de reta e semirreta. O objetivo foi relembrar esses conceitos, que seriam importantes para dar continuidade ao trabalho. A Figura 7 ilustra essas construções.

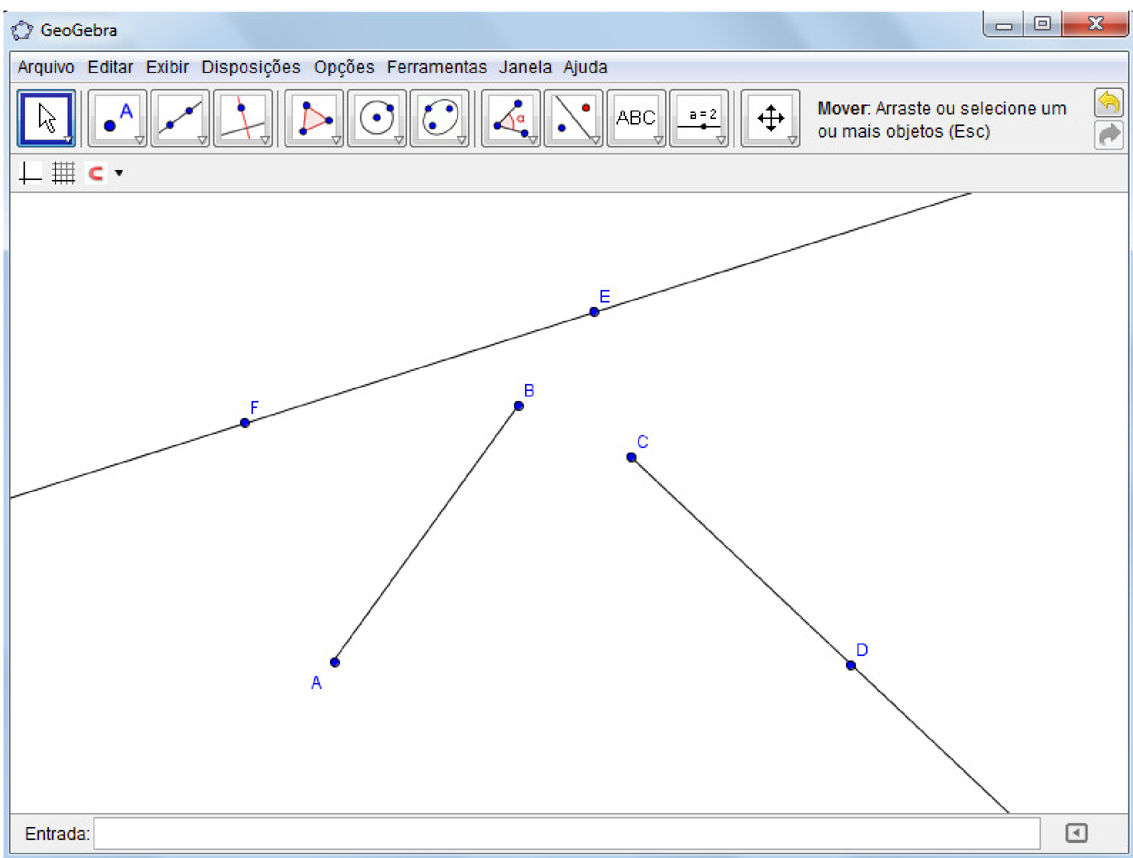


Figura 7 - Construção da reta, semirreta e segmento pelo aluno O

Em seguida, os alunos observaram as diferenças entre elas. O aluno G fez a colocação de que o segmento “é de um ponto a ponto, bem certinho” e a professora-pesquisadora complementou, usando uma linguagem mais geométrica, afirmando que a resposta do aluno G poderia ser respondida também como sendo uma parte da reta que é limitada por dois pontos. O mesmo aluno observou que a reta era infinita e que a semirreta “começa em um e não termina”. A professora-pesquisadora concluiu que a colocação do aluno G significou que a semirreta começa em um ponto e não tem um ponto final, ou seja, tem começo em um ponto e é infinita. Com o botão “Deslocar Eixos”, os alunos puderam observar melhor que realmente a reta era infinita, assim como a semirreta, mas somente em um sentido. A maneira como alguns alunos construíram a reta e a semirreta, contribuiu para que o aluno T comentasse que, ao “Deslocar Eixos”, a reta e a semirreta (na sua parte infinita) se cortavam. A colocação feita pelo aluno foi observada pelos demais alunos, quando esses foram convidados a observar o que tinha acontecido com a reta e a semirreta da tela do computador do colega. Logo concluíram que se cruzavam. Nesse momento, a professora-pesquisadora esclareceu que, quando a reta e a semirreta se cortavam ou se cruzavam, diríamos que a reta e a semirreta estavam se interccionando e tínhamos um ponto de intersecção. Essa atividade se caracterizou como o 2º Nível ou Análise de van Hiele, pois já sabendo identificar na interface do GeoGebra a reta, o segmento e a semirreta, conseguiram construir essas definições, mesmo que em uma linguagem informal, ao comparar uma construção com a outra e, também, ao “Deslocar Eixos” no GeoGebra. Para a fase de aprendizagem, percebemos que se trata da orientação dirigida, que com o desenvolvimento da sequência da atividade, sendo primeira a descoberta das opções de ferramentas para depois poder construir a reta, o segmento e a semirreta e perceber as diferenças entre elas.

O comentário do aluno sobre a intersecção da reta e da semirreta se fez importante para a proposta da próxima atividade em que, nas figuras recortadas de jornal e expostas na mesa, precisavam identificar as retas e depois, comentar a posição entre elas. Nesse momento foi necessário afirmar que deveriam identificar, inicialmente, retas paralelas e concorrentes, já que não tinham entendido a orientação da atividade, quando enunciada para destacarem a posição entre duas retas. Os alunos não conheciam a definição de retas paralelas e concorrentes. Por isso, foi necessário fazer um breve comentário, utilizando uma das figuras como exemplo, para perceberem as diferenças entre elas, ou seja, que a reta paralela não tinha ponto em comum e a concorrente tinha um ponto em comum. Na sequência, identificaram os tipos de retas nas demais figuras.

Essa atividade, das figuras do jornal, se enquadra no 1º Nível ou Básico e no 2º Nível ou Análise. Com relação às fases de aprendizagem, identificamos as fases de informação, quando questionados sobre o conhecimento que possuíam sobre retas paralelas e concorrentes, e a fase de orientação dirigida, ao ser entregue para os alunos as figuras do jornal para manipularem e observarem as retas e concluírem o conceito de retas paralelas e concorrentes. Tratou-se do 1º Nível ou Básico, pois os alunos, com os recortes das figuras do jornal, precisaram observar e localizar as retas em cada imagem, que representa um reconhecimento pela sua aparência global. Por exemplo, na Figura 8, localizaram as seguintes retas que estão destacadas nas elipses em vermelho e em preto:

Figura 8 - Imagem do jornal envolvendo retas
Fonte: Jornal Zero Hora, 2012.

Em vermelho ou nas elipses mais claras estão as retas perpendiculares que fazem parte da decoração de uma das paredes da sala e, em preto, as elipses mais escuras, estão as retas paralelas que correspondem às bordas de um quadro exposto em outra parede da sala. Identificadas, primeiramente as retas, os alunos precisavam concluir que, em determinadas representações das imagens do jornal e, que fazem parte da sua rotina, apresentavam posições específicas de retas, que pode ser configurada como uma conclusão do 2º Nível ou Análise de van Hiele. Porém, com o desenvolvimento da atividade, a classificação ficou no 1º Nível ou Básico de van Hiele, pois os alunos não citaram espontaneamente as diferentes posições entre duas retas, apenas destacaram nas figuras a presença das retas.

A seguir, os alunos manipularam a régua e o compasso para desenhar livremente em uma folha de ofício. É interessante notar a preocupação de alguns alunos ao traçar uma reta, pois levavam em consideração os dois pontos iniciais dados.

Finalizando o presente encontro, cada aluno recebeu os passos da construção da reta paralela com régua e compasso (como segue no Apêndice D). Em relação aos níveis de compreensão de van Hiele, a atividade se enquadra no 2º Nível, destacando-se a necessidade da utilização das definições e propriedades conhecidas para tal construção e a fase de orientação dirigida, pois os alunos manipularam a régua e o compasso para concluírem os passos da construção da reta paralela, percebendo a validade da sua definição. A professora-pesquisadora fez a leitura da parte inicial, que orientava o tipo de construção que realizariam. Convidados a relerem o enunciado, os alunos foram orientados a interpretarem os dados que já poderiam desenhar. A aluna P comentou que a reta poderia ser construída, mas o aluno G complementou, afirmando que antes precisava desenhar dois pontos para depois traçar a reta. Com isso, a professora-pesquisadora traçou a reta r no quadro e questionou o que mais o enunciado fornecia. Outro aluno comentou que o ponto P não estava contido na reta. Aproveitando o momento, a professora-pesquisadora desenhou no quadro o ponto P sobre a reta r, questionando como seria uma reta paralela a r e passando por P. Um aluno comentou, gesticulando, que poderia, passar pelo ponto P, mas, pelo gesto realizado, e depois confirmando com o desenho, seria uma reta concorrente. Da maneira como estavam desenhadas, logo os alunos responderam que as retas não seriam paralelas. Voltando com a reta r e o ponto P sobre a reta, os alunos foram orientados a observarem a reta no quadro, comentando que, como tínhamos definido que retas paralelas não tinham pontos em comum, então não teríamos como construir uma reta paralela a r passando pelo ponto P. Nesse caso, seriam retas coincidentes. Mesmo não trabalhando com o conceito de retas coincidentes nas construções geométricas futuras, da maneira como se encaminhou a atividade, foi necessário realizar o comentário sobre esse tipo de posição entre duas retas. Dando continuidade e desenhando o ponto P fora da reta r no quadro, os alunos leram o próximo passo da construção, para darem sequência à mesma. É importante mostrar para o aluno que o desenho à mão livre não basta para garantir a representação de uma reta paralela a uma reta r dada, passando por um ponto P, fora da reta, também dado. Isso foi mostrado à medida que os alunos realizavam a leitura dos passos da construção e a professora-pesquisadora construía-os no quadro. Com a construção finalizada no quadro, o desenho não garantiu que as retas seriam paralelas, isso porque, com o prolongamento do desenho da reta final, os alunos perceberam que seriam retas concorrentes em determinado momento. Com isso, a intenção foi mostrar para o grupo que uma construção precisa ser feita com traçados perfeitos e levando em consideração as propriedades, no caso a de retas paralelas não possuírem ponto em comum. Assim, os alunos fizeram a construção das retas paralelas com o seu material, que não foi finalizada nesse encontro.

O desenvolvimento da atividade, que envolvia a identificação de retas e as suas posições, por exemplo, teve sua duração prevista prolongada, pois a professora-pesquisadora precisou introduzir conceitos que, em um primeiro momento, estavam previstos como revisão. Esse exemplo de situação coloca em questão o domínio que o professor precisa possuir sobre o assunto estudado e a possibilidade de flexibilização do planejamento, para poder lidar com as diferentes necessidades que os alunos podem apresentar sobre o conteúdo. O principal objetivo das atividades planejadas era retomar as definições de retas paralelas, concorrentes, perpendiculares e oblíquas para permitir a realização das construções geométricas. Ou seja, o enfoque não estava nessa atividade e, sim, na construção de retas paralelas e perpendiculares, mas que resultou num dos momentos principais do encontro. Essas situações acontecem com certa frequência, a partir do momento em que o professor precisa introduzir um novo conceito, esperando que o aluno tenha os conhecimentos básicos adquiridos em anos anteriores, para poder dar continuidade à proposta curricular. Então, muitas vezes depara-se com a necessidade de retomar um conteúdo, para permitir aos alunos o acompanhamento das atividades.

4.2.3. Terceiro Encontro

O presente encontro ocorreu no dia onze de outubro, com a presença de sete alunos e dando continuidade do Plano de Ensino 01 (Apêndice D).

Os alunos demoraram para finalizar a construção com os instrumentos régua e compasso de retas paralelas, que havia iniciado no encontro anterior. Pensamos que o motivo se deva ao fato de ser a primeira construção usando régua e compasso. E, com isso, observamos a necessidade do professor de realizar as primeiras construções juntamente com os alunos, fazendo a leitura e auxiliando-os a interpretarem cada passo da sequência da construção, além de respeitar o tempo que cada um precisa para manipular a régua e o compasso.

O capricho foi notado na maioria dos traçados feitos pelos alunos. Concluída a atividade, a aluna C percebeu que a sua construção não estava adequada, antes mesmo de traçar a reta $\overleftrightarrow{PG}$, que era a reta solicitada. Para entender a construção da aluna C, a Figura 9 ilustra o seu trabalho:

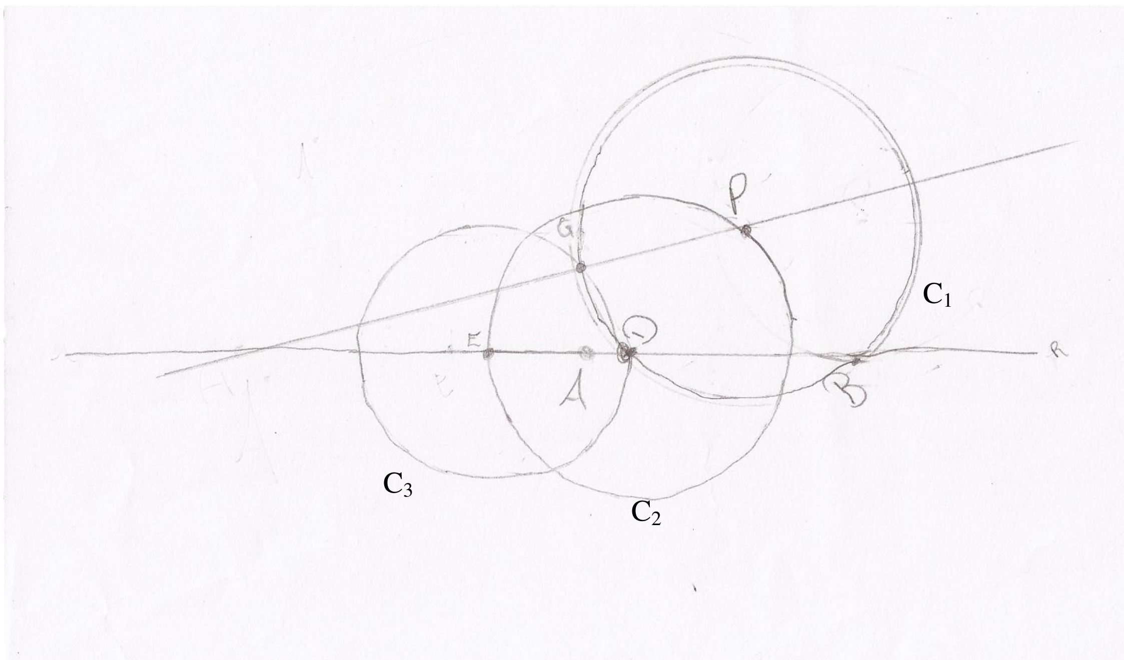


Figura 9 - Retas "paralelas" construída pela aluna C

Com essa situação, a aluna pediu auxílio à professora-pesquisadora, que a orientou a traçar a reta $\overleftrightarrow{PG}$ para observar o que aconteceria e, logo percebeu que não seriam retas paralelas, pois estavam se interseccionando em um ponto. As alunas P e A, que estavam próximas, envolveram-se na conversa, assim todos os alunos da mesa foram convidados, com a permissão da aluna, para observarem o desenho em questão e tentarem ajudar a explicar o motivo da reta $\overleftrightarrow{PG}$ não ter resultado em uma reta paralela a r. Como a resposta não surgiu de imediato, a professora-pesquisadora retomou os passos da construção para que os alunos observassem o que acontecia com o compasso conforme desenhavam os círculos. Dessa maneira, concluíram que a abertura utilizada era sempre a mesma e com isso os círculos deveriam ter o mesmo diâmetro. Com essa constatação, os alunos, em seguida, observaram nas suas construções se realmente isso acontecia e justificaram o motivo da construção da colega C não ter resultado em retas paralelas. Ou seja, o círculo C_2 foi construído de maneira que as medidas dos raios não eram iguais, comprometendo também a construção do círculo C_3 (os círculos foram nomeados para melhor entendimento desse texto, mas não estavam nomeados para os alunos. Percebemos, dessa maneira, que nomear todos os objetos geométricos da construção pode auxiliar na compreensão dos passos da construção. Se os círculos estivessem nomeados, talvez os detalhes dos passos da construção ficassem mais claros para os alunos). Pela construção da aluna C, percebemos que, quem sabe, a pouca desenvoltura em manipular a régua e o compasso, resultaram numa construção que não atingiu o objetivo de traçar retas paralelas.

Realizar a mesma construção de retas paralelas no GeoGebra foi o próximo passo do encontro. Como todos os alunos tiveram dúvidas em como proceder no programa, a professora-pesquisadora fez a leitura do primeiro passo da construção, discutindo o que deveria ser realizado. Como a construção era a mesma, os alunos logo responderam que precisavam traçar uma reta, mas que precisam de dois pontos primeiro e, depois marcar o ponto P em qualquer parte da Zona Gráfica, com exceção da reta inicial. E, dessa maneira, deveriam se esforçar para proceder com a atividade. A construção usando o GeoGebra demorou mais do que quando construída com régua e compasso. A orientação seguinte era observar o que ocorria com as retas paralelas quando utilizavam a opção de ferramentas “Deslocar Eixos”, para concluírem que seriam retas paralelas infinitas, em função da sequência dos passos que haviam utilizado na construção.

A próxima atividade do encontro consistia em construir retas perpendiculares com régua e compasso e o GeoGebra. Da mesma maneira que ocorreu com as retas paralelas, procedeu-se com a interpretação do enunciado da atividade de retas perpendiculares. Com o final da construção, os alunos observaram que os círculos precisavam respeitar a mesma abertura do compasso, pelos passos da construção, para garantir o perpendicularismo.

A construção das retas paralelas e perpendiculares com o uso dos instrumentos régua e compasso e o GeoGebra caracterizou-se como uma atividade do 2º Nível ou Análise, pois os alunos identificaram as retas paralelas no final da construção e, no caso da aluna C, perceberam que a sua construção não resultava nas retas paralelas esperadas. Isso foi possível já que entenderam a definição de retas paralelas e perpendiculares, estudadas no encontro anterior. Quanto à fase de aprendizagem, destacou-se a fase de interrogação ou informação, que identificamos no momento em que os alunos são convidados a interpretar o enunciado da atividade das retas paralelas e, também, das perpendiculares, para concluírem a construção que realizariam. Também a fase de orientação dirigida, considerando a manipulação com os instrumentos régua e compasso e o software para realizar os passos da construção das retas e a compreensão do conceito que haviam estudado.

Nesse encontro, foi possível concluir a construção das retas paralelas e perpendiculares com régua e compasso e com o GeoGebra, mas prevíamos concluir o Plano de Ensino 01 (Apêndice D) em menos tempo e, isso ocorreu, pela demora com que os alunos realizaram as construções, que aconteceu, conforme conversa com os alunos, pela resistência com o uso do programa, podendo ser explicada pela pouca habilidade e contato com o GeoGebra. Como nos interessa a qualidade e não a quantidade das atividades aplicadas, permitimos aos alunos esse amadurecimento geométrico inicial que as construções estavam proporcionando. Cada aluno fazia os passos da construção na medida em que se sentiam preparados para prosseguir com a próxima e, no possível, conscientes do que estavam construindo. Assim, é natural que alguns alunos concluam a construção antes que outros colegas, por terem mais facilidade e destreza. Quando os alunos apresentavam muita dificuldade ou tentativas frustradas nas construções, os alunos que concluíam a atividade com mais facilidade foram convidados a auxiliar os demais colegas.

4.2.4. Quarto Encontro

Nesse encontro de dois períodos, que aconteceu no dia dezesseis de outubro, para aplicar e concluir o Plano de Ensino 02 (ver Apêndice E), oito alunos estavam presentes e a aluna F compareceu no segundo período, sendo que a sua última participação ocorreu no primeiro encontro.

Com a organização dos cartazes sobre os quadriláteros, aos alunos foi solicitada a leitura das propriedades que haviam elaborado, iniciando com o cartaz do losango, no qual o aluno G tinha ficado responsável pela escrita. Conforme o aluno fazia a leitura das propriedades do losango, faziam-se questionamentos para o grupo, induzindo-os a uma listagem mais completa nos cartazes, já que tiveram dificuldades em escrevê-las, destacando-se a transição do 1º Nível ou Básico para o 2º Nível ou Análise. Observemos o diálogo:

PP: O que escreveu no teu cartaz?

G: Tem quatro lados, todos iguais e todos os lados têm o mesmo tamanho.

Adiante, será frizado que são lados congruentes.

PP: O que mais escreveu?

G: Tem quatro ângulos.

PP: E os lados opostos dessa figura, o que pode dizer?

Não obtendo a resposta, a pergunta foi reformulada:

PP: Tem lados opostos?

T: Como assim?

Mostrando os lados opostos das figuras geométricas destacadas no quadro:

V: Tem!

PP: Todos os tipos de quadriláteros têm?

V: Sim!

PP: Especificamente do losango, esses lados opostos são iguais ou são diferentes?

G: Iguais.

PP: Agora, o que pode dizer desses lados opostos. São paralelos ou perpendiculares?

G: São perpendiculares! Não! São paralelos, não se cruzam.

PP: Então, temos lados opostos paralelos. E as diagonais?

G: Não escrevi nada.

PP: Desenhe as diagonais na figura colada de um dos losangos.

Desenhado corretamente:

PP: O que pode dizer sobre essas diagonais? São paralelas?

T: Não! São perpendiculares

PP: Então pode escrever que tem diagonais perpendiculares?

G: Sim.

A próxima figura a ser analisada a escrita foi o retângulo, que estava com uma listagem mais elaborada e as posteriores também, pois acrescentavam nos seus cartazes as propriedades que haviam sido comentadas nos cartazes anteriores e que ainda não estavam escritas nos seus. Essa dinâmica foi desenvolvida para inquietar os alunos quando percebessem que determinadas propriedades eram comuns a outros cartazes, para tentarem formular alguma conclusão sobre a inclusão de classes. Mas isso não aconteceu no momento. A Figura 10 mostra os alunos construindo os cartazes.

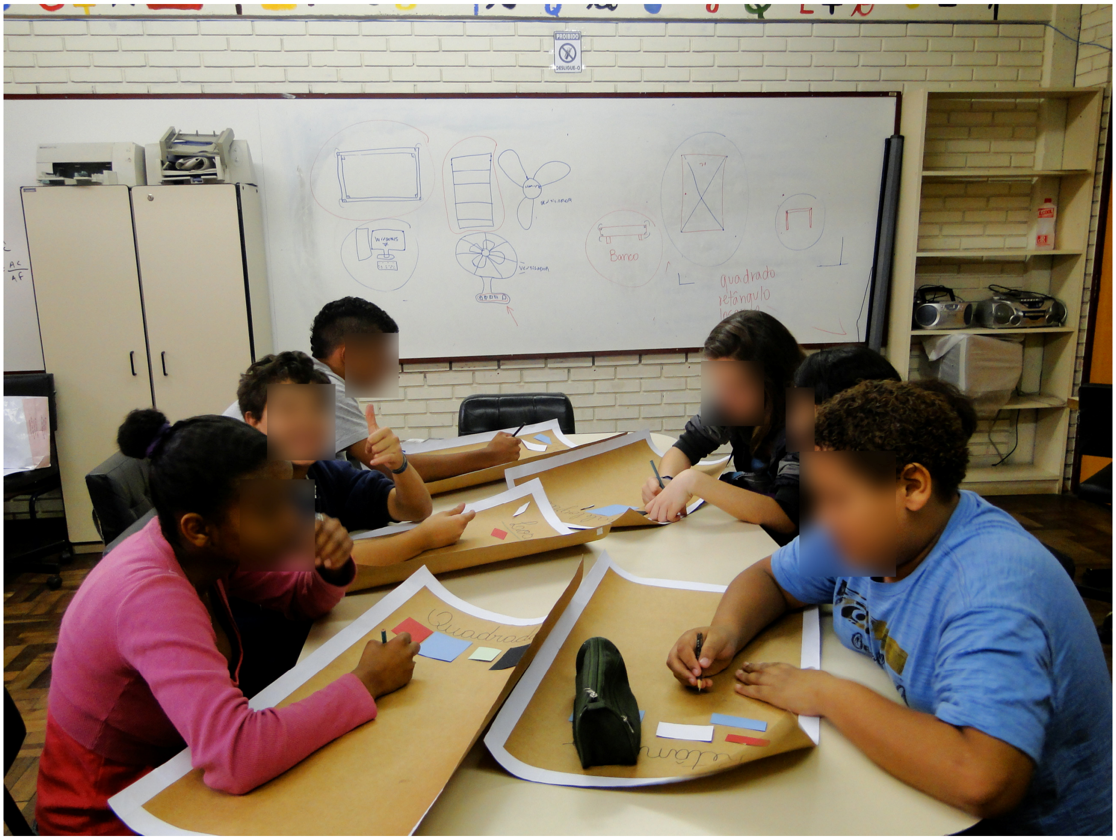


Figura 10 - Alunos organizando os cartazes sobre os tipos de quadriláteros

A sequência desse encontro aconteceu com as construções do paralelogramo no GeoGebra e, depois, com régua e compasso, com os passos da construção entregues para os alunos. A construção foi finalizada com poucas dificuldades e destacamos a insegurança de alguns alunos em querer a confirmação do acerto de cada passo realizado e a necessidade da ajuda, pela minoria, em localizar a ferramenta "Intersecção de Dois Objetos" e "Reta Paralela". Depois, os alunos foram convidados a comparar a escrita do cartaz paralelogramo, exposto no Laboratório, com a construção no GeoGebra, para observarem a relação entre a escrita e a figura geométrica construída. Com a orientação de moverem os pontos, isto é, os vértices do paralelogramo, os alunos concluíram que aquela construção se transformava ora em um quadrado ou losango, ora em um o retângulo. Assim, a professora-pesquisadora questionou os alunos sobre o significado dessa situação, sobre o motivo daquelas transformações acontecerem, orientando-os a relerem a escrita dos cartazes do paralelogramo, do quadrado, do losango e do retângulo para perceberem a inclusão de classes. Com a leitura, alguns alunos destacaram que certas propriedades se observavam em todos os cartazes que estavam analisando, mas mesmo assim, não conseguiram se expressar afirmando que o quadrado, o losango e o retângulo eram tipos especiais de paralelogramo, sendo necessária a intervenção da professora-pesquisadora para formalizar essa conclusão.

Entender esse tipo de inclusão de classes, destacada no parágrafo acima, não é uma conclusão óbvia para esses alunos, que com a construção dos cartazes apresentaram dificuldades em atribuir as propriedades para os tipos de quadriláteros. A construção do paralelogramo no GeoGebra com o movimento dos vértices da figura, observando a transformação em quadrado, retângulo ou losango, facilitou a visualização dessa inclusão de classes. Isso, dificilmente aconteceria, se essas figuras geométricas fossem desenhadas e recortadas para serem colocadas lado a lado numa mesa. Com o dinamismo do GeoGebra, os alunos puderam observar e experimentar o significado das propriedades do paralelogramo, como também, sua definição.

Com a construção do paralelogramo e observando as regularidades da figura ao movimentarem os vértices para que as propriedades fossem reconhecidas, a atividade se caracterizaria como o 2º Nível ou Análise de van Hiele. Porém, esse objetivo não foi atingido pelos alunos. Perceber e formalizar as propriedades do paralelogramo não foi uma conclusão direta, sendo preciso intervir com questionamentos e sugestões de informações a serem acrescentadas, como por exemplo, marcar o ponto médio das diagonais, para concluírem que as diagonais se cruzavam nos respectivos pontos médios. Por isso, a maioria dos alunos transitava entre o 1º e o 2º Níveis de van Hiele. Identificamos novamente a fase de orientação dirigida, com o GeoGebra e com régua e compasso, pois os alunos receberam os passos da construção que deveriam ser seguidos para concluir que se tratava do paralelogramo, entendendo a definição e as suas propriedades.

Os passos para fazer a construção com régua e compasso do paralelogramo foram distribuídos para os alunos. Percebemos que os alunos desenvolveram mais agilidade e rapidez com as construções e, é natural e notável, que os alunos que participaram desde as primeiras construções tivessem mais facilidade em construir, devido ao contato e a familiarização com esse tipo de construção e material. A finalização dessa construção aconteceu no seguinte encontro.

4.2.5. Quinto Encontro

Esse penúltimo encontro aconteceu no dia dezoito de outubro, nos 3º e 4º períodos do turno da manhã. Estavam presentes sete alunos, estando ausente a aluna C. A agilidade e rapidez em fazer as construções no GeoGebra e, principalmente com o material concreto régua e compasso foi notório, já que nesse encontro finalizaram a construção do paralelogramo, Figura 11, e realizaram as construções do retângulo (Apêndice F) e do losango (Apêndice G).

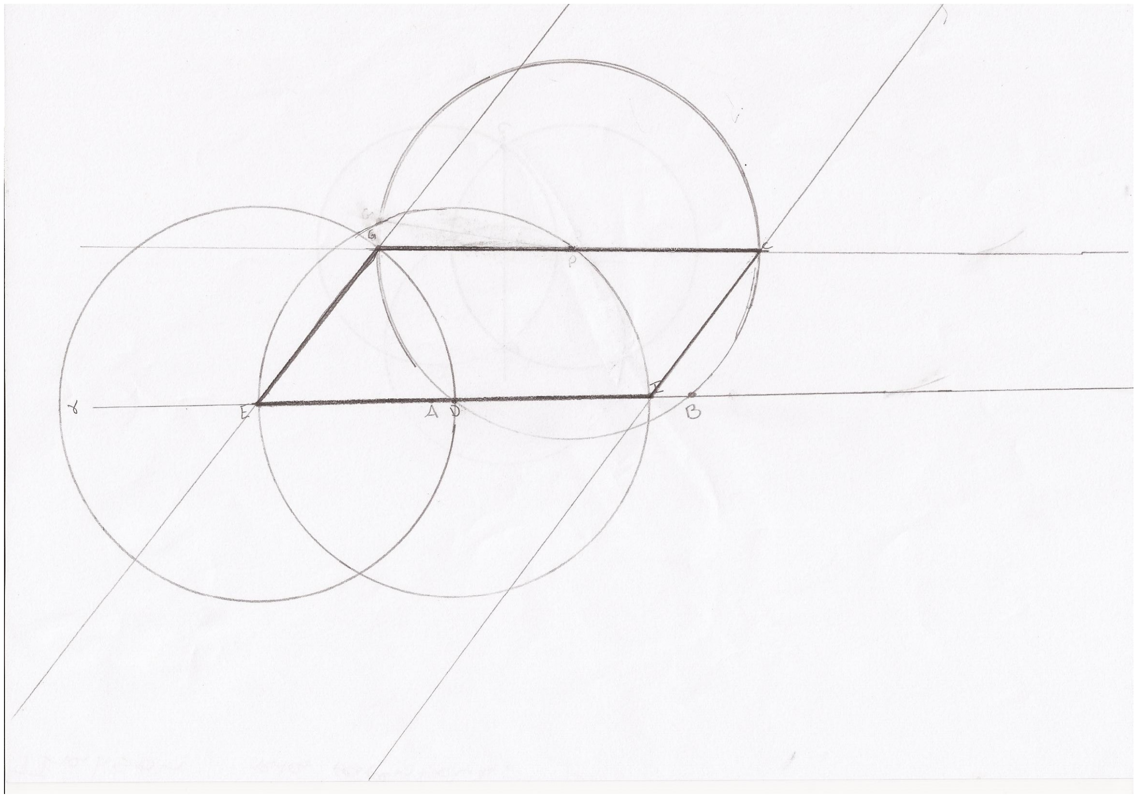


Figura 11 - Construção do paralelogramo pelo aluno T

Observemos na construção do aluno T, que ao invés de construir segmentos EG e CI, construiu retas que passavam pelos dois pontos, para posteriormente destacar os segmentos que compõem os lados do paralelogramo. Dessa maneira, percebemos certa dificuldade no aluno em diferenciar retas e segmentos, conforme a construção orienta. Talvez o aluno tenha percebido que traçar a reta não era um passo necessário para a construção, mas a falta de uma borracha (muitos alunos não possuíam borracha) pode ter levado o aluno a entregar sua construção dessa maneira.

Os alunos concluíram a construção do paralelogramo e compararam com a escrita do cartaz exposto na parede do Laboratório, para verificar a validade das propriedades. Com a leitura do material sobre a definição e as propriedades, a professora-pesquisadora induziu os alunos a justificarem o porquê dos lados opostos serem congruentes, a partir do raio e diâmetro dos círculos que tinham sido construídos com a mesma abertura do compasso. Retomando os passos da construção e observando a construção pronta, utilizando a régua e o compasso, e com a orientação de observarem como os círculos foram construídos, alguns alunos concluíram que a abertura do compasso era sempre a mesma e que os três círculos eram iguais. Assim, os alunos destacaram que alguns lados apresentavam a mesma medida do diâmetro de dois círculos e que outros lados tinham a mesma medida do raio de dois círculos. Questionados sobre que lados eram esses, afirmaram que eram os lados opostos que tinham a mesma medida, ora porque correspondiam aos diâmetros, ora porque correspondiam aos raios dos círculos que foram construídos com a mesma abertura do compasso.

Com a lacuna a ser preenchida da afirmação "O _____________é um quadrilátero que possui os quatro ângulos congruentes", os alunos sugeriram como resposta o losango, o retângulo (que o aluno G insistiu desde o início, afirmando "Mas são quatro ângulos e não quatro lados congruentes") e o quadrado. Comparando os cartazes com as sugestões dos quadriláteros a ser preenchido, descartaram o losango, já que essa figura geométrica não tinha os quatro ângulos congruentes, restando o retângulo e o quadrado como opções. O aluno T insistiu afirmando ser o retângulo seguido da mesma resposta do aluno V, mas como nem todos os colegas manifestaram-se, a seguinte conversa se estabeleceu:

PP: Mas, o quadrado também não tem quatro ângulos congruentes?

V e G: Tem...

G: Congruentes!

PP: E agora?

V: É os dois, vai ser os dois sora.

PP: Mas o que diferencia o quadrado do retângulo?

V: O tamanho.

PP: O que quer dizer com tamanho?

T: Lados opostos congruentes. Não sei...

PP: Olhem para o cartaz do retângulo e do quadrado. Os dois têm quatro ângulos congruentes, certo?

Essa pergunta não foi respondida, pois o aluno O fez a colocação da sua resposta para ser preenchida na lacuna, como se observa:

O: É o quadrado.

PP: Por que é o quadrado?

T: É o retângulo!

G: Porque tem os lados opostos congruentes. (em relação à resposta do aluno T, já que tinha apontando para o cartaz do retângulo)

V: Por causa dos ângulos. (em relação à resposta da PP)

PP: Mas então como vocês diferem o quadrado do retângulo?

G: O quadrado é bem certinho, tem os quatro lados congruentes.

T: E os quatro ângulos congruentes.

Concluindo, a professora-pesquisadora enfatizou que, quando se tratava de um quadrilátero que possuía os quatro ângulos congruentes, teríamos um retângulo. Alguns alunos optaram pelo retângulo e outros pelo quadrado, o que era esperado, pois tanto o retângulo quanto o quadrado possuem os quatro ângulos congruentes. O objetivo era que os alunos percebessem que o quadrado possuía também os quatros lados congruentes, diferenciando do retângulo.

Com a definição de retângulo completa, a turma foi separada em dois grupos: alguns alunos – T, G e O - construíram no GeoGebra, a figura geométrica e outros – P, C, V e A - receberam o desenho da construção com régua e compasso finalizada na folha sem a escrita dos passos. Os alunos que ficaram responsáveis pela construção no GeoGebra receberam os passos da construção para seguir e depois teriam que explicar para os demais colegas, sem o uso do material explicativo. O outro grupo deveria interpretar a construção com régua e compasso, entregue pronta, e organizar os passos de construção para apresentar aos colegas do outro grupo. Esse último grupo, ao receber a construção, argumentou que não sabia como fazer.

Nas construções anteriores, em que recebiam a sequência pronta dos passos da construção, os alunos conseguiam interpretá-los e concluir a atividade. Como já estavam dominando esse tipo de procedimento, resolvemos aplicar o processo inverso, isto é, entregar a construção desenhada na folha, com todos os passos explícitos no desenho, para os alunos elaborarem a sequência dos passos, mas seguindo uma lógica adequada. Com isso, a atividade estava exigindo dos alunos uma interpretação do desenho, que, de fato, era uma exigência superior das atividades que até então estavam trabalhando. O objetivo foi observar como os alunos se comportariam numa situação dessas e, de acordo com as fases de van Hiele, seria a de integração, uma vez que precisariam retomar como era organizada a lógica das construções que tinham realizado, exigindo um raciocínio diferente do que simplesmente ler e interpretar e utilizar a régua e o compasso para fazer os traçados solicitados.

Como os alunos não conseguiram atender esse nível de exigência, a professora-pesquisadora questionou sobre o que eles imaginavam que tinha sido construído primeiro e aconselhando os alunos a utilizarem a régua e o compasso para reconstruir o retângulo. A aluna P respondeu que o primeiro passo a ser construído foi a reta a partir dos pontos dados A e B, conforme a Figura 12. E, assim, perguntando sobre o que poderia ter sido construído depois, os alunos desse grupo foram discutindo até chegar na solução do problema. Esse tipo de dinâmica foi utilizada, que não estava proposta no Plano de Ensino 02 (Apêndice E) inicial, para observar a linguagem geométrica utilizada pelos alunos para se expressar de modo que os colegas entendessem a sua explicação. Também para organizar a questão do tempo disponível para realizar a pesquisa.

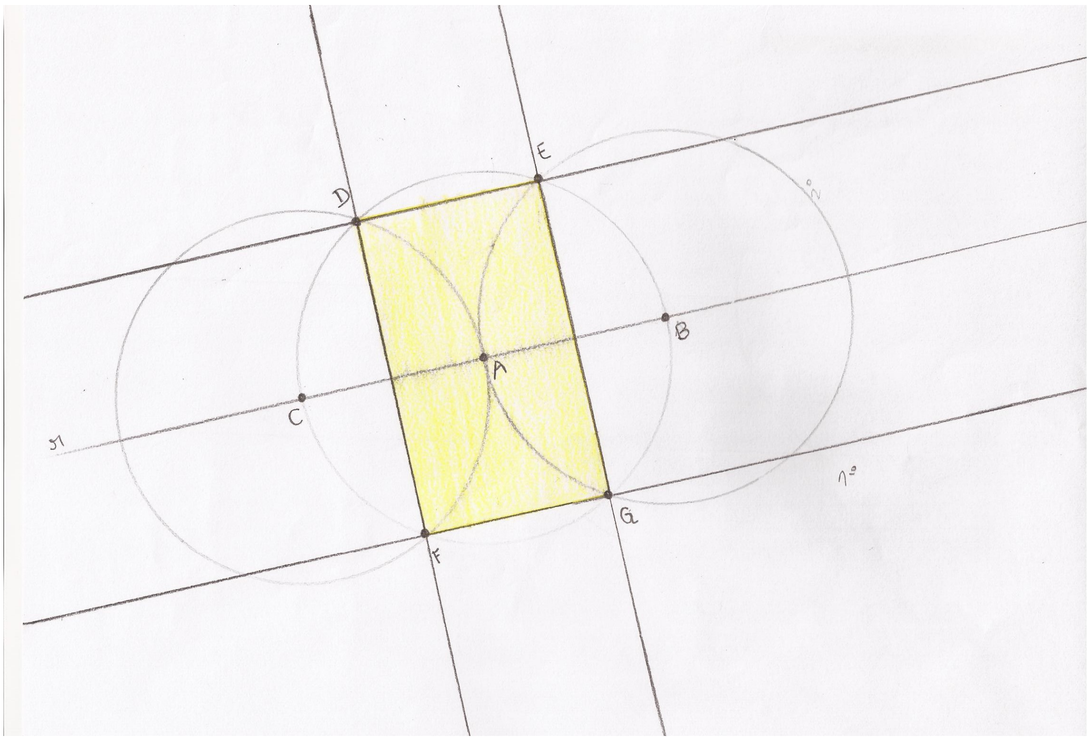


Figura 12 - Construção do retângulo com régua e compasso

Os dois grupos conseguiram elaborar uma explicação para as construções, com algumas interferências da professora-pesquisadora. O grupo da construção com régua e compasso foi quem mais precisou de auxílio, como mostra a conversa transcrita abaixo:

V: Construiu uma reta.

P: Passando por quais pontos?

V: A e B.

P: Um círculo passando por A e B.

PP: Como passando por A e B?

P: Com a ponta seca em A e passando por B. Daí a gente marcou o ponto de intersecção entre a reta r (nomeada pelos alunos) *e o círculo.*

PP: O ponto C?

P: Isso. Daí com a ponta seca em B passando por A, construiu outro círculo.

PP: E o outro círculo?

P: Com a ponta seca em A e passando por C e B. Daí marcamos os pontos F e G, intersecção entre os círculos.

PP: Quais?

P: O segundo com o último dando o ponto F e o primeiro com o último dando o ponto G.

A: E também os pontos D e E, interseção. Tem a reta passando por F e G e outro por E e G que são paralelas.

PP: Quem é o retângulo?

A: EDFG.

Os alunos do outro grupo acompanharam a explicação e concordaram com os passos de construção. O grupo responsável pela explicação da construção usando o GeoGebra precisou de poucas intervenções. Os alunos conseguiram fazer a explicação corretamente e utilizar, na maioria de cada passo, uma linguagem mais geométrica, como por exemplo, o aluno G comentou: "O segmento de reta construído pelos pontos A e B. Daí, fizemos a perpendicular pelo ponto A e pelo ponto B, perpendicular ao segmento do início. Aí podia escolher uma dessas retas e colocar o ponto C...".

No segundo período do encontro, os alunos trabalharam com o losango. Com a definição do losango, foi questionado aos alunos se o quadrado também possuía todos os lados congruentes. O aluno G afirmou que sim e acrescentou que se diferenciava do losango por ter também os quatro ângulos congruentes. Essa resposta do aluno G permite destacar o 2º Nível ou Análise de van Hiele, encaminhando-se para o 3º Nível, pois conseguiu analisar e diferenciar esses tipos de quadriláteros pelas propriedades e destacar que o quadrado tem a propriedade da congruência entre os lados, que é comum ao losango, mas ainda não era capaz de fazer a inclusão de classes, ou seja, de formular uma frase afirmando que o quadrado é um tipo especial de losango, sem a mínima interferência da professora-pesquisadora.

Depois dessa etapa, concluíram o encontro com a construção do losango, que foi realizada com muita agilidade e rapidez, tanto com régua e compasso, quanto com o GeoGebra. Os alunos foram questionados sobre como argumentariam que o losango construído com régua e compasso, como na Figura 13, possuía de fato os quatros lados congruentes. Pensativos e sem nenhuma resposta, foi sugerido que pensassem na construção dos círculos. Logo, alguns alunos observaram que tinham construído com a mesma abertura e que tinham o mesmo diâmetro e, assim, todos os lados do losango eram raios dos dois círculos construídos e, dessa maneira, afirmaram que eram quatro lados congruentes.

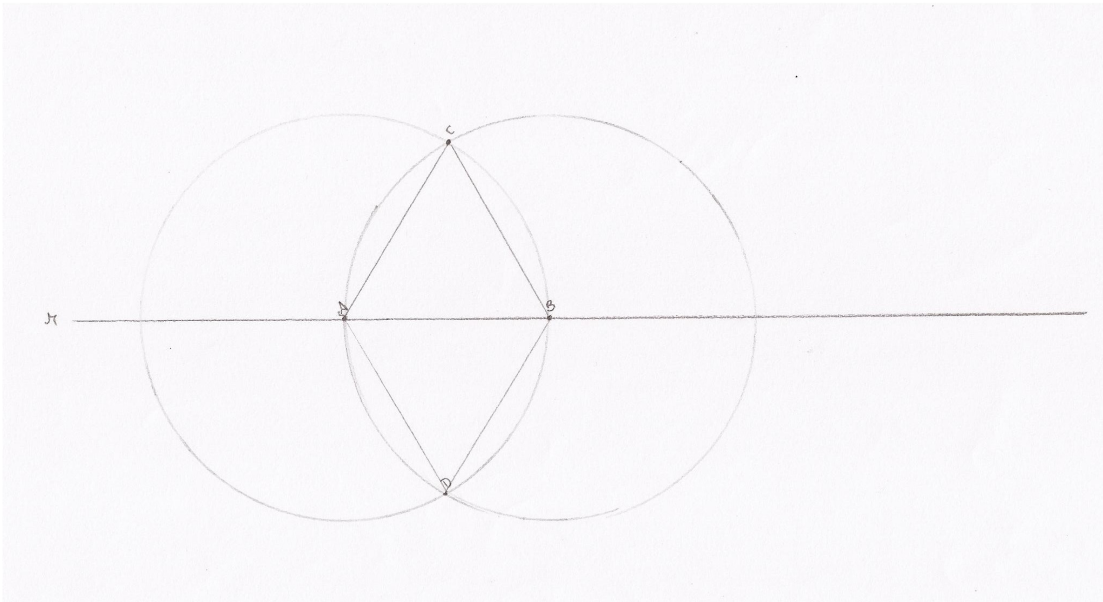


Figura 13 - Construção do losango com régua e compasso realizada pela aluna A

No GeoGebra, a visualização das propriedades puderam ser notadas com mais dinamismo que a construção com régua e compasso, destacando-se o potencial que esse software oferece. Vejamos, na Figura 14, a construção do aluno V:

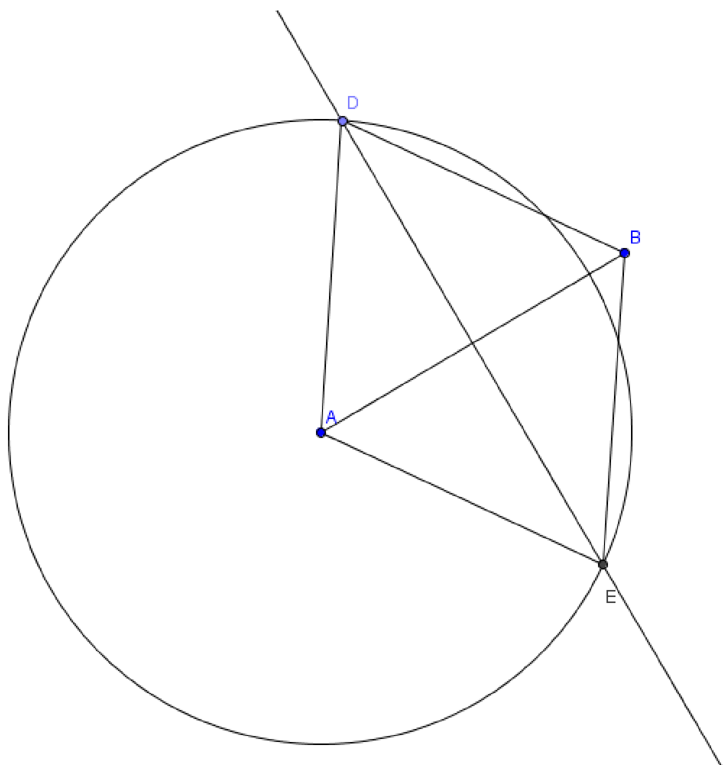


Figura 14 - Construção do losango no GeoGebra pelo aluno V

As construções realizadas nesse encontro caracterizam o 2º Nível ou Análise de van Hiele, pois os alunos precisavam entender o conceito de reta, diagonais, ângulos, ponto de intersecção para executar cada passo da construção, e depois interpretar a definição e propriedades do paralelogramo, retângulo e losango. Observando a escrita dos cartazes, os alunos retomaram que o retângulo, o losango e o quadrado eram tipos especiais de paralelogramo. Mas não conseguiram estabelecer que o quadrado é um tipo especial de retângulo, losango e paralelogramo, por exemplo, mas perceberem que esses tipos de quadriláteros possuíam propriedades em comum. Caso os alunos determinassem a inclusão de classe satisfatoriamente, destacaríamos o 3º Nível ou Dedução Informal, por interpretaram os cartazes expostos no Laboratório e reconheceram que as propriedades de um grupo de quadriláteros podem ser identificadas em outro grupo e estabelecerem essa relação formalmente. Assim, o grupo transitava entre o 2º e o 3º Nível. A fase da orientação dirigida é destacada, já que as atividades realizadas permitiram aos alunos a interpretação e compreensão das definições e das propriedades dos quadriláteros estudados.

4.2.6. Sexto Encontro

O último encontro aconteceu no dia vinte e cinco de outubro no 3º período. Os sete alunos presentes participaram da última construção geométrica, a do quadrado (Apêndice H), utilizando régua e compasso e o software GeoGebra. O Laboratório de Informática não estava disponível, assim sendo, o encontro foi desenvolvido em outra sala.

Dois grupos foram formados para realizarem as construções do quadrado, devido à falta de computadores e de mesa para todos os alunos construírem com régua e compasso. O mesmo grupo formado no encontro anterior, pelos alunos G, O e T, e que tinha ficado responsável por fazer a construção no GeoGebra, agora utilizaria os instrumentos régua e compasso para construir o quadrado. A mesma dinâmica foi aplicada ao outro grupo, formado pelos alunos P, A, V e C, que no encontro anterior tinha se encarregado em interpretar a construção do retângulo com régua e compasso sem o uso dos passos da construção, mas agora construiria o quadrado no GeoGebra. Como nessa sala não havia computadores, utilizamos um computador portátil para que o grupo pudesse realizar a sua tarefa. A instrução aos grupos foi de realizarem a construção, cada um com o recurso disponível, mas dessa vez, sem a sequência dos passos entregues ou o desenho da construção.

Os dois grupos construíram o quadrado, utilizando somente segmentos para os lados, construídos com a régua. Questionando-os sobre a definição do quadrado e, alguns olhando os cartazes confeccionados no terceiro encontro sobre cada tipo de quadrilátero, responderam que era um tipo de quadrilátero que tinha quatro ângulos congruentes e quatro lados congruentes. Com essa resposta, a professora-pesquisadora orientou os alunos a observarem a figura construída para justificar se, de fato, primeiramente, os quatro lados eram congruentes.

O grupo responsável pela construção com régua e compasso argumentou que tinham medido com a régua os lados do quadrado. Relembrando aos grupos sobre a régua sem graduação utilizada nas construções, os alunos disseram que não sabiam como fazer a construção. Argumentando para que fizessem um esforço para relembrarem das construções que já haviam sido realizadas, surgiu o comentário de começar com dois pontos para traçar a reta. E assim, o grupo da construção com régua e compasso começou a organizar a sequência de passos para a construção, que mesmo não resultando em um quadrado, a ideia dos alunos era construir círculos com a mesma abertura do compasso para mostrar que os lados do quadrado corresponderiam à medida dos diâmetros desses círculos. Um par de lados opostos realmente correspondia ao diâmetro do círculo, mas com essa construção, o outro par de lados não era a medida do diâmetro. O grupo sabia que precisava mostrar que os ângulos também eram congruentes. Ou seja, estavam utilizando a definição para provar que, de fato, a figura era um quadrado. Para esses alunos, que nunca tinham realizado uma atividade com construção geométrica, para depois solicitar que organizassem o procedimento da construção para explicar ao outro grupo, foi uma atividade que exigiu mais interpretação e compreensão, já que estavam apenas habituados com os passos da construção entregues prontos.

Esperava-se mais agilidade do grupo que tinha como recurso o GeoGebra, pois no encontro anterior tinham organizado a sequência dos passos da construção a partir do desenho da construção finalizada do retângulo. No entanto, esse grupo não conseguiu finalizar uma construção coerente, detendo-se na marcação de pontos aleatórios, como observados na Figura 15. Inicialmente construíram uma reta e depois um círculo que a interceptou, sendo construídos os pontos de intersecção. Adiante, construíram uma reta, passando por um ponto aleatório fora do círculo, perpendicular a reta inicial. Outra reta perpendicular à reta inicial foi construída, mas passando por um ponto aleatório marcado no interior no círculo. Um ponto aleatório foi construído fora do círculo e construída uma reta paralela à reta inicial e passando por esse ponto.

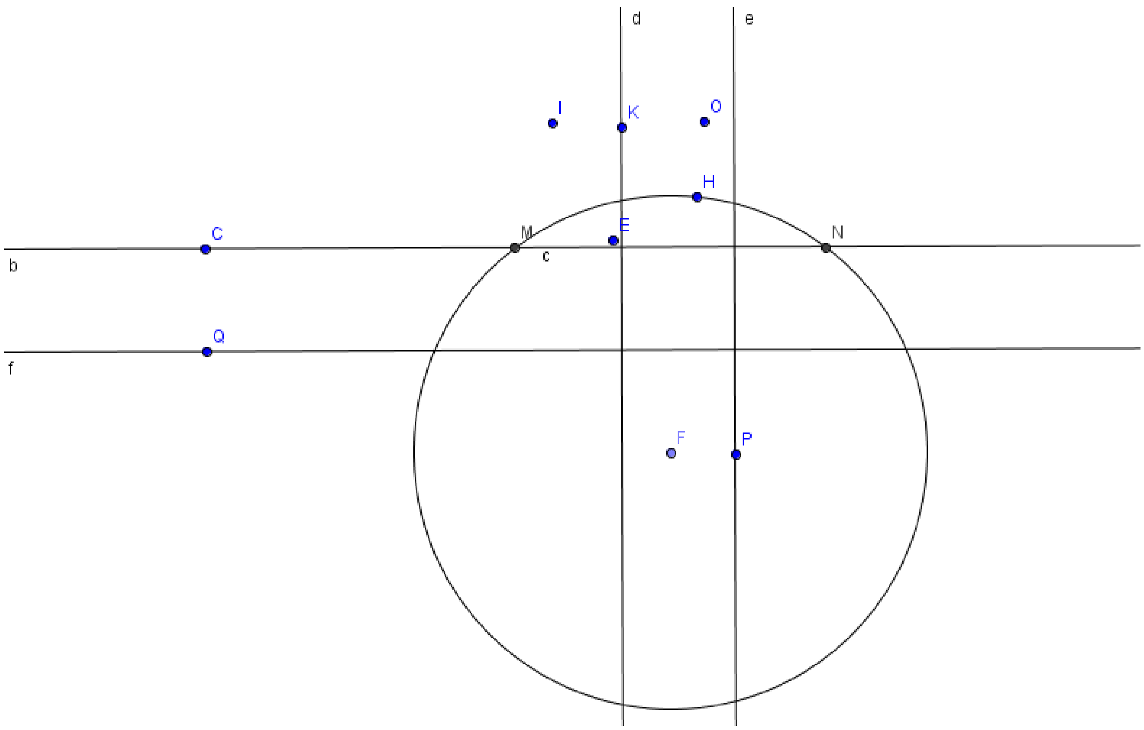


Figura 15 - Tentativa de construção do quadrado no GeoGebra

Poderíamos imaginar, mesmo o grupo não mencionando, que o quadrado que gostariam de ter construído, seria o que está no interior do círculo, mas que foi desconsiderada essa possibilidade antes de prosseguir com qualquer passo de construção. O próprio grupo comentou, que o procedimento que tinham realizado estava desorganizado e com construções que eram apenas tentativas, mas que não tinham conseguido fazer nenhuma conclusão.

De qualquer maneira, os grupos se esforçaram na tentativa de conseguir organizar a construção do quadrado, levando em consideração que precisavam construir uma figura que tivesse os quatro lados e os quatro ângulos congruentes.

Para visualizar as propriedades na construção do quadrado e, como não tinham finalizado a atividade, a professora-pesquisadora orientou os grupos na construção. Os primeiros passos que os grupos deveriam fazer eram os mesmos utilizados pelo grupo que tinha utilizado a régua e o compasso, ou seja, construir uma reta para depois construir círculos. Os alunos entendiam que, para construir uma reta, precisavam marcar dois pontos. Os círculos foram construídos com centro em um desses pontos e passando pelo outro, resultando em dois círculos. A seguir, os alunos construíram retas perpendiculares à reta inicial e passando pelos pontos que deram origem a essa reta. O grupo que estava usando régua e compasso reconheceu que precisariam utilizar outros passos para construir as retas perpendiculares, que no GeoGebra não precisaria. Mas, foram orientados, nesse momento, a não construírem, para os dois grupos poderem terminar juntos a construção e, também, em função do tempo, já que era o último encontro. Os alunos finalizaram a construção sem maiores dificuldades, restando marcar os pontos de intersecção e unir os segmentos que seriam os lados do quadrado.

O estudo e a construção do trapézio não foram possíveis concretizar pela limitação dos períodos cedidos para realizar a pesquisa e pela recuperação do conteúdo com os alunos que estava sendo trabalhado em sala de aula pela professora regente. Mas, a professora-pesquisadora fez leitura da definição e propriedades, observando no cartaz construído.

Em seguida, oralmente, foi perguntado aos alunos sobre o que recordavam da inclusão de classes que tínhamos concluído em encontros anteriores. Escrevendo no quadro, citaram que o quadrado, o losango e o retângulo eram tipos especiais de paralelogramo, conclusão e concordância da maioria dos alunos. Para avançar mais na inclusão de classes, a professora-pesquisadora questionou aos alunos se o quadrado podia ser incluído em alguma outra classe. Responderam que na classe do paralelogramo, do losango e do retângulo, sendo escrito no quadro para que pudessem visualizar melhor. Com essa resposta, comparávamos os cartazes para observar que realmente podíamos concluir isso. Dessa maneira, o quadrado era um tipo especial de: paralelogramo, mas com os quatro lados e os quatro ângulos congruentes; de losango, mas com os quatro ângulos congruentes; de retângulo, mas com os quatro lados congruentes. Ainda, o retângulo podia ser incluído no grupo do paralelogramo, assim como o losango.

Continuando, na próxima atividade (Apêndice I), os alunos receberam um pedaço de papel pardo com seis tiras, com as seguintes escritas: quadriláteros, paralelogramo, quadrado, losango, retângulo e trapézio, a serem fixadas para organizar um diagrama sobre a inclusão de classes. Cada aluno recebeu uma tira, com exceção de um aluno que fez dupla com outro colega, para fixar no cartaz. Orientados, para manter a organização, apenas perguntando que ficha poderia ser colocada no topo do diagrama ou na base, os alunos foram montando o diagrama, como pode ser visualizado na Figura 16.

Figura 16 - Diagrama da Inclusão de Classes construída pelos alunos

Com essa atividade do diagrama da inclusão de classes, finalizamos os encontros.

4.3. REFLEXÕES SOBRE A PRÁTICA

Nas construções geométricas organizadas para aplicar aos alunos, a falta de conhecimento de determinados conceitos e, que estavam organizados no planejamento como um item a ser relembrado, pois já era um conteúdo que imaginávamos ter sido trabalhado, influenciaram no avanço dos níveis de compreensão do raciocínio geométrico de van Hiele. Esperávamos que os alunos já soubessem, por exemplo, identificar retas paralelas ou concorrentes, mas quase todo grupo afirmou nunca ter ouvido essas expressões. O que era para ser uma atividade para relembrar conceitos resultou, praticamente, em um conhecimento novo. No final dos encontros, quando questionados sobre a opinião das construções geométricas, se enfrentaram algum obstáculo e se gostaram de participar da pesquisa, os alunos afirmaram que no início sentiram certa dificuldade, mas depois, tendo mais contato com os instrumentos régua e compasso e o GeoGebra, não era mais tão difícil.

O tempo dedicado para os primeiros encontros foi maior do que o previsto, pois foi o primeiro contato com as construções geométricas, além de não conhecerem o GeoGebra e terem a inexperiência em manusear o compasso. É como aprender a dinâmica de um novo jogo: na primeira vez, é preciso observar e perguntar, para depois começar a jogar, sendo as primeiras tentativas uma experiência de contato e familiarização com acertos e erros até compreender como o jogo acontece. Nas construções em que os passos eram entregues aos alunos, com o tempo, esses mostravam habilidade e rapidez em fazê-las. Com isso, numa atividade foi pedida a elaboração dos passos da construção. Essa proposta foi precipitada, pois os alunos estavam no começo do processo de domínio da construção com os passos entregues e, assim que demonstraram segurança, já foi exigido um conhecimento além do que podia ser esperado. E o resultado foram construções realizadas com intervenções, ou seja, não foram organizadas totalmente pelos alunos. Mesmo assim, puderam ser inseridos numa situação em que precisaram entender definições e propriedades para conseguir organizar algum procedimento de construção geométrica.

Pensamos que atividades com construções geométricas são válidas para o esclarecimento e prática de uma Geometria teórica, contribuindo para o entendimento da visualização das propriedades, mas precisa ser um processo contínuo e gradual ao longo dos anos escolares. Não são apenas seis encontros que contribuirão para que os alunos estejam preparados e aptos a realizarem construções de figuras geométricas e interpretarem qualquer propriedade. O tempo não é mera desculpa para justificar o resultado que se desejava obter, mas é um fator que contribuiria para a pesquisa ser trabalhada mais detalhadamente, respeitando o tempo de aprendizagem de cada aluno para que os níveis de van Hiele fossem sendo avançados significativamente.

Fazendo uma retrospectiva do primeiro ao último encontro, percebemos que contribuímos para o crescimento de conhecimentos desses alunos participantes. Nos primeiros encontros, por exemplo, os alunos não compreendiam o significado de retas paralelas, pois foi estudado somente nesse momento. Com o avanço das atividades, esse conceito tornou-se natural nas justificativas das construções dos quadriláteros. Antes mesmo de realizar a construção no GeoGebra de retas paralelas, a maioria dos alunos já esperava pelo resultado que depois visualizaria na interface. Caso as duas retas não fossem paralelas, identificariam que houve algum equívoco. Dessa maneira, julgamos ter contribuído para uma aprendizagem de novos conceitos na Geometria que podem ser utilizados em futuras resoluções de problemas geométricos. Os alunos são capazes de identificar os diferentes tipos de quadriláteros e visualizar determinadas propriedades e as construções geométricas contribuíram para que isso acontecesse.

A pesquisa não visava somente reunir um material para subsidiar as análises desse trabalho escrito. Além de utilizar as construções geométricas para o estudo da visualização das definições e propriedades, interessava conhecer a opinião dos alunos sobre os materiais e recursos usados nos encontros. Em diálogos informais com alguns alunos, houve relatos demonstrando satisfação em aprender um conteúdo matemático usando, principalmente, régua e compasso. A preferência por esse uso, talvez, tenha acontecido pelo fato de envolver, primeiramente, os alunos em atividades com a utilização da régua e do compasso e que demandou tempo para a familiarização com os instrumentos e os passos das construções. O que se percebeu foi a resposta positiva dos alunos em trabalhar com régua e compasso, inicialmente. Depois de algumas atividades realizadas no GeoGebra, os alunos aceitaram mais naturalmente o trabalho com o programa, que de acordo com alguns alunos, tinham dificuldade em localizar as ferramentas necessárias para a construção ser organizada e falta de paciência em explorar os recursos do programa. Entendemos que com o tempo e com a realização das construções das figuras geométricas, os alunos também sintam ainda mais interesse em trabalhar e explorar o GeoGebra. E, de fato, isso aconteceu, destacando nas atividades finais, a pouca resistência em utilizar o software para fazer as construções.

Contudo, os alunos compartilham e defendem a importância das construções realizadas no GeoGebra para poderem manipular os vértices e constatarem a validade das propriedades e da sua permanência quando a figura aumenta ou diminui de tamanho ou altera a posição. Isso evidencia o potencial do dinamismo das figuras que são proporcionadas pelo software.

Observando as análises dos encontros, poucos erros dos alunos foram discutidos usando a teoria de van Hiele. Concluímos que determinadas situações em que os alunos estavam envolvidos não contribuíram para que expusessem suas dificuldades e dúvidas e que fossem discutidas, devido à imaturidade de certos conteúdos necessários para o desenvolvimento das construções geométricas. Um conteúdo que poderia ser discutido a partir do conhecimento que os alunos possuíam, importante para construir alguma definição ou propriedade, foram trabalhados como conceitos novos.

Refletindo sobre os planejamentos dos encontros, algumas modificações poderiam ser realizadas nas atividades, pensando na melhor aprendizagem para os alunos. As construções que foram realizadas com régua e compasso também eram construídas no GeoGebra, utilizando, na maioria das vezes, os mesmos passos de construção. Isso resultou num processo de repetição de construções. Contudo, poderíamos ter abordado construções dos quadriláteros a partir das propriedades das suas diagonais. Ou ainda, manter as construções com régua e compasso, pois se observa o pouco contato com esses instrumentos e que são importantes para o desenvolvimento da coordenação motora fina e dos traçados dos desenhos, e apresentar aos alunos a maioria das construções geométricas finalizadas no GeoGebra para que pudessem visualizar as propriedades, dando o dinamismo necessário para a construção.

Algumas construções utilizadas foram particulares, como por exemplo, a construção do retângulo com régua e compasso. Essa opção foi considerada para que a construção não se tornasse extensa e com muitos passos para serem considerados. Isso tornaria o desenho, visualmente, cheio de traços e, talvez, confuso para o entendimento do aluno. Para que a construção fosse geral, poderia ser utilizado outro instrumento, como o esquadro para a construção de retas paralelas e perpendiculares.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria, com sua teorização, é vista com aversão por alunos e professores e consequentemente, muitas vezes, não é estudada nas escolas. Nos alunos, observam-se dificuldades pela falta de visualização das propriedades, impedindo o raciocínio geométrico pelo conhecimento trazido pronto nos livros didáticos. Ou seja, a Geometria quando é trabalhada, não traz a teoria aliada à prática. Para que essa aliança aconteça, uma maneira seria envolver os alunos com atividades sobre as construções geométricas com o uso da régua e do compasso e do software GeoGebra. Não estamos querendo afirmar que o Desenho Geométrico resolveria todos os problemas da Geometria, mas pensamos que é uma possibilidade de ajudar os alunos a entenderem determinadas definições e propriedades.

A motivação e o interesse em desenvolver um estudo com construções geométricas não é recente, mas a oportunidade concreta surgiu no final do curso e, não desperdiçando a tecnologia que é oferecida como recurso didático para complementar as aulas, utilizou-se o software GeoGebra para possibilitar dinamismo que o desenho no papel não oferece. Com a aplicação das atividades em cada encontro, percebemos que os alunos são poucos envolvidos em situações em sala de aula que vão além do resolver exercícios escritos no quadro. Não é uma crítica aos professores, mas utilizar alternativas para ensinar Geometria é uma possibilidade de cativar o aluno e despertar o interesse para as aulas de Matemática. Isso foi percebido no momento em que os alunos demonstraram dúvidas sobre como manusear o compasso e o software GeoGebra e, quando exploradas algumas de suas utilidades, foram surpreendidos pelo dinamismo que o programa oferecia. Já o desenho no papel, vai além de desenhar círculos e retas sem objetivos específicos, pelo contrário, os alunos perceberam que fazem parte da sequência lógica para a construção de figuras geométricas.

Essa experiência com construções geométricas, mesmo desenvolvida em pouco tempo, é motivo para poder avaliar positivamente o aprendizado que os alunos participantes adquiriram. Isso porque foram momentos em que se possibilitou a construção de figuras geométricas e, com isso, a aplicação de conceitos e propriedades de uma maneira menos teórica e metódica. A expressão “Que legal! Como isso pode acontecer?” dos alunos, ao visualizarem que as propriedades permaneciam inalteradas conforme moviam os pontos da construção no GeoGebra, e a transformação que as figuras proporcionavam, como por exemplo, o quadrado, o retângulo e o losango serem tipos especiais de paralelogramo, mostra o quanto foi gratificante o trabalho com a pesquisa e também o potencial do software com a Geometria Dinâmica. Mesmo utilizando régua e compasso, que são instrumentos concretos antigos, em tempos em que os alunos estão diariamente em contato com computadores e, por isso, também o motivo de incluir o programa na pesquisa, não tornou o computador mais desejado para realizar as construções geométricas.

A escolha em utilizar, de forma integrada, a régua e o compasso e o GeoGebra nas construções geométricas, justifica-se pelo fato do software oferecer dinamismo à construção, que não é visualizada no desenho com os instrumentos concretos. Porém, os alunos precisavam entender o que realmente acontecia quando alguma construção era observada na Zona Gráfica ao selecionarem algum comando, ou seja, entender o que o programa estava executando. Nesse sentindo, as construções geométricas com régua e compasso possibilitaram uma melhor compreensão na sequência dos passos da construção, que precisavam estar organizadas com uma sequência lógica, levando em consideração as definições e propriedades, para que o resultado final fosse coerente. Exemplificando: no GeoGebra, o desenho de retas paralelas foi construído ao selecionar o comando “Reta Paralela”, precisando selecionar algum ponto e depois a reta, semirreta ou segmento já construídos. Mas, com régua e compasso, foi preciso desenvolver uma sequência lógica de passos para que as retas paralelas fossem construídas, o que estimulou ainda mais o pensamento geométrico nos alunos. Cabe ressaltar que, no GeoGebra, também é possível realizar a mesma construção de retas paralelas, que foi realizada com régua e compasso. Mas no caso, os alunos foram orientados a utilizarem as ferramentas prontas disponíveis do software.

Para fazer as análises dos encontros, gravações foram feitas, para manter a fidelidade da fala dos alunos. Com isso, observamos que certas intervenções foram realizadas antes dos alunos responderem as suas conclusões, mesmo que um tempo fosse preciso para isso. Isto é, quando os alunos não respondiam imediatamente às perguntas, intervenções em forma de questionamentos eram feitas para induzi-los nas respostas, o que pode dificultar a interpretação do conhecimento que os alunos possuíam e construíam, conforme as atividades realizadas.

A turma, para realizar a pesquisa, foi do 8º ano, mas esses alunos não possuíam conhecimentos suficientes de conceitos básicos para serem utilizados nas atividades com construções geométricas. Com isso, pensamos que se o trabalho fosse realizado com uma turma mais adiantada, o foco da pesquisa se deteria mais nas construções geométricas e nas propriedades das figuras e pouco na revisão e novidade desses conceitos básicos. Mesmo com esses equívocos, a pesquisa foi válida e motivadora para ser utilizada em práticas posteriores, como professora. Talvez tenha mais desafios por estar trabalhando com um grupo maior de alunos e, provavelmente, o Laboratório de Informática não possua o número adequado de computadores e em perfeitas condições de uso. Mas os desafios fazem parte da carreira docente.

As construções geométricas utilizando a régua e compasso são importantes para os alunos terem contato com esses instrumentos e que constatamos serem mínimos. Também para perceberem a necessidade em organizar uma sequência lógica de passos de construção, sendo preciso conhecer as propriedades da figura que pretendem construir, tanto com a utilização da régua e compasso, quanto do software GeoGebra. Independente da construção que se realize, o aluno precisa obedecer cada passo para poder finalizar. Já no GeoGebra, algumas construções são omitidas e oferecidas como opção de ferramenta pronta, o que na régua e compasso, é preciso construir tudo. No entanto, o GeoGebra oferece um dinamismo que a construção no papel não proporciona e que proporciona o desenvolvimento do pensamento geométrico. No programa, o aluno compreende a aplicabilidade da definição e das propriedades ao mover os pontos da construção, por exemplo. A combinação GeoGebra e os instrumentos régua e compasso é a ideal para trabalhar com as construções geométricas, observada na prática dos encontros. A primeira oferece, a mais, o dinamismo e a outra o contato com o instrumento concreto, aperfeiçoando a coordenação motora fina e o traçado do desenho, e a necessidade da total organização de cada passo da construção, caso algumas ferramentas sejam disponibilizadas como prontas, como retas paralelas e perpendiculares. O que acaba acontecendo, pois o aluno não construirá sempre essas retas, sabendo que o GeoGebra as fornece prontas para serem utilizadas. Com régua e compasso, não existe essa opção, ou seja, será necessário organizar os passos dessas construções.

A fundamentação teórica utilizada para descrever a prática das atividades envolvendo as construções geométricas realizadas com os alunos, procurando observar e analisar o desenvolvimento do raciocínio geométrico para avaliar o nível de compreensão desses alunos, foi realizada de acordo com a teoria de van Hiele. Dessa maneira, observamos em alguns alunos, aspectos que permitem caracterizar a transição do 2º Nível ou Análise para o 3º Nível ou Dedução Informal. Os alunos perceberam que as figuras geométricas possuem propriedades e que precisam do enunciado de uma definição para caracterizá-las. As propriedades foram utilizadas para reconhecer as figuras, mas poucos alunos conseguiram fazer relações entre elas. A minoria conseguiu interpretar a inclusão de classes e, quando realizada, era com intervenções. Por isso, avaliamos o grupo, no todo, como representativo do 2º Nível de van Hiele. Mas o objetivo inicial era caracterizar como no 3º Nível e, talvez, isso não tenha acontecido pelo pouco conhecimento que os alunos possuíam sobre os conceitos que envolviam o estudo com as construções geométricas dos quadriláteros e pelo curto tempo dedicado, insuficiente para permitir esse amadurecimento.

Com o desenvolvimento desse trabalho, questionamentos e curiosidades surgiram sobre o Desenho Geométrico, que podem ser pesquisados para dar continuidade ao mesmo. Na verdade, pretendíamos seguir a escrita nesse trabalho, mas devido à necessidade de um período maior de tempo, inspiramo-nos como motivo para futuros interesses. O Desenho Geométrico era disciplina obrigatória, sendo excluída dos currículos escolares atuais, mas indicada, ressaltando alguns pontos de importância para o entendimento da Geometria, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998). Disso, surgiu o interesse em pesquisar nas escolas, que vivenciaram o Desenho Geométrico como componente obrigatório no currículo, como esse estudo foi desenvolvido pelos professores e qual a visão deles sobre o ensino de Geometria sem o uso das construções geométricas para o entendimento das propriedades. Isto é, coletar relatos desses professores para comparar o ensino de Geometria com e sem a utilização das construções geométricas com régua e compasso. Acrescentando ainda, o interesse em entender o comportamento e o raciocínio geométrico desenvolvido nos alunos que tiveram aulas com construções geométricas.

Provavelmente, existiriam professores que defenderiam o retorno do Desenho Geométrico nas salas de aulas, justificando a sua importância em relação à visualização das propriedades, que hoje são trazidas prontas nos livros didáticos sem nenhuma discussão, além de aperfeiçoar a linguagem geométrica e os traçados das figuras geométricas.

A diferença do Desenho Geométrico, quando disciplina obrigatória, é o fato das construções não se restringirem mais somente aos instrumentos régua e compasso, uma vez que temos à disposição softwares de Geometria Dinâmica. Com eles, as propriedades das construções podem ser visualizadas de uma maneira diferente do que quando construídas com régua e compasso, pois o dinamismo permite a observação de regularidades e propriedades que não são evidentes no desenho estático.

O ensino com construções geométricas precisa ter o cuidado para que o aluno não as considere como uma repetição dos passos de construção. Cada construção geométrica segue um raciocínio na organização dos passos e que precisa ser compreendido pelo aluno para que consiga entender e justificar o motivo da construção estar coerente. Ou seja, o aluno acaba sendo envolvido no processo da demonstração em Geometria.

REFERÊNCIAS

ANDERSON L. A quadratura do círculo. In: EVES, H. **Tópicos de História da Matemática par uso em sala de aula: Geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992a, v.3, 77 p.

ANDERSON L. Duplicação do cubo. In: EVES, H. **Tópicos de História da Matemática par uso em sala de aula: Geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992b, v.3, 77 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental.** Brasília: MEC/SEF. 1998. 148p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 24 set. 2012.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p. 59-72.

EVES, H. Introdução: uma visão geral. In: EVES, H. **Tópicos de História da Matemática par uso em sala de aula: Geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992, v.3, 77 p.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V.; BURIGO, E. Z.; GARCIA, V. C. V. **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para a formação do professor de Matemática.** 1. ed. Porto Alegre: Evangraf, 2012, v.01, 180 p.

HABEGGER P. O problema da trissecção**.** In: EVES, H. **Tópicos de História da Matemática par uso em sala de aula: Geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992, v.3, 77 p.

MATOS, J. M.; SILVA, M. C. L. **O Movimento da Matemática Moderna e Diferentes Propostas Curriculares para o Ensino de Geometria no Brasil e em Portugal.** Bolema, Rio Claro: UNESP, v. 24, nº 38, p. 171-196, 2011.

NASSER, L. **A Teoria de van Hiele para o Ensino de Geometria: Pesquisa e Aplicação.** In: 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. **Anais.** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática - UFRJ, 1993, p. 29-40.

NASSER, L. **O desenvolvimento do raciocínio em geometria.** Boletim GEPEM, n. 27, Rio de Janeiro, 1990, p. 93-99.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático**. Módulo I: Formação de Conceitos Geométricos. Rio de Janeiro: IM/ UFRJ, 2011.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica.** São Paulo. 1989. 196 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000045423>. Acesso em: 19 set. 2012.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares.** Campinas. 1991. 348 p. Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000036077>. Acesso em: 12 set. 2012.

RETZ M.; KEIHN, M. D. Construções com régua e compasso. In.: EVES, H. **Tópicos de História da Matemática par uso em sala de aula: Geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992, v.3, 77 p.

SILVA, C. I. D. N. **Proposta de aprendizagem sobre a importância do desenho geométrico e da geometria descritiva.** Curitiba. 2006. 103p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_arquivos/3/TDE-2007-03-09T122009Z-514/Publico/CLAUDIO%20EDUC.pdf>. Acesso em: 19 agos. 2012.

USISKIN, Z. **Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar.** In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, Ed. Atual, 1994, p. 21-39.

VALENTE, W. R. **Uma história de matemática escolar no Brasil, 1730 – 1930.** 2. ed. São Paulo: Annablume, 2007. 214p.

VARHIDY, C. G. J. L. **Desenho geométrico: uma ponte entre a álgebra e a geometria: resolução de equações pelo processo Euclidiano.** Ouro Preto. 2010. 92 p. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Charles_Georges_Varhidy.PDF>. Acesso em: 21 set. 2012.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.** Belo Horizonte. 2001. 211p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/FAEC-85DGQB/zuin_elenice_disserta_nopw.pdf;jsessionid=D298071C01DFF38B9A4EBD3A3A613C5D?sequence=1>. Acesso em: 24 ago. 2012.

ZUIN, E. S. L. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental e o Ensino das Construções Geométricas, entre outras considerações.** GT 19 - Educação Matemática. 2002. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/25/texced251.htm#gt19>. Acesso em: 13 ago. 2012.

APÊNDICE A – CARTA DE AUTORIZAÇÃO

Autorização para desenvolvimento de trabalho na Instituição

Ilmo. Sr. Cárin da Silva Ferreira
Diretora da Escola Estadual de Ensino Fundamental Rio de Janeiro

Solicito sua autorização para que a acadêmica Carine Muraro Berti, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, desenvolva seu trabalho de conclusão de curso na Escola Estadual de Ensino Fundamental Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2012.

Os objetivos do trabalho, estritamente acadêmicos, em linhas gerais, são

- Organizar, aplicar e analisar as atividades para o processo de ensino e aprendizagem de quadriláteros com a utilização do software GeoGebra e das construções geométricas com régua e compasso.
- Estudar as contribuições do Desenho Geométrico para o ensino e aprendizagem da Geometria.
- Propor situações que possam envolver os alunos no processo de construção de conceitos geométricos.
- Possibilitar o envolvimento dos alunos no estudo da Geometria, utilizando como recursos materiais a régua, o compasso e o software GeoGebra para propiciar o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Neste sentido, torna-se importante proceder à coleta de dados, incluindo registros em vídeo e fotográfico, para futuras análises e obtenção dos resultados relacionados com a aprendizagem da Matemática.

Dessa forma, nessa oportunidade, estamos solicitando sua autorização para a realização da coleta de dados mencionada.

Para manifestação de sua concordância, é suficiente sua declaração e assinatura nesse documento.

Ao seu dispor para quaisquer esclarecimentos, envio cordiais saudações.

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática – UFRGS
Porto Alegre, 08 de outubro de 2012.

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _______________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma __________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada ***Régua, compasso e computador: uma combinação para estudar os quadriláteros***, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) ***Carine Muraro Berti***. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada por ***Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.***

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Possibilitar o envolvimento dos alunos no estudo da Geometria, utilizando como recursos materiais a régua, o compasso e o software GeoGebra para propiciar o desenvolvimento do raciocínio geométrico.
- Estudar as contribuições do Desenho Geométrico para o ensino e aprendizagem da Geometria.
- Propor situações que possam envolver os alunos no processo da construção de conceitos geométricos.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em encontros, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Av. Bento Gonçalves 9500 – Instituto de Matemática.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de _______________ de _______.

Assinatura do Responsável:
Assinatura do(a) pesquisador(a):
Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE C – MATERIAL UTILIZADO NOS ENCONTROS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA OU APLICADA/ INSTITUTO DE MATEMÁTICA

RÉGUA, COMPASSO E COMPUTADOR:
UMA COMBINAÇÃO PARA ESTUDAR QUADRILÁTEROS

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL RIO DE JANEIRO

NOME DO ALUNO: ____

SÉRIE: ____________________ TURMA: ___________________________

IDADE: ____________________

PORTO ALEGRE, OUTUBRO DE 2012.

Conhecendo o software GeoGebra

O GeoGebra é um software livre de geometria dinâmica criado por Markus Hohenwarter e uma equipe de programadores. É um software de utilização gratuita, podendo-se fazer o download da ferramenta pelo site http://www.geogebra.org ou manuseá-la de maneira *online*.

Quando o usuário abrir o programa, a interface da Figura 1 é observada. Para isto, dê dois cliques consecutivos sobre o ícone GeoGebra que está na Área de Trabalho. Na parte superior, localizam-se os botões da ferramenta disponíveis. Na parte inferior, encontramos a janela de Entrada, em que os comandos são inseridos via teclado. No lado esquerdo, visualizamos a Zona Algébrica e no lado direito, a Zona Gráfica.

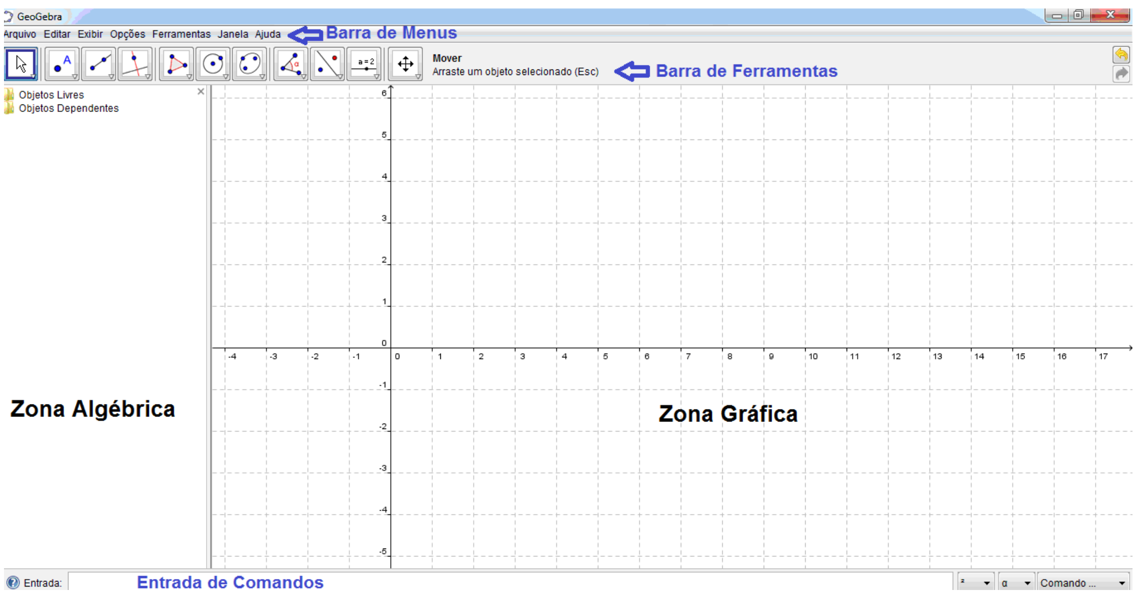


Figura 1 - Área de trabalho do GeoGebra

Destacando a barra de menus e a barra de ferramentas para melhor visualização na Figura 2 e 3, temos:

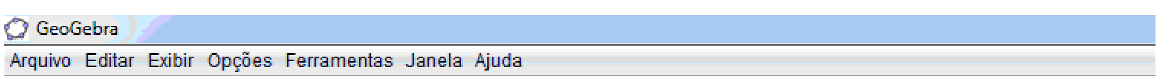


Figura 2 - Barra de Menus

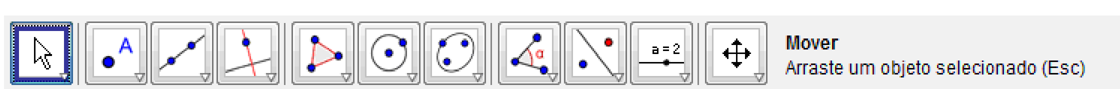


Figura 3 - Barra de Ferramentas

Na barra de ferramentas, observamos onze ícones, versão 3.2 do programa, sendo que cada um deles representa uma caixa de ferramentas. As opções de ferramentas possuem descrições que facilitam o uso, indicando os elementos geométricos necessários para a construção, como segue na Figura 4:

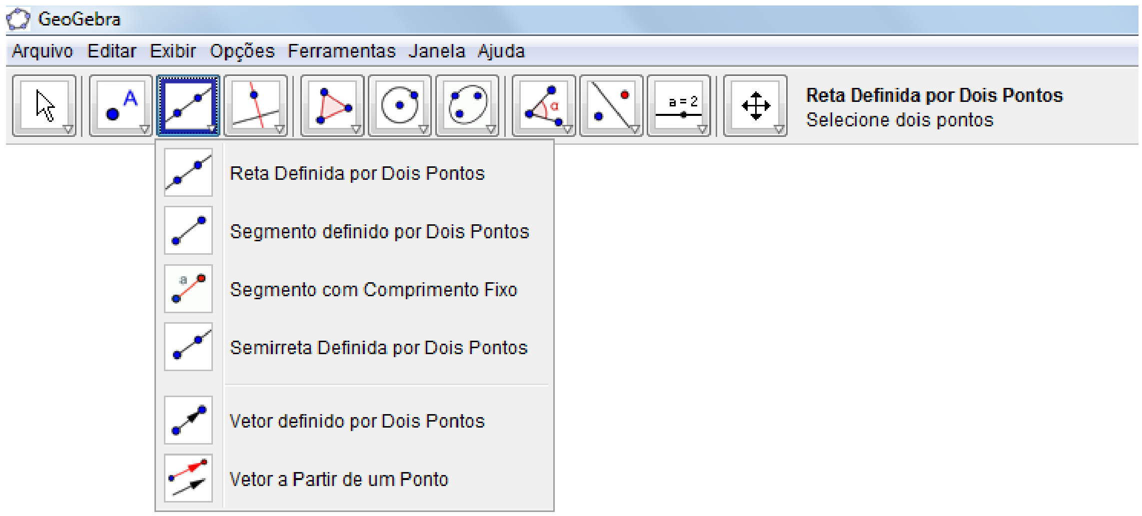


Figura 4 - Opções das Ferramentas

O GeoGebra fornece duas representações matemáticas: Gráfica e Algébrica, localizadas na Zona Gráfica e na Zona Algébrica ou Numérica, respectivamente.

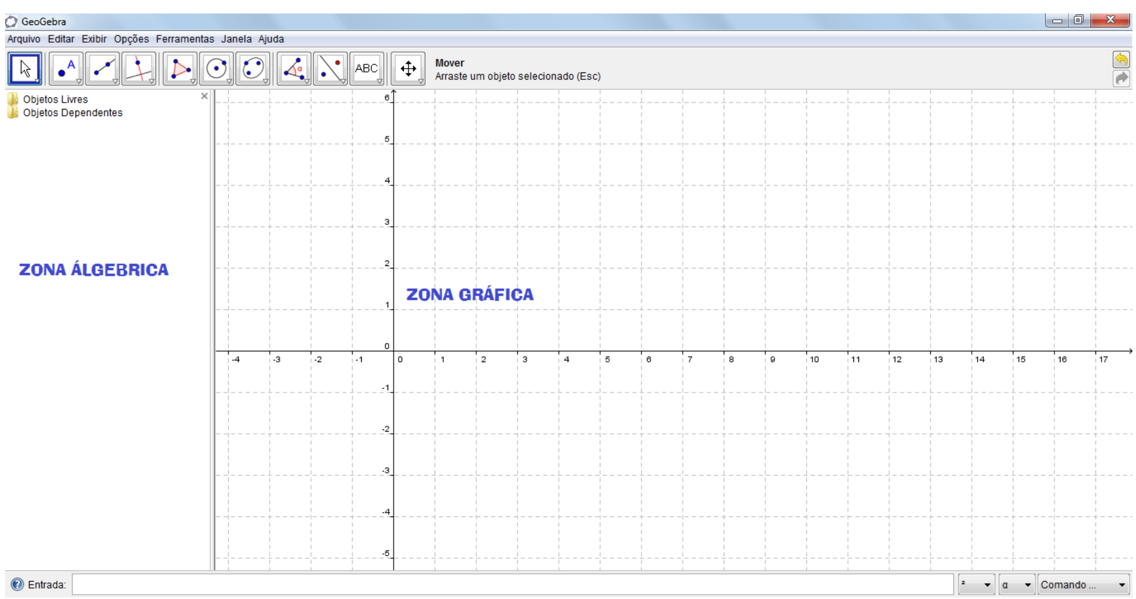


Figura 5 - Zona Gráfica e Zona Algébrica

Para exibir a apresentação em malha na Zona Gráfica, vá ao menu **exibir**, desative a opção **eixos** e selecione a opção **malha**. Para obter a janela em branco, desative essas duas opções. Vejamos na Figura 6:

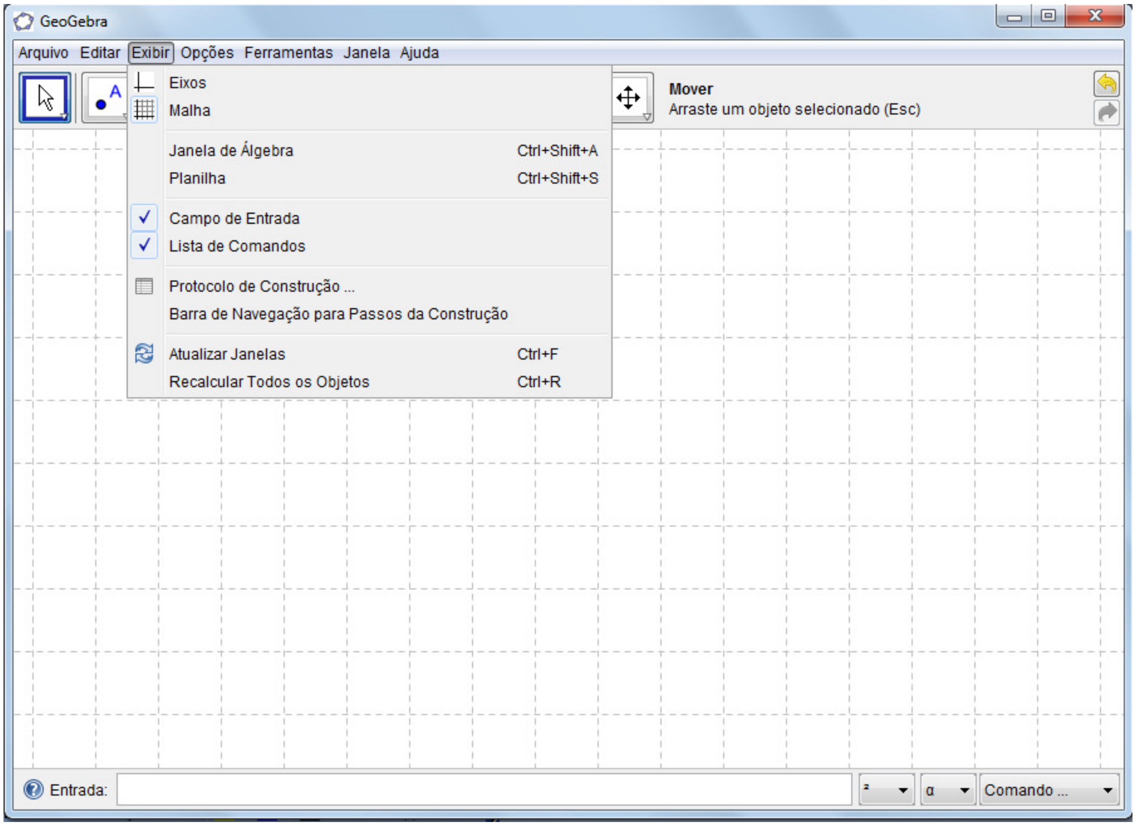


Figura 6 - Janela Gráfica com malha e sem eixos

Posição das Retas

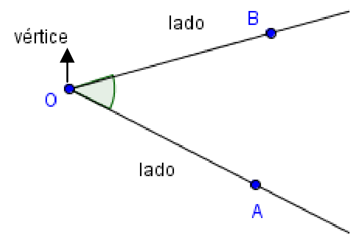
Posição de retas	Definição	Exemplo
Paralelas		
Concorrentes		

Duas retas concorrentes podem ser classificadas em perpendiculares ou em oblíquas. Mas antes de vemos esses dois conceitos, precisamos relembrar um pouco o conteúdo de ângulos.

ÂNGULO

Duas semirretas que tem a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta, formam um ângulo.

Na figura abaixo, o ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados. Indicamos esse ângulo escrevendo $A\hat{O}B$.



O ângulo reto é aquele que mede 90º.

Posição de retas	Definição	Exemplo
Perpendiculares		
Oblíquas		

Construção da reta paralela e da reta perpendicular com régua e compasso

Vamos construir com régua e compasso uma reta paralela a uma reta r dada, passando por um ponto P, fora da reta, também dado.

a) Reta r definida pelos pontos A e B

b) Com a ponta-seca do compasso em P, construir um círculo que passa por B

c) Marcar o outro ponto D de intersecção entre o círculo e a reta

d) Com a ponta-seca do compasso em D, construir um círculo que passa por P

e) Marcar o ponto E, ponto de intersecção entre a reta r e o último círculo

f) Com a ponta-seca do compasso em E, construir um círculo que passa por D

g) Marcar o ponto G, ponto de intersecção entre esse último círculo e o primeiro

A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela a r.

Vamos construir com régua e compasso uma reta perpendicular a uma reta s dada, passando por um ponto Q, fora da reta também dado.

a) Com a ponta-seca do compasso em Q, traçar um círculo que corta s em A e B

b) Com a mesma abertura AQ e a ponta-seca do compasso em A, traçar um círculo

c) Com a mesma abertura BQ e a ponta-seca do compasso em B, traçar um círculo

d) Marcar o ponto C que é a intersecção dos dois últimos círculos construídos.

A reta $\overleftrightarrow{QC}$ é perpendicular a s.

Construção da reta paralela e da reta perpendicular com o GeoGebra

Dada a reta t e o ponto E, pertencente à reta, construa por E uma reta perpendicular a reta t.

a) Construir um círculo h com centro em E e raio qualquer, interseccionando a reta t nos pontos F e G

b) Construir um círculo i com centro em F passando por E. Marcar os pontos H e I de intersecção entre os círculos h e i

c) Construir um círculo j com centro em I passando por E. Marcar o ponto J, intersecção entre os círculos h e j

d) Construir um círculo l com centro em J passando por E. Marcar o ponto L, intersecção entre os círculos l e j

e) Traçar a reta u entre os pontos E e L.

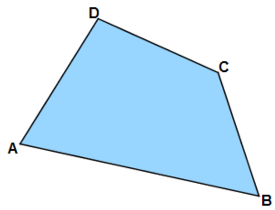
A reta u é perpendicular a t.

Reta paralela: utilizar os mesmos passos de construção quando construída com régua e compasso.

Quadriláteros

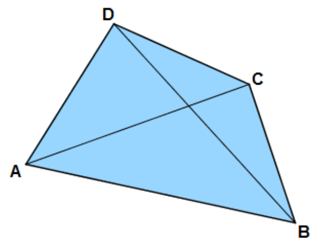
Quadrilátero é um polígono que tem quatro lados, 4 vértices, 4 ângulos internos e 4 ângulos externos.

Os elementos de um quadrilátero são:

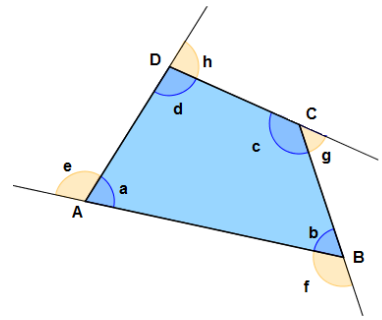


Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$

Vértices: A, B, C e D



Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$



Ângulos internos: a, b, c, d

Ângulos externos: e, f, g, h

Os lados opostos de um quadrilátero são dois de seus lados que não se interseccionam.

PARALELOGRAMO

Construção do __________________ com régua e compasso

a) Reta r definida pelos pontos A e B

b) Com a ponta-seca do compasso em P, ponto fora da reta r, construir um círculo que passa por B

c) Marcar o outro ponto D de intersecção entre o círculo e a reta

d) Com a ponta-seca do compasso em D, construir um círculo que passa por P

e) Marcar o ponto E e I, ponto de intersecção entre a reta r e esse último círculo

f) Com a ponta-seca do compasso em E, construir um círculo que passa por D

g) Marcar o ponto G, ponto de intersecção entre esse último círculo e o primeiro

h) Construir uma reta passando pelos pontos P e G

i) Marcar o ponto C, ponto de intersecção entre o primeiro círculo e a reta paralela construída

j) Construir os segmentos EG, GC, CI e IE.

Definição: O paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

Construção do Paralelogramo com o GeoGebra

a) Traçar um segmento de reta de comprimento qualquer, com extremidade nos pontos A e B

b) Marcar um ponto C a uma altura qualquer do segmento

c) Traçar um segmento de reta do ponto A ao ponto C

d) Traçar uma reta paralela ao segmento AB passando pelo ponto C

e) Traçar uma reta paralela ao segmento AC passando pelo ponto B

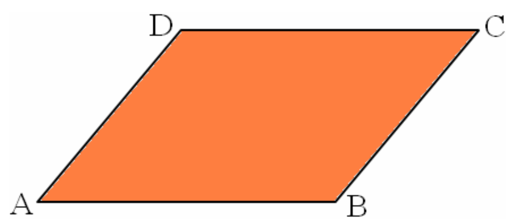
f) Marcar o ponto D que é a intersecção entre a reta paralela ao segmento AB e a reta paralela ao segmento AC

Propriedades do Paralelogramo

- As diagonais de um paralelogramo se cruzam nos respectivos pontos médios.

- Em todo paralelogramo, as medidas dos lados opostos têm o mesmo comprimento, ou seja, são congruentes.

- Cada diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes. Isto é, se $ABCD$ é um paralelogramo, então $\Delta ABC \cong \Delta CDA \, e \, \Delta ABD \cong \Delta CDB$.



- As medidas dos ângulos opostos de um paralelogramo também são congruentes.

RETÂNGULO

Definição: O _______________ é um quadrilátero que possui os quatro ângulos retos.

Construção do Retângulo com o GeoGebra

a) Construir um segmento AB

b) Traçar uma reta perpendicular ao segmento passando por A

c) Traçar uma reta perpendicular ao segmento passando por B

d) Marcar um ponto C sobre uma das retas perpendiculares

e) Traçar uma reta paralela ao segmento passando por C

f) Ponto D, intersecção entre a reta paralela e a reta perpendicular que passa por B

Construção do Retângulo com régua e compasso

a) Reta definida pelos pontos A e B
b) Construir um círculo com centro em B passando por A
c) Construir um círculo com centro em A passando por B
d) Marcar o ponto C, ponto de intersecção entre a reta e o último círculo
e) Construir um círculo com centro em C passando por A
f) Marcar os pontos D e F, pontos de intersecção entre o segundo e terceiro círculos
g) Marcar os pontos E e G, pontos de intersecção entre o primeiro e segundo círculos
h) Construir as retas DE, FG, DF e EG

$DFGE$ é o retângulo construído.

Propriedades do Retângulo

- As medidas dos lados opostos de um retângulo têm o mesmo comprimento, ou seja, são congruentes.

- As diagonais de um retângulo são congruentes e se cruzam no respectivo ponto médio.

LOSANGO

Definição: O losango é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes.

Construção do Losango com régua e compasso

a) Traçar um segmento AB
b) Com a mesma abertura do segmento e com a ponta-seca do compasso em A, construir um círculo que passa por B
c) Com a mesma abertura do segmento inicial e com a ponta-seca do compasso em B, construir um círculo que passa por A
d) Marcar os pontos C e D, pontos de intersecção entre os dois círculos
e) Traçar o segmento que une os pontos AC, CB, BD e DA

Construção do Losango com o GeoGebra

a) Traçar o segmento AB
b) Marcar o ponto médio C do segmento AB
c) Construir uma reta perpendicular passando por C e perpendicular ao segmento AB
d) Marcar o ponto D, ponto qualquer sobre a reta perpendicular
e) Construir um círculo com centro em A e passando por D
f) Ponto E, intersecção entre o círculo e a reta perpendicular
g) Traçar os segmentos que unem os pontos AD, DB, BE e EA

Propriedades do Losango

- As diagonais de um losango são perpendiculares e são as bissetrizes dos ângulos correspondentes aos vértices que unem.

- As diagonais de um losango se cruzam nos respectivos pontos médios

QUADRADO

Definição: É um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes.

Construção do Quadrado com o GeoGebra e com régua e compasso

a) Construir um segmento AB
b) Pelos pontos A e B, traçar perpendiculares ao segmento AB
c) Com a opção compasso, centro em A e passando por B, construir um círculo, que intercepta a reta perpendicular passando por A, no ponto D
d) Com a opção compasso, centro em B e passando por A, construir um círculo, que intercepta a reta perpendicular passando por B, no ponto C
e) Traçar o segmento definido pelos pontos C e D

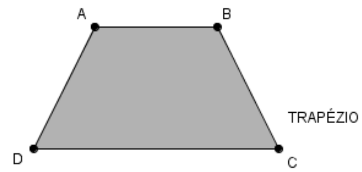
Propriedade do Quadrado

As diagonais de um quadrado são congruentes, perpendiculares entre si no ponto médio e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

TRAPÉZIO

Definição: É um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos paralelos.

Por exemplo, no trapézio $ABCD$:



- o lado $\overline{AB}$ é paralelo ao lado $\overline{CD}$ ($\overline{AB} // \overline{CD}$);
- o lado $\overline{BC}$ não é paralelo ao lado $\overline{AD}$.

Em um trapézio, os lados paralelos são chamados de bases. Nesse trapézio $ABCD$:

- $\overline{AB}$ é a base maior;
- $\overline{CD}$ é a base menor.

Um trapézio pode ser classificado em isósceles, retângulo ou escaleno.

Trapézio isósceles é aquele que tem os lados não paralelos com medidas iguais.

Trapézio escaleno é aquele que tem os lados não paralelos com medidas diferentes.

Trapézio retângulo é um trapézio escaleno que tem um dos lados não paralelos perpendicular às bases.

Propriedades do Trapézio Isósceles

Num trapézio isósceles, as diagonais são congruentes.

- Diagrama da inclusão de classes dos quadriláteros:

APÊNDICE D – PLANO DE ENSINO 01

I. Objetivos

Apresentar os objetivos e intenções da pesquisa a ser realizada, como também a apresentação dos sujeitos participantes.

Familiarizar-se com o software GeoGebra e com os materiais manipuláveis régua e compasso.

Compreender, diferenciar e conceituar reta, segmento de reta e semirreta.

Estudar, entender e identificar as posições das retas.

Aprender a fazer construções geométricas com régua e compasso e com o GeoGebra.

Familiarizar-se com as construções, com régua e compasso, de retas perpendiculares e de retas paralelas para resolver futuras construções dos quadriláteros.

Utilizar o software GeoGebra para dar dinamismo às construções de retas paralelas e perpendiculares.

II. Conteúdos

Conceito de reta, segmento de reta e semirreta. Posições relativas das retas. Ângulo. Retas paralelas e perpendiculares.

III. Recursos

Régua, compasso, borracha, lápis, folha de ofício, figuras de revista e jornal, material impresso, computador.

IV. Procedimentos metodológicos

No primeiro encontro, a professora-pesquisadora se apresentará e comentará sobre o trabalho que pretende desenvolver com os alunos e sobre a necessidade da colaboração, do empenho e da participação do grupo, para que os objetivos sejam alcançados. Os alunos serão informados de que receberão, de acordo com cada encontro, folhas contendo as informações necessárias sobre cada tópico estudado como material de apoio, além da régua e do compasso e do uso do computador para a realização das atividades. Já as atividades, que envolvem a resolução das construções geométricas usando régua e compasso e o GeoGebra serão utilizadas pela professora-pesquisadora para posterior análise.

Explicado, brevemente, o que será feito nos encontros, os alunos, um de cada vez, dirá o seu nome. Concluída essa etapa, questionamentos e dúvidas sobre a pesquisa poderão ser feitos. A orientação seguinte é preencher o nome e a turma na folha entregue, que será a capa da apostila.

A segunda etapa do encontro consiste no trabalho com o software GeoGebra. Para os alunos conhecerem um pouco sobre o programa, abaixo segue um texto de apoio para orientá-los nesse processo de familiarização com o GeoGebra.

Conhecendo o software GeoGebra

O GeoGebra é um software livre de geometria dinâmica criado por Markus Hohenwarter e uma equipe de programadores. É um software de utilização gratuita, podendo-se fazer o download da ferramenta pelo site http://www.geogebra.org ou manuseá-la de maneira *online*.

Quando o usuário abrir o programa, a interface da Figura 1 é observada. Para isto, dê dois cliques consecutivos sobre o ícone GeoGebra que está na Área de Trabalho. Na parte superior, localizam-se os botões da ferramenta disponíveis. Na parte inferior, encontramos a janela de Entrada, em que os comandos são inseridos via teclado. No lado esquerdo, visualizamos a Zona Algébrica e no lado direito, a Zona Gráfica.

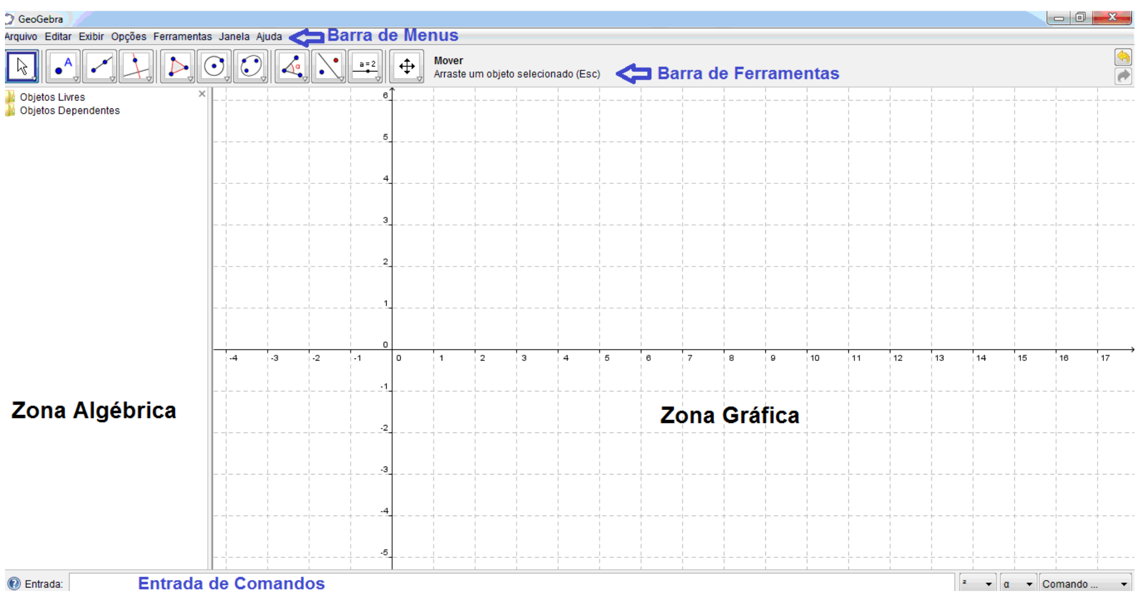


Figura 1 - Área de trabalho do GeoGebra

Destacando a barra de menus e a barra de ferramentas para melhor visualização na Figura 2 e 3, temos:

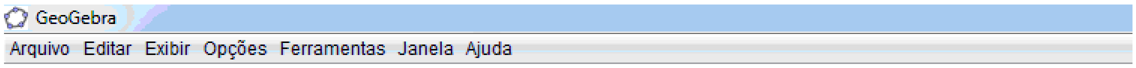


Figura 2 - Barra de Menus

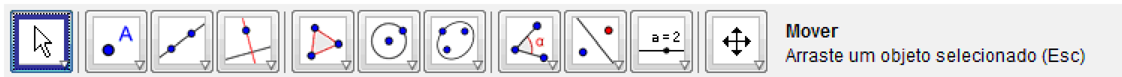


Figura 3 - Barra de Ferramentas

Na barra de ferramentas, observamos onze ícones, versão 3.2 do programa, sendo que cada um deles representa uma caixa de ferramentas. As opções de ferramentas possuem descrições que facilitam o uso, indicando os elementos geométricos necessários para a construção, como segue na Figura 4:

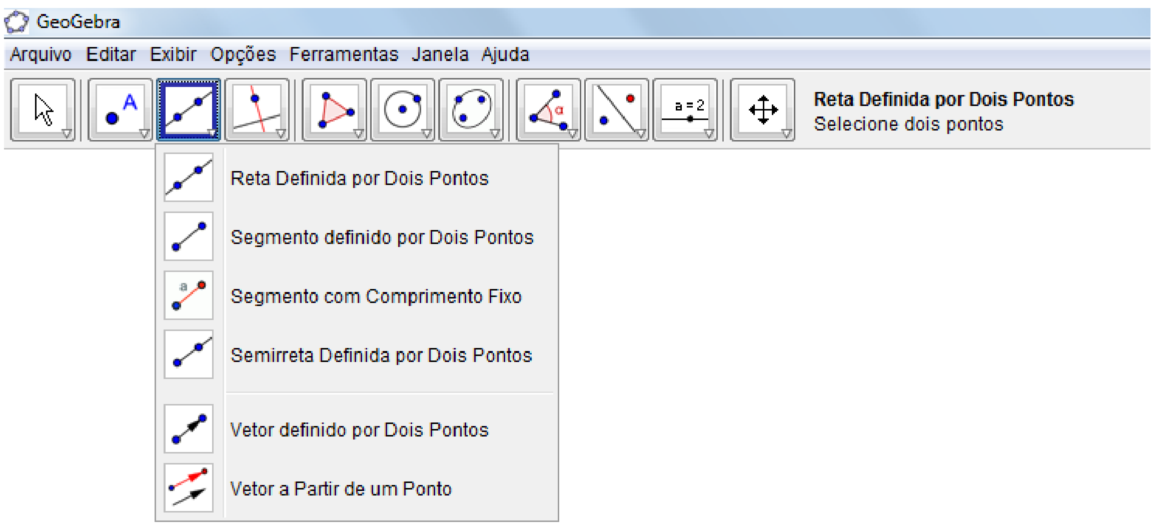


Figura 4 - Opções das Ferramentas

O GeoGebra fornece duas representações matemáticas: Gráfica e Algébrica, localizadas na Zona Gráfica e na Zona Algébrica ou Numérica, respectivamente.

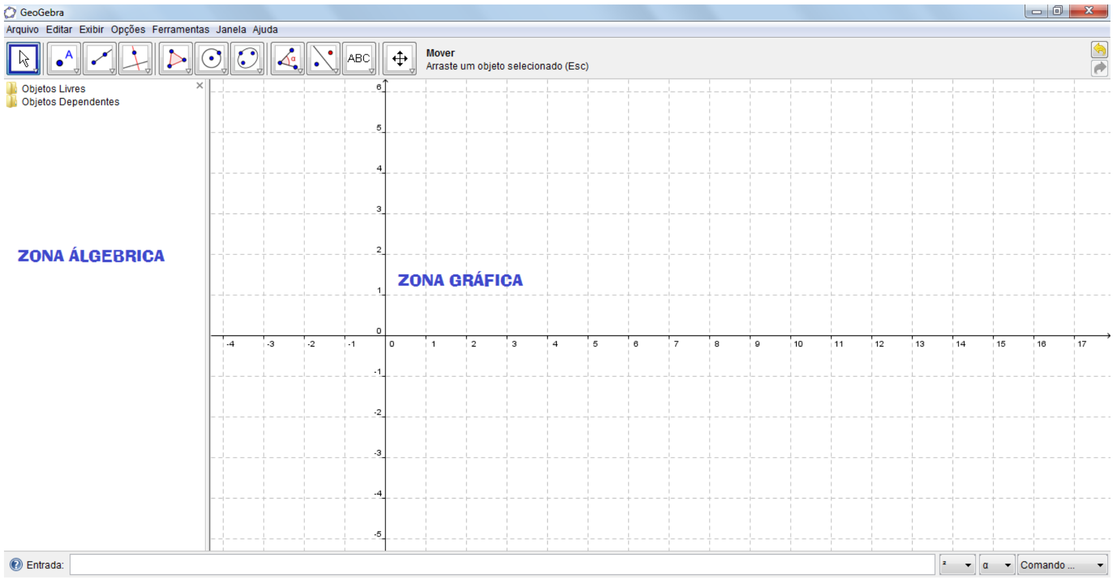


Figura 5 - Zona Gráfica e Zona Algébrica

Para exibir a apresentação em malha na Zona Gráfica, vá ao menu **exibir**, desative a opção **eixos** e selecione a opção **malha**. Para obter a janela em branco, desative essas duas opções. Vejamos na Figura 6:

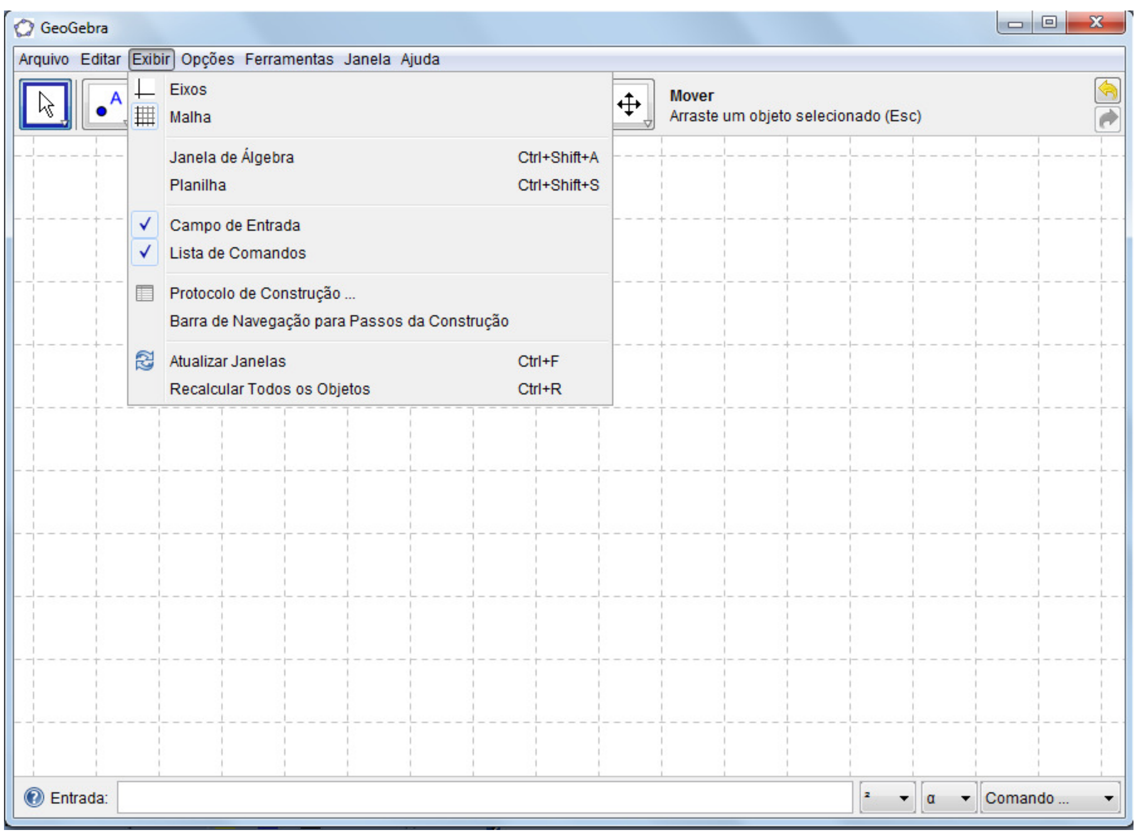


Figura 6 - Janela Gráfica com malha e sem eixos

Depois de conhecer um pouco sobre o GeoGebra, o aluno tem a liberdade de explorar o software e suas ferramentas. Realizada essa familiarização com o GeoGebra, os alunos serão orientados a explorar as ferramentas “reta definida por dois pontos”, “segmento definido por dois pontos” e “semirreta definida por dois pontos”. Com as construções na tela, os alunos serão convidados a conceituar reta, segmento de reta e semirreta. O objetivo é relembrar estes conceitos, que serão importantes para dar continuidade ao trabalho. A Figura 7 abaixo ilustra essas construções.

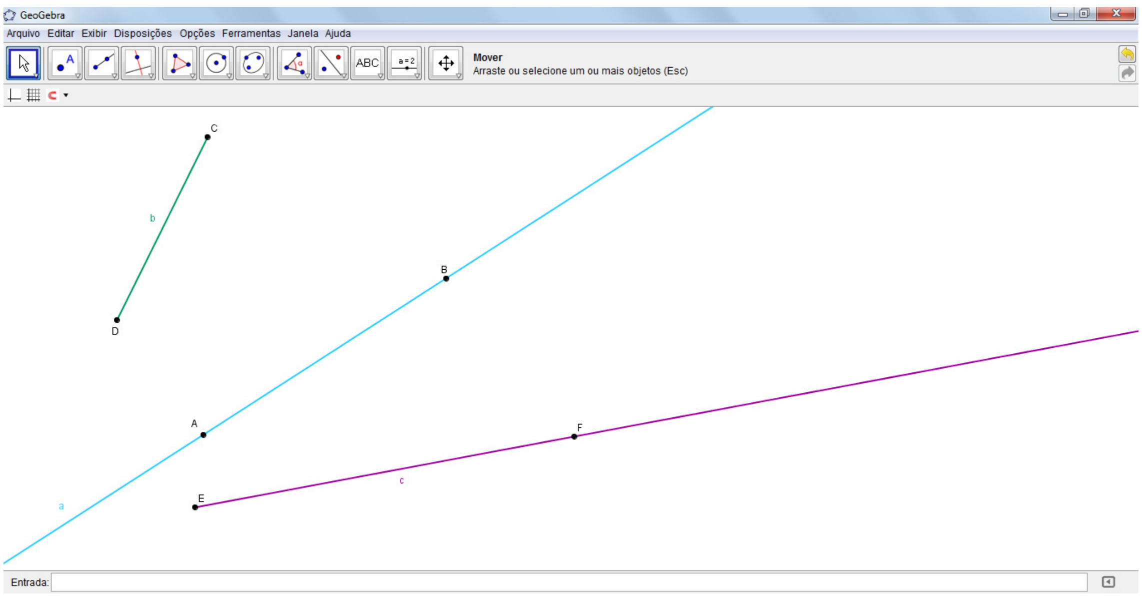
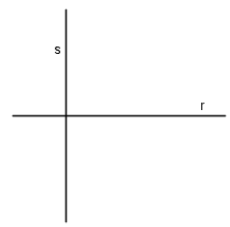


Figura 7 - Construção da reta, segmento de reta e semirreta

Aos alunos, em duplas, serão entregues diferentes recortes de figuras, para identificarem as posições das retas e classificá-las. Em seguida, mostrarão para a turma a figura, comentando sobre qual é a posição relativa entre duas retas. Cada dupla anexa a figura no quadro e comenta sobre as observações realizadas, para poder classificar as retas, conforme a sua posição. Nesse momento, a professora faz o registro das falas dos alunos no quadro, abaixo das figuras.

No final, os alunos, juntamente com a professora-pesquisadora, formalizam a definição e completam a Tabela 1, entregue para cada um.

Tabela 1 - Posição das retas

Posição das retas	Definição	Exemplo
Paralelas	Duas retas de um plano são paralelas quando não possuem ponto comum. Se uma reta r é paralela a uma reta s, isso será denotado por $r // s$.	
Concorrentes	Duas retas de um plano são concorrentes quando possuem apenas um ponto comum. Se uma reta r é concorrente a uma reta s, isso será denotado por $r \times s$.	

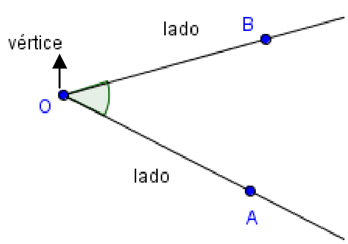
Duas retas concorrentes podem ser classificadas em perpendiculares ou em oblíquas.

Mas antes, será solicitado aos alunos que identifiquem e descrevam situações, na sala de aula, que envolvam ângulos, para chegar à seguinte conclusão:

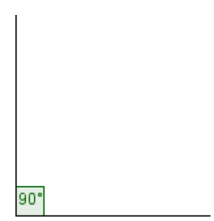
ÂNGULO

Duas semirretas que tem a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta, formam um ângulo.

Na figura abaixo, o ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados. Indicamos esse ângulo escrevendo $A\hat{O}B$.

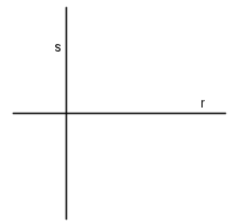
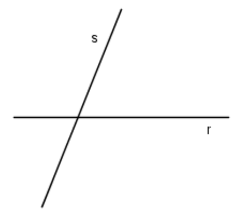


O ângulo reto é aquele que mede 90º. Veja a figura abaixo:



Agora, podemos retomar as posições das retas, Tabela 2:

Tabela 2 – Continuação da Posição das retas 1

Posição de retas	**Definição**	**Exemplo**
Perpendiculares	Duas retas de um plano são perpendiculares quando se interceptam em um ponto formando ângulo reto. Se uma reta r é perpendicular a uma reta s, isso será denotado por $r \perp s$.	
Oblíquas	Duas retas de um plano são oblíquas quando se interceptam em um ponto, mas não formam um ângulo reto.	

Dando continuidade ao encontro, serão entregues aos alunos uma régua, um compasso e uma folha de ofício. A solicitação é utilizar os materiais para desenhar livremente.

Por fim, será entregue aos alunos o material contendo orientações para a realização da atividade com a construção de retas paralelas com régua e compasso. Antes, os alunos serão convidados a interpretarem o enunciado da atividade e desenhar, à mão livre, para representá-la. O material a ser entregue com a construção de reta paralela e reta perpendicular encontra-se a seguir:

Vamos construir, com régua e compasso, uma reta paralela a uma reta r dada, passando por um ponto P, fora da reta, também dado.

a) Reta r definida pelos pontos A e B

b) Com a ponta-seca do compasso em P, construir um círculo que passa por B

c) Marcar o outro ponto D de intersecção entre o círculo e a reta

d) Com a ponta-seca do compasso em D, construir um círculo que passa por P

e) Marcar o ponto E, ponto de intersecção entre a reta r e o último círculo

f) Com a ponta-seca do compasso em E, construir um círculo que passa por D

g) Marcar o ponto G, ponto de intersecção entre esse último círculo e o primeiro

A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela a r.

Vamos construir com régua e compasso uma reta perpendicular a uma reta s dada, passando por um ponto Q, fora da reta também dado.

a) Com a ponta-seca do compasso em Q, traçar um círculo que corta s em A e B

b) Com a mesma abertura AQ e a ponta-seca do compasso em A, traçar um círculo

c) Com a mesma abertura BQ e a ponta-seca do compasso em B, traçar um círculo

d) Marcar o ponto C que é a intersecção dos dois últimos círculos construídos.

A reta $\overleftrightarrow{QC}$ é perpendicular a s.

Essas duas construções de reta paralela e perpendicular constituem uma das possíveis maneiras de fazer a construção. Comentar com os alunos que, também há o caso de que dada uma reta e um ponto pertencente à reta, pede-se para construir uma reta perpendicular à reta dada.

Dada a reta t e o ponto E, pertencente à reta, construa por E uma reta perpendicular a reta t.

a) Construir um círculo h com centro em E e raio qualquer, interseccionando a reta t nos pontos F e G

b) Construir um círculo i com centro em F passando por E. Marcar os pontos H e I de intersecção entre os círculos h e i

c) Construir um círculo j com centro em I passando por E. Marcar o ponto J, intersecção entre os círculos h e j

d) Construir um círculo l com centro em J passando por E. Marcar o ponto L, intersecção entre os círculos l e j

e) Traçar a reta u entre os pontos E e L.

A reta u é perpendicular a t.

Reta paralela: utilizar os mesmos passos de construção quando construída com régua e compasso.

Aos alunos será sugerido que utilizem a opção Mover para observar se as propriedades das construções serão preservadas.

APÊNDICE E – PLANO DE ENSINO 02

I. Objetivos

Identificar os diferentes tipos de quadriláteros.

Observar e descrever as características de cada quadrilátero.

Fazer a construção geométrica do paralelogramo, por meio da régua e do compasso.

Utilizar o software Geogebra para construir o paralelogramo, dando dinamismo para as propriedades.

II. Conteúdos

Quadriláteros. Conceito e propriedades do paralelogramo.

III. Recursos

Régua e compasso, borracha, lápis, folha de ofício, folha de informações, papel pardo, figuras, atividades e computador.

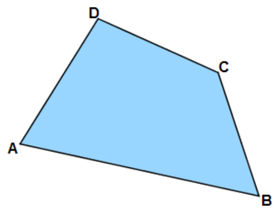
IV. Procedimentos metodológicos

Levar os alunos para uma caminhada pela escola para observar as formas dos objetos na natureza e nas construções humanas. Depois desta caminhada, desenhar as figuras observadas, nomeando e escrevendo o que eles entendem pela figura numa folha entregue pela professora. Após, os alunos devem circular as figuras que são quadriláteros e justificar a escolha. Concluída esta atividade, será entregue aos alunos a folha com o conceito e propriedades dos quadriláteros, como segue:

Quadriláteros

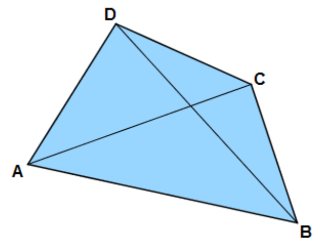
Quadrilátero é um polígono que tem quatro lados, quatro vértices, quatro ângulos internos e quatro ângulos externos.

Os elementos de um quadrilátero são:

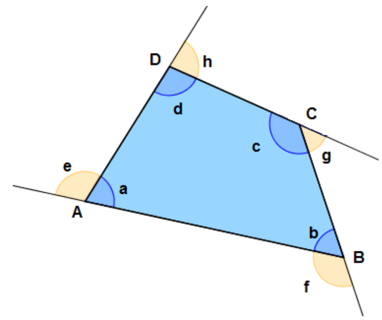


Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$

Vértices: A, B, C e D



Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$



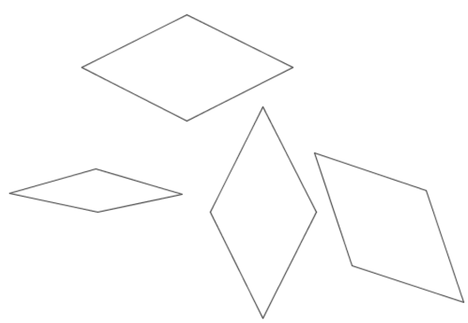
Ângulos internos: a, b, c, d

Ângulos externos: e, f, g, h

Os lados opostos de um quadrilátero são dois de seus lados que não se interseccionam.

Cada dupla recebe uma folha com o desenho de vários quadriláteros, com tamanhos e cores diferentes, para recortar e classificar em grupos, conforme as propriedades que apresentarem em comum. Espera-se que os alunos façam a classificação em quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.

Depois, serão elaborados cartazes, como abaixo, para colar as figuras de acordo com o tipo de quadrilátero e as propriedades, que surgiram quando resolveram a atividade anterior, do recorte das figuras. Esses cartazes ficarão expostos na sala de aula.



LOSANGOS

4 lados

4 ângulos

4 lados iguais

lados opostos paralelos

lados opostos iguais

diagonais perpendiculares

Finalizadas essa etapa de atividades, os alunos estudarão a definição e propriedades dos paralelogramos. Para isso, os alunos construirão, com régua e compasso, a figura que, inicialmente, não sabem que se trata de um paralelogramo. Os passos da construção serão fornecidos:

Construção do *Paralelogramo* com régua e compasso

a) Reta r definida pelos pontos A e B

b) Com a ponta-seca do compasso em P, ponto fora da reta r, construir um círculo que passa por B

c) Marcar o outro ponto D de intersecção entre o círculo e a reta

d) Com a ponta-seca do compasso em D, construir um círculo que passa por P

e) Marcar o ponto E e I, ponto de intersecção entre a reta r e esse último círculo

f) Com a ponta-seca do compasso em E, construir um círculo que passa por D

g) Marcar o ponto G, ponto de intersecção entre esse último círculo e o primeiro

h) Construir uma reta passando pelos pontos P e G

i) Marcar o ponto C, ponto de intersecção entre o primeiro círculo e a reta paralela construída

j) Construir os segmentos EG, GC, CI e IE

Concluída essa construção, os alunos escreverão, na própria folha, qual a figura visualizada e, também, observarão se as propriedades do cartaz condizem com a construção. Com a ajuda da professora-pesquisadora, construirão a definição de paralelogramo, ao observar a construção e analisar as propriedades da figura.

Definição: O paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

Depois disso, os alunos, no Laboratório de Informática, farão a construção do paralelogramo, mas utilizando os seguintes passos de construção.

Construção do Paralelogramo com o GeoGebra

a) Traçar um segmento de reta de comprimento qualquer, com extremidade nos pontos A e B

b) Marcar um ponto C a uma altura qualquer do segmento

c) Traçar um segmento de reta do ponto A ao ponto C

d) Traçar uma reta paralela ao segmento AB passando pelo ponto C

e) Traçar uma reta paralela ao segmento AC passando pelo ponto B

f) Marcar o ponto D que é a intersecção entre a reta paralela ao segmento AB e a reta paralela ao segmento AC

Movendo os vértices desta construção, os alunos podem observar que o losango, retângulo e o quadrado são tipos especiais de paralelogramo.

Agora, aos alunos será pedido que construam os segmentos AD e BC (diagonais do paralelogramo) e que seja marcado o ponto de intersecção entre as diagonais, para observarem a regularidade existente.

No próprio programa, os alunos podem utilizar a opção de ferramenta “Mover” os vértices e, também, podem medir os segmentos entre o ponto médio e os vértices do paralelogramo, para escreverem sobre o que observaram sobre as diagonais do paralelogramo. Segue o enunciado da propriedade construída:

Propriedade do Paralelogramo

As diagonais de um paralelogramo se cruzam nos respectivos pontos médios.

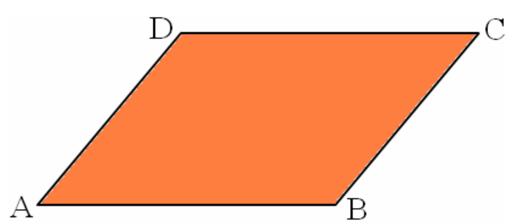
Quando citada essa propriedade, retomar oralmente o conceito de ponto médio.

Colocando as medidas dos lados e a construção das diagonais do paralelogramo, no GeoGebra e movendo os vértices, os alunos observarão as seguintes propriedades:

Propriedades do Paralelogramo

Em todo paralelogramo, as medidas dos lados opostos têm o mesmo comprimento, ou seja, são congruentes.

Cada diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes. Isto é, se $ABCD$ é um paralelogramo, então $\Delta ABC \cong \Delta CDA \, e \, \Delta ABD \cong \Delta CDB$.



Ainda:

As medidas dos ângulos opostos de um paralelogramo também são congruentes.

Essa última propriedade é observada quando traçada uma das diagonais e utilizando o critério de A.L.A. – ângulo-lado-ângulo, mas utilizaremos a ferramenta ‘Ângulo’ do programa para fazer essa generalização.

APÊNDICE F – PLANO DE ENSINO 03

I. Objetivos

Identificar o quadrilátero retângulo.

Assimilar a definição e as propriedades do retângulo.

Fazer a construção geométrica do retângulo, por meio da régua e do compasso.

Utilizar o software Geogebra para construir o retângulo, observando as propriedades e a definição.

II. Conteúdos

Conceito e propriedades do retângulo.

III. Recursos

Régua e compasso, borracha, lápis, folha de ofício, folha de informações e computador.

IV. Procedimentos metodológicos

Nesse encontro, estudaremos outro tipo de quadrilátero, a saber, o retângulo.

A professora-pesquisadora escreve no quadro a seguinte definição para ser preenchida pelos alunos:

Definição: O _________ é um quadrilátero que possui os quatro ângulos retos.

A seguir, os alunos terão a oportunidade de fazer a construção no GeoGebra, para entender, entre outras, a seguinte propriedade: “As diagonais de um retângulo são congruentes.” Os passos da construção serão os seguintes:

Construção do Retângulo com o GeoGebra

a) Construir um segmento AB
b) Traçar uma reta perpendicular ao segmento passando por A
c) Traçar uma reta perpendicular ao segmento passando por B
d) Marcar um ponto C sobre uma das retas perpendiculares
e) Traçar uma reta paralela ao segmento passando por C
f) Ponto D, intersecção entre a reta paralela e a reta perpendicular que passa por B

Depois, os alunos traçam as diagonais do retângulo e o ponto médio delas, para poderem observar que as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios. Também devem concluir que os lados opostos do retângulo são paralelos e congruentes. Para ajudar, os alunos podem colocar a medida das diagonais e mover os vértices para observar o que acontece e concluir a validade da propriedade, de que as diagonais são congruentes. Assim como, marcar as medidas dos lados do retângulo. Também devem notar que todos os ângulos internos são congruentes. Formalizando as propriedades, conclui-se:

Propriedades do Retângulo

As medidas dos lados opostos de um retângulo têm o mesmo comprimento, ou seja, são congruentes.

As diagonais de um retângulo são congruentes e se cruzam no respectivo ponto médio.

No encontro anterior, observamos que o retângulo é um tipo especial de paralelogramo. Com a construção pronta, os alunos poderão analisar se as propriedades do paralelogramo são satisfeitas na construção do retângulo. Sendo assim, é importante que concluam que como o retângulo satisfaz as propriedades do paralelogramo, então o retângulo é um tipo especial de paralelogramo.

Para concluir, os alunos tentarão fazer a construção geométrica do retângulo, com outros passos, usando a régua e o compasso.

Construção do retângulo com régua e compasso

a) Reta definida pelos pontos A e B
b) Construir um círculo com centro em B passando por A
c) Construir um círculo com centro em A passando por B
d) Marcar o ponto C, ponto de intersecção entre a reta e o último círculo
e) Construir um círculo com centro em C passando por A
f) Marcar os pontos D e F, pontos de intersecção entre o segundo e terceiro círculos
g) Marcar os pontos E e G, pontos de intersecção entre o primeiro e segundo círculos
h) Construir as retas DE, FG, DF e EG

$DFGE$ é o retângulo construído.

APÊNDICE G – PLANO DE ENSINO 04

I. Objetivos

Identificar a definição e propriedades do losango.

Fazer a construção geométrica do losango, por meio da régua e do compasso.

Utilizar o software Geogebra para construir o losango, verificando a validade da definição e das propriedades que serão construídas.

II. Conteúdos

Conceito e propriedades do losango.

III. Recursos

Régua e compasso, borracha, lápis, folha de oficio, folha de informações, computador.

IV. Procedimentos metodológicos

Os alunos terão a oportunidade de construir com régua e compasso e com o auxílio do GeoGebra a construção da figura losango para entender as propriedades.

Antes de fazer a construção, os alunos serão questionados sobre como definiriam um losango, anotando no quadro branco as respostas dos alunos. Espera-se que concluam que:

Definição: O losango é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes.

Para construir um losango, a professora-pesquisadora faz a construção no quadro e os alunos acompanham fazendo o mesmo com o seu material. Para isso, procede-se da seguinte maneira:

Construção do Losango com régua e compasso

a) Traçar um segmento AB

b) Com a mesma abertura do segmento e com a ponta-seca do compasso em A, construir um círculo que passa por B

c) Com a mesma abertura do segmento inicial e com a ponta-seca do compasso em B, construir um círculo que passa por A

d) Marcar os pontos C e D, pontos de intersecção entre os dois círculos

e) Traçar o segmento que une os pontos AC, CB, BD e DA

Os alunos serão orientados a observarem se as informações do cartaz sobre o losango condizem com a construção realizada. Com o GeoGebra, farão a construção do losango utilizando outros passos de construção, entregues pela professora-pesquisadora. Isso será feito, pois a construção anterior não permite visualizar o dinamismo proporcionado pelo software.

Construção do Losango com o GeoGebra

a) Traçar o segmento AB
b) Marcar o ponto médio C do segmento AB
c) Construir uma reta perpendicular passando por C e perpendicular ao segmento AB
d) Marcar o ponto D, ponto qualquer sobre a reta perpendicular
e) Construir um círculo com centro em A e passando por D
f) Ponto E, intersecção entre o círculo e a reta perpendicular
g) Traçar os segmentos que unem os pontos AD, DB, BE e EA

A orientação para os alunos é construir o segmento CD, fazer a medida em centímetros dos lados e das diagonais e dos ângulos para concluírem que todos os lados são congruentes e nenhum ângulo interno é reto no losango e, quando forem congruentes, então a figura será um quadrado. Além disso, induzir a formular as seguintes propriedades:

Propriedades do Losango

As diagonais de um losango são perpendiculares e são as bissetrizes dos ângulos correspondentes aos vértices que unem.

As diagonais de um losango se cruzam nos respectivos pontos médios

É conveniente, nesse momento, esclarecer que bissetriz de um ângulo é o segmento de reta que tem extremidade em um vértice de um triângulo, dividindo-o em dois outros ângulos congruentes. A outra extremidade do segmento de reta toca o lado oposto ao vértice do triângulo. Esse conceito é visto na construção anterior, do losango, quando os alunos atribuem o valor dos ângulos internos.

APÊNDICE H – PLANO DE ENSINO 05

I. Objetivos

Identificar a definição e propriedades do quadrado e do trapézio.

Fazer a construção geométrica do quadrado e do trapézio, por meio da régua e do compasso.

Utilizar o software Geogebra para construir o quadrado e o trapézio, verificando a validade da definição e das propriedades que serão construídas.

II. Conteúdos

Conceito e propriedades do quadrado e do trapézio.

III. Recursos

Régua e compasso, borracha, lápis, folha de oficio, folha de informações e computador.

IV. Procedimentos metodológicos

No presente encontro, serão estudados dois tipos de quadriláteros: primeiro, o quadrado e, segundo, o trapézio. A dinâmica a ser desenvolvida com os alunos acontecerá da seguinte maneira:

Os alunos formarão dois grupos, sendo que um deles fará a construção geométrica do quadrado, com régua e compasso, sem os passos da construção entregue. O outro grupo construirá o quadrado no GeoGebra, não podendo utilizar a opção de ferramenta “Polígono Regular”.

Depois, cada grupo apresenta aos demais colegas o seu trabalho para que sejam discutidos os passos da construção. Além disso, justificam porque a figura se trata de um quadrado, a fim de possibilitar a construção da definição do quadrado, podendo ser retomadas as ideias do cartaz construído pelos alunos.

Definição: É um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes.

Com a atividade da construção com régua e compasso e o GeoGebra, espera-se que os alunos concluam que:

Propriedade do Quadrado

As diagonais de um quadrado são congruentes, perpendiculares entre si no ponto médio e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

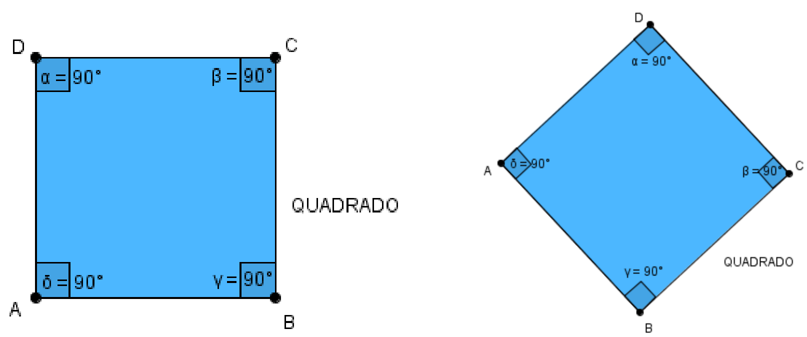
Uma das construções possíveis é a seguinte:

Construção do quadrado com o GeoGebra

a) Construir um segmento AB
b) Pelos pontos A e B, traçar perpendiculares ao segmento AB
c) Com a opção compasso, centro em A e passando por B, construir um círculo, que intercepta a reta perpendicular passando por A, no ponto D
d) Com a opção compasso, centro em B e passando por A, construir um círculo, que intercepta a reta perpendicular passando por B, no ponto C
e) Traçar o segmento definido pelos pontos C e D

O quadrilátero $ABCD$ é um quadrado.

Aos alunos, será solicitado que movam os pontos, para perceberem que, para ser um quadrado, a figura não precisa ser apresentada com o lado paralelo ao da tela do computador. Ou seja, mesmo com a seguinte disposição, como na figura abaixo, a mesma continua sendo um quadrado, pois suas propriedades são preservadas.



Retomar a construção do paralelogramo para observar novamente que o quadrado é um tipo especial dessa classe. Ainda, notar que o quadrado satisfaz todas as propriedades do retângulo e, é um tipo especial de retângulo. Satisfaz também as propriedades do losango. Ou seja, concluir que todo quadrado é um retângulo e que todo quadrado é um losango.

Dando continuidade ao encontro, os alunos construirão no GeoGebra o trapézio. Como sugestão de construção, segue:

Construção do Trapézio com o GeoGebra

a) Construir um segmento de reta com extremidades A e B

b) Marcar um ponto C, fora do segmento AB

c) Construir o segmento c, extremidade em B e C

d) Construir uma reta passando por C e paralela ao segmento AB

e) Construir um círculo com raio c e centro no ponto A

f) Construir os pontos D e E, intersecção entre o círculo e a reta paralela

g) Traçar os segmentos AE, EC, CB e BA

Com a construção finalizada e observando o cartaz, a seguinte definição deverá ser apresentada pela professora-pesquisadora:

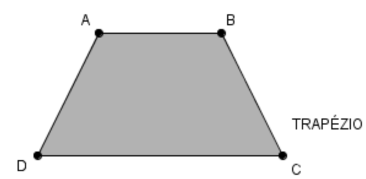
Definição: É um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos paralelos.

Também, devem observar que

Trapézio

O trapézio é o quadrilátero que possui apenas dois lados paralelos. Por exemplo, na figura ao lado, no trapézio $ABCD$:

- o lado $\overline{AB}$ é paralelo ao lado $\overline{CD}$ ($\overline{AB} // \overline{CD}$);
- o lado $\overline{BC}$ não é paralelo ao lado $\overline{AD}$.



Em um trapézio, os lados paralelos são chamados de bases. Nesse trapézio $ABCD$:

- $\overline{AB}$ é a base maior;
- $\overline{CD}$ é a base menor.

Um trapézio pode ser classificado em isósceles, retângulo ou escaleno.

Trapézio isósceles é aquele que tem os lados não paralelos com medidas iguais.

Trapézio escaleno é aquele que tem os lados não paralelos com medidas diferentes.

Trapézio retângulo é um trapézio escaleno que tem um dos lados não paralelos perpendicular às bases.

Colocando os segmentos das diagonais e as medidas, os alunos constatarão que:

Propriedade do Trapézio Isósceles

Num trapézio isósceles, as diagonais são congruentes.

APÊNDICE I – PLANO DE ENSINO 06

I. Objetivos

Observar e comparar as propriedades de cada tipo de quadrilátero.

Perceber que alguns tipos de quadriláteros possuem propriedades em comum e que algumas classes estão contidas em outras mais abrangentes.

II. Conteúdos

Quadriláteros.

III. Recursos

Lápis, borracha, construções e cartazes dos tipos de quadriláteros de encontros anteriores, folha de questões e computador.

IV. Procedimentos metodológicos

Nesse último encontro, para finalizar o estudo dos quadriláteros, os alunos retomarão as construções geométricas realizadas. Ao final dessa atividade, espera-se que os alunos observem a inclusão de classes dos quadriláteros.

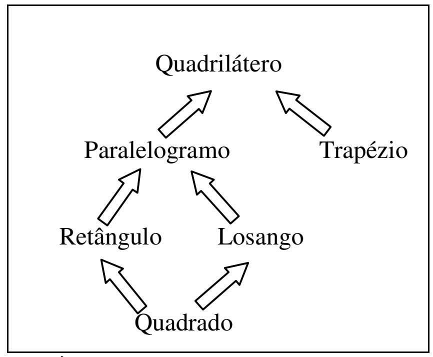
Com as construções dos quadriláteros disponíveis e dos cartazes, os alunos irão comparar as propriedades dos:

- quadrados e retângulos;
- retângulos e paralelogramos;
- quadrados e losangos;
- losangos e paralelogramos;
- quadrados e paralelogramos.

Por exemplo, os alunos pegarão o material das construções do quadrado e retângulo e observarão as propriedades desses quadriláteros. Nesse caso, o quadrado satisfaz todas as propriedades do retângulo e, é um tipo especial de retângulo, mas tendo os quatro lados com a mesma medida. No final, espera-se que sejam capazes de concluírem que o quadrado também está incluído no grupo dos losangos e dos paralelogramos, sendo um tipo especial de losango e um tipo especial de paralelogramo.

Da mesma maneira, espera-se que observem que o losango faz parte do grupo do paralelogramo, assim como o retângulo.

Finalizada a atividade, os alunos organizarão um diagrama, como na figura abaixo, para representar os tipos de quadriláteros.



significa “é um tipo especial de”

Ou seja:

Os quadrados são também retângulos, losangos e paralelogramos.

Os retângulos são também paralelogramos.

Os losangos são também paralelogramos.

Os paralelogramos não estão no grupo dos trapézios.