UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

UM ESTUDO SOBRE A INTRODUÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

MARCELO DE SOUZA SANTOS

Porto Alegre
2012/2

MARCELO DE SOUZA SANTOS

UM ESTUDO SOBRE A INTRODUÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre
2012/2

MARCELO DE SOUZA SANTOS

UM ESTUDO SOBRE A INTRODUÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Banca examinadora:

____

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

____

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant’Ana
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Porto Alegre, 17 dezembro de 2012

RESUMO

Este trabalho apresenta uma discussão acerca do ensino de Cálculo no Ensino Médio. Para compreender a situação do ensino de Cálculo nas universidades, realizou-se um estudo sobre o panorama do ensino desta disciplina nas universidades, bem como uma análise de livros didáticos, para observar como estes livros abordam estes conceitos. Para evidenciar a viabilidade do ensino de conceitos de Cálculo no Ensino Médio, foi elaborada uma sequência didática, aplicada com cinco alunos de uma escola particular de Guaíba. Na experiência prática, o conceito de derivada foi interpretado como taxa de variação instantânea. O trabalho apresenta a descrição e as análises dos encontros, utilizando como dados as contribuições dos alunos e o envolvimento destes ao longo da prática.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo; Ensino Médio; Taxa de Variação

ABSTRACT

This paper presents a discussion about the teaching of Calculus in (the) High School. To understand the situation of Calculus at universities, was made a study about the scenery of the teaching of this discipline at universities, as well as an analysis about didactic books, to observe how this books approach this issues. To evidence the viability of the teaching of this Calculus concepts in High School, a didactic sequence was elaborated, and applied with five students from a private school in Guaiba. In this practice experience, the concept of derivative was interpreted like an instant variation rate. The work presents the description and the analysis of the meetings, using as input the students' contributions and their involvement during the practice.

Key-words: Teaching of Calculus, High School, Variation Rate.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, o Cálculo vem desempenhando um papel de extrema importância no desenvolvimento científico-tecnológico. Os conceitos de Cálculo são utilizados em muitas áreas de pesquisas no campo das ciências exatas. Essa importância fica evidente nas pesquisas realizadas nas áreas da Biologia, Economia e Física. Devido a essa importância na sociedade moderna e atual, o Cálculo está presente na grade curricular da grande maioria dos cursos de ciências exatas nas universidades. O ensino de Cálculo é um tema bastante discutido nas universidades brasileiras. Nessas discussões, tenta-se encontrar respostas que justifiquem os altos índices de reprovação nessa disciplina.

Professores e alunos, quando abordados sobre essa situação do ensino de Cálculo, apresentam opiniões divergentes. Algumas razões apontadas pelos professores para esses altos índices de reprovação estão ligadas ao desinteresse e à formação básica dos alunos. Já os alunos, quando questionados, apontam a dificuldade em compreender os conceitos de Cálculo e as metodologias adotadas pelos professores, como fatores responsáveis por esses altos índices de reprovação (BARBOSA 2004).

Em 2010/1, quando cursei a disciplina de Cálculo e Geometria Analítica IA, deparei-me com algumas dificuldades de compreensão dos conceitos envolvidos. As dificuldades enfrentadas não se referem à parte algébrica do Cálculo e sim em conseguir interpretar os conceitos de Cálculo de uma maneira geométrica. Dentre as dificuldades encontradas por mim e grande parte de meus colegas nessa disciplina, destacamos os exercícios de taxas de variação. Esses exercícios não exigiam apenas um algoritmo de resolução, e sim uma interpretação do problema e uma compreensão dos conceitos para chegar à resposta.

O Cálculo apresenta o estudo de funções a partir do conceito de derivada de uma função. Por exemplo, com a interpretação do significado da derivada, podemos fazer um estudo dos intervalos de crescimento e decrescimento da função. Após compreender o conceito de derivada de uma maneira dinâmica, comecei a interessar-me por saber as razões pelos quais os alunos encontram dificuldades nessa compreensão. Interessei-me em descobrir se os conceitos iniciais de Cálculo poderiam ser estudados no Ensino Médio. E se possível, porque esses conceitos não eram estudados.

Dentre as justificativas que me motivaram a realizar e defender esse trabalho é que acredito que o pré-conhecimento de conceitos de Cálculo possa contribuir para diminuir o alto índice de reprovação na disciplina. Também acredito que o Cálculo possa se tornar uma importante ferramenta no estudo de funções no Ensino Médio.

Quando cursei a disciplina de Cálculo e Geometria Analítica IA, deparei-me com conceitos diferentes daqueles utilizados no Ensino Médio para estudar funções. No Ensino Médio, o estudo de funções teve ênfase em nomenclaturas e definições como, por exemplo: zeros da função, função injetora e função sobrejetora, entre outros. Acredito que conceitos de Cálculo, como limite e derivada, possam ser utilizados no Ensino Médio para o estudo de funções. E através dessa ferramenta, poder mostrar ao aluno a importância do conceito de função. Assim, podemos dar ênfase ao uso de funções na resolução de problemas, pois este deveria ser um dos aspectos fundamentais na formação matemática dos nossos alunos.

Para compreender melhor o ensino de Cálculo nas universidades brasileiras, no capítulo 2, apresento um estudo sobre o panorama do Cálculo. Este capítulo está organizado em três sessões: Realidade do Cálculo nas universidades, Cálculo na UFRGS e Cálculo no Ensino Médio. Neste capítulo, o trabalho apresenta a realidade do ensino do Cálculo nas universidades brasileiras. Em seguida, apresenta possíveis razões para a problemática do ensino de Cálculo, a partir da opinião de professores e alunos. Depois, o trabalho apresenta a realidade do ensino de Cálculo na UFRGS, e destaca os programas realizados pela universidade com o objetivo de diminuir os índices de reprovação e as dificuldades encontradas pelos alunos nessa disciplina. Para finalizar, o capítulo traz um panorama do Cálculo no Ensino Médio, destacando os motivos pelos quais o ensino de Cálculo pode ser considerado importante para alunos do Ensino Médio.

No capítulo 3, apresentamos uma análise de quatro livros didáticos, para verificar como o Cálculo é proposto por estes autores. Para ilustrar essa análise, são apresentados alguns exemplos e exercícios propostos pelos livros. Após essa análise, apresentamos uma reflexão sobre a maneira como livros didáticos abordam os conceitos de Cálculo.

O capítulo 4 apresenta uma possibilidade de abordagem de conceitos inicias de Cálculo no Ensino Médio. Será apresentada uma experiência realizada com cinco alunos de uma escola particular de Guaíba. Nesse estudo, foi abordado o conceito de derivada, interpretado como taxa de variação instantânea. Para analisar a proposta, utilizou-se as contribuições dos alunos ao longo dos encontros, como perguntas, discussões, além de atividades desenvolvidas pelos mesmos ao longo desta experiência. Tais questionamentos foram fundamentais para o andamento dos encontros e compreensão dos conceitos envolvidos.

Nas Considerações Finais, serão apresentadas as reflexões finais obtidas a partir da experiência realizada e das análises destes encontros.

2. PANORAMA DO CÁLCULO

Neste capítulo, no primeiro momento, apresentamos a realidade do ensino de Cálculo nas universidades brasileiras. Serão apontados alguns motivos que podem levar essa disciplina a ter altos índices de reprovação nas universidades brasileiras. Também, serão destacadas as opiniões dos professores e alunos de Cálculo. Por último, apresentarei as estratégias criadas pelas universidades, com o intuito de facilitar essa transição dos alunos do ensino médio para a disciplina de Cálculo.

No segundo momento, o capítulo traz o panorama do ensino de Cálculo na UFRGS. Serão apresentados índices de aprovação e reprovação na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica IA. Por último, serão abordadas as ações oferecidas pela UFRGS para auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos de Cálculo.

No terceiro momento, são apresentadas algumas justificativas para a introdução dos conceitos iniciais de Cálculo no Ensino Médio.

2.1. REALIDADE DO CÁLCULO NAS UNIVERSIDADES

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral está presente em vários cursos de nível superior. Devido a sua aplicabilidade, desempenha papel importante para a resolução de problemas, por isso, é considerado um dos conhecimentos básicos de diversas profissões que se enquadram nos Cursos de Ciências Exatas.

Entretanto, ao longo dos anos, essa disciplina tem sido responsável por um grande número de reprovações e evasões de estudantes universitários nas faculdades e universidades de todo o país (BARBOSA, 2004, pg. 9). A Sociedade Brasileira de Matemática, em um de seus boletins informativos de 1995, expressa uma grande preocupação com os baixos índices de desempenho na disciplina de Cálculo:

> O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina. (p. 4) (BARRETO 1995 apud REIS 2001, p. 20)

Nos últimos anos, vários trabalhos de pesquisa têm se dedicado a investigar os fatores que causam esses altos índices de reprovação e evasão. Rezende (2003) apresenta essa realidade na Universidade Federal Fluminense (UFF). Na Figura 1 abaixo, apresentamos os índices de não aprovação na disciplina de Cálculo, relativos ao período de 1996 a 2000.

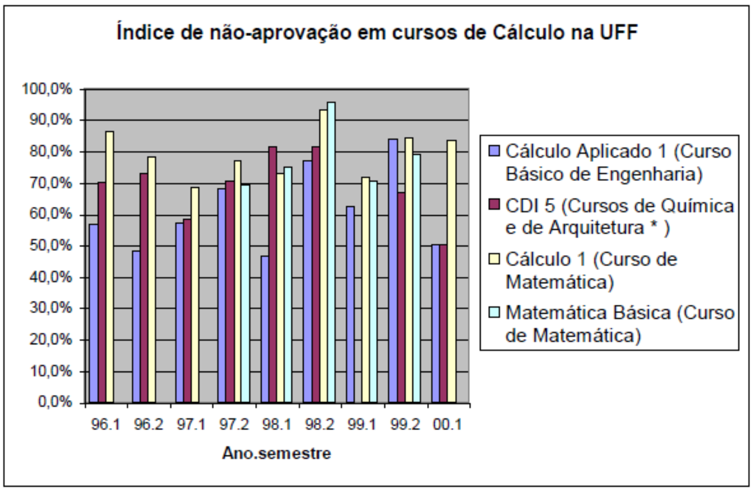


Figura 1: Índices de não aprovação na disciplina de Cálculo, UFF. Fonte: Rezende (2003), p.2.

Segundo Rezende (2003), na UFF os índices de não aprovação encontram-se na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o Curso de Matemática, este não é inferior a 65%. Esses dados nos levam a concluir que, no Curso de Matemática da UFF, neste período, não foram aprovados mais de 45% dos alunos da turma. Para mostrar que o problema está longe de ser resolvido, Rezende (2003) apresenta (ver Tabela 1) dados mais recentes dos índices de não aprovação na disciplina de Cálculo para o Curso de Matemática.

Tabela 1: Índices de não aprovação no Curso de Matemática na UFF

ano.sem	Índice de não-aprovação (%) em Cálculo
00.1	24,4
00.2	85,4
01.1	59,5
01.2	71,1
02.1	69,5
02.2	93,2

Fonte: Rezende (2003), p. 2.

Esses índices alarmantes são para mostrar a gravidade do problema do ensino de Cálculo. Os altos índices de reprovação ocorrem na maioria das universidades do Brasil. Para melhorar a situação do ensino de Cálculo, quais seriam as atitudes a serem tomadas? Hoje em dia, o ensino de Cálculo é um dos assuntos mais discutidos nas universidades brasileiras. Acredita-se que novas práticas metodológicas têm que ser testadas e analisadas. Novos materiais ou recursos terão que ser utilizados para melhorar esses altos índices. Os recursos computacionais e as calculadoras gráficas poderiam auxiliar para minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos na disciplina de Cálculo.

Quais seriam os motivos para esse alto índice de reprovação na disciplina de Cálculo? De quem é a culpa? Professores? Alunos? Do Ensino Básico, que não prepara o aluno com a base necessária para obter um bom desempenho na disciplina de Cálculo? Segundo Barbosa (2004, p.9):

> [...] os professores quando abordados a respeito dessa discussão, justificam o baixo rendimento, na falta de motivação, nas dificuldades de raciocínio e nos hábitos de estudo dos alunos e na formação básica anterior. (BARBOSA, 2004, p.9)

Em Barbosa (2004), os professores citam a imaturidade e irresponsabilidade como fatores decisivos para esse baixo rendimento na disciplina de Cálculo. Outros professores acreditam que a deficiência do Ensino Fundamental e Médio também contribui para esse fracasso no ensino de Cálculo.

A partir das respostas dos professores, é possível questionar se estes aspectos citados são as respostas para esses baixos índices de aprovação? A opinião dos alunos, quando perguntados sobre as dificuldades encontradas nessa disciplina, segundo Barbosa (2004):

> [...] alunos quando interrogados afirmam que a disciplina tem alto grau de abstração, pois muitas vezes, o conceito de temas como: limites, continuidade, integral, diferencial, entre outros, não ficam claros ou não são perceptíveis através de teoremas e axiomas. (BARBOSA, 2004, p. 9)

Nas respostas dos alunos, identificamos a palavra abstração como uma das opiniões sobre o baixo desempenho na disciplina de Cálculo. Com isso, podemos notar que os alunos apresentam certo grau de dificuldade em conseguir contextualizar os conceitos aprendidos na disciplina de Cálculo. Para muitos, a aplicabilidade e a importância do Cálculo parecem difíceis de serem visualizadas por meio de axiomas e teoremas.

O Cálculo desempenha um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, ao deixar de abordar com os alunos essa aplicabilidade, implica em uma perda significativa sobre a importância dessa disciplina. O Cálculo pelo Cálculo, sem essa aplicação e contextualização, fica centrado em uma metodologia tradicional. Essa metodologia rotineira é um dos fatores que dão credibilidade para os alunos afirmarem que a disciplina tem um alto grau de abstração. Desse modo, o ensino de Cálculo, segundo a visão de Cury (2001):

> [...] é resultado de uma pedagogia rotineira que tem sido a forma mais adequada de se ensinar o conteúdo, pois os termos são definidos, os axiomas aceitos, os teoremas demonstrados, os exemplos e problemas reduzidos a um mínimo necessário, apenas para ilustrar o conceito ou um excesso de exercícios, justificando a idéia de aprendizado por exercitação e memorização. (CURY 2001, p. 31 apud BARBOSA 2004, p.12).

Notamos que, nas aulas de Cálculo, alunos não passam de meros espectadores, ouvindo e anotando os conceitos, sem muita participação nas aulas. As aulas de Cálculo são expositivas, onde os professores desenvolvem a teoria e demonstram alguns resultados. A função dos alunos é resolver extensas listas envolvendo, na grande maioria, exercícios procedimentais como cálculos de limites, derivadas e integrais. Nesse sentido, perdemos a verdadeira importância do Cálculo: as suas aplicações em problemas reais. Essa metodologia inadequada, sem contextualização, não faz sentido ou importância para o aluno.

Na tentativa de superar esse fracasso no ensino de Cálculo, as universidades adotaram a criação de disciplinas especialmente voltadas para alunos recém-egressos do ensino médio. Em algumas universidades, essas disciplinas são chamadas de Cálculo Zero ou Pré-Cálculo. O objetivo dessas disciplinas é preparar o aluno para o curso inicial de Cálculo.

São muitos os problemas enfrentamos pelas universidades para aumentar os índices de aprovação na disciplina de Cálculo. Vimos acima, que esses problemas podem estar tanto na metodologia adotada pelos professores de Cálculo como também no desinteresse e dificuldade dos alunos.

Analisando todos os fatores que contribuem para esse fracasso no ensino de Cálculo, nos perguntamos: Será que os estudantes de Cálculo conhecem o sentido matemático do limite ou apenas sabem calculá-los através de técnicas? Os alunos de Cálculo conhecem o significado da derivada ou sabem apenas aplicar regras de derivação?

2.2. CÁLCULO NA UFRGS

Como já analisamos anteriormente, o ensino de Cálculo nas universidades brasileiras é responsável por um grande número de reprovações e evasões dos estudantes universitários.

No âmbito da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), os índices de reprovação também são considerados altos. A dificuldade de compreensão enfrentada pelos alunos na disciplina de Cálculo é responsável por esses altos índices de reprovação. Na UFRGS, segundo Doering et al. (2004), no ensino de Cálculo, os professores repetidamente deparam-se com dificuldades dos estudantes, as quais remontam ao Ensino Médio e, muitas vezes, ao Ensino Fundamental.

Com o objetivo de auxiliar os alunos na compreensão de conceitos de Cálculo, os professores da UFRGS adotaram utilizar métodos diferentes para trabalhar o Cálculo. Segundo Doering (2004):

> [...] a utilização de recursos computacionais como ferramenta de apoio didático, recursos esses que eram vistos, pela equipe de professores da disciplina, como um instrumento poderoso na complementação das técnicas de ensino tradicionais, permitindo uma melhor visualização e, consequentemente, uma maior compreensão dos conteúdos. (DOERING ET AL. 2004, p. 209)

Na UFRGS, segundo Doering et al. (2004), cerca de mil alunos são matriculados por semestre na disciplina de Cálculo. A disciplina de Cálculo faz parte da grade curricular da grande maioria dos cursos de ciências exatas oferecidos pela universidade. Isso mostra o grau de importância científico-tecnológico que esses conceitos representam. Os altos índices de reprovação do Cálculo na universidade tem sido um tema de debate pelos professores que ministram essa disciplina. A Tabela 2 abaixo apresenta os índices na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica IA de evasão, reprovação e aprovação no período de 1995 a 2002.

Tabela 2: Dados de Cálculo e Geometria Analítica IA.

S	M	% D	% R/M	% A/M	% A/P
1995-1	865	20,8	46,5	32,7	**41,3**
1995-2	430	20,5	51,9	27,7	**34,8**
1996-1	873	18,3	40,0	41,7	**51,1**
1996-2	473	28,1	48,2	23,7	**32,9**
1997-1	1.110	22,7	47,9	29,4	**38,0**
1997-2	645	25,7	32,9	41,4	**55,7**
1998-1	1.002	20,3	36,4	43,3	**54,3**
1998-2	460	29,4	26,1	44,6	**63,1**
1999-1	1.000	17,9	38,4	43,7	**53,2**
1999-2	592	20,9	45,1	34,0	**42,9**
2000-1	908	18,0	40,0	42,1	**51,3**
2000-2	704	18,0	40,3	41,6	**50,8**
2001-1	1.076	15,4	36,6	48,0	**56,7**
2001-2	700	18,7	30,9	50,4	**62,0**
2002-1	1.027	15,4	35,4	49,2	**58,1**
2002-2	758	17,9	36,1	45,9	**55,9**

Fonte: Doering 2004, p. 214.

Na tabela acima **M** representa o número total de matriculados em cada semestre **S.** A letra **D** representa a porcentagem de alunos que desistiram da disciplina. As letras **R** e **A** representam a porcentagem de alunos reprovados e aprovados, respectivamente. Vale destacar que, na Tabela 2, temos a porcentagem de alunos aprovados sobre o total de alunos matriculados e também sobre o total de alunos presentes.

Ainda na Tabela 2, está exemplificada a realidade dos índices de abandono e reprovação na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica IA. Em todos os semestres, os índices de desistência são considerados altos. Vale destacar o semestre 1998-2, onde verificou-se o maior índice de abandono, que foi de 29,4%. Outro fato importante são os índices de aprovação. No período de 1995 a 2002, apenas no semestre 2001-2 teve-se a aprovação de metade dos alunos matriculados na disciplina de Cálculo.

Abaixo, na Tabela 3, são apresentados os índices de aprovação (aproximados) na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica IA, dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática Diurno da UFRGS, no período de 2010 a 2012-1.

Tabela 3: Índices de aprovação na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica IA.

Semestre	Número de alunos matriculados	Número de alunos aprovados	Taxa percentual de aprovação (%)
2010-1	41	20	48,78
2010-2	13	5	38,46
2011-1	36	17	47,22
2011-2	15	6	40
2012-1	29	14	48,27

Fonte: www2.mat.ufrgs.br/mysql/num_mat_aluno.php

A partir da Tabela 3 acima, notamos que os índices de reprovação na disciplina de Cálculo são graves para o curso de Licenciatura em Matemática. Nos semestres analisados, vimos que, dos alunos matriculados, metade não consegue a aprovação nessa disciplina. Para o curso que tem como objetivo formar professores de Matemática, esses dados são alarmantes.

Com o objetivo de alterar esse quadro agravante de reprovações na disciplina de Cálculo na UFRGS, foram criadas medidas que serviriam de apoio para ajudar os alunos a obterem um melhor desempenho e compreensão dos conceitos de Cálculo. Segundo Doering et al. (2004):

> Aos poucos, foi tomando corpo a idéia de que deveríamos implementar ações visando a reduzir o desnível existente entre a bagagem de Matemática que o aluno traz do Ensino Médio e a que necessita para um bom desempenho no Cálculo. (DOERING ET AL. 2004, p. 216)

Os alunos que se deparam com a disciplina de Cálculo logo no primeiro semestre, geralmente, tem uma grande dificuldade na compreensão dos conceitos envolvidos. Muitas vezes essa dificuldade é gerada por uma falta de compreensão de conteúdos no Ensino Médio e até mesmo do Ensino Fundamental. Compreendendo a dificuldade que os alunos possuem nas cadeiras de Cálculo, principalmente os alunos de cursos onde o Cálculo é dado no primeiro semestre, a UFRGS oferece cursos pró-cálculo. São cursos que auxiliam os alunos a conseguirem compreender os conceitos trabalhados na disciplina. Os cursos oferecidos pela UFRGS são o Pré-Cálculo e o Programa de Apoio à Graduação (PAG-Cálculo).

Sobre os objetivos do programa Pró-Cálculo, a professora Luisa Rodrigues Doering, coordenadora da Comissão de Extensão e do programa Pró-Cálculo afirma: “queremos resgatar esses alunos, cuidar da evasão, melhorar o índice de aprovação, mantendo o nível e a qualidade da Universidade". (JORNAL DA UNIVERSIDADE, 2003).

O curso Pré-Cálculo é oferecido pelo Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática todo semestre. O curso é destinado a calouros de cursos que tenham a disciplina de Cálculo presente na grade curricular do primeiro semestre. O objetivo[1] é

> propiciar uma experiência que facilite a transição do Ensino Médio para a Matemática de nível superior, em especial para o Cálculo, incentivando a autonomia e a autocrítica no estudo e na superação das dificuldades.

Os conteúdos trabalhados são: funções reais, geometria analítica, polinômios, equações polinomiais e trigonometria e a preferência é dada para os alunos que tiveram menos de doze acertos na prova de Matemática do vestibular. Os alunos que participam do curso Pré-Cálculo têm a oportunidade de revisar os conteúdos que possuem dificuldade desde o Ensino Médio, resolvendo exercícios propostos do tipo resolução de problemas e acompanhando exposições sobre os conteúdos trabalhados. Os alunos podem, ainda, intervir durante a exposição, participando de forma ativa dos encontros.

O projeto PAG[2] foi criado pela Pró-Reitoria de Graduação e implementado pelo Departamento de Matemática Pura e Aplicada. O objetivo é desenvolver ações de apoio aos alunos matriculados na disciplina de Cálculo, principalmente aos que tenham menos de dez acertos na prova de Matemática do vestibular ou alunos que já tenham reprovado na disciplina. Todo semestre é oferecido o curso e são disponibilizadas sessenta vagas. Participam dos encontros professores e monitores.

Os encontros são baseados na revisão de conceitos de Cálculo e nas dificuldades encontradas pelos alunos. Os exercícios propostos são, geralmente, baseados na resolução de problemas. Nesse momento de exposição, os alunos podem questionar e debater com professores e monitores. Em alguns momentos, o atendimento é feito de forma individual ou em pequenos grupos, o que auxilia para que os alunos possam tirar suas dúvidas.

---

[1] Disponível em < http://www.ufrgs.br/procalculo/precalculo/precalculo.html#informa>.

[2] Disponível em < http://www.ufrgs.br/prograd/prograd-1/programas/pag/pag-2012-1/pag-calculo-2012-1>.

Nos encontros são oferecidas listas de exercícios sobre o conteúdo estudado durante a semana anterior. Além das listas de exercícios, os alunos também podem acompanhar a correção dos testes utilizados na avaliação da disciplina. Os testes são corrigidos pelos professores e monitores e os alunos podem, individualmente, expor suas dúvidas sobre alguma questão dos testes.

2.3. CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Em Barbosa (2004), vimos que os professores apresentam motivos nos quais seriam os alunos os culpados pelos altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo. Na visão dos professores, o Ensino Fundamental e Médio seriam uma das causas responsáveis para as dificuldades encontradas na compreensão dos conceitos de Cálculo. Acredita-se que a introdução de conceitos iniciais de Cálculo no Ensino Médio facilitaria a transição para o ensino superior. Cabe perguntar: É viável ensinarmos conceitos de Cálculo no Ensino Médio? Por quê? Como podemos fazer isso?

Como sabemos, o Cálculo tornou-se uma ferramenta importante para o desenvolvimento científico-tecnológico. Sua aplicabilidade está presente em várias áreas científicas. Devido a essa importância, acredita-se que seria interessante o ensino desses conceitos no Ensino Médio. Segundo Ávila (1991):

> Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (ÁVILA 1991, p. 7)

Segundo alguns pesquisadores, o ensino de Cálculo no Ensino Médio é algo que está ao alcance dos alunos desse nível de ensino e seria importante para explorar competências e habilidades matemáticas dos alunos. Ávila (1991) afirma:

> O Cálculo é moderno porque traz idéias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas idéias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no 2º grau, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela

> continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento. (ÁVILA 1991, p. 3)

Existem muitas justificativas positivas para o ensino de conceitos iniciais de Cálculo no Ensino Médio. Vale destacar que o conhecimento desses conceitos pode ajudar no estudo de funções, por exemplo. A interpretação da derivada pode auxiliar o aluno do Ensino Médio a compreender melhor a variação das funções (seu crescimento e decrescimento). Outra razão importante para a introdução desses conceitos no Ensino Médio é o ensino da Física, sobretudo a Cinemática. Com isso, Ávila acredita que esses conceitos podem ser estudados na primeira série do Ensino Médio. Segundo Ávila (2006):

> [...] um dos principais objetivos na introdução da derivada logo no início da primeira série do ensino médio é a interdisciplinaridade com a Cinemática, por isso mesmo os professores de Matemática e Física devem planejar juntos o trabalho que vão desenvolver. (ÁVILA 2006, p. 36)

Essa interação interdisciplinar sugerida por Ávila é importantíssima para o aprendizado e desenvolvimento de conceitos matemáticos para o aluno. São situações criadas que dão oportunidade para o aluno associar a teoria com a prática.

Destacamos que o estudo desses conceitos cria a oportunidade de desenvolver habilidades matemáticas nos alunos. Quais são os motivos que levam os professores a excluírem ou não os elementos do Cálculo em sua sala de aula?

Para responder essa pergunta, vamos nos fundamentar no estudo realizado na cidade de Natal no estado do Rio Grande do Norte, por Guedes (2010). O objetivo era verificar se o ensino de conceitos de Cálculo no Ensino Médio e suas implicações tinham aceitação pelos professores desse nível de ensino. Dentre os professores que participaram da pesquisa, a grande maioria concorda que o ensino de elementos de Cálculo seria importante para o aluno do Ensino Médio. Entretanto, na pesquisa com os professores, podemos destacar as razões para não ensinar Cálculo no Ensino Médio: a falta de qualificação dos professores de Matemática e o baixo nível de conhecimento matemático que dispõe o aluno quando chega ao Ensino Médio. Os professores apontaram a falta de material didático de Cálculo adequado para o Ensino Médio.

A pesquisa de Guedes (2010) apontou que mais de 80% dos participantes da pesquisa se consideram despreparados para ensinar esse assunto no Ensino Médio.

Dado preocupante, pois esperamos que um professor de Matemática seja capaz de ensinar os conceitos de Cálculo de uma forma básica.

Nessa pesquisa, podemos analisar que existem muitos fatores que impedem o ensino de Cálculo no Ensino Médio. Vimos que esses fatores são: a importância de se estudar esses conceitos no Ensino Médio, a falta de preparação dos professores, o nível de conhecimento dos alunos e o material didático inadequado.

A Matemática é uma das principais ferramentas de todas as áreas das ciências. O Cálculo tem um papel de grande relevância no mundo moderno e atual. Por isso, é importante ter o conhecimento básico dos conceitos de Cálculo, não só para auxiliar na compreensão de alguns conteúdos do Ensino Médio, mas também para ajudar na formação do caráter desse aluno.

3. ABORDAGEM DO CÁLCULO NOS LIVROS DIDÁTICOS

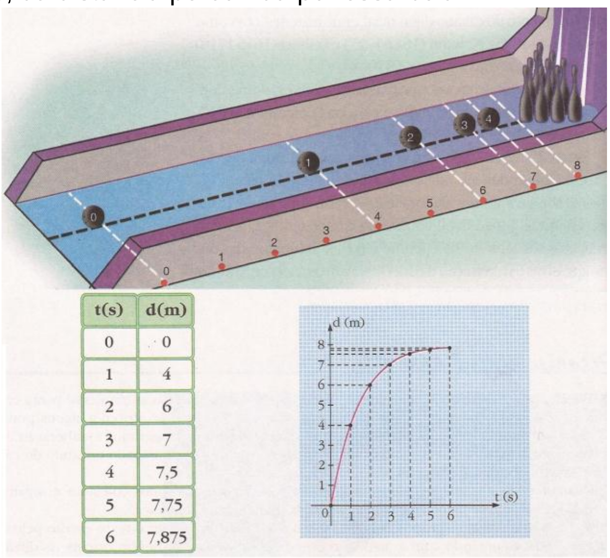
Neste capítulo, pretende-se verificar se os livros didáticos de Ensino Médio abordam conceitos de Cálculo Diferencial e como ocorre essa abordagem. Os livros didáticos analisados foram escolhidos pelo critério de abordar conceitos iniciais de Cálculo. A análise buscou identificar as diferentes abordagens dadas para esse conteúdo, bem como os exemplos e exercícios utilizados. Abaixo apresento os nomes dos livros analisados e as maneiras como abordam os conceitos inicias de Cálculo.

3.1. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

- <u>Matemática Aula por Aula – Volume 3 – Cláudio Xavier e Benigno Barreto (2009)</u>

Inicialmente, este livro apresenta um capítulo que trata da introdução do conceito de limite. Para tal, o livro apresenta o exemplo ilustrado na Figura 2, para auxiliar na compreensão intuitiva desse conceito.

Uma bola de boliche foi jogada em uma pista de 8m, sendo que, em cada segundo, percorre a metade da distância que a separa do primeiro pino. Considere a função $d(t)$ que faz corresponder a cada valor d, em metros, da distância percorrida por essa bola.



t(s)	d(m)
0	0
1	4
2	6
3	7
4	7,5
5	7,75
6	7,875

Note que, a cada instante, a bola se aproxima mais e mais do 1º pino, assim como a distância percorrida se aproxima de 8, quanto maior o valor do tempo. Dizemos que, quando t tende a assumir um valor cada vez maior (t tende ao infinito), então, d tende a 8.

Em símbolos: $\lim_{t\to\infty} d(t) = 8.$ Lemos o limite de $d(t)$, quando t tende ao infinito, é igual a 8.

Figura 2: Exemplo retirado do livro Matemática Aula por Aula, cap. Limites, pg. 219.

Em seguida, o livro enfatiza a definição de limite, bem como sua simbologia $\lim_{x\to a} f(x) = b.$ Logo após a definição de limite, o livro traz uma breve explicação sobre limites laterais.

Depois de definir limite, o livro enfatiza ao ensino das propriedades operatórias do limite: limite da soma, limite do produto e limite do quociente. Os exercícios propostos são simples com o objetivo de aplicar as propriedades. Para melhor compreensão, o livro traz um exemplo interessante sobre o estudo da velocidade média a partir do conceito de limite. Vemos uma aplicação do conceito de limite, em que $V = \lim_{\Delta t\to 0} V_m = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, onde V_m representa a velocidade média, Δs representa a variação da distância percorrida e Δt a variação do tempo.

Logo após, o livro traz um estudo sobre continuidade de funções. Temos a definição de continuidade de função, bem como a análise das condições necessárias para uma função ser contínua em algum ponto determinado. Em seguida, temos o limite trigonométrico fundamental. O interessante, nessa parte, é que o livro traz a demonstração para o $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$ através de uma análise trigonométrica.

Na sequência, o livro apresenta um estudo sobre limites infinitos. Nessa parte, é interessante destacar os diversos exemplos apresentados para a melhor compreensão dos alunos. Finalmente, o autor faz um breve comentário sobre o limite da função exponencial.

No capítulo sobre derivada, o livro inicia sua abordagem definindo a derivada de uma função em um ponto. Esta definição é abordada por meio de uma interpretação geométrica e utilizando o conceito de limite de uma função e inclinação de reta. Assim segue o estudo da derivada em um ponto, o estudo geométrico da derivada, mostra que a derivada pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente em um ponto. Ainda, é apresentada a equação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto.

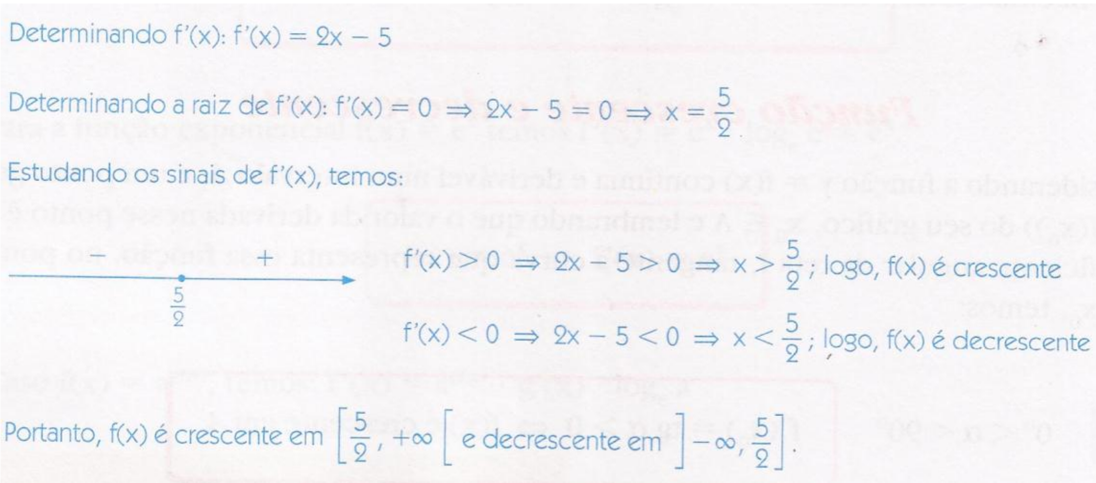
Depois, o livro mostra a maneira de se obter a derivada em um ponto utilizando a definição $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

A partir da definição acima, são demonstradas a derivada da função afim, da função identidade, da função constante, da função potência de expoente natural, da função seno e da função cosseno. Em seguida, o foco são as propriedades operatórias das derivadas: soma, diferença, produto e quociente. Ainda temos o estudo da função logarítmica, função composta (regra da cadeia), função inversa e função exponencial.

Para o estudo de funções, o livro traz, a partir de uma abordagem geométrica, a interpretação de função crescente e decrescente. Logo após, são abordados o estudo do sinal da derivada, o estudo dos pontos críticos de uma função e por fim os pontos de inflexão. O interessante nessa parte é que o livro traz um estudo da derivada segunda para os pontos de inflexão, mas sem uma definição prévia sobre o conceito de derivada segunda.

Na Figura 3, vemos um exemplo sobre a análise dos sinais da derivada.

Conhecendo a função $f(x) = x^2 - 5x + 4$, determinar os intervalos nos quais ela é crescente e decrescente.



Determinando f'(x): $f'(x) = 2x - 5$

Determinando a raiz de f'(x): $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

Estudando os sinais de f'(x), temos:

$f'(x) > 0 \Rightarrow 2x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$; logo, f(x) é crescente

$f'(x) < 0 \Rightarrow 2x - 5 < 0 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$; logo, f(x) é decrescente

Portanto, f(x) é crescente em $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$ e decrescente em $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$.

Figura 3: Exemplo retirado do livro Matemática Aula por Aula, p. 266.

Exercícios propostos

Os exercícios propostos são básicos, dando ênfase à repetição, exigindo do aluno aplicação dos conceitos aprendidos. Veja alguns exemplos de exercícios abordados:

Exemplo 1: Dada a função $f : R \to R,$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x-1, \; se\ x \geq 1 \\ x+1, \; se\ x < 1 \end{cases}$

Determine:

a) Gráfico de $f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Exemplo 2: Calcule a derivada da função $f(x)$, no ponto x_0, no seguinte item:

a) $f(x) = 2x^3 - 2,$ no ponto $x_0 = 3$

Exemplo 3: Determine o máximo e/ou o mínimo relativo da seguinte função:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

- Matemática Ensino Médio – Volume 3 – Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz (2010)

O livro aborda o estudo de taxa de variação média. Para melhor compreensão, traz um exemplo, ilustrado na Figura 4, aplicado à Física.

Um automóvel desloca-se de A para B. A tabela a seguir relaciona o espaço percorrido com o tempo percorrido.

Calculemos algumas taxas de variação média do espaço em função de t.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Espaço (metros)	0	2	5	9	14	20	27	35	...

$$\underset{[2,3]}{tvm} = \frac{9-5}{3-2} = \frac{4m}{1s} = 4m/s \qquad \underset{[4,5]}{tvm} = \frac{20-14}{5-4} = \frac{6m}{1s} = 6m/s$$

$$\underset{[6,7]}{tvm} = \frac{35-27}{7-6} = \frac{8m}{1s} = 8m/s$$

Vemos que o movimento é cada vez mais rápido, portanto é acelerado. Calculemos agora a taxa de variação média, por exemplo, entre 2 e 7 segundos.

$$\underset{[2,7]}{tvm} = \frac{35-5}{7-2} = \frac{30m}{5s} = 6m/s$$

Podemos dizer que a velocidade média entre 2 e 7 segundos foi de 6m/s.

Figura 4: Exemplo retirado do livro Matemática Ensino Médio, cap. 12 – Taxa de Variação de Funções, pg. 281.

Com isso, o livro traz o estudo da derivada sob o ponto de vista de taxas de variação. Logo após, através de uma representação geométrica, temos o estudo da taxa de variação média, definindo-a como a inclinação da reta tangente $m = tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{[x_A, x_B]}{tvm}$.

Antes da interpretação da derivada, o livro aborda, de uma maneira intuitiva, o limite de uma função, deixando bem claro que o limite não é o foco do estudo. Em seguida, é apresentado um estudo, utilizando conceitos de limite, da taxa de variação instantânea de uma função como a derivada da função no ponto. Depois de definir a derivada, temos ênfase na derivada como a inclinação da reta tangente e a equação que determina a reta tangente.

Uma parte interessante é a interpretação cinemática da derivada. Nesse momento, o livro traz a velocidade como a derivada do deslocamento e a aceleração como a derivada da velocidade.

Temos o estudo da função derivada, as derivadas de algumas funções elementares. Logo após, temos um enfoque no estudo do comportamento das funções pela análise da derivada (sinais da derivada). Por último, um estudo dos pontos de máximo e de mínimo de uma função, a partir da análise gráfica. A Figura 5 ilustra o exemplo apresentado pelo livro para explicar o estudo de pontos de máximo e de mínimo de uma função.

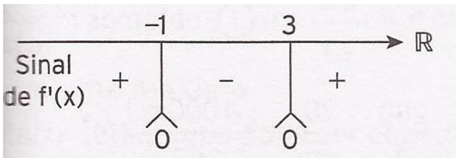
Seja a função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

a) Determine os pontos de máximo ou de mínimo local de *f*.

b) Determine o(s) intervalos em que *f* é crescente e aquele(s) em que *f* é decrescente.

Resolução:

a) Devemos estudar o sinal de $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ nas vizinhanças de suas raízes, que são -1 e 3. Veja abaixo.



$$x \in V(-1) \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ tem máximo local em } x = -1.$$

$$x \in V(3) \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > 3 \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ tem mínimo em } x = 3.$$

A ordenada do ponto de máximo local é:

$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-3(-1)=\frac{5}{3}$$

A ordenada do ponto de mínimo local é:

$$f(3)=\frac{(3)^3}{3}-(3)^2-3.3=-9$$

Portanto $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$ é o ponto de máximo local e $(3,-9)$ é o ponto de mínimo local.

b) Do esquema de sinais de $f'(x)$, temos:

f é crescente para $x\leq -1$ ou $x\geq 3$;

f é decrescente para $-1\leq x\leq 3$.

Figura 5: Exemplo retirado do livro Matemática Ensino Médio, p. 297.

Exercícios propostos pelo livro

Os exercícios que o livro traz são problemas que envolvem interpretação e aplicação dos conceitos aprendidos. A ênfase é na interpretação de gráficos e questões típicas de física envolvendo taxas de variação. Veja alguns exemplos de exercícios destacados no livro:

Exemplo 1: Em dado movimento, o espaço percorrido por uma partícula durante o tempo t é dado pela expressão $e(t)=0{,}6t^2+1$, t em segundos, e em metros. Calcule a velocidade média da partícula nos intervalos [0,2] e [2,4].

Exemplo 2: Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)=x^2$ no ponto de abscissa -2.

Exemplo 3: Considere a função $f(x)=-x^3+3x^2, x\in[-3,3]$.

Determine:

a) os mínimos e os máximos locais.

b) o mínimo absoluto e o máximo absoluto.

- Matemática Contexto e Aplicações – Volume 3 – DANTE (2011)

O livro traz, na sua parte inicial, um pouco da história do Cálculo. De uma maneira breve, relata a importância do Cálculo para a resolução de problemas de várias áreas das ciências exatas. O livro traz uma ideia intuitiva de limite, sem desenvolvê-lo sistematicamente. Na primeira parte, temos o estudo da taxa de variação. Para analisar a taxa média de variação de uma função, o livro traz o seguinte exemplo (Figura 6):

Vamos supor que o odômetro de um carro em movimento em uma rodovia indique 13600 km às 8 horas da manhã e 13480 km às 10 horas. Para determinar a taxa média de variação da distância em relação ao tempo, ou seja, a velocidade média do carro, chamando de **S** à distância em quilômetros (km) e **t** o tempo em horas (h) e vemos que:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10 - 8 = 2 \therefore \Delta t = 2\ horas$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 13840 - 13600 = 240 \therefore \Delta s = 240 km$$

Assim. A taxa média de variação, ou velocidade média, é dada por:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{240}{2} = 120\ km/h\ .$$

Isto é, a taxa média de variação da distância é de 120 km para cada variação de 1 hora no tempo, ou seja, a velocidade média é de 120 km/h.

Figura 6: Exemplo retirado do livro Matemática Contexto e Aplicações, cap. 8 – Noções intuitivas sobre derivada, pg. 205.

O exemplo acima apresenta a ideia inicial de variação, estudando a maneira de se encontrar a velocidade média de um carro em certo intervalo de tempo. Acredito ser um exemplo de fácil compreensão e importante para a concepção dos conceitos de derivada.

Depois de trabalhar estes conceitos iniciais, o livro dá ênfase ao estudo da taxa de variação instantânea. A partir desse estudo, o livro define a derivada de uma função em um determinado ponto como:

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Depois, são apresentados exemplos resolvidos sobre o cálculo da derivada utilizando a definição acima.

Logo após, temos a derivada de algumas funções elementares: função afim, função identidade, função constante e função potência. Depois, temos o estudo das propriedades operatórias das derivadas: soma e diferença. O livro não traz o estudo do produto e do quociente.

Na sequência, o livro traz algumas aplicações da derivada: velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média e aceleração instantânea. Temos muitos exemplos de aplicações da derivada, bem como os exercícios propostos.

Após, temos a interpretação geométrica da derivada, onde é feito um estudo do coeficiente angular de uma reta como sendo a derivada em um determinado ponto $f'(x) = m$. Assim, o livro também apresenta a equação da reta tangente $y - f(x_0) = f'(x).(x - x_0)$. Novamente, temos muitos exemplos resolvidos e exercícios sobre esse assunto. Na figura 7 abaixo, apresentamos um dos exemplos que o livro aborda:

Vamos determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto **P** de abscissa $x = 1.$

$f(x) = x^2$. Assim, $f(1) = 1$ e P $= (1,1).$

Aprendemos que $f'(x) = 2x.$ Portanto, $f'(1) = 2.$

Conhecendo $m = 2$, podemos escrever a equação da reta tangente à curva no ponto **P** $= (1,1).$ $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = m(x-1) \Rightarrow y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 1$

Portanto, a equação da reta tangente à curva no ponto **P** $(1,1)$ é $y = 2x - 1.$

Essa reta tem declividade $m = 2$, corta o eixo **Ox** no ponto de abscissa $x = \frac{1}{2}$ e o eixo **Oy** no ponto de ordenada $y = -1.$

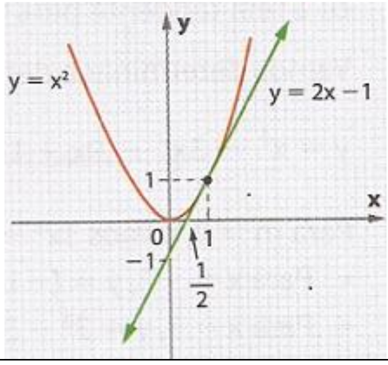


Figura 7: Exemplo retirado do livro Matemática Contexto e Aplicações, pg. 221.

Por último, é apresentado um estudo sobre o comportamento de uma função por meio do estudo do sinal da derivada, ou seja, a partir do sinal da derivada, determinar se a função é crescente, decrescente ou constante.

Exercícios propostos pelo livro

Os exercícios iniciais propostos pelo livro envolvem conhecimentos de cinemática, onde são abordados conceitos de taxa de variação. Nos exercícios, é enfatizada a interpretação da derivada em problemas contextualizados, que envolvem questões do cotidiano do aluno. Alguns exercícios ficam apenas na parte da aplicação dos conceitos. Vejamos abaixo alguns exemplos do livro:

Exemplo 1: Se a temperatura em Natal (RN) era 28º C às 10 horas e 33º C às 14 horas, num mesmo dia, determine a taxa média de variação da temperatura por hora, nesse dia.

Exemplo 2: Determine a declividade da curva nos pontos dados:

a) $y = x^2 - 2x - 3$ nos pontos (2,-3) e (-1,0).

Exemplo3: Um ponto material se move de acordo com a função horária $S(t) = 2t^3 - 24t^2 + 72t + 3$ (**S** dado em metros e **t** dado em segundos). Determine em que instantes o ponto material tem velocidade:

a) crescente;

b) decrescente.

- <u>Matemática – Volume 3 – José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno</u>

O livro traz, no início do capítulo, um estudo da noção de limite a partir do exemplo apresentado na Figura 8:

Consideremos uma figura de forma quadrada e de área igual a 1.

Vamos desenvolver as seguintes etapas:

Primeira: hachurar metade dessa figura.

área hachurada: $\frac{1}{2}$

Segunda: hachurar metade do que restou em branco.

área hachurada: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Terceira: hachurar, novamente, metade do que restou em branco.

área hachurada: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Continuando esse processo sucessiva e indefinidamente, a área hachurada vai preenchendo quase todo o quadrado inicial, isto é, a medida da área vai se aproximando de 1 ou tendendo a 1.

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots,$

Dizemos então que o limite desse processo, quando o número de partes hachuradas tende a um valor maior do que qualquer valor imaginável, é hachurar a figura toda, ou seja, obter uma área hachurada igual a 1.

Quando dizemos que a área hachurada tende a 1, significa que ela se aproxima de 1, sem no entanto assumir esse valor.

Figura 8: Exemplo retirado do livro Matemática, cap. 4 – Limites, pg. 225.

Depois, é apresentada a notação de limite como $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Após, traz um estudo das propriedades operatórias do limite: limite de uma constante, limite da soma, limite da diferença, limite do produto, limite do quociente, limite de uma potência e limite de uma raiz.

Em seguida, o livro trabalha com a ideia de função contínua, explicando as condições necessárias para uma função ser contínua. Nessa parte, temos exercícios resolvidos que ajudam na explicação. Logo após, temos o estudo do limite de uma função composta, e em seguida o estudo de limites infinitos e limite de x tendendo ao infinito.

O livro apresenta a demonstração do limite de funções polinomiais para $x \to \pm\infty$. Em seguida, são apresentados os limites de algumas funções: exponencial, logarítmica e trigonométrica (esse último o livro apresenta a demonstração).

Para o estudo inicial da derivada, o livro traz uma explicação sobre a derivada a partir da interpretação geométrica, mostrando que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = tg\ \alpha}$$

O livro apresenta exemplos resolvidos sobre como calcular a derivada de uma função em um ponto. Após, temos as derivadas fundamentais: derivada da função constante, derivada da função potência, derivada da função seno e cosseno. Depois, temos as propriedades operatórias da derivada: soma, diferença, produto e quociente. Após, temos a derivada de algumas funções elementares. O livro também traz o estudo das derivadas sucessivas: derivada primeira, derivada segunda e derivada de ordem n.

A seguir, temos uma aplicação da derivada na Geometria Analítica, em que se utiliza a derivada para encontrar a equação da reta tangente. Na sequência, temos a aplicação da derivada no estudo do movimento dos corpos, onde o livro mostra que a velocidade pode ser interpretada como a derivada da função deslocamento pelo tempo. Da mesma forma, a aceleração pode ser interpretada como a derivada da função velocidade pelo tempo.

Depois, o livro faz um estudo sobre o comportamento das funções por meio da análise do sinal da derivada. Para tal, o livro apresenta o exemplo ilustrado na Figura 9:

Dada a função definida em IR por $f(x) = x^2 - 8x + 1$, determinar os intervalos nos quais ela é crescente ou decrescente.

Resolução: Cálculo de $f'(x)$:

$f'(x) = 2x - 8$

Estudo sinal de $f'(x)$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 2x - 8 > 0 \Rightarrow x > 4$; f é crescente

$f'(x) < 0 \Rightarrow 2x - 8 < 0 \Rightarrow x < 4$; f é decrescente

Podemos resumir esse estudo através do quadro:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗

Logo, $f(x)$ é decrescente em $]-\infty, 4]$ e crescente em $[4, +\infty[$.

Figura 9: Exemplo retirado do livro Matemática, pg. 278.

A seguir, é apresentado o estudo sobre o máximo relativo e o mínimo relativo e, em seguida, o estudo sobre os extremos a partir da análise da derivada primeira. Finalmente, são apresentados alguns problemas sobre máximos e mínimos.

Exercícios propostos pelo livro

O livro apresenta exercícios com o objetivo de aplicar os conceitos trabalhados. Após, os exercícios abordados são de aplicações da derivada em Física. Também temos exercícios de interpretação geométrica para entender o crescimento e decrescimento de uma função.

Exemplo 1: Determine:

a) $\lim_{x \to 3} (3x^2 + x - 1)$

Exemplo 2: Seja a curva de $y = x^3 - 12x$. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto de abscissa $x = 4$.

Exemplo 3: Determine os pontos críticos da função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$.

3.2 UMA REFLEXÃO SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS

A partir da análise dos livros didáticos escolhidos, foi possível perceber que estes abordam os conceitos iniciais de Cálculo de maneiras diferentes. Importante destacar que os livros Matemática de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno e Matemática Aula por Aula de Cláudio Xavier e Benigno Barreto trazem um estudo sobre o conceito de limite e suas propriedades. Por meio de exemplos, iniciam esse estudo tendo como continuidade apresentar as propriedades operatórias dos limites e depois os limites de algumas funções elementares. Nesse aspecto, os demais livros analisados (Matemática Ensino Médio de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz e Matemática Contexto e Aplicações de Dante) tratam a ideia de limites de uma maneira um pouco mais intuitiva. Sobre este aspecto, os dois livros, Matemática Ensino Médio e Matemática Contexto e Aplicações, apresentam a interpretação da derivada como taxas de variação instantânea.

Assim, esses livros não apresentam um capítulo exclusivo sobre limites, pois essa ideia é trabalhada como um conceito já compreendido ou que já está claro para o leitor. Mas a ideia de limites é trabalhada, por esses autores, mediante os conceitos de taxa de variação instantânea.

A partir das análises realizadas, acredito que o estudo de limites pode ser abordado, pelos livros didáticos do Ensino Médio, de uma maneira geral, ou seja, sem dar muita ênfase a propriedades e fórmulas algébricas. Poderia tratar apenas da importância do conceito de limite, que será utilizado no estudo da derivada nas próximas etapas. Dando essa ênfase ao conceito e não às propriedades e fórmulas, esse estudo não se torna exaustivo e de difícil compreensão para o aluno do Ensino Médio. Porém, não estamos defendendo que as propriedades e fórmulas não são importantes; apenas acreditamos que, no contexto do Ensino Médio, esse não precisa ser o foco central.

Segundo Ávila “o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites é completamente desnecessário”. (ÁVILA, 2006, p. 37). O tempo que se perde com essa ênfase no capítulo de limites poderia ser utilizado para mostrar as aplicações desses conceitos matemáticos. Ainda, Ávila (2006) afirma:

> Os blocos de limites e derivadas, como ainda aparecem em livros didáticos de terceira série, devem ser reduzidos substancialmente. [...] um tratamento separado e prévio de limites é totalmente desnecessário. As apresentações em alguns livros ainda são feitas num estilo que está mais para o ensino universitário que ensino médio. (ÁVILA, 2006, p. 38).

Para Ávila (2006), o ensino de funções, que aparece nos livros didáticos da primeira série do Ensino Médio, está desvinculado do ensino de conceitos de Cálculo, abordado na terceira série do Ensino Médio. Assim, além de reduzir o conteúdo, é necessária uma devida adaptação desses conceitos de Cálculo nos livros didáticos.

Em relação ao estudo da derivada, todos os livros analisados apresentam a interpretação geométrica da derivada como a inclinação da reta tangente em um ponto. Contudo, acho importante destacar a maneira como os livros Matemática Ensino Médio e Matemática Contexto e Aplicações trabalham o estudo da derivada. Nesses dois livros, os autores apresentam a derivada a partir de aplicações da Física, trazendo, em um primeiro momento, o conceito de velocidade média, para depois chegar ao conceito de velocidade instantânea em um dado instante de tempo.

A maneira como esses autores abordam a derivada parece ser a mais adequada para o Ensino Médio, pois relaciona a aprendizagem dos conceitos de derivada com situações do cotidiano dos alunos. Esse estudo de derivada no Ensino Médio deveria ser voltado para a importância desses conceitos e suas aplicações. Para isso, Ávila (2006), sobre o ensino de derivada no Ensino Médio, afirma:

> Nada de derivada de um “produto” ou “quociente” de funções. E, se algum aluno levantar essa questão, é conveniente esclarecer que o objetivo no momento não é ensinar Cálculo, apenas tratar noções introdutórias, e que o tempo disponível será utilizado na apresentação de aplicações interessantes, especialmente no estudo do movimento que o professor de Física fará em sua disciplina. (ÁVILA, 2006, p.36)

Acho importante destacar que os livros didáticos voltados para o Ensino Médio não precisam dar ênfase à parte algébrica dos conceitos de Cálculo e sim mostrar a aplicabilidade do Cálculo por meio de exemplos. Com relação ao trabalho com a aplicabilidade do Cálculo, Rezende (2003) faz uma comparação entre o que se ensina e o que deveria ser ensinado de Cálculo.

> No conceito de derivada, por exemplo, prevalecem os seus aspectos formais (definição em termos de limite) e geométricos (como o coeficiente angular da reta tangente) sobre a sua interpretação dinâmica em termos de taxa de variação. Interpretar o conceito de derivada tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza. (REZENDE, 2003, p. 5).

Durante a escolha e análise dos livros, foi possível perceber que todos os livros que abordam conceitos de Cálculos são do terceiro volume de alguma coleção. Os volumes únicos de cada coleção não trazem esses conceitos para serem estudados.

Acredito que estes conceitos de Cálculo poderiam ser abordados nos primeiros volumes de uma coleção de livros. Assim, esse estudo poderia ocorrer em paralelo com o estudo de funções e, consequentemente, com o estudo de movimentos na disciplina de Física. O estudo de função poderia ser trabalhado através da visão do Cálculo. Utilizando-se dos conceitos de Cálculo, pode-se mostrar a importância do conceito de função e, assim, atrair a curiosidade do aluno.

Trabalhar conceitos iniciais de Cálculo na primeira série, juntamente com os conteúdos de Cinemática, pode facilitar a compreensão dos alunos sobre esses conceitos de Matemática e Física. Ávila (2006) acredita que o ensino da derivada ser abordado nos livros de terceira série, já no final do Ensino Médio, é um desperdício para o aproveitamento desses conceitos.

Abaixo, trazemos a opinião de Ávila (2006) sobre o ensino de Cálculo no primeiro ano do Ensino Médio:

> O ensino da derivada é da maior importância, pelo tanto que ajuda no tratamento de inúmeras propriedades das funções. E tem de ser feito logo na primeira série, quando pode integrar-se harmoniosamente com a Física no estudo do movimento." (ÁVILA, 2006, p. 37)

Parece, desse modo, que é viável o ensino de Cálculo ser incluído nos livros didáticos da primeira série. Seria uma ferramenta importante para o estudo de funções que, nos livros didáticos, aparecem carregadas de terminologia, notações e exercícios descontextualizados.

Podem-se destacar os livros didáticos Matemática Ensino Médio e Matemática Contexto e Aplicações. Estes apresentam os conceitos iniciais de

Cálculo relacionando com as suas aplicações, não se prendendo a abordagem algébrica.

Acredito que os livros didáticos deveriam abordar os conceitos inicias de Cálculo com o auxílio da visualização geométrica, enfatizando as ideias em apresentações claras, sem excessos de formalismos.

4. PROPOSTA PARA O ENSINO DE CÁLCULO

Verificando experiências passadas sobre o estudo de funções no Ensino Médio, foi possível observar o quanto os professores abordam esse conteúdo com os alunos com enfoque mais algébrico, ficando presos a nomenclaturas e definições. Acerca disso, Ávila (1991) traz uma análise sobre o ensino de funções nas escolas:

> Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas de Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa. (ÁVILA, 1991, p. 8).

Enquanto perde-se tempo ensinando essas nomenclaturas e definições, porque não tentar remodelar esse ensino, buscando trabalhar o conteúdo de funções de uma maneira mais dinâmica e atrativa para os alunos, realizar o estudo das funções com foco em sua aplicabilidade no cotidiano. Não estou dizendo que devemos abolir o uso e o ensino de definições como domínio, imagem ou as raízes de uma função. Mas, junto com essas definições, que são importantes na formação matemática dos alunos, fazer uma análise do gráfico da função, compreendendo o seu comportamento e seus intervalos de crescimento e decrescimento. Fazer com que os alunos sejam capazes de interpretar os resultados obtidos, dando significado para esses resultados dentro de determinado contexto, e não valorizar a simples manipulação algébrica. Assim, criar situações e incentivar que eles possam interpretar o que realmente está acontecendo em determinados intervalos ou situações da função em questão.

E é claro que, com essa visão diferenciada do ensino de funções, os alunos poderão perceber que essas relações envolvidas podem ser trabalhadas em outras áreas além da Matemática, como Física e Biologia por exemplo.

Dessa forma, acredita-se que o trabalho com conceitos de Cálculo Diferencial no Ensino Médio possa ajudar nessa proposta, auxiliando para a compreensão e exploração desses conceitos. A interpretação geométrica de taxas de variação instantânea serve como uma ferramenta rica para a interpretação do comportamento de funções e para a resolução de diversos problemas.

Com base nessas ideias, apresenta-se uma possibilidade de abordagem de conceitos iniciais de Cálculo Diferencial no Ensino Médio. A seguir, serão apresentadas uma sequência didática, elaborada com o objetivo de verificar a viabilidade do estudo sobre derivada no Ensino Médio e a prática realizada com os alunos de uma escola particular de Guaíba, que buscou analisar a viabilidade dessa proposta. Nessa experiência, os alunos estudaram o conceito de derivada, interpretado como taxa de variação instantânea.

4.1. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção, apresentamos a sequência didática elaborada, organizada por assunto abordado. A sequência foi pensada para o aluno do Ensino Médio e, portanto, busca abordar os diversos conceitos matemáticos necessários para a compreensão do conceito de derivada.

TANGENTE DE UM ÂNGULO

Como já afirmado, pretende-se revisar com os alunos alguns conceitos importantes, que poderão ajudar ao longo da prática e facilitar a compreensão dos conceitos de Cálculo abordados adiante. Começamos com o estudo da razão trigonométrica tangente. Com isso, apresenta-se uma adaptação da proposta utilizada por Vieira (2007) em seu trabalho de Mestrado para trabalhar com alunos a interpretação e a visualização da razão trigonométrica tangente de um ângulo. O trabalho será realizado com a aplicação de uma atividade que, por meio de um teodolito[3] artesanal (confeccionado a partir de um transferidor, uma caneta sem o tubo de tinta, fio de naylon e um objeto com pouco peso), trena e com o apoio das razões trigonométricas, buscaremos determinar alturas aproximadas de objetos com tamanhos variados.

Na figura 10 abaixo, apresenta-se a imagem do objeto utilizado na atividade.

[3] O teodolito é um instrumento óptico de medida utilizado na topografia, navegações, etc. Realiza medida de ângulos verticais e horizontais. FONTE: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Teodolito>.

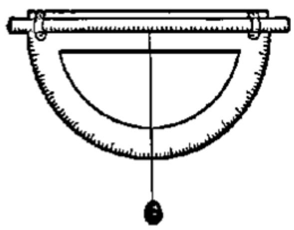


Figura 10: Teodolito artesanal. Fonte: VIEIRA 2007, p. 66.

Vamos organizar a atividade da seguinte maneira:

- Os teodolitos artesanais vão ser divididos a cada três alunos;
- Depois, os alunos poderão explorar um pouco a ferramenta e simular uma situação dentro da sala de aula e perceber que eles têm que olhar diretamente para o topo do objeto e se afastar alguns metros dele para poder obter a sua altura aproximadamente (como mostra a Figura 11 abaixo):

Figura 11: Representação da situação proposta para os alunos.

- Cada trio vai escolher o seu observador e, com a ajuda dos seus colegas, vai definir sua medida em metros, utilizando a trena;
- Logo após, o professor vai pedir para que os alunos calculem aproximadamente a altura de um objeto na escola. Professor irá determinar três afastamentos sugeridos por ele 4, 6 e 10 metros.
- Depois de coletados os dados, os alunos retornarão à sala de aula para reproduzir os triângulos retângulos obtidos na situação concreta;
- O professor apresenta o modelo matemático $tg(\alpha) = \frac{co}{ca}$. Sendo $tg(\alpha)$ a constante de proporcionalidade entre os catetos dos triângulos retângulos, co a

medida do cateto do lado oposto ao ângulo α e ca na media do cateto do lado adjacente ao ângulo α;

- Comentamos com os alunos que temos um lado no qual não conhecemos o valor que, no caso da atividade, é o co do triângulo retângulo criado. Colocando em evidência o lado no qual não conhecemos a medida e substituindo os outros valores que encontramos, chegamos à medida da altura do triângulo retângulo. Basta somar a altura do observador para obtermos a altura aproximada do objeto.

Essa atividade possibilitará encontrar uma relação entre a determinação de coeficientes angulares de retas com a razão trigonométrica citada acima.

FUNÇÕES DO 1º GRAU E COEFICIENTE ANGULAR

Partindo da atividade de revisão da razão trigonométrica da tangente de um ângulo, vamos relembrar a ideia da função polinomial de 1º grau $f(x) = ax + b$ (onde o parâmetro real a representa o coeficiente angular[4] e o parâmetro real b representa o coeficiente linear[5]). Pretende-se identificar com os alunos que, ao esboçarmos o gráfico da função de 1º grau, obtemos uma reta de equação $y = ax + b$. Para melhor compreensão, será utilizado o software GeoGebra[6], como uma ferramenta auxiliar no processo de visualização e compreensão do esboço do gráfico. No software, vamos usar uma ferramenta chamada Seletor (ou Controle Deslizante), que será utilizada para explorar os parâmetros a e b, estes variando no intervalo $[-5,5]$. Dessa forma, com a utilização do software, os alunos poderão visualizar o esboço do gráfico para valores diferentes dos parâmetros a e b. Após essa atividade no software, os alunos serão questionados sobre as mudanças que ocorreram nos gráficos quando a e b alteravam de valores.

A Figura 12 abaixo apresenta a interface do software GeoGebra, com um exemplo da proposta, para os alunos identificarem e manipularem os coeficientes angular e linear, além de analisar quais são as modificações que ocorrem no gráfico

---

[4] Refere-se à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas OX no sentido anti-horário.

[5] Refere-se ao ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas OY.

[6] GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino. O download se encontra no link <www.geogebra.org>.

de $y = ax + b$ quando são alterados os valores de a e b. No exemplo, temos o gráfico de equação $y = 2x + 1$.

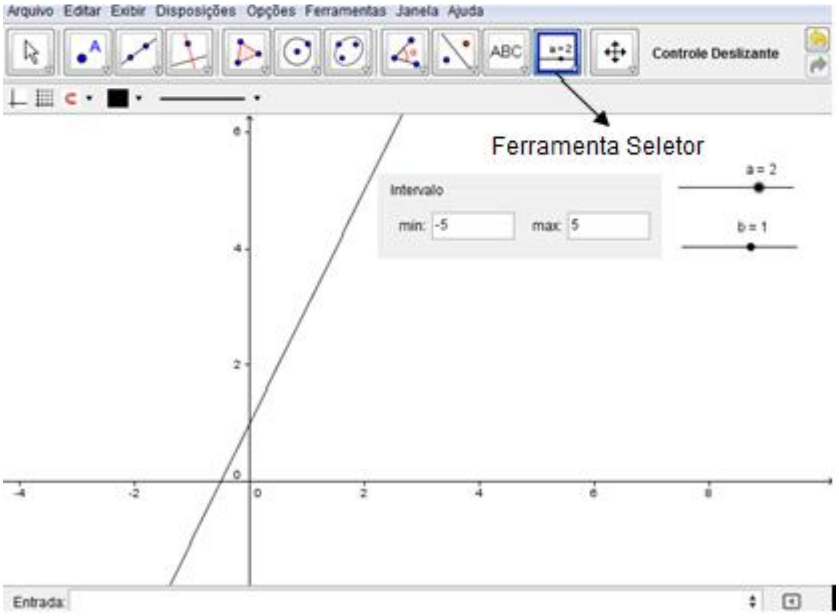


Figura 12: Visualização da representação gráfica da equação $y = 2x + 1$ no software GeoGebra.

Realizando essa atividade, pretende-se trabalhar com os alunos a ideia de coeficiente angular com o conceito de proporcionalidade entre grandezas. Será apresentada a declividade da reta com a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e enfatizar que, quanto maior o declive, mais inclinada é a reta em relação ao eixo x. Para esse estudo, será utilizada uma ideia adaptada de Sant'Ana et al. (2009, p.20). Com a utilização do software GeoGebra, vamos mostrar aos alunos que, dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, o coeficiente angular da reta que contém esses dois pontos é dado por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. A Figura 13 abaixo ilustra como será trabalhado com os alunos.

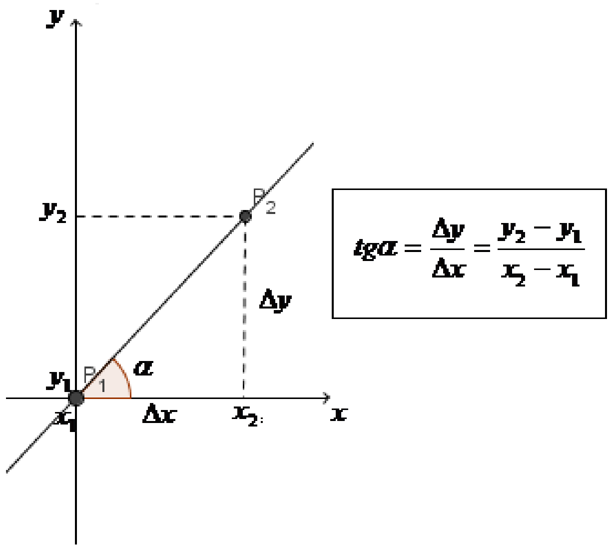


Figura 13: Visualização da razão entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representando o coeficiente angular da reta.

Na Figura 13 acima, Δy é a variação no eixo das ordenadas e Δx a variação no eixo das abscissas.

Após mostrar a razão de proporção que representa o coeficiente angular, será explicado aos alunos que esse parâmetro a da reta representa quantas unidades de crescimento (ou decaimento) vertical ocorrem quando fazemos uma variação de uma unidade na horizontal, da esquerda para a direita. Com isso, será perguntado aos alunos se uma reta possui um único coeficiente angular m. Para responder essa pergunta, vamos ter que relembrar alguns conceitos como definição de reta e triângulos semelhantes.

Definição de reta[7]: por dois pontos distintos P_1 e P_2 passa uma e apenas uma reta que contém esses pontos.

Definição de triângulos semelhantes[8]: dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os seus ângulos internos são ordenadamente congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano xy e r a reta definida por eles. Como podemos saber se um terceiro ponto qualquer está ou não alinhado

---

[7]FONTE: Livro: Pré-Cálculo (UFRGS). 1 ed. 2008.

[8] FONTE: Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana. 8 ed. 2005.

com os pontos P_1 e P_2? Para mostrar que um ponto qualquer está na reta r determinada por P_1 e P_2 vamos utilizar semelhança de triângulos.

Da semelhança de triângulos, temos que a razão de proporção entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes será sempre a mesma, como mostra a Figura 14:

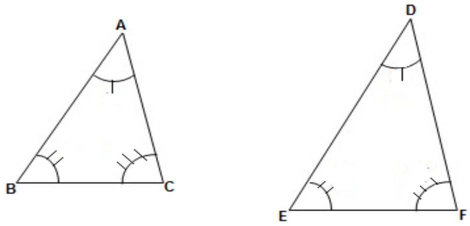


Figura 14: Triângulos ABC e DEF semelhantes.

Na Figura 14 acima, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \lambda$, sendo λ a razão de proporção dos triângulos acima.

Com isso, voltamos aos pontos P_1 e P_2 que definem a reta r. Tomamos agora os pontos P_3 e P_4, esses pontos estarão na reta r se, e somente se, os triângulos formados por eles forem semelhantes ao triângulo formado pelos pontos P_1 e P_2, como mostra a Figura 15 abaixo:

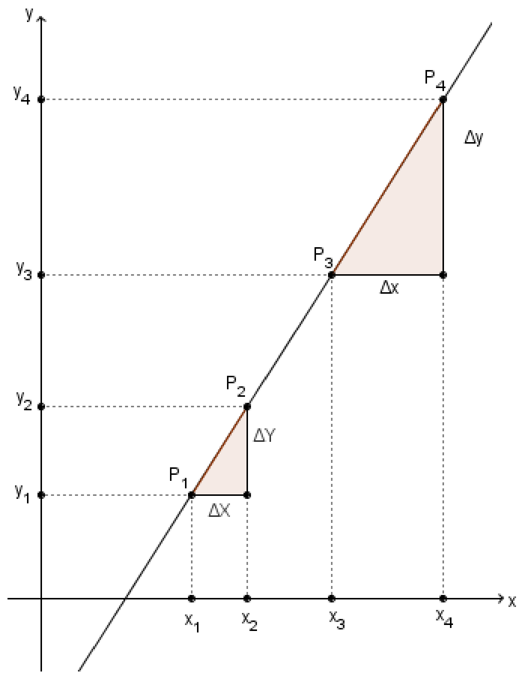


Figura 15: Figura retirada do livro de Pré- Cálculo (2009).

Da semelhança de triângulo, temos: $m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$. Com base na análise realizada nos triângulos semelhantes, os alunos serão questionados sobre a inclinação da reta em determinados pontos, para concluir que, em qualquer ponto da reta, a inclinação será sempre a mesma.

EQUAÇÃO DA RETA

Para trabalhar com os alunos a representação algébrica da equação da reta, serão utilizados conceitos já abordados nos encontros anteriores. Novamente, será utilizado o software GeoGebra, para facilitar a interpretação e compreensão. Na Figura 16 abaixo, temos o esboço da reta de equação $y = ax + b$ e os pontos $P = (x_o, y_o)$ e $Q = (x, y)$ pertencentes à reta.

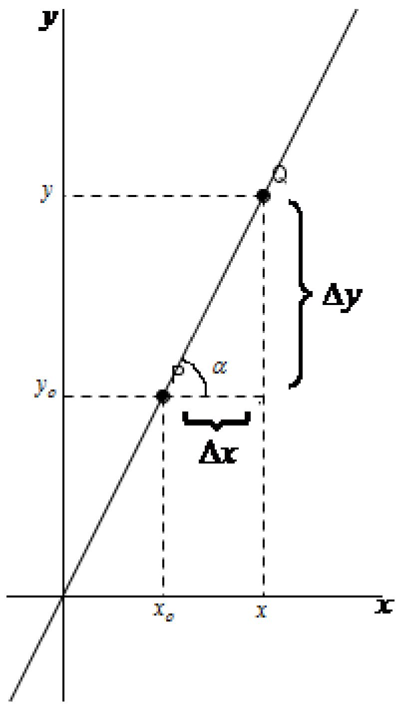


Figura 16: Reta de equação y=ax+b e pontos P =(x0,y0) e Q =(x,y) pertencentes a reta.

Como já vimos que a inclinação da reta é dada pela razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, temos: $tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_o}{x - x_0}$, logo a equação da reta é dada por $y - y_o = tg\alpha(x - x_0)$.

TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA E INSTANTÂNEA

Nos encontros anteriores, os alunos realizaram um estudo sobre os conceitos de tangente de um ângulo, sobre funções de 1º grau e por fim a análise geométrica do coeficiente angular. A próxima atividade consiste em iniciar o estudo sobre a ideia de velocidade média e velocidade instantânea em determinado ponto. Para isso, os alunos terão que percorrer um trajeto criado pelo professor. Esse trajeto terá 40 metros e essa distância será demarcada de um em um metro. Para concluir esse trajeto, os alunos terão um tempo 30 segundos. O importante a destacar é que todos os alunos terão que realizar esse trajeto no mesmo intervalo de tempo. Os critérios para a velocidade dos alunos ao longo do percurso serão definidos por eles, podendo caminhar, pular, andar de costas e parar em determinados instantes de tempo.

Para essa atividade, os alunos terão o cronômetro em mãos para auxiliar no controle do tempo. O percurso realizado por cada aluno será gravado, para depois auxiliar na próxima etapa da atividade.

Após todos realizarem o percurso, a próxima etapa consistirá em os alunos fazerem um esboço do gráfico distância x tempo. Nos computadores do laboratório da escola, será transferida a gravação realizada pelo professor para que, cada aluno, a partir do vídeo, realize o esboço do gráfico do seu percurso realizado. Os alunos utilizarão o plano cartesiano para essa representação, onde teremos o eixo y representando a distância (d) do percurso e o eixo x representando o tempo (t) do percurso. O esboço do gráfico será feito em um papel quadriculado para permitir uma melhor precisão na representação. Acabando o esboço do gráfico, será discutido com os alunos como podemos calcular a velocidade média (interpretado como a taxa de variação média) de cada aluno no percurso. Então, discutiremos a fórmula da velocidade média.

$$\boxed{V_m = \frac{distância \quad total}{tempo \quad total}}$$

A partir dessa fórmula, terei a oportunidade de perguntar aos alunos se eles mantiveram a mesma velocidade em todo o percurso e se todos no mesmo instante tiveram a mesma velocidade. Para estudar a taxa de variação média em um intervalo de uma função e a taxa de variação em um ponto, vamos estudar conceitos importantes como:

- Retas secantes e velocidade média;
- Retas tangentes e velocidade instantânea

RETAS SECANTES E VELOCIDADE MÉDIA

Primeiramente, será perguntado aos alunos o que eles entendem sobre o conceito de retas secantes. Com isso, será definida reta secante a uma circunferência como a reta que intersecta a circunferência em dois pontos. E que reta secante a uma curva significa dizer que intersecta dois ou mais pontos dessa curva.

Para trabalhar esse conceito de reta secante, será realizado um estudo do gráfico da função $f(x) = x^2$. Utilizando o software GeoGebra, vamos esboçar o gráfico da função, como mostra a Figura 17.

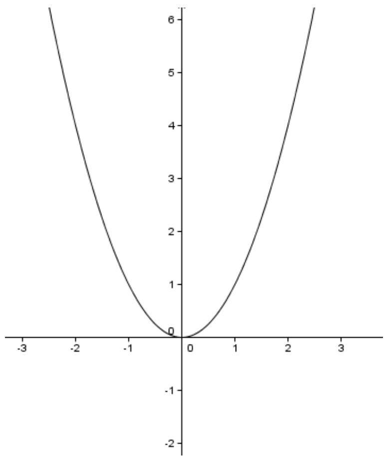


Figura 17: Esboço do gráfico f(x)= x^2.

Com o gráfico da função acima e usando a definição de reta secante a uma curva, será mostrado aos alunos a reta secante s_1 (contém os pontos A = (0,0) e B = (1,1)) e a reta secante s_2 (contém os pontos B = (1,1) e C = (2,4)). A Figura 18 abaixo apresenta essa visualização.

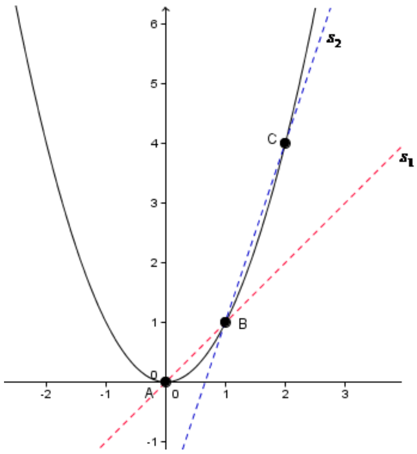


Figura 18: Visualização das secantes s_1 e s_2.

Após mostrar aos alunos a visualização das retas secantes s_1 e s_2, será apresentada aos alunos a taxa de variação média como a razão em que a função varia em determinado intervalo.

A *taxa de variação média* de uma função *f* no intervalo $[x_0, x]$ é dada por: $$\textit{Taxa de Variação Média (TVM)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Com a definição desse conceito, será solicitado aos alunos que determinem a taxa de variação nos intervalos de $[0,1]$ e $[1,2]$ da Figura 18 acima. Com os resultados descobertos, será realizado o estudo geométrico da taxa de variação.

Utilizando o conceito de inclinação de uma reta, já estudado nos encontros anteriores, será definido para os alunos que a taxa de variação média de uma função f no intervalo $[x_{0,} x]$ pode ser interpretada como a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x, f(x))$. A Figura 19 abaixo traz a representação geométrica da inclinação da reta secante como a taxa de variação média.

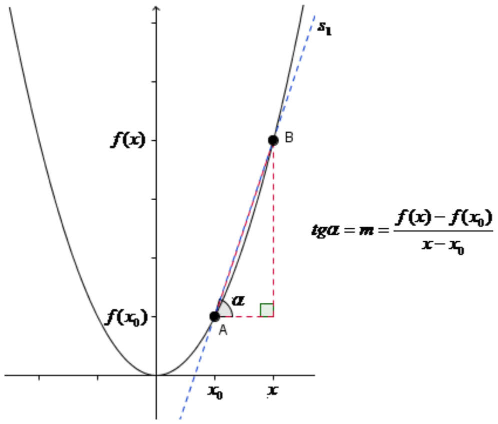


Figura 19: Representação geométrica da inclinação da reta secante s_1 que passa pelos pontos A e B.

Representando a variável x como o tempo (t) e $f(x)$ como a posição (d) de um objeto em um determinado tempo, podemos associar a taxa de variação média com a velocidade média de um objeto.

RETAS TANGENTES E VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Após o estudo da taxa de variação média (inclinação da reta secante em um determinado intervalo) relacionando com a velocidade média de um objeto, vamos analisar com os alunos o que acontecerá com as inclinações das retas secantes e com a taxa de variação quando fixarmos um dos extremos do intervalo. Utilizarei o software GeoGebra para auxiliar na visualização.

A Figura 20 representa o gráfico da função $f(x) = x^3$ e a reta secante s que passa pelos pontos $A = (1, f(1))$ e $B = (2, f(2))$.

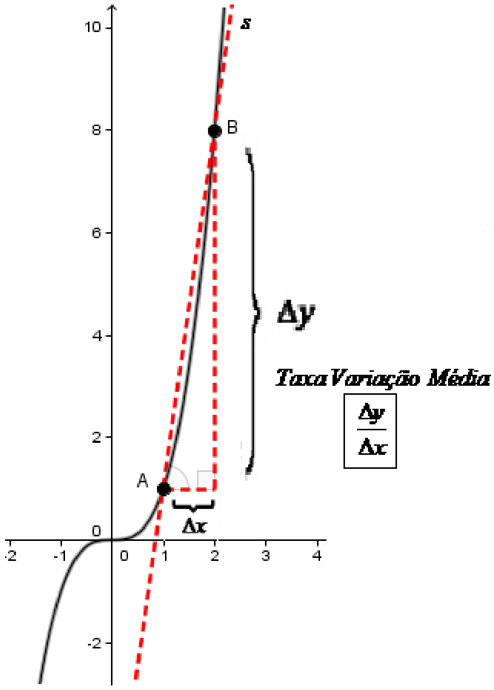


Figura 20: Esboço do gráfico da função f(x)=x³. Reta s secante passando pelos pontos A e B.

Vamos calcular com os alunos a taxa de variação média no intervalo de $[1,2]$. Logo:

$$\text{TVM}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{7}{1}=7$$

O valor encontrado acima é a inclinação da reta secante ao gráfico de $f(x)=x^3$, que contém os pontos $A=(1,f(1))$ e $B=(2,f(2))$. Vamos analisar o que acontece com a taxa de variação média quando fixarmos um dos extremos do intervalo e pegarmos intervalos Δx cada vez menores. No exemplo acima, vamos fixar o extremo inferior e fazermos o valor do extremo superior aproximar-se cada vez mais do valor do extremo inferior.

Abaixo, a Tabela 4 representa os valores aproximados das taxas de variação média, na medida em que o extremo superior aproxima-se do extremo inferior.

Tabela 4: Valores de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando o extremo superior se aproxima do extremo inferior

Intervalos	Desenvolvimento	$\Delta y/\Delta x$

$[1,1.75]$	$\frac{f(1.75)-f(1)}{1.75-1}$	5,81
$[1,1.5]$	$\frac{f(1.5)-f(1)}{1.5-1}$	4,75
$[1,1.25]$	$\frac{f(1.25)-f(1)}{1.25-1}$	3,81
$[1,1.1]$	$\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}$	3,31
$[1,1.01]$	$\frac{f(1.01)-f(1)}{1.01-1}$	3,0301
$[1,1.001]$	$\frac{f(1.001)-f(1)}{1.001-1}$	3,003001

Podemos analisar a Tabela 4 acima e perceber que, cada vez que diminuímos o intervalo, a taxa de variação média tende a um determinado número. No caso acima, temos que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende ao valor 3. Também será destacado para os alunos que o extremo superior pode tender a 1 mas não poderá assumir o valor 1 porque teríamos um Δx igual a zero. Sendo $\Delta x = 0$, a divisão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não existiria. Portanto, no exemplo, quando Δx tende a zero a inclinação da reta secante se aproxima de 3.

Para verificar se a taxa de variação média se aproxima de 3, vamos analisar a situação de uma maneira mais geral. No exemplo acima, vamos calcular a taxa de variação média no intervalo $[1,1+\Delta x]$, sendo Δx o comprimento do intervalo, ou seja, a diferença, entre os extremos.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{1+\Delta x-1} = \frac{1+3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3-1}{\Delta x} = \frac{\Delta x.(3+3\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x} = 3+3\Delta x+\Delta x^2$$

Como Δx tende a zero, é fácil perceber que o coeficiente da reta secante se aproxima de 3, como já tínhamos concluído anteriormente. Esse valor no qual a inclinação da reta secante se aproxima é a inclinação da reta tangente no ponto 1. Com isso, será apresentada aos alunos a definição de reta tangente. Definimos a reta tangente a uma curva em um ponto $P=(x_0, f(x_0))$, como a reta que passa por P e que tem coeficiente angular *m*, sendo o valor $m=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quando Δx se aproxima a zero ou tende a zero[9]. No nosso exemplo, a inclinação da reta tangente no ponto A(1,1) é *m* = 3.

Será discutido com os alunos que a inclinação da reta tangente em determinado ponto representa a taxa de variação instantânea naquele ponto. Nos conceitos de física, é interpretada como a velocidade instantânea. Com esse conceito, vamos retornar aos gráficos realizados pelos alunos, para analisar as velocidades instantâneas, apenas observando as inclinações das retas. Com a utilização do software GeoGebra, vamos analisar geometricamente o que acontece quando diminuímos o intervalo [1,2] da função $f(x)=x^3$. Nosso objetivo é perceber que, quando diminuímos o intervalo de variação de *x*, a inclinação da reta secante se aproxima da inclinação da reta tangente naquele ponto.

A Figura 21 representa o esboço do gráfico $f(x)=x^3$, a reta *s* é a secante à curva que passa pelos pontos $A=(1, f(1))$ e $B=(2, f(2))$. A reta *r* é a reta tangente à curva no ponto $A=(1, f(1))$. O ponto B é um parâmetro que varia no intervalo de [1,2].

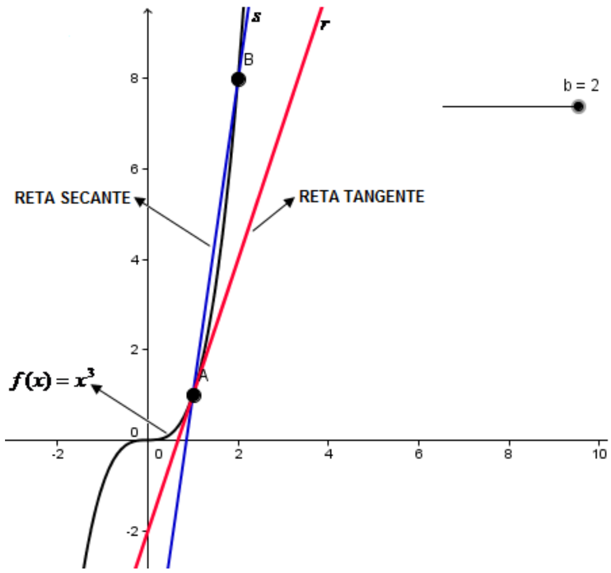


Figura 21: Interpretação geométrica da reta tangente.

---

[9] Retirado do livro Cálculo 8ª Ed.-Howard Anton.

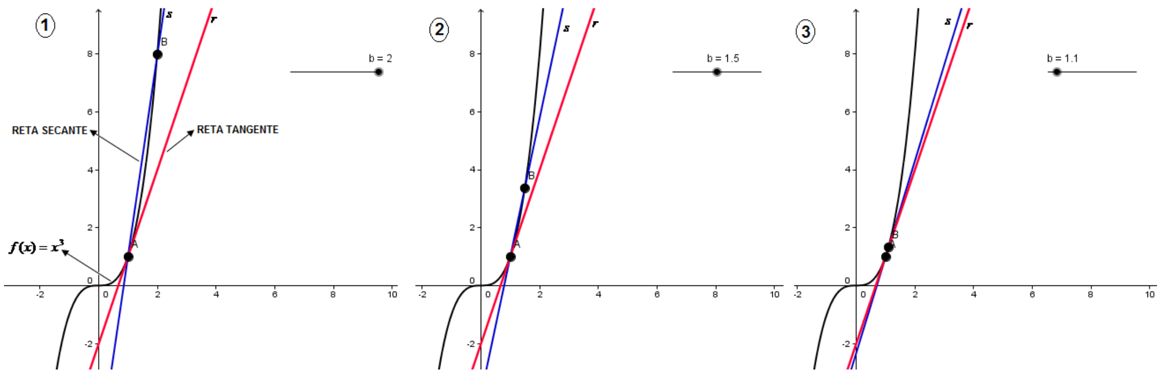


Figura 22: O valor do ponto B se aproxima do valor do ponto A.

Alterando os valores do ponto B, notamos que a inclinação da reta secante *s* se aproxima da inclinação da reta tangente *r*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

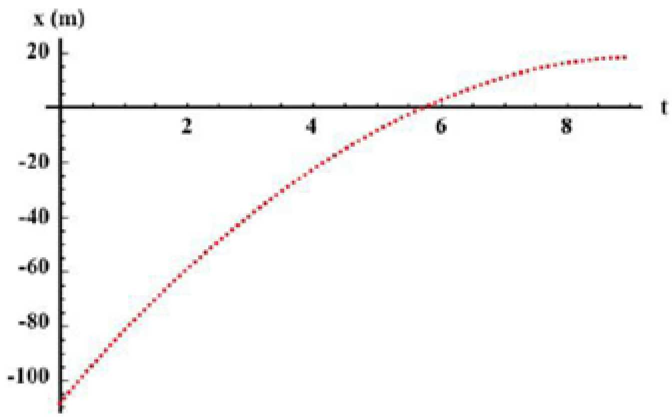
Após estudarmos os conceitos de taxa de variação instantânea como a inclinação da reta tangente em determinado ponto, serão propostos aos alunos problemas, com o objetivo de analisar a compreensão dos mesmos sobre os conceitos estudados e discutidos durante os encontros. Abaixo apresento os problemas propostos para os alunos.

1) Explique o que você entende como taxa de variação média?

2) Explique o que você entende como taxa de variação instantânea?

3) Se a inclinação da reta tangente é nula em ponto dado, o que acontece com a taxa de variação instantânea?

4) Suponha que você veja um radar a 100 m de distância enquanto dirige seu carro a 100 Km/h. Para não ser multado, você precisa passar pelo radar a menos de 50 Km/h. Então, imediatamente você pisa nos freios (medida em metros) e encontra o radar 5,74 segundos depois (na posição zero), como pode ser visto na figura abaixo:



Qual a velocidade do carro no instante *t* = 5,74 s? Nesse exato instante, o carro será multado?

5) Numa mercearia, uma maça foi lançada ao ar, de baixo para cima. A altura da maça de baixo para cima é dado por $H(t) = -t^2 + 8t + 2$. Onde t designa o tempo, em segundos, e h a altura, em metros.

a) Calcule a taxa média de variação nos dois primeiros segundos após o lançamento.

b) Calcule a velocidade da maça no instante $t = 2$.

4.2. PORQUE GEOMETRIA DINÂMICA

Quando tratamos de geometria dinâmica, estamos falando de uma "mídia digital que disponibilizará régua e compasso virtuais, que são os instrumentos clássicos com os quais são feitas as construções geométricas" (GRAVINA et al., 2012, p.37). No ambiente da geometria dinâmica, o aluno tem por objetivo conseguir conectar os conceitos matemáticos às construções geométricas. Gravina (1996) apresenta os princípios da geometria dinâmica:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitas a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. (GRAVINA, 1996, p. 6)

Essas situações criadas nos ambientes de geometria dinâmica auxiliam o aluno na compreensão de conceitos matemáticos, “contemplando um papel ativo do aluno no processo de aprendizagem” (Gravina et al., 2012, p.53). Considerado um software de geometria dinâmica, o GeoGebra[10] foi selecionado para o trabalho com os alunos, com o intuito de auxiliar na compreensão e descoberta dos conceitos matemáticos envolvidos. O software GeoGebra é um software que integra geometria e álgebra. Possui uma Janela de Visualização, uma Janela de Álgebra, um campo para inserir funções e um menu de Ferramentas, como mostra a Figura 23:

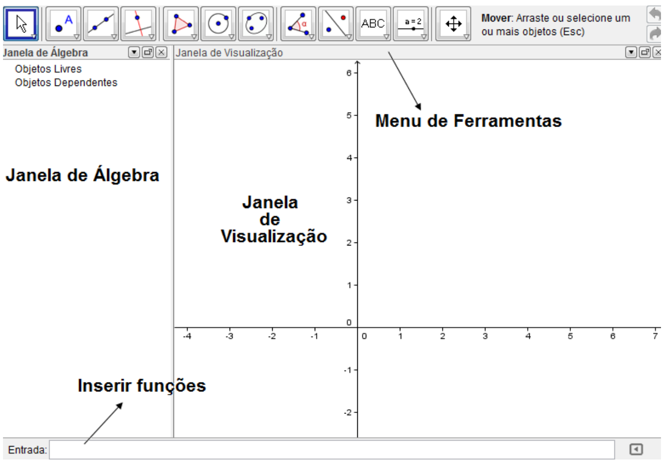


Figura 23: Interface do GeoGebra.

Tais ferramentas, como por exemplo, reta paralela, reta perpendicular, círculo definido de diferentes modos e transformações geométricas, podem ser utilizadas em construções de figuras geométricas.

Como já mencionado, o software possui um campo para inserir funções e o resultado gráfico pode ser observado na Janela de Visualização. O software GeoGebra “tem o interessante recurso de estabilidade sob a ação de movimento” (GRAVINA et al., 2012, p.39) ou seja, permite o movimento de pontos sobre o gráfico, de modo a auxiliar o aluno na aprendizagem de conceitos, como coeficientes angular e linear, por exemplo.

O GeoGebra possibilita um trabalho simultâneo entre as representações gráfica e algébrica, o que cria condições para que o aluno estabeleça relações entre estas duas formas de representação. Dessa forma, a utilização dos recursos do

---

[10] O download se encontra disponível no site <www.geogebra.org>.

software permitem aos alunos visualizar a interpretação geométrica de conceitos, até então estudados sob o enfoque algébrico. A possibilidade de interação entre esses dois campos – algébrico e geométrico – que o software GeoGebra proporciona pode contribuir que o aluno construa esta conexão.

Logo, a geometria dinâmica pode ser considerada como um ambiente de aprendizagem no qual “por associar as compreensões visuais e analíticas sobre um conceito, pode vir a aproximar a imagem conceitual ao conceito, seja qual for, para um determinado sujeito que explora este conceito” (BERND, 2011, p. 19).

4.3. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA PRÁTICA

Nesta seção, vamos descrever o desenrolar de cada encontro, buscando analisar o envolvimento dos alunos e a viabilidade da proposta.

Serão descritos os métodos utilizados na apresentação dos conceitos iniciais de Cálculo para os alunos, assim como questionamentos e perguntas, que foram fundamentais para os estudos e para a compreensão desses conceitos. A partir desses diálogos, pretende-se evidenciar o grau de envolvimento e compreensão dos alunos ao longo dos encontros.

A prática foi realizada na escola particular Instituto Educacional Dimensão, no município de Guaíba. Participaram da prática cinco alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Estes são meus alunos no Pré-Vestibular do Instituto Educacional Dimensão. O critério de escolha foi pelo interesse em participar da pesquisa. As atividades foram divididas em quatro encontros, geralmente com duração de uma hora e meia, organizados da seguinte forma:

- 1º Encontro: Apresentação da proposta do trabalho, estudo da razão trigonométrica tangente e estudo dos coeficientes linear e angular da função do 1º grau.

- 2º Encontro: Estudo do coeficiente angular da reta e equação da reta.

- 3º Encontro: Estudo dos conceitos de taxa de variação média interpretados como a inclinação da reta secante. Associar a taxa de variação média como a velocidade média em um determinado intervalo de tempo.

- 4º Encontro: Estudo da derivada interpretada como a taxa de variação instantânea no ponto. Associar a taxa de variação instantânea como a velocidade em certo instante de tempo.

Foram utilizados os espaços da escola como: sala de aula e laboratório de informática.

Utilizarei as letras B, C, D, G e J para me referir aos alunos que participaram das atividades. A letra P é quando me referir ao pesquisador.

1º ENCONTRO

Participaram do primeiro encontro cinco alunos. No primeiro momento, me apresentei para os alunos e expliquei os objetivos do trabalho, bem como a proposta de atividade na qual eles iriam participar. Falei que, durante os encontros, eu iria obter dados importantes para a minha pesquisa, como fotos, diálogos, filmagem e arquivos dos alunos.

Comentei com os alunos que o assunto principal da pesquisa é o ensino de conceitos de Cálculo no Ensino Médio e que este conteúdo normalmente é trabalhado no ensino superior. Disse que, para conseguirmos entender o assunto principal, teríamos que revisar alguns conteúdos do Ensino Médio.

Começamos revisando o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, em especial a tangente de um determinado ângulo. Nessa atividade, os alunos deveriam medir a altura da placa da escola e a altura do pavilhão. Na sala de aula, os alunos foram divididos em uma dupla (G e C) e um trio (B, D e J). O aluno G perguntou:

> "*mas Marcelo como vamos medir a altura do pavilhão?"*

Então mostrei aos alunos a trena e o teodolito artesanal e comentei que iriam utilizar estes materiais durante a atividade. Cada dupla recebeu uma trena e um teodolito para realizar a atividade. Tendo em mãos as ferramentas, os alunos, dentro da sala de aula mesmo, começaram a explorá-las. O teodolito foi o mais explorado pelos alunos, no qual visualizavam a altura da sala e ao mesmo tempo o ângulo de visualização. Então o aluno G falou para seus colegas:

> "*vamos utilizar o teodolito para medir o ângulo e assim descobrir as alturas que o Marcelo quer".*

Foi estabelecido que, em cada grupo, apenas um aluno seria o observador. Os alunos chegaram à conclusão de que deveriam se afastar do objeto e olhar para o seu ponto mais alto para poder medir sua altura. Assim, mostrei para eles a Figura 24

Figura 24: Representação da situação proposta para os alunos.

Os alunos notaram que, para descobrir a altura dos objetos, teriam que medir a altura dos observadores. A Figura 25 abaixo mostra os alunos medindo a altura dos observadores.

Figura 25: Os alunos medindo a altura dos observadores.

Assim, pedi para os alunos calcularem as alturas dos objetos nas distâncias de 4 metros, 6 metros e 10 metros. Os alunos foram para o pátio da escola medir as alturas da placa e do pavilhão. A Figura 26 mostra os alunos medindo essas alturas com o auxílio do teodolito.

Figura 26: Alunos utilizando o teodolito.

Após visualizar os ângulos nas distâncias 4 metros, 6 metros e 10 metros, voltamos para a sala de aula para finalizar os cálculos. Utilizando o triângulo, perguntei como iríamos calcular a altura dos objetos. A aluna J disse:

> *"Sor, nós temos o ângulo e o cateto adjacente. Temos que encontrar o cateto oposto ao ângulo. Podemos usar a tangente né?"*

Podemos notar que aluna não teve dificuldades em explicar o que faria para descobrir a altura do triângulo. Todos os alunos apresentaram facilidade para encontrar essa relação, mas precisavam do valor da tangente dos ângulos encontrados. Enquanto eles organizavam-se para encontrar estes valores, pesquisei-os na internet. Com esses valores, os alunos calcularam sem dificuldade a altura do triângulo. Perguntei aos alunos os valores encontrados representavam a altura do pavilhão e a altura da placa da escola. Todos responderam que não, pois faltava somar o valor encontrado com a altura do respectivo observador.

Os alunos então somaram e descobriram os valores aproximados das alturas do pavilhão da escola e da placa com nome da escola. Também concluíram que não importa a distância e o respectivo ângulo de observação, pois a altura aproximada será sempre a mesma. Perguntei aos alunos o que acontecia com ângulo na medida em que nos afastamos do objeto. A aluna B disse:

> *"pelo que eu notei quando estava visualizando, enquanto eu me afastava o ângulo diminuía".*

Podemos notar que os alunos percebem a questão da inclinação e o que acontece com ela quando nos distanciamos em relação ao nosso referencial. Nessa primeira parte da atividade, foi possível perceber que os alunos não apresentaram dificuldade para compreender os conceitos trabalhados, uma vez que resolveram o problema rapidamente. Abaixo, na Figura 27, apresento alguns cálculos efetuados pelos alunos para encontrar a altura dos objetos.

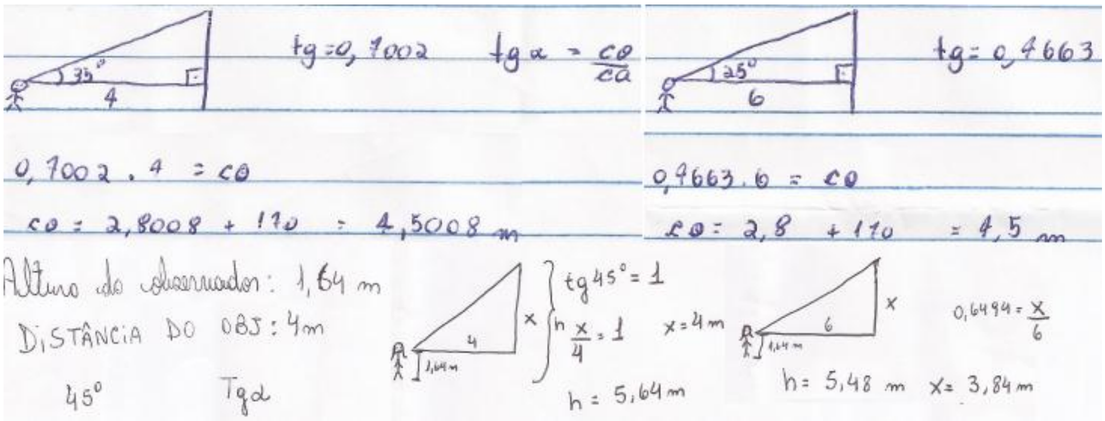


Figura 27: Cálculos realizados pelos alunos.

Assim que terminamos de revisar a razão trigonométrica da tangente de um ângulo, comentei com os alunos que iríamos revisar um pouco sobre a função de 1º grau. Inicialmente, perguntei aos alunos qual é a lei que representa a função do 1º grau. Rapidamente todos os alunos responderam $y = ax + b$. Questionei os alunos sobre os parâmetros a e b. A aluna B respondeu que o parâmetro a é o coeficiente angular e a aluna J respondeu que o parâmetro b é o coeficiente linear. Podemos notar que os alunos tinham esses conceitos bem presentes.

Perguntei aos alunos qual era o gráfico que representava a função do 1º grau. O aluno G disse:

"é uma linha!"

O aluno C responde:

"não é uma linha e sim uma reta".

Continuei a questionar os alunos sobre os parâmetros a e b. Perguntei a eles o que significava o a ser o coeficiente angular. O aluno G diz:

"É a tangente do ângulo."

Perguntei ao aluno G qual ângulo?

O aluno G responde:

"O ângulo formado entre o eixo x e a reta da função."

Podemos notar que o aluno G já consegue visualizar essa relação da inclinação da reta como a tangente do ângulo entre o eixo x e a reta. A respeito da pergunta sobre o significado do parâmetro a, a aluna B diz:

> *"eu sei que o a determina se a reta é crescente ou decrescente, se a é maior que zero a reta é crescente e se a menor que zero a reta é decrescente".*

Com essa resposta, perguntei por que acontecia isso. Então ela responde:

> *"ai não sei, aprendi assim na escola. Tá certo né?"*

Respondi que sim e expliquei que, com o fim do nosso encontro, ela saberia responder minha pergunta. Podemos perceber que aluna B, quando estudou esse conceito, não compreendeu realmente o significado de $a > 0$, $a < 0$ e $a = 0$.

Em seguida, perguntei aos alunos qual o significado do parâmetro *b*. O aluno D responde:

> "*corta o eixo y".*

Comentei com os alunos que o coeficiente linear é responsável pelas translações da função $y = ax$ no eixo y (subindo ou descendo). A aluna J comenta para seus colegas que nunca tinham estudado a ideia de translação em Matemática. Comentei brevemente com eles o que era uma translação de gráficos e disse que na próxima etapa do encontro eles poderiam visualizar melhor essa parte.

Na segunda parte do encontro, fomos para o laboratório de informática da escola. Cada aluno iria trabalhar com o seu computador. Expliquei que utilizaríamos o software GeoGebra para ajudar na visualização dos parâmetros a e b discutidos anteriormente. Os alunos, com ajuda do professor, construíram suas retas de equação $y = ax + b$, sendo a e b parâmetros variando no intervalo [-5,5]. Durante essa atividade, foi possível perceber que os alunos tiveram facilidade para manipular o software.

Então, solicitei que eles alterassem os valores de a e b e analisassem o que acontecia com o gráfico. Rapidamente eles notaram que, ao variar o valor de a, a reta ficava mais ou menos inclinada. A Figura 28 apresenta uma sequência de retas com inclinações diferentes.

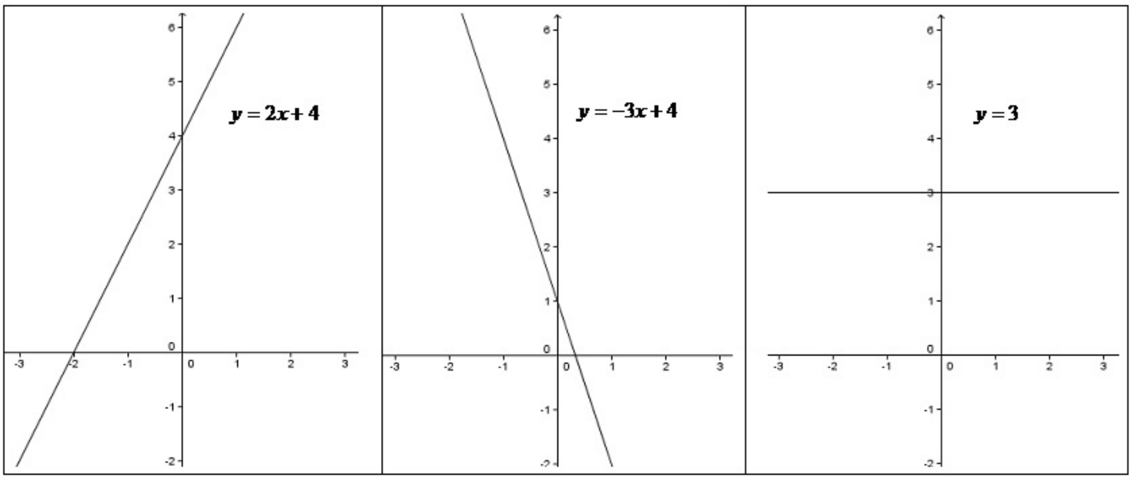


Figura 28: Sequência de retas com coeficientes lineares diferentes.

Confirmaram que, quando o a era positivo, a reta era crescente e que, quando a era negativo, a reta era decrescente. O aluno D chegou a uma conclusão interessante: se o parâmetro $a = 0$, então a reta não tinha inclinação. Então sua colega J ao lado disse:

"sim daí temos a função constante y igual a algum número sei lá y =4".

Podemos ver como o software ajudou os alunos na compreensão do conceito de coeficiente angular, possibilitando explorações e descobertas importantes. A aluna J conseguiu identificar, através do GeoGebra, que quando $a = 0$ a reta não tem inclinação e é paralela ao eixo das abscissas. Em seguida, solicitei que os alunos analisassem o parâmetro b, para diferentes valores. Eles conseguiram notar que, quando alteravam os valores de b, a reta subia ou descia em relação ao eixo das ordenadas. Na Figura 29 apresento uma família de retas transladadas.

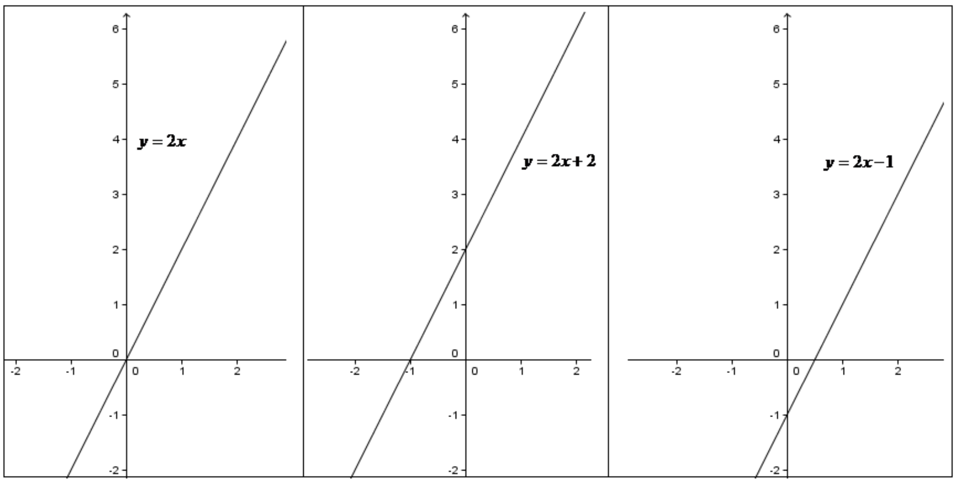


Figura 29: Família de retas transladadas.

Então o aluno G comenta:

"sor, o gráfico se mexendo no eixo é a translação que tu tinha dito antes?"

Respondi ao aluno que sim. Disse que poderiam acontecer outras translações com o gráfico. Nesse momento, os alunos começaram a interagir, para se ajudar e esclarecer dúvidas.

No último momento do encontro, solicitei que eles verificassem o que acontecia se $a=0$ e $b=0$. Os alunos concluíram que a reta estava sobreposta ao eixo das abscissas. O aluno C diz:

"*nessa reta não temos inclinação e o $b=0$, a equação da reta é y=0 (uma constante)"*

Os alunos apresentaram facilidade na compreensão de todos os conceitos envolvidos durante o encontro.

2º ENCONTRO

No segundo encontro, estiveram presentes apenas três alunos. No primeiro momento, relembrei, com os alunos, os assuntos abordados no encontro anterior. Comentei com eles que nesse encontro iríamos trabalhar a definição e a interpretação geométrica do coeficiente angular. Esse encontro foi realizado em uma sala de aula com quadro e com equipamentos multimídias.

Comecei dizendo que o coeficiente angular determina a declividade da reta. Para melhor interpretação e visualização, foi utilizado o software GeoGebra, no qual foram projetados gráficos que ilustrassem a situação, conforme Figura 30:

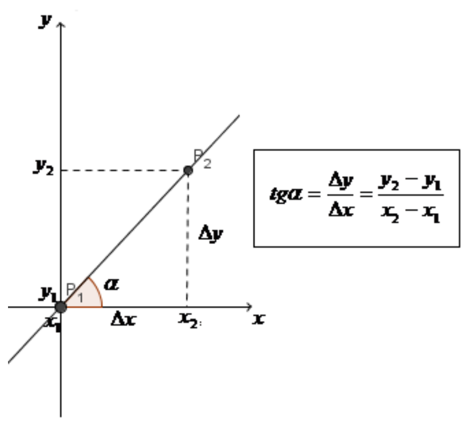


Figura 30: Visualização da razão entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representando o coeficiente angular da reta

Com a utilização do software, apresentei a declividade como sendo a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, sendo Δy a variação no eixo das ordenadas e Δx a variação no eixo das abscissas. Durante a explicação, os alunos não tiveram dificuldade para compreender a interpretação geométrica do coeficiente angular. Um fato importante a ser destacado é que os alunos estavam conseguindo relacionar a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ com a razão $\frac{co}{ca}$, trabalhada no primeiro encontro. Perguntados sobre o que representavam Δy e Δx na figura, os alunos não tiveram dificuldade em responder que são as diferenças $y_2 - y_1$ e $x_2 - x_1$, respectivamente.

Com o auxílio da Figura 30, conseguimos chegar à conclusão de que o coeficiente angular representava a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo x.

Perguntei para os alunos qual o que significava a inclinação da reta. A aluna J afirmou:

> "*a função dela é dizer qual o ângulo com o eixo x*"

Expliquei que o coeficiente angular representa quantas unidades de crescimento ou decaimento vertical ocorrem quando fazemos uma variação de uma unidade na horizontal, da esquerda para direita. O aluno G diz:

> "*sor não entendi, tem algum exemplo?*"

Para facilitar a compreensão, utilizei a equação da reta $y = 2x + 1$ e atribuí alguns valores para a variável x, como mostra a Tabela 5 abaixo.

Tabela 5: Valores de y quando atribuímos valores para x.

$y = 2x + 1$	x	y
$y = 2.0 + 1$	0	1
$y = 2.1 + 1$	1	3
$y = 2.2 + 1$	2	5
$y = 2.3 + 1$	3	7

No exemplo utilizado, o coeficiente angular da reta é igual a dois. Podemos notar que, quando variamos (aumentamos) uma unidade da variável x, variamos (aumentamos) duas unidades (valor do coeficiente angular) da variável y. A aluna J, ainda não convencida, perguntou:

> "*isso sempre vale? Posso pegar outra equação de reta?"*

Fizemos outro exemplo, para que os alunos verificassem essa afirmação. O aluno G pergunta:

> *"essa análise que agente fez agora funciona se eu analisar o parâmetro na equação do 2º grau?"*

Respondi a ele que não, porque na função do 2º grau o parâmetro a não representava o coeficiente angular e sim estava relacionado com a concavidade da parábola. Isso mostra o interesse e envolvimento dos alunos com o tema abordado.

Após essas discussões, questionei aos alunos se uma reta possui um único coeficiente angular? Os alunos responderam que sim. Mas não sabiam me explicar por que. Para isso, expliquei aos alunos que, antes de chegarmos a essa conclusão, deveríamos revisar dois conceitos matemáticos importantes: definição de reta e definição de triângulos semelhantes. Perguntei aos alunos se eles sabiam alguma definição para a existência de uma reta. A aluna J diz:

> "*para podermos desenhar uma reta precisamos de dois pontos né? Assim podemos ligar esses pontos".*

Então defini que, por dois pontos distintos, passa uma e apenas uma reta que contém esses dois pontos. Em seguida, perguntei aos alunos qual a condição para que dois triângulos sejam semelhantes. Segundo o aluno G:

> "*eles tem que ter os ângulos de dentro iguais".*

Respondi que sua ideia estava correta. Então expliquei que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, seus ângulos internos são congruentes e seus lados homólogos são proporcionais. É possível perceber, a partir da resposta de G, que os alunos tinham conhecimento sobre triângulos semelhantes, mas utilizam uma linguagem própria para se expressar. Então, utilizando a Figura 31, mostrei aos alunos que, na semelhança de triângulos, a razão entre os lados correspondentes é sempre igual.

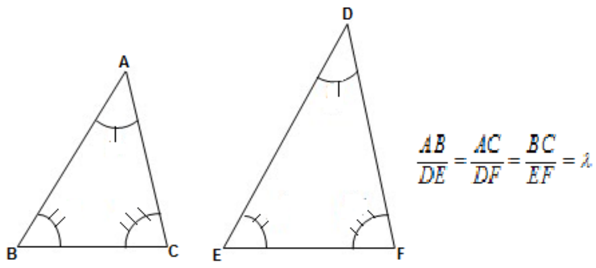


Figura 31: Triângulo ABC e DEF são semelhantes.

Após esta breve retomada sobre triângulos semelhantes, voltamos à pergunta inicial: uma reta possui um único coeficiente angular? Para abordar este assunto, utilizei o GeoGebra novamente, como uma ferramenta auxiliar, mostrando a Figura 32 para os alunos.

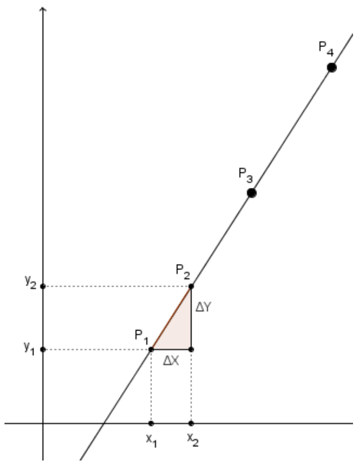


Figura 32: Reta contendo os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4.

Com a figura acima, perguntei aos alunos qual a condição para que os pontos P_3 e P_4 estejam alinhados aos pontos P_1 e P_2. O aluno G diz:

"*eles tem que ter os ângulos de dentro iguais".*

Com essa conclusão do aluno G, perguntei a eles como conseguiríamos chegar a essa resposta. Mostrei para os alunos a Figura 33:

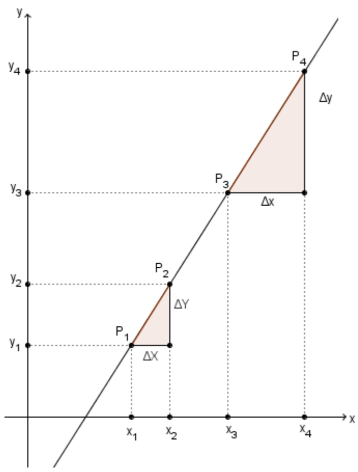


Figura 33: Representação dos triângulos semelhantes.

Após questionar os alunos sobre como poderíamos chegar à expressão utilizada pelo aluno G de o coeficiente angular ser igual, o próprio aluno G chegou à conclusão de que, para os pontos P_3 e P_4 estarem alinhados aos pontos P_1 e P_2, o triângulo formado por P_3 e P_4 tinha que ser semelhante ao triângulo formado por P_1 e P_2. A aluna J:

"*por isso que tu revisou semelhança de triângulos para provarmos isso".*

Podemos ver que, os conceitos de definição de reta e semelhança de triângulos, estavam fazendo sentido para ajudar na compreensão da proposta.

Da semelhança de triângulo temos: $m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$. Com isso, os alunos puderam perceber que, para quaisquer dois pontos da reta, a inclinação será sempre a mesma.

No segundo momento do encontro, mostrei aos alunos a equação da reta através da visualização geométrica. Com o software GeoGebra e utilizando conceitos estudados anteriormente, mostrei aos alunos que $tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_o}{x - x_0}$, então a equação da reta é dada por $y - y_o = tg\alpha(x - x_0)$. Nessa explicação, foi utilizada a Figura 34:

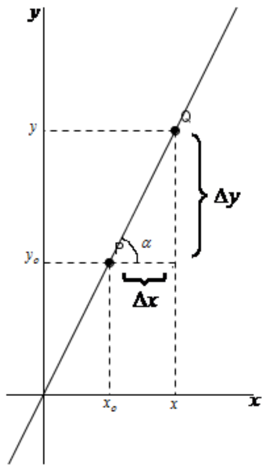


Figura 34: Representação geométrica do coeficiente angular para auxiliar na compreensão da equação da reta.

Nesse encontro, percebi que os alunos tiveram mais dificuldade, se comparado ao primeiro encontro. Os conceitos estudados nesse encontro exigiram dos alunos uma maior interpretação e visualização geométrica. Podemos apontar a visualização geométrica como um fator positivo para compreensão do estudo do coeficiente angular. Através dessa visualização, os alunos conseguiram relacionar os conteúdos abordados com a sua interpretação geométrica. Vale destacar as discussões e indagações que ocorreram após as interpretações geométricas.

Analisando algumas perguntas realizadas pelos alunos como: “isso sempre vale?” ou “essa análise que agente fez agora funciona se eu analisar o parâmetro na equação do 2º grau?”, podemos perceber o grau de interesse na busca em compreender os temas abordados. Ao longo do encontro, os alunos, para compreenderem os conceitos matemáticos envolvidos, relembraram conteúdos matemáticos estudados em anos anteriores, podendo destacar que esses conceitos permaneciam claros para eles.

De fator positivo, podemos destacar as análises e discussões que ocorreram durante todo o encontro. As perguntas e respostas dos alunos foram fundamentais para o andamento dos estudos. O interesse dos alunos em aprender e ajudar os colegas foi importante para chegarmos às conclusões finais.

3º ENCONTRO

Nesse encontro, estiveram presentes quatro alunos. Expliquei que a atividade proposta para esse encontro era importante para o decorrer das atividades e compreensão da proposta do trabalho.

Para essa atividade, os alunos teriam que percorrer um trajeto criado pelo professor. Todos os alunos teriam que correr a mesma distância no mesmo intervalo de tempo, ou seja, deveriam percorrer 40 metros em 30 segundos. Vale destacar que a distância foi demarcada de metro em metro e a velocidade para realizar o percurso ficou a critério dos alunos. Essa atividade deveria ter sido realizada no pavilhão da escola, mas por problemas de construções foi realizada em um campo de futebol perto da escola.

Na atividade, os alunos tiveram o cronômetro na mão para poder controlar o tempo e realizar o percurso determinado. O percurso realizado por cada aluno foi gravado, para ser utilizado na próxima etapa do encontro. A Figura 35 mostra os alunos realizando a atividade.

Figura 35: Alunos percorrendo o percurso de 40 metros.

Após o término dessa atividade, voltamos para a escola. No laboratório de informática da escola, as gravações foram transferidas para os computadores. A atividade seguinte consistia em, a partir do vídeo, esboçar o gráfico do percurso realizado. O aluno C comenta:

> “*no eixo x nós colocamos o tempo e no y a distância percorrida?”*

Respondi para todos que sim e ainda expliquei que a escala para o gráfico poderia ficar a critério deles. Achei interessante o comentário do aluno G:

> *“o gurizada vamos fazer todos à mesma escala para depois poder comparar as velocidades diretinho”.*

Importante destacar que, nesse momento, eu não tinha comentado sobre analisar as velocidades. Pode-se perceber que, os conceitos trabalhados na disciplina de Física, auxiliaram os alunos na compreensão do gráfico $d \times t$ e na análise da velocidade a partir destes gráficos.

Os alunos, entre eles, combinaram em esboçar o gráfico de forma que a distância e o tempo variavam de duas em duas unidades. Os alunos utilizaram papel quadriculado para permitir uma melhor precisão na representação. A Figura 36 ilustra os gráficos realizados pelos alunos C e J, respectivamente.

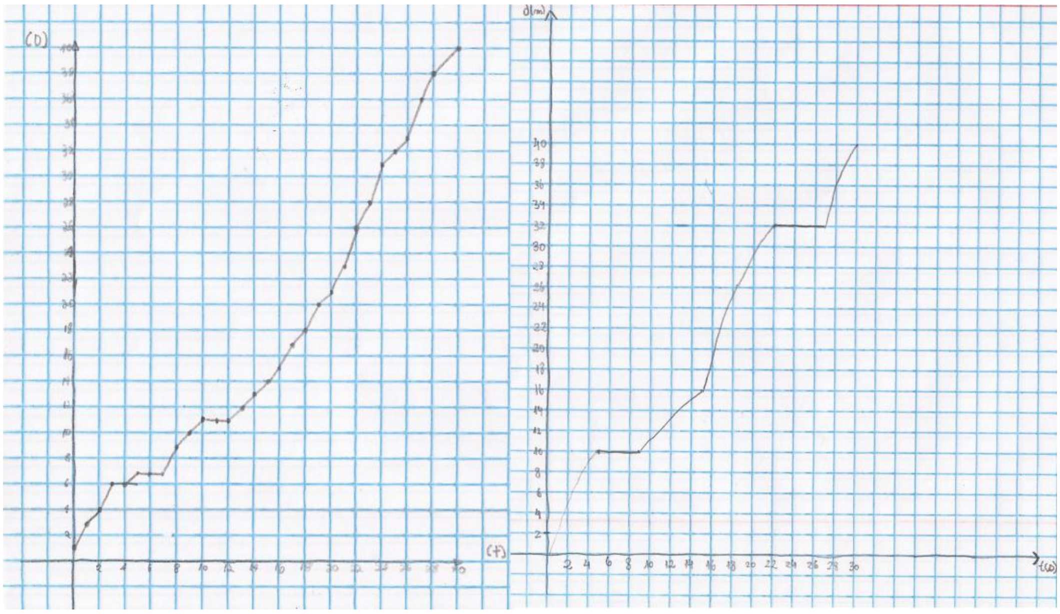


Figura 36: Esboço do gráfico dos alunos C e J.

Depois de realizarem os esboços dos gráficos, iniciamos o processo de análise dos mesmos. Começamos pela seguinte pergunta: como podemos descobrir a velocidade média de cada aluno? O aluno C:

> “*distância total pelo tempo total”.*

A partir desse conceito, comecei a fazer perguntas relacionadas aos gráficos:

> *P - Todos tiveram a mesma velocidade média?*
>
> G - *“claro que sim, percorremos a mesma distância no mesmo período”.*

Com essa resposta, solicitei aos alunos que calculassem o valor de cada velocidade média. Imediatamente, os alunos chegaram à seguinte resposta aproximada: $V_m \frac{40m}{30s} = 1{,}33m/s$. Os alunos foram convidados a converter o resultado para Km/h. Rapidamente, multiplicaram o valor encontrado por 3,6 e chegaram à conclusão de que a velocidade média aproximada no percurso foi de 4,78 Km/h.

Novamente, percebem-se os conhecimentos estudados em Física sendo aplicados na aula de Matemática.

Neste momento, coube a pergunta:

P - Vocês sempre tiveram a mesma velocidade de 4,78 Km/h, ao longo de todo o percurso?
G - *"não porque isso é a média. Em alguns instantes eu estou parado, por exemplo, então minha velocidade é zero".*

Podemos notar a facilidade dos alunos em analisar a sua velocidade a partir do gráfico. Os alunos interpretaram o gráfico para identificar os intervalos de tempo em que estão mais rápidos.

Sabendo que todos tiveram a mesma velocidade média, perguntei:

P - Em determinado instante de tempo, todos deslocavam-se com a mesma velocidade?
J - *"não no momento que eu estou parada, C esta correndo ou D esta pulando".*

Utilizando a resposta da aluna J, pedi para que, em duplas, analisassem, no mesmo intervalo de tempo, se estavam ou não com uma mesma velocidade. Abaixo, na Figura 37, apresento as seguintes conclusões dos alunos C e J respectivamente:

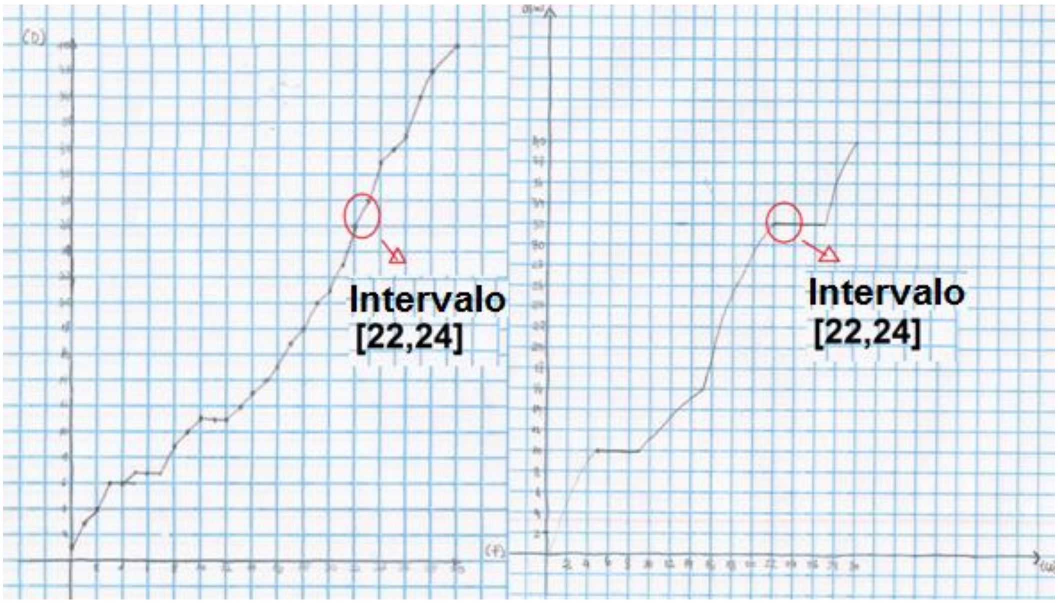


Figura 37: Análise da velocidade dos alunos no intervalo [22,24].

Os alunos C e J, após analisar os seus gráficos, escolheram o intervalo de tempo [22,24] segundos. Concluíram que, no mesmo intervalo de tempo, o aluno C estava mais rápido que a aluna J, pois segundo eles, a aluna J estava parada e o aluno C estava correndo. O interessante é que os alunos voltaram ao vídeo, para se certificar se estava certo o esboço do gráfico.

Comentei com os alunos que a velocidade média será interpretada como a taxa de variação média em um intervalo de tempo. Para compreender esse conceito de taxa de variação média, perguntei:

P - Vocês sabem o que é uma reta secante?
C - *"nunca ouvi reta secante, secante eu sei que é a uma relação trigonométrica."*

Após definir reta secante com os alunos, fizemos um estudo do gráfico da função do 2º grau $f(x) = x^2$, utilizando o software GeoGebra.

Com a utilização do software e a definição de reta secante, utilizamos a animação ilustrada na Figura 38 abaixo, onde s_1 representa a reta secante que passa pelos pontos A e B e s_2 representa a reta secante que passa pelos pontos B e C.

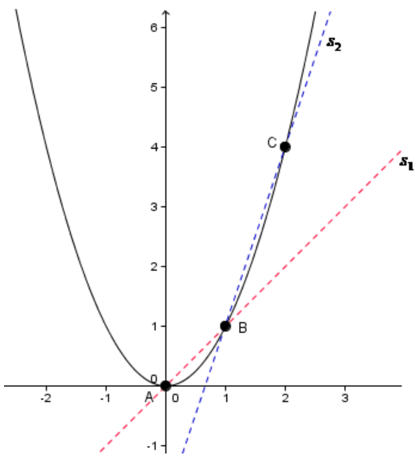


Figura 38: Gráfico da função y=x² e as retas secantes s_1 e s_2.

Depois de explorar a animação, os alunos foram questionados sobre como encontraram a velocidade média do percurso realizado. O aluno D:

"distância total pelo tempo total".

Com a resposta de D, concluímos que a taxa de variação média em um intervalo $[x_0, x]$ seria dada por: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Assim, os alunos calcularam a taxa de variação nos intervalos [0,1] e [1,2] da Figura 38. A Tabela 6 traz as respostas encontradas pelos alunos.

Tabela 6: Valores das taxas de variação nos intervalos [0,1] e [1,2].

[0,1]	$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$	1
[1,2]	$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$	3

Foi possível perceber que, em todo o momento, os alunos estavam relacionando esta atividade aos exercícios de Física do 1º ano do Ensino Médio.

Em seguida, iniciamos o estudo sobre taxa de variação média com uma abordagem geométrica. Utilizamos a Figura 39 para ilustrar a situação e facilitar a compreensão.

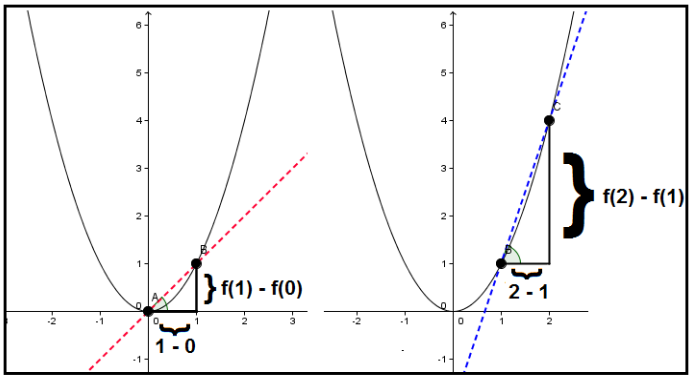


Figura 39: Representação geométrica das taxas de variação média nos intervalos de [0,1] e [1,2].

A aluna J diz:

"então os resultados que achamos são a inclinação da reta?"

Podemos ver que os alunos conseguiram associar o valor da taxa de variação média com a inclinação da reta secante. O aluno C diz:

"os cálculos que realizamos na real era o cateto oposto pelo adjacente".

O aluno G responde para o aluno C:

"sim neh C, agente fez a razão $\Delta y / \Delta x$. *Isso pelos encontros anteriores agente viu é a inclinação da reta".*

Esse diálogo dos alunos mostrou o quanto que eles compreenderam o conceito de inclinação de reta. A partir dos comentários dos alunos, concluímos que a taxa de variação média corresponde à inclinação da reta secante.

Finalizando, utilizamos a Figura 40, em que a taxa de variação média de uma função f no intervalo de $[x_0, x]$ pode ser interpretada como a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $A=(x_0, f(x_0))$ e $B=(x, f(x))$.

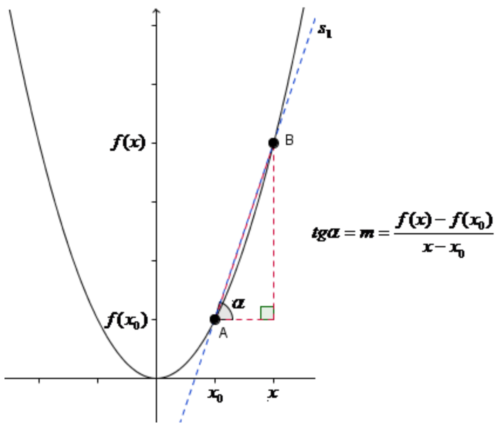


Figura 40: Representação da taxa de variação como a inclinação da reta secante.

Finalmente, percebemos que a inclinação da reta secante pode ser interpretada como a velocidade média em um intervalo de tempo.

4º ENCONTRO

Nesse encontro participaram os quatro alunos. Foi relembrada, brevemente, a ideia de taxa de variação média interpretada como a inclinação da reta secante em um determinado intervalo.

Nesse encontro, o objetivo seria analisar o comportamento da inclinação da reta secante na medida em que tomamos intervalos cada vez menores.

Para ajudar na visualização, foi utilizado o software GeoGebra. Mostrei para o grupo a Figura 41 abaixo, que apresenta o esboço do gráfico $y = x^3$ e a reta secante s, que passa pelos pontos $A=(1, f(1))$ e $B=(2, f(2))$.

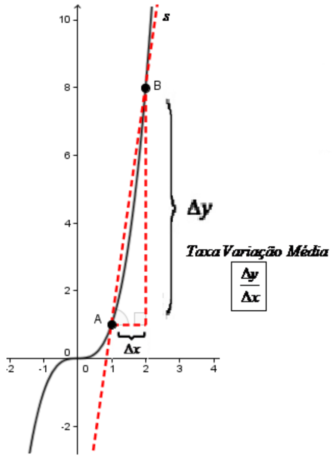


Figura 41: Esboço do gráfico da função f(x)=x³. Reta s secante passando pelos pontos A e B.

A utilização do arquivo do GeoGebra ajudou o grupo de alunos a lembrarem o conceito de taxa de variação. Observe a afirmação do aluno C:

> *“sor, na aula passada tu trabalhou com a função de 2º grau. Agora vamos fazer a mesma coisa para a função de 3º grau? Teremos que analisar as taxa de variação?”*

A partir desta fala, é possível perceber que as ideias abordadas nos encontros anteriores foram relembradas, o que mostra que os objetivos foram, mesmo que parcialmente, alcançados. Na medida em que são apresentados conceitos novos, os alunos buscaram estabelecer relações com os conhecimentos estudados nos encontros anteriores. Visualizando o gráfico da Figura 41 acima, o aluno G comenta:

> *“só para lembrar mesmo o valor da reta secante dá o valor da velocidade média né?”*

Para complementar a ideia de G, expliquei que o valor da inclinação da reta secante em um determinado intervalo é que corresponde ao valor da velocidade média nesse intervalo.

Considerando a função $y = x^3$, solicitei que os alunos calculassem a taxa de variação média no intervalo [1,2], atividade na qual não apresentaram dificuldades, como segue:

Taxa de variação em [1,2]: $\frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{8-1}{2-1} = \frac{7}{1} = 7$

Em seguida, questionei os alunos sobre o que esse valor representava geometricamente.

O aluno G contribui:

"o 7 é a inclinação da reta secante no intervalo [1,2]. Mas esse 7 é em graus?"

Esclareci que o valor 7 não estava em graus e aproveitei para perguntar o que representava a inclinação de uma reta. O aluno G responde:

"a inclinação da reta é a razão do cateto oposto pelo cateto adjacente. E isso representa a tangente do ângulo".

Com a resposta do aluno, expliquei que o valor 7 estava relacionado com o arco (ângulo) cuja tangente é igual a 7. Para achar o valor desse ângulo, utilizei uma calculadora científica e chegamos ao valor de ângulo aproximado 81,8º.

Depois, questionei os alunos sobre o que aconteceria com a taxa de variação se diminuir o intervalo [1,2]. Utilizando a Figura 41, expliquei para os alunos que pegaríamos intervalos cada vez menores para analisar o comportamento da taxa de variação nesses intervalos.

Os intervalos sugeridos foram: [1,1.75], [1,1.5], [1,1.25], [1,1.1], [1,1.01] e [1,1.001]. A Figura 42 apresenta os valores aproximados encontrados pelo aluno D:

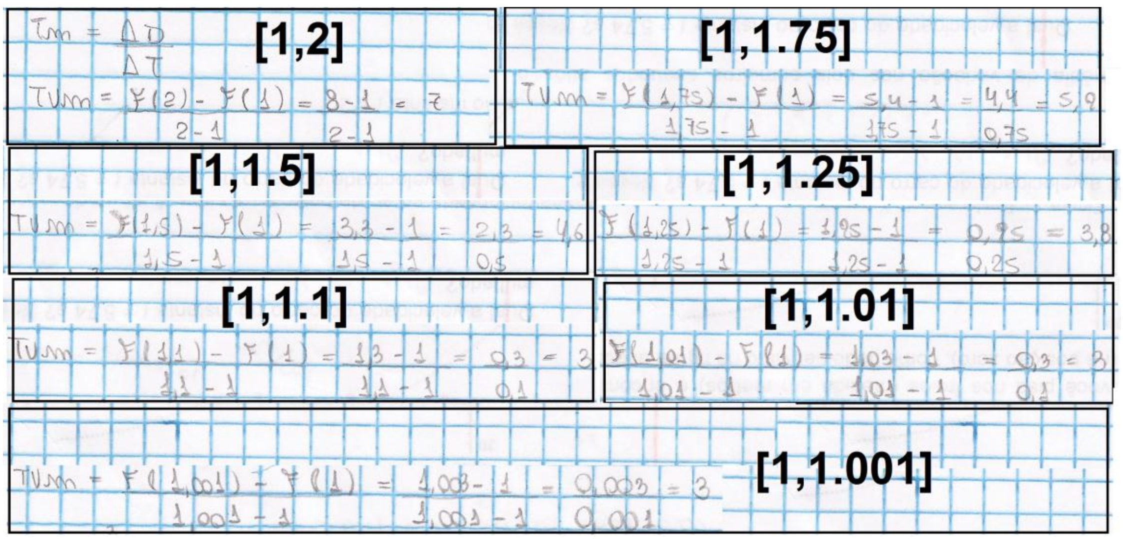


Figura 42: Cálculos realizados pelo aluno D.

Após finalizarem os cálculos, o aluno G comenta:

"o que fizemos foi diminuir a distância entre os dois extremos, ou seja, pegamos Δx *cada vez menores".*

Podemos ver que o aluno G percebe que estamos diminuindo o tamanho dos intervalos e utiliza uma linguagem adequada, o que mostra que os conceitos estudados nos encontros anteriores estão presentes no raciocínio do aluno. Em seguida, perguntei aos alunos o que estava acontecendo com os valores da taxa de variação para Δx cada vez menor. O aluno J responde:

"cada vez que diminuímos o intervalo vai tendendo para o valor 3".

O aluno G complementa:

"sim, para valores muito pequenos de Δx a taxa vai se aproximando para o valor 3".

Novamente, percebe-se, pelas falas dos alunos, que compreenderam o comportamento da taxa de variação para intervalos cada vez menores. Como a taxa de variação é dada pela razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, temos, nesse caso, que esse valor tende a 3. Nesse momento, levantei a discussão sobre o fato de que essa razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nunca poderá assumir o valor 3, porque, para que isso aconteça, Δx teria que assumir o valor zero, e Δx pode apenas se aproximar de zero tanto quanto se queira. Comentei com os alunos que, geometricamente, quando diminuímos o intervalo Δx, a inclinação da reta secante se aproximada de algum valor e, no exemplo acima, essa inclinação está aproximando-se do valor 3. A aluna J comenta:

"tá essa inclinação ta indo para um valor limite que não pode passar"

A afirmação da aluna J estava correta, expliquei que depois iríamos trabalhar essa visualização no software GeoGebra.

Para concluir esse exemplo, partimos para um estudo mais geral, considerando o intervalo $[1,1+\Delta x]$ na função $y = x^3$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{1+\Delta x - 1} = \frac{1+3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 - 1}{\Delta x} = \frac{\Delta x.(3+3\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3 + 3\Delta x + \Delta x^2$$

Como Δx tende a zero, temos que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$=3, mesmo valor encontrado pelos alunos anteriormente. Porém, foi possível notar que, nesta resolução, os alunos tiveram certa dificuldade em compreender a manipulação algébrica.

Após essa discussão, voltamos ao exemplo para visualizar que o valor que estávamos encontrando correspondia à inclinação da reta tangente no ponto em que x=1. O aluno G comenta:

> *“o que é reta tangente? É aquela que faz um ângulo de 90º graus com a circunferência?”.*

Aproveitei o momento para esclarecer que a reta tangente a uma curva em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$, é a reta que passa por P e que tem coeficiente angular *m*, sendo o valor $m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quando Δx se aproxima a zero ou tende a zero.

O aluno G comenta:

> *“sor começamos analisando a inclinação da reta secante em certo intervalo. Depois quando diminuímos esse intervalo essa inclinação da reta secante vai virando a inclinação dessa reta tangente?”*

Comentei que sua ideia estava correta. Podemos ver que o G utilizou suas próprias palavras para definir o conceito da reta tangente. Aproveitando a contribuição de G, comentei que estudaríamos a inclinação da reta tangente em um ponto e que isso representaria a taxa de variação instantânea, conceito abordado na disciplina de Física, nos conteúdos de cinemática. Assim, conversamos sobre a possibilidade de utilizar esta ideia para calcular a velocidade instantânea de um objeto móvel em determinado instante de tempo. Em seguida, os alunos foram convidados a voltar aos gráficos dos percursos realizados. Lembrei que tínhamos concluído que todos tinham tido a mesma velocidade média, mas que, em certos instantes, todos poderiam estar com velocidades diferentes. O aluno G comenta:

> *“nesse certo instante então que entra a velocidade instantânea que aprendemos? O próprio nome diz velocidade no instante.”*

O aluno G mostra estar relacionando os conceitos estudados durante os encontros. Os alunos, em dupla, analisaram novamente as velocidades no mesmo intervalo de tempo utilizado no terceiro encontro. Mas, nesse momento, eles deveriam explicar essas velocidades, utilizando conceitos de inclinação de reta tangente.

Voltamos aos gráficos elaborados pelos alunos C e J (Figura 43), respectivamente, para analisar o diálogo entre o professor e os alunos.

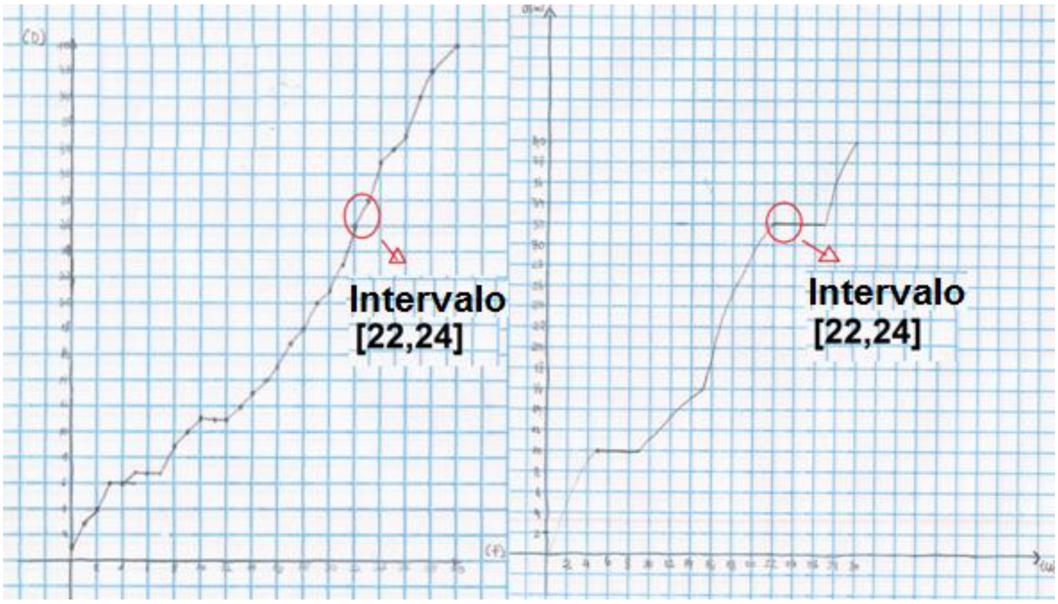


Figura 43: Gráficos realizados pelos alunos C e J, respectivamente.

P: Vocês lembram o que me disseram no encontro anterior sobre as velocidades de cada um no instante [22,24]?

C: Sim! Eu estava correndo nesse instante e J está parada.

P: Como vocês chegaram a essa conclusão?

J: Simples, eu analisei o gráfico. Nesse instante eu não me mexo, pois passa 2 segundos e eu continuo no 32 metros.

C: Pra mim é fácil passou o tempo e mudei de posição. No caso eu voltei ao meu vídeo e nesse exato momento eu estava correndo.

P: Sim está certo. Agora pensando nos conceitos de reta tangente, como vocês me explicariam essas velocidades diferentes?

J: Deixa eu pensar, tu disse que se pensarmos em reta tangente tem que ser em um ponto. Vamos pegar o instante 22 segundos, por exemplo. Nesse instante no meu gráfico a inclinação da reta tangente a 22 segundos é zero.

C: J é a inclinação é zero porque está paralela ao eixo x como vimos no programinha no primeiro encontro.

P: Perfeita tua conclusão J. Se eu disse a inclinação da reta tangente seria interpretada como a velocidade instantânea, o que tu pode concluir?

C: Se eu não tenho inclinação e essa inclinação é zero, logo minha velocidade é zero.

P: Isso ai! Tu chegou a mesma conclusão que antes só que agora utilizando outros conceitos. Vamos agora pensar agora no gráfico do C.

C: Já sei! No instante de 22 segundos a reta tangente nesse ponto tem inclinação *então eu tenho velocidade.*

J: Não só isso, então podemos ver que quando mais inclinada estiver nossa reta tangente essa velocidade será maior.

P: Muito bem! Agora vocês podem olhar para o mesmo instante de tempo e analisar pela inclinação da reta quem está mais rápido.

Podemos destacar, a partir desse diálogo, o quanto os alunos compreenderam os conceitos trabalhados nos encontros. É interessante destacar a maneira como os alunos se expressavam, tanto para responder às perguntas, como para expor e explicar suas conclusões.

Após essas discussões, verificamos que taxa de variação instantânea pode ser interpretada como o valor quando a inclinação da reta secante se aproxima da inclinação da reta tangente, para intervalos cada vez menores. Vale destacar a fala do aluno C:

"Bah agora em cinemática tudo faz sentido". "Toda essa interpretação ajudaria muito no 1º ano".

Observamos, assim como o aluno C, que a aprendizagem de conceitos iniciais de Cálculo no Ensino Médio pode ser relacionada com conteúdos de Física. No caso, C está relacionando estes conceitos com cinemática (MRU e MRUV).

Segundo Ávila (2006):

> É claro que a introdução da derivada no Ensino Médio deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Ao passar adiante, desassistido a noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea. (ÁVILA, 1991, p. 4)

Podemos ver como os conceitos iniciais de Cálculo podem ser aplicados no Ensino Médio. Mostrar a aplicabilidade do Cálculo torna-se um elemento motivador para o aluno.

Na etapa seguinte do encontro, utilizamos o software GeoGebra para visualizar geometricamente o que acontece com a inclinação da reta secante, quando diminuímos o intervalo [1,2] na função $f(x) = x^3$, conforme ilustra a Figura 44.

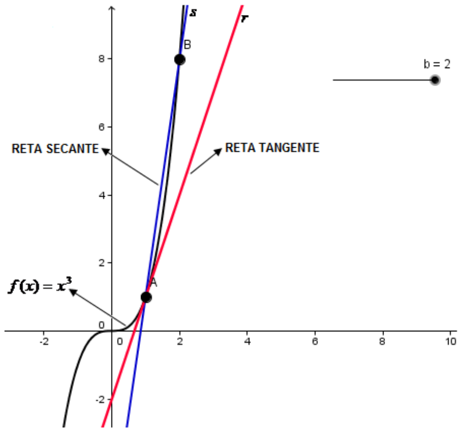


Figura 44: Reta secante s (azul) e reta tangente r (vermelho).

A Figura 44 representa o esboço do gráfico $f(x) = x^3$, a reta *s* é secante à curva, passando pelos pontos $A = (1, f(1))$ e $B = (2, f(2))$ e a reta *r* é tangente à curva no ponto $A = (1, f(1))$. O ponto B é um parâmetro que varia no intervalo [1,2]. Assim, os alunos puderam visualizar, dinamicamente, o comportamento do gráfico, quando tomávamos valores de B muito próximos de A. O aluno J comenta:

> *"a reta azul (secante) está se mexendo"*

O aluno C complementa:

> *"sim estamos fazendo a mesma coisa que naqueles cálculos, mas agora usando o software. Está diminuindo o intervalo e ponto B esta se aproximando de 1."*

Aluno J continua:

> *"a inclinação da secante vai até um valor limite que é a inclinação da reta tangente".*

Percebe-se que os alunos conseguiram relacionar os conceitos estudados e compreender a análise geométrica. Durante essa momento de exploração do arquivo do GeoGebra, os alunos sempre destacavam que, os cálculos realizados anteriormente, representavam aquela animação.

Mostrei para os alunos a Figura 45:

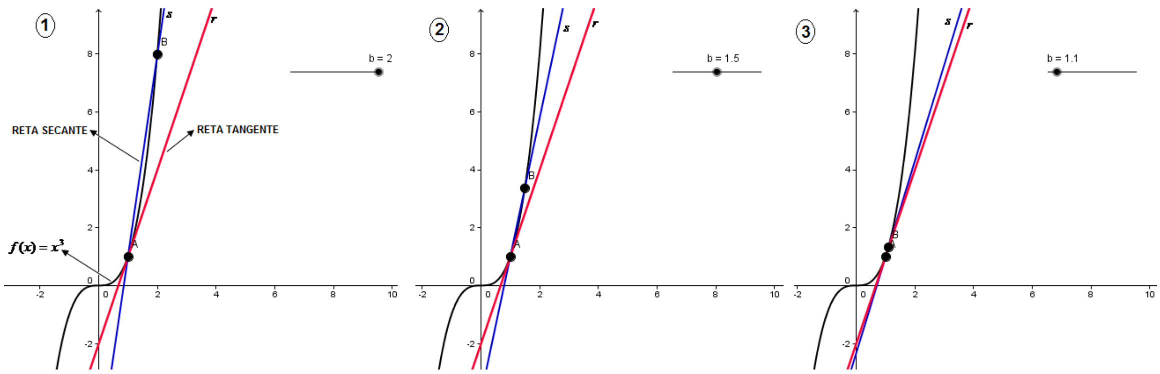


Figura 45: Inclinação da reta secante se aproximando da inclinação da reta tangente.

Lembramos que, no intervalo [1,2] da função $f(x) = x^3$, quando consideramos intervalos Δx cada vez menores, fixando o extremo inferior, temos que a inclinação da reta secante tende ao valor 3. Perguntei aos alunos o que eles conseguiram visualizar na inclinação da reta secante quando essa assumia valor de 3. O aluno G responde:

> *"a reta azul some. Ela some porque tu disse que ela tende ao valor, mas não pode assumir esse valor".*

A aluna J, relembrando os conceitos discutidos no encontro, diz aos colegas:

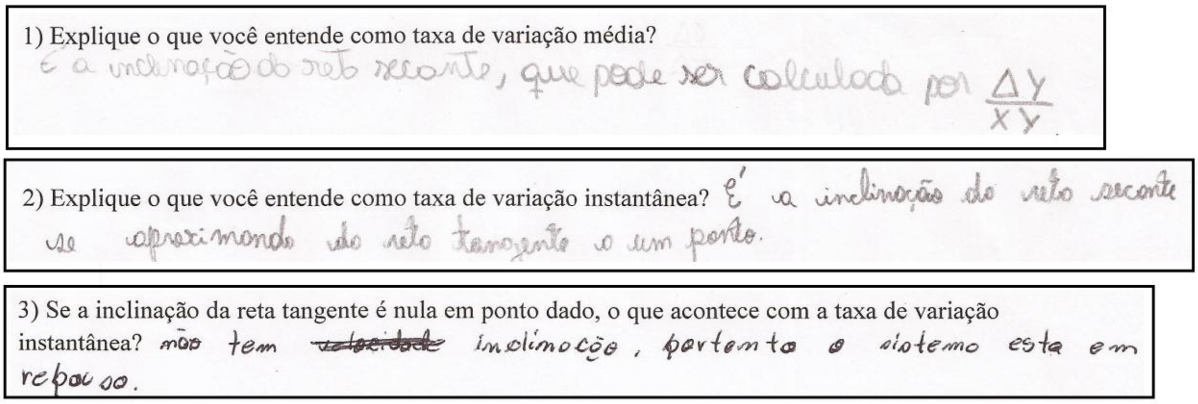
> *"estamos pegando intervalos cada vez menores, essa variação no intervalo é o Δx. Cada vez que pegamos esses intervalinhos, a reta azul (secante) vai se mexendo até uma posição limite que é a reta vermelha (tangente). Quando a inclinação dessa reta azul assume o valor da inclinação da reta vermelha, temos um Δx igual a zero."*

O aluno G conclui, após a explicação da colega J:

> *"essa inclinação é $\Delta y / \Delta x$, tendo Δx igual a zero essa razão não existe. Por isso que some a reta azul e ficamos apenas com a reta vermelha."*

As conclusões e as análises feitas pelos alunos demonstram que eles compreenderam os conceitos abordados.

Para finalizar a prática e analisar o que os alunos conseguiram compreender ao longo dos quatro encontros, foram distribuídas questões que deveriam ser resolvidas. Abaixo, na Figura 46, apresento algumas questões propostas para os alunos, bem como, suas respostas.


1) Explique o que você entende como taxa de variação média? É a inclinação da reta secante, que pode ser calculada por $\frac{\Delta Y}{XY}$.

2) Explique o que você entende como taxa de variação instantânea? É a inclinação da reta secante se aproximando da reta tangente a um ponto.

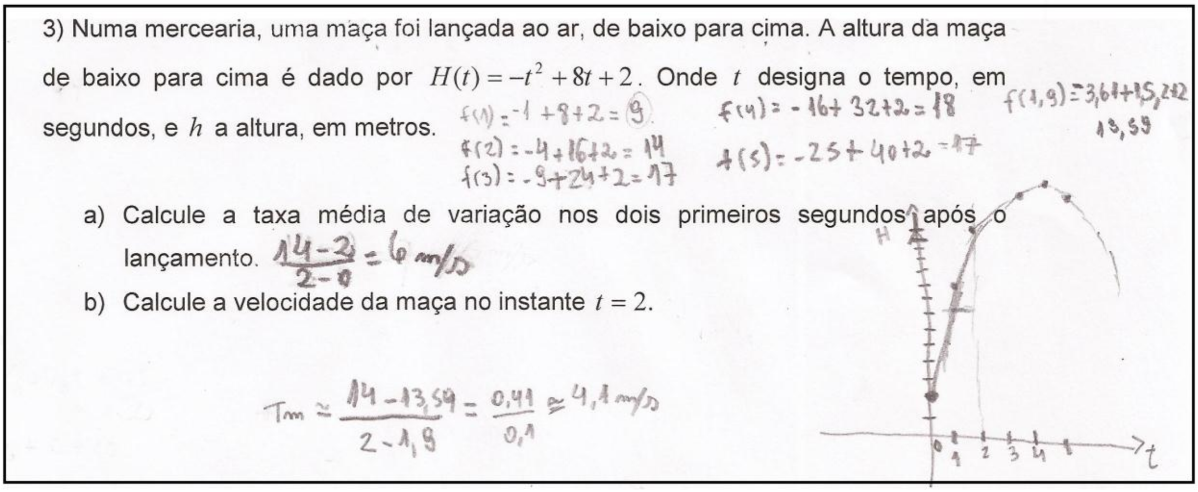
3) Se a inclinação da reta tangente é nula em ponto dado, o que acontece com a taxa de variação instantânea? não tem ~~velocidade~~ inclinação, portanto o sistema esta em repouso.

Figura 46: Respostas dos alunos.

Analisando as respostas dos alunos, percebemos como os conceitos como taxa de variação média e taxa de variação instantânea estão sendo compreendidos. Analisando a resposta da primeira questão, notamos que o aluno consegue interpretar geometricamente o conceito de taxa de variação média como a inclinação da reta secante. O aluno também mostra como calcular essa taxa através da razão $\Delta y / \Delta x$. Podemos notar que tem um problema na notação utilizada pelo aluno, ele usa XY em vez de Δx. Na segunda questão, percebemos que o dinamismo do GeoGebra e a ideia de aproximação influenciam a resposta do aluno, ao afirmar que a taxa de variação instantânea é a inclinação da reta secante se aproximando da reta tangente em um ponto.

Já na terceira questão, conseguimos identificar que o aluno vincula os conceitos inicias de Cálculo com conteúdos de Física. O aluno interpreta a taxa de variação instantânea como a velocidade instantânea, explícito na sua resposta quando afirma que “o sistema está em repouso”.

Abaixo, na Figura 47, podemos analisar a resposta de um aluno para um dos problemas propostos.


3) Numa mercearia, uma maça foi lançada ao ar, de baixo para cima. A altura da maça de baixo para cima é dado por $H(t)=-t^2+8t+2$. Onde t designa o tempo, em segundos, e h a altura, em metros.

f(1) = -1+8+2 = 9
f(2) = -4+16+2 = 14
f(3) = -9+24+2 = 17
f(4) = -16+32+2 = 18
f(5) = -25+40+2 = 17
f(1,9) = 3,61+15,2+2 = 13,59

a) Calcule a taxa média de variação nos dois primeiros segundos após o lançamento. $\frac{14-2}{2-0} = 6$ m/s

b) Calcule a velocidade da maça no instante $t = 2$.

$Tm \simeq \frac{14-13,59}{2-1,9} = \frac{0,41}{0,1} \simeq 4,1$ m/s

Figura 47: Resposta do aluno para a questão 3.

Analisando a resposta do item a, notamos que o aluno utilizou o conceito de taxa de variação média, estudado no nosso terceiro encontro. Assim, ele calculou a taxa de variação no intervalo [0,2] (dois primeiros segundos). No item *a*, a taxa de variação pode ser interpretada como a velocidade média nesse intervalo. No item *b*, vale destacar a maneira como o aluno pensou para resolver esse exercício. Abaixo, temos a seguinte explicação do aluno:

A - "sor, acho que agora temos que diminuir o intervalo de [0,2] né"
P – *"por quê?"*
A – *"deixa eu pensar, porque queremos a velocidade instantânea no instante 2. Ta certo né? Agente fez isso no exemplo que tu deu da função y=*x^3*. Naquele caso era taxa de variação instantânea no ponto 1."*
P- *"está correto teu pensamento. Como que tu vai calcular então?"*
A – *"vou diminui cada vez mais esse intervalo e ver para qual número se aproxima".*

Após esse diálogo, o aluno começou a tomar intervalos cada vez menores para calcular a taxa de variação instantânea. Assim, percebeu que teria que fixar o extremo superior e diminuir cada vez mais o intervalo para poder encontrar a velocidade no instante $t=2$. Destacamos que o aluno tomou, diretamente, o intervalo [1.9,2] (como mostra a Figura 47, acima). O aluno concluiu que a velocidade, no instante $t=2$, é aproximadamente $4m/s$.

Nessa resolução, estão presentes os conceitos iniciais de Cálculo envolvidos na pesquisa. Para conseguir resolver o problema, o aluno teve que utilizar o cálculo de taxa de variação média (inclinação da reta secante) e, em seguida, a taxa de variação instantânea (inclinação da reta tangente). No canto da figura, podemos observar o esboço do gráfico feito pelo o aluno.

Nessa atividade, é possível verificar que os alunos utilizaram os conceitos abordados durante os encontros, mesmo não tendo utilizado o formalismo referente ao cálculo da inclinação da reta tangente.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos dizer que o problema relacionado aos altos índices de evasão e reprovação na disciplina de Cálculo foi um fator determinante para a realização deste trabalho. Na tentativa de compreender os motivos que levam ao “fracasso” do ensino de Cálculo nas universidades, este trabalho apresentou um panorama do Cálculo nas universidades brasileiras, assim como as medidas adotadas pela UFRGS para contribuir na solução desse problema e facilitar a compreensão dos conceitos de Cálculo pelos alunos.

Além disso, o trabalho apresentou opiniões de professores e alunos a respeito das possíveis razões para esses elevados índices de reprovação. Neste trabalho foi apresentada uma análise de quatro livros didáticos do Ensino Médio. Nessa análise foi avaliada a maneira como estes livros abordam os conceitos de Cálculo para alunos do Ensino Médio. Concluíu-se, a partir dos estudos realizados, que a melhor abordagem para trabalhar com os conceitos iniciais de Cálculo no Ensino Médio é dando enfoque em sua aplicabilidade no cotidiano e não dando ênfase à parte algébrica.

Assim, acredito que o pré-conhecimento desses conceitos de Cálculo possa contribuir para diminuir esses elevados índices de reprovação. Para tal, esse trabalho apresentou uma sessão do Cálculo no Ensino Médio, que defende a ideia de que a abordagem desses conceitos nesta etapa é fundamental para “a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual” (Ávila, 1991, p. 3).

Para analisar a viabilidade da proposta, este trabalho apresentou uma sequência didática, que foi aplicada com um grupo de alunos do Ensino Médio, abordando conceitos iniciais de Cálculo. Durante os encontros, foi possível perceber o envolvimento dos alunos com os conceitos que estavam sendo trabalhados, querendo compreender como tais conceitos poderiam ser utilizados. Ao longo dos encontros, a utilização do software GeoGebra foi fundamental para a compreensão dos alunos. O software foi escolhido adequadamente visto que, devido ao seu dinamismo, permitiu aos alunos movimentarem gráficos e visualizarem e compreenderem conceitos que até então eram abstratos para eles.

Analisando a participação dos alunos nos encontros e os resultados obtidos nos exercícios propostos com os alunos do Ensino Médio, acredito ser viável a introdução de conceitos iniciais de Cálculo nessa etapa de ensino de Matemática.

Concluímos que, dentre os motivos para a introdução desses conceitos de Cálculo no Ensino Médio, podemos destacar que esse trabalho inicial pode se tornar uma importante ferramenta para ajudar os alunos a compreender esses conceitos na disciplina de Cálculo nas universidades. Também, destacamos que a aprendizagem desses conceitos pode ajudar a contextualizar o estudo de funções no Ensino Médio, cuja abordagem na maioria das vezes está presa à utilização de nomenclaturas e definições.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard. **Cálculo. v. 1.** 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, n. 18, SBM, p. 1 - 9, 1991.

ÁVILA, Geraldo. Limites de derivadas no ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, n. 60, SBM, p. 30 – 38, 2006.

ÁVILA, Geraldo. Derivadas e Cinemática. **Revista do Professor de Matemática**, n. 61, SBM, p. 25 – 30, 2006.

BARBOSA, Marcos A. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.** Curitiba, 2004. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

BERND, Arthur B. **As imagens conceituais e a geometria dinâmica.** Porto Alegre, 2011. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BRANCO, Flávia M; FACHIN, Maria P; KRAEMER, Vânia. **Geometria Analítica.** In: DOERING, Claus I; DOERING, Luisa R. (Orgs.). **Pré-Cálculo.** 1 ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2008.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações. v. 3.** 1 ed. São Paulo: Ática, 2010.

DOERING, Claus I; NÁCUL, Liana B; DOERING, Luisa R. **O programa Pró-Cálculo da UFRGS.** In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana.** 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

GIOVANNI, José R; BONJORNO, José R. **Matemática 2º grau. v. 3.** São Paulo: FTD.

GONÇALVES, William V. **Uma investigação sobre a introdução do estudo do conceito de derivadas associado ao conceito de velocidade instantânea para o ensino médio.** Cuiabá, 2007. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso.

GRAVINA, Maria A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria.** Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, 1996.

GRAVINA, Maria A. et al. **Geometria Dinâmica na Escola.** In: GRAVINA, Maria A. et al. (Org). **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática.** Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GUEDES, Anderson G; ASSIS, Márcia M. **Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: uma análise nas escolas de ensino médio do Natal/RN.** In: Encontro Regional de Educação Matemática, Rio Grande do Norte, 2009.

REIS, Frederico da S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos.** Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

REZENDE, Wanderley M. **O ensino de Cálculo: dificuldade de natureza epistemológica.** In: MACHADO, Nílson J; CUNHA, Marisa O. (Orgs.). **Coleção Ensaios Transversais: Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios de epistemologia e didática. v. 23** São Paulo: Escrituras, 2003.

SANT'ANA, Alvino A. et al. **Geometria Analítica e Funções Reais.** In: DOERING, Claus I; NÁCUL, Liana B; DOERING, Luisa R. (Orgs.). **Pré-Cálculo.** 2 ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

SILVEIRA, Ijacira C. Matemática prepara calouros antes do início das aulas. **Jornal da Universidade (UFRGS).** Edição de abril, 2003. Número 61 – ano V. Disponível em < http://www.ufrgs.br/jornal/abril2003/pag04.html >.

SMOLE, Kátia S; DINIZ, Maria I. **Matemática: ensino médio. v. 3.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

XAVIER, Claudio; BARRETO, Benigno. **Matemática Aula por Aula: ensino médio. v. 3.** São Paulo: FTD, 2009.

7. APÊNDICE

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada A Viabilidade de Trabalhar Conceitos de Cálculo no Ensino Médio, desenvolvida pelo pesquisador Marcelo de Souza Santos. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone __________ ou e-mail marcia.notare@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Analisar a possibilidade de trabalhar conceitos de Cálculo Diferencial no Ensino Médio;
- Aplicar uma atividade para os alunos envolvidos na pesquisa;
- Análise de dados da atividade realizada.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço ___________________ e-mail marcelo.s.mat@hotmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 9 de outubro de 2012.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: