UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

BRUNO BASTOS BRAGA

ATIVIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

PORTO ALEGRE

2012/02

BRUNO BASTOS BRAGA

ATIVIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

PORTO ALEGRE
2012/02

BRUNO BASTOS BRAGA

ATIVIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Comissão Examinadora:

Prof. Francisco Egger Moellwald
FACULDADE DE EDUCAÇÃO – UFRGS

Prof. Lúcia Helena Marques Carrasco
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Porto Alegre, dezembro de 2012

Everybody's happy
Everybody's free
We'll keep the big door open
And everyone'll come around
Why are you different?
Why are you that way?
If you don't get in line
We'll lock you away

Dave Matthews

AGRADECIMENTOS

À mãe[1] *que é uma guerreira*
Passou a vida inteira carregando fardos
Do dom sagrado três filhos em seu ventre
A nós não deixou faltar nada
Então vou seguir a jornada
Retribuindo o que fez pela gente.

Ao pai[2] *que também peleia*
Para nos por uma ceia e trazer sua alegria
Histórias, cantorias, debruçado ao violão
A irreverência é tua marca de compositor
Quero levar comigo teu bom humor
E a simplicidade de fazer uma canção.

À irmã[3] *que será sempre uma criança*
Sorri com esperança embora não entenda
A vida terrena pra ti é brincar
Obrigado pelos puxões de cabelo
Rasgar meus cadernos sem zelo
E fazer parte do nosso lar.

Ao irmão[4] *que os primeiros acordes me ensinou*
Muito do que sou devo a ti, cantar, ouvir, enfim
Tua esposa[5] *reza por mim, sua fé não acaba*
Teu filho[6] *é estremecido*
Meu afilhado querido
O berço é esplêndido, Bastos e Braga.

---
[1] Adyles Bastos Braga.
[2] José Feliciano Moraes Braga.
[3] Bartira Bastos Braga.
[4] Barcelo Bastos Braga.
[5] Claudete Nazário Braga.
[6] Lorenzo Nazário Braga.

Aos demais familiares[7] *que me ajudaram*
Abrigaram-me e acolheram-me nesta cidade
Toda a dificuldade foi um aprendizado
Quero vencer no futuro
Ser motivo de orgulho
E lhes dizer obrigado.

Aos amigos[8] *de todas as horas*
Refiro-me agora a vocês meus irmãos
Que entre um trago e uma canção
Churrasco e futebol
Mesmo em dias sem sol
Lembram-se deste peão.

Aos professores[9] *que me guiaram até aqui*
Com vocês cresci e ainda sou um aprendiz
Hoje feliz lhes digo na sinceridade que trago
Não vou parar por aqui
Vemos-nos por aí
A todos vocês o meu muito obrigado.

[7] Luiz Carlos, Idoílda, Luzia, Inácio, Luciano, demais tios; Viviane, Fábio, Igor, Guilherme, Murilo, Maurício, demais primos.
[8] André, Léo, Thiago, Oscar, Marcelo, Fernando, Guilherme, Diego, Charles, Raul, e muitos outros.
[9] Elisabete, Vilmar, Chico, Lúcia, Alvino, Sônias, Catia, Aline, Anaí, Milka, Mauro, Vagner, e outros.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação acerca do pensamento algébrico de alunos do Ensino Fundamental, através da experimentação de atividades que foram construídas com o intuito de auxiliar na compreensão de conceitos de equações como variáveis e incógnitas. As atividades foram aplicadas para duas turmas de 7º ano na Escola Estadual de Ensino Fundamental Maurício Sirotski Sobrinho, durante o ano de 2012. Buscou-se verificar se as atividades propostas contribuíram para que os alunos compreendessem a linguagem algébrica simbólica vinculada ao estudo de equações. O trabalho apresenta uma análise da experimentação, concluindo que a aplicação das atividades foi positiva para a contribuição no pensamento algébrico de alunos e para a sua compreensão da linguagem simbólica da matemática.

Palavras-Chave: Pensamento algébrico; variáveis; incógnitas; aprendizagem matemática.

ABSTRACT

This work presents an investigation on the algebraic thinking in elementary school students, through experimentation activities that were built in order to assist in understanding the concepts of variables and equations as unknowns. The activities were applied to two 7th grade classes at the State School of Basic Education Mauricio Sirotski Sobrinho during the year 2012, through the discipline of mathematics education in Stage II of this University. We sought to determine whether the proposed activities helped students understand the symbolic language of algebra equations linked to the study. The work presents an analysis of the experiment, concluding that the implementation of activities contributed to the students' algebraic thinking and their understanding of the symbolic language of mathematics.

Keywords: Algebraic thinking; variables, unknowns; learning mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nas escolas em que tive oportunidade de acompanhar o ensino de matemática, percebi que muitos dos equívocos cometidos pelos estudantes no ensino médio derivam da não ou parcial compreensão dos conteúdos dos anos anteriores no ensino fundamental. A disciplina de Matemática é considerada por muitas pessoas uma das mais difíceis de se compreender e a escrita formal pode dificultar ainda mais a interpretação e o entendimento de seus determinados conteúdos. Os dois livros didáticos pesquisados, "A Conquista da Matemática" de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr (1998) e "Matemática e Realidade", de Iezzi, Dolce e Machado (2009), utilizam exercícios escritos na linguagem simbólica da Matemática e poucas são as atividades voltadas para a compreensão, pelos alunos, do que significam esses símbolos utilizados para expressar as relações e operações algébricas. Pelo fato de que nem todos os alunos gostam da disciplina de Matemática e esse desinteresse muitas vezes pode levar à reprovação ou a não aprendizagem, podemos questionar porque não utilizar novas abordagens que possam despertar o interesse dos alunos e favorecer a compreensão.

Nas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS de Laboratório de Prática de Ensino e Aprendizagem de Matemática I, desenvolvida no Colégio de Aplicação, e de Estágio em Educação Matemática I, desenvolvida no Colégio Rio Branco, observei as dificuldades de muitos alunos com o conteúdo de equações, um dos fatores que me motivaram a realizar este trabalho. Em Laboratório I, tive a oportunidade de trabalhar com duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio, abordando o conteúdo de funções. Nessas turmas pude observar a dificuldade que os alunos tinham para encontrar determinados valores como $f(1)$, $f(1/2)$, por exemplo, quando era dada a fórmula da função. Os alunos entendiam que deveriam substituir o valor dado entre parênteses (o valor da variável x) na expressão estabelecida, entretanto tinham dificuldades para encontrar o valor correspondente à variável y ou $f(x)$. A recíproca também ocorria, ou seja, os alunos também tinham dificuldades quando era pedido o valor da variável x para o qual ocorre $f(x) = 1$, por exemplo. Os estudantes cometiam erros ao "isolar" incógnitas em um dos membros da igualdade e números "conhecidos" no outro; e ao operar com frações, em geral no cálculo do mínimo múltiplo comum.

Na disciplina de Estágio I, trabalhei com os conceitos de fatorial, arranjos, permutações, combinações e probabilidade, com alunos do segundo ano do Ensino Médio. Porém, um exercício em especial me chamou a atenção, ao questionar os alunos sobre as probabilidades de vitória e derrota. Os alunos entendiam, por exemplo, que se tivéssemos uma probabilidade favorável de 40%, a probabilidade desfavorável seria de 60% ; assim, na tentativa de generalizar para quaisquer probabilidades, foi feita a pergunta: se temos uma probabilidade x de vencer, qual a probabilidade que temos de perder? Verifiquei a grande dificuldade que os alunos tiveram de chegar à expressão "100% – x%", ou "1 – x". Entendo que situações como esta, e as dificuldades dos alunos do Colégio de Aplicação com a álgebra das funções decorrem de um mau entendimento sobre o conceito de variável abordada no Ensino Fundamental. Assim, acredito que é importante a preocupação com atividades que permitam reflexões sobre o uso da linguagem matemática, ou seja, ao resolver um exercício, que o aluno tenha possibilidade de compreender a linguagem simbólica da matemática, e que nos próximos anos as dúvidas citadas anteriormente não se repitam.

Esta pesquisa surgiu, então, da necessidade de buscar alternativas para as dificuldades na aprendizagem de equações de 1º grau. Decidi realizar uma investigação durante o ano de 2012, com duas turmas de 7ª série, na Escola Estadual de Ensino Fundamental Maurício Sirotski Sobrinho, localizada no município de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. A motivação para esta pesquisa foi a questão: os equívocos dos alunos ao lidarem com expressões algébricas são devidos à má compreensão da linguagem simbólica da matemática? Para encaminhá-la, fez-se necessário experimentar atividades que pudessem auxiliar os estudantes a compreenderem a linguagem simbólica da álgebra. Elaborei um projeto com quatro atividades semanais envolvendo equações de 1º grau (uma vez que já foi apresentado o conteúdo de equações às turmas de 7ª série), com a preocupação de que essas atividades fossem interessantes aos olhos dos alunos, com objetos como pirâmides, balanças, fichas, de modo que, na resolução dos problemas, os alunos pudessem atribuir significado à linguagem simbólica da matemática. A primeira parte traria exercícios elaborados por mim e na segunda parte os alunos criariam seus próprios exemplos, o que no meu entendimento é uma boa maneira de se verificar o que e como os alunos estão pensando.

O segundo capítulo deste trabalho traz um breve histórico do desenvolvimento do conteúdo de equações. Após, segue um comentário sobre como se desenvolveu o ensino da álgebra nas escolas brasileiras e sua importância no ensino da disciplina de matemática, o que também motivou a elaboração deste trabalho, e alguns resultados de pesquisas sobre concepções algébricas de estudantes relativas a variáveis, incógnitas, e equações, que serão considerados na análise da experimentação. O capítulo seguinte apresenta o relato das atividades desenvolvidas na pesquisa de campo, a metodologia utilizada, minhas expectativas e o relato da implementação das atividades, incluindo os registros das resoluções dos alunos e dos diálogos realizados durante a realização das atividades.

No capítulo 4, apresento a análise da aplicação das atividades, do pensamento dos alunos, de suas resoluções e dos efeitos das atividades em termos de aprendizagem.

Por fim, as considerações finais.

2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA

2.1 A álgebra ao longo do tempo

Segundo Bonadiman (2007), para que possamos compreender melhor as dificuldades que os alunos apresentam com a álgebra das equações, é necessário analisar como se desenvolveu o pensamento algébrico historicamente.

A matemática primitiva teve origem em certas áreas do Oriente Antigo primeiramente como uma ciência para auxiliar atividades ligadas à agricultura e à engenharia.

> [...] a ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração práticas. O cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, [...] e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis. [...] Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. [...] Foi dessa maneira que a álgebra envolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração. (EVES, 1995, p. 57).

As primeiras referências às equações de primeiro grau de que se ouve falar constam do papiro de *Rhind (Ahmes*[10]*)*, que foi um dos documentos egípcios mais antigos que tratam de matemática, segundo Boyer (1974), escrito há mais ou menos 2000 a.C.

Os matemáticos egípcios utilizavam uma linguagem algébrica diferente da que conhecemos hoje, o que Eves (1995) denominou ser a “Álgebra Retórica”, em que os procedimentos e as variáveis são descritos, sem abreviações. Além dessa concepção, o autor cita que a álgebra foi construída em mais dois estágios: “Álgebra Sincopada”, em que se adotam as primeiras abreviações ou símbolos específicos, e a “Álgebra Simbólica”, a “taquigrafia matemática” formada por símbolos.

Acredito que nas escolas, hoje, os alunos pensam com a álgebra retórica, interpretando corretamente grande parte dos exercícios, porém surgem dificuldades com a álgebra simbólica, pois muitos dos estudantes não compreendem a linguagem simbólica da álgebra.

---

[10] O papiro de Rhind (ou Ahmes), de cerca de 1650 a.C, constitui um texto matemático contendo 85 problemas cotidianos com suas resoluções. De acordo com Boyer (1974), esses problemas não se referiam a objetos concretos, específicos, nem exigiam operações entre números conhecidos. Para solucionar alguns problemas, era solicitado o que equivale a soluções de equações lineares $f(x) = ax + b$, em que a e b são conhecidos e x é desconhecido. Nesse caso, x assumindo o papel de incógnita que era chamado pelos egípcios de *aha*.

> [...] o aluno desenvolve seu pensamento algébrico: primeiro de forma retórica, utilizando-se de sua linguagem coerente, e só depois utilizando uma linguagem mais simbólica. O que estamos querendo dizer é que o aluno, de forma semelhante ao que ocorreu historicamente, desenvolve um pensamento algébrico antes mesmo de desenvolver ou usar um certo simbolismo para expressar esse pensamento (BONADIMAN, 2007, p. 34).

A importância das equações foi verificada a partir do momento em que passaram a ser escritas com símbolos. Segundo Boyer (1974), Diofante de Alexandria 250 d.C, utilizou pela primeira vez a utilização de símbolos algébricos e sinais para as incógnitas. Na Europa o primeiro a fazer isso foi o francês François Viète, no final do século XVI, e por esse motivo é chamado "pai da Álgebra". Ele adotou o uso de vogais para quantidades desconhecidas ou indeterminadas e consoantes para grandezas, ou números conhecidos, dados.

Ainda conforme Boyer (1974), a álgebra foi reconhecida na matemática a partir do Renascimento e desenvolveu-se na Europa moderna e contemporânea. Os matemáticos passaram a utilizar letras para representar incógnitas e adotaram os símbolos "+" e "–" para adição e subtração e "=" para igualar os termos de uma equação. Na Europa a Álgebra foi retórica até o século XV. A Álgebra simbólica se impôs no século XVII.

2.2 O ensino de álgebra no Brasil

Também é importante comentarmos a evolução no ensino da álgebra aqui no Brasil, para compreendermos as práticas pedagógicas utilizadas atualmente e nos balizarmos para criar novas metodologias, visando à compreensão dos conceitos e o desenvolvimento do pensamento algébrico para as equações.

Segundo Neves (1995), há pelo menos 200 anos o ensino de álgebra existe oficialmente no Brasil. Vários movimentos surgiram ao longo desses anos como tentativa de inovações e melhorias no currículo escolar, sendo um dos mais importantes o Movimento da Matemática Moderna nas décadas de 1960 e 1970.

> De comum, propunha-se um ensino com ênfase na compreensão, buscava-se o uso de uma linguagem matemática mais simples, porém rigorosa e unificadora dos vários campos da matemática (aritmética, álgebra e geometria). Havia um grande interesse de matemáticos profissionais em influenciar o ensino da matemática elementar no sentido de aproximá-lo ao nível de fundamentação do conhecimento matemático do século XX. Tal conhecimento reformista recebeu o rótulo de *Movimento da Matemática Moderna*. (NEVES, 1995, p. 36).

O Movimento da Matemática Moderna no Brasil foi, segundo Neves (1995, p. 39), "uma tentativa de adaptar idéias estrangeiras ao currículo vigente e às políticas educacionais locais". O movimento propôs a introdução no currículo de "elementos unificadores" como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as suas relações. Entretanto, segundo o autor, esses novos elementos apenas substituíram outros no currículo escolar: "A memorização como forma dominante de aprender matemática não estava eliminada e os velhos exercícios de rotina permaneciam, ainda que com uma nova linguagem e sobre novos conteúdos" (NEVES, 1995, p. 39).

Segundo Búrigo (2010), além do Movimento da Matemática Moderna, houve muitas reformas no currículo das escolas na disciplina de Matemática, discutindo sobre que conteúdos deveriam ser ensinados e seu ordenamento. Na década de 1950, os programas nacionais determinavam que as expressões algébricas fossem estudadas antes das equações. Nos livros didáticos pesquisados, de Giovanni, Castrucci, e Giovanni Jr (1998) e Iezzi, Dolce e Machado (2009), as equações de primeiro grau são abordadas nos livros para a 6ª série e o cálculo algébrico nos livros para a 7ª série.

Acredito que a álgebra é importante para o desenvolvimento do raciocínio, bem como na solução de problemas matemáticos e de outras áreas da ciência, tais como física e química. O estudo da álgebra contribui para que o aluno exercite e desenvolva sua capacidade de abstração, generalização.

2.3 Algumas concepções algébricas de estudantes

Entendo ser necessária uma reflexão sobre as concepções algébricas dos alunos, e sobre como compreendem os conceitos de incógnita e variável, para abordarmos o conteúdo de equações.

Segundo Usiskin (2003), as concepções de variável mudam com o tempo. Antes da década de 1950 a palavra variável era descrita como "número mutável". Hart (apud USISKIN, 2003) definiu: "Uma variável é um número literal que pode assumir dois ou mais valores durante uma determinada discussão". Ao final daquela década, May e Van Engen apresentaram uma concepção diferente:

> Uma variável, a grosso modo, é um símbolo pelo qual se substituem os nomes de alguns objetos, comumente números, em álgebra. Uma variável está sempre associada a um conjunto de objetos cujos nomes podem ser substituídos por ela. Esses objetos chamam-se valores da variável (MAY; ENGEN, apud USISKIN, 2003, p.10-11).

Usiskin (2003, p. 11) acredita que a tendência atual é evitar a distinção “nome-objeto” e pensar uma variável simplesmente como um “símbolo pelo qual se podem substituir coisas”. (Ibidem, p, 11).

Ao questionarmos alunos do 7º ano da Escola Mauricio Sirotski Sobrinho sobre o que eles entendem por incógnita, a maioria respondeu se tratar de “um número desconhecido”. Ao questionarmos também, sobre o que era uma equação, muitos alunos citaram: “é um cálculo que envolve letras”. Assim, pode-se observar que muitos dos alunos acreditam que incógnitas são sempre letras, ou seja, eles não têm o entendimento de que uma variável pode ser representada por qualquer símbolo além das letras do alfabeto. “Em suma, as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra (USISKIN, 2003, p. 12)”.

Os símbolos têm grande importância na educação matemática. Eles podem tornar a informação mais fácil de se compreender e manipular, como quando trabalhamos com números muito grandes, por exemplo, podemos representá-los por um único símbolo. Porém, os diversos símbolos usados nesta disciplina podem gerar dúvidas ou interpretações equivocadas, pois é difícil para muitos alunos compreender o significado de todos estes símbolos, ou compreender as propriedades estabelecidas pelas convenções matemáticas.

Um símbolo que a maioria dos estudantes não compreende no ensino de equações é o sinal de igualdade. Muitos alunos não observam a idéia de equivalência e estão habituados a encarar expressões do tipo 5 + 7 = como indicando uma operação que é preciso fazer, “escreva um resultado”’. Poucos alunos percebem o sentido bidirecional deste símbolo, ou seja, que podemos escrever $x = 7$, e que isso é o mesmo que escrever $7 = x$.

> Em aritmética, símbolos como + e = são interpretados geralmente em termos de ações a serem efetuadas, de maneira que + significa efetivamente realizar a operação, e = significa escrever a resposta [...] no contexto do estudo de equações, que crianças de doze a catorze anos de idade considerem o sinal de igual como um símbolo unidirecional que precede uma resposta numérica (BEHR, ERLWANGER, NICHOLS, 1980; GINSBURG, 1977; apud BOOTH, 2003, p. 27).

Segundo Bonadiman (2007), os alunos têm mais habilidade para resolver os exercícios mecanicamente do que para explicá-los: “Não sabem por que chegaram a tal resultado ou porque certo problema é resolvido de determinada maneira, muito menos fazem associações com os conhecimentos adquiridos em seu cotidiano” (Ibidem, p. 15). Por exemplo, em questões de geometria em que são definidas fórmulas para o cálculo de áreas para determinados polígonos, muitas vezes os alunos apenas "decoram" estas fórmulas e não compreendem que a maioria delas parte do princípio da multiplicação do comprimento da medida da base pelo comprimento da medida da altura de seus respectivos polígonos.

É importante compreendermos o pensamento dos alunos para analisar suas resoluções em atividades propostas. E para a construção de novas atividades no futuro, visando à melhoria do ensino de Matemática no Ensino Fundamental.

> A busca pela melhoria do ensino de matemática tem sido meta constante dos educadores matemáticos. Mas se pretendemos afetar a qualidade do ensino e da aprendizagem é importante oportunizar aos docentes a reflexão sobre sua prática para que adquiram subsídios que os levem a reconstruí-la em direção ao sucesso escolar de seus alunos (BONADIMAN, 2007, p. 15).

Alguns autores trabalham com o conceito de produção de significados. Bonadiman (2007, p. 52), cita Lins e Gimenez para dizer que o termo significado "assume a característica de ser o conjunto de coisas que se diz respeito de um objeto", e conclui que produzir significados é "falar a respeito de um objeto".

> [...] assumimos que *produzir significado* a respeito de um determinado assunto, conteúdo ou atividade algébrica é enunciar um conjunto de afirmações, perguntas ou suposições que podem ser ditas sobre esse determinado assunto, conteúdo ou atividade, envolvendo conjecturas e justificações. (BONADIMAN, 2007, p. 52).

Meira (apud BONADIMAN, 2007), por sua vez, afirma que "produzir significados significa estabelecer relações entre conceitos, as ferramentas que utilizamos para construí-los e as atividades nas quais os conceitos emergem".

Acredito que muitas das dificuldades na aprendizagem matemática são devidas ao fato de que os alunos não produzem (ou atribuem) significados à linguagem simbólica dessa disciplina e, dessa forma:

> É importante propiciar atividades para os alunos no sentido de favorecer a produção de significados para a álgebra simbólica. [...] se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática. (BONADIMAN, 2007, p. 51).

Por essas razões, elaborei atividades que, no meu entendimento, poderiam auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos de variável e incógnita e de igualdade, com o objetivo de que os alunos atribuam significado às manipulações das expressões, e à linguagem simbólica da Matemática.

3 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ATIVIDADES PROPOSTAS

3.1 Metodologia

Como dito na introdução, meu objetivo neste trabalho é investigar propostas de atividades vinculadas ao pensamento algébrico no ensino fundamental, que possibilitem aos alunos atribuir significado à linguagem algébrica simbólica. Para isto, busquei elaborar e experimentar atividades que aproximassem a escrita formal matemática das resoluções dos alunos, ou seja, que possibilitassem aos alunos compreender a linguagem matemática. Com base no que observei dos estudantes nas disciplinas de Estágio em Educação Matemática e Laboratório de Prática de Ensino e Aprendizagem, pesquisei exercícios que poderiam evitar os equívocos cometidos pelos alunos.

Assim, entre os motivos que originaram este estudo, estão as observações de equívocos em relação à resolução de equações, especialmente equações de 1º grau. A meu ver, os alunos apresentavam um entendimento equivocado acerca das regras, ou seja, com a escrita formal da disciplina de Matemática, alguns decoram os métodos de resolução, como no caso do conteúdo de função, esquecendo os raciocínios por trás dos procedimentos e, além disso, ao se depararem com exercícios envolvendo frações, por exemplo, muitos deles realizavam as operações com equívocos.

Compreender os conceitos acerca das equações é importante, uma vez que a má compreensão se reflete não apenas na disciplina de Matemática, como em diversas áreas na vida dos estudantes. A não ou parcial aprendizagem dos conceitos acerca das equações pode dificultar a aprendizagem de conceitos de outros conteúdos em Matemática, e até mesmo em outras disciplinas, como Química e Física. Por isso, deve ser acentuada a importância da aprendizagem da álgebra nas equações, e o que este conteúdo representa para a educação escolar e para a vida profissional. Por isso busquei alternativas que contribuíssem para a melhoria do ensino de equações no Ensino Fundamental.

Tendo em vista que a álgebra das equações do 1º grau é importante para o bom desempenho dos estudantes nos anos posteriores, houve a necessidade de verificar se as atividades propostas modificariam de alguma forma essa situação, se elas facilitariam o entendimento, se estas abordagens surtiriam efeito.

Primeiramente, como recurso metodológico, foi realizado um estudo bibliográfico sobre as diferentes concepções da álgebra escolar de estudantes dos Estados Unidos, conforme observado no livro *As idéias da Álgebra* de Coxford e Shulte (2003). Esse livro apresenta diversos artigos de professores de Matemática norte-americanos (The National Council of Teachers of Mathematics) sobre o ensino da álgebra escolar, o que os estudantes entendem por incógnitas e variáveis, a linguagem algébrica, a não compreensão da bilateralidade do sinal de igualdade, entre outros. Também foram consultados artigos e dissertações de autores como Rômulo Lins (1994), Adriana Bonadiman (2007), Howard Eves (1995), Paulo Neves (1995), entre outros, que tratam sobre o ensino de álgebra na escola.

Em seguida, foi feita uma pesquisa em dois livros didáticos sobre atividades que poderiam facilitar a compreensão dos conceitos relativas ao conteúdo de equações do 1º grau. Nos livros pesquisados, de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr (1998) e Iezzi, Dolce e Machado (2009), pude notar o excesso de exercícios com a linguagem formal da matemática e poucos exercícios que pudessem auxiliar a compreensão desta linguagem. Dessa forma, algumas das atividades propostas foram criadas e discutidas entre colegas do curso de Licenciatura em Matemática desta Universidade.

Foi então elaborado um projeto com essas atividades, e aplicado para duas turmas de 7º ano. Ambas as turmas continham uma média de 30 alunos com cerca de 13 anos de idade. Para registro das atividades, fotografei algumas resoluções e gravei o áudio de muitas conversas, com o Termo de Consentimento assinado pelos pais dos alunos para publicação dos dados neste trabalho (conforme Apêndice C).

Implementei as atividades na primeira turma durante o primeiro semestre de 2012, nos meses de maio e junho, em oito encontros, e, ao analisar o áudio das conversas com os alunos, entendi que meu desempenho poderia ter sido melhor, pois dei muitas dicas ao invés de deixar os alunos pensarem. Dessa forma, resolvi aplicar novamente duas das atividades em outra turma no segundo semestre de 2012, no mês de setembro em dois encontros. Foram necessários esses encontros até que os alunos realizassem todas as atividades em paralelo às aulas da professora titular.

Como metodologia, dividi as atividades, primeiramente, em exercícios propostos para os alunos resolverem, e, após, foi feita a divisão da turma em grupos, de forma que cada grupo criaria seus próprios exemplos e resolveria os exercícios criados pelos outros grupos. No decorrer do trabalho verifiquei que este método gerou aumento no interesse por parte dos estudantes, visto que os mesmos tentaram elaborar exemplos que dificultassem as resoluções pelos outros grupos e, para isso, tiveram que pensar e compreender as atividades.

Como critério para a análise das resoluções, eu procurei observar como foram realizadas e pensadas pelos alunos, sem exigir que suas escritas fossem formais, pois dessa forma, eu poderia verificar o que eles compreenderam.

3.2 Relato da aplicação das atividades

O projeto englobou quatro atividades semanais envolvendo equações de 1º grau. Na primeira parte de cada encontro eu traria exercícios e na segunda parte os alunos criariam seus próprios exemplos, o que foi uma boa maneira de verificar o que os alunos pensaram.

As atividades surgiram de discussões com colegas do curso de Licenciatura em Matemática. Pensávamos o que poderia ser uma atividade interessante para o ensino de equações e, dentre as atividades elaboradas, escolhi quatro que denominei: “Pirâmide dos Números”, “Sentenças sem Sinais”, “Balança das Equações” e “Fichas de Valores”. Exercícios envolvendo as sentenças e as fichas foram elaborados e discutidos com colegas do curso. A seguir serão detalhadas estas atividades.

A primeira atividade proposta, denominada “Pirâmide dos Números”, foi aplicada nas duas turmas. Esta atividade consiste em quadrados empilhados em forma de pirâmide, cada quadrado contendo um número, obedecendo à propriedade de que o número do quadrado de cima era dado pela soma ou produto dos números dos quadrados de baixo, conforme ilustrado na figura 1.

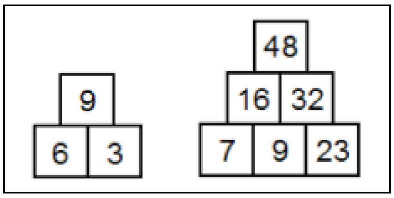


Figura 1: Exemplos de pirâmides utilizadas nas atividades.

Mais tarde, encontrei num livro didático “A Conquista da Matemática, 7º Ano”, de José Rui Giovanni (2009), uma atividade parecida, também envolvendo pirâmides. Nesse livro, o exercício expõe uma pirâmide com vários números e pede para que o aluno descubra o que esses números têm em comum. No projeto, após descobrirem a propriedade existente entre os números nas pirâmides (soma ou produto), os estudantes resolveram exercícios com espaços em branco ou com incógnitas para que calculassem os valores que faltavam. O objetivo com esta atividade era o de que os alunos observassem a propriedade da pirâmide e atribuíssem significado às incógnitas de equações do tipo $ma = n$ com m, n inteiros, como, por exemplo, $2a = 1$.

A atividade “Sentenças sem Sinais” foi aplicada apenas na primeira turma, por questão de tempo, e consistiu, primeiramente, em verificar se sentenças do tipo $5^2 – 1 = 6x4$ eram falsas ou verdadeiras. Esse exercício serviu como introdução aos exercícios principais, que consistiam em completar as sentenças, como, por exemplo, 13 = 4   9, com um dos sinais das quatro operações - que, no caso, poderia ser o sinal de adição -, para que a sentença fosse verdadeira. Outro exercício continha apenas números, por exemplo, 15   9   6, e os alunos deveriam encontrar uma sentença verdadeira que os relacionasse, completando com um sinal de operação e um sinal de igualdade. No exemplo anterior, uma sentença possível seria 15 = 9 + 6. Um objetivo com esta atividade era o de que os alunos observassem que para alguns dos exercícios haveria mais de uma resposta certa, como no caso dos números 15, 9 e 6, para os quais outra resposta poderia ser 15 – 9 = 6. Outro objetivo consistiu em expor que, dependendo da posição do sinal de igualdade, alguns sinais de operação podem ser alterados. No meu entendimento, isso pode ser uma ferramenta para que os alunos atribuam significado para resoluções como $x – 3 = 7 \rightarrow x = 7 + 3$.

A terceira atividade, “Balança das Equações”, também foi aplicada apenas na primeira turma, também por questão de tempo. Exercícios envolvendo balanças de dois pratos podem ser encontrados em *sites* na internet, em livros didáticos e em artigos. Para esta atividade, desenhei uma balança de dois pratos com objetos sobre esses pratos, sendo indicadas suas respectivas massas. O objetivo era que os alunos observassem a relação simétrica da igualdade, uma vez que ao retirar ou pôr objetos em apenas um dos pratos da balança ocorre um desequilíbrio em uma situação que antes era equilibrada. Em outras palavras, o objetivo era o de que os estudantes observassem que uma equação tem essa propriedade, que não se pode alterar apenas um dos membros da igualdade, senão a sentença se torna falsa.

A última atividade, “Fichas de Valores”, foi aplicada nas duas turmas. Foram atribuídos valores diferentes para as fichas de cores diferentes: cada ficha azul valeria +3 pontos, verde +5 pontos, vermelho +8 pontos, amarelo +10 pontos, branco -1 ponto e preto -2. Nos primeiros exercícios, desenhei fichas empilhadas com uma ou mais cores e um sinal de igualdade entre as pilhas de fichas. Os alunos deveriam adicionar ou retirar fichas para que a igualdade em valores das pilhas fosse verdadeira. Nos exercícios posteriores, questionei os alunos sobre quantas fichas de uma determinada cor deveriam ser adicionadas para que igualdades do tipo 9 + x.verdes = 24 fossem verdadeiras. Minha intenção nesses exercícios era a de que os alunos considerassem que x.verdes é um valor em pontos que tornaria a sentença “9 + x.verdes = 24” verdadeira, isto é, eu esperava que a sentença “9 + x.verdes = 24” fosse interpretada como “somando 9 pontos aos pontos de x fichas verdes tenho 24 pontos”. Como cada ficha verde vale 5 pontos, temos nesse exemplo a necessidade de adicionar 3 fichas verdes aos 9 pontos para chegar aos 24 pontos, em outras palavras, o valor de x é 3. O objetivo dessa atividade foi o de que, mais tarde, os alunos interpretassem as sentenças do tipo $9 + x. 5 = 24$, lembrando que cada ficha verde vale 5.

A aplicação desses exercícios gerou muitas discussões, pois os alunos tiveram dificuldade em interpretar as expressões expostas acima, e consequentemente tiveram dificuldades em observar a igualdade x.verdes = x.(5). Além disso, ao elaborar os exercícios, eu deveria ter pensado sobre como os alunos reagiriam a essas escritas, uma vez que alguns deles poderiam questionar sobre os números 9 e 24 na sentença “9 + x.verdes = 24”, já que esses números correspondem a pontos, enquanto x corresponde a uma quantidade de fichas.

Na aplicação desta atividade na segunda turma, fez-se necessário uma mudança na escrita das sentenças: de “22 = x.azuis – 2” para “$22 = x(+3) – 2$”, por exemplo.

4 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

4.1 Pirâmide dos Números (aplicada na primeira turma em 2012/1)

A primeira proposta de atividade foi nomeada Pirâmides dos Números: quadrados empilhados em forma de pirâmide. A atividade consistia em preencher os quadrados com números observando as propriedades de soma e produto, como nas figuras 2 e 3 abaixo:

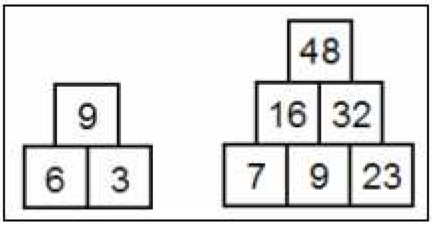


Figura 2: Pirâmides com a propriedade da soma.

O número 9 na primeira pirâmide é a soma dos números 6 e 3 dos quadrados de baixo.
O número 16 na segunda pirâmide é a soma dos números 7 e 9.
O número 32 na segunda pirâmide é a soma dos números 9 e 23.
O número 48 na segunda pirâmide é a soma dos números 16 e 32.

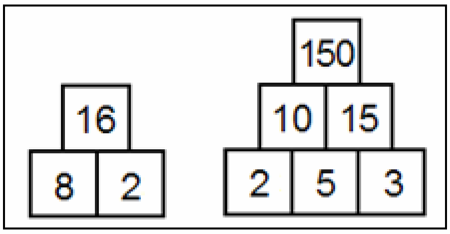


Figura 3: Pirâmides com a propriedade do produto.

O número 16 na primeira pirâmide é o produto dos números 8 e 2.
O número 10 na segunda pirâmide é o produto dos números 2 e 5.
O número 15 na segunda pirâmide é o produto dos números 5 e 3.
O número 150 na segunda pirâmide é o produto dos números 10 e 15.

Dessa forma, elaborei exercícios como as pirâmides acima, com espaços em branco ou com incógnitas, para que os alunos preenchessem. O objetivo com esta atividade era o de que os alunos observassem que os exercícios poderiam ser resolvidos como equações de primeiro grau.

No primeiro exercício, elaborei pirâmides cujos quadrados eram calculados pela soma dos valores dos quadrados imediatamente abaixo. Como na figura 4 a seguir:

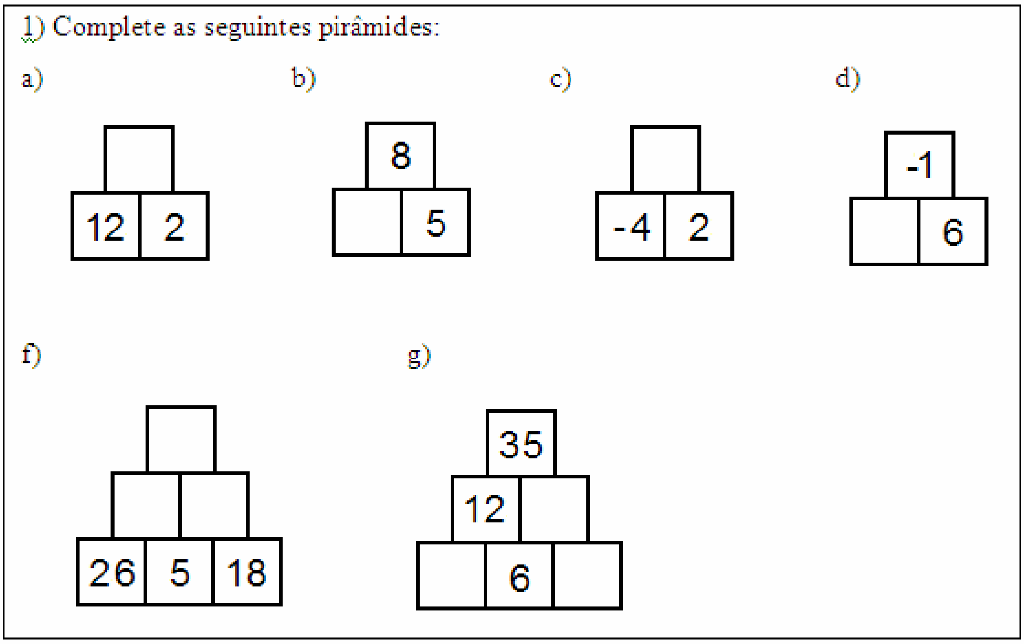


Figura 4: Primeiro exercício, pirâmides com a propriedade da adição.

Como não pedi aos alunos que escrevessem seus cálculos, a grande maioria deles resolveu os exercícios apenas completando os espaços em branco. Já na segunda turma eu pedi a eles que escrevessem seus cálculos, como veremos na próxima seção.

Quanto aos enunciados, conforme podemos observar nos apêndices, antes de cada exercício foi explicado aos alunos de que se tratava cada exercício, e para não repetir a explicação os enunciados foram resumidos.

Alguns alunos questionaram a presença de números negativos nas pirâmides *c* e *d* do exercício 1, que aparece na figura 4.

A: "E esse sinal de menos aqui, sor?" – referindo-se ao número –4.

Pesquisador: "Tá, o quadrado de cima continua sendo a soma dos dois quadrados de baixo".

Notei nesse momento que a maioria dos alunos considerava que os exercícios deveriam tratar de números naturais apenas, e o surgimento de um número negativo causou certo impacto. Também neste exercício, surgiu o que se repetiria várias vezes ao longo das atividades, o fato de que os alunos realizavam as adições corretamente, mas utilizavam o módulo do resultado, sem observar o sinal:

A: "Tá, então vai dar dois" – a soma dos números – 4 e 2 na pirâmide *c*.

Pesquisador: "Dois, o quê?" – tento fazer com que o aluno perceba que está faltando algo em sua resposta.

A: "Como assim?"

Pesquisador: "Dois positivo ou dois negativo?"

A: "Ah, positivo. Não, não, negativo".

Os alunos tendem a considerar que a comutatividade da adição e a comutatividade da multiplicação também valem para a subtração e a divisão. Expressões como 4 – 2 são interpretadas da mesma forma que 2 – 4 por muitos alunos, da mesma forma que 36 ÷ 6 = 6 ÷ 36, por exemplo. Muitos dos equívocos cometidos pelos alunos no projeto foram do tipo "2 – 4 = 2", ou seja, atribuem a 2 – 4 o mesmo resultado que 4 – 2, sem observar a ordem e/ou o sinal da operação. A figura 5, a seguir, ilustra alguns destes equívocos.

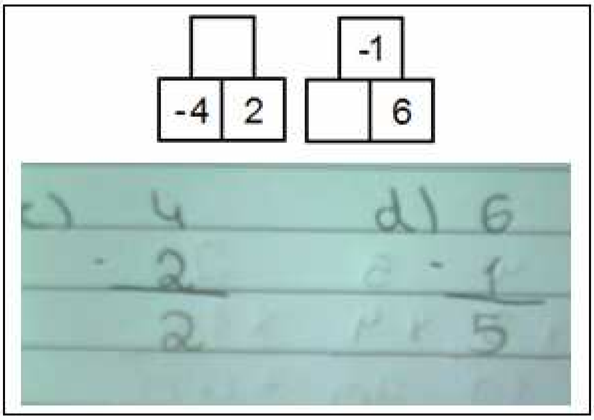


Figura 5: Pirâmides e resoluções de um aluno.

Na primeira pirâmide (figura 5) a soma – 4 + 2 tem como resultado -2 e não 2 como calculado pelo(a) aluno(a). Na segunda pirâmide, a solução seria – 7, já que -7 + 6 = -1.

Na primeira pirâmide do segundo exercício (figura 6), grande parte dos alunos apresentou dificuldades com o surgimento da incógnita *a*, muitos deles tinham o mesmo pensamento:

A: "Como eu vou somar 6 com *a*?"

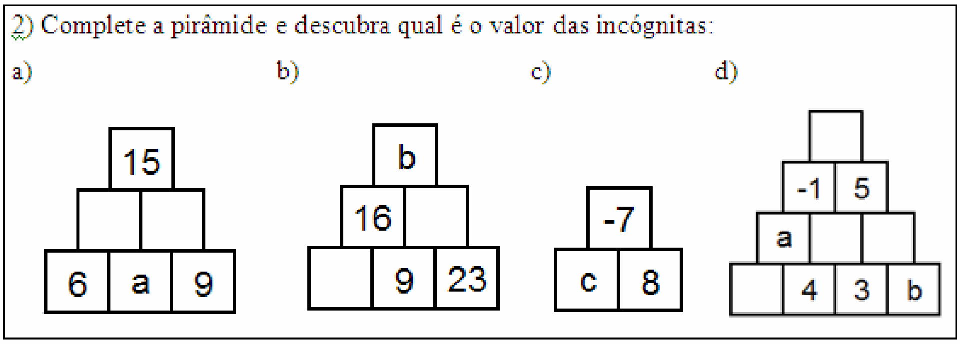


Figura 6: Pirâmides do segundo exercício.

Como a dúvida era comum a grande parte da turma, fui ao quadro negro dar uma dica, e acabei resolvendo a questão. Depois percebi que poderia só ter dado a dica.

Pesquisador: “Estas aulas são sobre equações, certo? É isso que vocês deveriam fazer. Como é que eu poderia representar esse quadrado aqui [em cima do 6 e do *a*]? Eu não sei quanto vale *a*, mas esse quadrado é a soma de 6 com *a*, então eu escrevo 6 + *a*. Como vai ficar esse quadrado aqui então [em cima do *a* e do 9]?”

A: “9 + *a*”.

Após essa abordagem, a maioria dos alunos tinha a mesma dúvida: o que fazer na sequência.

A: “E aí? Como eu acho o *a*”?

Essa era a pergunta que eu deveria fazer.

Pesquisador: “Tá, esse 6 + *a* mais esse 9 + *a* tem que dar o de cima, 15. Oh, de novo, esse 6 + *a* mais esse 9 + *a* dá o de cima, 15. Então eu escrevo: 6 + *a* + 9 + *a* = 15. E agora dá pra descobrir o valor de *a*, não? Posso somar esse 6 e o 9? Quanto é 6 + 9?”

A: “15”.

Pesquisador: “Tá, se aqui já tem 15, então quanto tem que ser esses dois *a*’s aqui?”

A: “Zero”.

Mais tarde, ao analisar as imagens registradas, verifiquei que um aluno cometeu um erro ao não igualar 6 + *a* + 9 + *a* a 15 (vide figura 7). Acredito que, como 6 mais 9 já resultaria em 15, o que faz a incógnita *a* valer zero, o estudante apenas igualou 2*a* a 15, encontrando o valor de 15/2 para a incógnita (ver figura abaixo). Entretanto, a maioria dos alunos escreveu corretamente a equação.

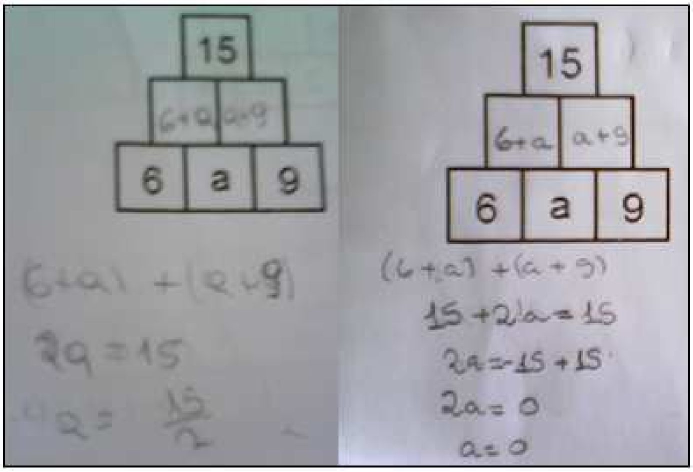


Figura 7: Resoluções de dois alunos.

No terceiro exercício, o número correspondente ao quadrado de cima agora era dado pelo produto dos números dos quadrados imediatamente abaixo. A seguir, a figura 8 ilustra as pirâmides desse exercício:

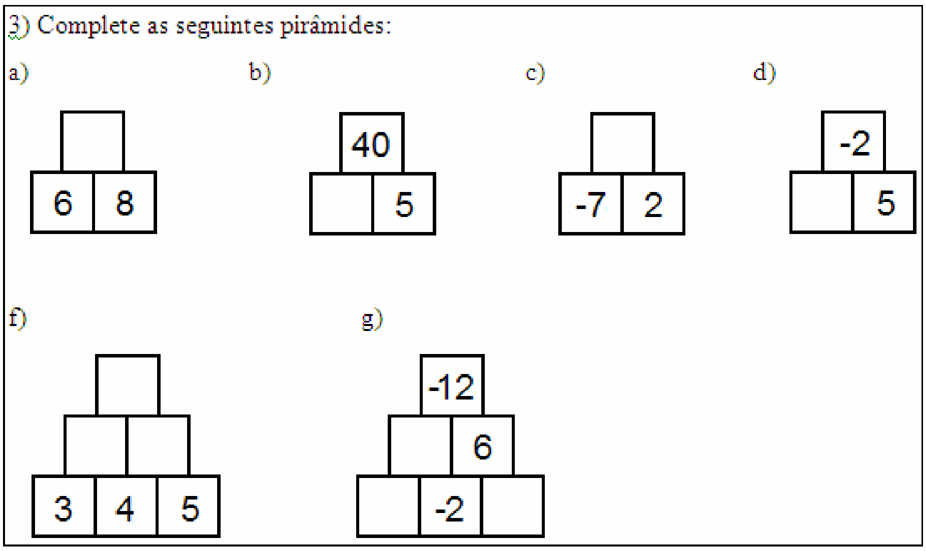


Figura 8: Pirâmides do terceiro exercício.

Surgiram outras dificuldades quando a resposta era dada por um número racional não inteiro. Coloquei estes exemplos de forma proposital, justamente para que os alunos efetuassem operações com frações, nos casos de equações que admitem como solução um número racional não inteiro.

D: “Tá, mas não tem número que multiplica por cinco e dá menos dois!” - referindo-se à pirâmide *d* do terceiro exercício”.

Pesquisador: “Tem sim. Por isso que a gente equaciona o problema. Oh, eu não sei que número é esse [quadrado vazio à esquerda do número 5], vou chamá-lo de *x*. Então, *x* vezes 5 é igual a – 2. Vamos escrever isso: $x \cdot 5 = -2$. E agora, quanto vale o *x*?”

D: “Tá, mas não vai dar”.

Este foi o momento em que percebi que o aluno esperava respostas apenas com números inteiros.

Pesquisador: “Não vai dar um número inteiro, tu quer dizer?”

D: “É. Vai dar fração? Pode fração?”

Pesquisador: “Porque não poderia?”

D: “Achei que não podia”.

Alguns alunos acreditavam que os exercícios envolviam respostas apenas com números naturais, ou seja, eles entendiam que a resposta não poderia ser um número racional não inteiro, caso contrário, a questão estaria errada.

Pesquisador: “Mas pode. Pode ser qualquer número. Nesse caso, vai ser quanto então?”

D: “Tá, vai passar dividindo e vai dar dois quintos”.

Pesquisador: “Dois quintos...” – novamente tentando fazer com que o aluno percebesse que estava faltando o sinal negativo em sua resposta.

D: “Menos dois quintos”.

Pesquisador: “Isso”.

Outra vez chamou-me atenção o sinal negativo ser “esquecido” quando os alunos realizavam as operações. Percebi que os alunos multiplicaram os números corretamente, mas utilizavam o módulo do resultado como resposta, sem observar o sinal.

Os alunos seguiram resolvendo os exercícios. Entretanto, quando a solução não era trivial (quando envolvia incógnitas, números negativos e frações), a dificuldade de representar a solução do problema por uma equação persistia. No entanto, à medida que iam avançando nos exercícios, eu os auxiliava e observava que grande parte dos alunos utilizava a escrita algébrica das equações para resolver os exercícios corretamente.

No quarto exercício, o número correspondente ao quadrado de cima continuou sendo calculado pelo produto dos números dos quadrados imediatamente abaixo:

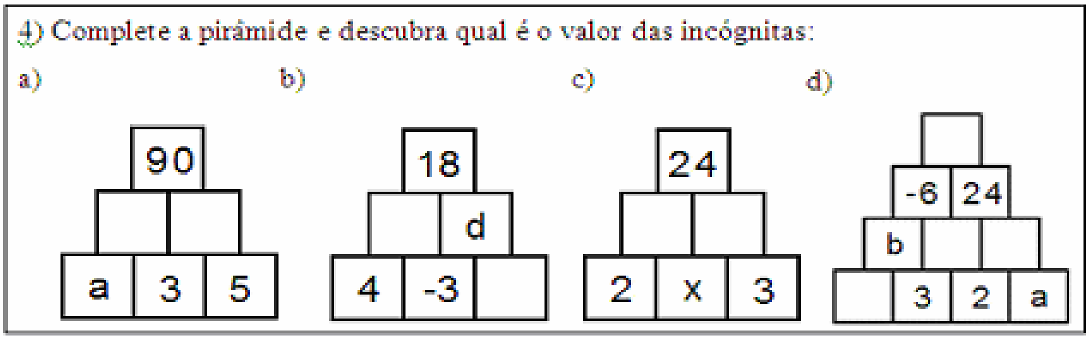


Figura 9: Pirâmides do quarto exercício.

A maioria dos alunos realizou esse exercício corretamente.

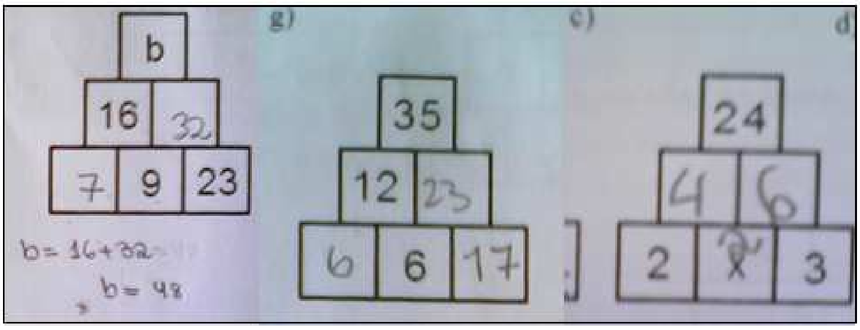


Figura 10: Resoluções de alguns alunos.

No último exercício, dividi a turma em cinco grupos de 4 a 6 alunos. Os estudantes deveriam criar pirâmides como as dos exercícios anteriores, e após, cada grupo resolveria os exercícios criados pelos outros grupos. O objetivo com este exercício era o de que os alunos discutissem entre si e construíssem pirâmides o mais complexas que pudessem, para dificultar a resolução dos outros grupos. Esta parte da aula superou minhas expectativas. Houve um visível aumento no interesse dos alunos, eles discutiam e pediam ajuda para dificultar os exercícios.

D: “Não assim, está muito fácil! Tem que colocar mais letras aí” – referindo-se a uma pirâmide com números e sem incógnitas.

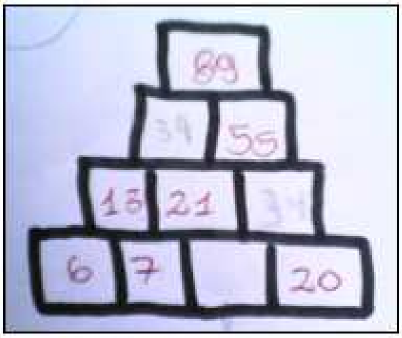


Figura 11: Pirâmide construída pelo grupo.

Pesquisador: “Deixa eu ver, por que tu acha que está fácil?”

D: “Ah, porque é só somar ali que acha o de cima, e acha os outros. Tem que colocar umas letras aí! Oh, se tirar esse daqui, e colocar um *x*, acho que fica mais difícil” – o aluno apaga o número 7 e coloca um *x* no lugar.

Pesquisador: “Tá, mas não continua sendo só somar e achar os outros números?”

D: “Não, agora tem um *x*”.

Pesquisador: “Estou vendo, mas para mim continua sendo só somar e achar os outros números”.

D: “Porque o senhor sabe sor, eles (os colegas) não sabem”.

Pesquisador: “Ah, eu acho que eles vão saber sim”.

D: “Ah, o que eu vou fazer então?”

Pesquisador: “Discute com teu grupo aí, se vocês não conseguirem dificultar, eu dou uma dica depois”.

Foi interessante observar que alguns alunos entendem que, numa sentença como $3 + 2 = 5$, a inserção de uma incógnita *x*, correspondendo ao número 3, por exemplo, ($x + 2 = 5$) pode dificultar a resolução do exercício.

4.2 Pirâmide dos Números (aplicada na segunda turma em 2012/2)

Os equívocos dos alunos desta turma foram semelhantes aos da primeira. O que os diferenciou da primeira turma foi o fato de que muitos alunos deixaram de observar, ao calcular as soluções dos exercícios, a bidirecionalidade do sinal de igualdade, como na figura abaixo.

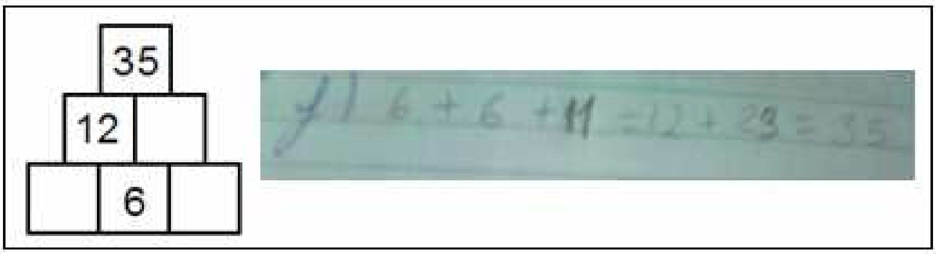


Figura 12: Resolução de um aluno.

Ao calcular as soluções da pirâmide '*g*' do primeiro exercício, em que os alunos deveriam descobrir, por partes, os valores para completar as pirâmides (6, 23 e 17), alguns deles o fizeram corretamente, entretanto não perceberam que ao escrever 12 como 6 + 6 e 23 como 6 + 17, utilizando o mesmo 6 anterior, estavam escrevendo um sentença falsa - (6 + 6 +17 = 12 + 23 = 35), pois 6 + 6 + 17 é diferente de 12 + 23, que é igual a 35.

> [...] torna-se necessário deixar bem claro para as crianças que "2 + 3" não representa apenas uma *instrução*, somar 2 com 3, mas também o resultado da adição desses números. [...] Analogamente, é preciso acentuar o valor bidirecional do símbolo de igualdade, tanto se exigindo a leitura adequada do símbolo, como proporcionando aos alunos experiências com expressões da forma 5 = 3 + 2 (BOOTH, 2003, p 28).

Desta forma, podemos dizer que há a necessidade de realizarmos abordagens quanto às expressões do tipo $a + b = b + a$, ou $ab = ba$, e também $a - b \neq b - a$, quando $a \neq b$, para que equívocos como esses não se repitam.

4.3 Sentenças sem sinais (aplicada na primeira turma em 2012/1)

A segunda atividade envolveu equações primeiramente escritas sem os sinais das operações entre os números e, após, sem o sinal de igualdade. Os alunos teriam que descobrir qual sinal colocar entre os números e onde colocar o sinal de igualdade, de modo que as expressões se tornassem verdadeiras.

O objetivo desta atividade foi o de mostrar aos alunos que o sinal da igualdade pode ser colocado em mais de uma posição na sentença (não apenas no meio da equação, ou apenas antes do último número na sentença), e, assim, que expressões como 15 – 9 = 6 e 15 = 9 + 6 são equivalentes. A partir de exemplos como estes, temos oportunidade para introduzir a noção de que as três frases $a + b = c$, $b = c - a$, e $a = c - b$ são, “num certo sentido, a mesma coisa, que cada uma implica nas outras duas”, como afirma Lins (1994, p. 30). Dessa forma, esta atividade é uma tentativa de levar o aluno a perceber a equivalência entre as expressões expostas acima.

Iniciei a atividade comentando exemplos de sentenças falsas como, por exemplo, 2 = 5, e sentenças como 7.8 – 8 = 6.7 + 6, que é uma sentença verdadeira. Assim, o primeiro exercício consistiu em verificar quais sentenças eram verdadeiras e quais eram falsas.

1) Diga se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Explique.

a) $4 - 5 = 1$ b) $3 \cdot 5 + 16 = 32$ c) $5^2 - 1 = 6 \cdot 4$

d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ e) $(5 + 3) \cdot 2 = 16$ f) $45 = \frac{92}{2} - 2$

g) $29 = 2 \cdot \frac{(7+21)}{2}$ h) $3 \cdot (11 + 3) = 2(3 \cdot 7)$

i) $-7 + (5 - 1) = 3 - (2 - 1)$ j) $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

Figura 13: Primeiro exercício da segunda atividade.

Muitos alunos verificaram a veracidade ou falsidade das sentenças corretamente. O que foi interessante notar foram as justificativas dos alunos. Muitos dos estudantes apenas colocaram “*v*” ou “*f*” abaixo ou ao lado dos exercícios sem explicar o porquê de suas afirmações. Outros realizaram cálculos até conseguirem concluir se eram verdadeiras ou falsas as sentenças.

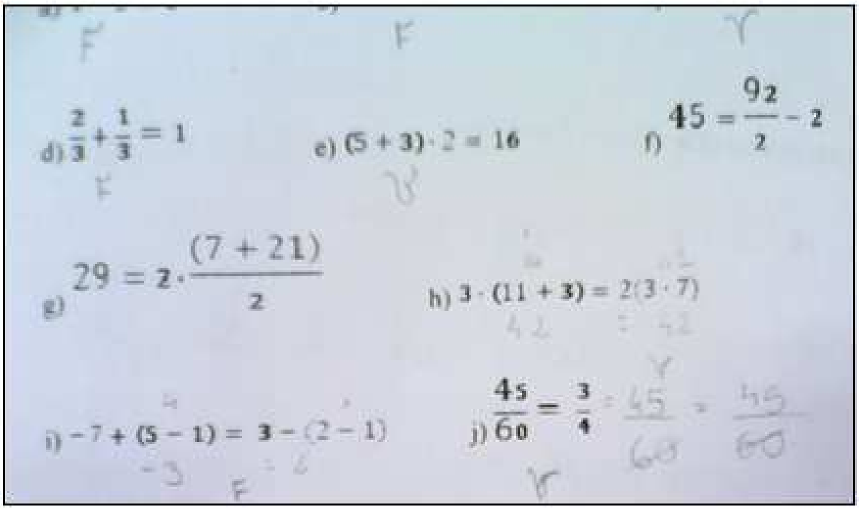


Figura 14: Resolução de um aluno.

No exemplo *h* da figura 14, o aluno calculou 11 + 3 e colocou a resposta (14) acima desses números, e após, multiplicou o resultado por 3 (3x14) escrevendo 42 embaixo da sentença no lado esquerdo da igualdade. Da mesma forma, escreveu 21 acima do produto 3x7 e o resultado do produto 2x21 (42) abaixo da equação no lado direito da igualdade, verificando que a sentença era verdadeira, uma vez que, 42 = 42.

Achei interessante ver as soluções dessa forma (mesmo algumas estando erradas), pois foram os meios que os alunos encontraram para resolver os exercícios, e também pude ver como eles estavam pensando, de que forma estavam interpretando essas questões. Lins (1994) afirma que muitos professores consideram errados os exercícios sem ou com parcial justificava, propondo que isso seja reconsiderado:

> [...] as justificações não são importantes só para saber se o aluno “sabe” de fato o que está dizendo. Este tipo de uso para as justificações não é dos mais interessantes; é que muitos professores e professoras fazem quando dão errado em questões de prova para o aluno que resolve um problema sem “escrever a equação”. Há algo de muito mais importante nas justificações. É que através delas, e apenas através delas, podemos saber por que o aluno acredita no que acredita, isto é, como é que ele está pensando, como chegou a esta conclusão, qual a lógica das operações que está efetuando (LINS, 1994, p. 29).

Não é minha intenção aqui discutir se os professores que não consideram as respostas com justificativas diferentes das que esperam estão avaliando corretamente os alunos, mas sim que a partir delas podemos verificar como os alunos estão pensando e elaborar atividades que auxiliem os alunos a justificar corretamente suas respostas.

O segundo exercício consistia em verificar que valor as incógnitas deveriam assumir para que as sentenças fossem verdadeiras, utilizando assim outra ferramenta para a solução de equações.

2) Quais os valores das incógnitas que tornam as seguintes sentenças verdadeiras:

a) $2 \cdot x + 3 = 7$ b) $a + 11 = 7$ c) $64 = 4 \cdot t + 8$

d) $22 = 5 - 3 \cdot z$ e) $4 = c + \frac{1}{2}$ f) $7 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot x$

g) $\frac{v}{7} = \frac{20}{35}$ h) $\frac{3 \cdot b}{4} = 33$

Figura 15: Segundo exercício da segunda atividade.

Grande parte dos alunos conhecia os métodos de resolução de equações de primeiro grau e resolveu corretamente o exercício proposto. Outros o resolveram como no exercício anterior, sem justificativas, apenas com a resposta.

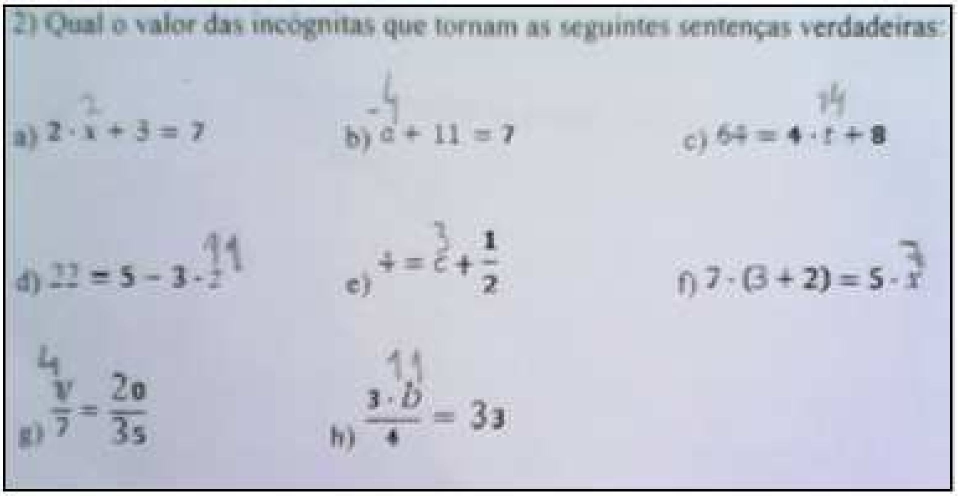


Figura 16: Resolução de um aluno.

Como podemos observar, na sentença do exemplo *d*, o aluno subtraiu 3 de 5 para encontrar o valor 11 para a incógnita *z* (22 = 2.*z*). Podemos concluir que o aluno ainda não tem a concepção de que não poderia realizar a subtração 5 – 3, e que não considerou a multiplicação 3.*z*. E por alguma razão não considerou o número 2 como denominador no exemplo *e*, e considerou a sentença como sendo $4 = c + 1$, ao expor $c = 3$ como resposta (figura 16).

Para o terceiro exercício, um dos pontos que julgo mais importantes nesta atividade, foi pedido aos alunos que verificassem qual sinal das operações aritméticas básicas deveria ser inserido na sentença para que ela fosse verdadeira.

3) Que operação matemática (adição, subtração, multiplicação, divisão) devemos utilizar para que as seguintes sentenças sejam verdadeiras:

a) $7 \quad 4 = 11$ b) $15 = 9 \quad 6$ c) $2 \quad 3 = 6$

d) $20 = 4 \quad 5$ e) $6 = 18 \quad 3$ f) $\frac{1}{2} \quad 1 = \frac{3}{2}$

g) $\frac{7}{8} = \frac{5}{4} \quad \frac{3}{8}$ h) $3^2 \quad 4^2 = 5^2$

Figura 17: Terceiro exercício da segunda atividade.

Como havia apenas quatro possibilidades para as respostas (adição, subtração, multiplicação e divisão), os alunos puderam resolver os exercícios por tentativa e erro. Os alunos responderam corretamente, com algumas exceções, como mostra o item *g* da figura 18, no meu entendimento, devido às frações.

a) $7 + 4 = 11$ b) $15 = 9 + 6$ c) $2 \cdot 3 = 6$

d) $20 = 4 \cdot 5$ e) $6 = 18 \div 3$ f) $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

g) $\frac{7}{8} = \frac{5}{4} + \frac{3}{8}$ h) $3^2 + 4^2 = 5^2$

Figura 18: Resolução de um aluno.

No exemplo *g*, o aluno entendeu que a solução seria o sinal de adição, quando deveria observar que 5/4 é equivalente a 10/8 e que, portanto, uma solução é um sinal de subtração (7/8 = 5/4 – 3/8).

O quarto exercício foi o foco desta atividade. A idéia era a mesma do exercício anterior, entretanto, agora os alunos deveriam escolher um “local” entre os números para inserir o sinal de igualdade. Esta escolha implicaria na determinação dos sinais das operações, resultando em mais de uma possibilidade de resposta e uma grande oportunidade para os alunos verificarem a equivalência entre essas respostas. Por exemplo, com os números 2,2 e 4, nessa ordem, podemos ter:

1) $2 + 2 = 4$;

2) $2 = -2 + 4$;

3) $2.2 = 4$;

Assim, este exercício foi mais uma ferramenta para que os alunos verificassem o sentido bilateral do sinal de igualdade e a equivalência entre as respostas. Mais tarde percebi que para perceberem estas equivalências teria sido interessante solicitar a apresentação de mais de uma sentença verdadeira para cada caso.

4) Escreva uma sentença verdadeira para cada um dos casos:

a) 3 4 7 b) 15 9 6 c) 6 4 24

d) 11 121 11 e) 90 10 9 f) $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{19}{24}$

g) (7 4) 8 6 4 h) (5 7) 4 3 (2 5)

Figura 19: Quarto exercício da segunda atividade.

Enquanto os alunos resolviam este exercício, verifiquei com alguns que cometi dois erros ao elaborá-lo, de modo que os exemplos *f* e *h* (figura 19) não possuem solução.

Os exemplos, *a*, *b*, *c* e *e*, foram resolvidos corretamente pela grande maioria dos alunos, todavia cabe um comentário quanto ao exemplo *d*. Para a solução, os alunos perceberam que 121 dividido por 11 é igual a 11. Porém, muitos deles responderam o exercício sem observar a ordem das operações ao escreverem $11 \div 121 = 11$, ao invés de $11 = 121 \div 11$, como mostra a figura 20.

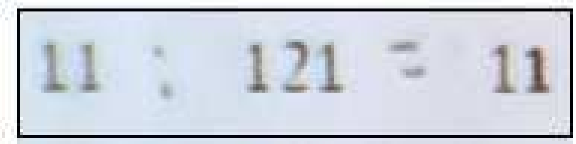


Figura 20: Resolução de um aluno.

Resoluções como essas se repetiram no decorrer destas atividades. No caso acima, tentei levar os alunos a perceberem essa diferença perguntando a eles se 11 ÷ 121 era igual a 11. O desfecho de questões como esta poderá ser verificado nos diálogos mais adiante. Para a última tarefa, dividi novamente a turma em grupos para que eles criassem seus próprios problemas, já que na atividade anterior isso teve bons resultados, e novamente os alunos trabalharam na criação de exercícios com grande interesse. Alguns criaram exemplos que considerei dificílimos, que eu só consegui resolver olhando a solução do grupo que a criou. Seguem alguns exemplos.

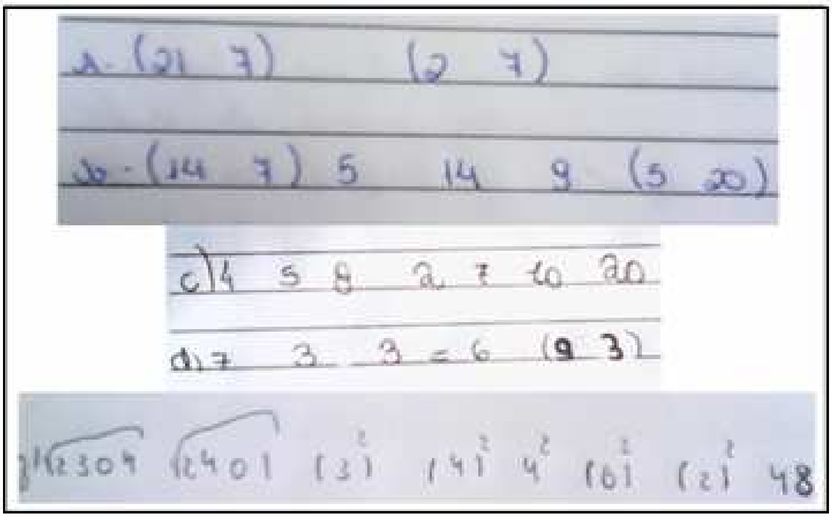


Figura 21: Criações dos alunos.

Para criarem cada sentença, os alunos formavam uma sequência de números completa com sinais e resultados conferidos, para em seguida retirar os sinais.

Outra ferramenta que esta atividade proporciona é a de que os próprios alunos podem verificar se seus cálculos estão coerentes com os números preestabelecidos.

Um grupo de alunas criou a seguinte sentença:

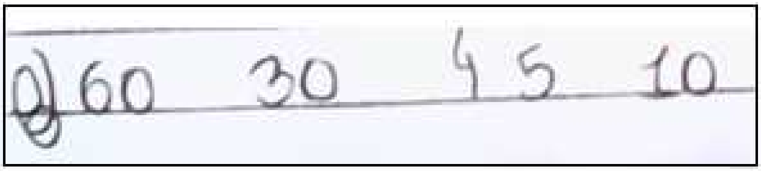


Figura 22: Criação de um dos grupos.

Um aluno me abordou para reclamar que não haveria solução para esta questão:

W: “Tentei todas as possibilidades, não deu nenhum desses quatro (as quatro operações). Depois eu coloquei “um igual” aqui (entre os números 30 e 45), “um igual” aqui (entre os números 45 e 10), nenhum deu dez” – referindo-se às operações com os números 60 30 e 45, que deveriam resultar em 10.

Pesquisador: “Pior cara... 60 + 30 dividido por 45 vai dar 2, se tu colocar “o igual” aqui...”

Pesquisador: “45 x 10 não dá..” – ficamos os dois a pensar.

W: “Mas não tem como achar 45 aqui” – realizando alguma operação na sentença.

Pesquisador: “Não tem. 450 também não”.

W: “Tô falando que não dá”.

Pesquisador: “30 45 e 10. Tá embaçado né”.

Depois de muitas tentativas, fui até o grupo que criou a sentença e descubro que o número que parece ser 45 não é 45, mas sim um 4 e um 5.

W: “Tá, não tem como fazer”.

Pesquisador: “Tem porque tem um sinal entre o 4 e o 5. Não era 45, era 4 e 5”.

W: “Ahh”.

Pesquisador: “É, elas roubaram” – o aluno se sentiu “enganado” pelas colegas, que escreveram os algarismos 4 e 5 próximos um do outro. Meu comentário nesse momento foi feito em tom de brincadeira e não teve o intuito de ser pejorativo ou de recriminar as alunas.

Interessante aqui é que o aluno manifestou certa indignação, mas o mais importante é que ele pensou sobre a atividade, esforçou-se para solucioná-la.

Outro aluno me pediu auxilio quanto ao seguinte problema:

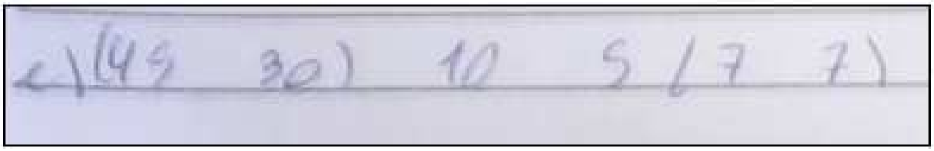


Figura 23: Criação de um dos grupos.

Pesquisador: “Vou te dar uma dica. Se fossem só esses quatro números aqui [45, 30, 10 e 5], como tu faria? Que sinal tu colocaria aqui [entre os números 45 e 30]?”

L: “Aqui?”

Pesquisador: “É”.

L: “Não sei, qual “sor”?”

Pesquisador: “[Risos]. Tá, mas qual que tem? Tem mais, menos, vezes e dividido”.

L: “Tá se fosse assim, eu botava o igual aqui [entre os números 30 e 10], ficava 15 [soma de 10 e 5], botava um menos aqui [entre os números 45 e 30] ficava 15”.

Pesquisador: “Isso. Tá e aí então, o que tu tem que fazer aqui pra acontecer isso? Ficar 15 = 15, o que tem que acontecer ali [os parênteses (7 7)]?”

L: “7 menos 7”.

Pesquisador: “Isso. E aqui no meio [entre os números 5 e 7] tem que ter um sinal de...?”

L: “De menos?”

Pesquisador: “Pode ser, pode ser. Só não pode ser multiplicação, porque senão multiplica por zero e some o cinco não é? Entendeu? Legal, não é?”.

L: “É”.

Mais tarde, ouvindo a gravação do diálogo, percebi que poderia ter deixado o aluno tirar suas próprias conclusões sem interrompê-lo como fiz.

Dois alunos tentavam encontrar a solução para o seguinte exemplo criado por um dos grupos.

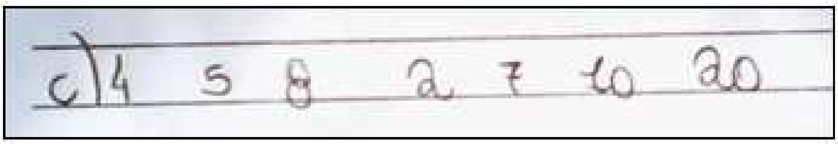


Figura 24: Criação de um dos grupos.

Um deles encontrou uma solução interessante: 4 + 5.8 – 2 ÷ 7 + 10 = 20. A aluna realizou a operação de adição com os números 4 e 5, e realizou a multiplicação do resultado obtido na operação anterior (9) pelo número 8, resultando em 72. Após, a aluna realizou a subtração do número 72 pelo 70, resultando em 70, e dividiu este resultado por 7, chegando ao número 10. Somando este número 10 ao outro 10 da questão, encontraria finalmente o número 20. O pensamento dela não foi equivocado, mas a escrita, pela falta dos parênteses, indicava outro resultado.

Pesquisador: "...tem outro jeito. Tá, mas olha só é que tu tá pensando em ir "pegando" o resultado e ir "indo" não é? Só que olha só, o 4 mais 5, a gente não faz antes do 8 vezes 5 não é? Multiplicação é antes da soma".

P: "Tá, bota um 9, tira o 4 e o 5".

Pesquisador: [risos] "Como assim? Tá, e o 2 dividido por 7?"

P: "Ahh é, do jeito que eu falei que tá certo".

Pesquisador: "Ah, [risos] tá tu pensou assim, mas tu podes escrever melhor..."

P: "Tá..."

Pesquisador: "Isso, vai de novo que tu consegue. Deixa eu só... como é que tu fez? Fez esse mais esse, deu? 9. Tá, então tu teria que ter colocado parênteses aqui (4 + 5).8. E aí tu queria multiplicar por 8? Isso. E aí daria 9 vezes 8, 72. Tá, isso aqui menos dois [(4 + 5).8 – 2]".

P: "Que aí vai dar 70, daí 70 dividido por 7, vai dar 10". – Assim, a questão resumir-se-ia a 10 10 20.

Pesquisador: "E 10 mais 10 é 20" – tento finalizar o problema pensando que a aluna também entenderia dessa forma, 10 + 10 = 20.

P: "Não. 10 menos 20, que vai dar 10 (10 = 10 – 20)".

Pesquisador: "10 menos 20 vai dar 10?"

P: "Aí dá menos".

Pesquisador: "Ah tá bom [risos]". Tá, mas olha só, poderia fazer assim ó: tá tu fez aqui 4 mais 5, 9, vezes 8, 72, menos 2, parênteses aqui, tá, agora isso aqui dividido por 7, mais 10 é igual a 20. Oh, somou 4 mais 5, multiplicou por 8, 72, menos o 2, 70. Esse 70 tu vai dividir por 7, vai dar 10, isso aqui tudo vai dar 10 mais 10 que é 20. Mas tem outro jeito de fazer, eu fiz de outro jeito: (((4 + 5).8 – 2) ÷ 7 + 10 = 20) [aqui tentei escrever com parênteses o pensamento da aluna para preservar a ordem das operações], não entendeu?"

P: “Não.”

Pesquisador: “Olha aqui ó, só tem que cuidar a ordem do que vocês fizeram. Ó, “botei” um parênteses ali, porque “tu quer que some” primeiro que a multiplicação (4 + 5), por isso que eu botei os parênteses, que é 4 mais 5 depois vezes 8, e aí dá os 72, tu quer diminuir 2, e aí depois tu quer pegar tudo isso e dividir por 7, daí botei mais um parêntese aqui (antes do 4 e depois do 2), 70 dividido por 7, e aí tudo isso aqui (10) mais 10 é 20. [(4+5).8-2]÷7+10 = 20”

P: “10 mais 10 aonde? Ah, tá [risos]”.

Pesquisador: “Tudo isso aqui é dez, né?”

P: “Não, é 70!”

Pesquisador: “Dividido por 7 é 10”.

P: “Agora entendi”.

Pesquisador: “Mas dá pra fazer de outro jeito, sem usar esses parênteses. Ah, eu tenho que dizer?”

P: “Claro, tu é o professor!”

Pesquisador: “Que folgada [risos]. Tá, mas olha aí, já tô te dando uma dica, dá pra fazer só com multiplicação. Vai lá”.

P: “Para aí. Não, faz aí!”

Pesquisador: “Não, te dei uma dica”.

P: “Não, vai lá!”

Pesquisador: “Te dei uma dica. Ó, só multiplicação, dá pra fazer”.

P: “Tá, e o igual?”

Pesquisador: “Sim. Ah, não tem só “vezes” tem um sinal de mais também”.

P: Tá, esse vezes esse, vezes esse [4.5.8], 160...

Pesquisador: “Tá, tu achou 160. Quanto é esse vezes esse, vezes esse [2.7.10]”?

P: “2 vezes... 140”.

Pesquisador: “Mais 20”?

P: “Ah”, bem mais fácil.

Podemos observar, então que o uso de parênteses no ensino de equações deve ser levado seriamente em consideração.

> Um dos aspectos em que as idéias aritméticas dos alunos podem influir em seu desempenho é o uso dos parênteses. As crianças geralmente não usam parênteses, porque acham que a sequência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados. (BOOTH, 2003, p. 33).

A solução ficou então dessa forma: 4.5.8 = 2.7.10 + 20. É interessante observar, como dito antes, que a aluna escreveu uma solução 4 + 5.8 – 2 ÷ 7 + 10 = 20, que estaria correta escrita da forma [(4 + 5).8 – 2] ÷ 7 + 10 = 20, ou seja, a aluna raciocinou corretamente, entretanto, a linguagem simbólica da Matemática exige uma escrita mais cuidadosa para que fique bem definida a ordem das operações.

4.4 Balança das equações (aplicada na primeira turma em 2012/1)

Iniciei a atividade explicando que as equações poderiam ser pensadas como uma balança de dois pratos, em que os dois pratos devem conter o mesmo peso para que a balança se estabilize em linha horizontal, como na figura 25.

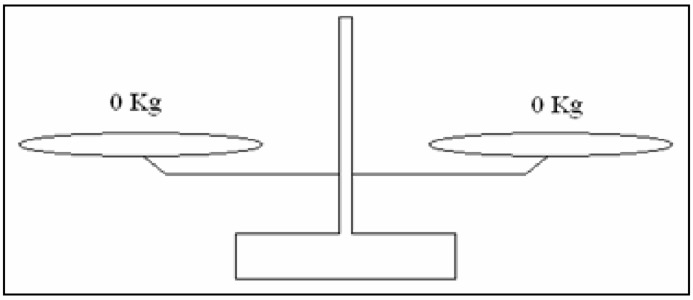


Figura 25: Representação de uma balança de dois pratos em equilíbrio.

No caso da figura 25, a balança está em equilíbrio, pois contém o mesmo peso[11] em ambos os pratos (zero). Expus, então, que poderíamos representar essa situação como uma igualdade 0 = 0. Mais tarde pensei que poderia ter perguntado isto, ao invés de mostrar.

Em seguida, questionei os alunos sobre o que eles achariam que iria acontecer se adicionássemos algum peso em apenas um dos pratos. Os alunos responderam algo como “vai descer um prato, e o outro vai subir”, e dessa forma eles mostraram compreender que a balança não estaria mais equilibrada.

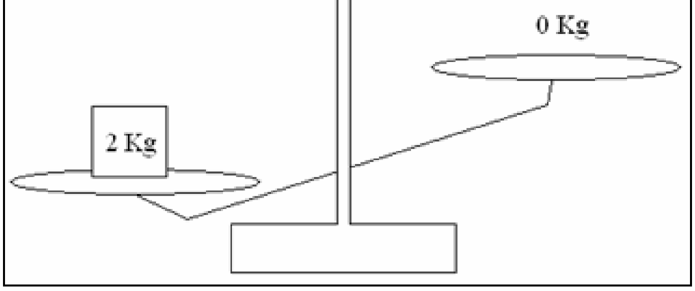


Figura 26: Balança de dois pratos em desequilíbrio.

[11] Foi utilizado o termo “peso” como unidade de medida na balança, uma vez que este termo é comum no dia a dia e os alunos ainda não conheciam a unidade medida correta que é a *massa*.

Chegamos à situação em que 2 = 0 é uma sentença falsa e, portanto, ocorre um desequilíbrio na balança. Então questionei os alunos sobre o que deveríamos fazer para voltar à situação de equilíbrio anterior, e eles responderam corretamente que deveriam ser adicionados 2 Kg no prato do lado direito. Comentei que as equações seguiam a mesma lógica (observadas as limitações que este tipo de exercício envolve, comentadas mais adiante), ou seja, não podemos alterar apenas um membro da igualdade, senão poderíamos "transformar" uma sentença verdadeira em uma sentença falsa.

Acreditei que esta atividade poderia, então, auxiliar os alunos a compreenderem as equivalências $a + b = c$, $a = c - b$, pois os alunos podem pensar na subtração de b em ambos os membros da igualdade como uma retirada de pesos iguais em ambos os pratos, ao invés de decorar regras para a solução de equações.

Visto isto, o primeiro exercício teve o intuito de encontrar o valor da incógnita x para que as balanças permanecessem em equilíbrio (ver figura 27).

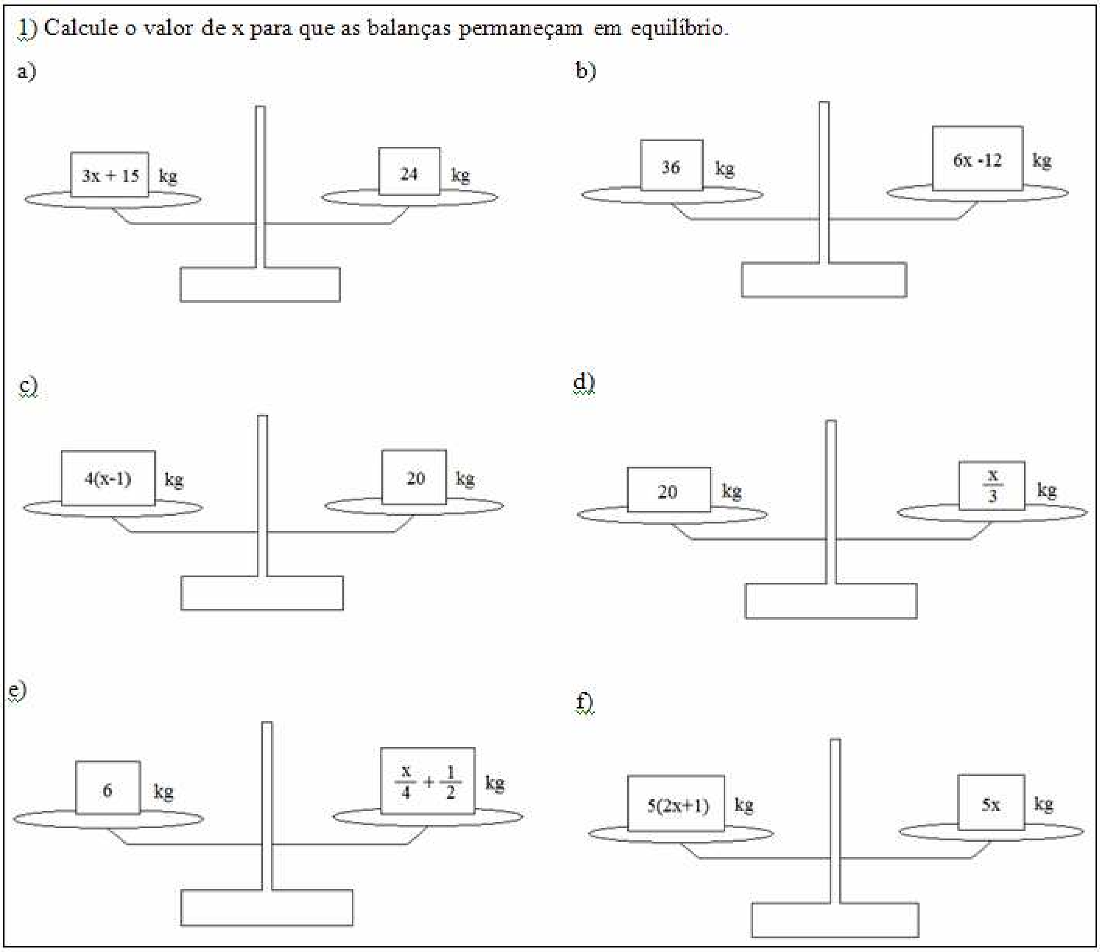


Figura 27: Primeiro exercício da terceira atividade.

Em geral, os exemplos *a*, *b*, *c*, e *d*, foram respondidos corretamente. Os alunos escreveram as equações correspondentes e encontraram o valor das incógnitas para que a balança continuasse em equilíbrio. Vejamos, na figura 28, algumas soluções dos alunos.

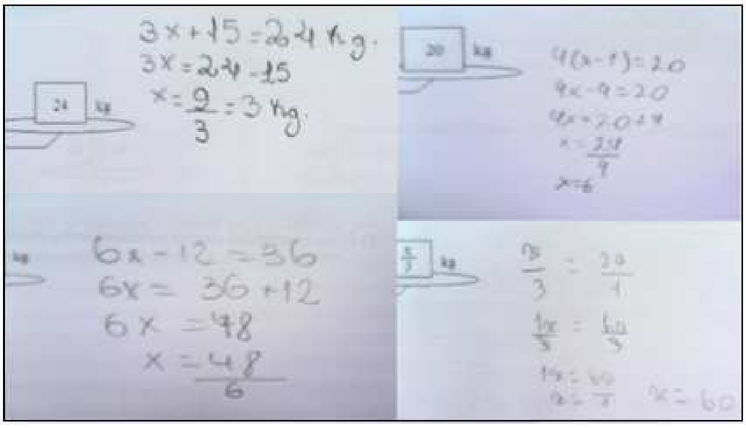


Figura 28: Soluções de alguns alunos.

Cabe salientar que estas atividades envolvendo balanças não simulam expressões do tipo 2x kg + 3 kg = 1 kg, uma vez que não faz sentido, na balança, retirarmos 3 kg no prato do lado direito, pois teríamos – 2 kg no prato do lado esquerdo, ou seja, teríamos um peso negativo em um dos pratos da balança. Dessa forma, procurei elaborar exercícios com soluções positivas, para que as limitações da balança não confundissem os estudantes. Entretanto, no item *f* (em que aparece 5(2x + 1) no prato do lado direito e 5x no prato do lado direito), cometi um equivoco ao digitar 5(2x + 1) ao invés de 5(2x – 1). Esta expressão admite como solução x = – 1 e ao substituir – 1 em uma das expressões nos pratos da balança, teríamos um peso negativo, no caso – 5 kg. Este equívoco não gerou confusão entre os alunos, visto que a maioria deles o resolveu corretamente, entretanto não corresponde a uma situação que pode ocorrer com a balança.

Ao passar por uma mesa, percebi que um aluno escreveu o número 9 ao lado do primeiro exemplo ((3x + 15) kg no prato do lado esquerdo e 24 kg no prato do lado direito). Entendi que essa era a resposta e então o questionei:

Pesquisador: "Como tu sabes que é 9?"

A: "Porque 24 menos 15 dá nove".

Percebi que ele ainda não havia terminado o exercício.

Pesquisador: "Ahh. E como tu escreve a equação"?

A: "Pode ser aqui "sor"?" – o aluno aponta um canto da folha.

Pesquisador: “Pode”.

A: “3x + 15 = 24”

Pesquisador: “Isso”.

O aluno encontrou o número 3 como resposta corretamente resolvendo a equação $3.x + 15 = 24$, porém entendeu que deveria utilizar essa resposta para verificar o equilíbrio da balança:

A: “Tá e agora o que eu faço com o 3, pra isso ficar igual aqui? – ele aponta para a balança. Neste momento um colega ao lado se envolve.

L: “Nada”. – outro aluno comenta.

A: “Não, tem que colocar ele em algum lugar!”

Pesquisador: “Tá, mas tu já “achou” a resposta. Tu achou que o x tem que ser 3”.

A: “Sim”.

Pesquisador: “É que se tu substituir ali vai dar 3x3 que é igual a 9, mais o 15 vai dar o 24”.

A: “Ahh”.

Pesquisador: “Ahh [risos]. Quer dizer que quando $x = 3$ a balança tá em equilíbrio”.

No exemplo *c*, em que aparecem $4(x - 1)$ kg no prato do lado esquerdo e 20 kg no prato do lado direito, um aluno não observou que o número 4 multiplicava a expressão $(x - 1)$ e que assim não poderia escrever que a equação em questão era equivalente a $x = 20 + 1 - 4$ (figura 29). Encontrou 17, ao invés de 6, como resposta.

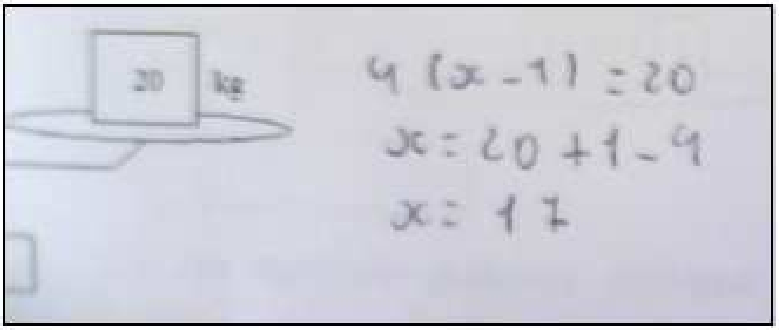


Figura 29: Resolução de um aluno.

Novamente surgiram equívocos quanto ao uso dos parênteses. Booth (2003) afirma que equívocos desse tipo são “fruto menos de concepções algébricas erradas do que de uma visão incorreta da representação aritmética” (Ibidem, p. 27).

Outra aluna me perguntou se a resposta desta mesma questão era zero.

J: “Deu zero né”.

Pesquisador: “Zero por quê?”

J: “um x menos um”. – por esta fala acredito que a aluna entendeu que $x – 1$ é igual a 0, uma vez que o número 1 multiplica x.

Pesquisador: “Mas é que... o x é igual a 1?” – No momento da conversa, eu não havia entendido corretamente a dúvida da aluna.

J: “Quando não tem nada...” – ou seja, como não apareceu uma constante multiplicando x, a aluna realizou a operação $1x – 1$ como sendo $x(1 – 1)$.

Pesquisador: “Tá, mas $x – 1$ é igual a 0? Quanto é que é o valor de x?”

J: “Eu não sei ainda!”.

Pesquisador: “Tá, não, é por isso que tu tens que descobrir o valor de x”.

J: “Tá, e como é que eu vou descobrir?”

Pesquisador: “Eu que te pergunto, como é que tu faz, quando é “multiplicado” aqui quatro vezes $x – 1$?”

J: “Eu passo... quatro... dois... esse daqui vai dar $4x$... eu passo 4...”.

Pesquisador: “Isso”. – A aluna encontra a equação equivalente $4x – 4 = 20$.

J: “Ahhhh, agora tá igual às outras”.

Pesquisador: “Ahhhh [risos]. É”.

J: “Aí eu coloco $4x$... ah, vai ficar + 4, agora que eu fui entender!”.

Pesquisador: Ahh [risos].

Após ouvir a gravação achei interessante essa conversa uma vez que eu não havia observado equívocos do tipo $1x – 1 = x(1 – 1)$.

O exemplo *e* (6 kg no prato do lado esquerdo e ($x/4 + 1/2$) kg no prato do lado direito) foi o que gerou mais equívocos por parte dos alunos, em virtude da necessidade de operar com frações. Atendi muitos estudantes sobre essa questão. Um deles encontrou o número 5 como resposta.

Pesquisador: “Tu achou 5? Quer dizer que se eu colocar o 5 ali vai dar certo? $5/4 + 1/2 = 6$?”

L: “Acho que sim!”

Pesquisador: “Testa aí pra ver!” [risos]

L: “Não vai ficar” [risos].

Pesquisador: “É [risos]. É que tá mal aqui. Tu querias fazer o MMC[12] disso aqui não é?” – o MMC entre os números 4 e 2 na soma 5/4 + 1/2. Como 4 é múltiplo de 2 o MMC entre os números 4 e 2 é o próprio 4.

L: “Sim”.

Pesquisador: “Tá, é 4. Mas aí 4/2 é igual a 2, não é?” – o aluno calculou corretamente o MMC entre os números 4 e 2, mas para realizar a soma das frações o estudante deveria dividir o MMC encontrado pelo denominador de cada fração e, após, multiplicar o resultado pelo numerador da respectiva fração. Por exemplo, na fração 1/2, dividimos o MMC 4 pelo denominador 2, encontrando 2 como resultado (4/2 = 2), e então o multiplicamos pelo numerador 1, encontrando 2 como resultado (2x1 = 2).

L: “Ah, eu “botei” 4”.

Pesquisador: “Tu “botou” 1. É que o MMC. não é bem assim. 1/2 é equivalente a 2/4, não a 1/4. Tu concordas comigo que isso (1/2) é diferente disso (1/4)? Tem que manter a mesma fração. Lembra de simplificação de fração?” – tentei mostrar o MMC com equivalência de frações.

L: “Sim”.

Pesquisador: “Dividir em cima e embaixo pelo mesmo número e tal?”

L: “Sim, sim”.

Pesquisador: “Pois é, o MMC é como se fosse o contrário. Tem que achar uma fração equivalente a essa aqui com o número embaixo (denominador) igual. O que é que eu tenho que fazer aqui (aponto o número 2 da fração 1/2) pra ficar 4?”

L: “Multiplicar por dois?”

Pesquisador: “Isso. Aí pra manter a mesma fração, tem que multiplicar em cima também por dois, ó, é bem o contrário de simplificar, não é?”

L: “É”.

Pesquisador: “Entendeu?”

L: “Mais ou menos”.

Pesquisador: “Ó, vamos ver aqui. O M.M.C. de 4 e 2 é ...4”.

L: “É”.

---

[12] Para realizar a adição de frações podemos utilizar o mínimo múltiplo comum (MMC) entre os denominadores de modo a obter frações equivalentes de mesmo denominador.

Pesquisador: “Dividido por quatro é... 1”.

L: “Tá, mas eu estava copiando ainda, daí passa trocando...” – o aluno queria realizar a subtração 6/4 – 1/4.

Pesquisador: “Tá, mas é que isso aqui tu não pode fazer, porque isso é diferente disso (1/2 é diferente de 1/4)” – e ao fazer isso o aluno está alterando a sentença.

L: “Daí faz direto?”

Pesquisador: “o M.M.C é com esses dois aqui (x/4 e 1/2), não dos três juntos. O que tu podia fazer era multiplicar a equação toda por quatro, isso tu podes fazer, tipo, olha só uma igualdade 2 = 2, a gente viu que se tu multiplicar um lado por alguma coisa, tu tem que multiplicar aqui também (aponto o outro lado da igualdade), certo?”

L: “Ahh, é”.

Agora o aluno chega à equação equivalente $x + 2 = 24$, encontrando 22 como resposta. Nesse ponto, podemos observar que um dos fatores que contribui para equívocos no conteúdo de equações, além da álgebra, é a aritmética das operações com frações.

Podemos observar então que parte dos equívocos decorre de uma má compreensão da aritmética em exercícios envolvendo operações com frações.

No exemplo *f* (em que aparecem 5(2.x – 1) kg no prato do lado esquerdo e 5.x kg no prato do lado direito), um aluno não entendeu que a incógnita x, nesse caso, tem apenas um valor, como podemos observar na figura 30.

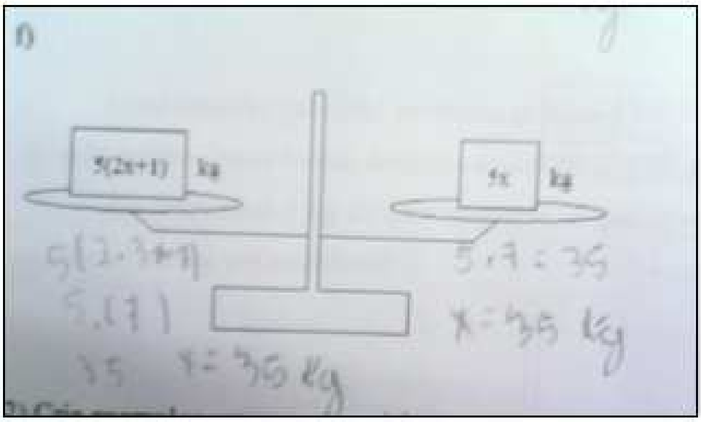


Figura 30: Resolução de um aluno.

O aluno atribuiu 7 ao valor da incógnita x no prato lado direito da balança e observou que 5.7 = 35. Em paralelo, verificou que 5(2.3 + 1) também resulta em 35. Interessante aqui que o aluno resolveu o exercício como uma função, neste caso 5(2.x + 1) = 5.y, em que o valor de uma variável dependeria da escolha de um valor para a outra variável. A escolha do número 7 implicou que x valesse 3, e vice-versa.

O último exercício, novamente, consistiu na criação de problemas pelos próprios alunos. Como não tínhamos muitas aulas mais antes das provas, não tive muito tempo para aplicar essa atividade. Dessa forma, o exercício foi realizado individualmente. Pedi a cada um dos estudantes que criasse apenas um exemplo e ele próprio escrevesse a solução ao seu lado. Acreditei que, com pouco tempo, essa seria uma boa alternativa de observar o que os alunos entenderam e, ao analisar essas criações, verifiquei que a maioria delas, em geral, foi do tipo dos exemplos: $6 = x/2$, $80 = 3x + 20$.

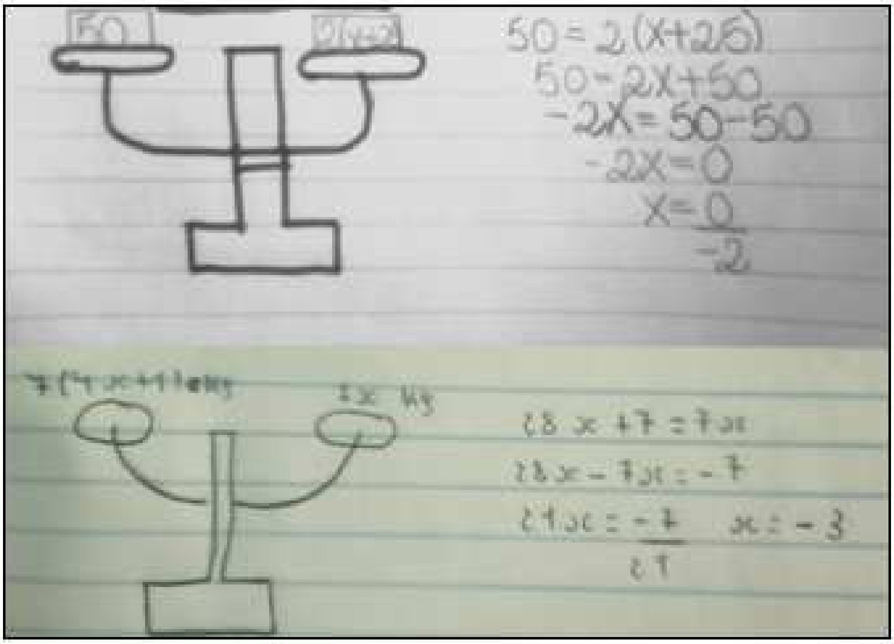


Figura 31: Criações dos alunos.

Verifiquei então que, nesta atividade, a maioria dos equívocos dos alunos foram devidos à aritmética e não à álgebra. Entretanto, como podemos observar na segunda balança da figura 31 ($7(4x + 1)$ no prato esquerdo, e $7x$ no prato direito), o aluno cometeu dois equívocos: um devido à álgebra, ao escrever $21x = -7/21$ ao invés de $21x = -7$, e outro devido à aritmética, ao encontrar $x = -3$ ao invés de $x = -7/21 = -1/3$.

4.5 – Fichas de valores (aplicada na primeira turma em 2012/1)

Para esta atividade desenhei algumas fichas de cores azul, verde, vermelho, amarelo, branco e preto, e atribuí valores a elas, como mostra a figura 32.

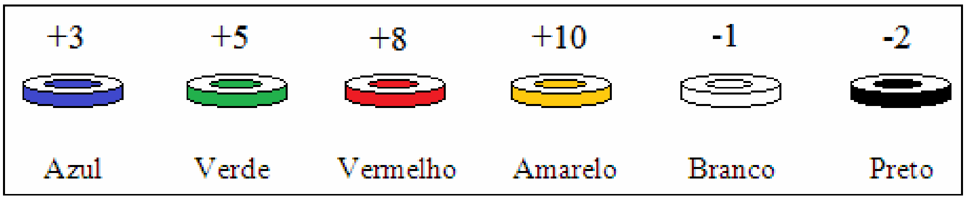


Figura 32: Número de pontos estipulados para as fichas.

Após esta exposição dos valores correspondentes às fichas, questionei os alunos sobre a situação em que um jogador tem 2 fichas azuis, 5 fichas vermelhas, 3 fichas amarelas e 7 fichas brancas, e outro jogador tem 6 fichas verdes, 4 fichas vermelhas, 2 fichas brancas e 4 fichas pretas. Foram feitas duas perguntas: qual jogador possui mais pontos? O que deve acontecer para que os dois jogadores tenham o mesmo número de pontos? A maioria dos alunos resolveu corretamente os questionamentos calculando os pontos de cada jogador para solucionar a primeira pergunta e adicionando fichas para o jogador com menos pontos na solução da segunda pergunta. Os poucos equívocos que encontrei ocorreram por não terem observado os valores respectivos das fichas (alguns alunos trocaram o valor da ficha de cor branca pelo valor da ficha de cor preta, o valor da ficha de cor verde pelo valor da ficha de cor azul, por exemplo), como podemos verificar na figura 33.

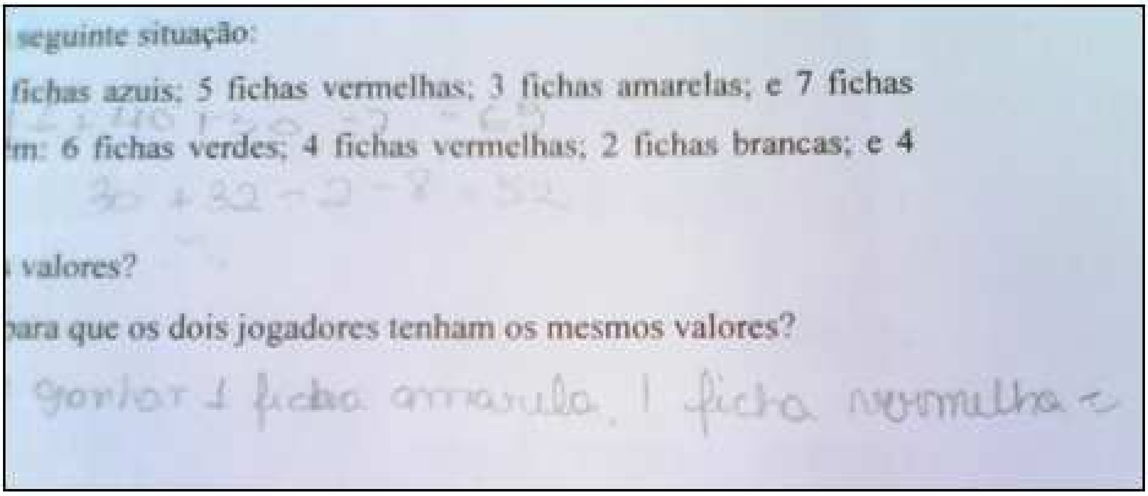


Figura 33: Resolução de um aluno.

O aluno determinou corretamente o jogador com mais pontos multiplicando os valores preestabelecidos pelas respectivas quantidades e somando-as: 2 fichas azuis = 2.(+3), 5 fichas vermelhas = 5.(+8), 3 fichas amarelas = 3.(+10) e 7 fichas brancas = 7.(–1), resultando em 6 + 40 + 30 – 7 = 69 para o primeiro jogador. E 6 fichas verdes = 6.(+5), 4 fichas vermelhas 4.(+8), 2 fichas brancas = 2.(–1) e 4 fichas pretas = 4.(–2), resultando em 30 + 32 – 2 – 8 = 52 para o primeiro jogador. O estudante percebeu que a diferença de valores era 69 – 52 = 17 e respondeu então que o jogador com 52 pontos deveria obter uma ficha de cor amarela, uma ficha de cor vermelha e uma ficha de cor branca (10 + 8 – 1 = 17), para que os dois jogadores tivessem o mesmo número de pontos. Podemos verificar com os alunos que essa resposta não é única, que podemos somar 17 pontos aos do jogador que tem menos de outras formas, utilizando fichas de outras cores (verde, azul, por exemplo), e que também podemos descontar 17 pontos do jogador com mais pontos adicionando fichas de cor preta ou branca. Dessa forma, a atividade pode auxiliar os alunos a compreenderem a equivalência entre sentenças como, neste caso, 69 – 17 = 52 e 52 + 17 = 69.

Dito isso aos alunos, no primeiro exercício desenhei pilhas de fichas de algumas das cores determinadas no início da atividade e um sinal de igualdade entre elas (figura 34). Os estudantes deveriam adicionar fichas de uma única cor para que a igualdade se tornasse verdadeira.

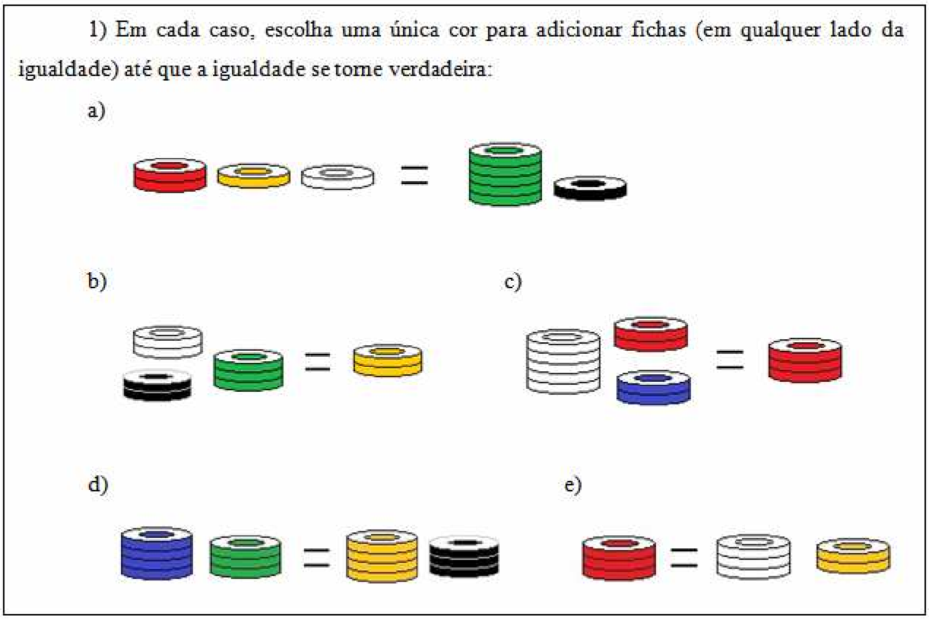


Figura 34: Primeiro exercício da quarta atividade.

Como podemos observar na figura 35, devido ao difícil acesso às cópias coloridas, entreguei aos alunos cópias em preto e branco e indiquei, por escrito, as cores correspondentes às fichas em cada exercício.

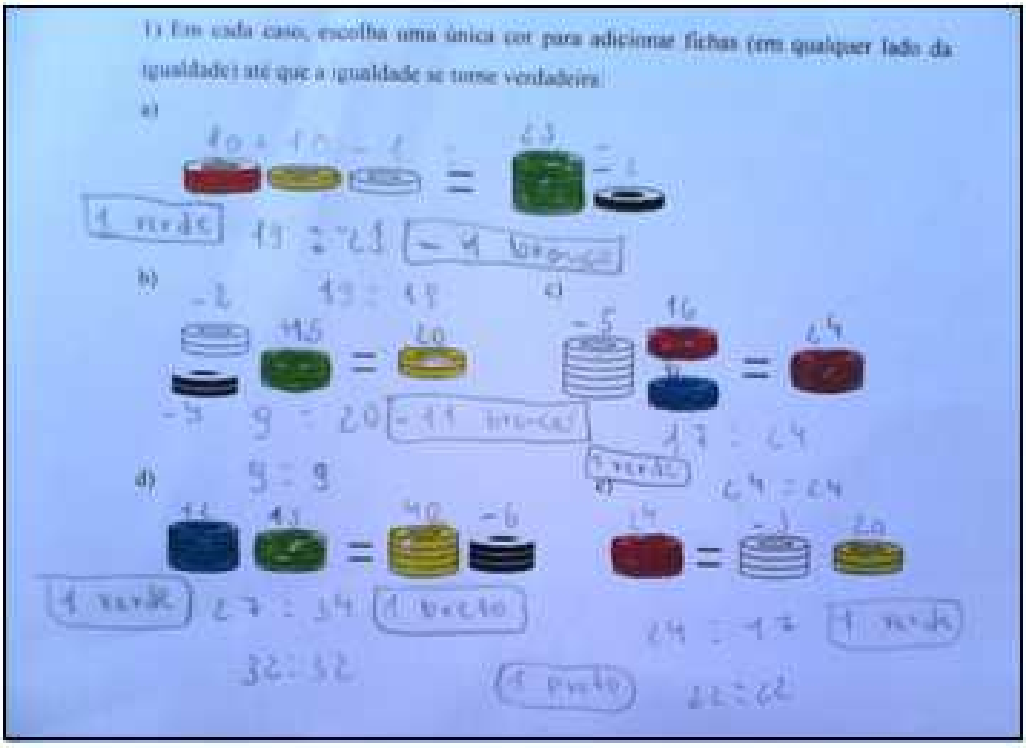


Figura 35: Resoluções de um aluno.

Da mesma forma que nas perguntas anteriores, os alunos calcularam corretamente os valores em fichas em cada lado das igualdades, entretanto muitos deles não observaram a restrição do enunciado do exercício que determinava a escolha de uma única cor para adicionar fichas. Muitos alunos adicionaram mais de uma cor para resolver as questões. Por exemplo, na figura 36, no exercício *d*, o aluno verificou que o lado direito da igualdade tem 12 + 15 = 27 em valores e o lado esquerdo 40 – 6 = 34, e adicionou uma ficha verde (+5) no lado direito e uma ficha preta (–2) no lado esquerdo para resolver a questão. Podemos observar, como no exemplo da balança (figura 32), que este aluno resolveu o exercício como em uma dependência de variáveis, $27 + x = 34 + y$, onde x teria o valor de uma ficha verde (+5) e y o valor de uma ficha preta (–2). Acredito que alguns alunos possam ter interpretado o enunciado deste exercício como “uma única ficha” ao invés de “uma única cor” ou “uma única cor para adicionar fichas em cala lado da igualdade”.

Com um pensamento parecido, outro aluno também encontrou 27 em valores no lado esquerdo e 34 no lado direito e verificou que não haveria ficha com valor para a diferença 34 – 27 = 7:

E: “Não tem ficha certa. Daí eu ia colocar oito aqui [adicionar um ficha vermelha no lado esquerdo da igualdade] e tirar um aqui [adicionar uma ficha branca no lado direito]”.

Pesquisador: “Tá, entendi, é legal esse raciocínio”.

E: “Mas não pode [usar] duas cores”.

Pesquisador: “Não, pois é, e aí como tu faz com uma cor só? Tu não conseguiste somar sete aqui (lado que resultou 27 em valores), mas o que tu pode fazer do outro lado (lado que resultou 34 em valores)?”

E: “Tirar sete. Mas não tem ficha”.

Pesquisador: “Mas tu podes adicionar varias fichas de uma cor só”.

E: “Brancas?”

Pesquisador: “Claro”.

E: “Coloco sete brancas”.

Pesquisador: “Isso”.

Essas interpretações, no meu entendimento, não são equivocadas, pois poderiam ser enunciados outros exercícios com essas regras. Importante é que esta questão, independentemente do enunciado, fez os alunos pensarem sobre o problema de igualar os valores das fichas dos dois jogadores.

No exemplo *a* [duas fichas vermelhas + uma amarela + uma branca no lado esquerdo e cinco verdes + uma preta no lado direito] um aluno me abordou com a seguinte dúvida:

V: “Dá para acrescentar fichas aqui [lado esquerdo], ou tem que ser aqui [lado direito]?”

Pesquisador: “Pode ser em qualquer lado, eu acho.”

V: “[risos]”.

Pesquisador: “Não, é que eu não me lembro da resposta [risos]. Mas dá. Tu podes tirar de um lado e somar do outro ou vice versa, é uma igualdade. Qual lado da igualdade tu quer manter, 19 ou 23?” – o aluno calculou 19 pontos no lado direito (equivocadamente, pois duas fichas vermelhas, uma amarela, uma branca somam 25) e 23 pontos no lado esquerdo.

V: “Eu posso manter o 23”.

Pesquisador: “Então pra ti manter os 23, quanto é que falta aqui [lado da igualdade que resultou dezenove] para ficar igual? E aí tu trabalhas.”

V: “Hum”.

Pesquisador: “Se tu quiser tirar dos 23, como é que tu fazes se tu quisesses adicionar... tirar dos 23?”

V: “Acrescento duas fichas pretas!”

Pesquisador: “Isso”.

No mesmo exemplo, segue a dúvida de outro estudante:

L: “No caso aqui “deu” + 19 e + 23, não é?”

Pesquisador: “Isso”.

L: “Daí dá para colocar quatro brancas, que daí vai ficar – 4 e vai ficar 19?”

Pesquisador: “Isso”.

L: “Daí onde eu coloco as quatro brancas, aqui não é?”

Pesquisador: “Isso”.

Podemos observar que dois alunos encontraram soluções diferentes para o mesmo problema. A troca de informações entre os colegas também pode ser uma boa ferramenta para que os alunos percebam as equivalências entre suas respostas, caso elas estejam corretas. Por exemplo, na questão *a*, como vimos, um aluno resolveu o problema adicionando 2 fichas pretas e o outro adicionando 4 fichas brancas.

Para o segundo exercício desta atividade elaborei sentenças onde a incógnita *x* era calculada pela quantidade de fichas que deveriam ser adicionadas para que a sentença fosse verdadeira (figura 36).

2) Quantas fichas devemos adicionar para que a sentença seja verdadeira:

a) 9 + X.verdes = 24 b) 2 (X.brancas + 10) = 10

c) 22 = X.azuis – 2 d) 45 = 3 (15 – X.pretas)

e) 17 = X.azuis -1 f) 4 + X.vermelhas = 36

g) 1.verde = 1.amarela + X.brancas h) 3.pretas = 1.amarela + X.pretas

Figura 36: Segundo exercício da quarta atividade.

O objetivo com este exercício foi o de que os alunos interpretassem essas expressões com base nos exercícios anteriores, que eles percebessem que as sentenças do primeiro e do segundo exercício podem ser equivalentes. Foram gravadas diversas conversas, as mais interessantes estão descritas logo abaixo.

No item *d*, 45 = 3 (15 – X.pretas), um aluno questionou a possibilidade da resposta ser o número zero.

Pesquisador: “Se pode ser zero? O que tu achas?”

A: “Acho que pode”.

Pesquisador: “Ah, eu também acho que pode”. Se forem “zero pretas” aqui (a incógnita *x* valer zero) o que vai acontecer?”

A: “Dá zero aqui (X.pretas = 0), três vezes quinze, 45”.

Pesquisador: “Então, não só pode ser como é!”

A: “Ahh”.

Observei novamente o que verifiquei na primeira atividade, nesse caso, que alguns alunos esperam como resposta um número inteiro e positivo de fichas.

Um aluno me questionou sobre o item *a*, 2(X.brancas +10 = 10:

L: “Não entendi o que tem que fazer”.

Pesquisador: “Tu tens que descobrir quantas fichas tu vais colocar aqui, que quando tu multiplicar por dois vai dá os dez”.

L: “Acho que entendi”.

Pesquisador: “Entendeu?”

L: “Acho que sim”.

Pesquisador: “Quanto é que vale as brancas?”

L: “Menos um”.

Pesquisador: “Menos um. E quanto é que tem que dar aqui dentro (X.brancas + 10)?”

L: “Menos vinte mais dez”.

Pesquisador: “Menos vinte mais dez? Menos vinte mais dez, é igual a menos dez”.

L: “Sim”.

Pesquisador: “E aí multiplicando por dois é igual a menos vinte”.

L: “Ah, tem que multiplicar por dois ainda”. – o aluno entendeu que era necessário realizar apenas as operações dentro dos parênteses.

Pesquisador: “Claro. O dois multiplica isso aqui (X.brancas + 10). Quanto é que tem que ser isso aqui (X.brancas + 10) para dar os 10 (no lado direito da igualdade) quando tu multiplicar por 2?”

L: “5”.

Pesquisador: “Isso, aqui tem que dar 5”.

L: “Tá, para dar cinco aqui”.

Pesquisador: “Isso”.

L: “Que aí multiplica por dois e dá dez”.

Pesquisador: “Sim”.

L: “Ah, daí é cinco brancas aqui né?”

Pesquisador: “Isso. Cinco brancas”.

L: “Entendi”.

No momento da conversa não compreendi o porquê dos – 20 + 10, e questionei o aluno:

Pesquisador: “O que tu tavas pensando quando falou – 20 + 10, eu não entendi o teu raciocínio?”

L: “Que aí ia ficar menos dez, só que daí eu esqueci que tinha que multiplicar depois”.

Pesquisador: “Menos vinte mais dez é menos dez”. – aluno não percebeu que mesmo encontrando – 10, o outro lado da igualdade resultava em 10 positivo.

L: “Então...”

Pesquisador: “Mas aqui é dez positivo” – aponto o outro lado da igualdade.

L: “Ah, não é dez positivo”, referindo-se ao lado esquerdo.

Pesquisador: “Mas é isso aqui. Cinco brancas”.

Novamente surge o que verifiquei na primeira atividade, alguns alunos operando com o módulo dos números, sem observar o sinal. O aluno não observou que $-10 \neq 10$. Abaixo outro aluno também cometeu este mesmo equívoco no item *h*, 3.pretas = 1.amarela + *x*.pretas:

D: “Tá certo aqui, “sor”?

Pesquisador: “Três pretas... Três pretas são?”

D: “Menos seis”.

Pesquisador: “Menos seis. Uma amarela, dez. Tu tens menos seis, dez, quantas pretas tu tens que colocar aqui desse lado (lado direito da igualdade)?”

D: “Três”.

Pesquisador: “Mas três vai resultar em menos seis não é".

D: “Então, sor”.

Pesquisador: “Mas ai vai “sobrar” o dez...” – tento fazer com que o aluno perceba que o número dez torna a sentença falsa.

D: “Tem que ser... dá dois eu acho “sor”, que aí vai dar quatro, 10 – 4 = 6. Não. É!”

Pesquisador: “Mas aí vai dar quatro positivo, quer dizer, vai dar seis positivo. Aqui (lado esquerdo da igualdade) deu – 6.”

D: “Ah então tem que ser tipo dezesseis [10 – 16 = -6]”.

Pesquisador: “Ahh, isso”.

D: “Dez, doze, catorze, dezesseis, oito!”

Pesquisador: “Oito pretas?”

D: “Sim”.

Pesquisador: “Que bola cara, obrigado”.

D: “De nada sor”.

Ao realizar a subtração 10 – 4 o aluno encontrou o número 6, mas não observou que – 6 ≠ 6.

É interessante observar a maior potência simbólica das fichas sobre as balanças, uma vez que ao se atribuir valores negativos para algumas fichas, esta atividade não tem restrições com números negativos.

4.6 Fichas de Valores (aplicada na segunda turma em 2012/2)

Ao analisar as conversas entendi que deveria ter deixado os alunos pensarem mais e não ter dado tantas dicas. Então realizei novamente esta atividade com outra turma no segundo semestre de 2012, incluindo algumas modificações nos exercícios aplicados na primeira turma.

No primeiro exercício (figura 37), modifiquei o desenho retirando o sinal de igualdade entre as pilhas de fichas e separando-as em dois retângulos.

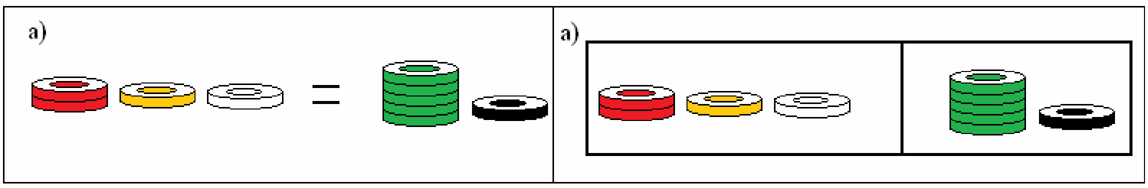


Figura 37: Mudança no primeiro exercício da quarta atividade.

No lado esquerdo da figura 39, está ilustrado o desenho do exercício na primeira turma, e no lado direito, como ficou desenhado para a segunda. O motivo dessa mudança foi a necessidade de verificar se os alunos compreenderiam melhor o exercício.

O enunciado também consistiu em adicionar fichas de uma única cor em qualquer um dos retângulos para estes tivessem a mesma quantia em valores. Os resultados foram semelhantes aos da primeira turma, os alunos adicionaram fichas de mais de uma cor em ambos os lados (ou apenas em um lado), como na figura 38.

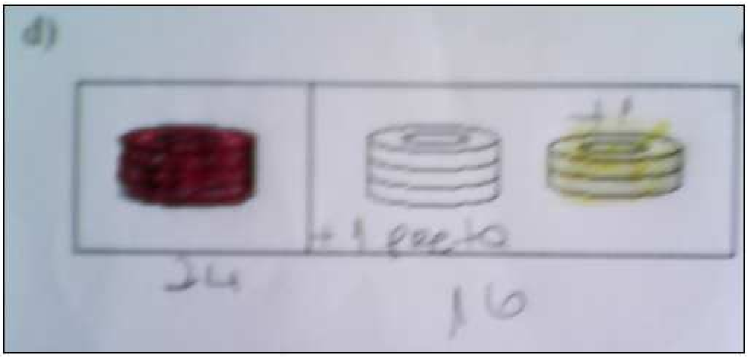
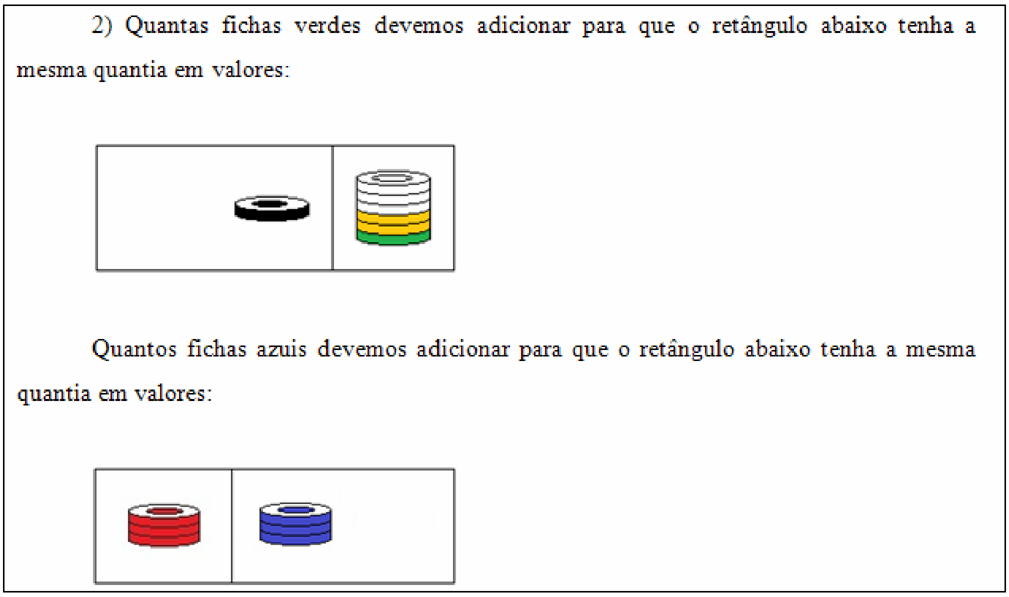


Figura 38: Resolução de um aluno.

No item *d*, o aluno verificou que o lado com a pilha de fichas vermelhas continha 24 em valores e o lado direito, das fichas brancas e amarelas, continha 16 em valores (equivocadamente, pois são três fichas brancas que resultam em – 3, e duas amarelas que resultam em + 20, e, dessa forma, o lado direito contém 17 em valores) e resolveu o exercício adicionando no lado direito uma ficha preta e uma ficha amarela que resultaria em + 8 nesse retângulo, e estes + 8 adicionados aos 16 resultariam em 24 (24 = 16 + 8). Novamente, não é minha intenção neste trabalho discutir a forma com que devemos avaliar os alunos quanto às suas respostas. O estudante não resolveu o exercício conforme o enunciado, mas é importante verificarmos que o aluno compreendeu que deveria adicionar determinadas fichas para tornar a sentença verdadeira. E que mesmo tendo cometido um erro de cálculo, mostrou-se consistente nessa ação de adicionar.

O segundo exercício foi pensado após a aplicação na primeira turma, e, portanto, abordado apenas na segunda turma. Neste exercício foi especificado que os alunos deveriam adicionar uma cor específica de fichas em um dos retângulos para que a igualdade se verificasse (figura 39).


2) Quantas fichas verdes devemos adicionar para que o retângulo abaixo tenha a mesma quantia em valores:

Quantos fichas azuis devemos adicionar para que o retângulo abaixo tenha a mesma quantia em valores:

Figura 39: Segundo exercício da quarta atividade.

A maioria dos alunos respondeu corretamente, e muitas repostas foram apresentadas em forma de desenho, como na figura 40.

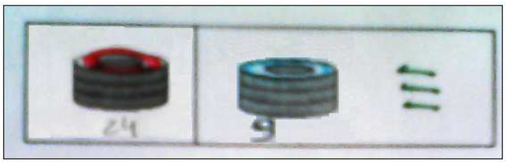


Figura 40: Resolução de um aluno.

No segundo item, o aluno verificou que a pilha de fichas azuis no lado esquerdo continha 9 em valores e o lado direito, das fichas vermelhas, continha 24 pontos, e resolveu o exercício traçando três riscos de cor verde simbolizando três fichas de cor verde, no retângulo do lado direito. Estas três fichas verdes, com valor de +5 cada uma, resultariam em +15, que adicionados aos 9 resultariam em 24 (24 = 9 + 15). O objetivo com este exercício era o de que os alunos interpretassem expressões como 24 = 9 + *x*.(+3), matéria do exercício seguinte.

No terceiro exercício (figura 41), substituí o nome das fichas (escrito por extenso) pelo valor estipulado para elas.

c) $2\,(\,X.\text{brancas} + 10\,) = 10$	$2.(\,x(-1) + 10\,) = 10$

Figura 41: Mudança no terceiro exercício da quarta atividade.

No lado esquerdo da figura 43, está ilustrado o desenho do exercício na primeira turma, e no lado direito como ficou desenhado para a segunda. Como dito no parágrafo anterior, o objetivo neste exercício foi o de que os alunos compreendessem a equivalência entre os desenhos do exercício anterior e as expressões utilizadas na linguagem simbólica da álgebra.

Novamente, os resultados foram semelhantes aos da primeira turma. O que chamou a atenção foi que alguns alunos realizaram operações como $a + b.x$ como sendo $(a + b).x$. No exemplo *c,* 2.(x(– 1) + 10) = 10, um aluno entendeu da mesma forma que a aluna no exercício “1.*c*” das balanças na página 48. Podemos observar isso na figura 42, a seguir.

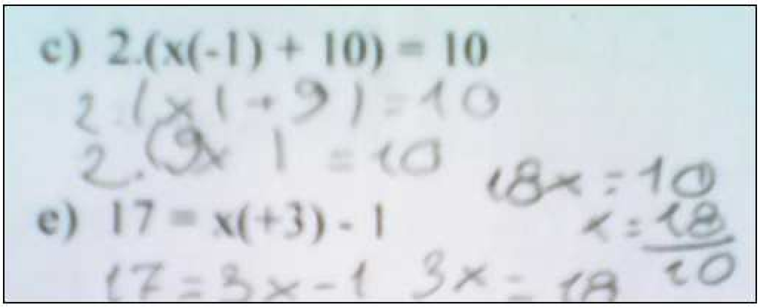


Figura 42: Resolução de um aluno.

O aluno entendeu x(– 1) + 10 como sendo x(1 – 10) encontrando 9x como resposta.

Outro estudante cometeu erro semelhante no exemplo *h,* em que era dada a sentença 3(– 2) = 1(+10) + x(– 2), como podemos observar na figura 43.

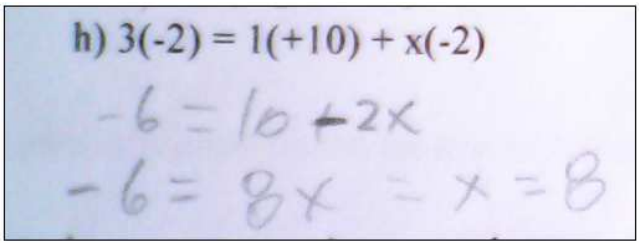


Figura 43: Resolução de um aluno.

O aluno realizou a subtração 10 – 2.x como sendo (10 – 2).x, o que me surpreendeu, pois foi um equívoco semelhante ao cometido por um aluno da primeira turma. Entendo que nós, educadores, devemos observar este tipo de erro e buscar alternativas que auxiliem os estudantes a compreender as expressões envolvendo parênteses.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve o intuito de propor e experimentar atividades que pudessem auxiliar o desenvolvimento do pensamento algébrico relacionado ao conteúdo de equações no ensino fundamental. Estas atividades foram aplicadas junto às turmas de 7º ano da Escola Estadual de Ensino Fundamental Mauricio Sirotski Sobrinho, com o objetivo de verificar a seguinte questão: os equívocos dos alunos ao lidarem com expressões algébricas são devidos à má compreensão da linguagem simbólica da matemática?

Percebi que os alunos tiveram dificuldades no início de algumas das atividades, pois não as conheciam. Entretanto, procurei esclarecer do que tratavam os exercícios e no transcorrer de cada encontro notei que muitos alunos tinham consciência e autonomia na construção de suas respostas. Pelo fato de que as atividades foram algo novo, vários dos estudantes se permitiram resolver os exercícios à sua maneira, ou seja, com sua própria escrita, o que considero importante para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Além disso, os exercícios que exigiram dos alunos que elaborassem seus próprios exemplos despertou muito o seu interesse. Eles se sentiram desafiados e elaboraram exemplos interessantes, simples e complexos, e para isso precisaram compreender os exercícios, pensar sobre eles.

Sobre a questão inicial, se os equívocos dos alunos ao lidarem com expressões algébricas são devidos à má compreensão da linguagem simbólica da matemática, vimos que alguns deles decorrem do não entendimento da aritmética nas operações com frações, da tendência dos alunos de considerar o módulo das operações como resultado, e de outras dificuldades, que decorrem da incompreensão do sinal de igualdade e da leitura equivocada da ordem das operações, inclusive de adições como $a + b.x$ como sendo $(a + b).x$, o que para mim foi uma resposta inesperada, pois ainda não havia testemunhado este tipo de erro.

Entendo que fui precipitado na aplicação das atividades, ao fornecer dicas aos alunos quando deveria tê-los deixado pensar sobre os exercícios. Este trabalho contribuiu e muito em minha formação acadêmica, ao ter pesquisado o trabalho de alguns autores, pesquisado e elaborado exercícios, pensado sobre as respostas dos alunos, ouvido os alunos.

Acredito, com base nas resoluções dos alunos, que a aplicação dessas atividades teve uma contribuição para seu pensamento algébrico e sua compreensão da linguagem simbólica algébrica. Acredito também que nós, docentes, devemos buscar atividades que possibilitem a compreensão dos conceitos referentes a tais conteúdos e, dessa forma, contribuir para a melhoria na aprendizagem.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das Crianças que se Iniciam em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 2003. p. 23-37.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BONADIMAN, Adriana. **Álgebra no Ensino Fundamental**: Produzindo Significados Para as Operações Básicas com Expressões Algébricas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007.

BÚRIGO, Elisabete Z. Tradições Modernas: Reconfigurações Da Matemática Escolar Nos Anos 1960. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, n. 35B, p. 277-300, abril 2010.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, H, **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 1995.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR, José Ruy. **A Conquista da Matemática**: Nova. São Paulo. FTD, 1998.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática Realidade**. 7º ano. São Paulo: Saraiva, 2009.

LINS, Rômulo Campos. Álgebra e o Pensamento Algébrico na Sala de Aula. . **A Educação Matemática em Revista**, São Paulo, SBEM, ano I, n. 2, p. 26-31, 1994.

NEVES, Paulo S. de O. **Um Estudo Sobre o Significado, o Ensino e a Aprendizagem Significativa**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, USP, São Paulo, 1995.

USISKIN, Zalman. Concepções Sobre a Álgebra da Escola Média e Utilizações das Variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra**.. São Paulo: Atual, 2003. p. 9-22.

APÊNDICE A – Exercícios aplicados na primeira turma

PIRÂMIDE DAS EQUAÇÕES

Equações são sentenças matemáticas expressas por uma igualdade, onde há uma ou mais letras representando números desconhecidos. Estas letras são chamadas de incógnitas. Exemplos:

1) $a + 2 = 5$
2) $3x - \frac{7}{2} = 6$
3) $m - 8 = 9n - 3m$

O objetivo é, dado uma equação qualquer, descobrir o valor da(s) incógnita(s). Por exemplo, um número somado a 3 resulta em 7. Que número é esse?

Representamos matematicamente este problema com uma equação: x + 3 = 7, onde x é a incógnita, cujo valor soluciona a equação.

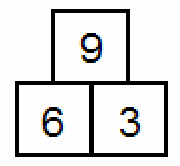
Obs: Usualmente utilizamos a letra x como incógnita, entretanto, o pensamento matemático permite representar a incógnita do problema anterior por qualquer letra ou símbolo.

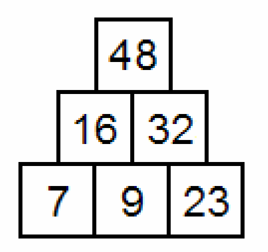
- a + 3 = 7
- f +3 = 7
- Δ + 3 = 7
- _ + 3 = 7

Há diversas maneiras de representar equações. Nestas aulas veremos algumas delas.

1 – <u>Pirâmides dos Números:</u>

Observe as pirâmides abaixo:





O número 9 na primeira pirâmide é a soma dos números 6 e 3 dos quadrados de baixo.

O número 16 na segunda pirâmide é a soma dos números 7 e 9.

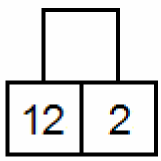
O número 32 na segunda pirâmide é a soma dos números 9 e 23.

O número 48 na segunda pirâmide é a soma dos números 16 e 32.

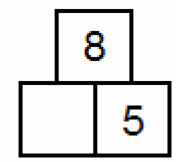
Com base na descrição acima, resolva os exercícios a seguir.

1) Complete as seguintes pirâmides:

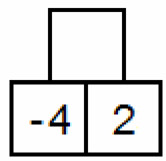
a)



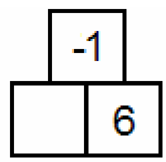
b)



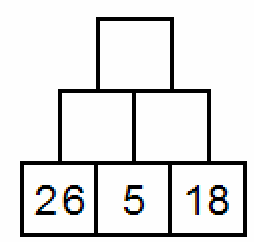
c)



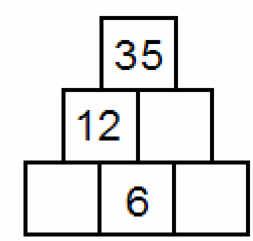
d)



f)

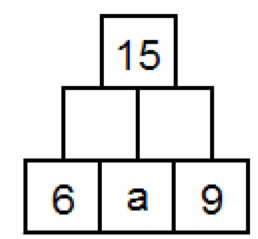


g)

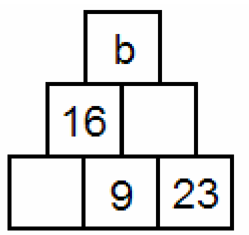


2) Complete a pirâmide e descubra qual é o valor das incógnitas:

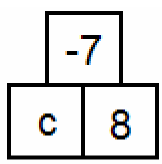
a)



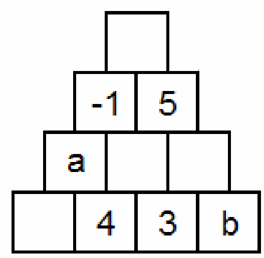
b)



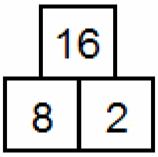
c)

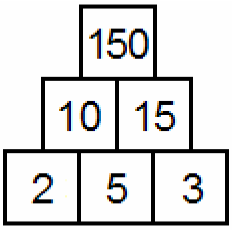


d)



Agora observe estas pirâmides:





O número 16 na primeira pirâmide é o produto dos números 8 e 2.

O número 10 na segunda pirâmide é o produto dos números 2 e 5.

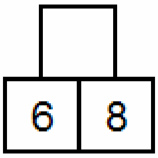
O número 15 na segunda pirâmide é o produto dos números 5 e 3.

O número 150 na segunda pirâmide é o produto dos números 10 e 15.

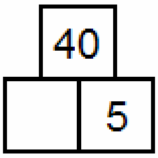
Resolva os exercícios a seguir com base na descrição acima.

3) Complete as seguintes pirâmides:

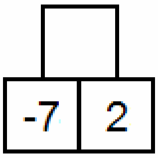
a)



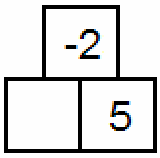
b)



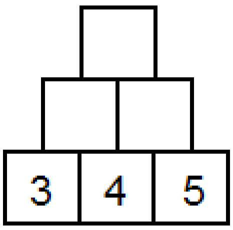
c)



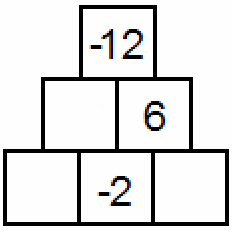
d)



f)

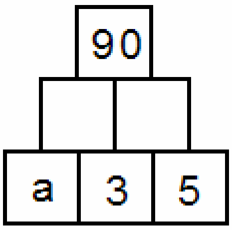


g)

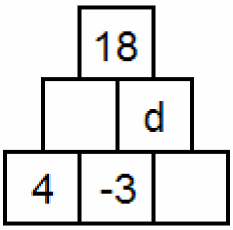


4) Complete a pirâmide e descubra qual é o valor das incógnitas:

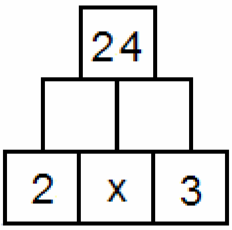
a)



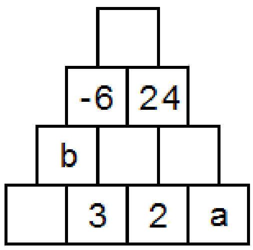
b)



c)



d)



5) Construa pirâmides como as dos exercícios anteriores para os colegas resolverem.

SENTENÇAS SEM SINAIS

Uma sentença matemática pode ser falsa ou verdadeira. Exemplos:

1) $2 = 5$, é uma sentença falsa.

2) $3 \cdot 2 = 6$, é uma sentença verdadeira.

3) $7 \cdot 8 - 8 = 6 \cdot 7 + 6$, é um sentença verdadeira.

O que podemos fazer para tornar a sentença “1)” uma sentença verdadeira?

Exercícios:

1) Diga se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Explique.

a) $4 - 5 = 1$

b) $3 \cdot 5 + 16 = 32$

c) $5^2 - 1 = 6 \cdot 4$

d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

e) $(5 + 3) \cdot 2 = 16$

f) $45 = \frac{92}{2} - 2$

g) $29 = 2 \cdot \frac{(7+21)}{2}$

h) $3 \cdot (11 + 3) = 2(3 \cdot 7)$

i) $-7 + (5 - 1) = 3 - (2 - 1)$

j) $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

2) Quais os valores das incógnitas que tornam as seguintes sentenças verdadeiras:

a) $2 \cdot x + 3 = 7$

b) $a + 11 = 7$

c) $64 = 4 \cdot t + 8$

d) $22 = 5 - 3 \cdot z$

e) $4 = c + \frac{1}{2}$

f) $7 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot x$

g) $\frac{v}{7} = \frac{20}{35}$

h) $\frac{3 \cdot b}{4} = 33$

3) Que operação matemática (adição, subtração, multiplicação, divisão) devemos utilizar para que as seguintes sentenças sejam verdadeiras:

a) $7 \quad 4 = 11$ b) $15 = 9 \quad 6$ c) $2 \quad 3 = 6$

d) $20 = 4 \quad 5$ e) $6 = 18 \quad 3$ f) $\frac{1}{2} \quad 1 = \frac{3}{2}$

g) $\frac{7}{8} = \frac{5}{4} \quad \frac{3}{8}$ h) $3^2 \quad 4^2 = 5^2$

Observe agora os números abaixo:

2 2 4

Podemos escrever com eles as seguintes sentenças:

$2 + 2 = 4$

$2 = -2 + 4$

$2 \cdot 2 = 4$

4) Escreva uma sentença verdadeira para cada um dos casos:

a) $3 \quad 4 \quad 7$ b) $15 \quad 9 \quad 6$ c) $6 \quad 4 \quad 24$

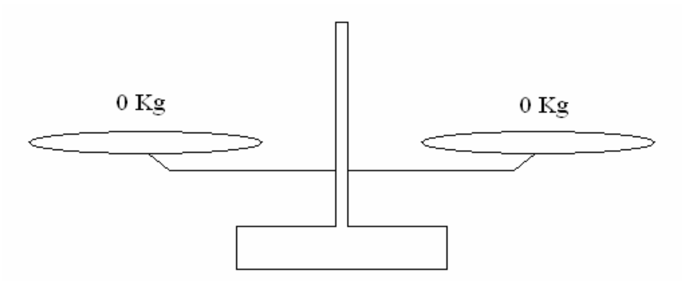
d) $11 \quad 121 \quad 11$ e) $90 \quad 10 \quad 9$ f) $\frac{3}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{19}{24}$

g) $(7 \quad 4) \quad 8 \quad 6 \quad 4$ h) $(5 \quad 7) \quad 4 \quad 3 \quad (2 \quad 5)$

5) Crie sentenças como as dos exercícios anteriores para os colegas completarem.

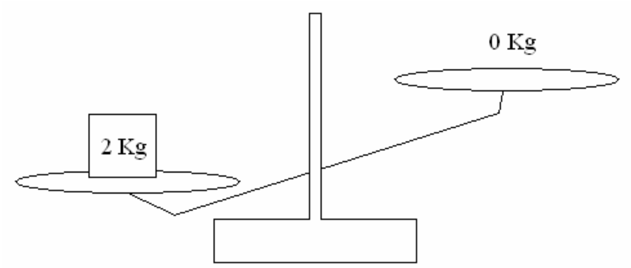
BALANÇA DAS EQUAÇÕES

As equações podem ser vistas como uma balança de dois pratos em equilíbrio, a menos de números negativos, pois não faz sentido considerar pesos [13] negativos.



0 = 0. Sempre que a sentença for verdadeira, a balança estará em equilíbrio.

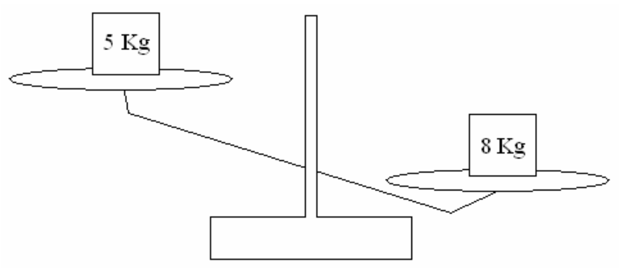
Observe agora a seguinte situação:



2 = 0. A sentença é falsa, e, portanto, a balança não está em equilíbrio.

Se adicionarmos dois quilos no prato direito, a balança voltará ao equilíbrio, pois 2 = 2 é uma sentença verdadeira. As equações matemáticas seguem a mesma lógica, ou seja, não podemos simplesmente adicionar números em apenas um membro da igualdade, pois estaremos alterando a sentença.

Na situação abaixo:



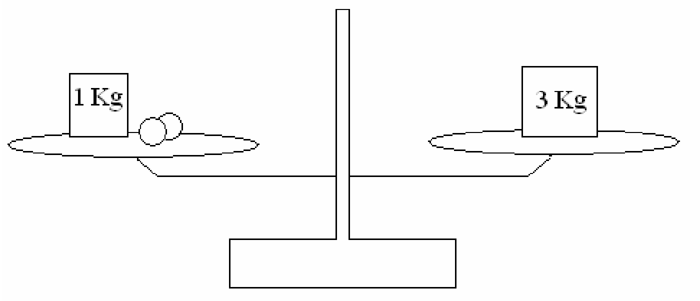
---

[13] Foi utilizado o termo “peso” como unidade de medida na balança, uma vez que este termo é comum no dia a dia e os alunos ainda não conheciam a unidade medida correta que é a *massa*.

Para que a balança fique em equilíbrio podemos adicionar 3 kg no prato esquerdo, ou retirar 3 kg no lado direito.

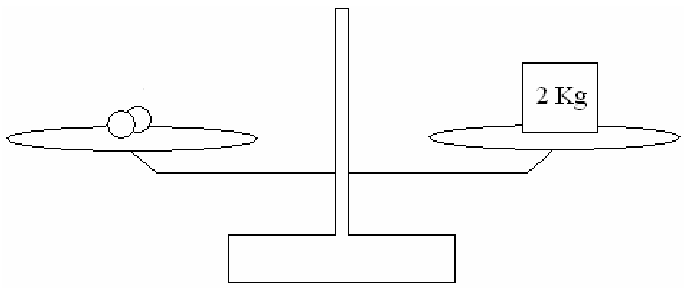
Para encontrar o valor das incógnitas em uma equação, geralmente, são realizados alguns procedimentos: “passar” números para um membro e a(s) incógnita(s) para o outro com sinal trocado, com o intuito de isolar a incógnita que se deseja obter. Entretanto, esses procedimentos são na verdade a aplicação das operações como a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão, entre outras. Exemplo:

Dois melões mais 1 kg somam juntos 3 kg. Supondo que os melões tem o mesmo peso, qual o peso dos melões?



Uma equação para esse problema pode ser: 2*m* kg + 1 kg = 3 kg, onde *m* representa o peso de cada melão. Dessa forma, devemos encontrar o valor de m.

Ao retirarmos 1 kg do prato esquerdo, o que deve ser feito no prato direito para manter a balança em equilíbrio?



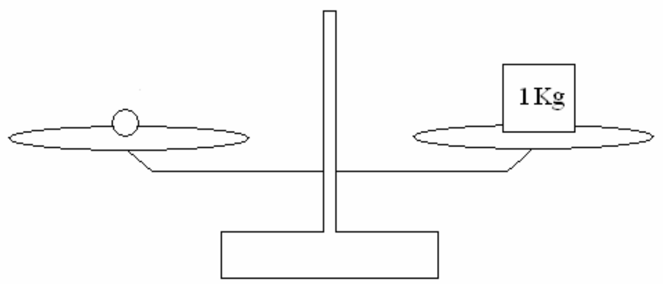
Quando retirarmos 1 kg do prato esquerdo, para manter a balança em equilíbrio devemos retirar um 1 kg também do prato direito. Nas equações, procedemos analogamente:

2*m* kg + 1 kg – (1 kg) = 3 kg – 1 kg. Retiramos 1 kg de cada lado.

2*m* kg + 0 kg = 2 kg

2*m* kg = 2 kg

Agora se dividirmos o peso do conteúdo do prato esquerdo por 2, para manter a balança em equilíbrio, devemos dividir o conteúdo do prato direito também por 2.



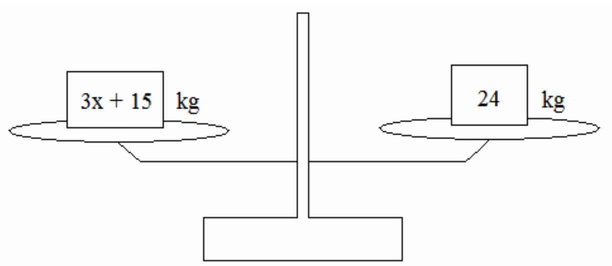
2*m* kg = 2 kg

***m* = 1**

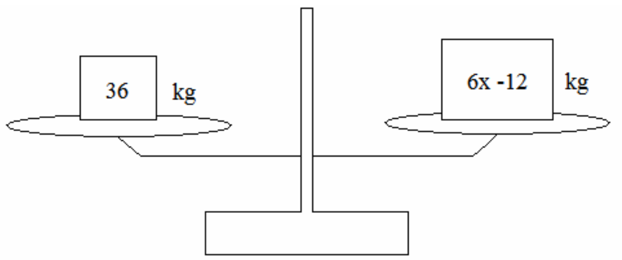
<u>Exercícios:</u>

1) Calcule o valor de x para que as balanças permaneçam em equilíbrio.

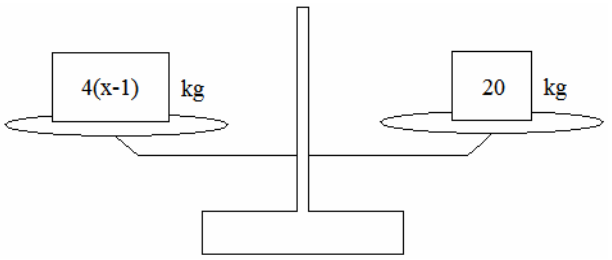
a)



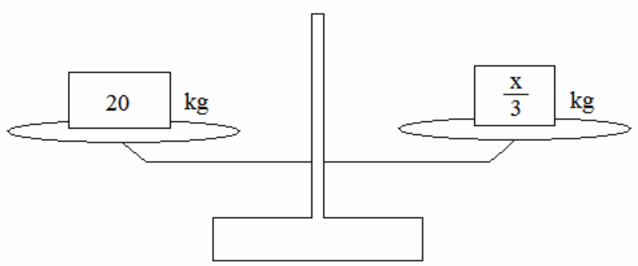
b)



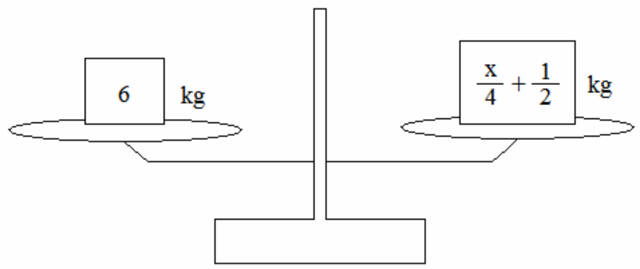
c)



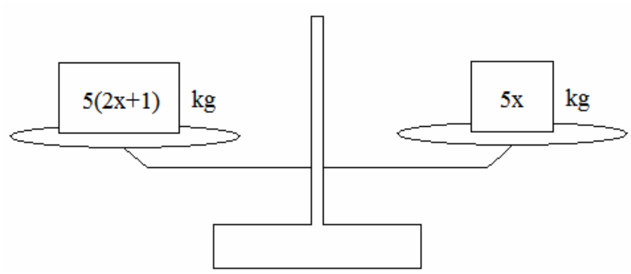
d)



e)



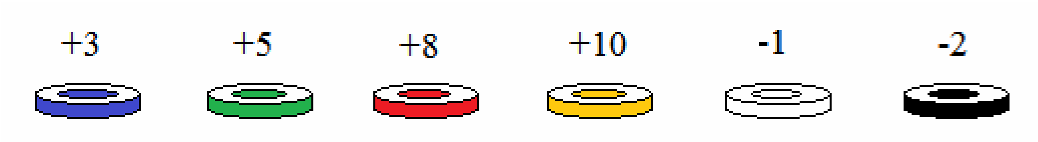
f)



2) Crie exemplos como os exercícios anteriores para os colegas resolverem.

FICHAS DE VALORES

Vamos supor um jogo qualquer que envolva fichas e seus respectivos valores:



Azul Verde Vermelho Amarelo Branco Preto

Observe agora a seguinte situação:

O jogador 1 têm: 2 fichas azuis; 5 fichas vermelhas; 3 fichas amarelas; e 7 fichas brancas. O jogador 2 têm: 6 fichas verdes; 4 fichas vermelhas; 2 fichas brancas; e 4 fichas pretas.

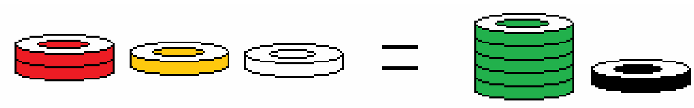
a) Qual jogador tem mais valores?

b) O que deve acontecer para que os dois jogadores tenham os mesmos valores?

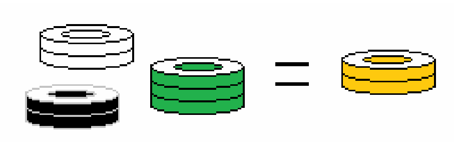
<u>Exercícios:</u>

1) Em cada caso, escolha uma única cor para adicionar fichas (em qualquer lado da igualdade) até que a igualdade se torne verdadeira:

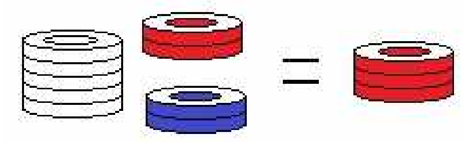
a)



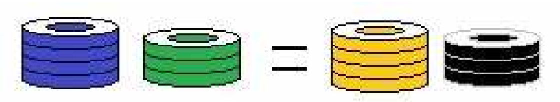
b)



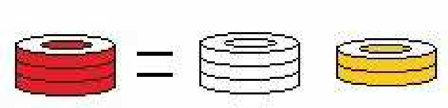
c)



d)



e)



2) Quantas fichas, e de que cores, devemos adicionar para que as sentenças sejam verdadeiras:

a) 9 + X(+5) = 24

b) 2 (Xbrancas + 10) = 10

c) 22 = Xazuis – 2

d) 45 = 3 (15 – Xpretas)

e) 17 = Xazuis -1

f) 4 + Xvermelhas = 36

g) 1verde = 1amarela + Xbrancas

h) 3pretas = 1amarela + Xpretas

3) Crie exemplos como os exercícios anteriores para os colegas resolverem.

APÊNDICE B – Exercícios aplicados na segunda turma

PIRÂMIDE DAS EQUAÇÕES

Equações são sentenças matemáticas expressas por uma igualdade, onde há uma ou mais letras representando números desconhecidos. Estas letras são chamadas de incógnitas. Exemplos:

1) $a + 2 = 5$
2) $3x - \frac{7}{2} = 6$
3) $m - 8 = 9n - 3m$

O objetivo é, dado uma equação qualquer, descobrir o valor da(s) incógnita(s). Por exemplo, um número somado a 3 resulta em 7. Que número é esse?

Representamos matematicamente este problema com uma equação: x + 3 = 7, onde x é a incógnita, cujo valor soluciona a equação.

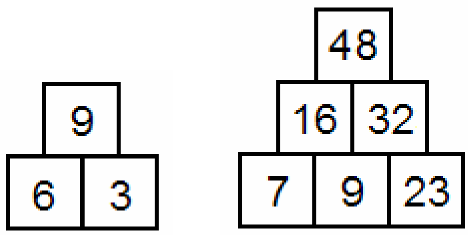
Obs: Usualmente utilizamos a letra x como incógnita, entretanto, o pensamento matemático permite representar a incógnita do problema anterior por qualquer letra ou símbolo.

- a + 3 = 7
- f +3 = 7
- Δ + 3 = 7
- _ + 3 = 7

Há diversas maneiras de representar equações. Nestas aulas veremos algumas delas.

1 – <u>Pirâmides dos Números:</u>

Observe as pirâmides abaixo:



O número 9 na primeira pirâmide é a soma dos números 6 e 3 dos quadrados de baixo.

O número 16 na segunda pirâmide é a soma dos números 7 e 9.

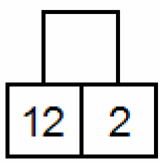
O número 32 na segunda pirâmide é a soma dos números 9 e 23.

O número 48 na segunda pirâmide é a soma dos números 16 e 32.

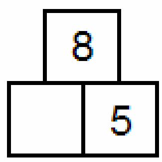
Com base na descrição acima, resolva os exercícios a seguir.

1) Complete as seguintes pirâmides:

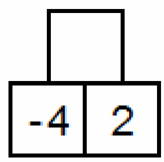
a)



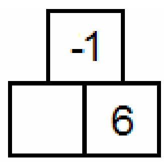
b)



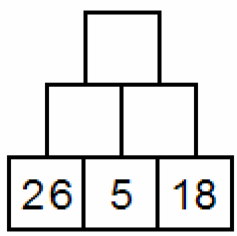
c)



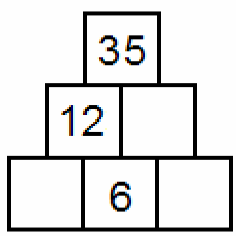
d)



f)

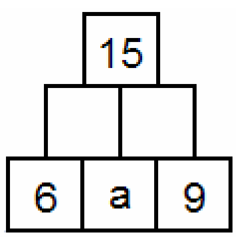


g)

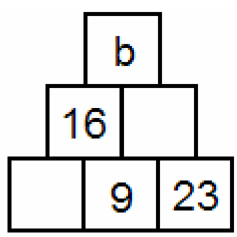


2) Complete a pirâmide e descubra qual é o valor das incógnitas:

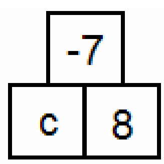
a)



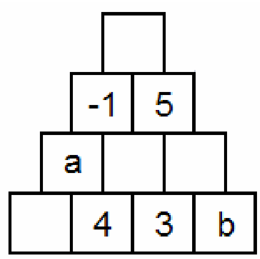
b)



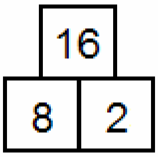
c)

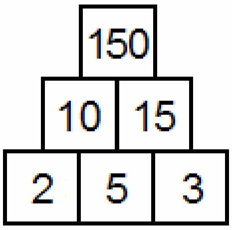


d)



Agora observe estas pirâmides:





O número 16 na primeira pirâmide é o produto dos números 8 e 2.

O número 10 na segunda pirâmide é o produto dos números 2 e 5.

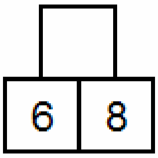
O número 15 na segunda pirâmide é o produto dos números 5 e 3.

O número 150 na segunda pirâmide é o produto dos números 10 e 15.

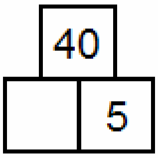
Resolva os exercícios a seguir com base na descrição acima.

3) Complete as seguintes pirâmides:

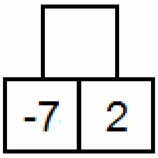
a)



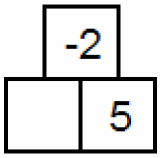
b)



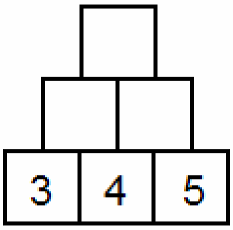
c)



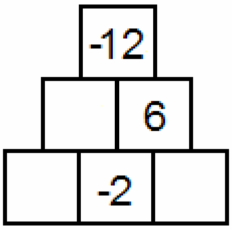
d)



f)

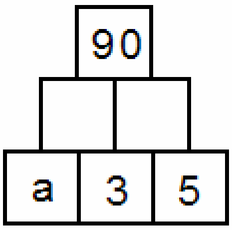


g)

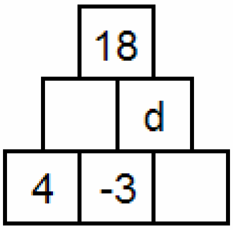


4) Complete a pirâmide e descubra qual é o valor das incógnitas:

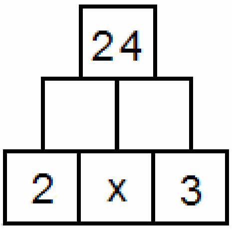
a)



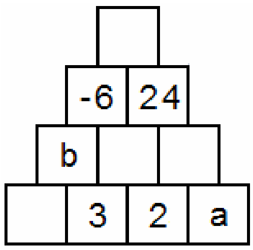
b)



c)



d)

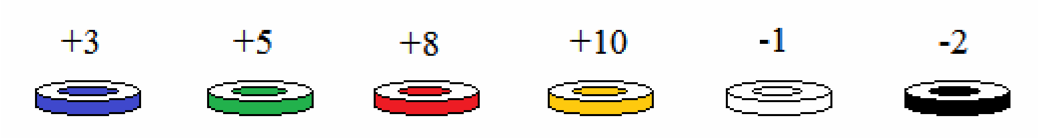


5) Construa pirâmides como as dos exercícios anteriores para os colegas resolverem.

FICHAS DE VALORES

Equações com fichas de valores:

Vamos supor um jogo qualquer que envolva fichas e seus respectivos valores:



Observe agora a seguinte situação:

O jogador 1 têm: 2 fichas azuis; 5 fichas vermelhas; 3 fichas amarelas; e 7 fichas brancas. O jogador 2 têm: 6 fichas verdes; 4 fichas vermelhas; 2 fichas brancas; e 4 fichas pretas.

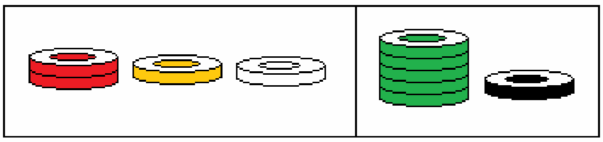
a) Qual jogador tem mais valores?

b) O que deve acontecer para que os dois jogadores tenham os mesmos valores?

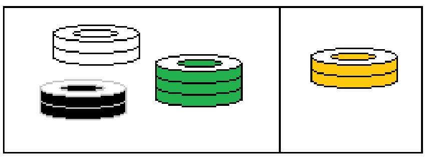
Exercícios:

1) Em cada caso, escolha uma única cor para adicionar fichas (em qualquer retângulo) até que a igualdade se torne verdadeira:

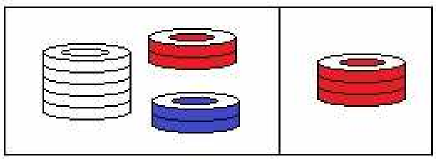
a)



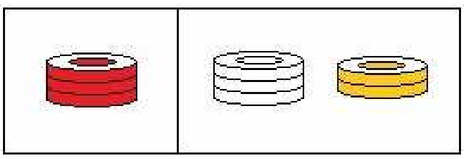
b)



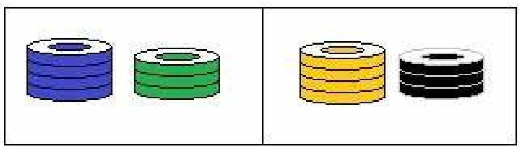
c)



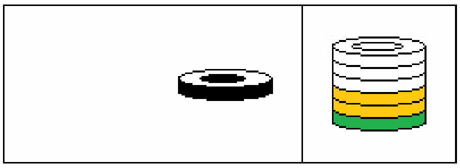
d)



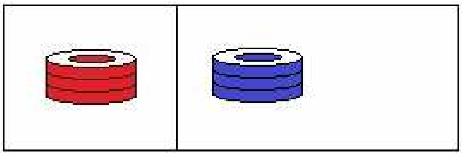
e)



2) Quantas fichas verdes devemos adicionar para que os retângulos abaixo tenham a mesma quantia em valores:



Quantos fichas azuis devemos adicionar para que o retângulo abaixo tenha a mesma quantia em valores:



3) Quantas fichas devemos adicionar para que a sentença seja verdadeira:

c) 2.(x(– 1) + 10) = 10

d) 45 = 3.(15 – x(– 2))

e) 17 = x(+ 3) -1

f) 4 + x(+ 8) = 36

g) 3(+3) = 4(+10) + x(– 1)

h) 3(– 2) = 1(+10) + x(– 2)

4) Crie exemplos como os exercícios anteriores para os colegas resolverem.

APÊNDICE C – Termo de consentimento informado

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, RG __________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma _________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada “Equações para o ensino fundamental”, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Bruno Bastos Braga. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Elisabete Zardo Búrigo, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone 33086212 ou e-mail elisabete.burigo@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Determinar se a pesquisa contribuiu para aprendizagem no ensino de matemática;
- Identificar as dificuldades dos alunos para a aprimorar os métodos de ensino.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da participação em oficina/aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvidas, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no e-mail bruno_b_braga@hotmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 24 de maio de 2012.

Assinatura do(a) responsável: ___________________________________.

Assinatura do(a) pesquisador(a): ________________________________.

Assinatura do(a) orientador(a) da pesquisa: _______________________.