UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

.

Jussara Aparecida da Fonseca

Porto Alegre, dezembro de 2012.

ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Jussara Aparecida da Fonseca

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob orientação da Profª. Drª. Elisabete Zardo Búrigo.

Porto Alegre, dezembro de 2012.

ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Jussara Aparecida da Fonseca

Dissertação aprovada em 21 de dezembro de 2012.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Gilli Martins (UFSM)

Prof.Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPGEMAT/IM/UFRGS)

Prof.ª Dr.ª Maria Paula Gonçalves Fachin (PPGEMAT/IM/UFRGS)

Porto Alegre, dezembro de 2012.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar agradecendo a Deus, por todos os momentos bons que tem me proporcionado, em especial, pela oportunidade de viver essa experiência e poder compartilha-la com meus entes queridos.

A professora Drª Elisabete Zardo Búrigo, minha orientadora, pela sua disponibilidade, compreensão e paciência, sempre me incentivando, especialmente nos momentos mais árduos do trabalho.

A minha família, por todo apoio, carinho e amor, durante toda minha caminhada até aqui. Meu porto seguro.

Ao meu amado, pelo apoio e compreensão nos momentos mais difíceis.

Aos colegas e professores do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS, pelo companheirismo e amizade, que muito contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.

Aos colegas professores e direção do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete, pela compreensão e disponibilidade em auxiliar na realização dessa pesquisa.

Aos alunos participantes da pesquisa que aceitaram e colaboraram para a realização do trabalho, sem os quais nada disso seria possível.

Aos membros da banca examinadora, professores Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, Maria Paula Gonçalves Fachin e João Carlos Gilli Martins, que se disponibilizaram a examinar esse trabalho.

A todos meu mais sincero agradecimento.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo analisar se uma estratégia de ensino baseada em situações-problema contribui para a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos da Educação de Jovens e Adultos. A sequência de ensino elaborada e implementada procurou abordar atividades que evocassem o cotidiano dos alunos e não dependessem de fórmulas previamente estudadas. A ordem em que as atividades foram propostas visou a formalização do princípio multiplicativo, como recurso a ser utilizado na resolução de problemas de contagem. A pesquisa foi desenvolvida sob a ótica de um estudo de caso, junto a uma turma de alunos dos cursos PROEJA Agroindústria e PROEJA Informática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete, e teve como aportes teóricos a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, os quais nos forneceram subsídios para a compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório e, das dificuldades apresentadas pelos alunos. O trabalho mostrou que é possível a aprendizagem de conteúdos de Análise Combinatória pelos alunos do PROEJA, através da implementação de uma sequência de ensino baseada na resolução de problemas, frente aos quais os alunos construíram diferentes estratégias de resolução que favoreceram o desenvolvimento do seu raciocínio combinatório.

.

Palavras-chaves: Análise Combinatória, princípio multiplicativo, PROEJA, Pensamento Formal, Campos Conceituais.

ABSTRACT

The present research aimed at analyzing to what extent a teaching strategy based on contextualized problems contributes to the learning of the Combinatorial Analysis by students from Education for Young Adults and Adults (*Educação de Jovens e Adultos* – EJA). The teaching sequence developed and implemented comprehended activities which evoked students' everyday life and were not dependent on previously studied formulas. The order in which the activities were proposed aimed the formalization of the multiplication principle as a resource to be used in the resolution of counting problems. The research was developed based on a case study, in a class of the National Program for integrating the Professional Education with Basic Education in the Education for Young Adults and Adults (*Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na modalidade de Educação de Jovens e Adultos – PROEJA*) from the Food Technology course and the Information technology course of the Farroupilha Federal Institute in the Campus Alegrete and had as theoretical basis the theory of cognitive development by Piaget and the theory of conceptual fields by Vergnaud, which offer groundings for understanding the development of combinatorial thinking and the difficulties presented by the students. This analysis showed that learning of Combinatorial Analysis is possible for the *PROEJA* students, through the implementation of a teaching sequence based on the resolution of problems, against which the students built different resolution strategies favoring the development of their combinatorial thinking.

KEYWORDS: Combinatorial analysis, Multiplication principle, *PROEJA*, Formal Thinking, Conceptual Fields.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde que iniciei, em 2006, minha carreira como docente, tenho trabalhado com a Educação de Jovens e Adultos (EJA). Inicialmente, trabalhei em um programa do governo federal denominado Programa Nacional de Inclusão de Jovens (PROJOVEM), cuja finalidade é proporcionar a jovens, com idade entre 18 e 29 anos, em condições de vulnerabilidade social, a oportunidade de concluírem o ensino fundamental e ainda obterem uma qualificação profissional. Esse programa contava com material didático próprio, bem como metodologia de trabalho pré-definida, não havendo muita liberdade de escolha de conteúdo ou ações pedagógicas. Permaneci no programa durante um ano, prazo previsto para o andamento do mesmo, ingressando logo depois nas redes de ensino municipais de São Leopoldo e Sapucaia do Sul.

Quando voltei a trabalhar com jovens e adultos, na EJA – Ensino Fundamental, na rede municipal de São Leopoldo percebi o quanto é importante, ao se trabalhar com esse público, entendê-lo e porque não dizer, aceitar a EJA como uma modalidade de ensino diferenciada, com características próprias, as quais requeriam um trabalho diferenciado daquele realizado nas turmas regulares.

Durante o tempo em que permaneci na rede municipal de São Leopoldo e Sapucaia do Sul, sempre procurei trabalhar, com as turmas de EJA, conteúdos que tivessem aplicabilidade no seu cotidiano, utilizando para tanto situações reais ou possíveis de realmente ocorrerem. Como se tratavam de turmas de EJA – Ensino Fundamental, essa "aplicabilidade" era relativamente fácil de ser construída, pois muito da matemática do cotidiano está presente nos conteúdos abordados no Ensino Fundamental.

Em 2010, tornei-me professora do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete. Esse novo trabalho trouxe grandes mudanças à minha vida profissional. Deixei de trabalhar com Ensino Fundamental, passando a trabalhar com Ensino Médio, Superior e PROEJA – Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos.

Ao começar trabalhar com o PROEJA, comecei a me questionar:

- *Será que é possível trabalhar os conteúdos do Ensino Médio de modo que façam sentido aos alunos, do mesmo modo como era possível fazer com os conteúdos do Ensino Fundamental?*
- *Como realizar tal ação, de forma a proporcionar, ao mesmo tempo, uma formação matemática de nível médio?*

Sempre considerei o ensino e a aprendizagem dos conceitos referentes à Análise Combinatória dos mais complexos para os alunos. Muitas vezes esse conteúdo é desenvolvido baseado na fixação de fórmulas e regras, sem foco na interpretação das situações descritas nos problemas.

Lembro-me de que quando tive meu primeiro contato com esse assunto, na época em que cursei o ensino médio, o professor nos informou as fórmulas que deveriam ser utilizadas, começando por fatorial e permutações, seguindo para as fórmulas dos arranjos e combinações, diferenciando esses dois tipos de problemas pela importância ou não de se considerar a ordem dos elementos que formam determinado agrupamento. Nesse período, resolvia os problemas através dos “macetes” ensinados pelo professor.

Já o segundo contato com a Combinatória foi durante uma disciplina no curso de graduação. Nessa ocasião, tive a oportunidade de rever todo o tópico já estudado no Ensino Médio sob a ótica do princípio multiplicativo, sem aplicação de fórmulas. Durante a fase inicial do curso de Mestrado, novamente cursei uma disciplina abordando a Análise Combinatória, na qual tive a oportunidade de relembrar alguns conceitos, bem como aprimorar outros.

Com essas experiências passei a compreender que o estudo da Análise Combinatória ia bem além da resolução de problemas por meio de fórmulas e alguns macetes. Assim, atuando no PROEJA e buscando melhorias no processo de ensino e aprendizagem, propus esta pesquisa com o intuito de analisar se uma estratégia de ensino, tendo por ponto de partida a resolução de problemas, pode propiciar a aprendizagem da Análise Combinatória na EJA.

1.1 Justificativa

Atualmente, a Análise Combinatória não é um campo de interesse de estudo apenas da Matemática. São inúmeras as aplicações em outras áreas, como por exemplo, na Computação, na Engenharia, na Biologia e na Economia, especialmente dos conhecimentos dos cálculos de Probabilidade. Porém, segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, apud ALMEIDA, 2010, p. 18), a Combinatória não é apenas uma técnica de cálculo de probabilidade. O raciocínio combinatório é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico geral, sendo, portanto, essencial sua inclusão nos currículos de Matemática.

Nesse sentido, as Orientações Curriculares Nacionais (OCN's), destacam a importância do estudo da Análise Combinatória:

> O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. (BRASIL, 2006b).

Concordando com as orientações, percebemos o quanto é importante repensarmos nossa prática docente ao ensinarmos o conteúdo de Análise Combinatória, de modo que a aprendizagem desse conteúdo faça sentido para os alunos. Quando ttal conteúdo for desenvolvido na Educação de Jovens e Adultos, essa preocupação é ainda maior, tendo em vista que esse aluno não constrói seu conhecimento matemático apenas quando retorna à Escola, mas sim durante toda sua trajetória de vida, o qual deve, portanto, ser validado e aproveitado pela escola.

Quando a aluno adulto retorna à escola, buscando não apenas a escolarização, mas também qualificação profissional e melhores condições de vida, anseia por uma aprendizagem matemática que possa utilizar de forma a se tornar o agente (re)construtor de sua história e de seu conhecimento (FONSECA, 2007). Desta forma, é necessário que a escola esteja preparada para receber e trabalhar com esse público, especialmente professores, como afirma Duarte:

> [...] o processo contraditório vivido pelo adulto desescolarizado mostra a necessidade de se desenvolver uma metodologia de ensino que possibilite a real superação-incorporação do conhecimento que ele já adquiriu, e não uma metodologia que meramente justaponha, ao que o individuo já sabe, aquilo que ele não sabe e precisa saber. (DUARTE, 2006, p. 17).

Quando analisamos as pesquisas já realizadas, abordando a aprendizagem do tópico Análise Combinatória, percebemos que estas são em número reduzido, se comparadas com pesquisas em outras áreas da Educação Matemática. Borba (2009) pesquisou a quantidade de trabalhos que têm sido realizados e apresentados em eventos nacionais e internacionais, sendo 11 encontros internacionais e 17 nacionais. A autora identificou um total de 64 trabalhos, um número considerado pequeno, para os 28 eventos analisados, o que indica a necessidade do estudo sobre esse tópico da matemática sob a ótica da Educação Matemática. Em relação a trabalhos envolvendo Análise Combinatória e a EJA, constatamos que os números são ainda menores, o que destaca a necessidade de haver mais pesquisas envolvendo tais áreas. Assim, justificamos a contribuição desta pesquisa, que tem por objetivo principal analisar se uma experiência de aprendizagem, tendo como ponto de partida a resolução de problemas, pode propiciar a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos do PROEJA.

1.2 Problemática e Objetivos

Com o presente trabalho, visamos responder ao seguinte questionamento: “Uma estratégia de ensino baseada em situações-problema contribui para a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos da EJA?”

Visando responder a questão norteadora, foi elaborada uma sequência de ensino, a ser implementada em uma turma de PROEJA, tendo por ponto de partida a resolução de problemas.

Tendo em vista a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos do PROEJA, buscou-se contemplar, na organização da sequência de ensino:

- proposição de atividades que não dependessem de fórmulas previamente estudadas;
- abordagem de problemas que evocassem o cotidiano dos alunos;
- formulação de problemas iniciais que permitissem aos alunos criar diferentes técnicas de resolução;

- construção de uma experiência de aprendizagem de modo a possibilitar a formalização do princípio multiplicativo;
- destaque do princípio multiplicativo como recurso na resolução dos problemas;
- análise das resoluções apresentadas pelos alunos;
- análise do pensamento multiplicativo apresentado pelos alunos a partir das atividades propostas.

A partir daí, outros questionamentos foram elaborados:

Quais estratégias de resolução são apresentadas pelos alunos da EJA a partir de suas experiências e conhecimentos prévios?

Os problemas propostos propiciam a construção de diferentes estratégias de resolução?

É possível, por meio dos problemas propostos, propiciar a compreensão do princípio multiplicativo?

1.3 Estrutura do Trabalho

Nosso trabalho foi organizado em sete capítulos, sendo o primeiro esta introdução, na qual apresentamos nossa justificativa e motivação, nosso objetivo e questões norteadoras.

O capítulo 2 traz nossos pressupostos teóricos: as contribuições da teoria cognitiva de Piaget sobre o pensamento formal e da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Traz também uma breve discussão sobre a resolução de problemas.

No capítulo seguinte, abordamos o conhecimento matemático foco desse estudo – a Análise Combinatória. Iniciamos o capítulo com uma abordagem histórica do tópico, apresentando em seguida os problemas que costumeiramente são trabalhados na Educação Básica. Finalizamos o capítulo com alguns trabalhos correlatos que abordam a temática no âmbito de estudo da Educação Matemática.

O capítulo 4 apresenta o público do nosso campo de pesquisa. Iniciamos com um breve histórico da EJA no Brasil, finalizando com a implantação do PROEJA, especificamente no Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete.

No capítulo 5 trazemos nossos referenciais metodológicos, assim como o universo e os sujeitos da pesquisa.

O capítulo 6 é destinado ao relato da aplicação da sequência e à análise qualitativa dos dados coletados.

O último capítulo é destinado às considerações finais do trabalho. Aqui retomamos os pontos mais relevantes, respondendo nossa questão norteadora, realizando algumas observações e sugerindo rumos para futuras pesquisas.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Nesta seção apresentaremos nossos referenciais teóricos: a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud. Recorremos a Piaget para compreender as relações entre o estudo da Análise Combinatória e o pensamento formal, posto que, segundo a teoria piagetiana, o raciocínio combinatório é uma das características desse estágio de desenvolvimento cognitivo. Por sua vez, a teoria de Verganud foi tomada como referencial para a construção das atividades, tendo em vista a metodologia utilizada, baseada na resolução de problemas, e para a interpretação dos resultados apresentados pelos alunos.

2.1 Piaget e a teoria do desenvolvimento cognitivo

Piaget (1999) considera a existência de quatro estágios de desenvolvimento cognitivo, com características próprias: sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório formal. Segundo essa teoria, o sujeito passará por todos esses estágios, na ordem em que estão apresentados, isto é, todos os estágios serão vivenciados ordenadamente pelo individuo. Contudo, para determinados sujeitos, esse processo poderá ser mais acelerado, mais lento ou até restrito.

O estágio de desenvolvimento conhecido por *sensório-motor* (aproximadamente 0 a 2 anos) é a fase do desenvolvimento em que a criança baseia suas atividades cognitivas em ações concretas e imediatas. É o período que representa a conquista de todo o universo que cerca a criança (PIAGET, 1999).

O estágio *pré-operatório* (aproximadamente 2 a 7 anos) caracteriza-se pela interiorização das construções do estágio anterior. É nesse estágio, graças à linguagem, que a criança torna-se capaz de reconstruir suas ações, através de narrativas. O sujeito inicia o processo de três modificações gerais da conduta: socialização, pensamento e intuição (PIAGET, 1999).

O estágio seguinte, o *operatório concreto* (aproximadamente 7 a 12 anos), é a fase que marca o desenvolvimento de aspectos complexos da vida psíquica, tanto referente à inteligência quanto à afetividade. Aparecem novas formas de organização, que completam as construções (socialização, pensamento e intuição) iniciadas no estágio anterior (PIAGET, 1999).

No último estágio, denominado estágio *operatório formal* (aproximadamente 12 anos em diante), o sujeito desenvolve a capacidade de construção de hipóteses, desenvolvendo o pensamento abstrato (hipotético/dedutivo), ou seja, é capaz de elaborar hipóteses mentalmente, não apenas com situações concretas (PIAGET, 1999).

É nessa fase que se desenvolve o pensamento formal, ou seja,

> as operações lógicas começam a ser transpostas do plano da manipulação concreta para o das ideias, expressas em linguagem qualquer (a linguagem das palavras ou dos símbolos matemáticos), mas sem o apoio da percepção, da experiência, nem mesmo da crença (PIAGET, 1999, p.59).

Segundo Flavell (1996), o sujeito ao se deparar com um problema, busca relações possíveis que poderiam ser validadas. Por meio de um processo de combinação, de experimentação e de análise lógica, avalia quais dentre elas são realmente verdadeiras. Ou seja, o sujeito passa a dominar o possível e não apenas o real. Desta forma,

> a realidade é concebida como um subconjunto especial dentro da totalidade de coisas que os dados permitem admitir como hipótese; é considerada como a parte que "é" de uma totalidade que abrange tudo aquilo que "poderia ser", sendo a tarefa do sujeito descobrir no que consiste esta parte (Ibidem, p. 209)

Essa característica do pensamento formal – "determinar a realidade no contexto das possibilidades" – fundamenta-se na capacitação do sujeito formular hipóteses. É esse pensamento hipotético-dedutivo que permite ao adolescente considerar o possível como um conjunto de hipóteses que devem ser testadas, a fim de serem validadas ou não. As hipóteses que forem verdadeiras passam a compor a realidade (FLAVELL, 1996).

Outra característica importante do pensamento formal é seu caráter proposicional. Como destaca Flavell (1996), "as importantes entidades que o adolescente manipula, ao raciocinar, deixaram de ser os dados rudimentares da realidade e passaram a ser afirmações – proposições – que contêm estes dados" (Ibidem, p. 210) . Ou seja, o adolescente utiliza os resultados das operações anteriores (concretas), formulando-os como proposições que podem ser utilizadas em novas operações, estabelecendo diversos tipos de conexões lógicas: implicação, conjunção, identidade, disjunção, entre outros.

Segundo a teoria piagetiana, o adolescente, diferentemente da criança, estaria apto a isolar sistematicamente todas as variáveis envolvidas em um problema e determinar todas as combinações possíveis dessas variáveis. Ou seja, ele é capaz de realizar um estudo combinatório dessas variáveis, de modo a garantir que todas as hipóteses sejam testadas, sendo algumas confirmadas e outras rejeitadas (FLAVELL, 1996).

Um estudo realizado por Inhelder e Piaget (1976) propôs a um grupo formado por crianças e adolescentes, um experimento que dependia da combinação de corpos químicos de modo a se obter um determinado resultado. Os autores apresentaram quatro frascos semelhantes, contendo líquidos incolores e inodoros, numerados de 1 a 4, da seguinte forma: 1 – ácido sulfúrico diluído; 2 – água; 3 – água oxigenada e 4 – tiosulfato. Além dos frascos foi apresentado um conta-gotas com uma substância, denominada *g* (iodeto de potássio), que ao ser misturada com os frascos 1 e 3, geraria uma substância de cor amarelada.

Os pesquisadores apresentaram dois frascos aos sujeitos, um com a substância 2 e outro com as substâncias 1+3, acrescentando a ambos algumas gotas de g, de modo que os sujeitos pudessem observar que, dependendo da combinação formada, poder-se-ia obter um líquido de cor amarela (1+3+g) ou não (2+g). Com isso, foi solicitado que os sujeitos, a partir dos frascos 1, 2, 3, 4 e g, obtivessem novamente um líquido de cor amarela.

Durante os experimentos, Inhelder e Piaget (1976), constataram que os sujeitos do estágio pré-operatório limitaram-se a associar casualmente dois elementos, explicando os resultados obtidos por simples fenomenismo ou casualidade. Os sujeitos do estágio operatório-concreto apresentaram alguns indícios do raciocínio combinatório, mas sem sistematização. Chegaram a combinar cada um dos frascos 1, 2, 3 e 4 com o conteúdo do conta-gotas (*g*); mas não chegaram a combinar o conteúdo de dois frascos com *g*. Já os sujeitos do estágio operatório formal apresentaram uma combinação sistemática, ou seja, combinaram inicialmente cada frasco com o conta-gotas, e percebendo que não obtinham a cor amarela passaram a realizar combinações 2 a 2, 3 a 3 entre os frascos e o conta-gotas, testando todas as possíveis combinações. Quando encontraram a solução esperada, continuaram o experimento buscando descobrir se não havia outras soluções possíveis.

Desse modo, Inhelder e Piaget (1976) assinalam que o raciocínio combinatório é um condicionante do pensamento formal, pois possibilita associações e correspondências de modo a obter relações de implicação, de disjunção e de exclusão de todas as ligações possíveis.

Sendo assim, de modo geral, segundo a teoria piagetiana, uma das características do pensamento formal é a orientação do real para o plano hipotético e possível, em que o raciocínio combinatório é um dos elementos constituintes do pensamento formal. Esse processo de desenvolvimento será vivenciado, em geral, por todos os sujeitos.

Por outro lado, algumas pesquisas têm demonstrado que nem todos desenvolvem um pensamento combinatório que possa ser mobilizado em diferentes situações. Duro (2012) investigou junto a grupo de 18 estudantes (10 do ensino regular e 8 da EJA), com idades entre 14 e 47 anos, como se dá o desenvolvimento do raciocínio formal, constatando que sujeitos que estariam, segundo a teoria piagetiana, em um mesmo estágio de desenvolvimento, apresentaram diferentes níveis de raciocínio.

Schliemann (1993), em sua pesquisa realizada junto a um grupo formado por cambistas do jogo do bicho, trabalhadores de mesma faixa social e calouros universitários, verificou que os calouros apresentaram melhor desempenho frete aos problemas que exigiam o raciocínio combinatório. Entretanto, a autora constatou que esse melhor desempenho foi devido ao maior tempo de escolaridade, e não necessariamente por terem conhecimento de fórmulas para solucionarem problemas de contagem. Por sua vez, o desempenho dos cambistas foi superior ao do outro grupo de trabalhadores, em virtude de sua experiência diária com situações que exigem o raciocínio combinatório. Com isso, a autora concluiu que a experiência diária e a instrução escolar devem andar juntas para o desenvolvimento de determinados conhecimentos matemáticos complexos, como é o caso da análise combinatória.

No mesmo sentido, Gómez-Granell (1998) aponta que o desenvolvimento do raciocínio formal exige duas condições complementares: a primeira envolve o desenvolvimento das capacidades necessárias para considerar um conjunto exaustivo de possibilidades hipotéticas e a segunda, de caráter sociocultural, requer que as pessoas sejam instruídas nos modos do discurso formal.

Sendo assim, podemos conjecturar que o desenvolvimento do raciocínio combinatório vai além do desenvolvimento de determinadas estruturas cognitivas, envolvendo diferentes fatores. Ou seja, um adulto, enquadrado, segundo Piaget, no estágio de desenvolvimento formal, pode apresentar diferentes compreensões sobre situações que dependem do raciocínio combinatório. Entre as causas podemos apontar as diferentes experiências vivenciadas por cada um e como essas experiências contribuíram no desenvolvimento de determinados conhecimentos.

2.2 Vergnaud e a teoria dos campos conceituais

A teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud carrega inúmeras contribuições da Teoria Cognitiva de Piaget. Entretanto, enquanto Piaget se dedicou à compreensão das estruturas gerais do pensamento, Vergnaud parte desses princípios, mas tendo por referência a aprendizagem de um conteúdo, especificamente a matemática e as ciências.

Desta maneira, a teoria dos campos conceituais preconiza que o conhecimento se estabelece e se desenvolve na interação e adaptação do sujeito com suas experiências, sendo através dessas e dos processos cognitivos, que ocorre a percepção, a representação, a conduta e o desenvolvimento de competências.

Moreira (2002) destaca que, para Vergnaud o conhecimento está organizado em campos conceituais, os quais são:

> um conjunto informal e heterogêneo, de problemas, situações, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição., que devem sofrer intervenções ao longo do processo de aquisição. (MOREIRA, 2002, p.8)

A teoria dos campos conceituais, segundo Franchi (2008) “visa à construção de princípios que permitem articular competências e concepções constituídas em situação, e os problemas práticos e teóricos em que essas competências e concepções se constituem” (FRANCHI, 2008, p. 199).

Vergnaud (1993) define a teoria dos campos conceituais como uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas.

Campo conceitual também é definido por Vergnaud como “um conjunto de problemas e situações, em que para o tratamento são necessários conceitos, procedimentos e representações diferentes, mas estreitamente interligados” (VERGNAUD, 1983, p. 127).

Moreira (2002) destaca que para Vergnaud, o âmago do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização. Para Vergnaud (2009), conceito (C) é um tripé formado por três conjuntos distintos, $C = (S, I, L),$ em que:

S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

I é o conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados pelas situações;

L é o conjunto de representações linguísticas e simbólicas que permitem representar os conceitos e suas relações e, consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam.

Segundo Vergnaud (1993), para estudar a construção e o desenvolvimento de um conceito, no decurso da aprendizagem ou quando de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos ao mesmo tempo. Ou seja, esses três conjuntos estão interligados, uma vez que um conceito só é construído na relação com outros conceitos, através da utilização de várias situações que requerem do sujeito a utilização de diferentes esquemas e simbolismos. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido.

Para Vergnaud (1996), situação pode ser entendida como tarefa, sendo que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, conhecendo suas naturezas e dificuldades próprias. O desempenho de cada subtarefa envolvida no processo afeta o desempenho global, contudo, a dificuldade de uma tarefa não é nem a soma nem o produto das diferentes subtarefas envolvidas (VERGNAUD, 1996, p. 167).

Os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentaram e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1996, p. 171).

Vergnaud (1994), ressalta que é através de uma variedade de situações que um conceito se torna significativo, pois são elas que dão sentido ao conceito. Esse sentido só é possível a partir das relações já realizadas com a nossa história. Sendo assim, o desenvolvimento do sujeito se dá por meio da construção de conceitos operatórios que lhe permitam tratar diversas situações.

Pode-se considerar que há duas classes de situações. Na primeira, temos as situações em que o sujeito possui competências necessárias ao tratamento quase que imediato da situação. Já na segunda classe, encontramos situações em que o sujeito não possui todas as competências necessárias para tratar da situação, devendo enfrentá-la, refletindo e explorando, buscando uma solução. Nessa busca, o sujeito pode chegar ao sucesso ou ao fracasso, fazendo uso de diversos *esquemas*, que podem ser combinados, descombinados e recombinados.

O conceito de *esquema* adotado por Vergnaud (2009) refere-se a uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dada. Em outras palavras, os esquemas são constituídos por objetivos e subobjetivos, por regras de ação, por possibilidades de inferência e por invariantes operatórios.

Segundo Franchi (2008), os invariantes operatórios – *conceito-em-ação* e *teorema-em-ação* – são responsáveis pelas diferenças entre um esquema e outro, pois são seus constituintes essenciais. Eles representam o comportamento e as estratégias utilizados pelo indivíduo diante de determinada situação. Como constituem a base conceitual dos esquemas, torna-se inviável o desenvolvimento de novos esquemas sem novos invariantes operatórios.

Para Vergnaud (2009), "*conceito-em-ação* é um conceito considerado pertinente na ação em situação e *teorema-em-ação* é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação" (Ibid, p. 23). Em outras palavras, teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira ou falsa e, conceito-em-ação é um objeto, um predicado ou uma categoria de pensamento tida como pertinente ou relevante (MOREIRA, 2002).

O significado de representação pode ser interpretado, segundo Vergnaud (2009), a partir de três vertentes. Na primeira, representação refere-se ao fluxo de consciência em que cada indivíduo testemunha seu próprio pensamento. Na segunda, são as categorias de pensamento com as quais o indivíduo capta e integra as informações presentes em cada situação. Na terceira, relaciona significados e significantes na linguagem natural e em outros sistemas simbólicos. (VERGNAUD, 2009).

Concluindo, na estruturação dos Campos Conceituais, três argumentos principais são considerados: 1) para a construção de um conceito não é suficiente apenas uma situação; 2) não se deve analisar uma situação com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo longo, com analogias e mal-entendidos entre situações, concepções, procedimentos e significantes (VERGNAUD, 1983).

Em suma, campo conceitual é, ao mesmo tempo, “um conjunto de situações pertencentes a uma mesma classe, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como problemas matemáticos” (VERGNAUD, 1996, p. 167).

2.2.1 Campo conceitual das estruturas multiplicativas

Vergnaud (1996) ressalta que a teoria dos campos conceituais pode ser aplicada em diversas áreas da Ciência. No caso da Matemática sugere dois campos conceituais: o campo das estruturas aditivas e o campo das estruturas multiplicativas. O primeiro consiste no conjunto de situações cujo domínio requer uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações e, o segundo, no conjunto de todas as situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações.

No Campo das Estruturas Multiplicativas, foco deste estudo, Vergnaud (1983) distingue os problemas multiplicativos em três grandes categorias: isomorfismo de medidas, proporção múltipla e produto de medidas.

Os problemas que compõem a primeira categoria, isomorfismo de medidas, são os problemas que envolvem uma relação quaternária entre quantidades, sendo duas a duas de um mesmo tipo de grandeza ($M_1\ e\ M_2$). Os problemas de isomorfismo de medidas dividem-se em quatro grandes classes: multiplicação, divisão-partição, divisão-quotição e quarta proporcional (VERGNAUD, 1983). Em síntese, são os problemas que envolvem a proporcionalidade simples.

1) Multiplicação Direta: consiste em problemas que envolvem quatro elementos e em que o valor unitário é conhecido.

Exemplo 1: Jorge tem 4 sobrinhos e deu 5 balas para cada um. Quantas balas Jorge distribuiu ao todo?

2) Divisão-partição: são problemas que envolvem a divisão entre quantidades de naturezas diferentes. Busca-se determinar o valor unitário.

Exemplo 2: Jorge comprou 20 balas e irá dividir igualmente entre seus 4 sobrinhos. Quantas balas cada sobrinho vai receber?

3) Divisão-quotição: são problemas que envolvem a divisão entre duas quantidades de mesma natureza. Procura-se encontrar a quantidade de unidades.

Exemplo 3: Jorge comprou 20 balas e irá dar 5 balas para cada um de seus sobrinhos. Quantos sobrinhos Jorge possui?

4) Quarta Proporcional: consiste nos problemas em que o valor unitário não é conhecido.

Exemplo 4: Por 20 balas, Jorge pagou R$ 3,00. Quanta gastaria se comprasse 30 balas?

As quatro categorias dos problemas de isomorfismo de medidas podem ser representados pelo esquema apresentado na Figura 1.

$$(1)\quad \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & a \\ b & x \end{array} \qquad\qquad (3)\quad \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & a \\ x & c \end{array}$$

$$(2)\quad \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & x \\ b & c \end{array} \qquad\qquad (4)\quad \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ a & b \\ c & x \end{array}$$

Figura 1 – Representação dos problemas de isomorfismo de medidas: (1) multiplicação, (2) divisão-partição, (3) divisão-quotição e (4) quarta proporcional. (VERGNAUD, 1983, 1996)

Os problemas relacionados à proporção múltipla tratam de uma relação quaternária envolvendo mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas. São os problemas de proporcionalidade composta (VERGNAUD, 1983).

Já os problemas pertencentes a categoria produto de medidas, envolvem uma relação ternária, isto é, utilizam-se duas grandezas para encontrar uma terceira. São os problemas que caracterizam os cálculos de área, volume, produto cartesiano, entre outros (VERGNAUD, 1983). Os problemas de produto de medidas podem ser divididos em duas grandes categorias:

1) Configuração Retangular: consiste em problemas em que conhecidas as medidas elementares, dispostas vertical e horizontalmente, busca-se determinar o produto dessas grandezas.

2) Combinatória: são problemas que envolvem a noção de produto cartesiano.

Os problemas relacionados à categoria combinatória são o foco deste trabalho. A noção de produto cartesiano é o fundamento dos problemas de contagem que costumam ser trabalhados no Ensino Médio: permutações, arranjos e combinações. Esses serão detalhados na seção seguinte.

2.3 Resolução de problemas

Vergnaud (1983) sinaliza que, além da ideia de tarefa, situação também pode ser entendida como problema. O autor destaca que o desenvolvimento de conceitos ocorre por meio da resolução de problemas, sendo que esse desenvolvimento é lento.

O autor, aponta que o processo de ensino só acontece quando os conceitos se desenvolvem, e é a partir de diferentes situações de resolução de problemas que os conceitos se tornam significativos para os alunos. Nesse processo, muitas vezes, o professor precisa abrir mão da postura metodológica na qual se acredita que a apresentação organizada, formal e rigorosa das teorias é suficiente para o aprendizado do aluno. Na realidade os dois momentos devem ocorrer, o aluno deve ser colocado diante de situações novas para que novos conceitos sejam desenvolvidos, sendo que posteriormente, as teorias formais por trás dos problemas propostos devem ser formalizadas.

Outros autores também corroboram a ideia de Vergnaud sobre a resolução de problemas como essência do processo de ensino e aprendizagem. Para Zuffi e Onuchic (2007) a resolução de problemas é uma metodologia de ensino, que consiste na utilização de problemas como ponto de partida para o desenvolvimento de novos conhecimentos, de modo que os alunos possam explicitar suas concepções envolvidas na resolução, percebendo a necessidade da construção de novos conceitos para a compreensão e resolução da situação proposta. Cabendo ao professor sintetizar os resultados alcançados pelos alunos e sistematizar e formalizar os novos conhecimentos matemáticos “discutidos e pesquisados durante o processo de busca das soluções, para depois retomá-los, então, em outros problemas e exercícios” (Ibidem, p. 5).

O conceito de problema utilizado por Zuffi e Onuchic (2007) é o mesmo adotado por Onuchic (1999), segundo a qual pro*blema é* “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”, ou seja, as situações propostas devem estimular os alunos a pensarem, de maneira desafiadora e ao mesmo tempo ter reflexos na realidade do aluno. No processo de resolução de um problema, o aluno é estimulado a compreender os dados do problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações e utilizar técnicas de resolução já conhecidas.

Durante o processo de resolução, os alunos devem ter total liberdade de utilizar os recursos e esquemas que considerarem melhor adaptados à situação proposta. Somente após as conclusões dos alunos, os novos conceitos devem ser formalizados e as novas técnicas de resolução instituídas.

Assim, percebemos que tanto na concepção de resolução de problemas apresentadas por Vergnaud (1983) quanto naquela adotada por Zuffi e Onuchic (2007), a construção do conhecimento se dá a partir da proposição de situações que desafiem os alunos a pensar, desenvolvendo, a partir disso, novos mecanismos cognitivos. Concordando com esses autores, pensamos que a resolução de problemas não deve ser proposta ao final do estudo de um tópico, como comumente acontece nos livros didáticos, mas sim como ponto de partida para o estudo de determinado conteúdo, de modo que os alunos percebam a necessidade da construção de novos conhecimentos e esquemas diferentes daqueles que já possuem.

3 A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nesta seção apresentaremos o campo da Matemática abordado em nossa pesquisa: a Análise Combinatória. Iniciaremos com uma breve abordagem histórica, após apresentaremos esse conhecimento sob a ótica da matemática, a partir dos problemas de contagem costumeiramente abordados na Educação Básica. Para tanto, utilizaremos duas abordagens: a primeira tendo por base o Princípio Multiplicativo e a segunda a partir da teoria de conjuntos e funções. Na parte final do capítulo, apresentaremos a Análise Combinatória como campo de estudo da Educação Matemática, através de pesquisas que estão sendo realizadas tendo por objetivo o ensino e aprendizagem desse conteúdo.

3.1 Breve Histórico

Os primeiros indícios de estudos referentes à análise combinatória datam de antes de Cristo. Entre os primeiros problemas estudados está o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$. Para se ter uma ideia, a obra *Os Elementos* de Euclides (300 a.C.), famosa pela sistematização dos conhecimentos geométricos, traz registros do desenvolvimento do binômio para o caso de $n = 2$. Báskhara (1114-1185?), foi outro matemático famoso, que demonstrou em seus tratados que sabia calcular permutações, arranjos e combinações de n elementos (MORGADO *et al.*, 1991)

No final do século X, o matemático árabe Al-Karaji demonstrou conhecer a lei de formação, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$, dos elementos do hoje denominado Triângulo de Pascal. Entre os chineses, por volta de 1300, também encontramos registros do Triângulo de Pascal (Figura 2), que era conhecido por Chu Shih-Chieh (Ibidem).

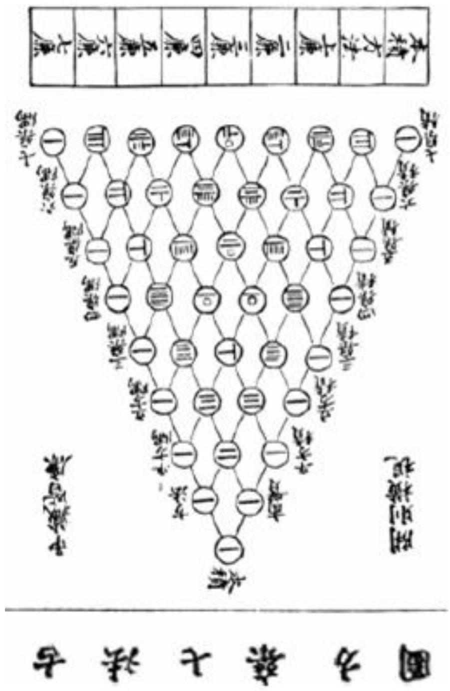


Figura 2 – Triângulo de Pascal dos chineses. (BOYER, 1996, p. 141).

Segundo Morgado *et al.* (1991), por volta de 1550, Michael Stifel (1486?-1567) mostrou como calcular $(1+x)^n$, partindo do desenvolvimento de $(1+x)^{n-1}$, introduzindo a nomenclatura Coeficiente Binomial. Enquanto que Nicolò Fontana (1499-1559), conhecido por Tartaglia, relacionou os elementos do triângulo com potências de $(x+y)$. Esses resultados foram utilizados mais tarde, por Pascal (1623-1662), para determinar os coeficientes de $(a+b)^n$. Também deram suas contribuições Jaime Bernoulli (1654-1705), que demonstrou que $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$; Isaac Newton (1646-1727), que mostrou como calcular diretamente $(1+x)^n$, sem antes calcular $(1+x)^{n-1}$.

Outro matemático importante no desenvolvimento da Combinatória foi Pierre de Fermat (1601-1665); deve-se a ele, e a Pascal, a origem do estudo das Probabilidades. Ao ser procurado por um nobre jogador francês, Chevalier de Méré, para examinar a probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas, Pascal começou a estudar a situação e a se corresponder com Fermat, que se interessou pelo assunto. As discussões entre eles deram início ao estudo da Teoria das Probabilidades Finitas (Ibidem).

Conforme ressaltam Morgado *et al.* (1991), a Teoria das Probabilidades só se desenvolveu realmente quando foi encarada como um potente instrumento no estudo de situações envolvendo taxas de mortalidade, prêmios de seguro, impostos, doenças, entre outras. Entre alguns matemáticos que contribuíram para o avanço nos estudos das probabilidades podemos citar: John Graunt (1620-1675), Johan de Witt (1625-1672), Edmund Halley (1656-1742), Richard Price (1723-1791), Abraham De Moivre (1667-1754), entre outros. Mas nenhum teve tanta importância e repercussão quanto Laplace (1749-1827), que publicou no Tratado Analítico das Probabilidades inúmeros problemas, introduzindo poderosas técnicas de resolução, como as funções geradoras e aproximações via cálculo diferencial e integral.

Outra importante contribuição no desenvolvimento da Análise Combinatória é devida a Leonard Euler (1707-1783). Seus estudos colaboraram para o desenvolvimento de um campo novo dentro da Análise Combinatória, a teoria de grafos. O problema motivador de Euler ficou conhecido como “Problema das Sete Pontes de Königsberg”. Esse problema, resolvido por Euler em 1736, tinha o seguinte enunciado: “Seria possível fazer um passeio pela cidade de Königsberg de maneira a cruzar todas as pontes da cidade, uma, e uma só vez, voltando ao ponto de partida?” (EVES, 2004)

A cidade de que trata o problema era famosa por suas sete pontes, sendo que cinco davam acesso a uma ilha, conforme mostra a Figura 3. Euler mostrou que a resposta à questão é negativa.

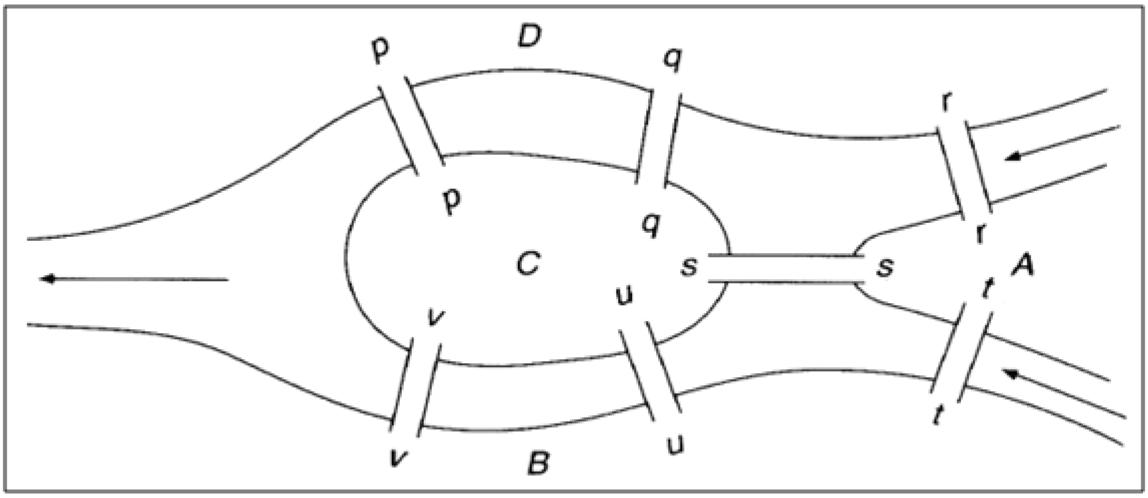


Figura 3 – Problema das Sete Pontes de Königsberg (EVES, 2004, p. 500).

Graças à teoria dos grafos, é possível hoje modelar matematicamente problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de dados e da própria matemática (MORGADO *et al.*, 1991), possibilitando avanços dentro da própria Matemática e de outras ciências como Informática, Economia, Biologia e Física.

Em relação ao desenvolvimento da Análise Combinatória no Brasil, enquanto conteúdo escolar, os primeiros registros que se tem são a partir de 1931[1]. Nesse período, foi instituído o Ensino Secundário de dois ciclos: Fundamental (5 anos) e Complementar (2 anos). A organização do Ensino Secundário foi estabelecida por meio de um conjunto de Decretos do então ministro Francisco Campos, fazendo com que esse momento histórico da educação brasileira ficasse conhecido como Reforma Francisco Campos (DASSIE, 2008).

Com a implantação dessa Reforma, o ensino da análise combinatória no ciclo fundamental passou a ser indicado para a quinta série sob o título “noções de análise combinatória”. Já no ciclo complementar, obrigatório àqueles que quisessem ingressar no Ensino Superior, referia-se a complementos de análise combinatória (Programa de Ensino da Reforma Francisco Campos *apud* DASSIE, 2008).

Com a Reforma de Capanema, em 1942, foi instituído o curso Ginasial (4 anos) e o curso Colegial - clássico ou científico (3 anos). O ensino da Análise Combinatória sob a denominação “Noções de Análise Combinatória”, passou, então, a fazer do programa da 2ª série do Curso Colegial, tanto clássico como científico (Programa de Ensino da Reforma Capanema *apud* DASSIE, 2008).

Em 1951, a Portaria nº 1045, de 14 de dezembro, instituiu os planos de desenvolvimento dos programas mínimos do Ensino Secundário. O estudo da Análise Combinatória permaneceu na 2ª série do Curso Colegial, sob a denominação Análise Combinatória Simples. A Portaria descreve ainda quais seriam os conteúdos que deveriam ser abordados no estudo da combinatória:

> 1 – arranjos de objetos distintos: formação e cálculo do número de grupamentos; 2 – permutações de objetos distintos: formação e cálculo do número de grupamentos, inversão, classe de uma permutação; teorema de Bézout; 3 – Permutações simples com objetos repetidos; cálculo do número de grupamentos; 4 – Combinações de objetos distintos: formação e cálculo do número de grupamentos, Relação de Stifel, Triângulo Aritmético de Pascal. (BRASIL, 1951)

---

[1] Antes de 1931, a frequência ao Ensino Secundário não era condição para o ingresso no Ensino Superior.

Com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases, em 1961, os Estados passaram a ter autonomia para a elaboração de seus programas. Mais tarde, em 1996, com a publicação da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9.394/96), essa autonomia foi repassada às escolas. A partir de então, os programas do Ensino Médio passaram a ser regulamentados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais, tendo como subsídios os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares Nacionais.

3.2 Os problemas de contagem

A Análise Combinatória baseia-se na "formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios com os objetos de uma coleção" (VAZQUES; NOGUTI, 2004, p. 4).

Nesta seção iremos apresentar os problemas de contagem que comumente são abordados na Educação Básica: arranjos, permutações e combinações. Para tanto, utilizaremos duas abordagens distintas. A primeira fará referência ao modo como esses problemas são costumeiramente desenvolvidos no Ensino Médio e a segunda trará uma abordagem a partir da linguagem da teoria de conjuntos e funções. Ressaltamos que a segunda abordagem não foi considerada no momento de construção, aplicação e discussão das atividades.

Visando facilitar a leitura, deixando o texto mais fluido, optamos por indicar aqui nossos referenciais utilizados para as duas abordagens do tópico em estudo, evitando a repetição no desenvolvimento do texto. A primeira abordagem teve aporte em Morgado *et al*. (1991) e Santos, Mello e Murari (2007). Enquanto a segunda se baseou nas obras de Papy (1972) e Muniz Neto (2012).

3.2.1 O Princípio Multiplicativo

A resolução dos problemas de contagem fundamenta-se no chamado Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo. Segundo

Santos, Mello e Murari (2007) o princípio multiplicativo pode ser enunciado da seguinte maneira:

> Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \times n$ (Ibidem, p. 39).

Para ilustrar a situação proposta, vejamos uma atividade no Quadro 1, integrante da sequência de ensino trabalhada com o grupo de alunos da pesquisa.

Vanessa irá comprar um telefone celular novo. Ela vai a uma loja fazer uma pesquisa de preço e a loja lhe oferece 5 modelos diferentes com duas opções de planos de tarifas (pré-pago e pós-pago). Quantas possibilidades diferentes Vanessa têm para comprar um telefone nessa loja?

Quadro 1 – Atividade 1 do primeiro conjunto de atividades.

O problema proposto é composto por dois eventos sucessivos: escolher um modelo de celular e escolher um plano de tarifa. Assim, podemos afirmar que a primeira etapa da resolução da atividade consiste em escolher um modelo de celular entre cinco opções disponíveis (M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5). Enquanto a segunda corresponde à escolha do plano de tarifa, dentre duas opções (P_1 e P_2).

Podemos ilustrar a situação proposta no problema através da árvore de possibilidades representada na Figura 4.

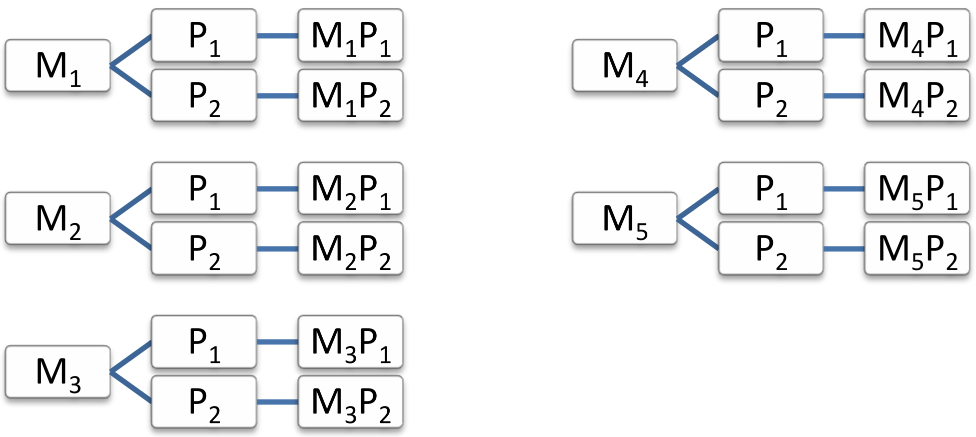


Figura 4 – Árvore de possibilidades da Atividade 1 do primeiro conjunto de atividades.

Podemos observar que para cada modelo de aparelho há duas possibilidades de planos, como representado na figura 4. Assim, pela árvore de possibilidades, podemos notar que ao total são 10 ($5 \times 2 = 10$) possibilidades de escolhas de um modelo de aparelho celular e um plano de tarifa.

Na situação descrita, podemos perceber que é fácil enumerar todas as possibilidades de compra do aparelho de celular. Porém, nos casos em que o número de possibilidades é elevado, o método de resolução pela árvore de possibilidades é cansativo, tornando-o inviável. Nesses casos, podemos generalizar o Princípio Multiplicativo para um evento composto por n etapas. Para tanto é necessário conhecermos de quantas maneiras cada etapa pode ocorrer. Podemos interpretar essa situação da seguinte maneira:

- Evento A_1: pode ocorrer de m_1 maneiras;
- Evento A_2: pode ocorrer de $m_2$maneiras;
- Evento A_3: pode ocorrer de m_3 maneiras;

$\vdots$

- Evento A_i: pode ocorrer de $m_i$maneiras.

Assim, o principio multiplicativo pode ser estendido para n etapas: “se um evento A_i, pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ maneiras diferentes” (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 40).

O Princípio Multiplicativo também pode ser explicitado na linguagem de conjuntos, sendo, nesse caso, denominado Produto Cartesiano: sejam A e B dois conjuntos finitos com cardinalidade r e s, respectivamente, isto é, A tem r elementos e B tem s elementos. Podemos escrever $\#A = n$ ou $|A| = n$. Chamamos de produto cartesiano $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tal que $a \in A$ e $b \in B$. Podemos representá-lo por:

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \quad e \quad b \in B\}$$

Para quaisquer conjuntos A e B

$$(a, b), (c, d) \in A \times B : (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

Assim, $|A \times B| = |A| \cdot |B| = r \cdot s$.

Esse mesmo raciocínio pode ser estendido para mais conjuntos. Consideremos, por exemplo, os conjuntos finitos A, B e C. O produto cartesiano $A \times B \times C$ será o conjunto das ternas (a, b, c) tais que $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, ou seja,

$$A \times B \times C = \{(a, b, c)/a \in A, \;\; b \in B \; e \;\; c \in C\}$$

Todavia,

$$(a, b, c), (d, e, f) \in A \times B \times C: (a, b, c) = (d, e, f) \Leftrightarrow a = d, b = e, c = f$$

Logo,

$$|(A \times B \times C)| = |((A \times B) \times C| \; = \; |A \times B| \cdot |C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$$

A mesma ideia pode ser utilizada para *n* conjuntos finitos: sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos, chamamos de produto cartesiano $A_1 \times \; A_2 \times \; \dots \times \; A_n$, o conjunto das n-uplas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, onde $a_i \in A_i$, para $i = 1, 2, \; \dots \;, \; n$, isto é,

$$A_1 \times \; A_2 \times \; \dots \times \; A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)/a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_i \in A_i\}$$

Segue que

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \; \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

Ou,

$$|A_1 \times \; A_2 \times \; \dots \times \; A_n| = |A_1| \cdot |\, A_2| \cdot \; \cdots \; \cdot \; |\, A_n|$$

3.2.2 Arranjos

Os arranjos consistem nas ordenações possíveis que podem ser formadas com certo número de elementos de um conjunto (ou todos os elementos). Conforme define Santos, Mello e Murari (2007), “arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo” (Ibidem, p. 57).

Vejamos, como exemplo, no Quadro 2, um problema proposto na sequência. de ensino.

Para a Copa do Mundo de 2014, que será realizada no Brasil, alguns estádios estão sendo construídos e outros reformados. Consideremos um estádio que contará com 8 portões de entrada/saída. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar no estádio e sair por um portão diferente do que foi usado para entrar?

Quadro 2 – Atividade 5 do primeiro conjunto de atividades.

O problema consiste em duas etapas sucessivas de escolhas: escolher um portão para entrar e um para sair, sendo que o portão que foi escolhido para entrada não pode ser utilizado para saída. Denominando os oito portões como P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 e P_8, podemos representar, a partir de um diagrama de árvore, a situação proposta considerando a entrada pelo portão P_1 (Figura 5).

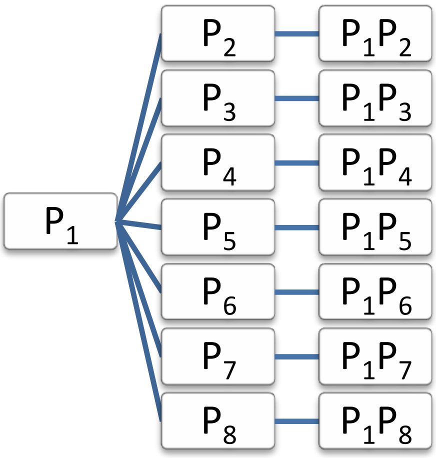


Figura 5 – Árvore de possibilidades considerando o portão P_1 como portão de entrada.

Nessa situação, a construção de toda a árvore de possibilidades é um processo árduo, pois o número total de possibilidades é relativamente alto. Porém, ao realizar a construção de uma parte da árvore podemos observar que a situação descrita para o portão de entrada P_1 se repetirá quando considerarmos os demais portões como “portão de entrada”. Assim, como são oito os portões que podem ser utilizados como entrada, sendo que para cada um deles haverá sete possibilidades de entrada/saída, teremos $8 \times 7 = 56$ maneiras distintas de entrar e sair do estádio.

Em outras palavras, podemos representar as duas etapas de escolhas dos portões da seguinte maneira:

- 1ª etapa (escolher um portão para entrar no estádio): 8 possibilidades
- 2ª etapa (escolher um portão de saída): 7 possibilidades (o portão utilizado para entrar não pode ser utilizado para sair.)

Observamos que nesse caso não iremos utilizar todos os portões disponíveis. Podemos escolher o portão de entrada de oito maneiras distintas e o portão de saída de sete maneiras, logo, pelo princípio multiplicativo, podemos entrar e sair do estádio de $8 \times 7 = 56$ maneiras distintas.

É possível generalizarmos o resultado para um conjunto com n elementos distintos, onde serão formados agrupamentos com k elementos distintos, em que $k \leq n$.

- 1ª etapa (escolher o primeiro elemento): n possibilidades
- 2ª etapa (escolher o segundo elemento): $n - 1$ possibilidades
- 3ª etapa (escolher o terceiro elemento): $n - 2$ possibilidades

$$\vdots$$

- *k-ésima* etapa (escolher o *k-ésimo* elemento): $n - (k - 1) = n - k + 1$ possibilidades[2].

Através do princípio multiplicativo, podemos determinar o total de possibilidades para agrupar (arranjar) n elementos em grupos de k elementos, $k \leq n$.

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

Indicando o número desses possíveis arranjos por $A_{n,k}$, teremos:

$$A_{n,k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

A expressão determinada acima é a fórmula utilizada para determinarmos o número de arranjos de n elementos, tomados k a *k* ($k \leq n$).

Assim como procedemos em relação ao princípio multiplicativo, também podemos estender o raciocínio dos arranjos para a linguagem de conjuntos e funções, tratando o número de arranjos como o número de funções injetoras[3] de A em B.

Antes de determinarmos o número de funções injetoras de A em B, ambos finitos, vamos relembrar como encontrar o número de aplicações entre dois conjuntos finitos. Vejamos um exemplo sendo $|A| = 3$ e $|B| = 4$ (Figura 6).

---

[2] Deve-se notar que para a escolha do $k - \acute{e}simo$ elemento é preciso desconsiderar, dos n elementos iniciais, os $k - 1$ elementos já escolhidos nas etapas anteriores.

[3] Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, respectivamente. Uma função injetora é uma aplicação $f: A \to B$ tal que para todo $x_1, x_2 \in A$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

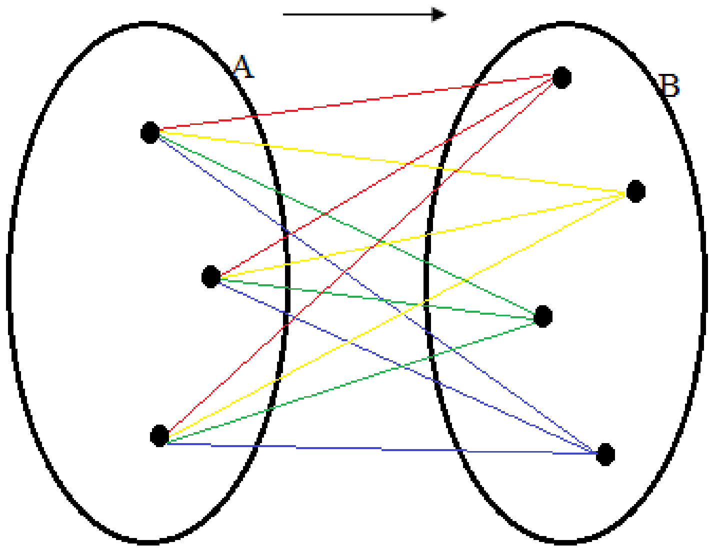


Figura 6 – Diagrama de flechas das aplicações de A em B, em que $|A| = 3$ e $|B| = 4$.

No diagrama, cada aplicação corresponde a um conjunto de “flechas” que partem de A e chegam em B. Para determinarmos uma aplicação de A em B, devemos escolher uma flecha para cada um dos elementos de A. O número de aplicações de A em B será o número de escolhas que pudermos fazer, resultando em diferentes conjuntos de flechas.

Para cada elemento de A, podemos escolher uma flecha dentre 4. Como são 3 elementos em $A,$ podemos escolher o conjunto de flechas de $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ maneiras.

Para um conjunto A com m elementos e um conjunto B, com n elementos podemos fazer essa escolha de $\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{m-fatores} = n^m$ maneiras.

Para determinarmos o número de funções injetoras não basta contarmos o total de aplicações, pois dois elementos de *A* não podem estar ligados a um mesmo elemento de *B*. Assim, voltando ao exemplo em que $|A| = 3$ e $|B| = 4$ (Figura 7), ao escolhermos uma flecha vermelha de um determinado conjunto de flechas, outra flecha vermelha não poderá ser escolhida. Do mesmo modo, escolhida a flecha vermelha para um determinado elemento de A, não podemos escolher, para o mesmo elemento, a flecha azul, verde ou amarela.

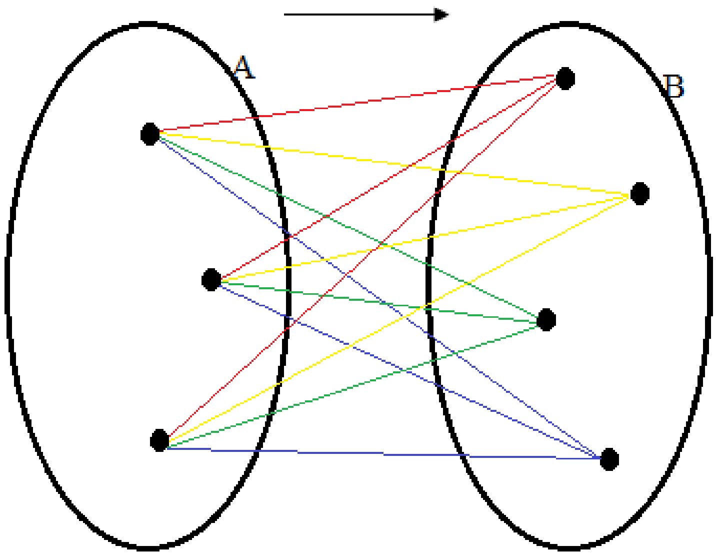


Figura 7 – Diagrama de flechas das aplicações de A em B, em que $|A| = 3$ e $|B| = 4$.

Portanto, para o primeiro elemento de A, podemos escolher uma entre quatro opções de imagem. Escolhida a primeira, por exemplo, a vermelha, a mesma não pode ser escolhida para o segundo e terceiro elementos de A. Logo, para o segundo elemento, podemos escolher dentre três opções de imagem, digamos a amarela e, para o terceiro elemento escolhemos uma entre duas opções, por exemplo, a azul.

Assim, o número de funções injetoras de A em B é igual ao número de maneiras através das quais podemos escolher, simultaneamente, uma flecha dentre um conjunto de quatro, outra flecha de um conjunto de *3* flechas $(4 - 1)$ e outra flecha de um conjunto de duas flechas $(4 - 2)$. Pelo Princípio Multiplicativo encontramos $4 \times 3 \times 2 = 24$ funções injetoras de A em B, tais que $|A| = 3$ e $|B| = 4$.

Generalizando o resultado, para $|A| = k$ e $|B| = \mathrm{n},$ o total de funções injetoras de A em B será:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

É possível perceber que a expressão encontrada corresponde ao número de arranjos de n elementos tomados k a $k.$ Assim, podemos concluir que o número de funções injetoras de um conjunto de n elementos em um conjunto de k elementos corresponde ao número de arranjos de n elementos tomados k a k:

$$A_{n,k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

3.2.3 Permutações

As permutações consistem na quantidade de ordenações possíveis que podem ser realizadas com n objetos de um conjunto. Podemos representar as permutações de n objetos por *n!* (fatorial) ou por P_n. Segundo Morgado *et al.* (1991), o número de modos de ordenar n objetos distintos é $n(n-1)\dots 1 = n!$, sendo que temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n - 1$ modos de escolher o que ocupará o segundo lugar, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar.

Vejamos, como exemplo no Quadro 3, uma situação apresentada na sequência de ensino.

Um grupo de pessoas está organizando uma excursão pela Serra Gaúcha. Eles irão visitar as cidades de Caxias do Sul, Canela, Gramado, Bento Gonçalves e Carlos Barbosa. O grupo está montando seu roteiro de viagem decidindo a ordem em que irão visitar as cidades. Quantas são as possibilidades de roteiro que o grupo pode formar?

Quadro 3 - Atividade 1 do segundo conjunto de atividades.

Na situação proposta, o objetivo é formar um roteiro de viagem passando por cinco cidades determinadas. Cada etapa da resolução consistirá em escolher uma cidade dentre as disponíveis. Observamos que, a cada nova etapa, a cidade que for escolhida não poderá mais ser considerada.

Notadamente, a quantidade de possibilidades envolvidas nessa atividade é bem maior do que a encontrada no exemplo anterior. Sendo assim, esboçaremos apenas um ramo da árvore de possibilidades (Figura 8), utilizando a seguinte notação para representar cada uma das cidades: C_1 (Caxias do Sul), C_2 (Canela), G (Gramado), B (Bento Gonçalves) e C_3 (Carlos Barbosa).

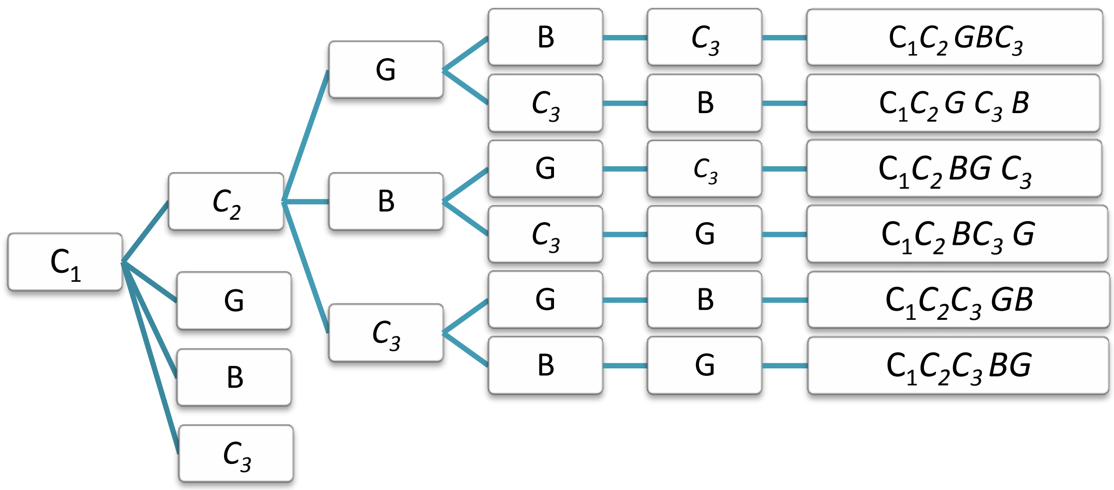


Figura 8 – Ramo da árvore de possibilidades da atividade 1 do segundo conjunto de atividades.

Observamos que a enumeração de todas as possibilidades por intermédio da árvore será bem trabalhosa, visto que realizamos a montagem de apenas um ramo para uma cidade inicial e já encontramos seis possibilidades de roteiros.

Optamos por utilizar um ramo da árvore de possibilidades apenas como recurso auxiliar na representação de algumas possibilidades e para podermos visualizar a multiplicação que ocorre. Contudo, podemos interpretar a situação, identificando as diferentes etapas distintas e sucessivas, que compõem o evento em questão:

- 1ª etapa (escolher uma entre 5 cidades): 5 maneiras
- 2ª etapa (escolher uma entre 4 cidades): 4 maneiras
- 3ª etapa (escolher uma entre 3 cidades): 3 maneiras
- 4ª etapa (escolher uma entre 2 cidades): 2 maneiras
- 5ª etapa (escolher a cidade restante): 1 maneira.

Assim, para a escolha da primeira cidade há cinco possibilidades. Sendo esta escolhida, restam quatro possibilidades de escolha para a segunda cidade, três para a terceira, duas para a quarta e uma única para a quinta cidade. Podemos representar essa situação utilizando o princípio multiplicativo, por $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras de escolher o roteiro da viagem.

Podemos generalizar a situação apresentada para n elementos de um dado conjunto, visto que todos os elementos serão utilizados e, desta forma, haverá n etapas, sendo que, a cada nova etapa, o número de possibilidades diminui em uma unidade. Em outras palavras, a cada nova escolha, o número de possibilidades é uma unidade menor do que na escolha anterior.

- 1ª etapa (escolher o primeiro elemento): n possibilidades
- 2ª etapa (escolher o segundo elemento): $n - 1$ possibilidades
- 3ª etapa (escolher o terceiro elemento): $n - 2$ possibilidades

$\vdots$

- *n-ésima* etapa (escolher o último elemento): 1 possibilidade

Pelo princípio multiplicativo, podemos determinar o total de possibilidades de escolher todos os elementos pela multiplicação das possibilidades de cada etapa, ou seja,

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Denotando a expressão acima por *n!* ou P_n podemos reescrever:

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

Santos, Mello e Murari (2007) definem permutação de n objetos distintos como "qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denotamos por P_n o número das permutações simples dos n objetos, então $P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$" (Ibidem, 2007, p. 44).

Na linguagem de conjuntos, o número de permutações corresponderá ao número de funções bijetoras de um conjunto finito A em um conjunto finito B.

Pelo princípio bijetivo temos que: se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então $|A| = |B|$ se e somente se existe uma bijeção $f: A \to B$.

De fato, suponhamos que exista uma bijeção $f: A \to B$. Se $|A| = n$, tomemos uma bijeção $g: I_n \to A$, em que I_n designa o conjunto dos naturais de 1 a n. Então $f \circ g: I_n \to B$ também é uma bijeção, de modo que $|B| = n$, e daí, $|A| = |B|$. Reciprocamente suponhamos que $|A| = |B| = n$, com bijeções $g: I_n \to A$ e $h: I_n \to B$, então $h \circ g^{-1}: A \to B$ é uma bijeção de *A* em *B*.

Por outro lado, se A e B são conjuntos finitos então f é uma injeção se e somente f é uma bijeção de A em B.

Consideremos que $f: A \to B$ seja uma bijeção, então, pela própria definição de função bijetora, temos que f é injetora. Reciprocamente, se $f: A \to B$ é uma função injetora e $|A| = |B| = n$, é evidente que $f: A \to B$ é uma bijeção, visto que todo elemento de B tem um único correspondente em A.

Assim, o número de bijeções $f: A \to B$, em que $|A| = |B| = n$, será igual ao número de funções injetoras $f: A \to B$, o qual já sabemos corresponde a:

$$n \times \ (n-1) \times \ (n-2) \times \ldots \times . (n-(n-1)+1) \times (n-n+1) =$$
$$= \underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}_{n-fatores}$$

O total de bijeções, determinado pela expressão acima, denomina-se permutações de *n* elementos.

3.2.4 Combinações

As combinações correspondem ao número de agrupamentos que podemos formar com um determinado número de elementos de um conjunto, mas em que ordenações diferentes com os mesmos elementos não caracterizam agrupamentos distintos. Ou seja, os agrupamentos diferem entre si apenas pela natureza de seus elementos. Para Santos, Mello e Murari (2007) as "combinações simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos" (Ibidem, p. 62).

Para ilustrar, iremos desenvolver um problema que pretendíamos propor na sequência de ensino, mas que em virtude do pouco tempo que dispúnhamos acabou não sendo incluído entre as atividades propostas (Quadro 4).

Um lazer muito praticado na nossa região é o jogo de Truco. Sabemos que ele é jogado por grupos de seis pessoas, separadas em dois trios que competem seguindo as regras do jogo. Considerando que oito pessoas querem jogar Truco, de quantas maneiras é possível formar um trio participante?

Quadro 4 – Exemplo de situação a ser proposta abordando combinação simples.

Suponhamos que as oito pessoas que estão dispostas a jogar chamam-se Ana, Bianca, Carlos, Daniel, Eva, Felipe, Gabriel e Hugo. Iremos identificá-los por A, B, C, D, E, F, G e H, respectivamente. No processo de escolha, cada etapa consistirá em escolher um participante para a composição do trio:

- 1ª etapa (escolher a primeira pessoa): 8 possibilidades
- 2ª etapa (escolher a segunda pessoa): 7 possibilidades
- 3ª etapa (escolher a terceira pessoa): 6 possibilidades

Sabemos que, dado um conjunto com oito elementos, para formarmos sequências de três elementos, podemos utilizar o princípio multiplicativo, obtendo $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilidades. Contudo, na situação do exemplo não queremos formar sequências, mas sim agrupamentos, que não diferem entre si pela ordem dos elementos que os compõem. Nesses termos, veremos que existirão diferentes sequências, correspondentes ao mesmo trio, conforme é possível observar no ramo da árvore de possibilidades representado na Figura 9.

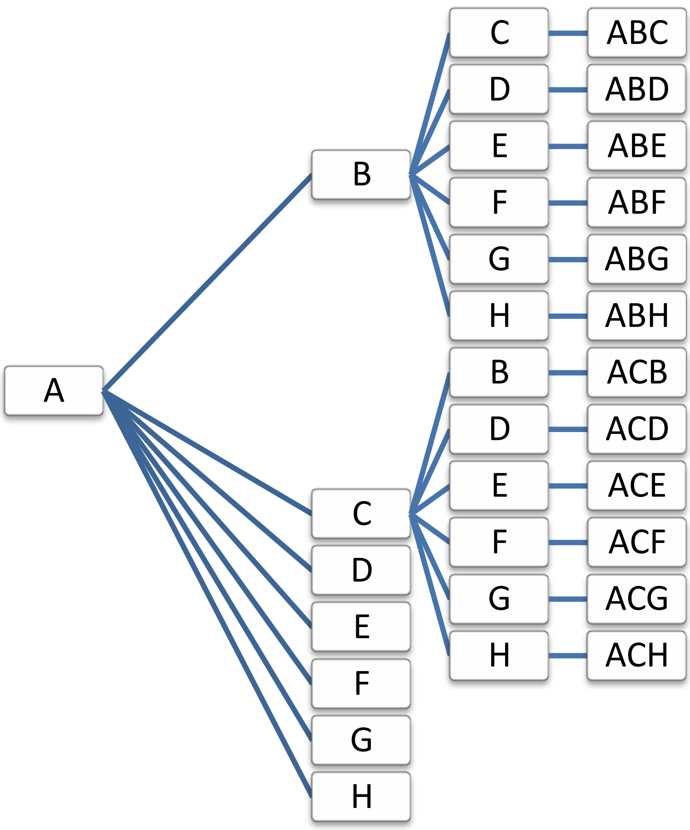


Figura 9 – Ramo da árvore de possibilidades referente à atividade do quadro 4.

É possível ressaltar que nesses dois ramos da árvore considerados já encontramos 12 possíveis trios. Entretanto, podemos notar que dentre esses, dois trios são formados pelos mesmos integrantes: ABC e ACB, diferenciando-se apenas pela ordem dos participantes, o que na situação do problema não configura trios diferentes, visto que os participantes são os mesmos.

Podemos notar que outros trios, diferenciados pela ordem, podem ser formados com esses mesmos jogadores: BAC, BCA, CAB e CBA. Todos os seis trios destacados não podem ser considerados distintos, pois são compostos pelos mesmos participantes. A mesma situação irá se repetir para outros casos de três participantes quaisquer, ou seja, a cada três participantes, a permutação entre seus integrantes, não configura trios distintos.

Assim, temos que a quantidade de trios encontrados (336) é seis ($P_3 = 3!$) vezes o total de trios distintos (T), pois em cada grupo de três pessoas pode haver permutações, gerando seis trios iguais. Deste modo, $6 \cdot T = 336$ e o total (T) de trios distintos será $T = 56$ trios distintos.

Em outras palavras:

$$56 = \frac{336}{6} = \frac{8.7.6}{3!} = \frac{A_{8,3}}{P_3}$$

Pelo exposto, podemos concluir que a divisão do número total de sequências pelo número de permutações dos elementos de cada grupo determina o número de agrupamentos distintos, que diferem entre si pela natureza dos seus elementos. Esses agrupamentos são o que denominamos combinações simples.

Podemos generalizar o resultado para um conjunto com *n* elementos distintos, onde serão formados agrupamentos com k elementos distintos, em que $k \leq n$, que não diferem entre si pela ordem dos k elementos.

Já sabemos que o total de sequências de k elementos escolhidos dentre n elementos ($k \leq n$), é dado por:

$$A_{n,k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

Como a permutação dos *k* elementos de um agrupamento origina uma única combinação, o número de combinações ($C_{n,k}$) dos n elementos tomados k a k é:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}$$

$$C_{n,k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$$

A última expressão encontrada é a fórmula utilizada para determinarmos as combinações[4] de n elementos, tomados k a k $(k \leq n)$.

Do mesmo modo como procedemos nos demais tipos de problemas, também podemos interpretar as combinações na linguagem de conjuntos e funções. Para isso precisamos determinar o número de partes de k elementos de um conjunto finito de n elementos.

Inicialmente, vamos retomar a definição do número de partes de um conjunto. Seja *E* um conjunto com n elementos e $\mathcal{P}$ uma de suas partes $(\mathcal{P} \subset E)$. Essa parte $\mathcal{P}$ pode ser definida pela função $p: E \to \{0,1\}$, tal que $p(x) = \begin{cases} 0, se\ x \notin P \\ 1, se\ x \in P \end{cases}$. Essa função é denominada função característica da parte $\mathcal{P}$ de E.

Representando as parte de um conjunto em um diagrama de flechas, obtemos uma situação conforme a descrita na Figura 10.

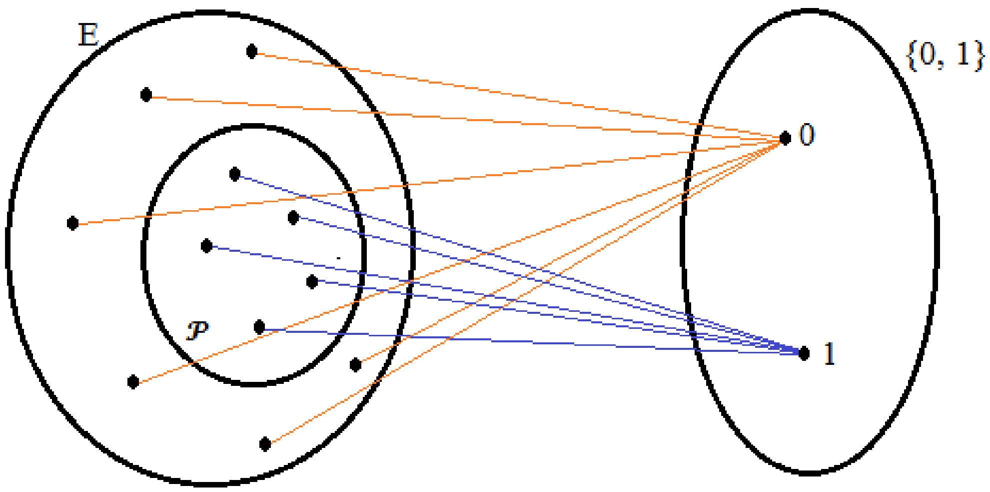


Figura 10 – Representação, em um diagrama de flechas, das partes $\mathcal{P}$ de um conjunto *E.*

A denominação função característica para a função p definida acima é bem adequada, visto que a função característica descreve completamente o conjunto *E*, indicando quais elementos do conjunto *E* são também elementos de $\mathcal{P}$. Assim, o número de partes de um conjunto *E* com n elementos é igual ao número de funções $E \to \{0, 1\}$, ou seja, 2^n.

---

[4] Podemos representar a combinação de n elementos tomados k a k, pelas seguintes notações $C_n^k = \binom{n}{k} = C_{n,k}$.

Vejamos um exemplo para um conjunto E com sete elementos, em que queremos calcular o número de partes que tenham três elementos. Indicaremos esse número por $C_{7,3}$.

Toda parte $\mathcal{P}$ de 3 elementos de *E* é obtida tomando-se um primeiro elemento de *E*, um segundo e finalmente um terceiro elemento, isto é, definindo uma função injetora $f_i: \{1, 2, 3\} \to E$. Podemos representar essa situação como no diagrama da Figura 11.

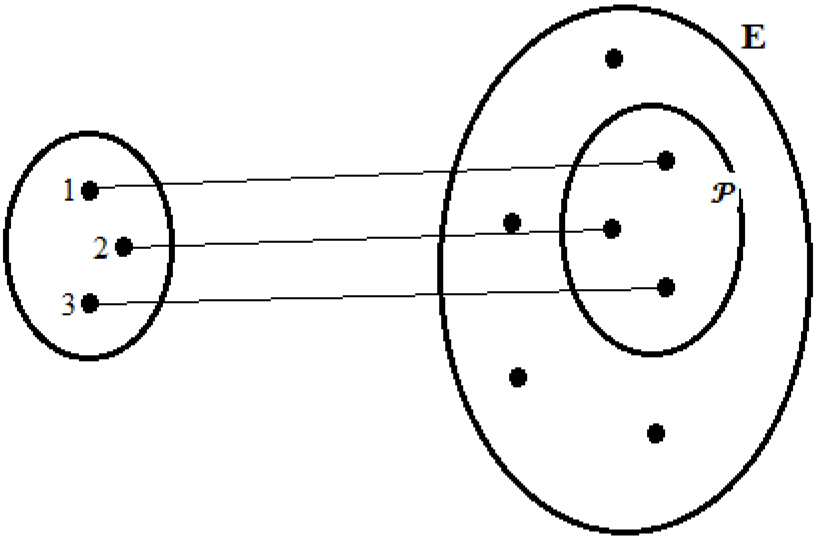


Figura 11 – Diagrama de flechas representando as partes parte $\mathcal{P}$ de 3 elementos de *E.*

No diagrama representado na Figura 9, toda função injetora $f_i: \{1, 2, 3\} \to E$ determina uma parte de *E* que compreende três objetos. Falta-nos determinar quantas funções injetoras $f: \{1, 2, 3\} \to E$ têm como imagem $\mathcal{P}$.

Já sabemos que esse número de funções injetoras será o número de bijeções $\{1, 2, 3\} \to \mathcal{P}$, ou seja, *3!*. Como denotamos o número de partes de *E* com três elementos por $C_{7,3}$, então, o número de funções injetoras $f: \{1, 2, 3\} \to E$ será:

$$C_{7,3}.\, 3!$$

Por outro lado, o número de funções injetoras $f: \{1, 2, 3\} \to E$ é:

$$\frac{7!}{(7-3)!}$$

Logo,

$$C_{7,3}.\, 3! = \frac{7!}{(7-3)!} \Rightarrow C_{7,3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$$

Tudo que foi exposto não depende da escolha particular dos números 7 e 3. Podemos, então, determinar o número de partes de k elementos de um conjunto finito de n elementos, que será representado por $C_{n,k}$.

Segue que toda parte de *k* elementos de um conjunto *E* de *n* elementos é a imagem de uma função injetora $f: \{1, 2, \dots, k\} \to E$. Cada parte com k elementos de *E* é a imagem de k!-injeções $\{1, 2, \dots, k\} \to E$ distintas.

O número de injeções $\{1, 2, \dots, k\} \to E$ é, portanto, igual ao número de partes de k elementos de *E* multiplicado pelo número de injeções que tem a mesma imagem. Resultando em,

$$C_{n,k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k}$$

3.3 A análise combinatória como foco de pesquisa da Educação Matemática

Para a preparação de nossa sequência de ensino buscamos conhecer algumas pesquisas já desenvolvidas que tiveram como objetivo analisar o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Após buscas em repositórios digitais de Universidades, selecionamos alguns trabalhos que julgamos pertinentes ao nosso objeto de estudo. As pesquisas selecionadas foram: Esteves (2001), Pedrosa Filho (2008) e Carvalho (2009), os quais abordam o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental; Sturn (1999), Rocha (2002), Pinheiro (2008) e Almeida (2010), que tratam do ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio; Costa (2003) e Sabo (2009) que exploram a visão docente sobre a temática; Pessoa (2009), que aborda o raciocínio combinatório de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, e Lima (2010), que investiga o ensino de combinatória na educação de jovens e adultos.

A investigação realizada por Esteves (2001) analisou a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de Análise Combinatória em adolescentes de 14 anos de idade, cursando a 8ª série do Ensino Fundamental.

A pesquisa foi realizada com dois grupos: um de referência e outro experimental, ambos compostos por alunos de uma escola particular de Santos, São Paulo. O grupo de referência foi composto por alunos do ensino médio, com quem a pesquisadora seguiu uma abordagem tradicional apresentada em livros didáticos, enquanto o grupo experimental foi composto por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, em que foi aplicada a sequência didática elaborada pela pesquisadora.

Ao analisar os resultados dos testes diagnósticos realizados, Esteves (2001) pôde observar que os alunos não utilizaram recursos que fornecessem a formulação de todas as possibilidades, muitas vezes fizeram uso da árvore de possibilidades de forma errônea e demonstraram dificuldade em diferenciar problemas de arranjo e combinação.

Contudo, a pesquisadora acredita que "as atividades diversificadas, que venham a ser propostas para favorecer um comportamento de busca, de hipóteses e que despertem o raciocínio, ajudam no processo de aprendizagem do aluno" (ESTEVES, 2001, p. 193). Ou seja, defende o uso de atividades diferenciadas em sala de aula, de modo que o aluno possa construir seu próprio conhecimento, sendo essa construção o caminho para superar algumas dificuldades apontadas.

Em sua dissertação de mestrado, Pedrosa Filho (2008) apresenta uma pesquisa sobre a aquisição e o desenvolvimento de noções introdutórias do raciocínio combinatório com crianças entre sete e oito anos. O trabalho foi realizado à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e da Teoria dos Registros de Representação de Duval.

A sequência didática foi toda elaborada com materiais manipuláveis, devido à importância da utilização desse tipo de recurso ao se trabalhar com os primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Conforme afirma o autor:

> o material manipulável não tem a pretensão de substituir o livro didático, mas ser um marco inicial para os alunos do primeiro ciclo do Ensino Fundamental construírem novos conhecimentos por meio de outras estratégias de ensino, que não a tradicional, podendo ser estendido aos demais ciclos (PEDROSA FILHO, 2008, p. 56).

Além do uso de material manipulável, Pedrosa Filho (2008) também utilizou na aplicação de sua sequência o trabalho em duplas, o qual, segundo ele, favorece não só o interesse pelos assuntos, mas também o desenvolvimento da organização, leitura, visualização e contagem de resultados, facilitando a construção das primeiras ideias do raciocínio combinatório.

Ao final da pesquisa, o autor considerou que sua sequência didática alcançou os objetivos a que se propôs: desenvolver, aplicar e analisar uma sequência de atividades voltada para crianças do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, utilizando materiais manipuláveis e o trabalho em dupla.

A pesquisa de Carvalho (2009) consistiu na implementação de uma sequência didática, baseada na utilização de jogos, para o desenvolvimento de problemas de contagem com uma turma do 8º ano do ensino fundamental do Colégio Militar de Porto Alegre. O trabalho foi desenvolvido tendo por referencial a teoria dos campos conceituais de Vergnaud e a zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky.

Carvalho (2009) propôs aos alunos quatro jogos: A Grande Aposta, Contig60, Senha e Bicolorido. Para cada um dos jogos propostos, após os alunos se ambientarem, através de rodadas de jogadas, um questionário era aplicado, buscando informações em relação às possíveis estratégias de contagem, às distintas formas de organizar a resolução e os esquemas produzidos pelos alunos.

Como resultados da pesquisa, o autor destacou que o trabalho com jogos possibilitou um acréscimo no quantitativo de possíveis representações de contagem, sendo que o trabalho em grupo contribuiu para o rendimento da turma como um todo, uma vez que houve maior interação dos alunos na busca de um objetivo comum.

Sturm (1999) formulou e analisou uma proposta alternativa para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, partindo de sua própria prática docente. A metodologia de trabalho foi a pesquisa-ação, sendo a pesquisa realizada sob um caráter qualitativo, tendo no Diário (caderno destinado a anotações), o principal instrumento de registro.

A pesquisa de Sturm (1999) foi realizada também com uma turma de 2º ano do Ensino Médio, de uma escola particular, na cidade de Itu, São Paulo. A proposta didática formulada por Sturm pautou-se em quatro fases:

> familiarização com problemas de contagem em geral, estudo da notação fatorial, levantamento e observação das características dos problemas que determinam seu modo de resolução e, relação das características (modo de resolver) com os temas em si e formalização dos conceitos/temas (STURM, 1999, p. 36).

Essas fases foram planejadas com o objetivo de levar o aluno, inicialmente, a ter contato com os problemas de contagem para os quais a resolução fosse possível por meio da enumeração de todas as possibilidades, por meio da árvore de possibilidades e do princípio multiplicativo, avançando para o uso da notação fatorial, e alcançando, finalmente, a caracterização e diferenciação dos diferentes tipos de problemas combinatórios, formalizando e generalizando conceitos.

Ao finalizar o trabalho, Sturm (1999) destacou um aspecto positivo referente ao princípio multiplicativo. Para ele, a maioria dos “alunos parecem ter compreendido a ‘potencialidade’ e as aplicações desta estratégia” (Ibidem, p. 81).

Em sua pesquisa, Rocha (2002) propõe que o Princípio Multiplicativo seja utilizado na resolução de problemas de Análise Combinatória. A autora denominou sua proposta de *alternativa,* em que segundo os pressupostos construtivistas, o professor deixa de lado seu papel de transmissor do conhecimento e passa a ser observador, organizador, mediador e incentivador da aprendizagem. O aluno passa a ser o agente construtor de seu conhecimento.

A pesquisa foi realizada com dois grupos: com alunos de um curso técnico de eletrônica (em 1998) de uma escola pública e com alunos do 2º ano de Ensino Médio regular (em 2001) de uma escola particular, com o objetivo de possibilitar, através da utilização do Princípio Multiplicativo na resolução de problemas de Contagem, o desenvolvimento e a compreensão dos conceitos de permutações, arranjos e combinações.

O trabalho mostrou, através da abordagem realizada, que é possível fazer a construção das fórmulas referentes aos problemas de análise combinatória de forma significativa para o aluno. Além disso, quando o professor assumiu o papel de mediador do processo educativo, possibilitou a interação aluno-professor, aluno-aluno e aluno-conteúdo, de modo que os conhecimentos inerentes ao conteúdo de Análise Combinatória fossem compreendidos de forma expressiva.

Pinheiro (2008) buscou em sua dissertação investigar a validação de uma sequência didática, com ênfase na resolução de problemas, para introdução dos conceitos básicos da Análise Combinatória. O trabalho baseou-se, metodologicamente, na Engenharia Didática de Michèle Artigue, tendo por referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e a Resolução de Problemas.

A sequência didática de Pinheiro (2008) foi aplicada em uma turma de 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública em Belém do Pará. As atividades foram desenvolvidas tendo por objetivo possibilitar aos alunos a construção do conceito do Principio Fundamental da Contagem, seguindo-se para o conceito de permutação e notação de fatorial, avançando para o conceito de arranjo e combinação simples, destacando as diferenças entre eles.

Foram aplicados um pré-teste e um pós-teste, com questões semelhantes. Por meio dos resultados desses testes, o pesquisador pôde realizar um comparativo, constatando uma significativa melhora no desempenho dos alunos no que se refere à habilidade de resolver situações que envolvessem o raciocínio combinatório.

Pinheiro (2008) considerou viável a sequência didática por ele proposta, validando sua hipótese de ser possível, através da resolução de problemas como ponto de partida, desenvolver os conceitos básicos da Análise Combinatória.

O trabalho de Almeida (2010) analisou as contribuições de uma proposta de ensino com ênfase na Comunicação Matemática. A proposta fundamentou-se nos estudos sobre pensamento combinatório e sobre criação de ambientes de estímulo à argumentação e discussão de situações-problema em pequenos e grandes grupos.

A pesquisa foi desenvolvida em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Itabirito em Minas Gerais, tendo por objetivo principal investigar o potencial da Comunicação Matemática no desenvolvimento de uma proposta didática sobre Análise Combinatória, a partir da resolução de situações-problema.

Ao propor a sequência didática, Almeida (2010) alçou a seguinte hipótese: “é possível ensinar e aprender Análise Combinatória de modo mais interessante e significativo para os alunos, quando se desenvolve uma proposta baseada em situações-problema discutidas coletivamente” (Ibidem, p. 15).

Após o desenvolvimento e análise das resoluções apresentadas, especialmente dos argumentos utilizados pelos alunos no processo de resolução, a pesquisadora notou que um número considerável de alunos conseguiu utilizar o princípio multiplicativo, bem como resolver exercícios mais elaborados, se comparados ao início da pesquisa, mostrando que a sequência didática contribuiu para a aprendizagem de conceitos da Análise Combinatória.

Costa (2003), em sua dissertação, analisou os instrumentos disponíveis para o professor de Matemática ensinar análise combinatória no Ensino Fundamental por processo de Modelagem, e os conhecimentos dos professores sobre tal conteúdo. A pesquisa foi embasada nos conhecimentos da Transposição Didática de Yves Chevallard.

O público-alvo analisado por Costa (2003) foi um grupo de professores do Ensino Fundamental e Médio, atuantes na rede pública de ensino, que participaram do curso de Formação Continuada – “Construindo Sempre Matemática” –, promovido pelo convênio PUC-SP/SEE-SP[5].

Como metodologia de pesquisa, Costa (2003) analisou documentos oficiais – Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental e Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo (1º grau) –, e duas coleções de livros didáticos, adotados pelos professores da rede pública (Matemática Pensar e Descobrir, de Giovanni e Giovanni Jr e Matemática ao Vivo, de Imenes, Jakubovic e Lellis).

Além dessa pesquisa documental, foram aplicados dois questionários. Um quantitativo, contendo questionamentos referentes à formação inicial, condições de trabalho, uso do livro didático, entre outros, e outro qualitativo, visando analisar os conhecimentos do professor quanto aos conceitos da Análise Combinatória e algumas concepções sobre seu estudo no Ensino Fundamental.

Ao analisar os dados coletados por meio dos questionários, Costa (2003) concluiu que muitos professores apresentaram as mesmas dificuldades constatadas em estudos realizados com alunos do Ensino Fundamental e Médio. Demonstraram não ter pleno domínio dos conhecimentos da Analise Combinatória, não conseguindo sistematizar algumas soluções ou resolvendo-as de forma incorreta, o que é extremamente preocupante, visto que os professores precisam ter pleno domínio sobre tais conceitos para que possam ensiná-los a seus alunos.

Em sua pesquisa, Sabo (2010) investigou os saberes dos professores de matemática do Ensino Médio com relação ao ensino de Análise Combinatória. O quadro teórico da pesquisa construiu-se pela utilização da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard, das teorias de Tardiff sobre Saberes Docentes e dos trabalhos de outros autores sobre formação e desenvolvimento profissional do professor.

Participaram da pesquisa seis professores, sendo que a coleta de dados ocorreu através de entrevistas semiestruturadas, privilegiando o processo interpretativo da fala do professor. Nas entrevistas, o pesquisador buscou identificar

---

[5] PUC-SP/SEE-SP – Convênio firmado em a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e Secretaria Estadual de Educação de São Paulo.

o conhecimento dos professores sobre os conceitos da Análise Combinatória e a metodologia de ensino utilizada pelos professores (uso de fórmulas ou não).

A partir dos dados coletados, Sabo (2010) observou que os professores reproduzem as práticas docentes e saberes adquiridos em experiências escolares anteriores. Quanto ao uso de fórmula, alguns declararam valorizar o uso de Princípio Multiplicativo e outros, as fórmulas, porém, não sabiam justificar a sua validade. Alguns professores afirmaram ter dificuldades na interpretação dos enunciados dos problemas, não conseguindo distinguir se a ordem dos elementos importa ou não. Eles destacaram a importância da oportunidade em cursos de formação continuada para reavaliação de seus saberes e construção de novos, favorecendo desta forma, prática docente.

Pessoa (2009), em sua tese de doutorado, analisou o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º Ano do Ensino Médio.

Segundo Pessoa (2009) os problemas de análise combinatória podem ser classificados em quatro categorias: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Com base nessas categorias foi montado um instrumento de coleta de dados com oito questões, que foi respondido por 568 alunos de quatro escolas de Pernambuco, duas particulares e duas públicas, de modo que os números de questionários respondidos por alunos de cada série fossem iguais ou o mais próximo possível.

Os dados coletados através dos questionários foram analisados qualitativa e quantitativamente. Para a análise quantitativa foi utilizado o software *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS), sendo o desempenho dos alunos analisado a partir das variáveis: gênero, tipo de escola, nível de ensino, ano de escolarização, significados de Combinatória e ordem de grandeza dos números. Os tipos de respostas e estratégias utilizadas foram analisadas qualitativamente.

Através das análises, a autora pôde perceber que os avanços mais significativos ocorreram nas turmas de 5º e 9º anos, diferente do que ela pensara inicialmente: que seriam nas turmas de Ensino Médio. Nessas turmas, alguns alunos tentaram utilizar fórmulas, porém, não as empregaram de maneira correta.

A autora concluiu sua pesquisa destacando que, independente do tipo de escola, todos os alunos aumentaram seu desempenho conforme avanço nos anos escolares, indicando que o raciocínio combinatório, com suas particularidades, pode ser trabalhado em todos os anos.

Lima (2010) foi o único trabalho que encontramos investigando a relação entre o conteúdo da Análise Combinatórioae a Educação de Jovens e Adultos. O objetivo da pesquisa foi analisar a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos sobre problemas multiplicativos, especialmente os que envolvem o *raciocínio combinatório*.

A pesquisa contou com a participação de 150 alunos de cinco instituições: uma municipal, duas estaduais, uma federal e uma mantida pelo Serviço Social do Comércio (SESC).

O instrumento de coleta de dados utilizado na pesquisa foi um questionário com 16 problemas, sendo dois problemas de cada uma das seguintes categorias: multiplicação divisão, divisão-partição, divisão-quotição, produto cartesiano direto, produto cartesiano inverso, permutação, arranjo e combinação.

Após a aplicação do questionário, os dados foram analisados qualitativa e quantitativamente. Como instrumento de análise quantitativa foi utilizado o *software Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS). Para tanto, o desempenho dos alunos foi analisado a partir das variáveis controladas: série e tipos de problemas, e das variáveis externas: anos de estudo, faixa etária e profissão exercida. Das variáveis analisadas, a única que segundo a autora, não exerceu influência no desempenho dos alunos, foi a faixa etária.

A análise qualitativa consistiu na apreciação dos tipos de respostas e estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas. Lima (2010) observou que, nessas resoluções, os alunos não utilizaram representações informais, e os que o fizeram utilizaram a listagem de possibilidades.

Ao final da pesquisa, Lima (2010) concluiu que os alunos da Educação de Jovens e Adultos têm maior facilidade na resolução de problemas de multiplicação direta, divisão-quotição e divisão-partição, provavelmente, porque trabalham com esse tipo de problema desde o Ensino Fundamental. Já os problemas em que os alunos demonstraram maior dificuldade foram os de arranjo e de combinação, utilizando como estratégia de resolução a listagem de possibilidades.

De maneira geral, notamos que, nos trabalhos desenvolvidos com alunos, há a preocupação de um ensino de Análise Combinatória baseado em situações que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio combinatório e não apenas o trato de estratégias de resolução, baseada em aplicações de fórmulas.

Percebemos que muitas dificuldades apresentadas nas pesquisas realizadas com alunos também apareceram nos trabalhos desenvolvidos junto a professores. Nesses trabalhos, os professores demonstraram ter dificuldade na interpretação dos problemas propostos e consequentemente nas respectivas resoluções, indicando não terem pleno conhecimento sobre os conceitos da Análise Combinatória.

Vimos ainda que, em sua grande maioria, as pesquisas estão voltadas ao ensino e aprendizagem do conteúdo Análise Combinatória no ensino regular, seja Ensino Fundamental ou Médio. Entre os trabalhos, encontramos apenas um que investigou o desenvolvimento desse tópico no contexto da Educação de Jovens e Adultos. Essa pesquisa teve como foco analisar o desempenho dos alunos perante categorias de problemas da Análise Combinatório, não se detendo no estudo do processo de ensino e aprendizagem desse tópico na EJA.

Sendo assim, acreditamos que nossa pesquisa possa contribuir para o rol de pesquisas que abordem a relação entre a Educação de Jovens e Adultos e o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, uma vez que nossa proposta teve por objetivo analisar se uma estratégia de ensino, tendo por ponto de partida a resolução de problemas, pode propiciar a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos da EJA.

4 A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Neste capítulo apresentaremos características acerca do público alvo de nossa pesquisa – a Educação de Jovens e Adultos (EJA). Iniciaremos com um relato histórico sobre a criação dessa modalidade de ensino, destacando sua evolução enquanto política de governo até a criação do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA). Por fim, abordaremos a relação entre o ensino de matemática e a EJA.

4.1 Histórico da criação da EJA e do PROEJA

A Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (BRASIL, 2002b) menciona indícios de ações voltadas para a educação de adultos, mesmo que maneira não sistemática, desde o período colonial. Nessa época, os jesuítas exerciam o papel de educadores missionários, com o objetivo de transmitir normas de comportamento e ofícios necessários para o funcionamento da Colônia.

Contudo, foi em meados da década de 20, com o crescimento da demanda de mão de obra, imposto pelo crescimento industrial, e impulsionado pelos movimentos sociais, que a Educação de Adultos tornou-se uma questão de política educacional, através da criação de escolas noturnas para adultos, por meio do Decreto nº 16.782/A, de 13 de janeiro de 1925. Essa primeiras ações foram consolidadas com a Constituição de 1934, em que foi instituída a obrigatoriedade e gratuidade do ensino primário para todos, firmando a educação de jovens e adultos como questão de política educacional (Ibidem).

Na década de 40, importantes ações ocorreram: em 1942 foi criado o Fundo Nacional de Ensino Primário, com o objetivo de ampliar a oferta da educação primária para jovens e adultos; em 1947, foram instituídas a Campanha de Educação de Adolescentes e Adultos (CEAA), que buscou fornecer subsídios para infraestrutura dos estados e municípios, e Serviço de Educação de Adultos (SEA), com a finalidade de orientar os planos anuais para o ensino supletivo (Ibidem).

Outras ações, no formato de campanhas, foram criadas na década de 50: a Campanha Nacional de Educação Rural (1952) e a Campanha Nacional de Erradicação do Analfabetismo (1958). Ambas duraram pouco tempo e não produziram muitas realizações. (BRASIL, 2002b, v.1).

No início da década de 60, começaram a se difundir as ideias da Educação Popular, tendo na figura de Paulo Freire, seu principal referencial. Freire destacava a importância da autonomia do educando e a maior comunicação entre educador e educando, sendo a aprendizagem desse voltada para suas reais necessidades (MONTEIRO, 2010).

Sob a influência de Paulo Freire, no início de 1964, foi lançado o Programa Nacional de Alfabetização, que tinha o apoio de intelectuais, religiosos, estudantes e diversos outros grupos sociais. Freire propunha que

> o educando fosse tomado como sujeito de aprendizagem, e que a ação educativa passasse a não negar sua cultura, promovendo situações de aprendizagem em que a consciência ingênua desses adultos analfabetos fosse transformando-se em uma consciência crítica (ANDRADE, 2010, p. 15).

Com as propostas de Freire a Educação de Adultos tornou-se o motor de um movimento amplo de valorização da cultura popular, possibilitando o resgate e a valorização dos saberes populares. (HADDAD; DI PIERRO, 2000, p. 113). Porém, com o Golpe Militar, nesse mesmo ano, os movimentos de Educação Popular, foram reprimidos, sendo os seus mentores censurados e perseguidos, culminando com o exílio de Paulo Freire.

Como a problemática do analfabetismo adulto persistia, em 1967, foi criado o Movimento Brasileiro de Alfabetização (MOBRAL), com o objetivo de oferecer competências básicas de leitura, escrita e cálculo. Contudo, a metodologia e os materiais didáticos adotados já não permitiam tão pouco instigavam o senso crítico dos alunos (PORCARO, 2004).

Em 1971, com a implantação da Lei nº 5.692/71, a Educação de Adultos foi reconhecida, sendo destinado na referida lei um capítulo para sua regulamentação, através da modalidade Ensino Supletivo. A partir de então, ficou estabelecido que cidadãos com mais de 14 anos teriam direito ao 1º Grau (atual Ensino Fundamental). Porém, o Estado não tinha obrigação de ofertar vagas a esse público.

Além de possibilitar a alfabetização de adultos, o Supletivo pretendia contribuir para a formação e qualificação de mão de obra. Nas palavras de Haddad e Di Pierro:

> O Ensino Supletivo, por sua flexibilidade, seria a nova oportunidade dos que perderam a possibilidade de escolarização em outras épocas, ao mesmo tempo em que seria a chance de atualização para os que gostariam de acompanhar o movimento de modernização da nova sociedade que se implantava dentro da lógica de 'Brasil Grande' da era Médici (HADDAD; DI PIERRO, 2000, p. 118).

Com o fim da Ditadura Militar, em 1985, o MOBRAL foi extinto e foi criada a Fundação Nacional para a Educação de Jovens e Adultos (Educar), vinculada ao Ministério da Educação (MEC), com a função de auxiliar e acompanhar as ações voltadas à Educação de Adultos (HADDAD; DI PIERRO, 2000).

Segundo Haddad e Di Pierro (2000), com a promulgação da nova Constituição Federal, em 1988, materializou-se o reconhecimento do direito de jovens e adultos à educação fundamental, devendo o Estado garantir sua oferta pública, gratuita e universal (Ibidem, p. 119).

Como ressalta Fonseca,

> a Constituição de 1988 representou um avanço na direção da conquista do direito à educação ao estabelecer como obrigatório e gratuito - e dever do Estado – todo o ensino fundamental, e não apenas a educação de crianças de sete a quatorze anos. (FONSECA, 2007, p. 16).

Nesse período, o termo Ensino Supletivo deu lugar à terminologia Educação de Jovens e Adultos (EJA), como é conhecida até hoje. Segundo Soares (2002), tal mudança não foi apenas de nomenclatura, mas sim uma mudança no âmago do conceito de *educação* destinada aos cidadãos que não tiveram acesso a ela na idade regular. Conforme afirma o autor

> a mudança de 'ensino supletivo' para 'educação de jovens e adultos' não foi uma mera atualização vocabular; houve um alargamento do conceito ao mudar a expressão de ensino para educação. Enquanto o termo 'ensino' se restringe à mera instrução, o termo 'educação' é muito mais amplo, compreendendo os diversos processos de formação (Ibidem, p. 12).

Na década de 90, duas grandes ações contribuíram para concretização da EJA como uma política educacional: o Plano Decenal, em 1994, e em 1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96, LDBEN). A primeira, fixou metas para a educação brasileira, entre elas ações para o atendimento de 3,7 milhões de analfabetos e 4,6 milhões de jovens e adultos pouco escolarizados. A segunda, reafirmou os direitos de jovens e adultos à uma educação gratuita e de qualidade.

Com a promulgação da Lei nº 9.394/96 (LDBEN), ficou assegurado que:

> Art. 37 - A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria.
> § 1º Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e trabalho, mediante cursos e exames.
> § 2º O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si.
>
> Art. 38 - Os sistemas de ensino manterão cursos e exames supletivos, que compreenderão a base nacional comum do currículo, habilitando ao prosseguimento de estudos em caráter regular.
> § 1º Os exames a que se refere este artigo realizar-se-ão:
> I. no nível de conclusão do ensino fundamental, para os maiores de quinze anos;
> II. no nível de conclusão do ensino médio, para os maiores de dezoito anos.
> § 2º Os conhecimentos e habilidades adquiridos pelos educandos por meios informais serão aferidos e reconhecidos mediante exames (BRASIL, 1996).

Em 1997, com a realização, na Alemanha, da V Conferência Internacional de Educação de Adultos (V CONFINTEA), se estabeleceu importantes orientações para a EJA. A aprovação da Declaração de Hamburgo trouxe novos princípios para EJA, dentre os quais a relação entre a educação de adultos e o desenvolvimento sustentável. A Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (BRASIL, 2002b, v. 1) destaca um trecho da Declaração de Hamburgo (1997):

> A educação de adultos torna-se mais que um direito: é a chave para o século 21; é tanto consequência do exercício da cidadania como condição para uma plena participação na sociedade. Além do mais, é um poderoso argumento em favor do desenvolvimento ecológico sustentável, da democracia, da justiça, da igualdade entre os sexos, do desenvolvimento socioeconômico e científico, além de um requisito fundamental para a construção de um mundo onde a violência cede lugar ao diálogo e à cultura de paz baseada na justiça (Declaração de Hamburgo, 1997 apud BRASIL, 2002b).

A partir de então novos paradigmas foram sendo incorporados à EJA no Brasil. Em 2000, a Câmara da Educação Básica (CEB) do Conselho Nacional de Educação (CNE) aprovou o Parecer nº 11/2000 o qual trata das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos. Essas diretrizes trazem os novos conceitos, fundamentos e funções da EJA. Em relação às funções, há uma mudança de paradigma. A função compensatória da EJA transforma-se em função reparadora, equalizadora e qualificadora (BRASIL, 2000).

Ribeiro (2007) resume claramente as novas funções da EJA conforme o Parecer nº 11/2000:

> - *Reparadora*: refere-se não só à restauração de um direito negado (direito a uma escola de qualidade), mas também ao reconhecimento da igualdade ontológica de todo e qualquer ser humano de ter acesso a um bem real, social e simbolicamente importante;
> - *Equalizadora*: relaciona-se à igualdade de oportunidades que possibilite maiores condições de acesso e permanência na escola, permitindo aos indivíduos nova inserção no mundo do trabalho, na vida social, nos espaços da estética e na abertura dos canais de participação;
> - *Qualificadora*: reconhecida como mais que uma função, e sim o próprio sentido da EJA, correspondendo às necessidades de atualização e de aprendizagem contínuas decorrentes dos ideais de uma educação permanente, que tem como base o caráter incompleto do ser humano cujo potencial de desenvolvimento e de adequação pode se atualizar em quadros escolares ou não-escolares. (Ibidem, p. 33).

Em complementação às Diretrizes, foram lançados pelo MEC, em 2001, os Parâmetros Curriculares para a Educação de Jovens e Adultos, com o objetivo de "orientar os estados, municípios e demais instituições que atendem a educação de jovens e adultos na elaboração de suas propostas curriculares" (MONTEIRO, 2010, p. 142).

Pelo exposto, percebemos que a EJA vem ganhando forças no decorrer dos anos. Contudo, além da necessidade de proporcionar a jovens e adultos que não tiveram a oportunidade de buscar sua escolarização básica na chamada "idade regular", surgiu também a demanda de ofertar a esse público uma qualificação profissional. Buscando atender algumas dessas demandas, foi criado, através do Decreto nº 5.478, de 24 de junho de 2005, o Programa de Integração da Educação Profissional ao Ensino Médio na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos – PROEJA.

Esse programa foi criado, inicialmente, com o objetivo de ofertar formação básica de nível médio, juntamente com formação profissional. Pelo decreto, ficaram responsáveis pela oferta dos cursos os então CEFET´s (Centros Federais de Educação Tecnológicas), as EAF's (Escolas Agrotécnicas Federais) e as Escolas Técnicas vinculadas às Universidades.

Em 2006, o Decreto nº 5.478/05 foi revogado, passando então a vigorar o Decreto nº 5.840, de 13 de julho de 2006, que instituiu novas diretrizes para o programa, o qual passou a abranger também o Ensino Fundamental, sendo denominado, a partir de então, Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA). Com essa ampliação, além dos alunos de nível médio que já eram atendidos pelo programa, o mesmo passou a ser ofertado também para alunos do Ensino Fundamental, funcionando em parceria com instituições estaduais, municipais e entidades privadas de serviço social.

Com a oferta de cursos PROEJA para dois níveis diferentes de ensino, o programa foi desdobrado em PROEJA (Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos – Educação Profissional Técnica de Nível Médio) e PROEJA FIC (Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos – Formação Inicial e Continuada).

De acordo com o Decreto nº 5.840/06, os cursos PROEJA deverão considerar as características dos jovens e adultos atendidos, podendo ser, no caso do PROEJA FIC, articulados ao Ensino Fundamental ou ao Ensino Médio, com o objetivo de elevar o nível de escolaridade do trabalhador e, integrado ou concomitante ao Ensino Médio, no caso do PROEJA. (BRASIL, 2006a). Assim, os cursos na modalidade PROEJA, podem ser enquadrados em uma das seguintes categorias:

- Educação profissional técnica integrada ao ensino;
- Educação profissional técnica concomitante ao ensino médio;
- Formação inicial e continuada de trabalhadores integrada ao ensino fundamental;
- Formação inicial e continuada de trabalhadores concomitante ao ensino fundamental;
- Formação inicial e continuada de trabalhadores integrada ao ensino médio;
- Formação inicial e continuada de trabalhadores concomitante ao ensino médio.

O Decreto nº 5.840/06 também institui cargas horárias mínimas para cada categoria de cursos. Para os cursos PROEJA FIC, o decreto estabelece uma carga horária mínima de mil e quatrocentas horas, sendo, no mínimo, mil e duzentas horas para formação geral e duzentas horas para formação profissional. Já para os cursos de PROEJA, indica uma carga horária mínima de duas mil e quatrocentas horas, de modo a garantir, no mínimo, mil e duzentas horas para a formação geral e a carga horária mínima estabelecida para a respectiva habilitação profissional (BRASIL, 2006a).

Em relação à organização curricular, o Documento Base do PROEJA – Educação Profissional Técnica de Nível Médio orienta que a criação dos cursos deve estar pautada nas condições de acesso e permanência de jovens e adultos, na compreensão do trabalho como condição transformadora da realidade e na continuidade de estudos (BRASIL, 2007).

Assim, o objetivo principal do curso técnico de nível médio, na modalidade da educação de jovens e adultos (PROEJA), é proporcionar a esse público uma formação integral, isto é, uma formação básica sólida, vinculada à formação profissional, de modo a possibilitar a "formação de cidadãos-profissionais capazes de compreender a realidade social, econômica, política, cultural e do mundo do trabalho, para nela inserir-se e atuar de forma ética e competente, técnica e politicamente" (BRASIL, 2007, p. 35).

Do mesmo modo, os cursos que visam a formação inicial e continuada dos trabalhadores (PROEJA FIC) também têm este objetivo, ou seja, a formação básica e a capacitação profissional devem caminhar juntas, não se sobressaindo uma à outra. Conforme destaca o Documento Base do PROEJA – Formação Inicial e Continuada / Ensino Fundamental – "não se trata, de maneira alguma, de subsumir o conteúdo propedêutico do ensino fundamental a uma preparação para o mundo do trabalho, mas sim de garantir a totalidade do primeiro integrando-o à segunda" (BRASIL, 2007, p. 19).

Assim, as duas categorias dos cursos do PROEJA consideram as especificidades do mundo do trabalho, mas não se restringem a elas em detrimento da formação básica. Ou seja, os cursos nessa modalidade têm relação direta com o mundo do trabalho, porém, visam possibilitar aos sujeitos a continuidade dos estudos, seja do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, seja do Ensino Médio para o Ensino Superior. Dessa forma, os currículos dos cursos devem ser pensados de modo a garantir que ambos objetivos sejam alcançados.

Diante do exposto, percebemos a importância da implantação de cursos do PROEJA, pelos quais sujeitos de diferentes classes sociais e que pelas mais diversas razões, não concluíram sua escolaridade na idade regular possam concluir o ensino fundamental e/ou médio, elevando seu grau de escolaridade e se capacitando profissionalmente, visando uma melhor inserção no mundo do trabalho, podendo inclusive vislumbrar sua inserção no ensino superior.

4.2 O Ensino de Matemática e a EJA

Ao falarmos do Ensino de Matemática nos cursos de PROEJA, estamos inicialmente, pensando na Educação de Jovens e Adultos. Conforme ressalta a Proposta Curricular para a EJA – Ensino Fundamental – 2º Segmento (BRASIL, 2002c, v. 03), esse ensino é cada vez mais necessário, pois a matemática está presente nos processos de contagem e medição de grandezas, assim como na criação de sistemas abstratos que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números (BRASIL, 2002c, v. 03, p. 12)

O mesmo documento destaca os dois papeis indissociáveis, do ensino da matemática na EJA: papel formativo e papel funcional. O primeiro refere-se ao “desenvolvimento de capacidades intelectuais para a estruturação do pensamento” e o segundo, “à aplicação dessas capacidades na vida prática e à resolução de problemas nas diferentes áreas de conhecimento” (BRASIL, 2002c, v. 03, p. 12)

Fonseca (2007) observa que o entendimento da matemática como ferramenta indispensável ao entendimento de variadas situações da vida cotidiana é uma das razões que leva os sujeitos a começarem ou voltarem a estudar.

> Um componente forte da geração da necessidade de voltar ou começar a estudar seria justamente o anseio por dominar conceitos e procedimentos da Matemática. A frequência (e a urgência) com que situações da vida pessoal, social ou profissional demandam avaliações e tomadas de decisão referentes a análises quantitativas, parâmetros lógicos ou estéticos conferem ao instrumental matemático destacada relevância. (Ibidem, p. 49)

Nesse sentido, Fantinato (2004) destaca que pesquisas realizadas sobre a educação matemática na educação de adultos costumam seguir três vertentes principais. A primeira analisa a matemática como instrumento de conscientização política, visando reverter a situação do educando excluído da escola regular, em que o ensino da matemática formal contribuiu de alguma forma para essa situação. A segunda estuda a relação da matemática como instrumentalização para o mercado de trabalho, ou seja, foca na requalificação profissional, sendo a matemática fator importante para o domínio de certas linguagens, especialmente tecnológicas. A terceira preocupa-se com o modo próprio de raciocínio matemático do educando, isto é, os modos de pensar e agir do adulto e sua relação com o ensino e aprendizagem da matemática.

Assim, o ensino e aprendizagem da Matemática na EJA deve servir de oportunidade para "co-mover os sujeitos, enquanto resgata (e atualiza) vivências, sentimentos, cultura e, num processo de confronto e reorganização, acrescenta mais um elo à história do conhecimento matemático". (FONSECA, 2007, p. 54).

Nesse contexto, a EJA precisa ser reconhecida como uma modalidade de ensino própria, com necessidades específicas. Para que seja realmente assegurado o direito do público jovem e adulto à educação, é fundamental e indispensável que os educadores compreendam as necessidades do educando e (re)pensem o processo de ensino e aprendizagem, como ressalta Paiva:

> Precisamos reconhecer a EJA como modalidade que é da educação básica, não podendo ser pensada como oferta menor, nem pior, nem menos importante. Ela, como modalidade, é um modo próprio de fazer a educação básica, modo esse determinado pelos sujeitos que ela recebe: jovens e adultos. A legislação recomenda a necessidade de busca de condições, de alternativas, de currículos adequados a esses sujeitos, levando em conta seus saberes, seus conhecimentos até então produzidos e suas experiências no mundo do trabalho etc. Nelas, esses sujeitos se formaram, não na escola; por elas aprenderam conteúdos que determinam seus modos de estar no mundo, de aprender novas coisas, determinam seus interesses, seus desejos de saber mais, de certificar-se, de progredir, ou não, nos/pelos estudos (PAIVA *apud* ANDRADE, 2010, p. 9).

Oliveira (1999) ressalta que o primeiro passo na reflexão da Educação de Jovens e Adultos é o (re)conhecimento dos sujeitos atendidos por essa modalidade. A autora destaca que

> O adulto, no âmbito da EJA, não é o estudante universitário, o profissional qualificado que frequenta cursos de formação continuada ou de especialização, ou a pessoa adulta interessada em aperfeiçoar seus conhecimentos.
> [...]
> E o jovem, incorporado ao território da antiga educação de adultos relativamente há pouco tempo, não é aquele com uma história de escolaridade regular, o vestibulando ou o aluno de cursos extracurriculares em busca de enriquecimento pessoal. Não é também o adolescente no sentido naturalizado de pertinência a uma etapa bio-psicológica da vida. (Ibidem, p. 59-60)

Assim, refletir sobre os sujeitos da EJA é reconhecer as três condições que os caracterizam: "a condição de 'não-crianças', a condição de excluídos da escola e a condição de membros de determinados grupos culturais" (OLIVEIRA, 1999, p. 60).

Admitir a *condição de* “não-criança” é reconhecer que esse jovem ou adulto possui determinada bagagem histórica e cultural, com determinados conhecimentos e habilidades que construiu fora do ambiente escolar e que, por essa razão, sua aprendizagem ocorre de forma diferente da criança. Sendo assim, não podem ser utilizados apenas aportes teóricos voltados ao desenvolvimento cognitivo de crianças e adolescentes. Aceitar a *condição de excluídos da escola* é repensar currículos e metodologias de modo a promover que esse educando permaneça então no espaço escolar e evitar um dos maiores problemas da EJA, a evasão. Reconhecer a *condição de membros de determinados grupos culturais* é aceitar as especificidades culturais do educando, que são construídas a partir dos valores culturais do meio em que ele está inserido. Deste modo, pensar a EJA é considerar as especificidades, caracterizadas por aspectos socioculturais, dos sujeitos envolvidos.

Portanto, ao pensarmos sobre o Ensino de Matemática na EJA, precisamos refletir sobre quem são os sujeitos, adultos ou jovens que voltam ou começam a estudar, quais são suas expectativas e perspectivas, qual sua realidade sociocultural e quais são os conhecimentos matemáticos desenvolvidos fora da escola. Essas ações são essenciais no sentido de possibilitar aos educandos condições para a construção de determinados conhecimentos matemáticos que possam auxiliá-los em suas ações no mundo.

Do mesmo modo, essas ações devem ser realizadas em relação ao ensino de matemática no PROEJA, conforme orientam os fundamentos político-pedagógicos do currículo previstos no Documento Base do PROEJA,

> É necessário, também, estabelecer a relação entre educação profissional, ensino médio e EJA, trançando os fios que entrelaçam a perspectiva de pensar, de forma integrada, um projeto educativo, para além de segmentações e superposições que tão pouco revelam das possibilidades de ver mais complexamente a realidade e, por esse ponto de vista, pensar também a intervenção pedagógica (BRASIL, 2007, p. 41).

De modo geral, as orientações curriculares previstas no Documento Base do PROEJA não indicam quais conteúdos devem ser desenvolvidos. Apenas sinalizam os princípios que a organização curricular deve contemplar. Nesse sentido, os cursos PROEJA ofertados pelo Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete foram, pensados e estruturados conforme a experiência vivenciada nos cursos técnicos regulares já ofertados e de acordo com os recursos de que a instituição dispunha[6].

Na organização curricular de ambos os cursos a matemática está contemplada no eixo referente à formação geral, com o intuito de se garantir a formação básica esperada dos alunos ao final do Ensino Médio, possibilitando a continuidade de estudos.

Em relação à Combinatória, os Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Fundamental (PCN) apontam a importância do seu desenvolvimento desde os primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Pois essa ação possibilitará que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de forma gradativa e em diferentes momentos, garantindo que os conhecimentos sejam aprofundados até que, no Ensino Médio possa acontecer a formalização dos conceitos. (BRASIL, 1997).

Nos PCN, os conteúdos da Análise Combinatória, Probabilidade e Estatística integram o bloco denominado "Tratamento da Informação". Em relação ao desenvolvimento desses conteúdos, o objetivo não é estarem pautados na definição de termos e fórmulas, mas devem ocorrer com a finalidade de

> [...] fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia.
> [...] levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.
> [...] que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1997, p. 40)

Em relação ao ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – Matemática (PCNEM) apontam que é crescente a necessidade de descrição e análise de um grande número de dados, assim como a necessidade da realização de inferências e predições acerca de uma amostra populacional, aplicando ideias e técnicas da combinatória, probabilidade e estatística (BRASIL, 2000a).

Por sua vez, as orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), ressaltam que o desenvolvimento do raciocínio combinatório não

---

[6] No capítulo dedicado à metodologia apresentamos um histórico mais detalhado sobre a criação e manutenção dos cursos PROEJA do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete.

deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas sim como um processo que exige construção de um modelo simplificado e explicativo de diferentes situações, propostas por diversos problemas (BRASIL, 2002a).

Além disso, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio[7] (2006) apontam que “a combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias” (BRASIL, 2006b, p. 79).

No Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete, a Análise Combinatória foi pensada segundo a lógica da continuidade de estudos, conforme prevê uma das orientações do Documento Base do PROEJA. Por essa razão, a Análise Combinatória aparece organizada por competências e habilidades, sendo considerada como competência a resolução de situações-problema e, como habilidades visadas, a formulação de hipóteses, a previsão de resultados, a procura, seleção e interpretação de informações relativas a um problema e a obtenção de estratégias de resolução de problemas (CONSELHO DIRETOR DA EAFA/RS, 2006a, 2006b).

Além de possibilitar a continuidade de estudos, consideramos que a Análise Combinatória é relevante porque o desenvolvimento do raciocínio combinatório é, sobretudo, componente essencial do pensamento formal.

[7] Documento referente às orientações das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo descreveremos a nossa opção metodológica: estudo de caso. Apresentamos também o universo em que foi desenvolvida nossa pesquisa: os cursos na modalidade PROEJA do IF Farroupilha – Campus Alegrete: Técnico Agrícola – Habilitação em Agroindústria (PROEJA - Agroindústria) e Técnico em Informática – Habilitação em Manutenção e Suporte em Informática[8] (PROEJA - Informática). Por fim, apresentamos os instrumentos e procedimentos da coleta de dados.

5.1 Estudo de Caso

Nosso trabalho foi desenvolvido sob uma abordagem qualitativa. Pesquisas com esse enfoque diferenciam-se conforme os objetivos e métodos que adotam. Ribeiro (2007) aponta as cinco características da pesquisa qualitativa enumeradas por Bogdan e Biklen (1994 apud RIBEIRO, 2007, p. 133):

1. O contexto em que o fenômeno ocorre é fonte direta de dados e, sua preservação é essencial para a compreensão do objeto em estudo;
2. Os dados coletados são predominantemente descritivos. Todos os dados da realidade são considerados relevantes;
3. O processo é mais importante do que o produto;
4. A compreensão das perspectivas dos participantes é relevante;
5. A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. Sem hipóteses formuladas *a priori*.

Dentre as possíveis abordagens qualitativas, optamos pelo estudo de caso, o qual, segundo Ponte (2006) se trata de uma investigação *particularística*, ou seja, busca descobrir em uma situação específica, aspectos essenciais que contribuam para a compreensão global de certo fenômeno.

O objetivo principal de um estudo de caso é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" de uma determinada entidade (pessoa, instituição, sistema

[8] Esse curso foi inicialmente denominado Técnico em Informática – Habilitação em Hardware e Redes, entre 2006 e 2008. Aqui optamos por apresentá-lo com sua nomenclatura atual.

educativo, disciplina, entre outros), evidenciando sua identidade e características próprias. É uma investigação de natureza empírica, baseada principalmente em trabalho de campo ou análise documental, com o propósito de compreender o objeto de estudo, no contexto em que está inserido (PONTE, 2006).

Em face disso, acreditamos que a abordagem qualitativa foi a melhor opção metodológica para a pesquisa que realizamos, pois todos os dados reunidos tiveram caráter descritivo, sendo coletados diretamente no contexto escolar cotidiano dos alunos, através de contato direto do pesquisador com os sujeitos pesquisados. Além disso, características próprias da EJA foram consideradas na elaboração das atividades, e durante a análise dos dados buscamos retratar e compreender todos os diferentes mecanismos de resolução apresentados pelos alunos.

5.2 O Campo de Pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete (IF Farroupilha – Campus Alegrete), implantado por meio da promulgação da Lei nº 11.892/2008, a qual instituiu a criação da Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, vinculada ao Ministério da Educação e constituída pelas seguintes instituições: Institutos Federais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Centros Federais de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ) e de Minas Gerais (CEFET-MG) e as Escolas Técnicas Vinculadas às Universidades Federais (BRASIL, 2008).

Situado no distrito do Passo Novo, no município de Alegrete/RS, o IF Farroupilha – Campus Alegrete oferecia à comunidade, em 2011, os seguintes cursos:

- Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio: Técnico em Agropecuária, Técnico em Agroecologia e Técnico em Informática;
- Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio – Modalidade PROEJA: Técnico em Agropecuária – Habilitação em Agroindústria e Técnico em Informática – Habilitação Suporte e Manutenção em informática;

- Curso Técnico Subsequente/concomitância externa: Técnico em Informática – Habilitação Suporte e Manutenção em Informática;
- Cursos Superiores de Tecnologia (Tecnólogos): Tecnólogo em Produção de Grãos e Sementes, Tecnólogo em Agroindústria e Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas;
- Cursos Superiores (bacharelados): Zootecnia e Engenharia Agrícola[9] ;
- Cursos Superiores (licenciaturas): Ciências Biológicas, Química e Matemática;
- Cursos de Formação Inicial e Continuada – PROEJA-FIC: informática, panificação, pesca, entre outros.

Os cursos PROEJA no IF Farroupilha – Campus Alegrete foram implementados a partir do Decreto nº 5.478/05. Eles foram elencados conforme a demanda local e pela disponibilidade da infraestrutura e de pessoal. Sendo assim, foram criados em 2006, na então Escola Agrotécnica Federal de Alegrete (EAFA, os cursos: Técnico Agrícola – Habilitação em Agroindústria (PROEJA - Agroindústria) e Técnico em Informática – Habilitação em Manutenção e Suporte em Informática[10] (PROEJA - Informática). (CONSELHO DIRETOR DA EAFA/RS, 2006a, 2006b).

Através de uma pesquisa, junto ao setor de pesquisa institucional do IF Farroupilha – Campus Alegrete, referente ao quantitativo de matrículas, conclusões e evasões, entre 2006 e 2010, constatamos que em ambos os cursos o número de matrículas vêm aumentando. Em contrapartida, o mesmo tem ocorrido com o número de evasões. Organizamos os dados coletados de cada curso em gráfico para melhor visualizarmos o vêm ocorrendo no histórico desses cursos.

Em relação ao curso PROEJA Informática, constatamos que, entre 2006 e 2010, obteve um quantitativo total de 96 alunos matriculados (Figura 12), sendo que desses 46 finalizaram o curso, o que nos dá, ao todo, um índice de evasão de 52,08%.

Por sua vez, no curso PROEJA Agroindústria, entre 2006 e 2010, já ingressaram ao todo 57 alunos matriculados, dos quais 20 concluíram o curso, resultando em um índice de evasão 64,91 % (Figura 13).

---

[9] Ofertado por um convênio interinstitucional IF Farroupilha – Campus Alegrete e UNIPAMPA (Universidade Federal do Pampa)

[10] Esse curso foi inicialmente denominado Técnico em Informática – Habilitação em Hardware e Redes, entre 2006 e 2008. Aqui optamos por apresentá-lo com sua nomenclatura atual.

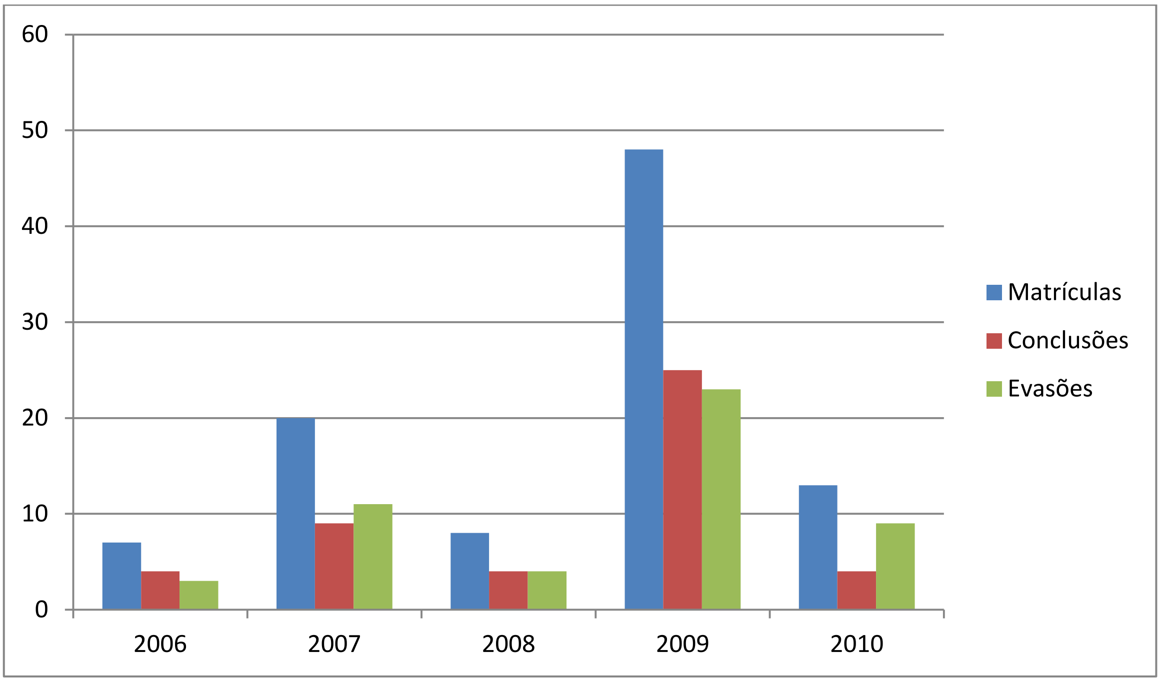


Figura 12 – Gráfico referente ao quantitativo de matrículas, conclusões e evasões, entre 2006 e 2010, do curso PROEJA Informática do IF Farroupilha – Campus Alegrete[11].

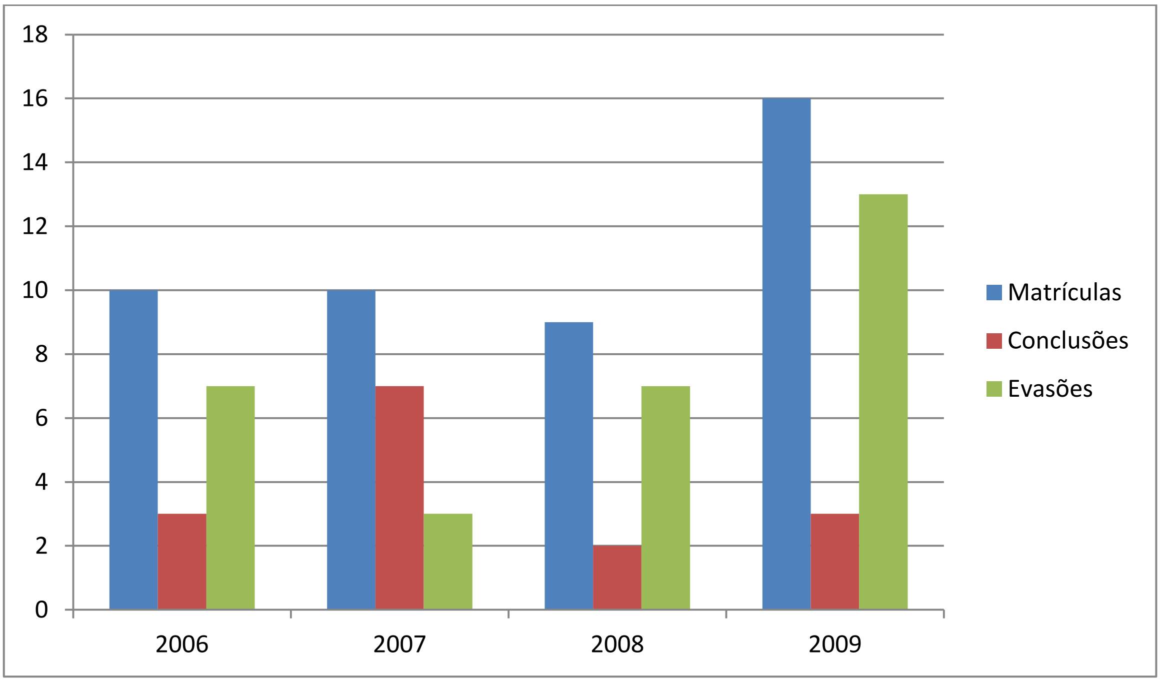


Figura 13 – Gráfico referente ao quantitativo de matrículas, conclusões e evasões, entre 2006 e 2010, do curso PROEJA Agroindústria do IF Farroupilha – Campus Alegrete.

[11] Em 2009 o quantitativo de matrículas foi bem maior porque na ocasião foi ofertada uma segunda turma do curso em parceria com uma escola estadual.

Percebemos que em ambos os cursos os índices de evasão são altíssimos: 52,08% e 64,91%. Sabemos que a problemática da evasão está presente em praticamente todos os cursos de EJA. Essa evasão se dá pelos mais diversos motivos, entre eles: horário de emprego incompatível com o horário das aulas, dificuldade de se readaptar ao ambiente escolar e questões familiares. Mas em relação aos cursos PROEJA Informática e Agroindústria do IF Farroupilha – Campus Alegrete, temos mais um agravante, a dificuldade de acesso ao campus, que se localiza a 30 km do centro do município de Alegrete.

Além disso, o curso de Agroindústria apresenta um índice maior ainda em virtude das especificações do Catálogo Nacional dos Cursos Técnicos, que prevê para esse curso a realização de um estágio curricular obrigatório. Muitos alunos cursam as disciplinas de formação geral e profissional durante as duas etapas anuais, mas acabam não realizando o estágio.

Ambos os cursos são ofertados no turno da noite, tendo duração de duas etapas anuais. Suas estruturas curriculares contam com disciplinas do Ensino Médio, disciplinas da área técnica específica e projetos interdisciplinares construídos a partir de um tema gerador, escolhido anualmente pelo grupo de professores que irão atuar no curso, totalizando 2400 (duas mil e quatrocentas) horas, conforme prevê o Documento Base do PROEJA (CONSELHO DIRETOR DA EAFA/RS 2006a, 2006b).

Nossa pesquisa foi realizada com os alunos integrantes da Etapa II dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio, na modalidade PROEJA: Técnico Agrícola – Habilitação Agroindústria e Técnico Informática – Habilitação em Manutenção e Suporte em Informática. Para preservar suas identidades, eles foram identificamos a partir dos pseudônimos André, Beatriz, Carlos, Daiana, Eva, Fabiane, Gabriela, Hugo e Ivo.

No Quadro 5, apresentamos algumas informações sobre esses alunos, que consideramos relevantes. Os dados foram coletados junto à documentação disponível no Setor de Registros Acadêmicos (SRA) do Campus.

Aluno	Sexo	Idade	Ano de conclusão de Ensino Fundamental	Modalidade em que concluiu o Ensino Fundamental
André	Masculino	39	1988	Supletivo
Beatriz	Feminino	36	2002	EJA
Carlos	Masculino	24	2000	Regular
Daiana	Feminino	47	2007	EJA
Eva	Feminino	24	1999	Regular
Fabiane	Feminino	21	2005	EJA
Gabriel	Feminino	40	1995	EJA
Hugo	Masculino	37	1999	EJA
Ivo	Masculino	29	1995	Regular

Quadro 5 – Caracterização dos alunos participantes da pesquisa.

Podemos observar que, assim como na maioria das turmas da EJA, essa turma é heterogênea tanto em relação à faixa etária quanto em relação ao tempo que ficaram fora da escola. São essas diferenças que fazem da EJA e do PROEJA uma modalidade especial de ensino, merecendo que metodologias de ensino diferenciadas sejam pensadas.

5.3 Coleta de Dados

A coleta de dados foi realizada durante o segundo semestre letivo de 2011. Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados as resoluções das atividades propostas apresentadas pelos alunos e os registros audiovisuais, realizados durante a implementação da sequência, os quais permitiram que a qualquer momento se retornasse buscando subsídios para a interpretação dos resultados apresentados.

A pesquisa foi realizada durante os períodos normais de aula, possibilitando a participação de todos os alunos. Após conhecer os objetivos da pesquisa, os alunos manifestaram sua disponibilidade de participação através do aceite do termo de consentimento esclarecido, disponível em anexo (Apêndice 2).

A elaboração das atividades foi pensada de maneira que os sujeitos participantes pudessem se deparar com diferentes tipos de problemas que exigissem o raciocínio combinatório em sua resolução, pois, como destaca Vergnaud (1986), é só através de uma variedade de situações de aprendizagem que o sujeito se desenvolve. Além disso, as situações-problema foram pensadas de modo que fossem familiares ao cotidiano dos alunos.

A diferenciação entre os problemas de contagem foi considerada para a elaboração da sequência, de modo a garantir a diversidade de situações. Entretanto, em nenhum momento foi mencionado que os problemas se referiam a arranjos, permutações ou combinações.

Nosso objetivo inicial era trabalhar com problemas variados de Análise combinatória, contemplando os conceitos e cálculos de permutações, arranjos e combinações. Porém, com a realização dos três primeiros encontros, percebemos que nossa proposta precisaria ser repensada, tanto em relação aos problemas propostos quanto em relação à proposição de outros momentos de aprendizagem, pois a dinâmica dos encontros iniciai não foi o que esperávamos, além disso, tínhamos limitações quanto ao tempo disponível para realização da pesquisa. Por esta razão, optamos por retirar da sequência as atividades envolvendo combinações e incluir a utilização de um jogo didático – o Jogo Senha.

Para a aplicação do material elaborado nos apoiamos em uma estratégia didática baseada na resolução das atividades por parte dos alunos, organizados em duplas, com posterior apresentação das diferentes resoluções e discussão das estratégias de resolução adotadas por diferentes duplas.

Sendo assim, o material elaborado foi aplicado em seis encontros, organizados da seguinte forma:

1º Encontro: aplicação do primeiro conjunto de atividades;

2º Encontro: discussão do primeiro conjunto de atividades

3º Encontro: aplicação do segundo conjunto de atividades;

4º Encontro: aplicação do Jogo Senha;

5º Encontro: discussão dos resultados do Jogo Senha e retomada do segundo conjunto de atividades;

6º Encontro: discussão do segundo conjunto de atividades e aplicação do terceiro.

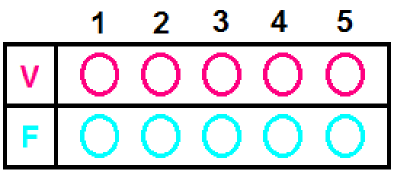
O primeiro conjunto de atividades, descrito no Quadro 6, era composto por cinco problemas, sendo que dois envolviam produto cartesiano (questão 1, 2 e 3), um envolvia arranjos (questão 5) e o outro não se encaixava em nenhuma dessas categorias (questão 4). Esses problemas foram propostos com o objetivo de verificarmos as estratégias de resolução que os alunos utilizariam, se conseguiriam sistematizar algum mecanismo de organização de modo a obter todas as possibilidades e ainda observar se algum deles lançaria mão da multiplicação. Ressaltamos que o tópico Análise Combinatória não havia sido trabalhado em nenhuma aula anterior.

Questão 1

Vanessa irá comprar um telefone celular novo. Ela vai a uma loja fazer uma pesquisa de preço e a loja lhe oferece 5 modelos diferentes com duas opções de planos de tarifas (pré-pago e pós-pago). Quantas possibilidades diferentes Vanessa tem para comprar um telefone nessa loja?

Questão 2

Uma prova é composta por 5 questões objetivas, para serem julgadas como V (verdadeiras) ou F (falsas). As respostas devem ser escritas em um gabarito conforme representação abaixo. De quantas maneiras diferentes o gabarito abaixo pode ser preenchido?



Questão 3

Francisco vai viajar de Alegrete até Porto Alegre, porém precisa passar por Santa Maria. Sabemos que existem três estradas distintas ligando Alegrete a Santa Maria e duas estradas ligando Santa Maria a Porto Alegre, conforme representação abaixo. De quantas maneiras ele poderá realizar essa viagem?

Q***uestão 4***

Marcus irá fazer um saque de R$ 100,00 em um caixa eletrônico de seu banco. Chegando ao caixa ele percebe que o caixa oferece cédulas de R$ 50,00, R$ 20,00 e R$ 10,00. Quantas possibilidades diferentes Marcus tem de receber a quantia que irá sacar?

Questão 5

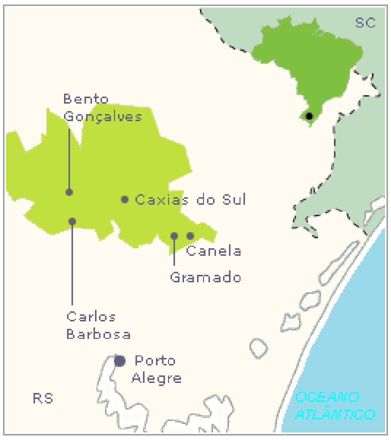
Para a copa do mundo de 2014 que será realizada no Brasil, alguns estádios estão sendo construídos e outros reformados. Consideremos um estádio que contará com 8 portões de entrada/saída. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar no estádio e sair por um portão diferente do que foi usado para entrar?

Quadro 6 – Primeiro Conjunto de Atividades.

O segundo conjunto de atividades, Quadro 7, foi pensado de modo que os alunos pudessem compreender o princípio multiplicativo e verificar a necessidade de sua utilização em alguns problemas nos quais a listagem de todas as possibilidades torna-se inviável.

Questão 1

Um grupo de pessoas está organizando uma excursão pela Serra Gaúcha. Eles irão visitar as cidades de Caxias do Sul, Canela, Gramado, Bento Gonçalves e Carlos Barbosa. O grupo está montando seu roteiro de viagem decidindo a ordem em que irão visitar as cidades. Quantas são as possibilidades de roteiro que o grupo pode formar?



Questão 2

(Bill Watterson. O Estado de S. Paulo, 20/11/199.)

De quantos modos Calvin pode escolher os dois dias do ano, um em novembro e um em março? (Considerando todos os dias do mês de março e de novembro.)

Questão 3

A comunicação por meio virtual está cada vez mais difundida. Um dos meios mais utilizados é o *email*. Para termos um *email* devemos criar uma conta de acesso em um site especializado. No momento da criação desta conta além do endereço de *email*, criamos uma senha de acesso, que pode ser composta de algarismos, letras ou outros caracteres. A senha é imprescindível para garantir a segurança de nosso email e evitar que outras pessoas tenham acesso a nossa conta.

Considerando que ao criar um email, seja exigido uma senha de 6 algarismos:

a) Quantas são as possibilidades de senhas, se os 6 algarismos forem quaisquer?

b) Quantas são as possibilidades de senhas, se os 6 algarismos forem distintos?

Quadro 7 – Segundo Conjunto de Atividades.

O terceiro conjunto de atividades, Quadro 8, foi proposto com o intuito de analisarmos se os alunos haviam compreendido o princípio multiplicativo e se conseguiriam utilizá-lo na resolução de problemas. Os problemas aqui propostos envolvem valores numéricos altos, o que tornou praticamente inviável sua resolução por outro mecanismo que não fosse o princípio multiplicativo.

Questão 1

Utilizando cartões nas cores: azul, salmão, amarelo e verde. Responda:

a) Quantas sequências diferentes de cores podem ser formadas utilizando três cartões com cores distintas?
b) Quantas sequências de cores podem ser formadas utilizando três cartões quaisquer?

Questão 2

Você sabe como são gerados os números de telefone?

Os números de telefone são divididos em prefixo e número do assinante, o prefixo é o número que identifica de onde é o telefone (4 primeiros algarismos) e o número do assinante é o código de identificação do cliente (4 últimos algarismos). Quantos números de telefones de 8 dígitos podemos criar, sabendo que o primeiro não pode ser zero?

Questão 3:

Para maior segurança a maioria dos bancos adota um sistema de senhas que consiste na utilização de algarismos e letras. Suponhamos que um determinado banco adote um sistema de senhas composto de 6 algarismos e 3 letras de nosso alfabeto, nessa ordem. Nessas condições, responda:

a) Quantas são as possibilidades de senhas compostas de 6 algarismos quaisquer e 3 letras quaisquer?
b) Quantas são as possibilidades de senhas composta por 6 algarismos e 3 letras quaisquer, mas que não iniciem por zero?
c) Quantas são as possibilidades se todos os algarismos forem distintos e todas as letras forem distintas?

Quadro 8 – Terceiro Conjunto de Atividades.

Além dos três conjuntos de atividades já apresentados, também foi utilizado o jogo senha, como já mencionamos anteriormente. As regras do jogo, bem como o material utilizado, estão descritos no Quadro 9.

Material do jogo

1 – Tabuleiro do Desafiante e tabuleiro do desafiado;

2 – Canetas hidrocor de cores diversas.

Regras do Jogo

1 - Escolhe-se quem será o desafiante, ou seja, aquele que formará uma senha, e o desafiado, aquele que tentará descobri-la;

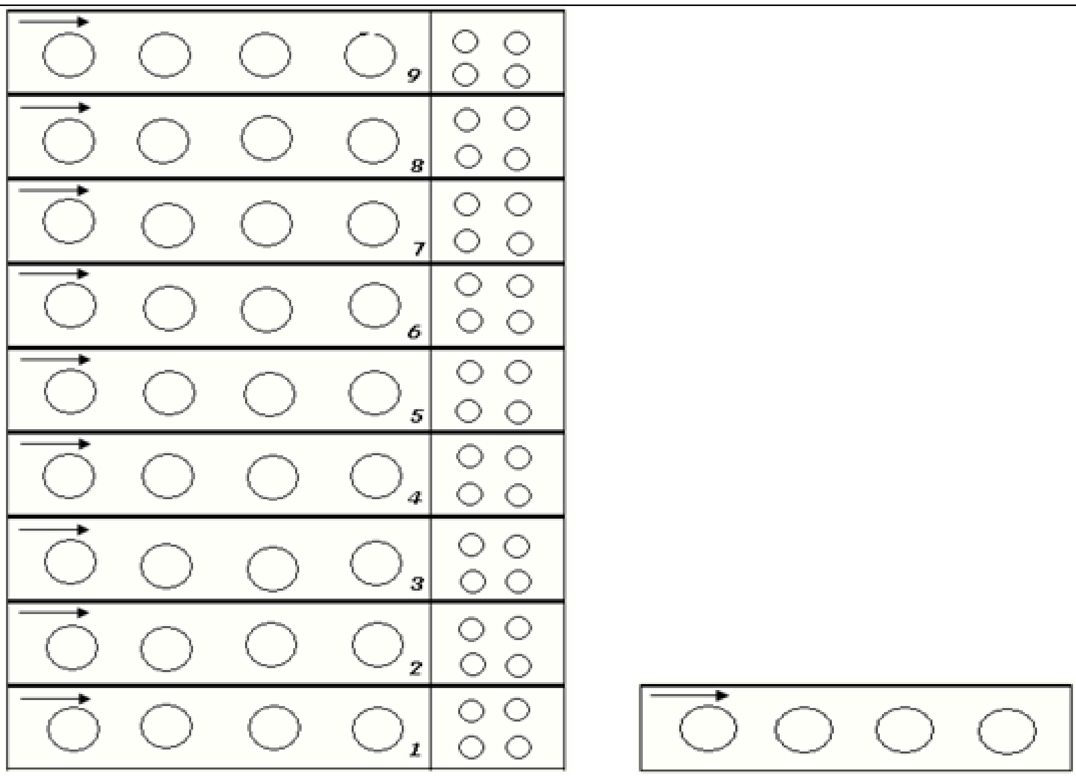
2 – O desafiante forma uma senha utilizando quatro cores distintas ou não;

3 – O desafiado forma uma senha que julga ser a do desafiante. Caso tenha acertado, o desafiante dá dicas na coluna da direita do tabuleiro do desafiado.

- cada círculo pintado de preto corresponde a uma cor correta em uma posição correta;
- cada círculo em branco corresponde a uma cor correta em uma posição incorreta;
- cada círculo marcado com um X corresponde a uma cor incorreta

4 – O desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha em nenhuma das nove oportunidades, ele contabiliza nove pontos;

5 – Alternadamente, os jogadores invertem seus papéis. O jogo segue da mesma forma e será considerado vencedor aquele que descobrir a senha do outro em menos tentativas, ou seja, aquele que obtiver o menor número de pontos.



Tabuleiro do Desafiado Tabuleiro do Desafiante

Quadro 9 – Material e regras do Jogo Senha.

No capítulo seguinte faremos uma descrição detalhada da aplicação da sequência de ensino, bem como dos resultados alcançados.

6 APLICAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DE ENSINO

Nesta seção iremos apresentar as atividades propostas aos alunos, bem como as diferentes resoluções por eles apresentadas, e uma análise dessas resoluções enfocando a sua compreensão de problemas que envolvam o raciocínio combinatório. Buscamos, por intermédio das resoluções dos problemas, suscitar discussões por meio das quais os alunos pudessem justificar as estratégias utilizadas com vistas ao desenvolvimento dos conceitos da análise combinatória, em especial, da sistematização das possibilidades através do diagrama de árvore ou de outro mecanismo através do qual se pudesse garantir que todos os agrupamentos fossem obtidos e, ainda, proporcionar que por meio das discussões o princípio multiplicativo pudesse ser compreendido e utilizado.

No processo de investigação buscamos analisar as resoluções e as justificativas escritas e orais apresentadas pelos alunos, com algumas intervenções e orientações que julgamos necessárias.

As atividades foram desenvolvidas em seis encontros semanais, como mencionamos no capítulo anterior. Contudo, nossa análise sobre a aplicação, resolução e discussão está organizada em cinco seções:

6.1 – Análise do primeiro conjunto de atividades;

6.2 – Análise do segundo conjunto de atividades;

6.3 – Análise do jogo senha;

6.4– Análise do terceiro conjunto de atividades;

6.5 – Resultados alcançados.

6.1 Análise do primeiro conjunto de atividades

As primeiras atividades propostas abordando problemas que envolvem o raciocínio combinatório tiveram por objetivo analisar se os alunos utilizariam algum tipo de representação para listar os agrupamentos formados e se o fariam com algum critério de organização que garantisse a obtenção de todos os elementos, sem repetição. Buscamos também verificar se utilizariam a multiplicação para resolver alguma questão proposta.

Inicialmente, foi combinada com os alunos a dinâmica de trabalho, na qual os os alunos resolveriam as atividades propostas em duplas, utilizando as estratégias que considerassem mais convenientes. Foi esclarecido que as resoluções deveriam ser registradas nas folhas das atividades para proporcionar as discussões que se seguiriam ao desenvolvimento das atividades propostas.

Esclareceu-se também que todas as aulas destinadas ao desenvolvimento do trabalho seriam registradas por vídeo e áudio, de modo a proporcionar a análise posterior dos dados, e que seria mantido o anonimato de todos os participantes, sendo que caso fosse necessário citá-los, seriam utilizados pseudônimos.

As questões da primeira sequência de atividades foram solucionadas pelos alunos com a mínima intervenção possível, de modo a garantir que registrassem o que estavam pensando. Ao final, as resoluções foram recolhidas, para que posteriormente fossem organizadas de modo a possibilitar as discussões que apresentaremos.

Foram destinados, ao todo, dois encontros para esse primeiro conjunto de atividades: o primeiro para apresentação e resolução das atividades, e o segundo para discussão. Faremos um relato articulado dos dois encontros.

A primeira questão referia-se às possibilidades de compra de um aparelho celular dentre cinco opções de modelos e dois planos de tarifas, conforme vemos no Quadro 10.

Questão 1

Vanessa irá comprar um telefone celular novo. Ela vai a uma loja fazer uma pesquisa de preço e a loja lhe oferece 5 modelos diferentes com duas opções de planos de tarifas (pré-pago e pós-pago). Quantas possibilidades diferentes Vanessa têm para comprar um telefone nessa loja?

Quadro 10 – Atividade 1 do primeiro conjunto de atividades.

Essa situação envolvia duas etapas consecutivas: escolher um modelo de aparelho de celular e um plano de tarifa. Para a escolha do aparelho há cinco opções, enquanto que para a escolha do plano de tarifa há duas. Percebemos que para cada um dos cinco modelos de aparelho há duas opções de plano de tarifa, logo, pelo principio fundamental da contagem, Vanessa terá $5 \times 2 = 10$ possibilidades de escolha de seu novo celular.

Das duplas que resolveram a atividade, apenas uma não encontrou o resultado esperado. Apresentamos na Figura 14, a resolução das duplas Beatriz e Eva, e, André e Hugo.

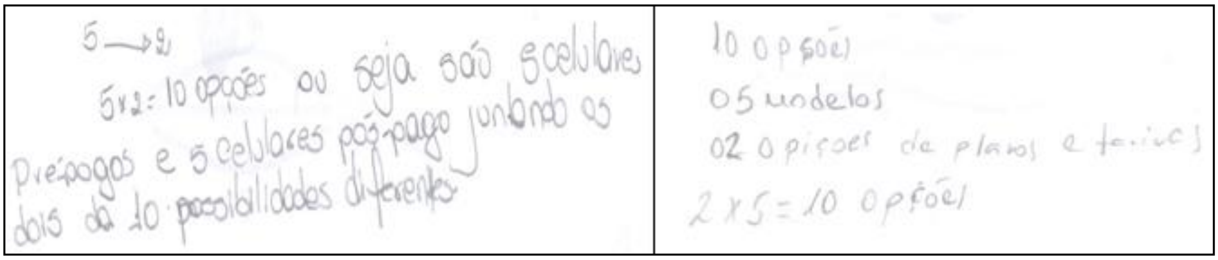


Figura 14 – Resolução da atividade 1 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pelas duplas Beatriz e Eva e, André e Hugo, respectivamente.

Podemos notar que as duas duplas apresentaram resoluções semelhantes. Enquanto a primeira considerou que para cada um dos cinco modelos de aparelho há duas opções de planos de tarifas, resultando em 10 opções de compra $(5 \times 2 = 10)$, a segunda dupla entendeu que para cada um dos dois planos de tarifa existem cinco modelos de aparelhos de celular distintos, também obtendo 10 possibilidades de compra $(2 \times 5 = 10)$. É possível notar que as multiplicações apresentadas pelas duas duplas diferem apenas pela ordem em que consideraram a realização das escolhas, ou seja, primeiro o modelo ou primeiro o plano. Nessa situação, já é perceptível a presença de um esquema combinatório, pois ambas mostraram identificar quais escolhas devem ser feitas, independente da ordem em que ocorrem, e quantas são as opções envolvidas em cada escolha. Além disso, demonstraram compreender a relação "para cada", que pode então ser resolvida por intermédio de uma multiplicação.

Como dinâmica de discussão das atividades, foi solicitado que as duas duplas explicassem o procedimento utilizado para encontrar o resultado obtido. No trecho a seguir, extraído do diário de áudio e vídeo, podemos acompanhar a explicação intermediada pela professora:

Eva: É assim oh: eu achei dez opções, ou seja, são cinco celulares pré-pago, no caso nas duas opções né, pré-pago e pós-pago. Então, são cinco celulares pré-pago e cinco celulare pós-pago, ou seja, são dez possibilidades diferentes.

[...]

Professora: E vocês aí, André?

André: Achamos a mesma coisa que elas. São cinco de cada e duas opções de planos, de tarifas.

Eva: Isso. São cinco modelos diferentes para duas opções de tarifas. Então são cinco do modelo pré-pago e cinco do pós-pago.

No diálogo, observamos que os alunos compreenderam a situação proposta pela atividade, ou seja, percebem que para cada plano de tarifa há cinco modelos de celular disponíveis. Temos aqui dois exemplos de conceito-em-ação: a multiplicação e a ideia de eventos independentes. Além disso, percebemos também um teorema-em-ação: para cada escolha inicial, há um mesmo número de opções na segunda escolha, permitindo a multiplicação.

Uma terceira dupla, Carlos e Fabiane, também encontrou o resultado esperado. Ao contrário das duas resoluções já apresentadas, a resolução dessa dupla não mostra o uso de uma notação de multiplicação, como podemos ver na Figura 15, porém ao determinar que há cinco modelos para cada tipo de plano tarifário, estão utilizando a noção de multiplicação como soma de fatores iguais.

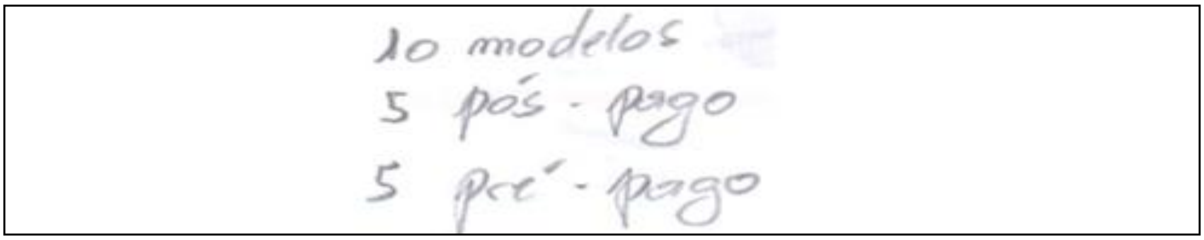

10 modelos
5 pós - pago
5 pré - pago

Figura 15 – Resolução da atividade 1 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela Carlos e Fabiane.

A quarta dupla, Daiana e Gabriela, não encontrou o resultado esperado. Observando a resposta fornecida, percebemos que as alunas resolveram o exercício por meio de uma soma das quantidades de modelos disponíveis e de planos de tarifas (Figura 16).

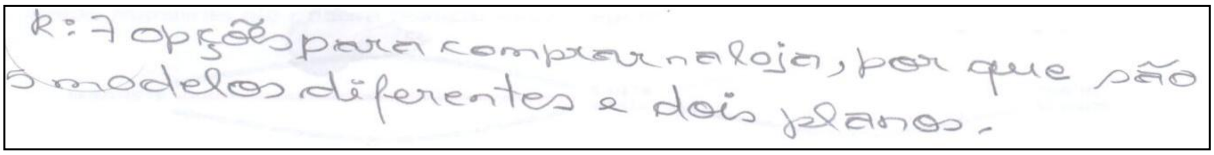

R: 7 opções para comprar na loja, por que são 5 modelos diferentes e dois planos.

Figura 16 – Resolução da atividade 1 do primeiro conjunto de atividades, apresentada dupla Daiana e Gabriela.

Analisando a resolução apresentada, percebemos que a dupla interpretou as duas etapas de escolhas (tanto do aparelho quanto do plano de tarifa) como uma única etapa de escolha a ser feita. Com isso, está pensando na união dos conjuntos de opções envolvidas, sendo assim, apresenta uma soma como solução para o problema proposto, ou seja, como pode escolher entre modelo e plano, soma todas as opções. Nessa situação, está utilizando um falso teorema-em-ação.

A atividade foi resolvida no grande grupo a fim de se elucidar o total de possibilidades. Primeiramente, os modelos de aparelho foram denominados de M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 e os planos P_1 (pré-pago) e P_2 (pós-pago). Como havia duas escolhas a serem feitas, iniciamos a construção da árvore elencando as cinco opções de escolha do modelo de aparelho celular : M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5; após para cada um dos modelos havia a escolha de um dos planos de tarifa: P_1 ou P_2. Ou seja, foi assinalado que para cada modelo havia duas opções de planos de tarifas, obtendo-se, portanto, a árvore de possibilidades representada na Figura 17.

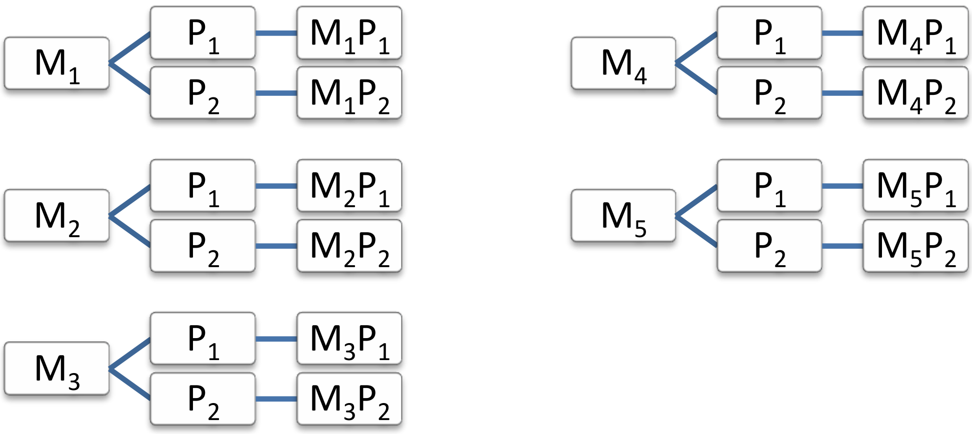


Figura 17: Árvore de possibilidades da Atividade 1 do primeiro conjunto de atividades.

A representação por meio da árvore de possibilidades permitiu aos alunos que encontraram o resultado correto, visualizar todas as dez opções e, também, às alunas que haviam encontrado como resultado sete opções, compreender que não poderiam ter realizado uma soma, pois o problema previa duas etapas de escolhas independentes: um modelo do aparelho e um plano de tarifa. Não era possível escolher entre um modelo ou um plano, sendo assim, não era possível realizar uma soma como forma de resolução da atividade. Uma das alunas da dupla chegou a exclamar que elas não haviam pensado direito no exercício, que responderam de forma rápida, e por esta razão, acabaram realizando uma soma. A representação ficou registrada no quadro-branco para falarmos sobre ela posteriormente.

Continuamos a discussão das atividades. A discussão da questão número dois foi deixada para o final da aula, por considerarmos que sua solução ficaria melhor compreendida se os alunos tivessem, antes, a oportunidade de ver outros problemas resolvidos pela árvore de possibilidades e pelo princípio multiplicativo. Passamos então à questão 3 (Quadro 11), que tratava de uma viagem de Alegrete a Porto Alegre, onde o viajante deveria passar obrigatoriamente por Santa Maria, escolhendo o trajeto entre diferentes opções de estradas.

Questão 3

Francisco vai viajar de Alegrete até Porto Alegre, porém precisa passar por Santa Maria. Sabemos que existem três estradas distintas ligando Alegrete a Santa Maria e duas estradas ligando Santa Maria a Porto Alegre, conforme representação abaixo. De quantas maneiras ele poderá realizar essa viagem?

Quadro 11 – Atividade 3 do primeiro conjunto de atividades.

Essa situação envolvia duas etapas, escolher uma estrada para ir de Alegrete à Santa Maria, entre três opções, e uma estrada de Santa Maria a Porto Alegre, entre duas opções. Para cada uma das estradas escolhidas na primeira etapa, haverá duas opções de escolha de estrada na segunda etapa. Como há três estradas na primeira etapa, teremos aos total $3 \times 2 = 6$ opções de realização da viagem de Alegrete a Porto Alegre, passando por Santa Maria.

As duplas André e Hugo, e Daiana e Gabriela apresentaram como resultado cinco maneiras distintas de realizar a viagem de Alegrete a Porto Alegre, conforme vemos na Figura 18.

Figura 18 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pelas duplas André e Hugo e, Daiana e Gabriela respectivamente.

Percebemos que essas duas duplas tiveram dificuldade em identificar quantas escolhas podem ser feitas e a ordem em que devem ocorrer. Trataram as duas etapas de escolhas que deveriam ser feitas, como apenas uma, pensando, então, na união dos conjuntos de opções envolvidas, apresentando, então, uma soma como solução.

Percebemos que a dupla Daiana e Gabriela teve o mesmo raciocínio na primeira atividade, como já descrevemos. Entretanto, nessa mesma atividade, a dupla André e Hugo, havia apresentado indícios de um esquema combinatório. Acreditamos que o mesmo não tenha ocorrido nesse problema pois as variáveis envolvidas nas duas etapas de escolhas dificultou a identificação dos alunos quanto às escolhas que precisavam ser realizadas.

Durante a discussão ficou claro que esses alunos entenderam que uma viagem já seriam os trechos “Alegrete – Santa Maria” ou “Santa Maria – Porto Alegre”, enquanto na proposta da atividade previa que fosse montado um roteiro de Alegrete a Porto Alegre, passando por Santa Maria. Para esses alunos, cada trecho, individualmente, já configurava uma viagem.

Ao pensar sobre a dificuldade de interpretação apresentada vemos que não se deve apenas à redação do enunciado. Quando analisamos se a situação proposta é um tema do cotidiano dos alunos nos deparamos com uma possível negativa, pois quando eles realizam a viagem proposta no problema podem não ter a possibilidade de realizar tais escolhas. Por exemplo, alguém que viaja de ônibus de Alegrete a Porto Alegre pode escolher o horário, o tipo de acomodação, etc. mas não pode escolher o trajeto que irá percorrer, daí vem uma possível justificativa de pensaram em uma escolha única para cada viagem.

Quando analisamos a resolução apresentada pela dupla Beatriz e Eva (Figura 19) notamos que, aparentemente, solucionaram o problema de maneira correta.

Figura 19 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Beatriz e Eva.

Entretanto, ao justificarem a resolução apresentada, ficou claro que a aluna Beatriz havia pensado na situação do problema de forma correta: para cada estrada escolhida entre Alegrete e Santa Maria havia duas opções de escolha de estrada de Santa Maria a Porto Alegre. Enquanto a aluna Eva, pensou na multiplicação 3×2, considerando dois trechos por estrada que partia de Alegrete, sendo que a estrada “rosa” teria continuação “sem curvinhas” (como aparece na transcrição), ou seja, ela considerou só uma escolha em Alegrete e multiplicou as 3 opções de estradas partindo de Alegrete pelos dois trechos que cada estrada teria.

Eva: Tu vai fazer uma viagem de Alegrete à Santa Maria à Porto Alegre. Logo, nosso raciocínio foi o seguinte: a gente pegou de Alegrete à Santa Maria pela verde, dá uma viagem. Depois de Santa Maria à Porto Alegre pela roxa, são duas viagens. Foi isso que a gente fez. Depois a gente pegou de Alegrete para Santa Maria, pela azul, é outra viagem. Daí a gente seguiu de Santa Maria a Porto Alegre pela amarela, são cinco viagens. Depois tem a parte que vai reto, pela rosa.
Professora: Ali tu te enganaste. Até agora são quatro viagens.
Eva: Isso! São quatro viagens. Aí depois tem a reta. Vai de Alegrete a Santa Maria, pela rosa, reto. Aí segue reto a Porto Alegre, sem fazer essas curvinhas.
Beatriz: Não. Ali tu se confundiu. Vai na rosa de Alegrete à Santa Maria, daí sobe pela amarela. Depois vai de Alegrete à Santa Maria pela rosa, e vai pela roxa até Porto Alegre, daí fecha seis.

Pelo diálogo, vemos que as viagens listadas são de Alegrete a Santa Maria e de Santa Maria a Porto Alegre, ou seja, cada estrada que poderia ser escolhida foi entendida como uma viagem.

Para a discussão prosseguir foi realizado um esclarecimento sobre a situação que estava proposta na atividade, na qual a “viagem” a ser considerada era de

Alegrete à Porto Alegre, passando por Santa Maria. Para esta viagem ser realizada era necessário escolher uma estrada de Alegrete a Santa Maria, entre três disponíveis e, uma estrada de Santa Maria a Porto Alegre, entre duas opções. O trajeto só estaria completo quando as duas estradas, uma para cada percurso, fosse escolhida.

Para que isso ficasse mais claro para todos, foi solicitado à dupla Fabiane e Carlos que apresentasse sua resolução, pois a dupla havia resolvido corretamente a atividade, considerando duas escolhas a serem feitas, e representando a solução de duas maneiras diferentes: por meio de flechas, indicando as opções de trajetos, e através da listagem dos trajetos formados, conforme vemos na Figura 20.

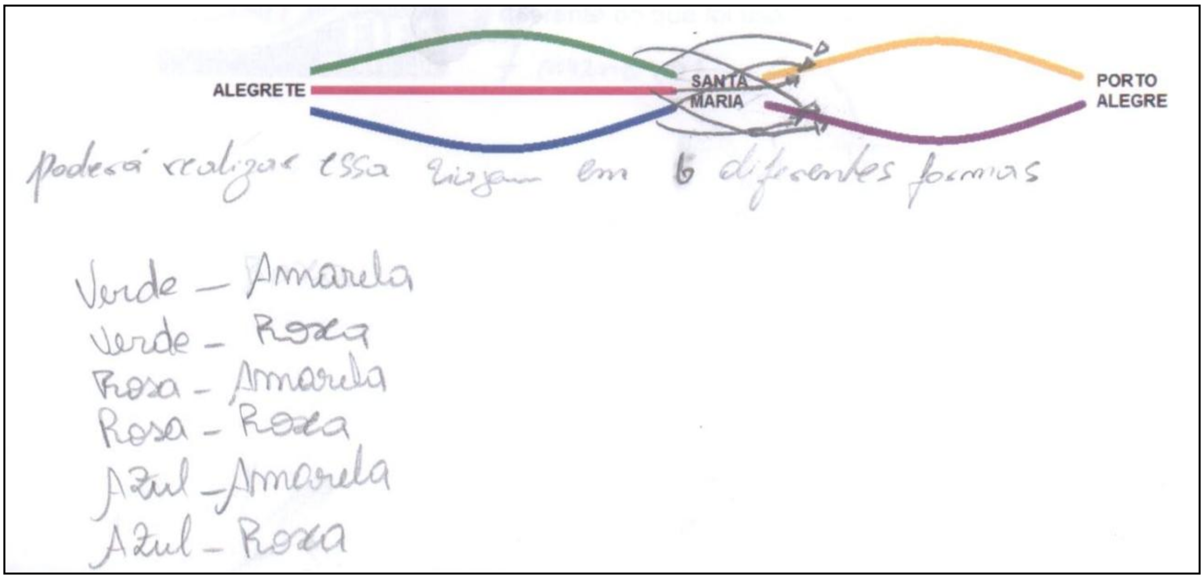


Figura 20 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Fabiane e Carlos

A partir da resolução apresentada, foi possível visualizar todas as possíveis maneiras de realizar a viagem de Alegrete a Porto Alegre, passando por Santa Maria. Sendo que novamente foi ressaltado que uma viagem, conforme a situação proposta no problema, só ocorreria quando tivéssemos algum dos pares de estradas, conforme listados pelos alunos Fabiane e Carlos. Nesse caso, podemos observar que essa dupla identifica claramente as escolhas a serem feitas.

Novamente, foi construída a árvore de possibilidades que ilustra a situação proposta na atividade (Figura 21). Para simplificar a notação cada estrada foi indicada, conforme suas iniciais, da seguinte forma: V (Verde), R (Rosa), A (Azul), Am (Amarela) e Rx (Roxa).

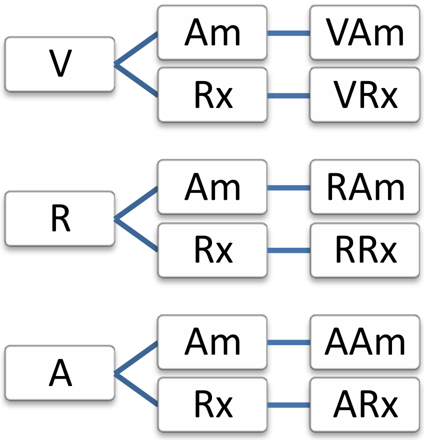


Figura 21 – Árvore de possibilidades da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades.

Ao finalizarmos, foi esclarecido aos alunos que esta estratégia de resolução, também utilizada na primeira atividade, é conhecida por “árvore de possibilidades”, e que sua potencialidade está no fato de garantir a listagem de todas as possibilidades sem repetições. Conforme destacam as Orientações Curriculares Nacionais: “a utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.” (BRASIL, 2006, p. 79).

Após a conclusão da construção da árvore de possibilidades e explicação sobre sua utilização, os alunos foram indagados se não haveria uma forma mais simples de resolução para os exercícios 1 e 3. Eles pensaram por um instante e uma aluna respondeu que a única maneira mais simples seria multiplicando, destacando que tal multiplicação seria a forma “resumida” de resolver as atividades.

Professora: Vocês acham que teria outra forma de fazer?
Beatriz: Mais resumido, era tu dizer que tu tinha três caminhos vezes os dois caminhos dá seis. Aquela ali tu tinha cinco opções vezes duas, dá dez. Deu. Fechou. Mais resumido que isso não tem.

Esse diálogo foi utilizado como ponto de partida para apresentação do princípio multiplicativo. Novamente, foi perguntado porque na primeira situação haveria dez possibilidades de compra do aparelho de celular com um determinado plano de tarifa. A dupla que havia apresentado uma soma na sua resolução, afirmou novamente que era possível responder ao exercício por meio de uma soma, porém, agora a soma seria “$5 + 5$”, e não “$5 + 2$”, como haviam feito anteriormente. Quando questionada do porquê de realizar uma soma, a dupla destacou que para cada plano haveria cinco modelos, logo seria $5+5=10$. Foi ressaltado que esse raciocínio estava correto, o que suscitou dúvidas de outros alunos, pois, anteriormente havia sido explicado que o primeiro problema não poderia ser resolvido por meio de uma soma. Foi então esclarecido que a soma apresentada agora estava correta, pois tratava-se de uma soma de parcelas iguais, que pode ser interpretada como uma multiplicação, uma vez que a expressão $5+5$ indica o mesmo que 2×5. Na realidade, muitas vezes, a quantidade excessiva de parcelas iguais em uma soma é utilizada como justificativa para a introdução da multiplicação nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Para finalizar a terceira questão, foi esclarecido que a multiplicação ressaltada pela aluna Beatriz realmente resolveria a atividade, posto que, para cada estrada de Alegrete a Santa Maria escolhida, haveria duas opções de estradas para prosseguir até Porto Alegre, e como eram três estradas iniciais, teríamos $3 \times 2=6$. A discussão das atividades 1 e 3 foi finalizada com o enunciado do Princípio Multiplicativo.

Após a apresentação da árvore de possibilidades e do princípio multiplicativo continuamos a discussão das atividades, analisando a quarta questão (Quadro 12). Essa atividade não poderia ser resolvida pelo uso do princípio multiplicativo. Porém, exigia dos alunos uma organização sistemática de modo a identificarem todas as possibilidades, sem repeti-las.

Questão 4

Marcus irá fazer um saque de R$ 100,00 em um caixa eletrônico de seu banco. Chegando ao caixa ele percebe que o caixa oferece cédulas de R$ 50,00, R$ 20,00 e R$ 10,00. Quantas possibilidades diferentes Marcus tem de receber a quantia que irá sacar?

Quadro 12 – Atividade 4 do primeiro conjunto de atividades.

Para a resolução dessa atividade era preciso realizar a listagem de todas as possibilidades. Para auxiliar os alunos neste processo, foram disponibilizadas cédulas[12] sem valor monetário.

Como todas as possibilidades precisavam ser descritas, era necessário que os alunos utilizassem algum mecanismo de organização que permitisse alcançar esse objetivo. Apresentaremos uma possível solução esperada (as possibilidades podem ser listadas em outra ordem), partindo das opções em que todas as notas são iguais, seguidas das opções com uma nota de 50 reais e as demais opções utilizando apenas notas de 10 e 20 reais.

$$2 \times 50 = 100$$

$$5 \times 20 = 100$$

$$10 \times 10 = 100$$

$$50 + 5 \times 10 = 100$$

$$50 + 1 \times 20 + 3 \times 10 = 100$$

$$50 + 2 \times 20 + 1 \times . 10 = 100$$

$$1 \times 20 + 8 \times 10 = 100$$

$$2 \times 20 + 6 \times 10 = 100$$

$$3 \times 20 + 4 \times 10 = 100$$

$$4 \times 20 + 2 \times 10 = 100$$

É fácil verificar que qualquer outra composição com notas de 50, 20 e 10 reais não formará o valor de cem reais. Considerando, por exemplo, a situação em que todas as notas são iguais: se for acrescentada ou retirada uma nota, o valor será maior ou menor que cem reais, respectivamente.

Para os casos em que temos uma nota de 50 reais, podemos constatar que todas as possibilidades foram listadas, pois como já temos 50 reais precisamos formar mais 50 reais, utilizando notas de 10 e/ou 20 reais. Inicialmente, obtemos os outros 50 reais utilizando cinco notas de 10. Se considerarmos uma quantidade menor que cinco notas de 10 reais, em todas, precisaremos utilizar notas de 20 reais. A partir disso, temos que não é possível formar 50 reais com quatro ou com duas notas de dez reais, pois não podemos compor o que falta utilizando notas de 20 reais. Assim, só podemos formar 50 reais com uma, três e cinco notas de 10

[12] As cédulas utilizadas para a realização dessa atividade foram “cédulas modelo” utilizadas em atividades pedagógicas, ou seja, sem valor monetário.

reais. Temos também, que não é possível formar os 50 reais restantes utilizando apenas notas de 20 reais.

Ressaltamos, ainda, que os casos referentes a todas as possibilidades em que foram utilizadas notas de 10 reais já foram contabilizados. Foram listadas as situações em que aparecem uma, duas, três, quatro, cinco, seis, oito e dez notas de 10 reais, sendo essa última a maior quantidade possível, pois senão o valor de cem reais será ultrapassado. Deve-se observar que, em todos esses casos citados, os valores que faltavam, a partir da quantidade de notas de 10 reais consideradas, só podiam ser constituídos de uma única maneira. Por exemplo, para utilizarmos apenas uma nota de 10 reais, precisamos formar noventa reais com as demais notas. Não é possível obter esse valor utilizando apenas notas de 20 reais, visto que 90 não é múltiplo de 20, logo precisamos utilizar uma nota de 50 reais e duas notas de 20 reais, para formar os quarenta reais restantes. O mesmo ocorre para as demais situações.

Porém, não é possível repetir o processo para sete e nove notas de 10 reais. Se considerarmos, por exemplo, sete notas de 10 reais, teremos setenta reais, logo, faltariam 30 reais. Com as notas disponíveis, a única maneira forma de formar 30 reais é utilizando uma nota de 20 reais e uma nota de 10, o que recai no caso de 8 notas de 10 reais. O processo é análogo para o caso de nove notas de 10 reais. Assim, garantimos que as dez opções descritas acima são o total de possibilidades de se formar cem reais com notas de 10, 20 e 50 reais, sem considerar a ordem em que as notas são tomadas.

Todas as duplas apresentaram como recurso na resolução da atividade, a listagem de possibilidades de soma para obter 100 reais. Porém, apenas uma delas encontrou o resultado esperado (Figura 22), listando todas as possibilidades, sem repetição.

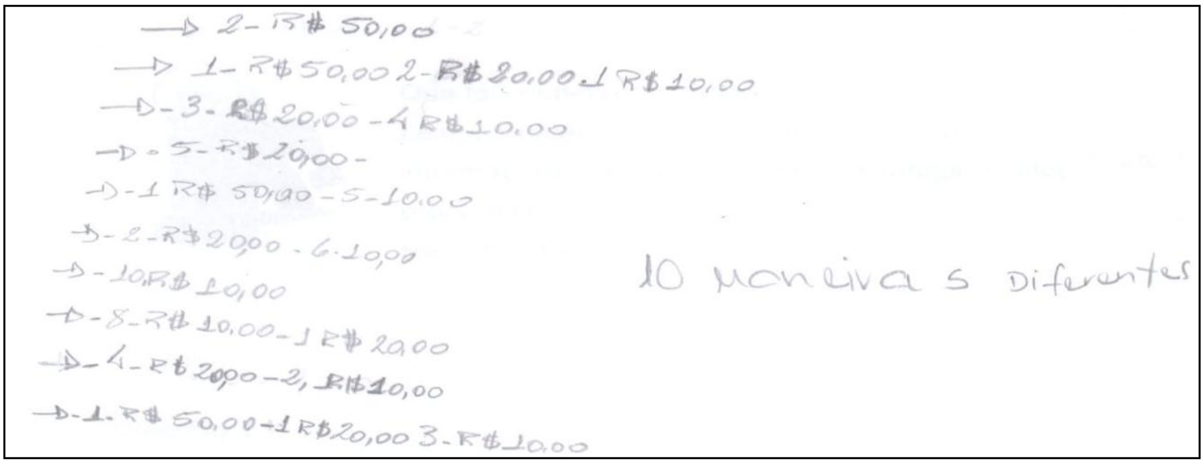


Figura 22 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla André e Hugo.

Das demais duplas, duas obtiveram um número menor de possibilidades e a outra um número maior. As duplas que encontraram um resultado menor do que o esperado descreveram corretamente as opções em que todas as cédulas são iguais, entretanto, não conseguiram listar todas as opções em que as cédulas são variadas. Por exemplo, ambas listaram a possibilidade $50 + 2 \times 20 + 1 \times 10 = 100$, sendo que a primeira ainda listou a possibilidade $50 + 1 \times 20 + 3 \times 10 = 100$, porém nenhuma identificou a opção $50 + 5 \times 10 = 100$. Em relação às possibilidades utilizando apenas notas de 10 e 20, cada uma das duas duplas apresentou apenas uma, dentre as quatro opções descritas na solução esperada (Figura 23), isto é, não consideraram as variações possíveis com notas de 10 e 20 reais.

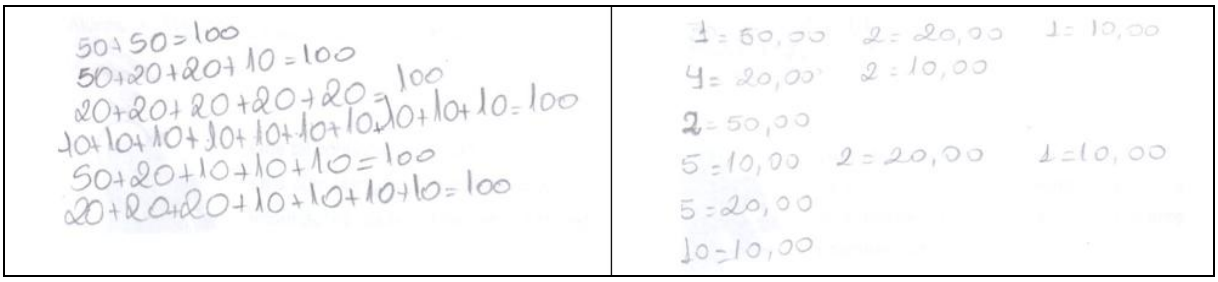


Figura 23 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pelas duplas Carlos e Fabiane e Daiana e Gabriela, respectivamente.

Na Figura 24, vemos que a dupla Beatriz e Eva encontrou uma resposta envolvendo maior número de possibilidades do que o esperado.

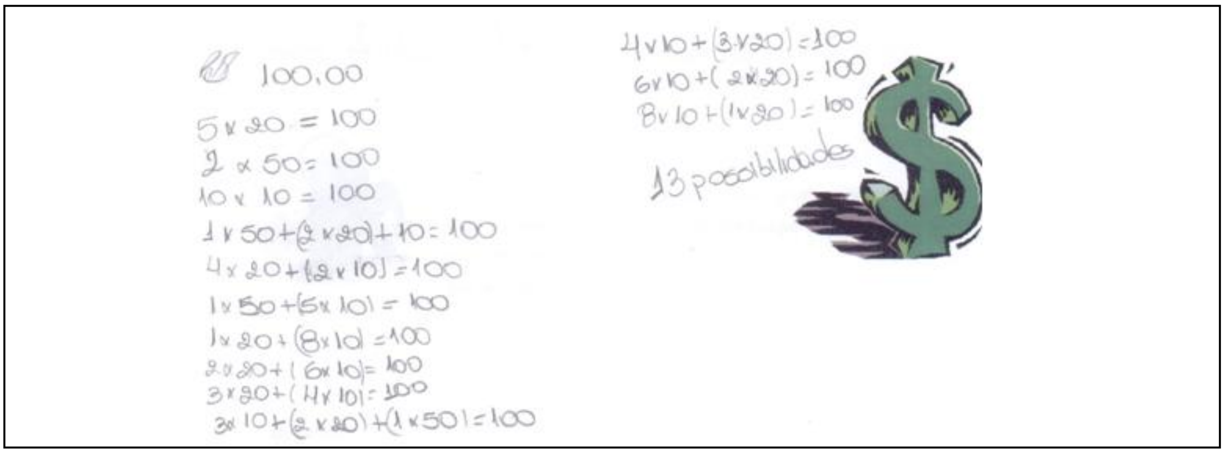


Figura 24 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada dupla Beatriz e Eva.

Analisando a resolução (Figura 24), percebemos que a dupla listou opções em duplicidade, invertendo apenas a ordem dos valores, como por exemplo, $(4 \times 10) + (3 \times 20) = 100$ e $(3 \times 20) + (4 \times 10) = 100$. Durante a discussão da atividade, as alunas perceberam que haviam repetido possibilidades, conforme podemos acompanhar no diálogo transcrito.

Professora: Então encerrou essas que era uma de 50, né?. Ou tem mais alguma? Vocês conseguem enxergar mais alguma? Oh, 50 reais vocês já tem aqui, tem que tenta formar mais 50 reais com as outras.
Beatriz e Eva: Ah! Uma de 50, uma de 20 e três de 10.
Professora: Essa já tá aqui.
Gabriela: É já tá ali. Uma de 20 e três de 10. Ali no meio.
Beatriz: Já tá ali. Olha! Só tá invertido. Nós só invertemos.
[Veja que neste momento a aluna percebe que repetiu elementos.]
Eva: É. Nós invertemos.
Professora: Terminou né? Com uma de 50 são só essas possibilidades.
André: Sim.

Podemos observar que os alunos percebem a repetição de possibilidades, sendo que isso advém da alteração da ordem dos elementos de uma dada possibilidade, o que na situação do problema, não fornece uma possibilidade distinta.

A atividade foi lida e o resultado encontrado por cada dupla registrado no quadro-branco. Para a resolução da atividade no grande grupo, foi utilizado o recurso de listagem dos agrupamentos, como fizeram as diferentes duplas. A listagem iniciou com a utilização de notas iguais, depois foram listadas as opções com uma nota de 50 reais e finalmente as opções em que aparecem apenas notas de 10 e 20 reais. Essa lógica de organização de listagem começando por notas iguais foi escolhida para auxiliar aos alunos a visualização de que todas as possíveis combinações realmente seriam descritas.

Toda a construção foi realizada com o auxílio dos alunos, como podemos perceber no trecho descrito a seguir.

Professora: Agora vai começar a “misturar”. André, qual foi a primeira que tu “misturou”?
André: Uma de 50, duas de 20 e uma de dez.
Professora: Oh, aqui já misturou três tipos de notas. Depois?
Hugo: uma de 50, uma de 20 e três de 10.
Professora: O que foi que eles fizeram aqui, pessoal? O que ajudou eles a não se perder, entre essas duas linhas?
Gabriela: Ele repetiu a primeira, ele dividiu a segunda. Ele, ele, dividiu ali e aumentou. Ele tirou uma daqui e colocou pra lá.
Professora: Ele repetiu que nem tu falou. Ele deixou fixo uma nota de 50 e tá vendo todas as outras variações que ele pode ter somando 20 e 10.
Professora: Será que tem mais alguma possibilidade?
Eva: Tem. Uma de 50 e cinco de 10.

Ao final da listagem das possibilidades em que aparecia uma nota de 50 reais, foi iniciada uma discussão sobre a possibilidade de haver mais alguma opção com notas de 50 reais. Os alunos concluíram que não haveria mais nenhuma possibilidade utilizando notas de 50 reais, pois já haviam sido descritas as possibilidades utilizando uma e duas notas, não poderiam ser utilizadas três notas, pois o total ultrapassaria 100 reais. Com isso, passamos às opções em que se utilizariam apenas notas de 10 e 20 reais. Novamente, foi solicitado o auxílio dos alunos que mencionaram as opções, conforme vemos na transcrição.

Professora: Qual vai ser a próxima então?
Eva: Quatro de 20 e duas de 10. Pode ser?
Professora: Pode ser. Formou 100 reais.
Eva: Duas de 20 e seis de 10.
Professora: Tá. E depois?
Eva: Uma de 20 e oito de 10. Depois, duas de 20 e seis de 10.
Professora: Olha, essa tu já me falou, tá vendo. Tu repetiu duas aí.

André: Tu repetiu. Tu já tem onze agora.

Eva: Tá. Espera aí. Três de 20 e quatro de 10.

Neste trecho podemos notar que a aluna Eva menciona novamente uma possibilidade que estava em duplicidade nas opções por ela listadas. Observamos que outro aluno nota a repetição, concluindo que na listagem da colega já havia onze possibilidades, pois até o momento já havíamos destacado nove possibilidades e a colega já havia repetido duas. Vemos que mesmo assim, ela menciona a última possibilidade que faltava para completar as dez opções possíveis.

Ao final da listagem, buscando estimular os alunos a elencar e testar hipóteses, foi discutido se haveria mais possibilidades. Algumas possibilidades foram relacionadas, porém, ou não eram possíveis em virtude das notas disponíveis (por exemplo, não é possível obter 100 reais utilizando sete notas de 10, sendo as demais notas de 20 e 50 reais) ou já haviam sido consideradas, diferenciando-se das listadas apenas pela ordem dos elementos. Com isso, concluiu-se que realmente só havia 10 possibilidades.

Para encerrar a correção, a dupla que encontrou 13 possibilidades foi orientada a encontrar quais estavam repetidas e excluí-las da sua listagem, enquanto aquela que listou apenas sete possibilidades, verificar quais opções estavam faltando para completar sua listagem.

Dando continuidade às discussões, passamos à quinta questão. Essa trata de uma situação em que uma pessoa entrará em um estádio de futebol, com oito portões de entrada/saída, não podendo sair pelo mesmo portão pelo qual entrou, conforme enunciado no Quadro 13.

Questão 5

Para a copa do mundo de 2014 que será realizada no Brasil, alguns estádios estão sendo construídos e outros reformados. Consideremos um estádio que contará com 8 portões de entrada/saída. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar no estádio e sair por um portão diferente do que foi usado para entrar?

Quadro 13 – Atividade 5 do primeiro conjunto de atividades.

Essa questão consistia em duas etapas iguais de escolha de um portão: um para entrar e um para sair de um estádio. Sendo que o portão que fosse escolhido na primeira etapa não poderia ser escolhido na segunda. Observamos que nessa situação não serão utilizados todos os elementos disponíveis. Na realidade estaremos formando um par ordenado, a partir de um conjunto com oito elementos. Para realizar a escolha do primeiro portão, temos oito possibilidades, e para escolher o segundo, temos sete, pois o portão que foi escolhido para entrar no estádio não pode ser usado para sair, teremos, pelo princípio multiplicativo, $8 \times 7 = 56$ maneiras diferentes de entrar e sair do estádio.

Nenhuma dupla encontrou o resultado esperado para essa questão. Dois grupos consideraram a situação de se utilizar um portão de entrada, não podendo se realizar a saída pelo mesmo (Figura 25), concluindo que nessa situação haveria sete maneiras de uma pessoa entrar e sair do estádio. Nesses termos, observamos que não identificaram o total de escolhas a serem feitas e consideraram apenas uma escolha, a do portão de saída.

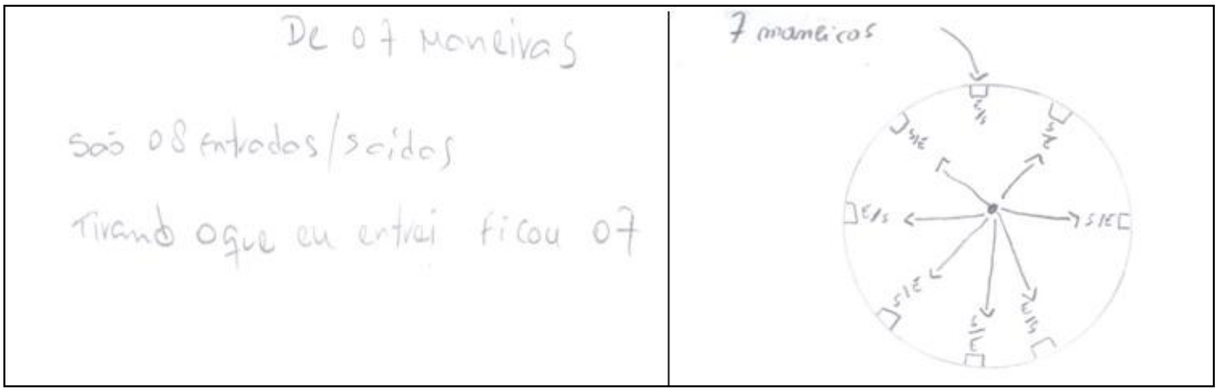


Figura 25 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pelas duplas André e Hugo e, Carlos e Fabiane, respectivamente.

Podemos notar que as duas resoluções apresentadas acima são diferentes apenas quanto à sua representação: enquanto a primeira utilizou a linguagem escrita para explicar seu raciocínio, a segunda fez uso de uma ilustração. Porém o raciocínio empregado é o mesmo. Ambas, mostram que os alunos não consideraram a escolha entre diferentes portões de entrada, considerando apenas uma escolha: a do portão de saída.

Já a dupla Daiana e Gabriela interpretou que os oito portões de entrada/saída poderiam ser subdivididos em quatro portões de entrada e quatro portões de saída, conforme vemos na ilustração da Figura 26.

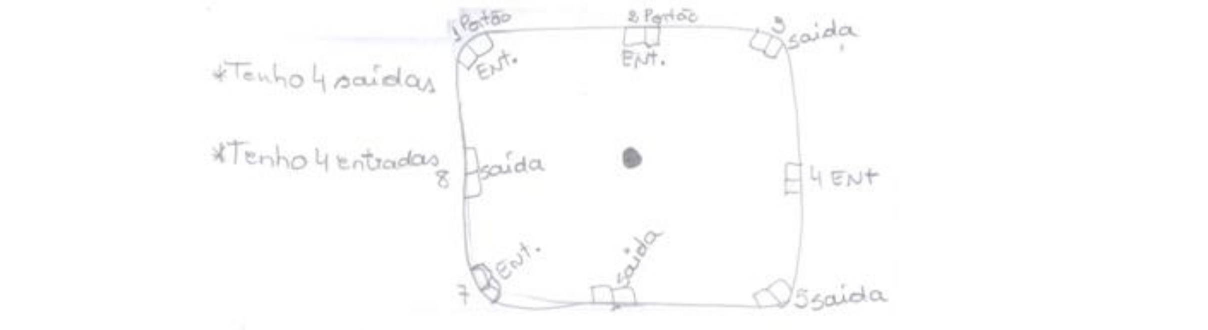


Figura 26 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Daiana e Gabriela.

Notamos que com o emprego desse raciocínio, a dupla separou os portões em dois conjuntos, garantindo que aquele que fosse usado para entrada não seria utilizado para a saída, conforme solicitava o enunciado. Entretanto, com essa divisão restringiram a quantidade de opções de portão para entrar e sair.

A dupla Beatriz e Eva utilizou uma multiplicação para resolver o problema proposto (Figura 27). Contudo, não considerou que o portão que fosse utilizado para entrada não poderia ser utilizado para saída.

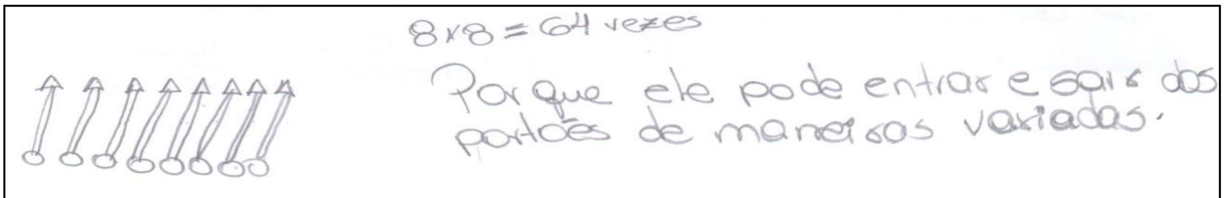


Figura 27 – Resolução da atividade 3 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Beatriz e Eva

Notamos que as alunas identificam quantas são as etapas de escolhas e que para cada etapa há um número fixo de opções, podendo então, fazer uso da multiplicação, isto é, lançam mão de um teorema-em-ação, já utilizado anteriormente. Porém, na aplicação do teorema-em-ação, não consideraram na situação do problemas, que é a condição de não poder haver repetição dos portões.

Após os resultados encontrados por cada dupla serem registrados no quadro, iniciou-se a correção da atividade. Para tanto, utilizou-se a resolução apresentada na figura 25, em que a dupla utilizou o desenho de um círculo para representar o estádio e marcações para indicar os portões, sendo que flechas estavam sugerindo as possibilidades de entrada pelo portão 1 e saídas pelos portões 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. A partir da representação da resolução dessa dupla, destacou-se que o que os alunos fizeram estava correto, entretanto, não consideraram que a mesma situação se repetia quando os outros portões fossem considerados como “portão de entrada”.

Com isso, foi ressaltado que a dupla poderia ter feito uma representação sendo o portão 2, o portão de entrada, outra sendo o portão 3 e assim por diante, até o portão 8 ser considerado como portão de entrada. Os alunos perceberam que oito círculos seriam obtidos, sendo que cada círculo estaria representando a entrada por um determinado portão e saída pelos demais, isto é, em cada círculo estariam representadas sete possibilidades de entrada e saída do estádio. Como ao todo eram oito círculos, teríamos, então, $8 \times 7 \ = \ 56$ maneiras de entrar/sair do estádio.

Como a árvore de possibilidades já havia sido apresentada como recurso de resolução das atividades propostas, ao final da discussão das resoluções apresentadas pelos alunos, o diagrama referente a essa atividade foi construído com o auxílio dos alunos. Primeiramente, os portões foram nomeados como P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 e P_8 e as opções para entrada pelo o portão P_1 e P_2 foram representadas, conforme Figura 28.

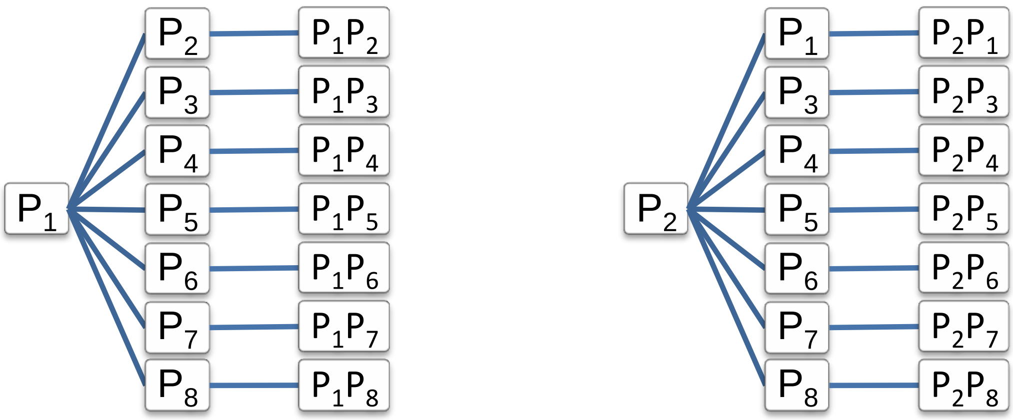


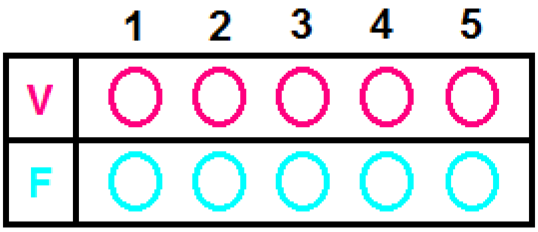
Figura 28 – Árvore de possibilidades da atividade 5 do primeiro conjunto de atividades

Ao construírem esses dois ramos da árvore, os alunos observaram que a construção das opções tendo por entrada o portão 3, 4, 5, 6, 7 e 8 seriam cansativas, pois haveria ao todo oito ramos como os dois representados na Figura 28. Partindo desta constatação, eles foram indagados sobre como poderiam resolver a atividade sem a construção da árvore de possibilidades, e responderam que a melhor solução seria a multiplicação. Essa constatação de que seria uma construção cansativa foi importante pois os alunos começaram a intuir que em algumas situações a utilização da multiplicação é a melhor opção.

Finalizando a discussão do primeiro conjunto de atividades propostas, retornamos à segunda questão. Essa questão foi deixada para o final porque, durante a resolução das atividades, no primeiro encontro, foi aquela em que os alunos mais demonstraram dificuldade em compreender o que era pedido. Segue no Quadro 14 o enunciado da atividade.

Questão 2

Uma prova é composta por 5 questões objetivas, para serem julgadas como V (verdadeiras) ou F (falsas). As respostas devem ser escritas em um gabarito conforme representação abaixo. De quantas maneiras diferentes o gabarito abaixo pode ser preenchido?



Quadro 14 – Atividade 2 do primeiro conjunto de atividades.

Pela situação proposta no problema, a resposta para cada questão poderia ser verdadeira (V) ou falsa (F), independente das demais escolhas. Assim, a resposta para a primeira questão poderia ser V ou F, o mesmo podendo ocorrer com a segunda questão. A partir das escolhas realizadas quatro gabaritos distintos podem ser formados: VV, VF, FV ou FF. O mesmo ocorre para a terceira questão, a resposta pode ser V ou F, ocorrendo um desdobramento de cada um dos gabaritos anteriores em dois novos gabaritos: VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV e FFF. O mesmo ocorrerá quanto respondidas a quarta e a quinta questões, ou seja, a cada nova questão o número de gabaritos da etapa anterior é multiplicado por dois. Logo, para a quarta questão obtemos 16 gabaritos e, na quinta questão, 32 gabaritos. Em outras palavras, pelo princípio multiplicativo, teríamos $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ gabaritos distintos.

Os alunos demonstraram muita dificuldade no entendimento da situação proposta nessa atividade. Tal dificuldade pode ser em parte explicada pelo fato de que pensar em todos os possíveis gabaritos de uma prova de múltipla escolha só faz sentido para quem formula a prova e não para quem vai respondê-la. A questão havia sido pensada no sentido de levar os alunos a imaginarem todos os possíveis resultados de uma prova, até para gerar uma discussão introdutória sobre a probabilidade de se acertar todas as questões, marcando as respostas aleatoriamente.

Durante a resolução da atividade, o enunciado foi discutido junto com os alunos, pois alguns não haviam entendido o que seriam “diferentes gabaritos”. A dupla Daiana e Gabriela, por exemplo, entendeu que diferentes gabaritos eram marcações diferentes para a grade de respostas, utilizando então bolinhas, cruz, xis e outras figuras para caracterizar os diferentes gabaritos. Após a explicação do que seriam “diferentes gabaritos”, a dupla desenhou alguns dos possíveis gabaritos, conforme vemos na Figura 29.

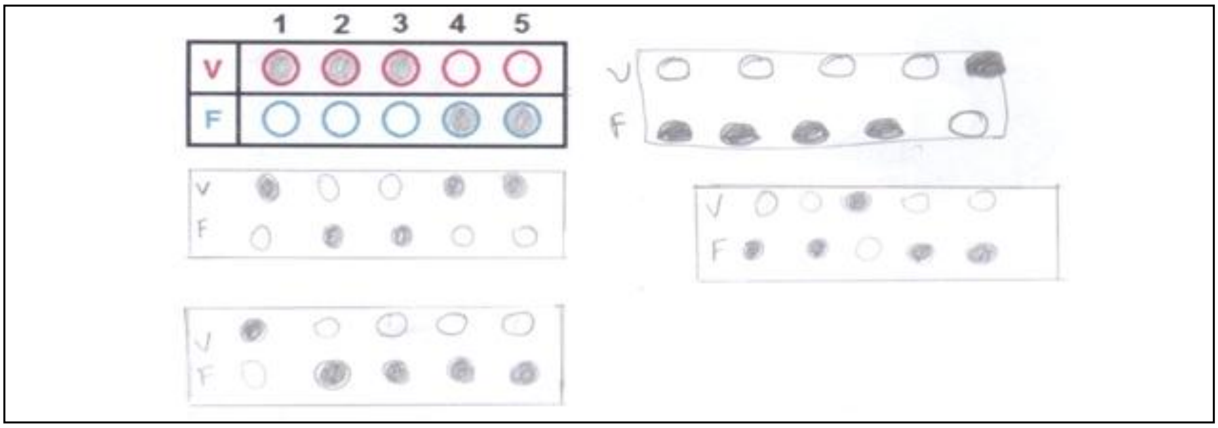


Figura 29 – Resolução da atividade 2 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Daiana e Gabriela

Podemos observar que na resolução apresentada, não foi utilizada nenhuma forma de organização ou sistematização de modo a garantir que todos os possíveis gabaritos pudessem ser listados. A falta de um critério de organização dificultou a listagem de todos os possíveis gabaritos. Percebemos também uma dificuldade das alunas de pensar nos possíveis gabaritos como resultados de escolhas hipotéticas, sendo então necessário visualizá-los por meio de uma representação figural.

A dupla Beatriz e Eva interpretou que as maneiras diferentes de preencher o gabarito seriam resumidas em três opções: todas as respostas verdadeiras, todas as respostas falsas e aquelas em que aparecem misturadas respostas verdadeiras e falsas (Figura 30).

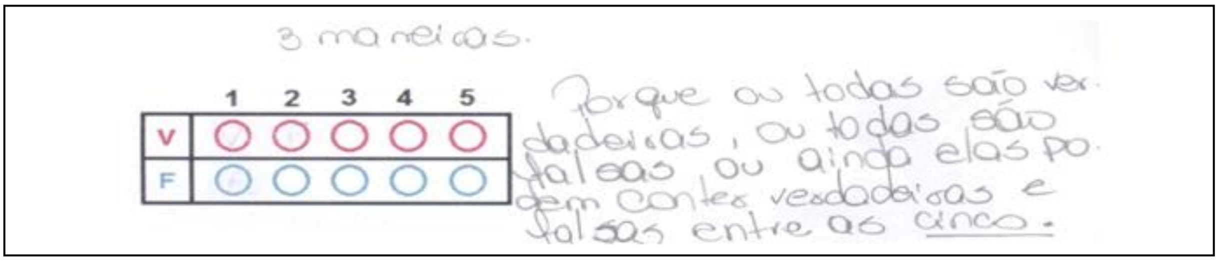


Figura 30 – Resolução da atividade 2 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Beatriz e Eva.

Notamos que, assim como no caso anterior, essa dupla está olhando para os gabaritos como resultados já prontos e não como resultados de cinco escolhas. Durante a discussão da solução do problema, foi esclarecido que os gabaritos em que aparecem respostas verdadeiras e falsas alternadamente não constituem uma única solução, mas sim diversas. Como, por exemplo, se considerarmos a possibilidade de quatro questões falsas e uma verdadeira teremos cinco gabaritos distintos: VFFFF, FVFFF, FFVFF, FFFVF, FFFFV. Acompanhemos na transcrição a discussão realizada.

Eva: Eu achei três respostas da seguinte maneira. Como é V ou F, ali tu pode ter ou todas verdadeiras ou todas falsas ou intercaladas, verdadeiras e falsas entre elas.
Professora: Tá e o que nós vimos. Essa questão de serem intercaladas, na verdade,se pensarmos em número de gabaritos, em quantidade de gabaritos, essas intercaladas não são uma única resposta.
Eva: Hum. São várias.
Professora: Se eu tiver a primeira verdadeira e as quatro falsas ou as quatro primeiras falas e a última verdadeira. Já são dois gabaritos diferentes.

As outras duas duplas realizaram a listagem de alguns possíveis gabaritos, mas não chegaram ao total esperado. A dupla Carlos e Fabiane, inicialmente, listou as opções em que todas as alternativas são marcadas como verdadeiras e em que todas são marcadas como falsas, conforme mostra a Figura 31. Após, listaram os gabaritos com respostas verdadeiras e falsas misturadas (terceira coluna em diante), porém, sem utilizar um critério sistemático, o que dificultou a listagem de todos os possíveis gabaritos.

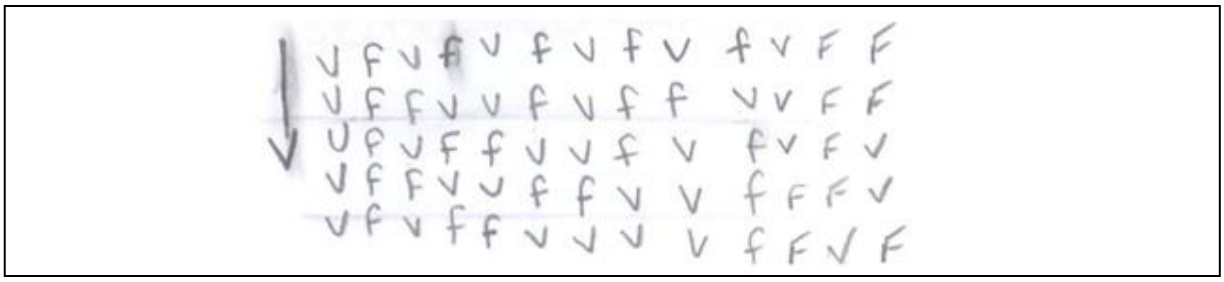


Figura 31 – Resolução da atividade 2 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Carlos e Fabiane.

A dupla André e Hugo também realizou a listagem de alguns possíveis gabaritos (Figura 32). Porém, diferente da situação anterior, podemos notar um critério de organização que nos parece ser “o número de respostas verdadeiras”. Primeiro observa-se quantas respostas verdadeiras haverá no possível gabarito e a partir disso essa(s) resposta(s) verdadeira(s) será(ão) permutada(s) com as demais.

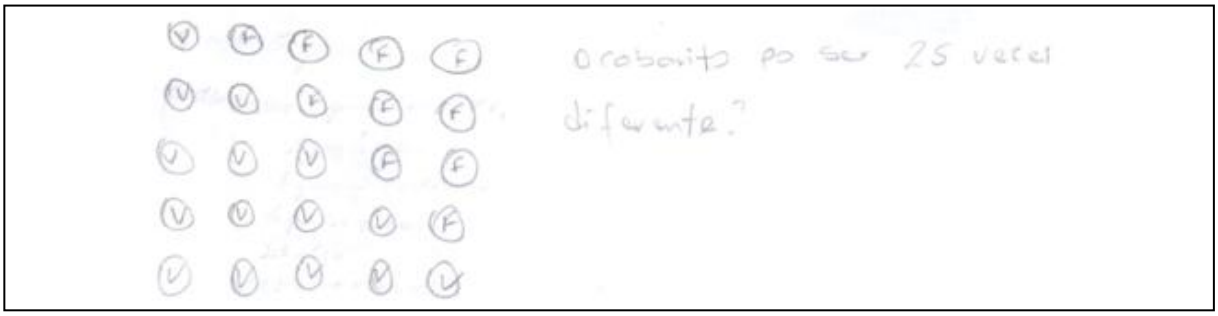


Figura 32 – Resolução da atividade 2 do primeiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla André e Hugo.

Vemos, pela resolução apresentada, que a dupla listou cinco gabaritos, mas deram como resposta final 25. Quando indagados sobre como chegaram ao resultado 25, a dupla justificou que em cada linha poderia haver troca de posição entre as respostas verdadeiras e falsas consideradas. Por exemplo, a primeira linha é formada por uma resposta verdadeira e quatro respostas falsas, o gabarito apresentado foi VFFFF, porém, com essa mesma quantidade de respostas verdadeiras e falsas podemos ter os gabaritos FVFFF, FFVFF, FFFVF e FFFFV, totalizando cinco possibilidades para esse caso. A dupla argumentou que o mesmo ocorreria nas demais linhas, e que como eram cinco linhas ao total, haveria $5 \times 5 = 25$ possibilidades diferentes de preencher o gabarito. Notamos que aqui há uma tentativa equivocada de generalizar o princípio multiplicativo.

O que a dupla não observou foi que para os demais casos não haverá sempre cinco possibilidades. No caso em que todas as alternativas são verdadeiras (última linha), mudanças de posição não alteram o gabarito. De fato, esse raciocínio de cinco opções por linha só é válido quando temos apenas um elemento trocando de posição, que é o que vai ocorrer na primeira e quarta linha. Porém, se analisarmos, por exemplo, a segunda linha, em que ocorrem duas respostas verdadeiras e três falsas teremos mais do que cinco opções; modificando as posições das letras, na verdade obtemos dez possibilidades: VVFFF, VFVFF, VFFVF, VFFFV, FVVFF, FFVVF, FFFVV, FVFVF, FVFFV e FFVFV. O mesmo ocorrerá na terceira linha, em que aparecem três respostas verdadeiras e duas falsas: VVVFF, VFVVF, VFFV, VFFVV, FVVVF, FFVVV, FVFVV, VVFVF, VVFFV e FVVFV. Assim, teremos cinco possibilidades para a primeira e quarta linhas (sendo uma verdadeira e quatro falsas, e uma falsa e quatro verdadeiras, respectivamente), dez possibilidades na segunda e terceira linhas (onde aparecem, respectivamente, duas verdadeiras e três falsas e, três verdadeiras e duas falsas) e duas possibilidades na última linha, visto que todas podem ser verdadeiras ou todas falsa, totalizando $5 + 5 + 10 + 10 + 2 = 32$ gabaritos diferentes.

Como vimos, nenhuma das duplas conseguiu encontrar o resultado esperado para esta questão, que eram 32 maneiras diferentes de preenchimento do gabarito. Nenhuma dupla considerou as cinco escolhas sucessivas e independentes. Notamos que, com exceção de um grupo, os demais tentaram descrever os possíveis gabaritos que poderiam ser formados. Percebemos que apenas um grupo utilizou algum critério de organização, sendo que esse encontrou o resultado mais próximo do esperado.

Por todas essas razões, essa questão foi resolvida a partir da discussão e com a participação de todos os alunos. Após todas as resoluções serem apresentadas no quadro-branco, foi escolhida, como ponto de partida, a resolução apresentada pela dupla Carlos e Fabiane, por apresentar gabaritos de forma não organizada. Essa escolha foi feita para que os alunos percebessem que, quando tentamos listar todos os agrupamentos, precisamos ter um critério de organização, senão acabamos nos perdendo. Essa percepção é evidenciada no diálogo a seguir.

Professora: O que vocês acham que faltou nessa aqui do Paulo?
Eva: Organização.
Beatriz: Ela tá bem confusa.
Professora: ela tá aleatória.
Beatriz: é mais fácil de se perder
Eva: É como aquela que nós fizemos e nos perdemos.
Professora: Ela tá bem aleatória. Já a do André, está mais organizada?
Eva: Está bem mais organizada. Mas falta um.
Professora: Porque a do André está mais organizada? O ele está fazendo de uma linha para outra?
Beatriz: Tá em ordem, né.
Eva: Ele tá diminuindo uma e aumentando a outra. Ele tá aumentando as falsas e diminuindo as verdadeiras. Ou vice-versa.

Com os alunos percebendo que a organização é um fator determinante na resolução deste tipo de exercício, foi destacado que a árvore de possibilidades é um mecanismo útil que permite a obtenção de todas as possibilidades, sem repetição. Como se tratava da montagem de uma árvore com um número alto de ramificações, foi realizada, com a participação dos alunos, a construção de apenas umo ramo, em que a primeira e a segunda resposta eram marcadas como verdadeiras e as demais podiam ser verdadeiras ou falsas. Obtemos os oito primeiros gabaritos representados na figura 33: VVVVV, VVVVF, VVVFV, VVVFF, VVFVV, VVFVF, VVFFV e VVFFF. Após, foram construídos os gabaritos em que a primeira alternativa é marcada como verdadeira e a segunda falsa, sendo as demais verdadeiras e falsas, originando os demais gabaritos representados na figura 33: VFVVV, VFVVF, VFVFV, VFVFF, VFFVV, VFFVF, VFFFV e VFFFF. Assim, totalizando 16 possíveis gabaritos, sendo a primeira alternativa marcada como verdadeira.

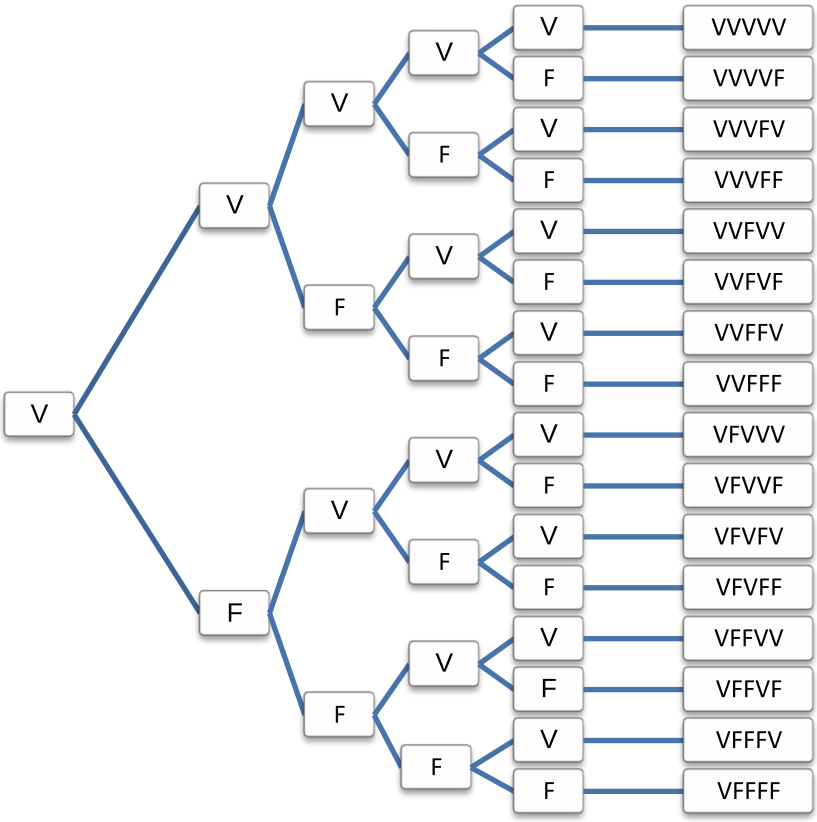


Figura 33: Árvore de possibilidades da atividade 2 do primeiro conjunto de atividades.

Antes de realizarmos a segunda parte da construção descrita acima, um aluno já havia percebido que iríamos determinar mais oito gabaritos, totalizando dezesseis. Isso demonstra que é possível, para alguns alunos, enxergar o padrão presente na montagem da árvore de possibilidades, imaginando agrupamentos que ainda não foram descritos e utilizando a multiplicação para determinar o valor parcial ou total de possibilidades. Esse mesmo aluno logo concluiu que teríamos ao todo 32 possibilidades, pois seriam 16 com a primeira questão marcada como verdadeira, e 16 com a primeira questão marcada como falsa.

Porém, alguns alunos não conseguiram visualizar o total esperado realizando a montagem de apenas uma parte da árvore, precisando visualizar todos os elementos. Foi o caso da aluna Gabriela, que depois de termos construído a primeira parte da árvore de possibilidades acima, realizou a construção do restante da árvore em seu caderno, para visualizar todos os possíveis gabaritos. Para auxiliar essa aluna e outros que demonstraram dificuldade em entender o mecanismo de construção da árvore de possibilidades, foram construídas algumas ramificações, em que a primeira opção era marcada como falsa. Com essa construção esperávamos que os alunos percebessem o que mudava e o que permanecia igual aos gabaritos antes obtidos. Na transcrição a seguir, observamos que os alunos compreenderam essas diferenças.

Professora: Qual foi a única coisa que mudou?
André: O começo. Começou com falso e lá em cima começou com verdadeiro.
Professora: Vai ser a primeira opção, né?
André: Isso.
Professora: Enquanto nessas primeiras 16 todas as primeiras são verdadeiras. Porque todas começam com V e mudavam da segunda em diante. O que vai acontecer nessas aqui, todas vão começar com falso, mas vão mudar daqui para frente.

A turma então concluiu que teremos dezesseis possibilidades de gabaritos sendo a primeira resposta marcada verdadeira, e dezesseis sendo a primeira resposta marcada falsa, totalizando 32 gabaritos. Para finalizar a atividade, foi destacado que em algumas situações a construção da árvore de possibilidades é um processo árduo e cansativo, sendo então mais conveniente resolver a situação proposta por meio de uma multiplicação.

Para que os alunos visualizassem a aplicação do princípio multiplicativo na situação proposta, foi solicitado que observassem o que estava ocorrendo a cada nova questão que era considerada na construção do gabarito. No trecho a seguir podemos acompanhar o diálogo que se seguiu.

Professora: O que tá acontecendo?
Beatriz: Tá multiplicando por dois.
Professora: Eu estou multiplicando por dois. De onde vocês acham que vem esse dois?
Beatriz: Das duas possibilidades que tu nos deu.
Professora: Porque eu tenho verdadeiro ou falso.

Aproveitando a multiplicação por dois, intuída pela aluna, foi destacado que isso decorria do fato de que a cada nova etapa uma nova questão era considerada, sendo que a resposta poderia ser verdadeira ou falsa, o que ocasionava o desdobramento de cada gabarito parcial já obtido em outros dois. Em outras palavras, na primeira etapa, havia duas possibilidades (V ou F). Na segunda etapa, cada uma dessas duas possibilidades seria acrescida da segunda opção e desdobrada em outras duas (VV, VF, FV ou FF), totalizando 4 (2×2) possibilidades.

Pelo mesmo raciocínio, na terceira etapa a ser acrescida uma nova questão, cada um dos quatro possíveis gabaritos já encontrados seriam desdobrados em outros dois (VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV ou FFF), perfazendo um total de 8 possibilidades $(8 = 4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2)$. Já na quarta etapa, cada uma das oito possibilidades teria duas opções, resultando em 16, sendo que na última etapa, para cada uma dessas possibilidades haveria duas opções de respostas para a última questão, totalizando 32 possibilidades (16×2). Assim, contabilizando todas as etapas consideradas, teremos 32 possibilidades.

Ao finalizarmos a discussão das primeiras atividades propostas, foi possível observar que os alunos tiveram maior facilidade com as atividades referentes a produto cartesiano de dois conjuntos (atividades 1 e 3). Foi possível observar que mesmo não tendo sido apresentados a árvore de possibilidades e o princípio multiplicativo alguns alunos os utilizaram, mesmo que de forma empírica.

A atividade 1 foi resolvida sem maiores problemas por três duplas, como já comentamos, sendo que apenas uma dupla apresentou uma soma como resolução. Posteriormente, veremos que a mesma dupla apresentou dificuldades em outras atividades propostas. Com isso, percebemos que mesmo se tratando de alunos adultos, e que segundo a teoria piagetiana já disporiam de estruturas cognitivas para operar no mundo das possibilidades e não apenas sobre o real (FLAVELL, 1996), esses alunos não conseguiram mobilizar esquemas para operar com as possibilidades envolvidas nas situações propostas.

Vergnaud (1986, p. 76) destaca que “as concepções dos alunos são modeladas pelas situações com que eles se deparam”, ou seja, é só ao se deparar com determinadas situações que o sujeito irá desenvolver certas estruturas do pensamento.

Na mesma perspectiva, Gómez-Granell (1997) aponta que fora da escola, em determinados contextos sociais e práticas culturais podem ser desenvolvidos conhecimentos matemáticos. Contudo, esses são, em sua maioria, de natureza aditiva. Os conhecimentos multiplicativos necessitam, muitas vezes, dos contextos propostos pelo ambiente escolar para que sejam desenvolvidos.

A questão de número 4 não podia ser resolvida como um problema de produto cartesiano, permutação, arranjo ou combinação. Ela foi escolhida, pois permitiria observar os critérios de organização e sistematização que seriam utilizados. Pensamos que todos os alunos resolveriam essa atividade sem maiores dificuldades, até mesmo porque foram disponibilizadas cédulas sem valor monetário que permitiriam aos alunos realizarem as possíveis combinações para formar cem reais, sem precisar ficar apenas no campo das ideias. Porém, percebemos que mesmo assim, dois grupos não encontraram todas as possibilidades. O que nos leva a pensar que nem sempre o material concreto é garantia de que o aluno consiga esgotar todas as hipóteses possíveis. Na realidade o material auxilia na representação das hipóteses, mas ainda continua sendo necessário uma sistemática para se obter todas as variações possíveis.

Em relação à questão número 5, observamos que a maior dificuldade dos alunos foi considerar que o que poderia ocorrer para um determinado portão considerado como portão de entrada, também poderia ocorrer com os demais. Eles testaram a situação proposta no problema para um determinado portão, mas não para os demais. Demonstrando, novamente, a dificuldade dos alunos de esgotarem todas as hipóteses possíveis.

Já a atividade 2, foi aquela em que os alunos mais demonstraram dificuldade na resolução. Pensamos que isso se deve a vários fatores: 1 - o entendimento do que seriam formas diferentes de preencher os gabaritos, que inicialmente alguns alunos interpretaram como diferentes tipos de marcações; 2 – o número elevado de etapas que compunham a resolução da atividade; 3 – a igualdade das variáveis envolvidas e, 4 – a dificuldade em identificar quais seriam as escolhas – uma para cada questão. De modo geral, todas as duplas olharam para os gabaritos completos, sem uma discriminação sistemática por questão. A ideia de independência de eventos não foi aplicada ou foi aplicada de modo parcial.

Vergnaud (1986), ao abordar as estruturas aditivas, chama a atenção para os diferentes tipos de problemas que podem ser construídos envolvendo a subtração, sendo que cada tipo de problema pode ser classificado em um determinado grau de complexidade, sendo então prioridade "reconhecer a variedade das classes de problemas possíveis, analisar com cuidado a sua estrutura e as operações de pensamento necessárias para as tratar" (VERGNAUD, 1986, p. 80). Essa mesma atenção precisamos ter em relação aos diferentes tipos de problemas para trabalhar as estruturas multiplicativas.

6.2 Análise do segundo conjunto de atividades

A segunda sequência de atividades, proposta no terceiro encontro, teve por objetivo dar continuidade ao nosso trabalho, buscando observar se os alunos compreenderam que em determinadas situações, para cada uma das possibilidades envolvidas na primeira escolha, haveria um número fixo de possibilidades envolvidas na segunda escolha e assim por diante, permitindo que a multiplicação fosse utilizada.

Como o segundo conjunto de atividades abordou problemas com mais de duas etapas de escolhas e/ou com quantidades maiores de escolhas em cada etapa, os alunos tiveram muitas dificuldades na resolução dessas atividades, não conseguindo concluí-las no terceiro encontro.

Para auxiliá-los no desenvolvimento de novos esquemas combinatórios, reestruturamos nossa sequência didática, adaptando ao desenvolvimento a utilização de outro recurso didático – a utilização de um jogo pedagógico. O recurso escolhido foi o jogo conhecido por “Jogo Senha”, sua aplicação será esclarecida no próximo tópico.

Com a aplicação e análise do jogo senha, nosso cronograma inicial modificou-se, sendo então destinado o quarto encontro para aplicação do jogo, o quinto encontro para discussão do jogo e retomada da segunda sequência de atividades, o sexto encontro para discussão da segunda sequência de atividades e aplicação da terceira sequência de atividades.

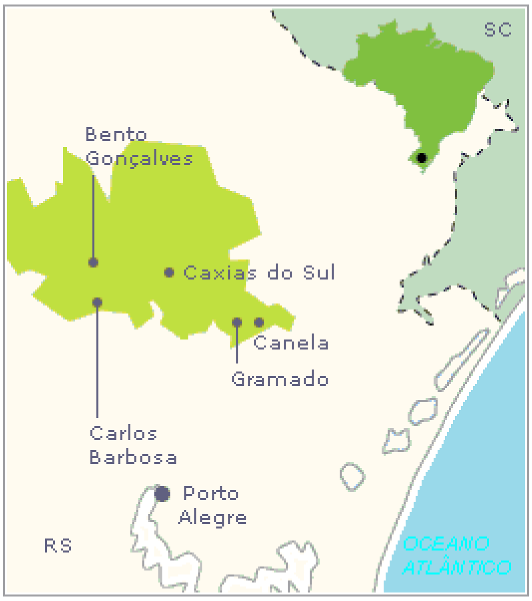
Nesta seção apresentaremos os problemas da segunda sequência de atividades, seguidos das resoluções apresentadas pelos alunos e das discussões realizadas. Na seção seguinte voltaremos nossa atenção à aplicação do jogo senha.

Após os alunos retomarem as resoluções dos problemas da segunda sequência de atividades, esses foram analisados e organizados para realização das discussões. Como mencionamos, para a resolução e discussão da segunda sequência de atividades destinamos o terceiro encontro, em que os alunos pouco avançaram, e metade do quinto e sexto encontros, nos quais destinou-se tempo para resolução e discussão das resoluções, respectivamente. Apresentaremos então o que foi tratado nesses três momentos.

O primeiro problema propunha a construção de um roteiro de viagem, passando por cinco cidades da Serra Gaúcha (Quadro 15). Os alunos deveriam considerar todos os possíveis roteiros, mesmo aqueles que não parecessem vantajosos. No quadro a seguir encontra-se o enunciado da atividade.

Questão 1

Um grupo de pessoas está organizando uma excursão pela Serra Gaúcha. Eles irão visitar as cidades de Caxias do Sul, Canela, Gramado, Bento Gonçalves e Carlos Barbosa. O grupo está montando seu roteiro de viagem decidindo a ordem em que irão visitar as cidades. Quantas são as possibilidades de roteiro que o grupo pode formar?



Quadro 15 – Atividade 1 do segundo conjunto de atividades.

A situação proposta no problema desdobra-se em cinco etapas. Cada etapa consiste na escolha de uma dentre as cidades possíveis, sem repetir uma cidade escolhida anteriormente, até que todas as cidades sejam escolhidas, formando-se, então, um roteiro. Como a cidade que for escolhida em uma determinada etapa não pode ser escolhida novamente, temos a seguinte situação: na primeira etapa podemos escolher uma, dentre cinco cidades; na segunda etapa podemos escolher uma dentre as quatro cidades restantes; na terceira, uma dentre três; na quarta etapa uma dentre duas cidades; restando uma única cidade para ser escolhida na quinta etapa. Pelo princípio fundamental da contagem teremos ao total $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \ = \ 120$ roteiros diferentes que podem ser formados.

Os alunos poderiam resolver essa atividade aplicando o princípio multiplicativo e/ou através da construção de alguns ramos da árvore de possibilidades. A construção de toda a árvore de possibilidades não seria recomendada, pois como é alto o número de possibilidades, o trabalho se tornaria penoso.

A dupla Beatriz e Eva utilizou como forma de resolução a listagem de alguns roteiros, a partir de cada uma das cinco cidades. Porém, como vemos na figura 34, não foram considerados roteiros com a mesma cidade de origem, mas com rotas diferenciadas. Por exemplo, a dupla sugeriu o roteiro Caxias do Sul – Canela – Gramado – Carlos Barbosa – Bento Gonçalves, mas poderia ter sugerido outro roteiro partindo Caxias do Sul e chegando em Bento Gonçalves, como por exemplo, Caxias do Sul – Carlos Barbosa - Canela – Gramado – Bento Gonçalves. Vemos na Figura 34 que isso não foi feito.

Figura 34 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla Beatriz e Eva.

Vemos que a descrição de alguns roteiros não está relacionada com a multiplicação apresentada pelas alunas ao final: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \ = \ 120$. Ao listarem alguns roteiros, realizam esse processo de forma aleatória, o que não necessariamente contribui para chegarem à conclusão de que poderiam utilizar uma multiplicação, que nesse caso, está correta. Entretanto, ao serem indagadas sobre sua forma de resolução, não souberam explicar como chegaram ao resultado encontrado, nem como a descrição de alguns roteiros auxiliou na conclusão de poderem utilizar uma multiplicação. Isso sugere que utilizaram a multiplicação como uma "fórmula" que vale sempre, repetindo um procedimento utilizado nas situações anteriores.

Os alunos André e Hugo ao realizarem a construção de uma ramificação da árvore de possibilidades, demonstram que compreenderam a forma de sistematização representada de todos os possíveis roteiros e a multiplicação que pode ser utilizada na resolução da atividade (Figura 35).

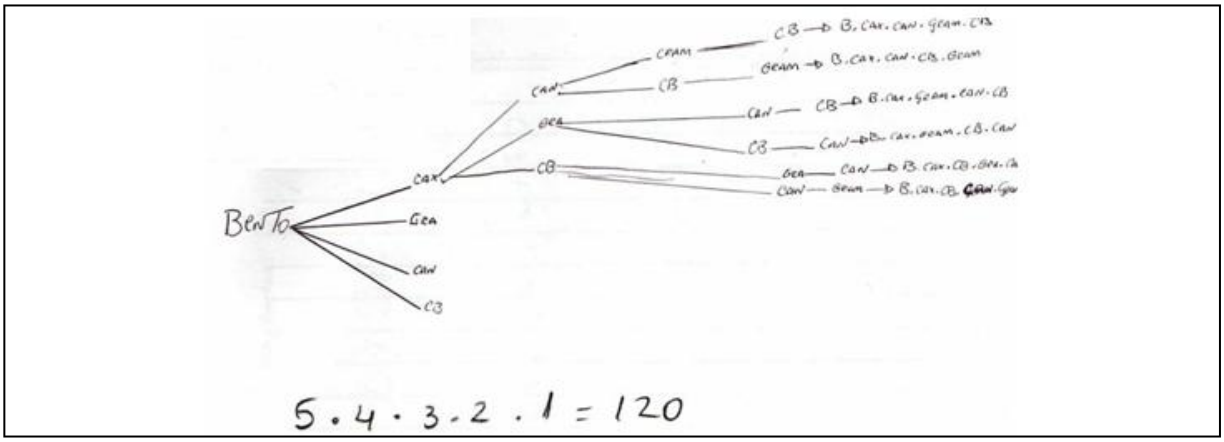


Figura 35 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla André e Hugo.

Observamos que nesta resolução os alunos estão associando, a cada cidade considerada, os próximos destinos possíveis. Percebemos que os alunos apresentam desenvolvimento de esquemas combinatórios, pois identificam todas as etapas de escolhas envolvidas e o número de opções envolvidas em cada etapa, verificando que para cada opção feita em uma etapa há um número fixo de opções na etapa seguinte, podendo então aplicar o princípio multiplicativo (teorema-em-ação) de forma correta.

A terceira dupla, Carlos e Fabiane, também encontrou o resultado esperado. Inicialmente, assim como apresentado na resolução anterior, construíram uma ramificação da árvore de possibilidades, para uma determinada cidade de partida, concluindo que nesse caso haveria 24 possibilidades de diferentes roteiros, conforme observamos na Figura 36.

Pelo desenvolvimento apresentado, os alunos demonstraram mobilizar diferentes esquemas combinatórios, pois identificam claramente quantas escolhas existem para cada cidade de partida a ser considerada (24 possibilidades), sendo que obtêm esse resultado por reconhecer quantas são as escolhas envolvidas em cada etapa. Além disso, utilizam uma multiplicação (5×24) ao observar que para cada cidade de partida considerada (5) há um número fixo de possíveis roteiros (24).

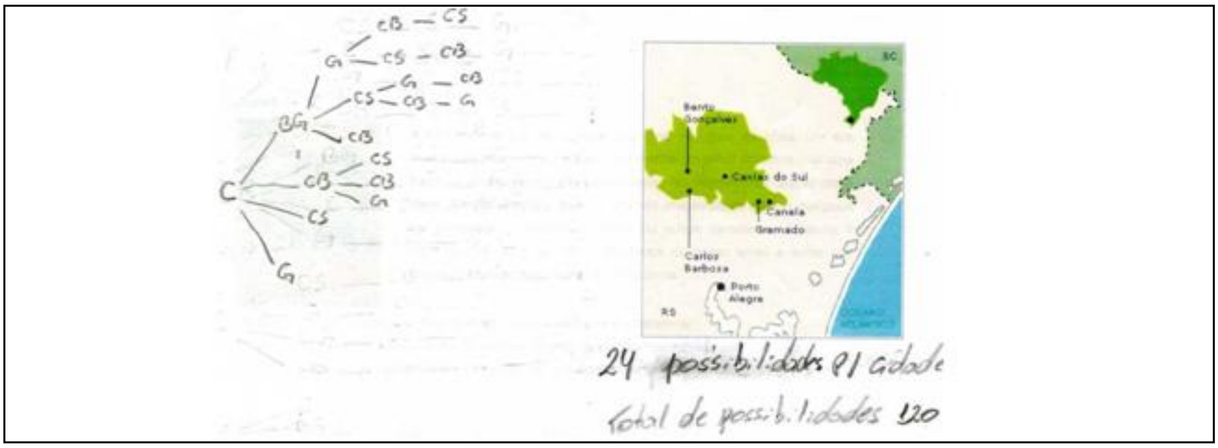


Figura 36 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla Carlos e Fabiane.

A dupla Daiana e Gabriela não encontrou o resultado esperado. As alunas tentaram utilizar a árvore de possibilidades para resolver a atividade, porém construíram apenas dois estágios da árvore, considerando apenas duas cidades, conforme vemos na Figura 37.

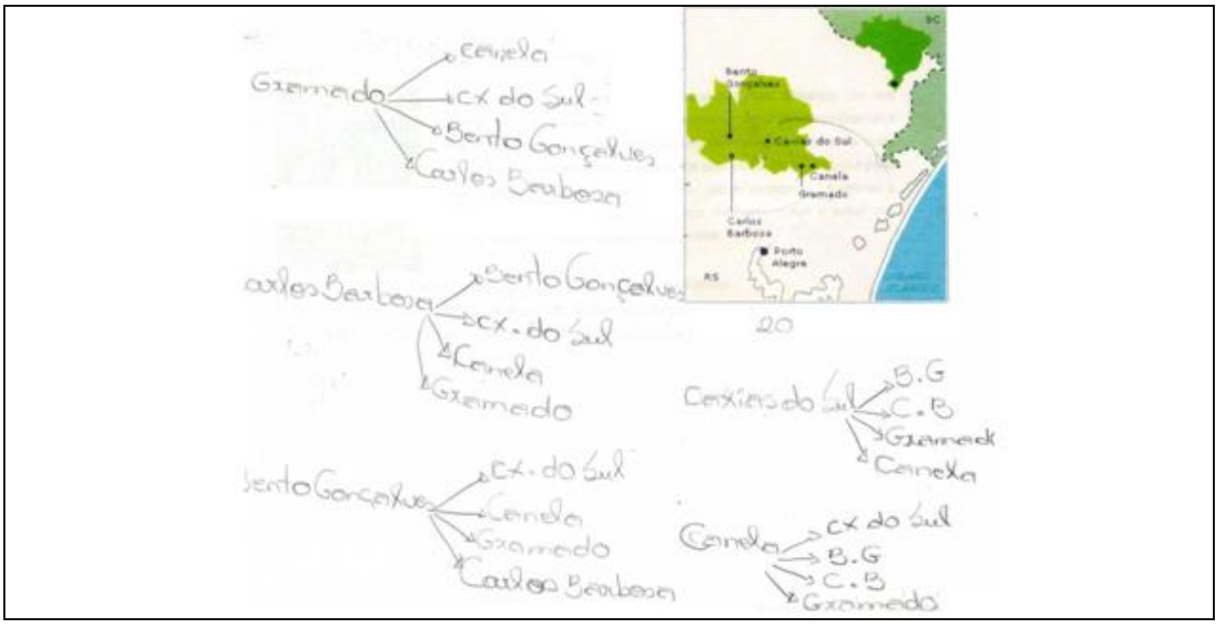


Figura 37 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla Daiana e Gabriela.

É possível observar que as alunas tentaram formar roteiros para as cinco possíveis cidades de partida, mas só conseguiram seguir até a escolha da segunda cidade. Isso indica a dificuldade das alunas de planejarem o próximo passo e de imaginar todas as etapas, combinando-as. Ou seja, as alunas apresentaram esquemas combinatórios frágeis, pois apesar de compreenderem a situação para a primeira e segunda etapa de escolhas, não conseguiram dar prosseguimento para as demais etapas.

Dando continuidade à discussão das questões, foi realizada a leitura da segunda questão, que trazia um dilema do famoso personagem das histórias em quadrinhos - Calvin, conforme vemos no Quadro 16.

Questão 2

De quantos modos Calvin pode escolher os dois dias do ano, um em novembro e um em março? (Considerando todos os dias do mês de março e de novembro.)

Quadro 16 – Atividade 2 do segundo conjunto de atividades.

A situação proposta nessa atividade consiste na escolha de dois dias, sendo um do mês de março e outro de novembro. O primeiro dia pode ser escolhido dentre os 31 dias do mês de março e o segundo dia dentre os 30 dias do mês de novembro. Sendo assim, temos 31 possibilidades de escolha para o primeiro. Como a escolha só está completa quando os dois dias forem escolhidos, as 30 possibilidades de novembro podem se combinar com cada um dos 31 dias de março. Em outras palavras, cada um dos 31 dias do mês de março pode formar par com um dos 30 dias do mês de novembro. Assim, pelo principio multiplicativo teremos $31 \times 30 = 930$ maneiras diferentes de escolher os dois dias, sendo um do mês de março e um do mês de novembro.

Duas duplas encontraram o valor esperado. Os alunos André e Hugo construíram uma ramificação da árvore de possibilidades por meio da qual visualizaram que cada dia do mês de março poderia ser combinado com cada um dos 30 dias do mês de novembro. Sendo que esse fato pode ser representado por uma multiplicação, conforme vemos na Figura 38.

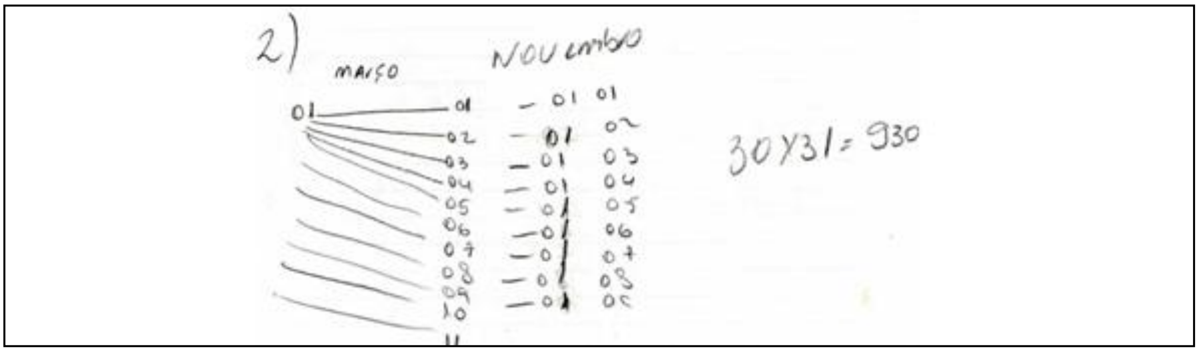


Figura 38 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla André e Hugo.

Novamente, essa dupla demonstra construção de esquemas combinatórios, pois identifica claramente o número de etapas envolvidas, bem como o número de opções envolvidas em cada etapa, analisando que por esse número ser fixo, podem utilizar uma multiplicação (teorema-em-ação).

Todavia, a outra resolução correta, apresentada pela dupla Carlos e Fabiane, consistiu apenas da utilização de uma multiplicação de maneira direta (Figura 39).

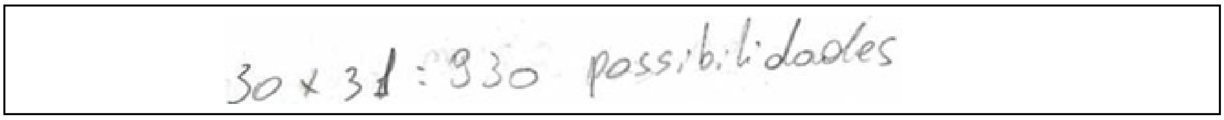


Figura 39 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla Carlos e Fabiane.

Neste caso, não fica claro se os alunos realmente compreenderam a multiplicação que utilizaram. Porém, podemos intuir que sim, pois esses alunos nas resoluções anteriores demonstram estar construindo diferentes esquemas combinatórios, compreendendo a multiplicação que pode ser utilizada na resolução de problemas combinatórios.

Já a dupla Beatriz e Eva resolveu o problema proposto através de uma soma do total de dias de março com o total de dias de novembro, segundo observamos na Figura 40.

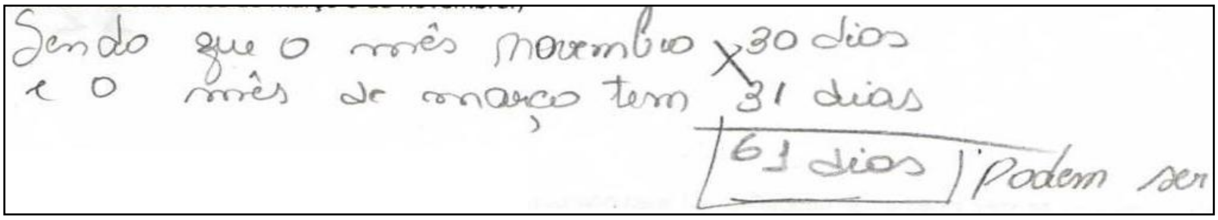


Figura 40 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla Beatriz e Eva.

As alunas resolveram a atividade por meio de uma soma considerando que os dias a serem escolhidos poderiam ser quaisquer dois dias, inclusive dois dias do mesmo mês. Ou seja, trataram a escolha dos dois dias como uma só escolha, quando havia duas (uma escolha no mês de março e uma no mês de novembro), Com isso, as alunas estão pensando na união dos conjuntos de opções envolvidas, apresentando uma soma (teorema-em-ação) como solução para o problema. Nesse caso, estão utilizando um teorema-em-ação, pois a soma não poderia ser utilizada para solucionar esse problema.

Durante a discussão dessa atividade, foi esclarecido que a escolha dos dias só seria realizada quando fosse escolhido, necessariamente, um dia do mês de março e um dia do mês de novembro (duas etapas), ou seja, deveria ser formado um par de dias de meses diferentes.

A multiplicação apresentada pelos alunos que encontraram o resultado esperado não estava muito clara para alguns colegas. A aluna Eva alegou que o dia 31 de março não poderia fazer par com nenhum dia de novembro, uma vez que novembro não tem dia 31. Podemos observar no diálogo a seguir que, ao imaginar os pares que poderiam ser formados os alunos tiveram posicionamentos distintos.

Professora: Em março eu posso escolher o dia um, o dia dois até chegar no dia 31. Certo? Só que a minha escolha só está completa quando eu juntar esse dia que eu escolher em março com o dia de novembro. Então o que vai acontecer lá em novembro?

Eva: Professora, espera aí! Só vai ter 30. Porque o dia 31 não vai ter.

Professora: Porque não?

Eva: Com que dia tu vai juntar o dia 31?

Professora: Então vocês estão dizendo que eu só posso juntar o dia um com o dia um, o dia dois com o dia dois?
Fabiane: Não, o dia um com o dia dois, o dia dois com o dia três...

Vemos que as duas alunas estão pensando em formar pares fixos. Enquanto a aluna Eva pensa nos pares com os dias iguais (1-1, 2-2, 3-3, etc.), a aluna Fabiane tenta resolver o "problema" do dia 31 formando os pares com dias de números consecutivos (1-2, 2-3, 3-4, etc.), que permanecem fixos. Assim, ao considerarem uma única escolha; o outro dia fica determinado pela escolha do primeiro, nenhuma delas, portanto, está pensando em uma multiplicação.

O diálogo seguiu-se com a fala do aluno Ivo, que não havia participado das aulas iniciais de aplicação da sequência por estar afastado da escola em virtude de motivos de saúde. Mesmo sem ter resolvido os exercícios previamente, participou ativamente das discussões. Na sua fala, podemos constatar que ele sim está pensando em uma multiplicação, demonstrando mobilizar de forma consistente diferentes esquemas combinatórios.

Ivo: Não, mas o dia um vai ter 30 possibilidades.
Fabiane: Porquê?
Ivo: Porque em março o primeiro dia eu posso combinar com os trinta dias de novembro.
Beatriz: Pois é. Menos um. Esse um é o que?
Ivo: Não, mas vai o 31 também. O 31 pode combinar com os trinta dias de novembro: dia primeiro, dia dois, dia três, dia quatro...

Com a realização da discussão, ficou mais claro que o dia 31 também poderia formar pares com os trinta dias do mês de novembro, o que não ocorreria era a opção de escolha 31-31, visto que o mês de novembro não tem o dia 31. Porém, o dia 31 de março, assim como os demais dias de março, poderia formar par com cada um dos 30 dias do mês de novembro para formar pares.

A última atividade do segundo conjunto de atividades abordou uma questão clássica de análise combinatória - formação de senhas -, conforme enunciado descrito no Quadro 17.

Questão 3

A comunicação por meio virtual está cada vez mais difundida. Um dos meios mais utilizados é o *email*. Para termos um *email* devemos criar uma conta de acesso em um site especializado. No momento da criação desta conta além do endereço de *email*, criamos uma senha de acesso, que pode ser composta de algarismos, letras ou outros caracteres. A senha é imprescindível para garantir a segurança de nosso email e evitar que outras pessoas tenham acesso a nossa conta.

Considerando que ao criar um email, seja exigido uma senha de 6 algarismos:

a) Quantas são as possibilidades de senhas, se os 6 algarismos forem quaisquer?

b) Quantas são as possibilidades de senhas, se os 6 algarismos forem distintos?

Quadro 17 – Atividade 3 do segundo conjunto de atividades.

Essa questão foi escolhida porque cada vez mais, na vida cotidiana, é necessário termos senhas ou códigos, seja para garantir segurança ou para possibilitar identificação em diversas situações. Trata-se de uma questão em que a partir de um conjunto com m elementos, serão formados subconjuntos com n elementos, sendo $n < m$, ou seja, apenas alguns elementos do conjunto serão utilizados.

Considerando a situação proposta na alternativa (a), em que queremos formar uma senha de seis algarismos quaisquer, teremos 10 maneiras distintas de escolher o primeiro algarismo. Para cada algarismo escolhido na primeira etapa, teremos 10 possibilidades de escolha do segundo algarismo, visto que, os 10 algarismos sendo quaisquer, pode haver repetições. Para cada par ordenado de algarismos já escolhidos, teremos novamente 10 opções de escolha do terceiro algarismo que constituirá a senha e assim sucessivamente, até que o sexto algarismo seja escolhido. Pelo princípio multiplicativo, teremos ao todo $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000.000$ senhas distintas.

Já a alternativa (b) prevê a formação de senhas com seis algarismos, porém, agora sendo esses todos distintos entre si. Isto quer dizer que o algarismo que for escolhido, em alguma etapa, para compor a senha, não poderá ser escolhido novamente. Sendo assim, para escolher o primeiro algarismo da senha haverá dez possibilidades distintas. Lembrando que o algarismo que for escolhido não pode ser utilizado novamente, quando for realizada a escolha do segundo algarismo, haverá apenas 9 possibilidades. Para escolha do terceiro, oito algarismos; para escolher o quarto, sete; para escolher o quinto, seis e finalmente, para escolher o sexto, cinco opções. Vemos nessa situação que, a cada novo algarismo que é escolhido, diminuem as opções de escolha da próxima etapa. Pelo princípio multiplicativo, teremos $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$ senhas distintas.

Apenas três duplas resolveram esta atividade, sendo que todas utilizaram uma multiplicação como método de resolução, mas apenas uma encontrou o resultado esperado.

Os alunos André e Hugo tentaram utilizar o princípio multiplicativo na resolução da atividade, conforme vemos na Figura 41.

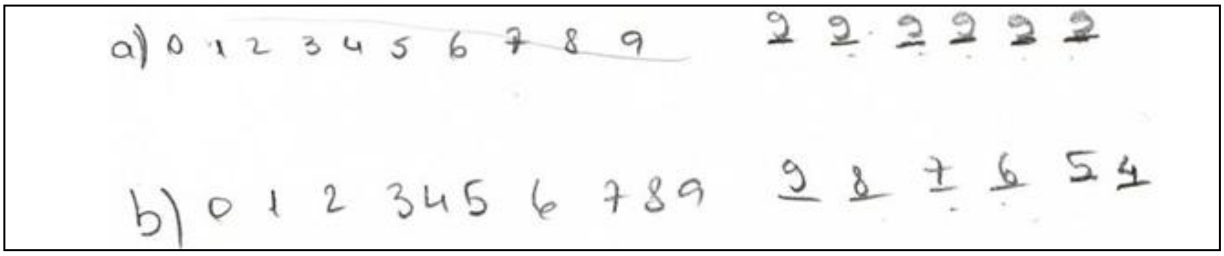


Figura 41 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla André e Hugo

Porém, notamos que ao considerar o total de algarismos disponíveis, os alunos equivocaram-se e levaram em conta apenas nove algarismos, desenvolvendo seu raciocínio a partir desse pressuposto. Esse equívoco é comum, pois muitos alunos ao enumerarem os algarismos, escrevem o 9 como ultimo elemento, consideram que há, então, nove algarismos, esquecendo que o zero também deve ser considerado, totalizando então 10 algarismos.

Já as alunas Beatriz e Eva, inicialmente, listaram algumas sequências, como vemos na Figura 42. É possível perceber que essa listagem consistiu em fazer permutações com os dez algarismos. Essa permutação foi realizada de forma cíclica: podemos perceber que a cada nova linha o primeiro elemento da linha anterior passa a ser o último elemento. Porém, os elementos listados não satisfazem o enunciado da atividade, uma vez que era pedido que fossem formadas senhas com seis algarismos e não com dez algarismos como relacionado pelas alunas.

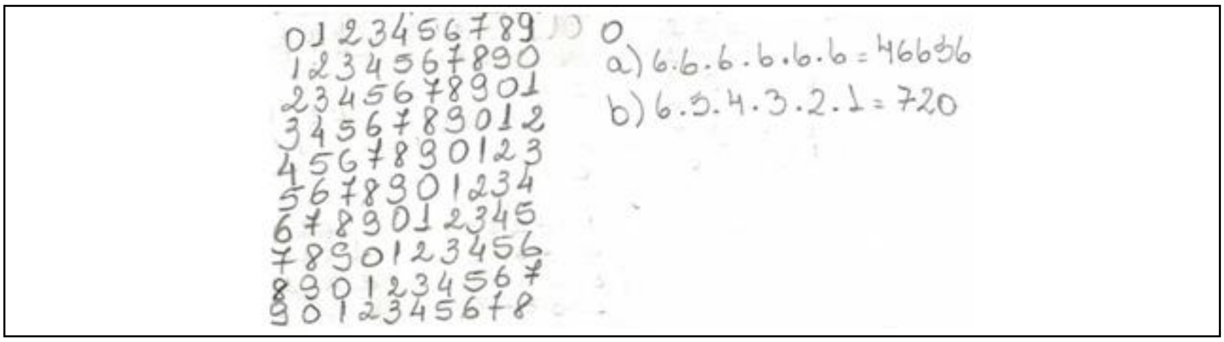


Figura 42 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla Beatriz e Eva.

Podemos observar, na resolução apresentada, que os 10 algarismos disponíveis para utilização na formação da senha são confundidos com os 6 algarismos que serão efetivamente utilizados. Ou seja, há confusão entre o número de escolhas e o número de opções disponíveis em cada escolha. É possível observar que a dupla se detém na tentativa de aplicar um esquema que foi válido para outras situações, sem compreender a situação em que o número de escolhas é diferente do número de opções, não diferenciando uma variável da outra. As alunas estão utilizando um teorema-em-ação falso, pois tomam o número de escolhas como fator e não como número de fatores.

Já a dupla Carlos e Fabiane encontrou o resultado esperado. Pela resolução apresentada na Figura 43, é possível verificarmos que eles empregaram o princípio multiplicativo, como forma de resolução.

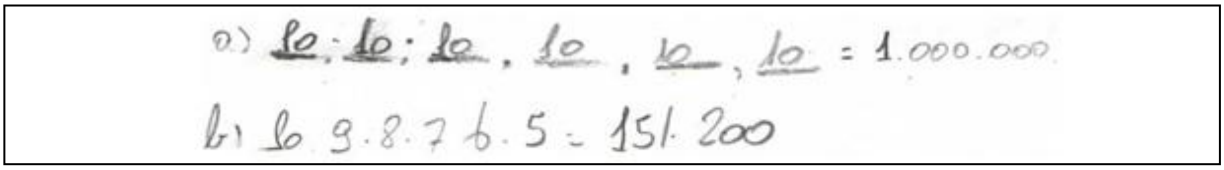


Figura 43 – Resolução da atividade 1 do segundo conjunto de atividades, apresentada pela dupla Carlos e Fabiane.

A construção das soluções das situações propostas na atividade foi discutida no grande grupo. Infelizmente, essa discussão foi precária, pois os alunos estavam dispersos e ansiosos, em virtude de uma viagem de estudos que fariam ao final da aula.

Inicialmente, para resolver a alternativa (*a*), foi construída uma parte da árvore de possibilidades, de modo que os alunos pudessem perceber que para cada uma das dez opções iniciais haveria dez possibilidades de escolha do segundo algarismo, resultando, por enquanto, em 100 possibilidades. O mesmo foi repetido para a terceira etapa, em que, para cada uma das 100 possibilidades já obtidas na etapa anterior haveria dez opções de escolha para o terceiro algarismo, e assim sucessivamente. Foi destacado que o processo se repetiria até que os seis algarismos fossem escolhidos, sendo que a cada nova etapa o número de possibilidades da etapa anterior era multiplicado por 10.

A construção de toda a árvore de possibilidades seria um processo inviável. Sendo assim, destacou-se que, em determinadas situações a árvore de possibilidades pode ser utilizada para representar ou dar ideia do que determinado problema está propondo, mas, pelo número elevado de possibilidades, fica impossível sua construção completa. Por esta razão, ao analisar o que estava ocorrendo nas ramificações construídas, foi realizada a representação da multiplicação envolvida, obtendo-se o total de $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000.000$ senhas distintas formadas por algarismos quaisquer.

Em seguida, foi realizado o mesmo raciocínio para o caso dos algarismos serem distintos. Neste caso, para cada uma das dez opções iniciais haveria nove possibilidades de escolha do segundo algarismo, resultando, por enquanto, em 90 possibilidades. O mesmo foi repetido para a terceira etapa, em que, para cada uma das 90 possibilidades acumuladas na etapa anterior, haveria oito opções de escolha para o terceiro algarismo, e assim sucessivamente. Podemos observar que a cada nova etapa o número de algarismos disponíveis diminui. Sendo assim, a quantidade obtida na etapa anterior será multiplicada por um fator que é uma unidade menor do que o último utilizado. À medida que esse raciocínio foi sendo construído, foi sendo registrado no quadro-branco por meio da multiplicação $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$, chegando-se ao total de 151200 possibilidades de senhas distintas, sendo todos os algarismos distintos.

Ao finalizar a análise da segunda sequência de atividades, foi possível observar que tanto a dupla Carlos e Fabiane quanto a dupla André e Hugo mobilizaram em diversos momentos, diferentes esquemas combinatórios, demonstrando compreender a multiplicação envolvida nas resoluções dos problemas. Isso foi observado através das resoluções apresentadas, em que ficou claro que compreenderam que, para cada uma das possibilidades envolvidas na primeira escolha, há um número fixo de possibilidades envolvidas nas demais escolhas, permitindo que seja empregada a multiplicação.

Ao mesmo tempo, as resoluções apresentadas pela dupla Beatriz e Eva, nos levam a pensar que passaram a utilizar o princípio multiplicativo como uma fórmula que é válida sempre, sem necessariamente entender o que estava ocorrendo. Isso ficou evidenciado na última atividade, em que as alunas confundem o número de etapas de escolhas com o número de opções disponíveis em cada etapa. Acabaram aplicando a lógica dos problemas em que o número de escolhas coincide com o número de opções.

Em relação à dupla Gabriela e Daiana pouco podemos concluir, pois as alunas faltaram em dois dos três momentos destinados à segunda sequência de atividades, impossibilitando-nos de realizar uma análise de suas produções e justificativas.

6.3 Análise do jogo senha

Como já mencionado, acrescentamos à nossa dinâmica a aplicação do "Jogo Senha". Escolhemos utilizar outro recurso didático, além dos conjuntos de atividades, a fim de tornar o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico e motivador. Conforme ressalta Pedrosa Filho (2008), ao citar Silva e Kodama,

> O uso do material manipulável, na forma de um jogo, representa, em sua essência, uma alternância de postura do professor. Ele deixa neste momento de ser o comunicador de conhecimento para ser o observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem no processo de construção do saber pelo aluno. (SILVA e KODAMA apud PEDROSA FILHO, 2008, p. 52).

O "Jogo Senha" foi escolhido pois sua dinâmica favorece aos alunos supor hipóteses, prevendo determinadas combinações, a partir das dicas informadas, podendo testá-las e reformulá-las. O mesmo já foi utilizado em outros trabalhos, como na dissertação de mestrado de Carvalho (2009). O trabalho desenvolvido pelo autor consistiu na aplicação de uma sequência didática para se trabalhar problemas de contagem através do uso de diferentes jogos. A pesquisa foi realizada em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental do Colégio Militar de Porto Alegre e permitiu que o autor observasse as diferentes estratégias de contagem utilizadas pelos alunos.

A aplicação do jogo e a análise de algumas jogadas foram realizadas, respectivamente, no quarto encontro e na metade do quinto encontro. O material utilizado e as regras do jogo estão descritos no Quadro 18.

Material do jogo

1 – Tabuleiro do Desafiante e tabuleiro do desafiado;

2 – Canetas hidrocor de cores diversas.

Regras do Jogo

1 - Escolhe-se quem será o desafiante, ou seja, aquele que formará uma senha, e o desafiado, aquele que tentará descobri-la;

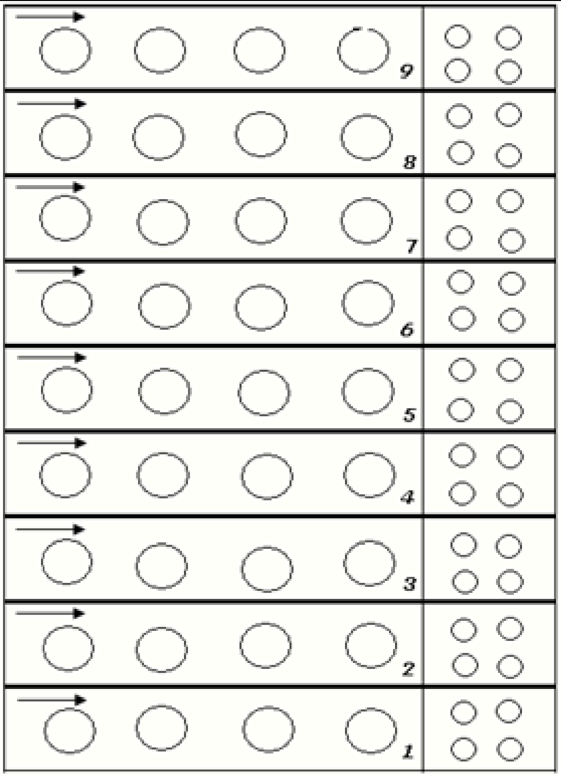
2 – O desafiante forma uma senha utilizando quatro cores distintas ou não;

3 – O desafiado forma uma senha que julga ser a do desafiante. Caso tenha acertado, o desafiante dá dicas na coluna da direita do tabuleiro do desafiado.

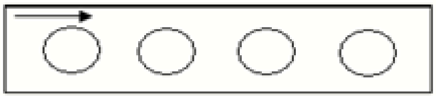
- cada círculo pintado de preto corresponde a uma cor correta em uma posição correta;
- cada círculo em branco corresponde a uma cor correta em uma posição incorreta;
- cada círculo marcado com um X corresponde a uma cor incorreta

4 – O desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha em nenhuma das nove oportunidades, ele contabiliza nove pontos;

5 – Alternadamente, os jogadores invertem seus papéis. O jogo segue da mesma forma e será considerado vencedor aquele que descobrir a senha do outro em menos tentativas, ou seja, aquele que obtiver o menor número de pontos.



Tabuleiro do Desafiado



Tabuleiro do Desafiante

Quadro 18 – Material e regras do Jogo Senha.

Inicialmente, foram esclarecidas as regras do jogo e as duplas formadas, mantendo-se as mesmas dos encontros anteriores. As duplas deveriam escolher quem seria o desafiado e quem seria o desafiante, conforme denominações explicitadas nas regras do jogo. Foram distribuídos os tabuleiros para cada integrante, bem como canetas hidrocor, de quatro cores distintas para o início da atividade. A quantidade de cores foi restrita a quatro opções, pois não dispúnhamos de muito tempo para discussão de todos os resultados possíveis, considerando que quanto maior fosse a quantidade de cores, maior seriam as possibilidades e combinações distintas a serem formadas.

Para a primeira rodada foi solicitado que o desafiante montasse uma senha utilizando as quatro cores disponibilizadas, isto é, sua senha deveria ser formulada com cores distintas, sendo que o desafiado deveria tentar descobrir essa senha, conforme as dicas que fossem sendo informadas. Como as senhas seriam formadas com quatro cores distintas, haveria quatro opções de cores para preencher o primeiro círculo; três opções para o segundo círculo, obtendo para cada opção de cor utilizada na primeira etapa, três possibilidades de senhas parciais, totalizando 12 possibilidades de senhas $(4 \times 3 = 12)$. Para o preenchimento do terceiro círculo duas cores já não poderiam ser utilizadas, fazendo com que cada uma das 12 possibilidades de senhas já obtidas, tivesse duas opções de escolha, determinando, portanto, 24 senhas. Para o preenchimento do quarto círculo, sobraria apenas uma opção de cor, logo as 24 senhas já encontradas teriam somente uma opção de cor para o último círculo, mantendo, portanto, as 24 possibilidades de senhas já encontradas, ou seja, $4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Sendo assim, cada um dos desafiados deveria encontrar uma senha entre 24 possibilidades. Os acertos da primeira rodada dependeriam de uma escolha ao acaso, porém, da segunda rodada em diante o desafiado deveria montar sua possibilidade de senha, conforme a dica informada, elencado, conforme necessidade, todas as situações possíveis.

Dos cartões jogados na primeira rodada, escolhemos dois para discutir com os alunos posteriormente, os quais apresentaremos aqui. Os resultados dos outros dois cartões são semelhantes ao primeiro que iremos apresentar, por isso não foram escolhidos. Os dois jogos escolhidos apresentam a situação em que o desafiado formulou e testou hipóteses conforme as informações dadas e o outro em que o desafiado não conseguiu seguir esse raciocínio.

Os cartões escolhidos foram das duplas Beatriz e Eva, e Carlos e Fabiane. No primeiro caso, jogo da dupla Beatriz e Eva, é possível perceber que a desafiada em sua primeira opção acertou duas cores nas posições certas (Figura 44).

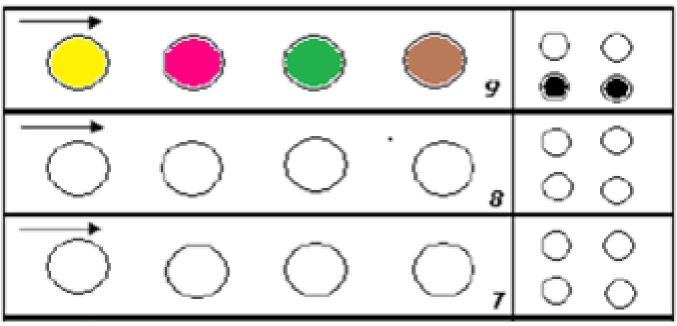


Figura 44 – Cartão do Jogo Senha da dupla Beatriz e Eva.

Como a dica informava que havia duas cores nas posições corretas, para encontrar a senha correta era necessário fixar duas cores e testar as possibilidades de variações das posições das demais e, dependendo da nova dica, fazer o mesmo procedimento para outro par de cores. Assim, esperávamos que a aluna indicasse na próxima jogada alguma das senhas a seguir[13]:

AMARELO – **ROSA** – MARROM – VERDE

AMARELO – MARROM – **VERDE** – ROSA

AMARELO – VERDE – ROSA – **MARROM**

ROSA – AMARELO – **VERDE** – **MARROM**

VERDE **– ROSA –** AMARELO **– MARROM**

MARROM – **ROSA** – **VERDE** – AMARELO

É possível notar que essas são as seis possibilidades de senhas que a aluna pode encontrar se considerar corretamente a dica informada, fixando exatamente duas cores em suas posições. Desta forma, a desafiada em, no máximo, seis tentativas encontrará a senha escolhida pela desafiante. Na figura 45, vemos que a desafiante fez uso do raciocínio combinatório, pois ao saber que duas cores estavam nas posições certas fixou duas e trocou de posição as outras duas.

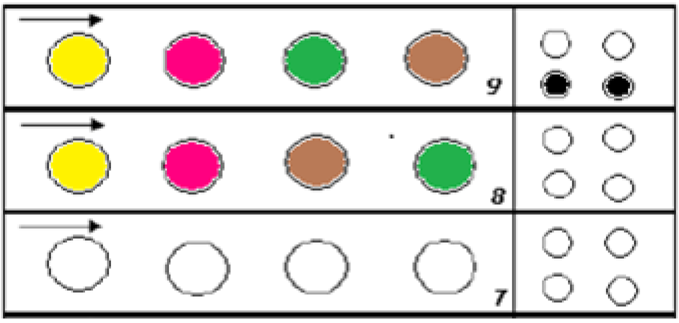


Figura 45 – Cartão do Jogo Senha da dupla Beatriz e Eva.

Com a nova dica informada, sabemos que todas as cores da linha 8 estão na posição errada, logo pode-se concluir que as cores trocadas, isto é, o verde e o marrom, estavam nas posições corretas na linha 9. A desafiada então concluiu, corretamente, que deveria trocar as cores amarela e rosa de posição, e manter as cores verde e marrom nas posições que tinham na linha 9 (Figura 46).

[13] Indicamos em *negrito* as cores fixadas em cada opção.

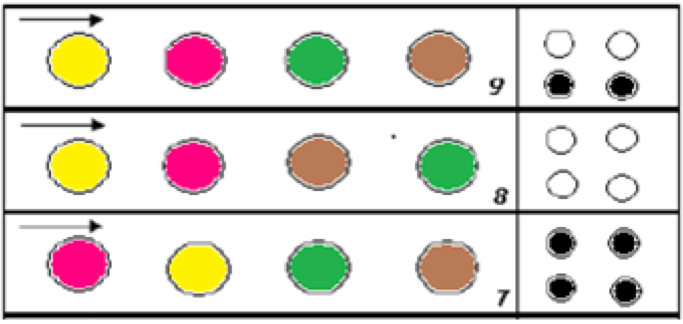


Figura 46 – Cartão do Jogo Senha da dupla Beatriz e Eva.

O segundo jogo analisado foi da dupla Fabiane e Carlos. Nesse, diferente do jogo analisado anteriormente, o desafiado não teve tanta sorte em sua primeira escolha, visto que não acertou nenhuma cor na posição correta, como vemos na Figura 47.

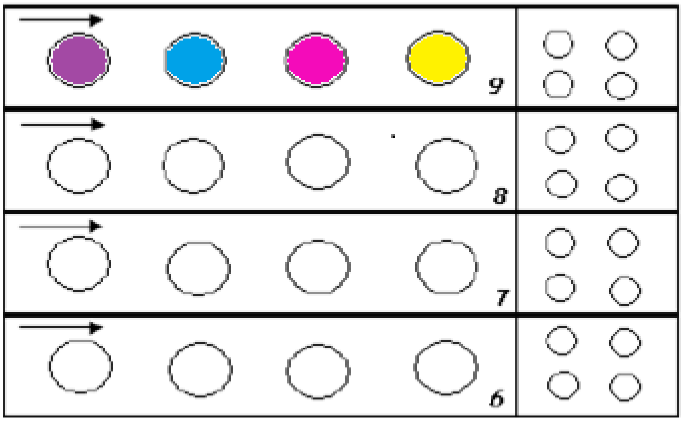


Figura 47 – Cartão do Jogo Senha da dupla Fabiane e Carlos.

Com essa sequência, a única certeza que o desafiado tinha era da posição que cada uma das cores não ocuparia, restando, porém, para cada uma delas três opções de posição a ocupar. Assim, por exemplo, a cor roxa poderia estar no segundo, terceiro ou quarto círculo. Vejamos abaixo, as sequências de cores que o desafiado poderia propor a partir da dica informada.

AMARELO – ROXO – AZUL – ROSA

AMARELO – ROSA – ROXO – AZUL

AMARELO – ROSA – AZUL - ROXO

ROSA – AMARELO – ROXO – AZUL

ROSA – AMARELO – AZUL – ROXO

ROSA – ROXO – AMARELO – AZUL

AZUL – ROSA – AMARELO – ROXO

AZUL – ROXO – AMARELO – AZUL

AZUL – AMARELO – ROXO – ROSA

Vemos que agora o número de senhas possíveis é bem maior do que no primeiro caso, em que duas cores já estavam na posição correta. Assim, para montar sua segunda sequência, o desafiado utilizou, como vemos na Figura 48, o único critério possível: não fixar nenhuma posição das cores.

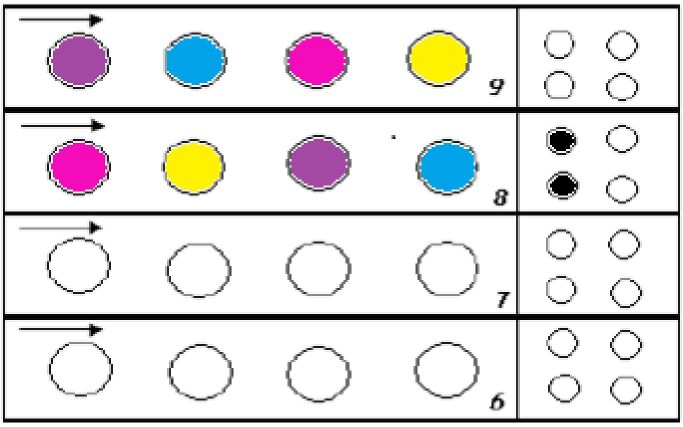


Figura 48 – Cartão do Jogo Senha da dupla Fabiane e Carlos.

Percebemos que a nova sequência montada é uma das nove sequências possíveis. Nessa nova opção, diferente da primeira linha, o desafiado já possui duas cores certas nas posições certas. Desta forma, assim como no primeiro caso analisado, para descobrir quais são essas duas cores e consequentemente determinar a senha correta, era necessário o desafiado fixar duas cores e trocar as posições das outras duas, analisando qual seria a nova dica informada. Assim, esperávamos que o desafiado listasse alguma das seguintes opções:

ROSA – **AMARELO** – AZUL – ROXO

ROSA – AZUL – **ROXO** – AMARELO

ROSA – ROXO – AMARELO – **AZUL**

AMARELO – ROSA – **ROXO** – **AZUL**

ROXO – **AMARELO –** ROSA **– AZUL**

AZUL – **AMARELO** – **ROXO** – ROSA

Porém, o desafiado não listou nenhuma dessas possibilidades. Como vemos, na Figura 49, ele fixou apenas uma das cores (e não duas como esperávamos) trocando as outras três de posição, retornando, inclusive, uma cor à posição que fora indicada como errada. Percebemos, através deste fato, que esse aluno, ao contrário da desafiada da primeira dupla, não consegue prever todas as opções ou ainda manter fixa alguma variável e observar as variações das demais. E mais, ele também não consegue tirar as conclusões possíveis a partir das dicas dadas.

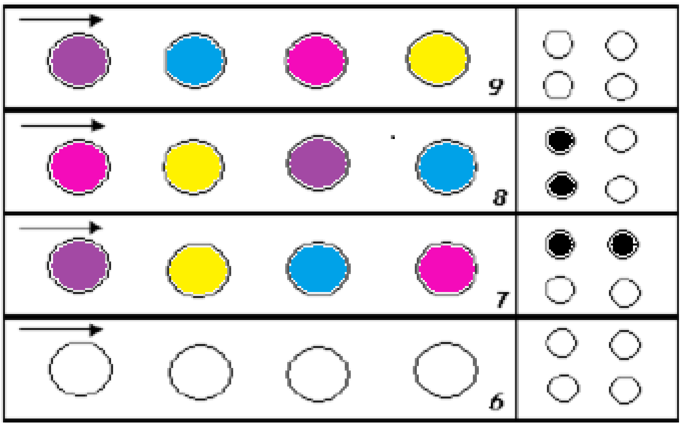


Figura 49 – Cartão do Jogo Senha da dupla Fabiane e Carlos.

Observamos que essa nova sequência apresenta duas cores na posição correta; analisemos quais podem ser essas duas cores. Inicialmente, a cor roxa está descartada, visto que ela já ocupou a primeira posição, na primeira senha formada pelo desafiado, sendo que o desafiante indicou que nenhuma cor estava na posição correta. Suponhamos que as duas cores nas posições corretas sejam o azul e o rosa, logo elas estão na posição errada na segunda linha e, automaticamente, as duas cores corretas nessa linha seriam as cores amarela e roxa, porém, como a cor amarela foi mantida na mesma posição, deveríamos ter na última linha três cores nas posições corretas. Assim, as duas cores não podem ser o azul e o rosa; mas sim uma delas, juntamente com a cor amarela.

Consideremos que além do amarelo, seja a cor rosa a ocupar a posição correta. Logo, a cor rosa está na posição errada na segunda linha, implicando que uma das duas - a cor roxa ou a cor azul - está na posição correta. Porém, a cor azul não pode estar na posição certa na segunda linha, visto que estamos supondo que a posição que ela está ocupando na verdade deve ser ocupada pela rosa. Assim, a cor roxa estaria correta na segunda linha, juntamente com a cor amarela. Obteríamos, portanto, a seguinte sequência AZUL – AMARELO – ROXO – ROSA.

Suponhamos agora que além do amarelo, a cor na posição correta na terceira linha seja a cor azul. Portanto, a cor azul está na posição errada na segunda linha, logo ou a cor roxa ou a cor rosa estão na posição correta. Porém, a cor roxa não pode estar na posição certa na segunda linha, visto que estamos supondo que a posição que ela está ocupando na verdade deve ser ocupada pela cor azul. Assim as cores corretas na segunda linha seriam o amarelo e o rosa, de modo que obtemos a sequência ROSA – AMARELO – AZUL – ROXO.

Com essa análise obtemos duas possíveis sequências a partir da sequência sugerida pelo desafiado: AZUL – AMARELO – ROXO – ROSA ou ROSA – AMARELO – AZUL – ROXO. Na Figura 50, vemos que o desafiado chegou a uma dessas duas sequências.

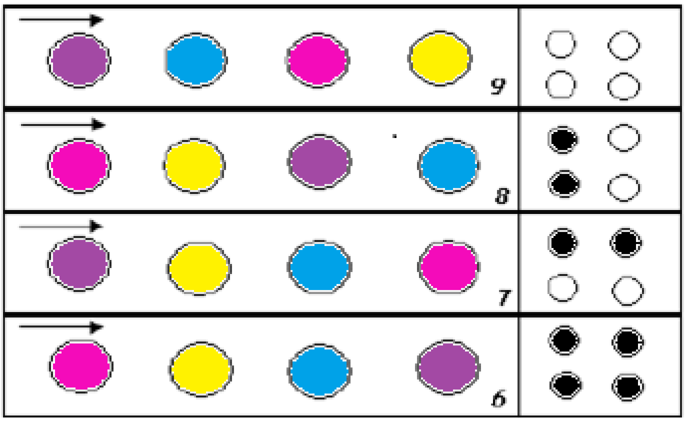


Figura 50 – Cartão do Jogo Senha da dupla Fabiane e Carlos.

Na segunda rodada, foi solicitado aos alunos inverterem os papéis de desafiados e desafiantes. Sendo que, desta vez, a senha formada poderia ter cores repetidas. Apresentaremos um jogo de uma dupla em que o desafiado não conseguiu encontrar o resultado esperado, veremos que isso ocorreu por ele não eliminar todas as possibilidades em uma determinada rodada.

Inicialmente, como as cores podem se repetir, teremos para a primeira e demais etapas sempre quatro opções de escolha de cores. Assim, o primeiro círculo pode ser preenchido com uma das quatro cores disponíveis. O segundo círculo também, acarretando que, para cada cor escolhida na primeira etapa, teremos quatro opções de escolha na segunda, totalizando 16 opções $(4 \times 4 = 16)$. O mesmo ocorre no preenchimento do terceiro círculo, logo, para cada uma das 16 opções já determinadas haverá 4 opções de escolha de cor, totalizando 64 opções $(16 \times 4 = 64$ ou $4 \times 4 \times 4 = 64)$. Por último, para o quarto círculo também haverá quatro opções de preenchimento, totalizando, portanto, 256 possibilidades de senhas distintas ($64 \times 4 = 256$ ou $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$).

É fácil perceber que, quando as cores não são necessariamente distintas, a chance de acertar a senha é bem menor, pois a quantidade de possibilidades de senhas distintas é bem maior, 256 possibilidades, contra 24 possibilidades no caso de cores distintas.

Na realidade a dificuldade maior é descobrir quais cores foram e quais não foram utilizadas pelo desafiante. Vejamos essa situação no cartão do jogo da dupla André e Hugo. Escolhemos esse cartão para apresentar aqui, pois foi o mesmo discutido com os alunos e o único em que o desafiado não encontrou a senha correta.

Nessa jogada, como veremos adiante, o desafiante escolheu as cores verde, marrom e amarelo, repetindo a cor verde. Na Figura 51, observamos que na primeira tentativa, o desafiante indicou através da dica informada que uma das cores não fora utilizada, sendo assim, das outras três, uma necessariamente foi utilizada duas vezes na formação da senha.

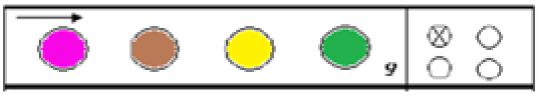


Figura 51 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Na tentativa de determinar qual cor não foi utilizada e qual foi utilizada duas vezes, o desafiado supôs que a cor não utilizada era a rosa e a cor utilizada duas vezes, a cor marrom. Ele acertou a cor não utilizada, porém sua suposição da cor utilizada duas vezes ser a cor marrom não estava correta, logo novamente apareceu no quadro de dicas uma cor errada (Figura 52).

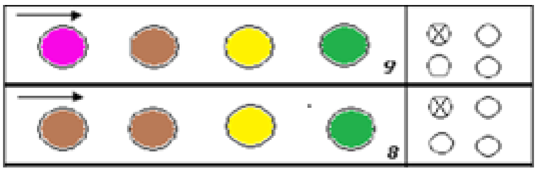


Figura 52 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Com essa suposição, o desafiado não tinha como saber se a dica persistiu porque a cor não utilizada não era o rosa ou porque não era uma segunda cor marrom. Para garantir que a cor não utilizada era a rosa, ele precisava verificar as outras possibilidades sem a cor rosa. Dessa vez, o desafiado supôs que a cor utilizada duas vezes era a amarela, mantendo como cor não utilizada a rosa. Como a cor amarela também não era a repetida, novamente apareceu no quadro de dicas a indicação de que havia uma cor errada (Figura 53).

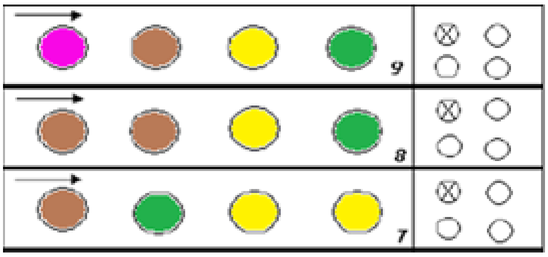


Figura 53 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Na tentativa seguinte, era de se esperar que o aluno repetisse a cor verde, mantendo a sequência sem a cor rosa, garantindo assim, que todas as possibilidades sem a cor rosa fossem testadas. Porém, na Figura 54, observamos que o desafiado repetiu a cor verde, porém retirou a cor amarela e retornou a cor rosa. Essa duas ações fizeram com que continuasse aparecendo a dica de uma cor errada, pois a cor rosa (que não havia sido utilizada) retornou à sequência.

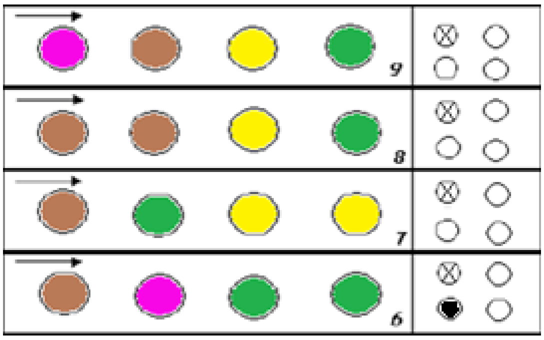


Figura 54 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Na última sequência sugerida, uma cor está na posição correta. Pelas sequências já apresentadas, as cores que poderiam estar na posição correta seriam ou a cor rosa (que já destacamos ser a cor não utilizada, porém o desafiado ainda desconhecia esse fato) ou a cor verde do terceiro círculo. A cor marrom e a cor verde do quarto círculo não poderiam estar na posição correta, pois já haviam aparecido nas posições que estão ocupando nessa última sequência, porém, nas tentativas anteriores não constou a dica de cor certa na posição certa.

Pelas dicas informadas até o momento já era possível o desafiado determinar qual cor não havia sido utilizada, embora não tivesse seguido a estratégia de manter a cor rosa fora da sequência e duplicar a cor verde. Analisando a segunda e a terceira sequências, sabemos que as cores marrom e amarelo não são as cores não utilizadas na sequência, pois caso fosse alguma delas, quando o desafiado as duplicou, na segunda e na terceira sequência respectivamente, teriam aparecido, no quadro de dicas, duas indicações de cores não utilizadas. Do mesmo modo, pode-se concluir que a cor verde também não foi a não utilizada, pois caso fosse, quando duplicada, na quarta sequência, deveria aparecer no quadro de dicas a indicação de duas cores erradas. Portanto, pode-se concluir que a cor não utilizada foi a cor rosa. Por outro lado, pela segunda e terceira sequência, observamos que as cores amarelo e marrom não são as cores utilizadas duas vezes. Assim, a senha procurada deveria apresentar as cores amarelo, marrom e verde, sendo essa última utilizada duas vezes.

Entretanto, o aluno demonstrou dificuldade em analisar as situações que já se apresentavam por meio das sequências já sugeridas. Isso indica a dificuldade de coordenar hipóteses e de fazer suposições de forma sistemática, para chegar a conclusões através da concatenação dos resultados das tentativas. Assim, mesmo com condições de saber as cores utilizadas na senha escolhida pelo desafiante, o desafiado manteve a cor não utilizada na sequência anterior, permanecendo, portanto, a indicação de uma cor errada, conforme Figura 55

.

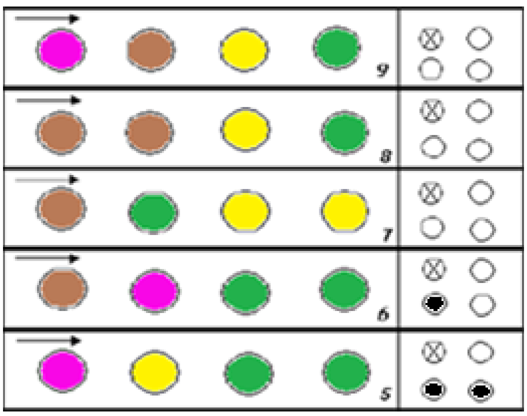


Figura 55 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Pela última tentativa, percebemos que o aluno ainda está tentando determinar qual cor está errada, visto que ele retirou a cor marrom e recolocou a cor amarela. Porém, como a cor rosa foi mantida, a sequência continua com uma cor errada. Entretanto, mesmo com a cor errada na sequência, algumas considerações podem ser formuladas. Pela linha 5, sabemos que duas cores estão nas posições corretas. Analisando a primeira linha, percebemos que as cores rosa e verde (quarto círculo) aparecem nas mesmas posições, logo, elas não podem estar na posição correta na linha 5, assim, as opções corretas são o segundo e terceiro círculo, com as cores amarelo e verde, respectivamente. O aluno poderia utilizar esse raciocínio ou então fixar duas cores em suas posições e observar o que aconteceria a partir da variação das outras duas, obtendo uma das seguintes sequências:

ROSA – VERDE – **VERDE -** AMARELO

ROSA – VERDE – AMARELO – **VERDE**

VERDE – **AMARELO** – ROSA – **VERDE**

AMARELO – ROSA – **VERDE** – **VERDE**

VERDE – **AMARELO** – **VERDE** – ROSA

Porém, o aluno não utilizou nenhuma das estratégias citadas, fazendo, na realidade a troca de posição de todas as cores, formando a senha representada na última linha da Figura 56.

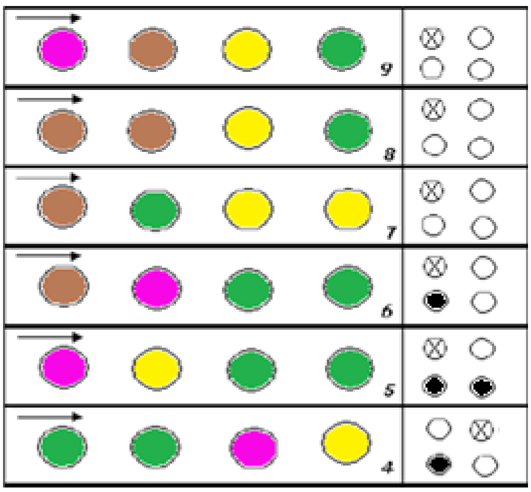


Figura 56 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Nesta nova sequência formulada, notamos que nenhuma cor permaneceu na mesma posição da linha anterior, logo a indicação de uma cor na posição correta, refere-se a uma cor diferente daquelas que estavam corretas na linha 5. Por jogadas anteriores, sabemos que as cores verde (segundo círculo) e amarela não podem estar na posição correta, visto que aparecem na mesma posição na linha 7, logo, resta a cor verde (primeiro círculo) ou a cor rosa (considerando ser ainda desconhecida a não utilização dessa cor).

Desta forma, esperávamos que o desafiado fixasse ou a cor verde do primeiro círculo ou a cor rosa e analisasse o que aconteceria a partir dessa escolha. Porém, novamente, não foi o que ocorreu. O aluno desta vez manteve fixas três cores e trocou a última cor, como vemos na Figura 57, buscando desse modo descobrir qual cor não havia sido utilizada.

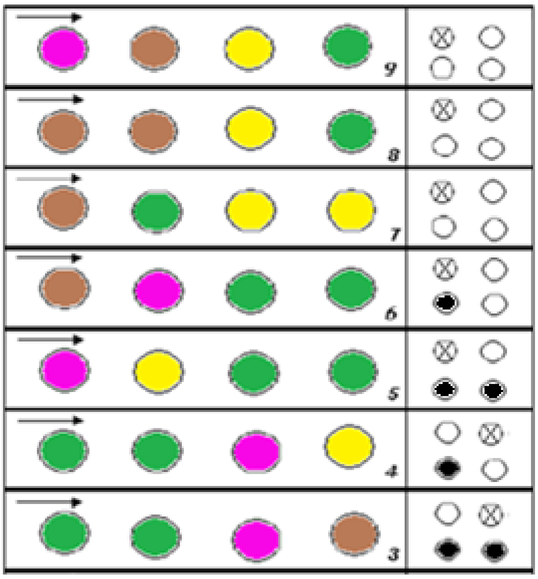


Figura 57 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Observamos que as cores utilizadas nessa última sequência já haviam sido utilizadas na linha 6. Nessa linha, percebemos que havia uma cor na posição certa, enquanto na senha da linha 3, há duas cores na posição correta. Pela comparação entre a linha 3 e a linha 4, concluímos que uma das duas - ou a cor verde (primeiro círculo) ou a cor rosa - estava na posição certa, pois ambas foram fixadas nas mesmas posições juntamente com a cor verde do segundo círculo (que já sabemos, pela linha 7, que não está correta). Como a dica da linha 3 informava duas cores na posição certa, logo, além de uma das cores já destacadas na linha 4, a outra cor que está na posição certa é a cor marrom.

Outro detalhe importante da senha na linha 3 é a não utilização da cor amarela. Mesmo essa cor tendo sido retirada da sequência, a dica de uma cor errada permaneceu, indicando que essa não era a cor não utilizada. Ao mesmo tempo, sabemos que a cor verde também não foi a cor não utilizada, pois se fosse, quando ela apareceu duplicada, ao invés de uma cor errada, deveria ter aparecido, no quadro de dicas, o indicativo de duas cores erradas. Além disso, como acabamos de destacar, a cor marrom está ocupando a posição correta, logo a cor errada é a cor rosa. Assim, as cores corretas da linha 3 serão a cor verde do primeira círculo e a cor marrom.

Podemos determinar as outras duas cores nas posições corretas, analisando a linha 5. Nessa também são destacadas duas cores na posição corretas. Já sabemos que a cor correta não pode ser a cor rosa, pois essa foi a cor não utilizada pelo desafiante e também não pode ser a cor verde do quarto círculo, pois essa opção já apareceu na linha 9 e nesta linha não foi indicada nenhuma cor na posição correta. Deste modo, as cores corretas na linha 5 são o amarelo e o verde do terceiro círculo. Consequentemente, a sequência procurada seria VERDE – AMARELO – VERDE – MARROM.

Contudo, o desafiado não realizou nenhuma dessas análises e manteve as cores utilizadas na linha 3 para formular a próxima sequência, mantendo fixas duas cores e variando as outras, como vemos na Figura 58.

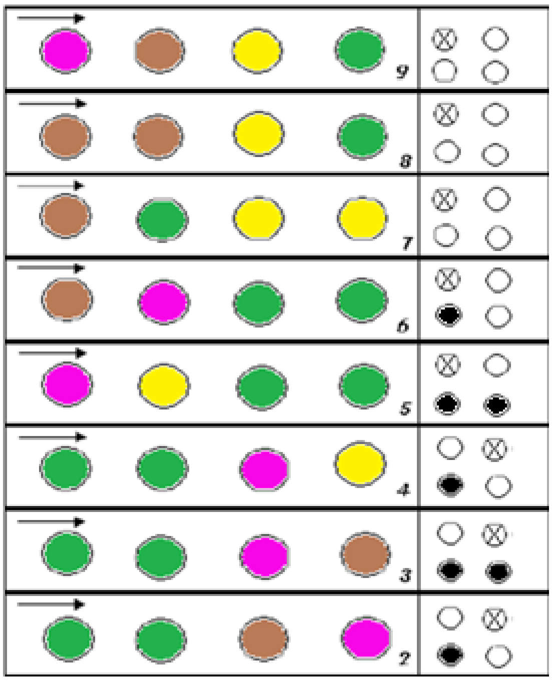


Figura 58 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Com essa nova senha, o desafiado poderia concluir que uma das duas cores – rosa ou marrom – era uma das cores indicadas como na posição correta na linha 3. Porém, a sequência continuava contendo a cor não utilizada pelo desafiante. O desafiado buscou na novamente na última jogada descobrir qual era essa cor. Não é possível saber se ele realizou alguma das análises aqui já destacadas ou apenas montou uma sequência de forma aleatória. Essa tentativa aparece na última linha da Figura 59.

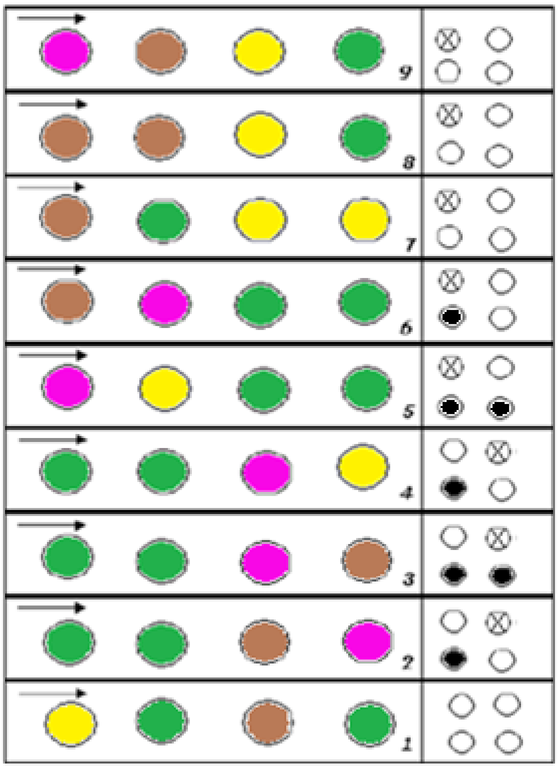


Figura 59 – Cartão do Jogo Senha da dupla André e Hugo.

Com essa última jogada, o desafiado conseguiu determinar as cores utilizadas na senha formulada pelo desafiante: amarelo, verde (duas vezes) e marrom. Porém, faltava descobrir a posição de cada uma delas. É possível perceber que não é difícil descobrir a posição de cada uma das cores utilizadas, pois, como todas as cores estão na posição incorreta, as cores verdes não podem ocupar a segunda e quarta posição, logo restam a primeira e terceira. Por outro lado, pela linha cinco, pode-se concluir que duas cores estão na posição certa; já sabemos que uma delas não é a cor rosa, visto que foi a cor não utilizada, e também não é a cor verde do quarto círculo, como acabamos de destacar, logo resta a cor amarela no segundo círculo da linha 5 e a cor verde, no terceiro. Assim, a cor marrom só poderá ocupar a quarta casa, e portanto a senha deve ser: VERDE – AMARELO – VERDE – MARROM. Mas como o jogo previa apenas 9 tentativas, não foi possível o desafiado chegar a essa conclusão.

Finalizada a apresentação dos cartões dos jogos aqui expostos, os alunos foram convidados a analisar porque no último jogo tornou-se mais difícil para o desafiado encontrar o resultado esperado. O objetivo dessa discussão era determinar as diferentes possibilidades de senhas que poderiam ser formadas quando as cores eram todas distintas e quando as cores poderiam ser repetidas.

Inicialmente, retornamos à situação em que as cores eram todas distintas. Nos dois jogos apresentados, os alunos auxiliaram na interpretação das dicas e das possíveis soluções, destacando que no segundo jogo, como uma dica havia sido utilizada de forma incorreta, aumentou o número de tentativas necessárias para determinação da senha correta. Para que ficassem claras todas as possibilidades de senhas quando as cores eram distintas, foi montada a árvore de possibilidades com as cores utilizadas no primeiro jogo: amarelo, rosa, marrom e verde. Para tanto, indicamos cada cor pela sua inicial, obtendo a árvore da Figura 60.

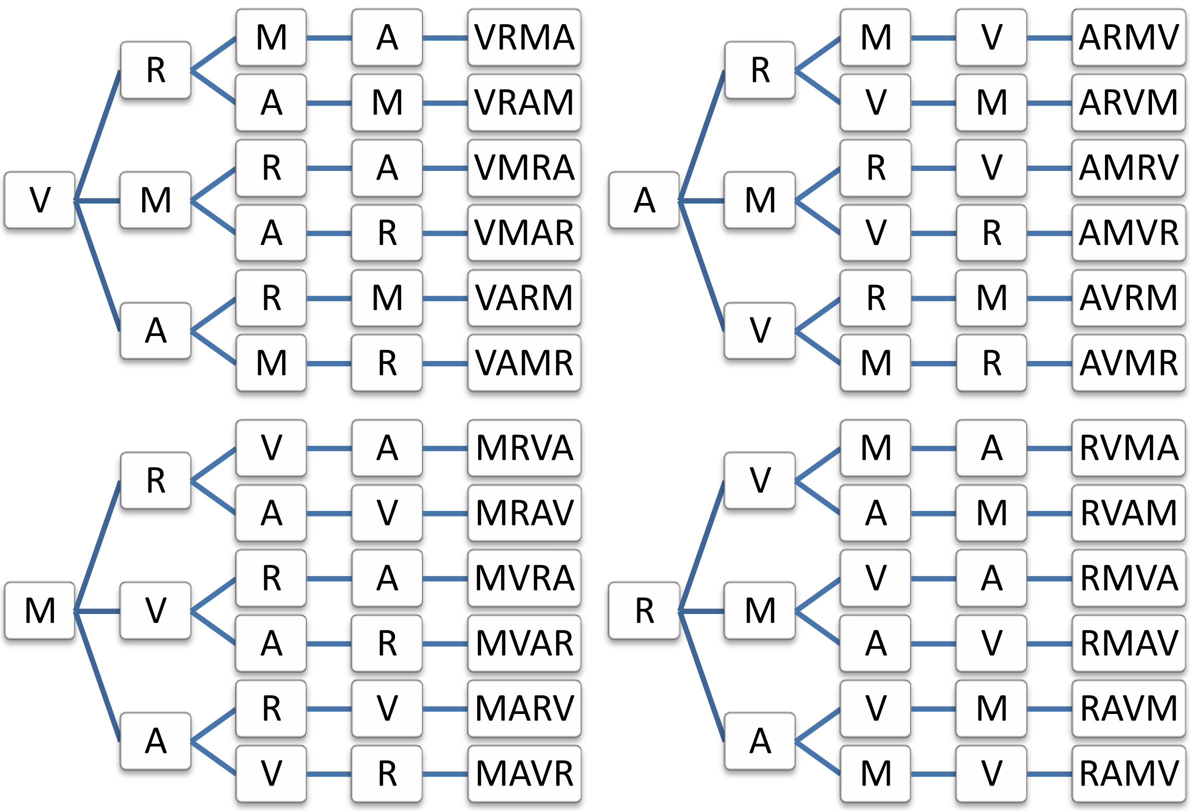


Figura 60 – Árvore de possibilidades do Jogo Senha, para o caso de cores distintas.

Com a construção da árvore de possibilidades descrita, os alunos puderam verificar que, com quatro cores distintas, teríamos 24 possibilidades de senhas. Ao mesmo tempo, foi destacado que se analisarmos as possibilidades para cada cor inicial teremos 6 possibilidades, e como são quatro cores diferentes para a primeira opção temos $4 \times 6 = 24$ possibilidades ou, ainda, para cada cor escolhida na primeira opção, temos três possibilidades de escolha na segunda, obtendo 12 possibilidades ($4 \times 3 = 12$, e na terceira etapa duas opções de cores para cada uma dessas 12 possibilidades, totalizando 24 possibilidades ($12 \times 2 = 24$ ou $4 \times 3 \times 2 = 24$), restando apenas uma possibilidade de cor a ser utilizada na última etapa. Foi observado, então, que a situação mostrada na árvore de possibilidades poderia ser representada por uma multiplicação.

Como a situação descrita no terceiro jogo envolvia um número alto de possibilidades de senhas, a representação da árvore de possibilidades era inviável. Para a determinação de todas as possibilidades, foi construído apenas um ramo da árvore, conforme representado na Figura 61.

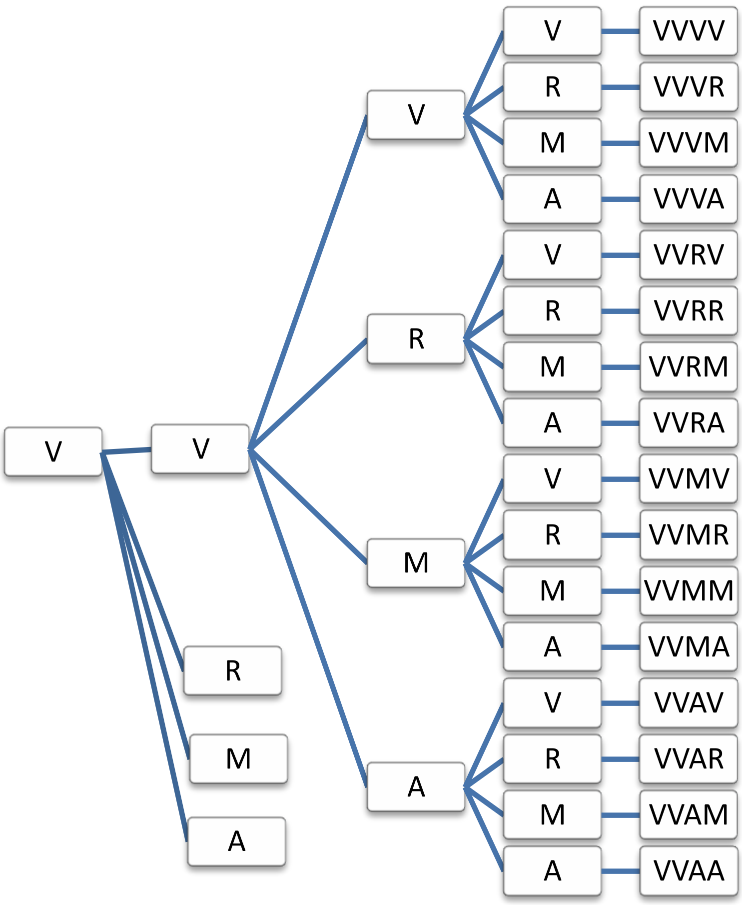


Figura 61 – Árvore de possibilidades do Jogo Senha, para o caso de cores repetidas.

Com essa construção, os alunos puderam visualizar que o número de possibilidades era bem maior do que os obtidos nas situações do primeiro e segundo jogos. Enquanto nesses primeiros jogos, após fixadas as cores do primeiro e do segundo círculo, havia duas possibilidades de senhas, na situação do terceiro jogo havia ainda 16 possibilidades, conforme vemos no ramo da árvore representada na Figura 61.

Podemos observar que nas 16 possibilidades descritas, a cor do primeiro e do segundo círculo é a mesma cor verde. Para cada uma das demais opções de cores do segundo círculo, rosa, marrom e amarelo, teremos também 16 possibilidades, totalizando 64 possibilidades ($16 \times 4 = 64$ ou $4 \times 4 \times 4 = 64$). Como há quatro possibilidades de cores iniciais, temos ao total $4 \times 64 = 256$ possibilidades ($4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$). Assim, a quantidade de senhas nessa situação é bem maior do que aquela descrita na primeira e na segunda situação, sendo por esta razão, mais difícil de determinar a senha escolhida pelo desafiante.

A análise dos cartões do jogo senha, nas diferentes situações, possibilitou aos alunos analisarem a importância de todas as hipóteses serem testadas. A análise do último caso mostrou que o desafiado poderia ter sim acertado a senha correta, mesmo o número de senhas possíveis sendo maior do que nas duas primeiras situações. Porém, como ele não fez uma verificação sistemática de possibilidades e não extraiu, de cada nova linha, todas as conclusões possíveis, acabou realizando jogadas aleatórias, perdendo o jogo.

6.4 Análise do terceiro conjunto de atividades

A terceira sequência de atividades foi proposta com o objetivo de verificar quais conceitos haviam ficado claros para os alunos e como eles utilizariam o que foi tratado, em relação à árvore de possibilidade e ao princípio multiplicativo, nos encontros anteriores. As atividades foram resolvidas pelos alunos na segunda metade do sexto encontro, sendo que a primeira parte foi destinada à discussão da segunda sequência de atividades.

Em virtude do pouco tempo disponível, não foi possível realizarmos uma discussão junto aos alunos em relação às resoluções apresentadas. Desse modo, em relação à terceira sequência não poderemos contar com as justificativas dos alunos. Assim, as análises aqui apresentadas foram realizadas com base em nossas interpretações em relação ao desenvolvimento das atividades, assim como em relação aos avanços obtidos pelos alunos.

Em alguns momentos desse último encontro, os alunos demonstraram certo cansaço, talvez por estarmos no final do semestre e, consequentemente, no final do ano letivo.

Os alunos foram convidados e se reunirem novamente em duplas. Como as alunas Gabriela e Fabiane faltaram, os seus respectivos parceiros de dupla Daiane e Carlos, solicitaram realizar as atividades em conjunto. O aluno Ivo, como no encontro anterior, resolveu as atividades individualmente. O próprio aluno preferiu assim, pois como estava afastado das aulas, por motivos de saúde, acabou não participando de todo o processo de aplicação de nossa proposta.

A primeira questão proposta sugeria a formação de uma sequência de três cores, a partir de um conjunto de quatro cores distintas, com e sem repetição de cores (Quadro 19).

Questão 1

Utilizando cartões nas cores: azul, salmão, amarelo e verde. Responda:

a) Quantas sequências diferentes de cores podem ser formadas utilizando três cartões com cores distintas?
b) Quantas sequências de cores podem ser formadas utilizando três cartões quaisquer?

Quadro 19 – Atividade 1 do terceiro conjunto de atividades.

Essa atividade previa dois momentos: o da formação da sequência com três cores distintas e o da sequência com três cores não necessariamente distintas. Ela foi escolhida, pois tratava da mesma situação explorada e discutida por ocasião do jogo Senha, na aula anterior.

Para resolver a primeira situação do problema é necessário escolher três cores, sem repeti-las, em um conjunto com quatro cores distintas. Para a escolha da primeira cor, temos quatro possibilidades; para a escolha da segunda, lembrando que a cor já escolhida não pode ser escolhida novamente, temos três possibilidades e portanto para temos 3 sequências possíveis para cada uma das quatro possibilidades da primeira etapa (4×3); na terceira etapa, pela mesma razão, temos duas possibilidades de continuação para cada uma das 12 (4×3) sequências já encontradas $(12 \times 2 \ = \ 4 \times 3 \times 2)$. Assim sendo, pelo princípio multiplicativo, poderemos formar $4 \times 3 \times 2 = 24$ sequências com três cores distintas.

Como o número de sequências era relativamente pequeno, os alunos poderiam tentar enumerá-los utilizando algum mecanismo de sistematização, sendo a árvore de possibilidades um dos principais, mas não o único. Indicando as cores azul, salmão, amarelo e verde por A, S, M e V respectivamente, podemos sistematizar a situação descrita no problema como na Figura 62.

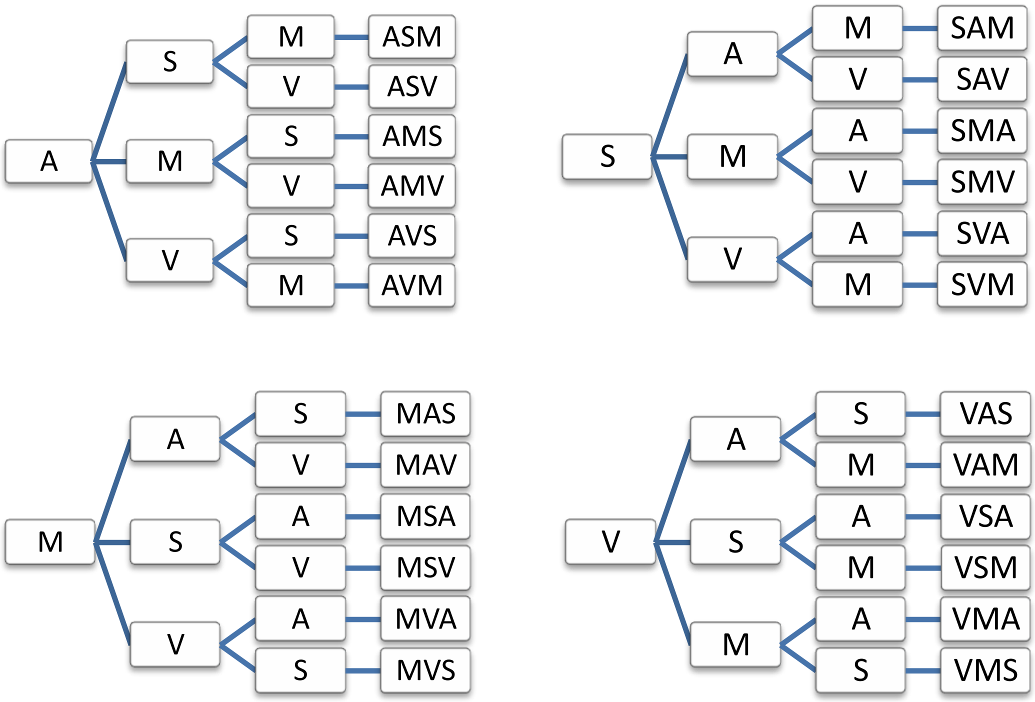


Figura 62 – Árvore de possibilidades da atividade 1, item a, do terceiro conjunto de atividades.

Através da organização e sistematização das possíveis sequências de cores, podemos, por meio da contagem direta dos agrupamentos formados, contabilizar as 24 sequências possíveis de serem formadas com três cores distintas.

Todas as duplas resolverem a alternativa (a) utilizando algum recurso para enumeração e contagem dos agrupamentos formados. A dupla André e Hugo, por exemplo, listou, através de blocos, todas as sequências possíveis. Podemos observar claramente que os alunos separaram as resoluções em blocos com três cores cada um (Figura 63).

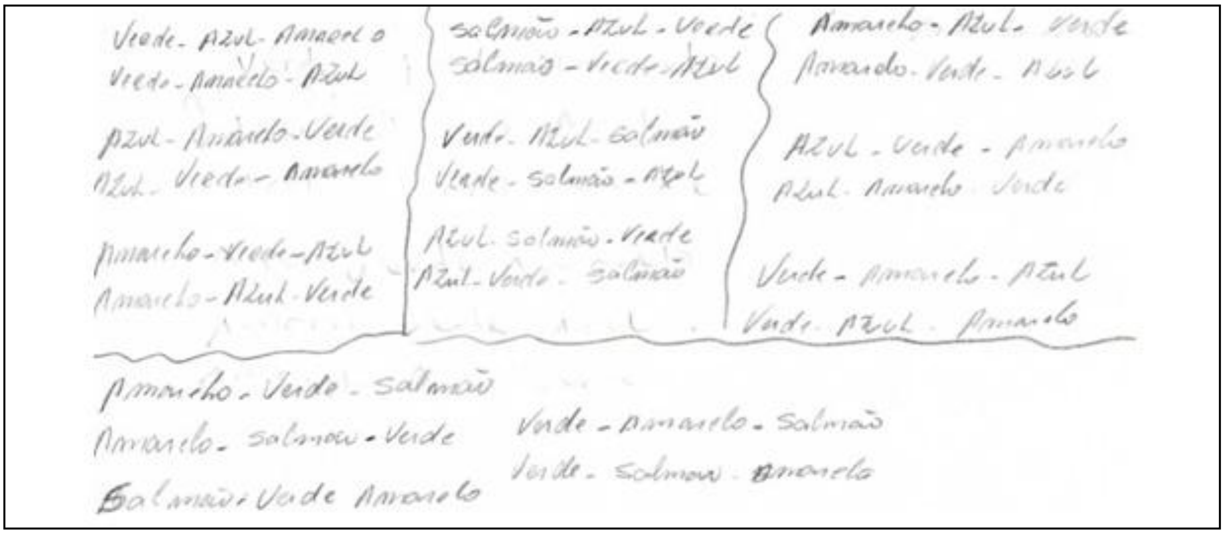


Figura 63 – Resolução da atividade 1, item a, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla André e Hugo.

Com essa sistematização, a dupla compôs os blocos segundo os trios possíveis de serem formados: azul, verde e amarelo; azul, verde e salmão; azul, amarelo e salmão e amarelo, verde e salmão. Descrevendo em seguida todas as permutações que poderiam ocorrer em cada trio, esgotando, portanto todas as possibilidades em cada trio. Notamos que em cada bloco as sequências estão agrupadas em duplas em que sempre uma cor está fixa e as outras duas estão variando de posição. Além disso, ao iniciar uma nova “dupla” de sequências os alunos trocam a cor inicial e realizam o mesmo processo. Percebemos ainda que, de um bloco de sequências para outro, uma cor é trocada e as demais são mantidas e que o processo de permutação entre as novas cores é novamente realizado.

Desta forma, a dupla conseguiu enumerar as 24 sequências possíveis de serem formadas com três cores, em um conjunto com quatro cores disponíveis.

A dupla Daiana e Carlos também realizou a atividade por meio da enumeração das sequências possíveis. Para tanto utilizou como recurso de sistematização a árvore de possibilidades, conforme vemos na Figura 64.

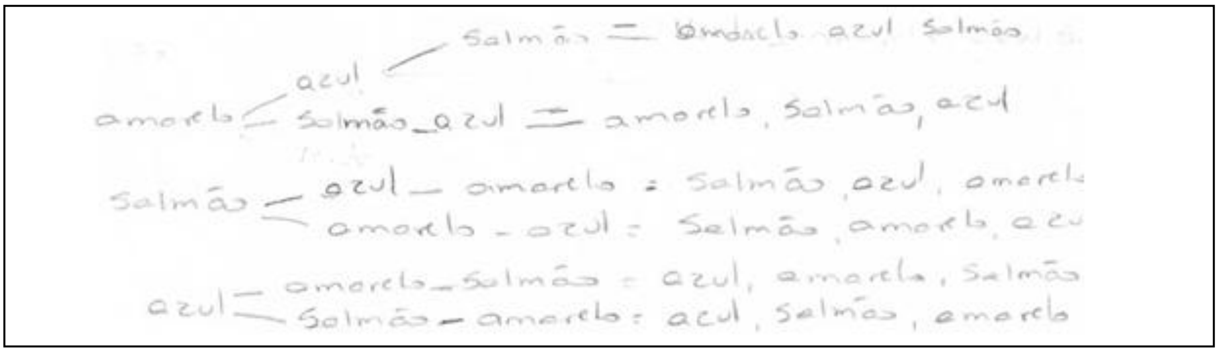


Figura 64 – Resolução da atividade 1, item a, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Daiana e Carlos.

Observamos que a dupla realizou a montagem da árvore com apenas três cores pré-determinadas, dentre as quatro cores disponíveis. Com isso, ao invés de encontrar as 24 sequências possíveis, a dupla determinou apenas seis. Como não foi realizada uma discussão após a realização dessas atividades, não é possível saber se os alunos consideraram apenas três cores por desatenção ou por realmente pensarem que só as três cores que seriam utilizadas na sequência deveriam ser consideradas. Porém, mesmo com apenas três cores, a dupla conseguiu estabelecer e sistematizar as variações possíveis entre elas.

A mesma resolução foi apresentada pelo aluno Ivo, porém ele utilizou a multiplicação na sua resolução e não a árvore de possibilidades (Figura 65).

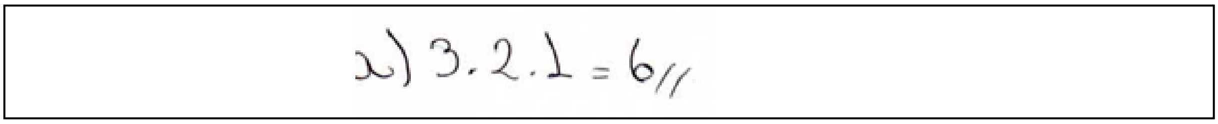


Figura 65 – Resolução da atividade 1, item a, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pelo aluno Ivo.

Já a dupla Beatriz e Eva também utilizou uma listagem das sequências possíveis apresentadas em colunas e organizadas em blocos (Figura 66).

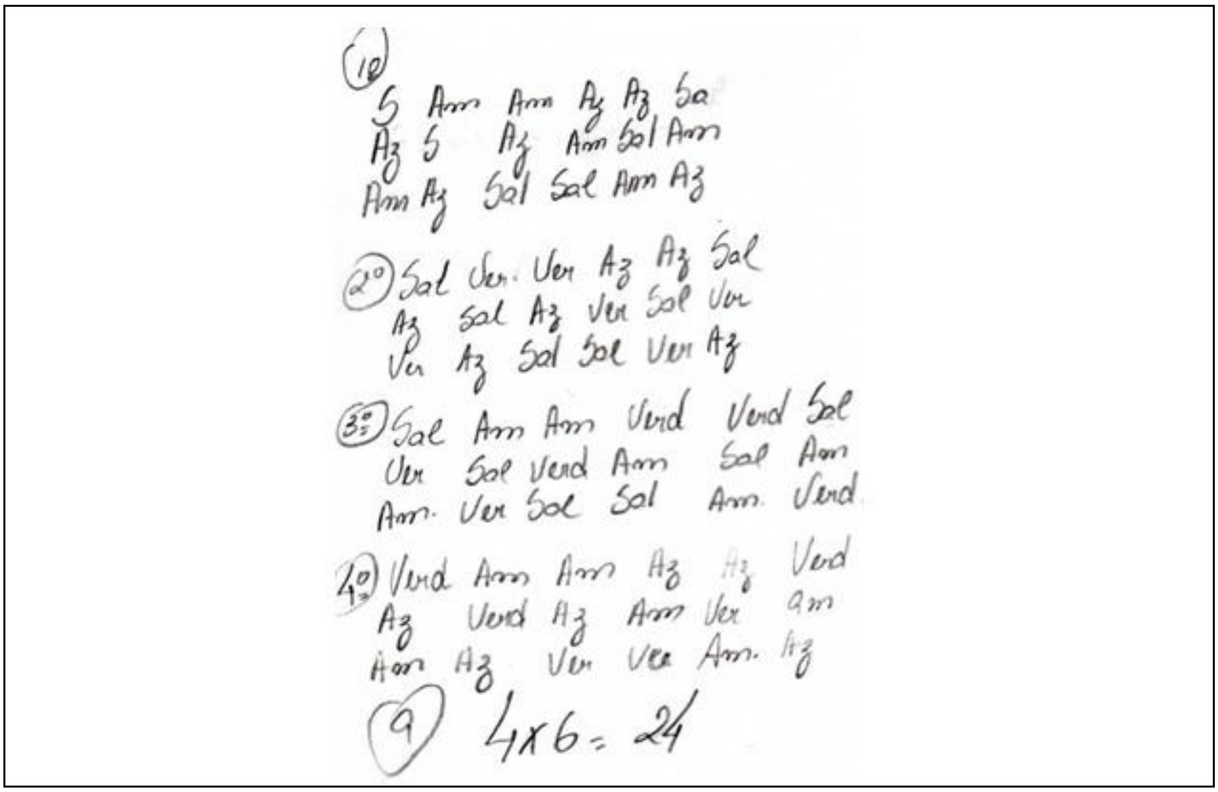


Figura 66 – Resolução da atividade 1, item a, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pela dupla Beatriz e Eva.

Podemos notar que as sequências foram sendo montadas na orientação vertical. Curiosamente, em todos os blocos, da primeira para a segunda sequência nenhuma cor é mantida na posição, porém, da segunda em diante, sempre ocorre de uma cor permanecer na mesma posição da sequência, com exceção da penúltima para a última coluna, em que novamente nenhuma cor é mantida na posição da sequência anterior. Mas, quando comparamos a última coluna com a primeira, percebemos que entre elas há uma cor fixa e duas variando.

Para determinar as 24 sequências possíveis, a dupla contabilizou a quantidade de sequências em cada bloco, multiplicando esse valor por quatro, posto que são quatro blocos.

A alternativa (b) do problema proposto também consiste na formação de sequência com três cores, porém, agora as cores podem ser repetidas. Assim, para a escolha da primeira cor, há quatro possibilidades; assim como para a escolha da segunda e da terceira cor. Ou seja, pelo princípio multiplicativo, temos $4 \times 4 \times 4 = 64$ sequências.

Para resolução dessa alternativa, todos os alunos utilizaram o princípio multiplicativo, conforme destacamos na Figura 67.

$4 \times 4 \times 4 = 64$	b) $4 \times 4 \times 4 = 64$	b) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Figura 67 – Resolução da atividade 1, item b, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pelas duplas André e Hugo, Beatriz e Eva e Daiana e Carlos, respectivamente.

Porém, não sabemos se o fizeram porque compreenderam o princípio ou se tentaram utilizar uma fórmula que consideram que vale sempre. É possível considerar que a multiplicação foi utilizada para tentar facilitar a resolução do problema, pois na situação de agora, como as cores podem se repetir, a quantidade de sequências a serem formadas é maior do que na alternativa anterior. Podemos supor que os alunos, percebendo isso, não tentaram realizar a enumeração dos agrupamentos, já utilizando o princípio multiplicativo.

Essa postura ficou clara para nós nas demais atividades propostas, pois ambas envolviam valores numéricos altos e os alunos apresentaram basicamente como recurso de resolução o princípio multiplicativo, expresso através de uma operação de multiplicação. O que de certo modo limitou as análises que poderiam ser realizadas a partir das resoluções. Especialmente, tendo em vista que as resoluções dessas questões não foram discutidas no grande grupo, de modo que os alunos pudessem justificar as multiplicações utilizadas.

O aluno Ivo também utilizou o princípio multiplicativo na resolução, mas, como sua resolução na alternativa (a) considerou três cores pré-determinadas e ele resolveu a atividade a partir delas, encontrou um valor menor do que o total de sequências esperado (Figura 68).

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Figura 68 – Resolução da atividade 1, item b, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pelo aluno Ivo.

Como já mencionamos, a segunda e a terceira questão abordam situações em que o total de possibilidades são valores muito altos, o que levou os alunos a utilizarem o princípio multiplicativo como recurso de resolução.

Percebemos, ao analisar as resoluções, que esse tipo de resposta em que não aparece a enumeração total ou parcial dos agrupamentos desfavorece a análise das resoluções e o nosso entendimento do que o aluno está estruturando enquanto resposta, pois não fica claro como ele realmente compreendeu a situação descrita ou se está fazendo uso de um recurso (ou fórmula) que acredita que funciona sempre.

A segunda questão abordou a formação de números de telefones com oito dígitos, sendo o primeiro diferente de zero, conforme vemos no Quadro 20.

Questão 2 Você sabe como são gerados os números de telefone? Os números de telefone são divididos em prefixo e número do assinante, o prefixo é o número que identifica de onde é o telefone (4 primeiros algarismos) e o número do assinante é o código de identificação do cliente (4 últimos algarismos). Quantos números de telefones de 8 dígitos podemos criar, sabendo que o primeiro não pode ser zero?

Quadro 20 – Atividade 2 do terceiro conjunto de atividades.

Como já mencionamos, todos os alunos resolveram a atividade por meio do princípio multiplicativo. Reunimos as resoluções na Figura 69.

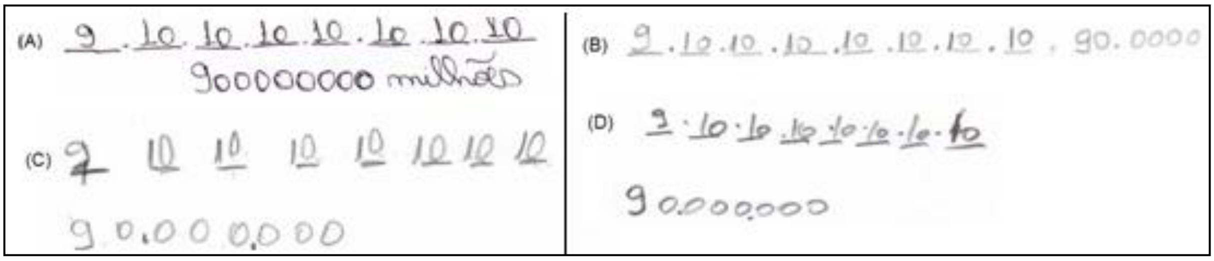


Figura 69 – Resolução da atividade 2, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pelo aluno Ivo (A) e pelas duplas Carlos e Daiana (B), André e Hugo (C) e Beatriz e Eva (D).

Observamos que, com exceção do resultado final, em que alguns alunos se confundiram ao realizar o cálculo, todos apresentaram o mesmo recurso na resolução.

O mesmo ocorreu na terceira questão, que abordava a formação de senhas com seis algarismos e alguns requisitos pré-determinados (alternativas, a, b e c), como indicado no Quadro 21.

Questão 3
Para maior segurança a maioria dos bancos adota um sistema de senhas que consiste na utilização de algarismos e letras. Suponhamos que um determinado banco adote um sistema de senhas composto de 6 algarismos e 3 letras de nosso alfabeto, nessa ordem.
Nessas condições, responda:
a) Quantas são as possibilidades de senhas compostas de 6 algarismos quaisquer e 3 letras quaisquer?
b) Quantas são as possibilidades de senhas composta por 6 algarismos e 3 letras quaisquer, mas que não iniciem por zero?
c) Quantas são as possibilidades se todos os algarismos forem distintos e todas as letras forem distintas?

Quadro 21 – Atividade 3 do terceiro conjunto de atividades.

Com exceção de algumas notações diferenciadas, novamente, todas as duplas resolveram a alternativa (a) de maneiras praticamente iguais (Figura 70)

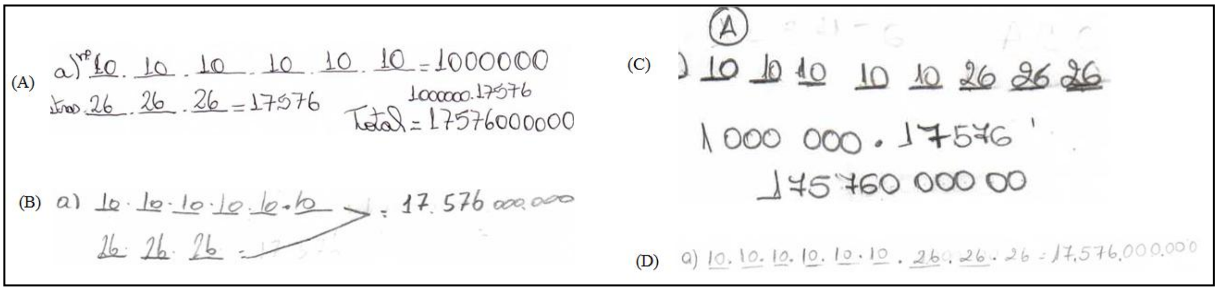


Figura 70 – Resolução da atividade 3, item a, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pelo aluno Ivo (A) e pelas duplas Carlos e Daiana (B), Beatriz e Eva (C) e André e Hugo (D).

O mesmo ocorreu na alternativa (b), em que a condição para a formação das senhas era o primeiro algarismo não ser zero. Como as soluções foram as mesmas, destacaremos, como exemplo, a resolução do aluno Ivo (Figura 71).

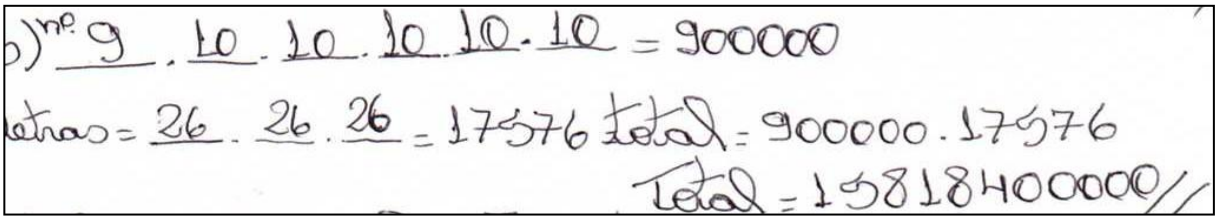


Figura 71 – Resolução da atividade 3, item b, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pelo aluno Ivo.

Já a alternativa (c) estabelecia como condição que tanto as letras quanto os algarismos deveriam ser todos distintos. Mais uma vez a resolução apresentada por todos os alunos foi a mesma, então, para exemplificar, apresentaremos a resolução do aluno Ivo (Figura 72).

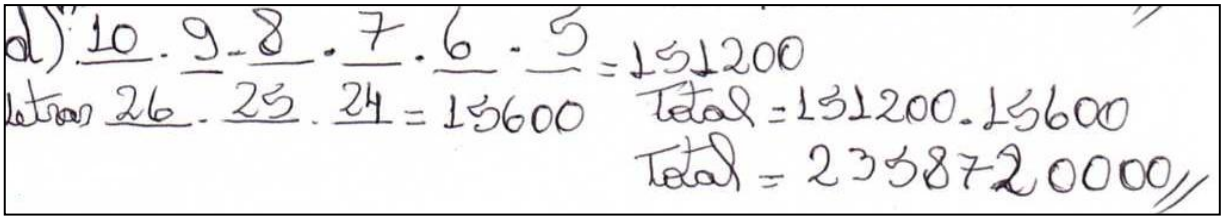

d) 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 = 151200
Letras 26 . 25 . 24 = 15600 Total = 151200 . 15600
Total = 2358720000

Figura 72 – Resolução da atividade 3, item c, do terceiro conjunto de atividades, apresentada pelo aluno Ivo.

Pelas resoluções apresentadas, percebemos que esse tipo de problema, mesmo fazendo parte da realidade do aluno, não é vivenciado em seu cotidiano. Ou seja, quando alguém escolhe uma senha não está preocupado com o total possível de senhas. Contudo, conforme ressalta Gómez-Granell (1997), os conhecimentos de ordem multiplicativa dificilmente se construirão fora do ambiente escolar. Sendo assim, é preciso que algumas situações sejam apresentadas dentro do ambiente escolar, para que os alunos se deparem com elas, pois possivelmente, em seu cotidiano não vivenciarão situações que os levem à construção de determinados conhecimentos mais complexos, como é o caso do raciocínio combinatório envolvendo várias etapas ou escolhas.

Como já destacamos, para esse último conjunto de atividades não houve uma aula posterior destinada às discussões das resoluções apresentadas. Assim, as análises que apresentamos do terceiro conjunto de atividades foram baseadas em nossas interpretações a partir das resoluções escritas.

6.5 Considerações sobre as análises realizadas

Após a análise dos dados coletados, por intermédio de diversos instrumentos, podemos fazer algumas considerações. Essas serão orientadas conforme as questões secundárias de nossa pesquisa:

- Quais estratégias de resolução são apresentadas pelos alunos da EJA, a partir de suas experiências e conhecimentos prévios?
- Os problemas propostos propiciam a construção de diferentes estratégias de resolução?
- É possível, por meio dos problemas propostos, propiciar a compreensão do princípio multiplicativo?

Partindo das resoluções das primeiras atividades, foi possível identificar as diferentes estratégias de resolução, construídas a partir de experiências e conhecimentos prévios, apresentados pelo grupo de alunos do PROEJA participantes da pesquisa. Nessa primeira etapa, observamos que uma das duplas, desde o início, demonstrou familiaridade com os problemas que exigiam o raciocínio combinatório, em especial naqueles que envolviam produto cartesiano de dois conjuntos e permutações, apresentando, mesmo antes da formalização do princípio multiplicativo, a multiplicação como estratégia de resolução, evitando a enumeração de todas as possibilidades.

Uma segunda dupla, desde suas primeiras resoluções utilizou algum critério de organização sistemática, utilizando como estratégia de resolução a enumeração de todas as possibilidades.

Já outra dupla também apresentou em suas primeiras resoluções, o recurso da enumeração das possibilidades que poderiam ser formadas, porém, em situações que envolviam mais elementos, não conseguiu criar um mecanismo de organização que garantisse a obtenção de todas as possibilidades.

A quarta dupla demonstrou muita dificuldade nas primeiras atividades. Essas dificuldades se apresentaram desde a leitura dos problemas e sua interpretação para a resolução. As alunas demonstraram organizar seu pensamento somente a partir do real e não das possibilidades a serem imaginadas, dependiam constantemente do concreto. Realizavam combinações aleatórias e não sistemáticas e organizavam suas soluções através de esquemas aditivos.

Outro aspecto considerado foi se os problemas propostos propiciaram a construção de diferentes estratégias de resolução. Aqui, constatamos que os problemas envolvendo produto cartesiano que envolviam a formação de pares ordenados com dois elementos de naturezas distintas, foram os que proporcionaram estratégias de resolução mais variadas. Nesse tipo de problema, os alunos foram capazes de identificar as diferentes etapas e escolhas a serem feitas, construir e apresentar diferentes justificativas. Em contrapartida, os problemas que abordaram produto cartesiano com variáveis de mesma natureza ou com mais de duas etapas de escolhas, requereram dos alunos a reformulação de seus esquemas, para distinguir as escolhas a serem feitas, lidar com mais escolhas, ou para diferenciar o número de escolhas do número de possibilidades.

Essa diferenciação pode ser notada, por exemplo, nas resoluções dos problemas 1 e 3 da primeira sequência de atividades. As duas envolviam valores numéricos baixos, porém, enquanto na primeira, que supunha a escolha de um aparelho de celular e de um plano de tarifa (variáveis de natureza distintas), os alunos construíram diferentes estratégias de resolução e de representação. Na segunda, que consistia na escolha de duas estradas (variáveis de mesma natureza), em duas etapas distintas, apareceram dificuldades de entendimento da situação e de identificação das etapas de escolha. A mesma dificuldade de distinção das etapas apareceu no problema da escolha dos dias dos meses, em que duas duplas pensaram, inicialmente, nos pares de dias como resultantes de uma única escolha.

Nas situações que envolviam a ordenação de todos os elementos de um conjunto com poucos elementos (permutações simples) os alunos também conseguiram construir diferentes estratégias de resolução, de modo a compreender ou expressando já a compreensão da multiplicação envolvida no processo. Isso foi observado tanto nos primeiros problemas do segundo e terceiro conjuntos de atividades quanto na análise dos cartões do jogo senha. Nesse caso, observamos que quando as cores eram distintas (permutação), todos os desafiados conseguiram encontrar as senhas dos desafiantes, o mesmo não ocorrendo quando as cores poderiam ser repetidas.

Entretanto, os problemas que abordavam as ordenações possíveis que podem ser formadas com certo número de elementos de um conjunto (arranjos simples) mostraram-se menos familiares aos alunos. Nesse tipo de problema, houve confusão por parte de algumas duplas entre o número de escolhas e o número de opções disponíveis em cada escolha. Nesse tipo de situação houve a necessidade de reformulação dos esquemas, de modo a diferenciar as escolhas a serem feitas, e o número de etapas de escolha, das opções possíveis, ou do número de elementos do conjunto considerado.

Percebemos que os problemas que envolviam valores numéricos muito altos não possibilitaram aos alunos a listagem de possibilidades por meio de um mecanismo de sistematização. Nesses casos, nem sempre ficou evidente a estratégia de resolução, que não pôde ser tão detalhada quanto a de outras atividades. Foi o que ocorreu nas atividades 2 e 3 da terceira sequência. Entretanto, acreditamos que a abordagem desse tipo de situação, com valores numéricos altos, ajuda a intuir porque uma situação em que pode haver repetição produz um número maior de possibilidades do que outra em que não pode haver, abrindo caminho para a compreensão das probabilidades envolvidas.

Ainda em relação aos problemas propostos analisamos se propiciaram a compreensão do princípio multiplicativo. Nesse ponto, constatamos que a construção do raciocínio combinatório não ocorreu no mesmo patamar e no mesmo ritmo em todos os grupos. Isso se deve não apenas às situações propostas, mas às aprendizagens prévias e a todas as situações com que se haviam defrontado anteriormente. Como aponta Vergnaud (1996):

> O funcionamento cognitivo do sujeito em situação depende do estado dos seus conhecimentos, implícitos ou explícitos. É necessário, pois, conceder uma grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, às suas continuidades, às suas rupturas, às suas passagens obrigatórias, à complexidade relativa das classes de problemas, dos procedimentos, das representações simbólicas, à análise dos principais erros e dos principais fracassos (VERGNAUD, 1996, p. 190).

Ou seja, mesmo nossa proposta sendo desenvolvida junto a um grupo de alunos adultos, em que se espera, segundo a teoria piagetiana, já terem construído estruturas cognitivas necessárias para operar com problemas que exigem o raciocínio combinatório, isso nem sempre ocorreu de maneira similar.

Assim, duas duplas que nas primeiras atividades já utilizavam algum mecanismo de enumeração para listar todas as possibilidades, continuaram usando esse recurso, enumerando algumas possibilidades de modo a identificar as etapas do processo descrito no problemas, porém sem a necessidade de listar todas as possibilidades, e utilizando como resolução final o princípio multiplicativo, demonstrando que compreenderam a multiplicação envolvida no processo.

Outra dupla, nas primeiras atividades, chegou a utilizar em algumas situações a multiplicação. A partir da apresentação da árvore de possibilidades e do princípio multiplicativo, passou a utilizar apenas a multiplicação em suas resoluções. Entretanto, em algumas situações, sua escrita nos levou a pensar que fizeram uso da multiplicação como uma fórmula que vale sempre, sem atentar às especificidades de cada situação, pois em uma delas confundiram a quantidade de escolhas com o número de opções disponíveis em cada escolha.

A quarta dupla, após a formalização do princípio multiplicativo e da árvore de possibilidades, começou a utilizar essa última ferramenta como recurso de resolução de algumas atividades, porém, nas situações com mais de duas etapas, não conseguiu avançar na construção da árvore, acreditamos que essa dupla também avançaria na construção dos conhecimentos combinatórios, embora em um tempo diferente dos demais colegas. Porém, como as alunas faltaram a alguns encontros, não foi possível o desenvolvimento das atividades de forma satisfatória.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho iniciou por inquietudes originadas no ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, em particular na Educação de Jovens e Adultos. Nesse sentido, formulamos a questão norteadora deste trabalho:

Uma estratégia de ensino baseada em situações-problema contribui para a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos da EJA?

Buscando responder esse questionamento, elaboramos e testamos uma proposta didática, tendo por ponto de partida a resolução de problemas, com o objetivo de propiciar a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos de uma turma de PROEJA do IF Farroupilha – Campus Alegrete.

Para o desenvolvimento de nossa proposta buscamos aporte na teoria cognitivista de Jean Piaget, com especial atenção em relação ao desenvolvimento do pensamento formal, e na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, destacando o campo das estruturas multiplicativas. Essa escolha foi realizada em virtude do objeto matemático escolhido como campo de nossa pesquisa: a Análise Combinatória. Essa foi apresentada sob três perspectivas principais: como é desenvolvida na escola, enquanto conteúdo disciplinar; as orientações dos documentos oficiais em relação ao seu ensino e aprendizagem; e como vem sendo encarada enquanto foco de pesquisa da educação matemática.

Nossa pesquisa foi desenvolvida sob a ótica de um estudo de caso, o que nos permitiu analisar os dados de forma descritiva, com riqueza de detalhes e nos possibilitou analisar como os alunos lidavam com as atividades propostas e porque apresentaram determinadas resoluções.

Ao final da pesquisa, constatamos que nossa pesquisa tem potencial para contribuir para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória na EJA. Entretanto, como em todo trabalho que envolve prática em sala de aula, algumas dificuldades podem ser apontadas. As formulações (enunciados) de alguns problemas não ficaram claros ao entendimento dos alunos, mesmo fazendo referência a situações da vida real. Acreditamos que parte dessas dificuldades se devem ao fato de que o cálculo do número de escolhas ou de possibilidades em determinadas situações não é vivenciado no cotidiano daquele grupo de estudantes. Entretanto, é importante ressaltar que é papel da escola abordar determinadas situações que o aluno não venha a vivenciar diariamente, de modo a proporcionar o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos mais complexos.

Outro aspecto observado foi que o tempo destinado à realização da pesquisa de campo não foi suficiente para abordar todos os tipos de problemas de Análise Combinatória que inicialmente planejamos abordar. Foi necessário retirarmos os problemas envolvendo combinações. Desse modo, em futuras pesquisas sobre esse tema na EJA, aconselhamos que o tempo destinado para o desenvolvimento desse tópico seja maior.

Acreditamos que nossa proposta contribui para a discussão sobre o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória na Educação de Jovens e Adultos e pode servir como subsídio para estudos futuros, bem como sugestão para a prática diária de outros professores. Apresentamos, no Apêndice, uma proposta de sequência de ensino, reformulada a partir de nossa experiência.

Em relação, ao aprendizado, enquanto professora-pesquisadora, o trabalho serviu como um espaço para repensar minha prática docente e como as aulas de matemática podem ser mais interativas. A importância do aluno assumir seu papel principal como construtor de seu conhecimento, enquanto o professor passa a ser um mediador do processo.

Diante do exposto, encontramos subsídios que nos permitem responder de forma positiva nossa questão norteadora. Observamos que a metodologia baseada na resolução de problemas, sem abordagem prévia do conteúdo, proporcionou aos alunos a mobilização e reformulação de diferentes esquemas e teoremas-em-ação, o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a aprendizagem de conteúdos da Análise Combinatória.

Finalmente, sabemos que nosso trabalho é uma pequena contribuição para a reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória no PROEJA. Acreditamos que mais pesquisas nesse campo possam trazer novas contribuições, reafirmando alguns resultados por nós alcançados, mas consolidando outros elementos com os quais não trabalhamos, podendo dessa forma trazer novos resultados que contribuam para a consolidação do ensino de matemática voltado para jovens e adultos do PROEJA.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. L. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo com o 2º ano do ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UFOP, Ouro Preto, 2010.

ANDRADE, L. O. M. **O ensino de matemática no PROEJA: limites e possibilidades.** Dissertação (Mestrado em Ciências). Programa de Pós-Graduação em Educação Agrícola. UFRRJ Seropédica, 2010.

BORBA, R.; ROCHA, C.; MARTINS, G.; LIMA, R. C. O que dizem os estudos recentes sobre o raciocínio combinatório? In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X. **Anais...** Unijuí, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases para o ensino de 1º e 2º graus.** (Lei nº 5692/71). Brasília, 1971.

______. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** (Lei nº 9394/96). Brasília, 1996.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Parte III. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, Brasília, 2000a.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CEB n°. 11/2000.** Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos. Diário Oficial da União. Brasília, maio de 2000b.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec).**PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, 2002a.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos: segundo segmento do Ensino Fundamental – 5ª a 8ª série: introdução. Volume 1.** Brasília: MEC, 2002b.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos: segundo segmento do Ensino Fundamental – 5ª a 8ª série: Matemática, Ciências, Arte e Educação Física.** Volume 3. Brasília: MEC, 2002c.

______. Ministério da Educação. **Decreto nº 5.478**, de 24 de junho de 2005.

______. Ministério da Educação. **Decreto nº 5.840**, de 13 de julho de 2006a.

______. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica (SEB). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Volume 2. Brasília: MEC/SEB, 2006b.

______. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica: **Programa de Integração da Educação Profissional Técnica de Nível Médio na Modalidade de Jovens e Adultos: PROEJA.** Documento Base. Brasília: MEC, 2006c.

______. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica: **Programa de Integração de Formação Inicial e Continuada de Nível Fundamental na Modalidade de Jovens e Adultos: PROEJA FIC.** Documento Base. Brasília: MEC, 2007.

______. Ministério da Educação. **Lei nº 11.892**. Cria a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, de 29 de dezembro de 2008.

CARVALHO, G. Q. **O uso de jogos na resolução de problemas de contagem: um estudo de caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, 2009.

CONSELHO DIRETOR DA EAFA/RS. Aprova o **Plano do Curso de Educação de Jovens e Adultos de nível médio integrado à Educação Profissional** (PROEJA) – Técnico Agrícola – Habilitação Agroindústria. Resolução do Conselho Diretor nº 017/2006 de 04 de março de 2006a.

CONSELHO DIRETOR DA EAFA/RS. Aprova o **Plano do Curso de Educação de Jovens e Adultos de nível médio integrado à Educação Profissional** (PROEJA) – Técnico Informática – Habilitação Hardware e Redes. Resolução do Conselho Diretor nº 018/2006 de 04 de março de 2006b.

COSTA, C. A. da. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2003.

DASSIE, B. A. **Euclides Roxo e a constituição da Educação Matemática no Brasil**. Tese (Doutorado em Educação) Programa de Pós-Graduação em Educação, PUC, Rio de Janeiro, 2008.

DUARTE, N. **O ensino de matemática na educação de adultos.** São Paulo, Cortez, 2006.

DURO, M. L. **Análise combinatória e construção de possibilidades:** o raciocínio formal no ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, UFRGS, Porto Alegre, 2012.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2001.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, UNICAMP, 2004.

FANTINATO, M. C. C.B. A construção de saberes matemáticos entre jovens e adultos do Morro de São Carlos. **Revista Brasileira de Educação,** n **.** 27, p. 109-124, Dez, 2004.

FLAVELL, J. H. **As operações Formais e a Percepção**. In _____: A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget. São Paulo: Pioneira, 1996. Cap. 6. p. 207-240.

FONSECA, M. C. F. R. **Educação Matemática de Jovens e Adultos.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais**.** In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008.

GÓMEZ-GRANELL, C. Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática.I n: RODRIGO, M. J.; ARNAY, J. (Orgs.). **Conhecimento cotidiano, escolar e científico:** representação e mudança. São Paulo: Ática, 1997. p. 15 – 41.

HADDAD, S.; DI PIERRO, M, C. Escolarização de Jovens e Adultos. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, n. 14, p. 108-130. mai-ago, 2000.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. 8ª série. São Paulo: Ática, 2005.

INHELDER, B.; PIAGET, J. Combinações de Corpos Químicos Coloridos e Incolores. In: ______. **Da lógica da criança à lógica do adolescente:** ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais. São Paulo: Pioneira, 1976. p. 81 – 91.

LIMA, R. C. G. **O raciocínio combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adultos: do início da escolarização até o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2010.

MONTEIRO, E. F. C. **Práticas Avaliativas em Matemática na Educação de Jovens e Adultos: estudo de caso de uma escola da Rede Municipal de Belo**

Horizonte. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UFOP, Ouro Preto, 2010.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, UFRGS, p. 7-29, 2002.

MORGADO, A. C. *et alii.* **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar:** combinatória. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OLIVEIRA, M. K. Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**, nº 12, p. 59-73. 1999.

PAPY, G. **Matemática Moderna**. Aritmética. Buenos Aires: Editora Universitária de Buenos Aires, 1972.

PEDROSA FILHO, C. **Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7 – 8 anos).** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2008.

PESSOA, C. A. S. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º Ano do Ensino Médio. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, UFPE, Recife, PE, 2009.

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia.** Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1999.

PINHEIRO, C. A. de M. **O ensino de análise combinatória a partir de situações-problemas.** Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, UFPA, Belém, 2008.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática**. Bolema**, nº 25, p. 105-132, 2006.

PORCARO, R. C. **A História da Educação de Jovens e Adultos no Brasil**. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 2004.

RIBEIRO, E. S. **Concepções de professores em avaliação, Educação Matemática e Educação de Jovens e Adultos: buscando interfaces.** Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. UFMT, Cuiabá, 2007.

ROCHA, J. C. **O ensino da análise combinatória: uma discussão sobre o uso do princípio multiplicativo na resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado em

Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, 2002.

SABO, R. D. **Saberes Docentes: a análise combinatória no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2010.

SANTOS, J. P.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise combinatória**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

SCHLIEMANN, A. D. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1993.

SOARES. L. J. G. **Educação de Jovens e Adultos.** Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa.** 1999. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, 1999.

VAZQUES, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII. **Anais..**. Recife, 2004.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press Inc; 1983. p 127-174.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. In: **Análise Psicológica**, p. 75-90, 1986

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In NASSER, L. (Ed.) SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1º **Anais...** Rio de janeiro: 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany: State University of New York Press, 1994. p 41-59.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos conceituais. In: BRUN, J. (Ed). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155-191.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. (Orgs.) **A aprendizagem Matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: CRV, 2009. p. 13-35.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática,** n. 11, p. 79-97, sept. 2007.

APÊNDICES

Apêndice 1 – Sequência de atividades

Apresentaremos nossa sequência de ensino reformulada a partir dos aspectos observados durante a realização de nossa pesquisa. Alguns problemas foram mantidos no formato original, outros reformulados a partir da análise que realizamos e outros foram acrescentados.

Para facilitar a utilização do material por outros professores, separamos nossa sequência reformulada em três partes:

1) atividades abordando produto cartesiano, que servirão como base e como motivação para a formalização da árvore de possibilidade e o princípio multiplicativo;

2) atividades sobre permutações e arranjos, que propiciarão a verificação de situações em que as ordenações são realizadas com todos os elementos de um conjunto (permutações) e de situações em que nem todos os elementos são utilizados (arranjos);

3) atividades abordando combinações, que em nossa pesquisa não foram análises implementadas e analisadas, mas que no nosso entendimento devem ser abordadas na Educação de Jovens e Adultos, como os demais problemas de contagem usualmente trabalhados na escola.

Antes de cada conjunto de atividades, apresentamos algumas observações que consideramos pertinentes para orientar a aplicação das atividades em sala de aula.

Não trazemos o Jogo Senha nesta seção, mas sugerimos sua utilização no início do desenvolvimento do tópico Análise Combinatória, como instrumento motivador para o estudo do tópico a ser estudado, podendo se fazer variações em relação à quantidade de cores a serem utilizadas. O jogo pode ainda ser utilizado no final do estudo do tópico como fechamento de tudo o que for abordado, como um exemplo de situação em que o raciocínio combinatório é necessário.

Todavia, as atividades aqui indicamos não são imutáveis, mas são sugestões apresentadas que outros professores que venham a desenvolver esse tópico na Educação de Jovens e Adultos tenham um material de apoio.

Primeiro Conjunto de Atividades – Princípio Multiplicativo

Orientações para a aplicação do primeiro conjunto de atividades

As atividades propostas no primeiro conjunto de atividades têm por objetivo a introdução e a familiarização dos alunos com situações que tratam do raciocínio combinatório. Para tanto, sugerimos iniciar com situações que envolvam poucos elementos, sendo que a quantidade de elementos deve ir aumentando gradativamente, de modo que o aluno sinta a necessidade de organizar sua contagem, por meio de algum mecanismo de sistematização.

Assim, sugerimos que o professor, num primeiro momento, indique aos alunos a resolução das atividades 1, 2, 3 e 4, sem que a árvore de possibilidades e o princípio multiplicativo tenham sido apresentados. Essa dinâmica favorecerá que os alunos representem a organização dos agrupamentos de maneira pessoal.

A partir disso, é interessante que as diferentes resoluções sejam apresentadas e discutidas no grande grupo de modo que os alunos possam defender as ideias usadas em suas resoluções e compará-las com outras apresentadas. Ao final dessa discussão, o professor poderá introduzir a árvore de possibilidade como mecanismo de organização a ser utilizado na resolução dos problemas propostos.

No segundo momento, os alunos devem resolver as atividades 5 e 6, em que o número de elementos é maior, logo o total de possibilidades também será, tornando inviável a contagem um a um de todos os agrupamentos formados. Novamente deve ser feita uma discussão a partir das resoluções apresentadas, de modo que os alunos compreendam e explicitem a multiplicação envolvida nas diferentes situações, sendo que, ao final, o professor deverá formalizar o princípio multiplicativo.

Atividade 1

Marcus irá fazer um saque de R$ 100,00 em um caixa eletrônico de seu banco. Chegando ao caixa ,ele percebe que o caixa oferece cédulas de R$ 50,00, R$ 20,00 e R$ 10,00. Quantas possibilidades diferentes Marcus tem de receber a quantia que irá sacar?

Atividade 2

Vanessa irá comprar um telefone celular novo. Ela vai a uma loja fazer uma pesquisa de preço e a loja lhe oferece 5 modelos diferentes com duas opções de planos de tarifas (pré-pago e pós-pago). Quantas possibilidades diferentes Vanessa tem para comprar um telefone nessa loja?

Atividade 3

No estacionamento de um grande shopping há quatro portões de entrada e dois portões de saída. De quantos modos um carro pode entrar e sair do estacionamento, se irá utilizar um dos portões de entrada e um de saída?

Atividade 4

Ana está montando um cantinho de estudos. Para tanto, irá comprar uma mesa, uma cadeira e uma estante para livros. Se uma loja oferece 3 modelos de mesas, 4 modelos de cadeiras e 2 modelos de estantes, de preços similares, de quantos modos Ana poderá montar seu cantinho de estudos com mesa, uma cadeira e uma estante?

Atividade 5

(Bill Watterson. O Estado de S. Paulo, 20/11/199.)

Considerando todos os dias do mês de março e de novembro, de quantos modos Calvin pode escolher os dois dias do ano, um em novembro e um em março? (Adaptado de Iezzi, Dolce e Machado, 2005, p. 187).

Atividade 6

Marcela irá fazer a assinatura de três revistas: uma sobre moda, outra sobre artesanato e outra sobre novelas. Ela está em dúvida entre 5 revistas de moda, 3 sobre artesanato e 2 sobre novelas. De quantos modos Marcela poderá escolher as três assinaturas, sendo uma sobre moda, outra sobre artesanato e outra sobre novelas?

Segundo Conjunto de Atividades – Permutações/Arranjos

Sugestões para a aplicação do segundo conjunto de atividades

No segundo conjunto de atividades sugerimos problemas envolvendo permutações e arranjos, com o objetivo de que o aluno se familiarize com esse tipo de problema e saiba diferenciá-los, especialmente no que se refere ao número de escolhas e às etapas de escolha.

Sugerimos que o professor proponha inicialmente as atividades 1, 2, 3 e 4. Após a resolução, as atividades devem ser discutidas em todo o grupo, segundo a mesma dinâmica sugerida no primeiro conjunto. Após as discussões sugerimos ao professor a retomada da árvore de possibilidades e do princípio multiplicativo, demonstrando que esse último é uma importante ferramenta a ser utilizada na resolução dos problemas propostos.

Após, os alunos deverão resolver as atividade 5, 6, 7 e 8. É interessante o professor comparar as resoluções das quatro primeiras atividades e aquelas realizadas após a retomada do princípio multiplicativo.

Atividade 1

Três amigos, Paulo, Roberto e Sandro, se reuniram para tomar chimarrão na praça da cidade. De quantos modos os três podem sentar-se em um banco da praça?

Atividade 2

Você sabe o que são ANAGRAMAS? Chamamos de anagramas toda palavra que pode ser escrita a partir de outra palavra, utilizando as mesmas letras. Um anagrama pode ou não ter sentido. Por exemplo, considerando a palavra PROEJA, um anagrama que pode ser formado é ROPEJA.

Agora é sua vez. Descubra quantos anagramas podemos formar a partir da palavra PROEJA.

Atividade 3

Em nossa instituição é costume as turmas escolherem dois alunos para representá-los: o líder e o vice-líder. Em uma turma de 15 alunos, de quantas maneiras distintas os dois representantes, sendo um o líder e o outro o vice-líder, podem ser escolhidos?

Atividade 4

Dez amigos estão organizando um passeio pela Serra Gaúcha. Eles irão visitar as cidades de Caxias do Sul, Canela, Gramado, Bento Gonçalves e Nova Petrópolis. O grupo está montando seu roteiro de viagem decidindo a ordem em que irão visitar as cidades. Quantas são as possibilidades de roteiro que o grupo pode formar?

Atividade 5

Os amigos da atividade anterior, para economizar, em uma das cidades irão se hospedar em um albergue, onde os quartos são coletivos, dispondo de 15 camas cada um. Se eles ficarem em um desses quartos, de quantas maneiras poderão se organizar de modo que cada um ocupe uma dentre as 15 camas?

Atividade 6

Você sabe como são formados os números de telefone?
Os números de telefone são divididos em prefixo e número do assinante, o prefixo é o número que identifica de onde é o telefone (4 primeiros algarismos) e o número do assinante é o código de identificação do cliente (4 últimos algarismos).
Sabendo que em Alegrete, um dos prefixos é 3420, determine quantos números de telefones podem ser formados tendo esse prefixo.

Atividade 7

No último FAC – Festival Alegretense da Canção - , 10 músicas concorreram ao prêmio de Melhor Canção. De quantas maneiras podem ser escolhidos o 1º, 2º e 3º colocados do Prêmio Melhor Canção?

Atividade 8

Atualmente existem senhas para quase tudo. Para não esquecer suas senhas, Roberto resolveu utilizar apenas os algarismos 0, 1, 3, 4, 7 e 9.

a) Quantas senhas podem ser formadas com os seis algarismos, sendo todos distintos?
b) Quantas senhas podem ser formadas com quatro algarismos?
c) Quantas senhas de quatro algarismos distintos podem ser formadas?

Terceiro Conjunto de Atividades - Combinações

Sugestões para a aplicação do terceiro conjunto de atividades

No terceiro conjunto de atividades estão as atividades referentes às combinações, que não pudemos trabalhar em nossa pesquisa. As atividades propostas têm o objetivo de que os alunos percebam as diferenças entre problemas que envolvem arranjos daqueles que envolvem combinações.

Sugerimos que o professor proponha as atividades 1 e 2 para que os alunos as resolvam. Novamente, recomendamos que seja realizada uma discussão a partir das resoluções realizadas. Sugerimos que a primeira atividade seja resolvida por meio de uma dinâmica aproveitando os próprios alunos, ou seja, em que se consideram oito alunos da turma e a partir desses vão se formando os possíveis trios. Com essa dramatização e através da discussão, é importante que os alunos percebam que ao considerarmos a ordem das escolhas, formamos agrupamentos iguais, que diferem entre si apenas pela ordem em que os componentes foram escolhidos; que o número de agrupamentos correspondentes a cada trio é igual ao número de permutações com, no caso, três elementos; e que, portanto, o número de trios pode ser obtido pela divisão do número de arranjos de oito elementos, tomados três a três, pelo número de permutações com três elementos.

Ao final da discussão das duas primeiras atividades; o professor deve formalizar a divisão envolvida no cálculo do número de combinações.

Atividade 1

Um lazer muito praticado na nossa região é o jogo de Truco. Sabemos que ele é jogado por um grupo de seis pessoas, separadas em dois trios que competem seguindo as regras do jogo. De quantas maneiras um trio pode ser formado, a partir de um grupo de 8 pessoas?

Atividade 2

Durante o verão muitos gaúchos procuram o litoral norte para veraneio. Entre as praias mais procuradas estão: Tramandaí, Capão da Canoa, Torres e Cidreira. Quantas são as possibilidades de uma família escolher 2 praias para visitar?

Atividade 3

Uma ONG oferece à comunidade as seguintes atividades culturais: curso de inglês, curso de fotografia, curso de pintura, curso de dança e curso de violão. De quantos modos uma pessoa poderá escolher duas atividades para participar?

Atividade 4

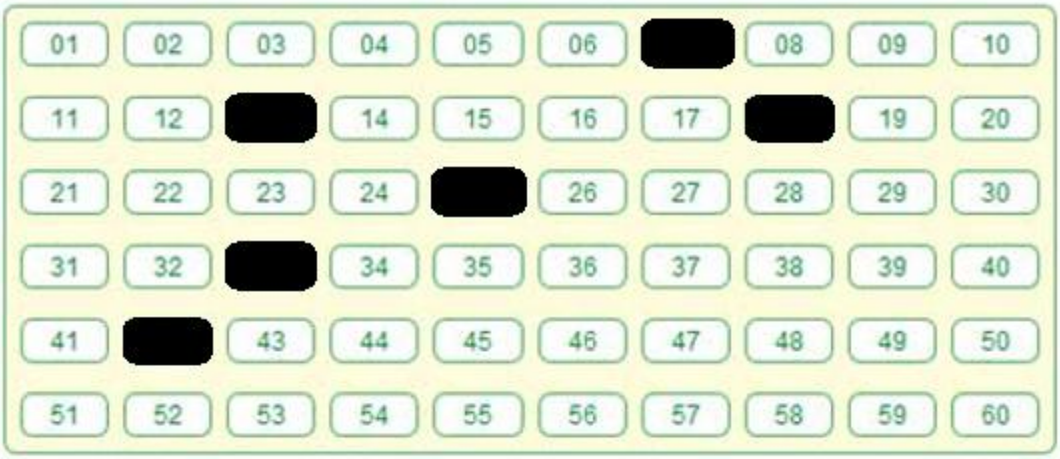
No setor administrativo de uma empresa serão escolhidas duas pessoas de um grupo de 5 – Claudio, Ana, Bianca, Daniel e Evandro –, para realizar uma viagem. De quantas maneiras essa dupla pode ser formada?

Atividade 5

Seis alunos fizeram um trabalho escolar em grupo, sendo que apenas dois deverão apresentar esse trabalho oralmente. De quantos modos esses dois alunos podem ser escolhidos?

Atividade 6

A Mega-Sena além do prêmio máximo, possibilita aos seus apostadores concorreram a prêmios da quina (5 dezenas) e da quadra (4 dezenas). Os valores desses prêmios correspondem a percentuais do valor do prêmio principal.
Consideremos a aposta abaixo:



a) Quantas quinas diferentes o jogador pode formar com esses números?

b) Quantas quadras diferentes ele pode formar com esses números?

Apêndice 2 – Termo de Consentimento Informado

Eu, ____, R.G. _________________, declaro por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA PROPOSTA A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, desenvolvida pela professora Jussara Aparecida da Fonseca. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela Professora Elisabete Búrigo.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa, que visa a melhoria do ensino de matemática na educação básica. Fui informado(a) que os objetivos do estudo são estritamente acadêmicos, sendo também esclarecido que as informações coletadas serão utilizada apenas em situações acadêmicas, ficando preservado o anonimato dos participantes.

A minha colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito, bem como por meio da participação nos encontros em que serei observado(a) e minha produção analisada, sem atribuição de nota ou conceito. No caso de fotos, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora pelo email jussara.mat@gmail.com ou pelo telefone 3421-9600 ou ainda sua orientadora pelo email elisabete.burigo@ufrgs.br .

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Alegrete, __de setembro de 2011.

____

Assinatura do aluno

Jussara Aparecida da Fonseca
Pesquisadora

Elisabete Búrigo
Orientadora da Pesquisa