UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Três métodos para o cálculo da série Zeta$(2n)$ de Riemann

por

Denise Elena Fagan Zanon

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo
Orientador

Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk
Co-orientador

Porto Alegre, Janeiro de 2006.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Zanon, Denise Elena Fagan

Três métodos para o cálculo da série Zeta($2n$) de Riemann / Denise Elena Fagan Zanon.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2006.

51 p.;

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2006.
Orientador: Barrionuevo, José Afonso; Co-orientador: Lukaszczyk, João Paulo

Dissertação: Matemática Aplicada
Somas de Euler, funções geradoras, mudança de variáveis de E. Calabi, operadores compactos

Três métodos para o cálculo da série Zeta$(2n)$ de Riemann

por

Denise Elena Fagan Zanon

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluídos

Orientador: Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo

Co-orientador: Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Vanilde Bisognin
UNIFRA

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
PPGMAT/UFRGS

Prof. Dr. Paulo Ricardo Zíngano
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
9 de Janeiro de 2006.

Prof^a. Maria Cristina Varriale, Dr^a.
Coordenadora

Para meu marido: Rubens,

meus pais: Osvaldo (in memorian) e Claudina , meus irmãos: Denilso,

Edson e Vanise, minhas cunhadas: Denise e Mirtes, meu cunhado: Fabricio,

e meus sobrinhos: Amadeo, Lucas e Vinicius.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois "mais importante que o lugar que ocupas em mim, é a intensidade de sua presença em tudo que faço".

A meus pais que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade, que mesmo distante estiveram sempre comigo, obrigada por tudo.

Ao meu marido Rubens, e aos meus familiares que sempre estiveram comigo, acolheram minhas queixas, meus sofrimentos, meu desânimo ... pelo amor dedicado, pelo conforto nos momentos difíceis, pela presença e sorriso amigo.

Ao professor José Afonso, pelos ensinamentos, orientação e compreensão.

Em especial ao professor João Paulo, que além de um instrutor foi um grande amigo, sempre disposto a auxiliar no que fosse necessário, obrigada pelo seu apoio, compreensão, dedicação, ensinamentos e orientação.

As amigas Jô, Veraci, Marzoé e ao amigo Rubens pelo apoio, carinho, cumplicidade, por todo o incentivo principalmente nos momentos mais difíceis. Valeu a força!

A Sabrina e ao Marnei pela amizade, carinho, incentivo e por toda a ajuda de vocês.

Aos demais amigos e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para esta minha conquista, aqui citados ou não, saibam que serão sempre lembradas com muito carinho.

Muito obrigada a todos!

SUMÁRIO

NOTAÇÃO

$\zeta(n)$ é a série Zeta de Riemann

$L(n)$ é a série L de Dirichlet

Π_n é o politopo em $\mathbb{R}^n$

$Vol(\Pi_n)$ é o volume do politopo Π_n

T^n é a composição do operador T consigo mesmo, n vezes

$L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big) = \Big\{f : \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big) \rightarrow \mathbb{R} : f$ é integrável a Lebesgue e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|^2 dx < \infty\Big\}$

$\langle ., . \rangle$ representa o produto interno em $L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$

$tr(T)$ é o traço do operador T

RESUMO

Neste trabalho apresentamos três métodos distintos provando que $S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4k+1)^{-n}$ é um múltiplo racional de π^n para todos os inteiros $n = 1, 2, 3, \ldots$ O primeiro utiliza a teoria das função analíticas e funções geradoras. No segundo reduzimos o problema, via mudança de variável devida a E. Calabi, ao cálculo do volume de certos politopos em $\mathbb{R}^n$ enquanto que no terceiro usamos a teoria dos operadores integrais compactos. Cada um dos métodos tem um interesse intrínsico e está sujeito a generalizações para aplicações em novas situações.

ABSTRACT

In this work we present three different methods to show that $S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4k+1)^{-n}$ is a rational multiple of π^n for all integers $n = 1, 2, 3, \ldots$. The first uses analytic function theory and generating functions. The second relates the problem, via a change of variables due to E. Calabi, to the volume of a certain polytope in $\mathbb{R}^n$ while the third uses the theory of compact integral operators. Each of these methods has its own interest and is subject to generalizations as well as applications to different situations.

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação é mostrado que a série

$$S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4k+1)^{-n},$$

com $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ é um múltiplo racional de π^n conforme o artigo de Noam D. Elkies [9].

A série acima tem uma relação estreita com a série Zeta de Riemann que é dada por

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n},$$

com $n = 2, 4, 6, \ldots$ e a série L de Dirichlet (definida por Lejeune Dirichlet em 1837), mais especificamente por

$$L(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-n},$$

com $n = 3, 5, 7, \ldots$

Tal relação é dada por (conforme veremos no Capítulo 2):

$$S(n) = \begin{cases} (1 - 2^{-n})\,\zeta(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ L(n) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{1.1}$$

De acordo com Boyer, em 1748, Leonard Euler publicou o tratado *Introductio in Analysin Infinitorum* em dois volumes. O primeiro volume do *Introductio* versa sobre processos infinitos, em particular, apresenta inúmeras séries infinitas.

Um dos notáveis resultados de Euler é a soma dos recíprocos dos quadrados perfeitos

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

A questão sobre a soma desta série começa numa carta de 1673 de Oldenburg a Leibniz indagando sobre a soma dessa série, a qual Leibniz não respondeu. Em 1689 Jacques Bernoulli confessou sua incapacidade de achar a tal soma. No entanto, Euler conseguiu resolver este problema e sua idéia parte da série de Taylor para o seno

$$\mathrm{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

Fazendo uma generalização não rigorosa das propriedades dos zeros de funções polinomiais para os zeros de funções analíticas, Euler pensou em $\mathrm{sen} z = 0$ como uma expansão polinomial infinita, isto é,

$$0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots$$

Substituindo $z^2 = w$ na equação acima temos:

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \ldots$$

Da teoria das equações algebricas sabemos que se o termo constante é 1, a soma dos recíprocos das raízes é o oposto do coeficiente do termo linear, neste caso $\frac{1}{3!}$. Além disto, $\mathrm{sen} z = 0 \Rightarrow z = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$. Logo $w = k^2\pi^2, \;\; k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots,$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Tal resultado parece datar de 1736 e mais tarde ele publicou a soma dos recíprocos de outras potências de inteiros. De acordo com Edwards [8], Euler estabeleceu em [10] a relação

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2 \cdot (2n)!},$$

onde B_n são os números de Bernoulli que são definidos por:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \; z^n.$$

É fácil provar que B_n satisfazem $B_0 = 1$ e que $B_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} B_k$ pois substituindo a série de e^z obtemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\,z^k\right)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{B_l}{l!}\,z^l\right) = z.$$

Entre as relações notáveis da análise e a teoria de números Euler mostrou que a divergência da série harmônica $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ...$ implica o teorema de Euclides sobre a existência de infinitos primos.

Uma conexão profunda entre os números primos e a série Zeta é obtida através da função Zeta definida por:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s},$$

com $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$.

Euler definiu esta função no artigo *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 88-160, no ano de 1737. Entre as notáveis propriedades desta função, Euler provou que

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \frac{1}{1-7^{-s}} \times \ldots,$$

isto é,

$$\zeta(s) = \prod_{p\ primo}\frac{1}{1-p^{-s}}\ .$$

O valor de $\zeta(s)$ para s ímpar é ainda um problema em aberto, por exemplo, somente em 1979 foi provado que $\zeta(3)$ é um número irracional, ref. [1] e [3]. Por outro lado, os valores de $\zeta(s)$ para s par são conhecidos desde os tempos de Euler.

Tal função, $\zeta(s)$ quando definida para $s \in \mathbb{C}$ é conhecida por função Zeta de Riemann em homenagem ao matemático que definiu a função Zeta para os números complexos. Entre alguns problemas estudados por Riemann, destacamos o da hipótese de que todos os zeros da função Zeta na faixa $0 \leq x \leq 1$ estão na linha $x = \dfrac{1}{2}$ o qual, é ainda um problema em aberto.

Atualmente, apesar de a função Zeta ter sido definida originalmente por Euler, ela é conhecida por função Zeta de Riemann.

A dissertação está dividida em quatro capítulos:

No capítulo 2, provamos a relação apresentada em (1.1) entre $S(n)$ e as séries Zeta de Riemann e L de Dirichlet. Em seguida provamos que $S(n)$ é múltiplo de π^n com o auxílio da teoria de funções analíticas.

No capítulo 3, definimos politopos e apresentamos algumas propriedades elementares. Uma mudança de variáveis, atribuída a E. Calabi, reduz o problema original ao cálculo do volume de um politopo em $\mathbb{R}^n$, que mostramos diretamente ser um múltiplo de π^n.

No capítulo 4, associamos o volume do politopo Π_n ao traço das potências T^n de um operador integral T, isto é, mostramos que $S(n) = tr(|T^n|)$ para um T apropriado.

Para manter o trabalho completo, incluímos em um apêndice alguns resultados clássicos de análise real bem como de operadores lineares em espaços de Hilbert.

2 FUNÇÕES GERADORAS

A seguinte soma

$$S(n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{-k}^{k} \frac{1}{(4k+1)^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n} \tag{2.1}$$

é um múltiplo racional de π^n para todos os inteiros $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ para os quais a soma converge absolutamente. Isto é equivalente a dizer que quando n é par, $n \geq 2$

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \tag{2.2}$$

é múltiplo racional de π^n e quando n é ímpar, $n \geq 3$

$$L(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} \tag{2.3}$$

também é múltiplo racional de π^n.

De fato, pois

$$S(n) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)\zeta(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ L(n) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Inicialmente mostraremos que, para n par, $S(n)$ dada em (2.1) é igual a $\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)\zeta(n)$.

Seja $S(k) = \displaystyle\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{(2s+1)^n}$.

Assim, devemos mostrar que

$$S(n) = \lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^n} \ ,$$

ou seja,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n} \ .$$

Para mostrar a igualdade acima, utilizamos o seguinte lema:

Lema 2.1. *Dado $m \in \mathbb{N}$, m ímpar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = |4k+1|$.*

A partir do lema acima concluímos que as duas séries são iguais.

$\square$

Agora vamos mostrar que para n ímpar, $S(n)$ dada em (2.1) é igual a $L(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$.

Devemos mostrar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n}. \tag{2.4}$$

Suponhamos k par em $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$. Seja $k = 2t$. Logo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2t}}{(2.2t+1)^n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(4t+1)^n},$$

que corresponde a $k \geq 0$ em $S(n)$.

Suponhamos k ímpar em $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$. Seja k = 2t - 1, $t \geq 1$. Logo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2t-1}}{(2.(2t-1)+1)^n} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(4t-1)^n}.$$

Fazendo a mudança de variável, $t = -j$ temos:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(4t-1)^n} = \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{(-1)}{(-4j-1)^n} = \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{(-1)}{(-1)^n(4j+1)^n} = \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{1}{(4j+1)^n} \ ,$$

pois n é ímpar, o que corresponde a $k < 0$ em $S(n)$. Assim mostramos que a igualdade em (2.4) é verdadeira.

$\square$

A primeira prova que abordaremos neste trabalho, da racionalidade de $\pi^{-n}S(n)$, a qual é considerada uma demonstração padrão, é via função geradora.

Seja

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n} \Big) z^n, \tag{2.5}$$

na qual a soma interna é tomada nas ordens $k = 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ \ldots$

Queremos mostrar que a série de potências que representa $G(z)$ converge para todo z tal que $|z| < 1$.

Seja $G(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} S(n)z^n$, onde $S(n) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(4k+1)^n}$. Primeiramente mostraremos que os $S(n)$ são limitados.

i) Para $n = 1$, temos que $S(1)$ é uma série alternada condicionalmente convergente.

ii) Para $n \geq 2$, $S(n)$ é absolutamente convergente, pois

$|4k+1| > |k|, \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow |4k+1|^n > |k|^n \Rightarrow \dfrac{1}{|4k+1|^n} < \dfrac{1}{|k|^n} < \dfrac{1}{k^2}.$

Assim, $|S(n)| < \sum\limits_{k} \dfrac{1}{k^2}$ que converge. Logo os $S(n)$ são limitados.

Observando novamente $G(z)$, vemos que esta é uma série de potências e seu raio de convergência é dado por

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|S(n)|} \ .$$

Como $S(n)$ é limitado, temos $|S(n)| \leq k \Rightarrow \sqrt[n]{|S(n)|} \leq \sqrt[n]{k}$. Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|S(n)|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1,$$

logo $\quad R^{-1} \leq 1 \Rightarrow R \geq 1.$

Portanto a série converge no intervalo $(-1,1)$. Além disso, temos que $G(z)$ converge uniforme e absolutamente dentro de qualquer círculo de raio $R<1$ centrado na origem.

Como $S(n)$ é absolutamente convergente para $n \geq 2$, (pelo teorema $A.1$ do apêndice) podemos trocar a ordem dos somatórios em (2.5).

Assim, obtemos:

$$G(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(4k+1)^n}\right). \tag{2.6}$$

Mas, utilizando a série geométrica temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4k+1}\right)^n=\frac{z}{4k+1-z}\ .$$

Logo, $G(z)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{z}{4k+1-z}\ .$

Vamos mostrar que $G(z)$ também é igual a

$$G(z)=\frac{\pi z}{4}\left(\sec\left(\frac{\pi z}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right).$$

Sejam $G_1(z)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(4k+1)-z}$ $\quad$ e $\quad G_2(z)=\dfrac{\pi}{4}\left(\sec\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)\right)$.

Mostraremos que $G_1(z)=G_2(z), \quad \forall z\in\mathbb{C}$. Neste caso $z\ G_1(z)=z\ G_2(z)$ e, assim, em particular

$$\frac{\pi z}{4}\left(\sec\left(\frac{\pi z}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{z}{4k+1-z}, \quad \text{para } |z|<1.$$

Vamos mostrar que a série em $G_1(z)$ converge uniformemente para cada z contido num conjunto compacto $C\subset\mathbb{C}$ com $C\cap\{z\in\mathbb{C}: z=4k+1,\ k\in\mathbb{Z}\}=\varnothing$.

Temos,

$$\frac{1}{(4k+1-z)} = \frac{1}{(4k+1)} + \frac{z}{(4k+1)(4k+1-z)}.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)} = \frac{\pi}{4}$ então precisamos nos preocupar somente com a série

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{(4k+1)(4k+1-z)}. \tag{2.7}$$

Temos que $\exists M > 0$ tal que $|z| \leq M$ para $z \in C$.

Logo $|z-(4k+1)| \geq |4k+1| - |z| \geq |4k+1| - M$ e para índices k grandes, isto é, $|k| \geq N$ para um certo N adequado temos $|4k+1| - M \geq |k|$.

Agora o conjunto $\{4k+1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ pode ser dividido em dois subconjuntos: $A_1 = \{4k+1,\ k \in \mathbb{Z} : |k| < N\}$ e $A_2 = \{4k+1,\ k \in \mathbb{Z} : |k| \geq N\}$.

A série (2.7) com índices k em A_1 é finita, pois temos um número finito de termos. Para esta mesma série com índices k em A_2 observemos que

$$\left| \frac{z}{(4k+1)(4k+1-z)} \right| \leq \frac{M}{|4k+1||k|} \leq \frac{M}{k^2}\ .$$

Como $\displaystyle\sum_k \frac{M}{k^2}$ é convergente então pelo teste de Weierstrass a série (2.7) converge uniformemente. Portanto $G_1(z)$ também converge uniformemente em C.

As singularidades de $G_1(z)$ são os pontos da forma $z = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z}$, isto é , $z \in \{1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, \cdots\}$.

Para $G_2(z)$ temos que,

$$G_2(z) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi z}{2})} + \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi z}{2})}{\cos(\frac{\pi z}{2})} \right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1 + \operatorname{sen}(\frac{\pi z}{2})}{\cos(\frac{\pi z}{2})} \right).$$

Como G_2 é um quociente de funções analíticas temos que os pontos candidatos as singularidades satisfazem a

$\cos\left(\frac{\pi\ z}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow z = \pm(2n-1), n \in \mathbb{N}$, isto é, $z \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots\}$.

Os pontos que exigem uma análise mais detalhada são aqueles onde

$1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\ z}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow z = 4k-1,\ k \in \mathbb{Z}$, isto é, $z \in \{-1, 3, -5, 7, -9, 11, -13, \cdots\}$.

Assim, temos que os pontos onde $1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\ z}{2}\right) = 0$ e $\cos\left(\frac{\pi\ z}{2}\right) = 0$ tem a forma $z = 4k-1, k \in \mathbb{Z}$. Mas, nestes pontos $G_2(z)$ é analítica pois para cada circunferência c_ϵ de raio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e centrada em $z = 4k-1, k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\int_{c_\epsilon} G_2(z)\ dz = 2\pi i\ Res_{4k-1}(G_2),$$

onde $Res_{4k-1}(G_2)$ é o resíduo de $G_2(z)$ em $4k-1$ (veja teorema 67 na página 147 do Churchill [7]).

Por outro lado,

$$G_2(z) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi\ z}{2})}\right) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi\ z}{2})}{\cos(\frac{\pi\ z}{2})}\right) = B_1(z) + B_2(z)\ .$$

Assim tanto $B_1(z)$ quanto $B_2(z)$ são quocientes de funções analíticas onde o numerador não se anula em $4k-1$, o denominador se anula e a derivada do denominador não se anula, então

$$Res_{4k-1}(G_2) = Res_{4k-1}(B_1) + Res_{4k-1}(B_2) = \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) = 0,$$

(veja página 152 do Churchill [7]).

Logo $\displaystyle\int_{c_\epsilon} G_2(z)\ dz = 0$. Assim $z = 4k-1$ é singularidade removível de $G_2(z)$.

Portanto G_1 e G_2 são analíticas em $\mathbb{C}$ com excessão dos pontos da forma $z = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z}$.

Nestes pontos a singularidade é um pólo simples e seu resíduo é dado por:

$Res_{4k+1}(G_2) = -1$ (veja página 152 do Churchill [7]).

Para $G_1(z)$ observemos que $\phi(z) = (z-(4k+1))\, G_1(z)$ é analítica em $4k+1,\ k \in \mathbb{Z}$, assim G_1 tem um pólo simples em $4k+1$ e seu resíduo neste pólo é dado por

$\lim_{z \to 4k+1} (z-(4k+1))\, G_1(z) = -1$ (veja página 151 do Churchill [7]).

Desta forma $H(z) = G_1(z) - G_2(z)$ é analítica $\forall z \in \mathbb{C}$, pois os pontos da forma $z = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z}$ são singularidades removíveis de $H(z)$.

Além disto, temos que $G_2(z+4) = G_2(z)$

e

$$
\begin{aligned}
G_1(z+4) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{4k+1-(z+4)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{4(k-1)+1-z} \\
&= \frac{1}{-3-z} + \frac{1}{-7-z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{-11-z} + \cdots \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{4k+1-z} = G_1(z).
\end{aligned}
$$

Assim, $H(z)$ é periódica de período 4.

Mostraremos agora que $H'(z) = 0$ e com isto $H(z)$ é constante.

Temos que

$$
H'(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((4k+1)-z)^2} + \frac{\pi^2}{8}\Big(\sec\left(\frac{\pi z}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Big).
$$

Como H é inteira e periódica de período 4 então H' também é.

Consideremos $x \in [0,4]$ e $|y| > 10$, então para $|k| > 1,\ k \in \mathbb{Z}$ e $z = x+iy$ temos:

$$
|(4k+1)-z|^2 = |(4k+1-x)+i(-y)|^2 = (4k+1-x)^2 + y^2.
$$

Mas, $|4k+1-x| \geq ||4k+1|-|x|| \geq (|k|-1)$ pois,

$$
x^2 - 2(4k+1)x + (4k+1)^2 - (|k|-1)^2 \geq 0.
$$

Assim, $\dfrac{1}{|(4k+1)-z|^{\,2}} \leq \dfrac{1}{(|k|-1)^2+y^2}$.

O lado direito da inequação acima pode ser reescrito como:

$$\frac{1}{(|k|-1)^2+y^2} = \frac{1}{((|k|-1)^2+y^2)^{\frac{2}{3}}((|k|-1)^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}. \tag{2.8}$$

Mas $(|k|-1)^2+y^2 \geq y^2 \Rightarrow ((|k|-1)^2+y^2)^{\frac{1}{3}} \geq y^{\frac{2}{3}}$.

Seja $c \in \mathbb{R}$, $\;0 < c < \dfrac{1}{4}$ então $0 < \dfrac{1-\sqrt{c}}{1-c} < \dfrac{1+\sqrt{c}}{1-c} < 2$.

Logo, $(1-c)k^2 - 2|k| + 1 \geq 0,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ |k| > 1$. De onde temos

$(|k|-1)^2 \geq ck^2 \Rightarrow ((|k|-1)^2+y^2)^{\frac{2}{3}} \geq c_1 k^{\frac{4}{3}}$.

Portanto, usando a equação (2.8), temos que

$\dfrac{1}{|(4k+1)-z|^{\,2}} \leq \dfrac{1}{y^{\frac{2}{3}}\ c_1\ k^{\frac{4}{3}}}$.

Logo a série $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((4k+1)-z)^2}$ converge

e

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((4k+1)-z)^2} = 0. \tag{2.9}$$

Além disto,

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{\pi^2}{8}\left(\sec\left(\frac{\pi z}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right) = 0, \tag{2.10}$$

pois fazendo $z = x + iy$ e calculando a norma na equação acima obtemos

$$\left|\sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)+1\right)\right| = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi x}{2}) + \operatorname{senh}^2(\frac{\pi y}{2}) + 2\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})\cosh(\frac{\pi y}{2}) + 1}}{\cos^2(\frac{\pi x}{2}) + \operatorname{senh}^2(\frac{\pi y}{2})}.$$

Como $\displaystyle\lim_{y\to\pm\infty}\left|\operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right| = \lim_{y\to\pm\infty}\left|\cosh\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right| = \infty$, após alguns cálculos, temos a equação (2.10).

Provamos assim que, $H'(z)$ é limitada para $0 \leq x \leq 4$ e $|y| \geq 10$. Como H' é contínua no compacto $0 \leq x \leq 4$ e $|y| \leq 10$, portanto limitada, concluímos que H' é limitada na faixa $0 \leq x \leq 4$. Como ela é periódica obtemos que H' é limitada em $\mathbb{C}$. Assim, de acordo com o teorema de Liouville concluímos que H' é constante, e, de acordo com (2.9) e (2.10), obtemos que $H'(z) = 0$. Portanto, $H(z)$ é constante em $z \in \mathbb{C}$. Mas, $H(0) = 0$ e, assim, $G_1(z) = G_2(z),\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Como o desenvolvimento em série de Taylor das funções seno e cosseno possuem coeficientes que são números racionais, a relação $\operatorname{sen} z = \operatorname{tg} z \cos z$ implica o mesmo para os coeficientes da tangente. O raciocínio análogo mostra que a série da secante também possuem coeficientes racionais. Assim fazendo o desenvolvimento em série de Taylor para as funções $\sec\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)$ e $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)$ para obtermos a série de Taylor para $G(z)$ obtemos que,

$$\sec\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^2 + \frac{5}{24}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^4 + \frac{61}{720}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^6 + \ldots;\ |z| < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \frac{\pi z}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^7 + \ldots;\ |z| < \frac{\pi}{2},$$

Substituindo em $G(z)$, obtemos:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\pi z}{4}\left(\sec\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi z}{4} + \frac{(\pi z)^2}{2^3} + \frac{1}{2}\,\frac{(\pi z)^3}{2^4} + \frac{1}{3}\,\frac{(\pi z)^4}{2^5} + \frac{5}{24}\,\frac{(\pi z)^5}{2^6} + \ldots;\ |z| < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Obtemos assim, duas expressões para a série de Taylor de $G(z)$ em torno de $z = 0$ e dentro de $(-1, 1)$, uma dada acima e a outra dada em (2.5). Como a série de Taylor é única obtemos que as expansões em série de Taylor devem ser iguais, e assim $S(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n}$ é um múltiplo racional de π^n.

$\square$

3 A MUDANÇA DE VARIÁVEIS DE E. CALABI

Neste capítulo, relacionamos $S(n)$ e o volume de uma certa região em $\mathbb{R}^n$ usando apenas a fórmula de mudança de variáveis de integrais múltiplas, sugerida por E. Calabi.

Inicialmente mostraremos que tal relação é válida para $n = 2$, isto é, provaremos que $S(2)$ corresponde a área do triângulo retângulo isósceles dado por $\left\{(u, v) \in \mathbb{R} : u, v > 0,\ u + v < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Vimos anteriormente que, para n par

$$S(n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \zeta(n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n}.$$

Para $n = 2$, temos que

$$S(2) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Vamos escrever cada termo da série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ como $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dxdy$, pois, de fato, resolvendo a integral abaixo, temos que

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dxdy = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Logo podemos reescrever a série da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dxdy,$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^{2k} dxdy. \tag{3.1}$$

Utilizando a série geométrica obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^{2k} = \frac{1}{1 - (xy)^2}\ , \quad 0 \leq x, y < 1.$$

Voltando à equação (3.1) temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(xy)^2}\, dx\, dy.$$

Note que em $x = y = 1$ a série não converge, pois

$$\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Definindo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-(xy)^2} & \text{se } \ 0 \leq x, y < 1 \\ 0 & \text{se } \ x = y = 1, \end{cases}$$

segue que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(xy)^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy. \tag{3.2}$$

Salientamos que o ponto $(1,1)$ tem medida zero e assim não interfere no valor da integral.

Pelo Teorema da Mudança de Variável temos que:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx\, dy = \int \int_{R'} f(x(u,v), y(u,v))\ J\, du\, dv.$$

A mudança de variáveis de Calabi é dada por:

$$x = \frac{\text{sen } \ u}{\cos \ v} \qquad y = \frac{\text{sen } \ v}{\cos \ u} \tag{3.3}$$

Assim,

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ & \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante da matriz jacobiana J temos:

$$J = 1 - \frac{(\text{sen } \ v)^2 (\text{sen } \ u)^2}{(\cos \ u)^2 (\cos \ v)^2}.$$

Voltando em (3.2) e aplicando a mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-(xy)^2}\,dx\,dy &= \int\int_{R'} \frac{\left(1-\dfrac{\text{sen}^2\, v}{\cos^2\, u}\dfrac{\text{sen}^2\, u}{\cos^2\, v}\right)}{1-\left(\dfrac{\text{sen}\ u}{\cos\ v}\dfrac{\text{sen}\ v}{\cos\ u}\right)^2}\,du\,dv\\
&= \int\int_{R'} 1\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Assim o integrando $\dfrac{1}{1-(xy)^2}\,dx\,dy$ da fórmula (3.2), transforma-se em $1\ du\ dv$, e a região de integração $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x,y<1\}$ corresponde ao triângulo retângulo isósceles $R'=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u,v>0,\ u+v<\dfrac{\pi}{2}\right\}$, como podemos verificar facilmente.

Agora, calculando a área do triângulo retângulo isósceles dado por $\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u,v>0,\ u+v<\dfrac{\pi}{2}\right\}$, temos que sua área é igual a $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Assim, $S(2)=\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-(xy)^2}\,dx\,dy=\int\int_{R'}1\,du\,dv=\frac{\pi^2}{8}$.

Concluímos então que, para $n=2$ a correspondência feita anteriormente é válida.

Mostraremos que esta correspondência também vale para $n=3,4,5,\ \ldots$

Em primeiro lugar vamos definir o politopo Π_n e listar algumas propriedades.

Definição 3.1. *O politopo Π_n é definido como a região em $\mathbb{R}^n$ dada por:*

$$\Pi_n=\left\{(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n : u_i>0,\ u_i+u_{i+1}<\frac{\pi}{2},\ (1\le i\le n)\right\} \tag{3.4}$$

onde os u_i são indexados ciclicamente módulo n, assim $u_{n+1}=u_1$.

Em seguida veremos algumas definições e observações relativas ao politopo Π_n que serão utilizadas na demonstração do Corolário (3.1) adiante.

Definição 3.2. *(Faces do politopo)*

Uma face do politopo Π_n é um conjunto de pontos dado pela interseção do fecho de

Π_n *com um dos hiperplanos da forma:* $u_i = 0$, *com* $1 \leq i \leq n$ *ou* $u_i + u_{i+1} = \dfrac{\pi}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$ *ou* $u_1 + u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Definição 3.3. *(Vértices do politopo)*

Um vértice do politopo Π_n *é um ponto em* $\mathbb{R}^n$ *que é comum a duas ou mais faces sem haver outros pontos em comum a estas faces.*

Definição 3.4. *(Simplexo)*

Um simplexo K *dimensional em* $\mathbb{R}^n$ *com* $1 \leq k \leq n$ *é um poliedro convexo com* $k+1$ *vértices linearmente independentes.*

Observação 3.1. *Um simplexo é a generalização para* $\mathbb{R}^n$ *de triângulos e tetraedros de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$.

Os seguintes resultados, cuja demonstração pode ser vista em [5], estabelecem algumas relações entre simplexos e politopos.

Proposição 3.1. *Qualquer politopo pode ser particionado em simplexos.*

Observação 3.2. *Tal resultado é a generalização natural de que qualquer polígono pode ser particionado em triângulos e um poliedro pode ser particionado em tetraedros.*

Proposição 3.2. *O volume de um simplexo* S *cujos vértices são:* $v_0, v_1, \ldots, v_n$ *é*

$$Vol(S) = \frac{\sqrt{|det\, W.det\, W^t|}}{n!},$$

onde W *é a matriz cujas linhas são:* $w_1 = v_1 - v_0,\ w_2 = v_2 - v_0,\ \ldots,\ w_n = v_n - v_0$ *e* W^t *é a matriz transposta.*

A transformação de Calabi em n-dimensões é dada por

$$x_1 = \frac{\operatorname{sen} u_1}{\cos u_2}, \quad x_2 = \frac{\operatorname{sen} u_2}{\cos u_3}, \quad \ldots \quad , x_{n-1} = \frac{\operatorname{sen} u_{n-1}}{\cos u_n}, \quad x_n = \frac{\operatorname{sen} u_n}{\cos u_1}. \tag{3.5}$$

Algumas de suas propriedades são estabelecidas nos dois lemas abaixo:

Lema 3.1. *O determinante jacobiano da transformação dada em* (3.5) *é*

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = 1 \pm (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^2,$$

usamos o sinal $-$ *quando* n *é par.*

Demonstração:

As derivadas parciais $\dfrac{\partial(x_i)}{\partial(u_j)}$ são dadas por:

$$\frac{\partial(x_i)}{\partial(u_j)} = \begin{cases} \dfrac{\cos u_i}{\cos u_{i+1}} & \text{se } i = j \\ \dfrac{\text{sen } u_i \text{ sen } u_{i+1}}{\cos^2 u_{i+1}} & \text{se } \ j = i+1 \mod n \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

A matriz jacobiana (A) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial u_{n-1}} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}.$$

Substituindo os elementos da matriz A pelos valores numéricos correspondentes, temos:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos u_1}{\cos u_2} & \dfrac{\text{sen}u_1.\text{sen}u_2}{\cos^2 u_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{\cos u_2}{\cos u_3} & \dfrac{\text{sen}u_2.\text{sen}u_3}{\cos^2 u_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\cos u_{n-1}}{\cos u_n} & \dfrac{\text{sen}u_{n-1}.\text{sen}u_n}{\cos^2 u_n} \\ \\ \dfrac{\text{sen}u_n.\text{sen}u_1}{\cos^2 u_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\cos u_n}{\cos u_1} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante da matriz A, usando o Teorema de Laplace,

$$det\ A = 1 + (-1)^{n+1} \times \frac{\text{sen}^2 u_1}{\cos^2 u_2} \times \frac{\text{sen}^2 u_2}{\cos^2 u_3} \times \ldots \times \frac{\text{sen}^2 u_n}{\cos^2 u_1},$$

logo,

$$det\ A = 1 + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2.$$

□

Lema 3.2. *A transformação dada em* (3.5) *leva bijetivamente o politopo* Π_n *no cubo unitário aberto* $(0,1)^n$.

Demonstração:

Seja $u = (u_1, \ldots, u_n)$ no politopo Π_n, logo os u_i são positivos e $u_i + u_{i+1} < \dfrac{\pi}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$ e $u_1 + u_n < \dfrac{\pi}{2}$ então

$$\begin{aligned} 0 < x_i = \frac{\text{sen } u_i}{\cos\ u_{i+1}} \quad &< \quad \frac{\text{sen }\left(\frac{\pi}{2} - u_{i+1}\right)}{\cos\ u_{i+1}} \\ &= \quad \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2}\ \cos\ u_{i+1} - \text{sen}u_{i+1}\ \cos\frac{\pi}{2}}{\cos\ u_{i+1}} = \frac{\cos u_{i+1}}{\cos\ u_{i+1}} = 1. \end{aligned}$$

Logo, $0 < x_i < 1$. Assim, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ está no cubo unitário aberto.

Nos resta mostrar que dado arbitrariamente x no cubo unitário aberto, existe uma única n-upla $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ em Π_n que satisfaz (3.5).

Por (3.5) temos:

$x_1 = \dfrac{\text{sen}\ \ u_1}{\cos\ \ u_2}, \quad x_2 = \dfrac{\text{sen}\ \ u_2}{\cos\ \ u_3}, \quad \ldots \quad , x_{n-1} = \dfrac{\text{sen}\ \ u_{n-1}}{\cos\ \ u_n}, \quad x_n = \dfrac{\text{sen}\ \ u_n}{\cos\ \ u_1}.$

Como $x_1 = \dfrac{\text{sen}\ \ u_1}{\cos\ \ u_2} \Rightarrow x_1\ \cos\ u_2 = \text{sen}\ \ u_1 \Rightarrow u_1 = \text{arcsen}\ (x_1\ \cos\ u_2)$.

Logo, reescrevendo a equação (3.5),

$$u_1 = f_{x_1}(u_2), \quad u_2 = f_{x_2}(u_3), \quad \ldots \quad , u_{n-1} = f_{x_{(n-1)}}(u_n), \quad u_n = f_{x_n}(u_1)\ ,$$

onde $f_x(u) = \text{arcsen}\ (x\ \cos\ u)$, com $0 < x < 1$.

A função acima vai do intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ em si mesmo, pois para $f_x(u) = \text{arcsen}\ (x\ \cos\ u)$,

$0 < u < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos\ u < 1 \quad e \quad 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x\ \cos\ u < 1$.

Assim, $0 < \text{arcsen}\ (x\ \cos\ u) < \dfrac{\pi}{2}$.

Além disso, como $f_x(u) = \text{arcsen}\ (x\ \cos\ u)$, temos que

$\dfrac{\partial}{\partial u} f_x(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 u}}\ (-x\ \text{sen u})$.

Então,

$$\left|\frac{\partial}{\partial u} f_x(u)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{1 - x^2\ \cos^2 u}}\ (-x\ \text{sen}\ u)\right| = \frac{x\ \text{sen}\ \ u}{\sqrt{1 - x^2\ \cos^2\ u}}.$$

Mas,

$$\frac{x\ \text{sen}\ \ u}{\sqrt{1 - x^2\ \cos^2\ u}} < \frac{x\ \text{sen}\ \ u}{\sqrt{x^2 - x^2\ \cos^2\ u}} = \frac{x\ \text{sen}\ \ u}{x\sqrt{1 - \cos^2\ u}} = \frac{x\ \text{sen}\ u}{x\ \text{sen}\ u} = 1.$$

Portanto,

$$\left|\frac{\partial}{\partial u} f_x(u)\right| < 1,\ \forall\ u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Para $u = 0$ e $u = \dfrac{\pi}{2}$ temos:

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}f_x(0)\Big| = \Big|\frac{-x \text{ sen } 0}{\sqrt{1-x^2\ \cos^2\ 0}}\Big| = \Big|\frac{-x\cdot 0}{\sqrt{1-x^2}}\Big| = 0 < 1$$

e

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}f_x\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big| = \Big|\frac{-x \text{ sen}(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{1-x^2\ \cos^2(\frac{\pi}{2})}}\Big| = \Big|\frac{-x}{\sqrt{1}}\Big| = x < 1.$$

Assim, $\Big|\dfrac{\partial}{\partial u}f_x(u)\Big| < 1$, $\forall\ u \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$. Logo cada f_{x_i} é contração no intervalo $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, pois para $u_1, u_2 \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ temos:

$$f_x(u_1) - f_x(u_2) = \frac{\partial}{\partial u}f_x(\xi)(u_1 - u_2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |f_x(u_1) - f_x(u_2)| &= \Big|\frac{\partial}{\partial u}f_x(\xi)\Big||u_1 - u_2| \\ &\leq M|u_1 - u_2|\ , \end{aligned}$$

onde $M = \max_{(\xi\in[0,\frac{\pi}{2}])}\ \Big|\dfrac{\partial}{\partial u}f_x(\xi)\Big| < 1$.

Pelo teorema do ponto fixo para contrações (teorema $A.2$ do apêndice), temos que cada f_{x_i} que é uma contração, e portanto, possui um único ponto fixo no intervalo $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$. Este ponto não pode ser um ponto final do intervalo, visto que

$$f_x\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \text{arcsen}\ \Big(x\ \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 0$$

e

$$f_x(0) = \text{arcsen}\ (x\ \cos\ 0) = \text{arcsen}\ x \neq 0, \text{ pois } x \in (0,1).$$

Mostraremos agora que a composta de contrações também é uma contração.

Para o caso de duas contrações f e g, com $u, v \in \mathbb{R}$, temos:

$$|f(u) - g(v)| < |u - v| \quad \text{e} \quad |g(u) - g(v)| < |u - v|.$$

Mas,

$|(fog)(u) - (fog)(v)| = |f(g(u)) - f(g(v))| < |g(u) - g(v)| < |u - v|.$

Portanto, $f \circ g$ também é contração.

Por indução, verificamos que a composta de n contrações também é contração.

Então, dado $x_1, \ldots, x_n$ temos que existe um único t que é ponto fixo da função $f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_n}$, isto é, $(f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_n})(t) = t$.

$\square$

O seguinte resultado relaciona o volume do politopo Π_n com a soma $S(n)$.

Teorema 3.1. *O volume do politopo* Π_n *é* $S(n)$ *para todo* $n \geq 2$.

Demonstração:

Aplicando a transformação de Calabi (3.5) na integral definindo o volume de Π_n temos

$$Vol(\Pi_n) = \int \ldots \int_{\Pi_n} 1du_1 \ \ldots \ du_n = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{1 \pm (x_1 \ldots x_n)^2} \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Mas,

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{1 \pm (x_1 \ldots x_n)^2} \, dx_1 \ldots dx_n \quad = \quad \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} \ (x_1 \ldots x_n)^{2k} dx_1 \ldots dx_n. \tag{3.6}$$

Devemos verificar que $\dfrac{1}{1 \pm (x_1 \ldots x_n)^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} (x_1 \ \ldots \ x_n)^{2k}.$

i) Para n par

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} (x_1 \ \ldots \ x_n)^{2k} = 1 + (x_1 \ldots x_n)^2 + (x_1 \ldots x_n)^4 + (x_1 \ldots x_n)^6 \ldots$, que é uma PG de razão $(x_1 \ldots x_n)^2$ cuja soma é $\dfrac{1}{1 - (x_1 \ldots x_n)^2}$.

ii) Para n ímpar

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}(x_1\ \ldots\ x_n)^{2k} = 1+(-1)^n(x_1\ldots x_n)^2+(-1)^{2n}(x_1\ldots x_n)^4+\ldots$, que é uma PG de razão $(-1)^n(x_1\ldots x_n)^2$, cuja soma é $\dfrac{1}{1+(x_1\ldots x_n)^2}$.

Logo, $\dfrac{1}{1\pm(x_1\ldots x_n)^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}(x_1\ \ldots\ x_n)^{2k}$ e a igualdade (3.6) é verdadeira.

Como a série converge absolutamente, trocando a soma pela integral múltipla em (3.6), obtemos:

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 \frac{1}{1\pm(x_1\ldots x_n)^2}\,dx_1\ldots dx_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1\ldots x_n)^{2k}dx_1\ldots dx_n.$$

Como

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}\int_0^1\ \ldots\ \int_0^1 (x_1\ \ldots\ x_n)^{2k}dx_1\ \ldots\ dx_n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}\int_0^1\ \ldots\ \int_0^1 \left[\frac{{x_1}^{2k+1}}{2k+1}(x_2\ \ldots\ x_n)^{2k}\right]_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2\ \ldots\ dx_n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}\int_0^1\ldots\int_0^1 \frac{1}{2k+1}(x_2\ \ldots\ x_n)^{2k}dx_2\ \ldots\ dx_n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}\int_0^1\ \ldots\ \int_0^1 \left[\frac{{x_2}^{2k+1}}{(2k+1)^2}(x_3\ \ldots\ x_n)^{2k}\right]_{x_2=0}^{x_2=1} dx_3\ \ldots\ dx_n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}\int_0^1\ \ldots\ \int_0^1 \frac{1}{(2k+1)^2}(x_3\ \ldots\ x_n)^{2k}dx_3\ \ldots\ dx_n\\
&= \ldots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}\frac{1}{(2k+1)^n} = S(n)
\end{aligned}$$

Portanto, $Vol(\Pi_n) = S(n)$.

$\square$

Corolário 3.1. *$S(n)$ é um múltiplo racional de π^n para todo $n \geq 2$.*

Demonstração:

Inicialmente vamos mostrar que o volume de Π_n é $\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ vezes o volume do politopo $\Pi'_n = \left(\frac{2}{\pi}\right) \Pi_n = \{(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n : v_i > 0,\ v_i + v_{i+1} < 1,\ (1 \leq i \leq n)\}$ e $v_{n+1} = v_1$.

Sabemos que:

$\Pi_n = \left\{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_i > 0,\ u_i + u_{i+1} < \frac{\pi}{2},\ (1 \leq i \leq n)\right\}$ e $u_{n+1} = u_1$.

Assim,

$$\begin{aligned} Vol\ (\Pi'_n) &= \int_{\Pi'_n} 1\ dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Pi_n} 1 \left(\frac{2}{\pi}\right)^n dy_1 \cdots dy_n \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_{\Pi_n} 1\ dy_1 \cdots dy_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n Vol\ (\Pi_n) \end{aligned}$$

Logo, $Vol\ (\Pi_n) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n Vol\ (\Pi'_n)$

Mostraremos que $Vol\ (\Pi'_n)$ é um número racional.

Para tanto, primeiramente devemos mostrar que os vértices de Π'_n são pontos de $\mathbb{R}^n$ com coordenadas racionais.

Para vermos isto, utilizamos a definição (3.3) que nos diz que um vértice de Π'_n será um ponto que está em $\overline{\Pi'_n}$ e que é solução única de um sistema formado por n equações do seguinte grupo:

$x_1 = 0, \cdots, x_n = 0;\ x_1 + x_2 = 1, x_2 + x_3 = 1, \cdots, x_{n-1} + x_n = 1;\ x_1 + x_n = 1.$

Assim, por exemplo, $(0, 0, \cdots, 0)$ é um vértice de Π'_n, pois é a solução única do sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ x_n = 0. \end{cases}$$

Observe que independentemente das equações tomadas todas tem incógnitas com coeficientes racionais (0 ou 1) assim como o termo independente.

Utilizando o método de escalonamento para resolvermos o dito sistema podemos ver que a solução (quando existir) será sempre um ponto com coordenadas racionais, pois as operações que executamos na matriz extendida (matriz dos coeficientes mais a matriz dos termos independentes) serão trocas de linhas e multiplicação de uma linha por um número racional mais outra linha.

Em seguida, utilizamos a proposição (3.2) para calcularmos o volume de um simplexo contido em Π'_n que tenha vértices em comum com Π'_n. Neste caso W será uma matriz $n \times n$. Assim como $det\ W = det\ W^t$. Logo, temos que

$$Vol\ (S) = \frac{\sqrt{|det\ W|^2}}{n!} = \frac{|det\ W|}{n!}.$$

Mas, $det\ W$ será sempre um número racional, pois W é uma matriz com entradas racionais.

Finalmente, de acordo com a proposição (3.1) o volume de Π'_n será a soma do volume de certos simplexos contidos em Π'_n e todos com volume racional. Assim, $Vol\ \Pi'_n$ é um número racional.

$\square$

4 OPERADORES INTEGRAIS LINEARES

Neste capítulo, usaremos a teoria de operadores compactos para calcular $S(n)$, ou equivalentemente o $Vol(\Pi_n)$.

Para isto definimos $k_1(u,v)$, com (u,v) em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, como a função característica do triângulo retângulo isósceles $\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u,v > 0, \ u+v < \frac{\pi}{2}\right\}$, isto é,

$$k_1(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ u+v < \frac{\pi}{2}, \ u > 0, v > 0 \\ 0 & \text{outra possibilidade.} \end{cases}$$

O volume do politopo Π_n pode ser reescrito da seguinte forma:

$$Vol(\Pi_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^{n} k_1\ (u_i, u_{i+1}) \ du_1\, du_2\ \dots\ du_n, \tag{4.1}$$

onde $u_{n+1} = u_1$.

Definição 4.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina por recorrência*

$$k_n(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ k_1\ (u, u_1)\ k_{n-1}\ (u_1, v)\ du_1 \tag{4.2}$$

O volume V_n do politopo Π_n está relacionado com k_n através da seguinte proposição:

Proposição 4.1. *Para $u, v \in \mathbb{R}$ tem-se*

a) $k_n(u,v) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u, u_1) \prod_{i=1}^{n-2} k_1\ (u_i, u_{i+1})\ k_1\ (u_{n-1}, v)\ \ du_1\, du_2\ \dots\ du_{n-1},$

com $n \geq 3, \ \ n \in \mathbb{N}$.

$$b)\ Vol(\Pi_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ k_n\ (u,u)\ du, \tag{4.3}$$

com $n \geq 2, \ \ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

a) Vamos provar usando o Princípio da Indução em n.

i) Para $n = 3$:

Por (4.2) temos que:

$$k_3(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1)\ k_2\ (u_1,v)\ du_1.$$

Como $\quad k_2(u,v) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ k_1\ (u,u_1)\ k_1\ (u_1,v)\ du_1$, fazendo a mudança de variáveis de u_1 por u_2, temos:

$$k_2(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_2)\ k_1\ (u_2,v)\ du_2.$$

Assim, $\quad k_2(u_1,v) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u_1,u_2)\ k_1\ (u_2,v)\ du_2$.

Logo,

$$k_3(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u_1,u_2)\ k_1\ (u_2,v)\ du_2\right] du_1$$

$$k_3(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1)\ k_1\ (u_1,u_2)\ k_1\ (u_2,v)\ du_2\ du_1$$

$$k_3(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1)\ k_1\ (u_1,u_2)\ k_1\ (u_2,v)\ du_1\ du_2.$$

Portanto,

$$k_3(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1)\ \prod_{i=1}^{1} k_1\ (u_i,u_{i+1})\ k_1\ (u_2,v)\ du_1\ du_2.$$

Assim, para $n = 3$, temos a igualdade requerida.

ii) Supondo que a igualdade vale para n mostraremos que vale para $n + 1$.

Por hipótese,

$$k_n(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1)\ \prod_{i=1}^{n-2}\ k_1\ (u_i,u_{i+1})\ k_1\ (u_{n-1},v)\ \ du_1\ du_2\ \dots\ du_{n-1}\ .$$

Por (4.2) temos:

$$k_{n+1}(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1)\ k_n\ (u_1,v)\ du_1.$$

Como,

$$k_n(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1) \prod_{i=1}^{n-2} k_1\ (u_i,u_{i+1})\ k_1\ (u_{n-1},v)\ \ du_1\ du_2\ \ldots\ du_{n-1}\ ,$$

fazendo uma mudança de variável de $(u_1 \ldots u_{n-1})$ para $(u_2 \ldots u_n)$ e calculando $k_n(u_1,v)$ obtemos:

$$k_n(u_1,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u_1,u_2) \prod_{i=2}^{n-1} k_1\ (u_i,u_{i+1})\ k_1\ (u_n,v)\ \ du_2\ \ldots\ du_n\ .$$

Assim,

$$\begin{aligned} k_{n+1}(u,v) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u,u_1) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u_1,u_2) \prod_{i=2}^{n-1} k_1(u_i,u_{i+1}) k_1(u_n,v) du_2 \ldots du_n \right] du_1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u,u_1) k_1(u_1,u_2) \prod_{i=2}^{n-1} k_1(u_i,u_{i+1}) k_1(u_n,v) du_2 \ldots du_n du_1. \end{aligned}$$

Mas, $k_1(u_1,u_2) \prod_{i=2}^{n-1} k_1\ (u_i,u_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n-1}\ k_1\ (u_i,u_{i+1})$. Logo,

$$k_{n+1}(u,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,u_1) \prod_{i=1}^{n-1} k_1\ (u_i,u_{i+1})\ k_1\ (u_n,v)\ \ du_1\ du_2\ \ldots\ du_n\ .$$

□

b) A demonstração é feita utilizando-se o item (a).

i) Para $n = 2$.

Pela equação (4.1) temos:

$$
\begin{aligned}
Vol(\Pi_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^{2} k_1\ (u_i, u_{i+1})\ \ du_1\ du_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u_1, u_2)\ k_1\ (u_2, u_3)\ \ du_1\ du_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u_1, u_2)\ k_1\ (u_2, u_1)\ \ du_1\ du_2,
\end{aligned}
$$

pois $u_3 = u_1$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_2\ (u, u)\ du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u, u_1)\ k_1\ (u_1, u)\ \ du_1 \Big) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u, u_1)\ k_1\ (u_1, u)\ \ du_1 du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u, u_1)\ k_1\ (u_1, u)\ \ du du_1 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u_1, u_2)\ k_1\ (u_2, u_1)\ \ du_1 du_2\ .
\end{aligned}
$$

Logo, para $n = 2$, temos a igualdade requerida.

ii) Para $n \geq 3$, devemos mostrar que:

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n\ (u, u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^{n}\ k_1\ (u_i, u_{i+1})\ du_1\ du_2\ \dots\ du_n\ .
$$

Pela proposição 4.1 $a)$ fazendo $v = u$ temos:

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n(u, u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u, u_1)\ \prod_{i=1}^{n-2}\ k_1\ (u_i, u_{i+1})\ k_1\ (u_{n-1}, u)\ du_1\ du_2\ \dots\ du_{n-1}\ .
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
k_1\ (u, u_1)\ \prod_{i=1}^{n-2} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_{n-1}, u) &= k_1(u, u_1) k_1(u_1, u_2) \dots k_1(u_{n-2}, u_{n-1}) k_1(u_{n-1}, u) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\ k_1\ (u_i, u_{i+1})\ .
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n\ (u,u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^{n} k_1\ (u_i, u_{i+1})\ du_1\ du_2\ \dots\ du_n\ .$$

$\square$

Agora vamos interpretar k_n na integral (4.3) em termos de operadores integrais lineares em $L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

Seja T o operador linear em $L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, com núcleo k_1, onde

$$L^2\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) = \Big\{ f : \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \to \mathbb{R} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|^2 dx < \infty \Big\}.$$

$$\begin{aligned} T : L^2\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) &\ \to\ L^2\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \\ f &\ \to\ T(f), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} T(f) : \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) &\ \to\ \mathbb{R} \\ v &\ \to\ (Tf)(v), \end{aligned}$$

com $(Tf)(v) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\ k_1\ (u,v)\ du.$

Afirmação: $Tf \in L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

Para tanto devemos mostrar que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ Tf(v)\ |^2 dv < \infty.$

Nesta demonstração usaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwartz (proposição $B.1$ do apêndice).

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ Tf(v)\ |^2 dv &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\ k_1\ (u,v)\ du \Big|^2 dv \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(u)|\ k_1\ (u,v)\ du \Big)^2 dv \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(u)|^2 du \Big) \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |k_1(u,v)|^2 du \Big) \Big] dv \\
&< \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(u)|^2\ du \\
&< \infty\ .
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $Tf \in L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

Lembrando a definição de $k_1(u,v)$ feita no início deste capítulo:

$$k_1(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ u + v < \dfrac{\pi}{2},\ u, v > 0 \\ 0 & \text{em outro caso,} \end{cases}$$

que pode ser reescrita como:

$$k_1(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 0 < u < \dfrac{\pi}{2} - v,\ v > 0 \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Assim, podemos reescrever Tf da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(Tf)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\ k_1\ (u,v)\ du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\ k_1\ (u,v)\ du + \int_{\frac{\Pi}{2}-v}^{\frac{\pi}{2}} f(u)\ k_1(u,v)\ du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\ .\ 1\ du + \int_{\frac{\pi}{2}-v}^{\frac{\pi}{2}} f(u)\ .\ 0\ du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\ du\ . \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Proposição 4.2. *Utilizando a definição (4.1), tem-se*

$$(T^n f)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\, k_n(u,v)\, du, \tag{4.5}$$

onde $T^n = T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T$, *n vezes .*

Demonstração:

Vamos provar (4.5), usando o Princípio da Indução em n.

i) Para $n = 1$, temos que

$$(Tf)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\, k_1(u,v)\, du\ ,$$

que é a própria definição de $(Tf)(v)$.

ii) Para $n = 2$ também vale.

Note que

$$\begin{aligned} T^2 : L^2\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) &\rightarrow L^2\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \\ f &\rightarrow (T^2 f) = T(Tf), \end{aligned}$$

onde $(T^2 f)(v) = (T(Tf))(v) = T((Tf)(v))$.

Mas, $(Tf)(v) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\, k_1\,(u,v)\, du$.

Então:

$$\begin{aligned} T((Tf)(v)) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Tf)(u)\, k_1\,(u,v)\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, k_1\,(t,u)\, dt \Big)\, k_1\,(u,v)\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, k_1\,(t,u)\, k_1\,(u,v)\, dt\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, k_1\,(t,u)\, k_1\,(u,v)\, du\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\,(t,u)\, k_1\,(u,v)\, du \Big)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, k_2\,(t,v)\, dt, \end{aligned}$$

pois pela equação (4.2) temos:

$$k_2(t,v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (t,u)\ k_1\ (u,v)\ du.$$

Assim, concluímos que k_2 é o núcleo de T^2.

iii) Supondo que (4.5) vale para n mostraremos que vale para $n+1$.

Por hipótese,

$$(T^n f)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\ k_n\ (u,v)\ du\ .$$

Devemos mostrar que:

$$(T^{n+1} f)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\ k_{n+1}\ (u,v)\ du\ .$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(T^{n+1}f)(v) = (T(T^n f))(v) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (T^n f)(u)\ k_1\ (u,v)\ du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\ k_n\ (t,u)\ dt \Big)\ k_1\ (u,v)\ du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\ k_1\ (u,v)\ k_n\ (t,u)\ dt\ du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\ k_1\ (u,v)\ k_n\ (t,u)\ du\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (u,v)\ k_n\ (t,u)\ du \Big)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1\ (v,u)\ k_n\ (u,t)\ du \Big)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\ k_{n+1}\ (v,t)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\ k_{n+1}\ (t,v)\ dt\ .
\end{aligned}$$

□

O seguinte teorema dá uma decomposição espectral do operador T, e também de suas potências T^n.

Teorema 4.1. *O operador T é compacto e auto-adjunto em $L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$. Seus auto-valores cada um com multiplicidade um, são $\dfrac{1}{4k+1}$ com $k \in \mathbb{Z}$ e as correspondentes autofunções ortogonais são $\Phi_k(u) = \cos\left((4k+1)u\right)$.*

Demonstração:

Lembrando que

$$\begin{array}{rcl} T(f) : \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big) & \to & \mathbb{R} \\ v & \to & (Tf)(v), \end{array}$$

e também

$$\Big\langle Tu, v \Big\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(u)(x)\, \overline{v(x)}\, dx.$$

Vamos mostrar que T é auto-adjunto, isto é, $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle Tu, v\rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(u)(x)\, \overline{v(x)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(y)\, k_1(y,x)\, dy \Big) \overline{v(x)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(y)\, \overline{v(x)}\, k_1\, (y,x)\, dy\, dx, \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variáveis y por t e x por s, temos:

$$\langle Tu, v\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, \overline{v(s)}\, k_1(t,s)\, dt\, ds. \tag{4.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle u, Tv\rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)\, \overline{T(v)(x)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)\, \overline{\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} v(y)\, k_1\, (y,x)\, dy \Big)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)\, \overline{v(y)}\, k_1\, (y,x)\, dy\, dx, \end{aligned} \tag{4.7}$$

fazendo a mudança de variáveis x por t e y por s, temos:

$$\langle u, Tv \rangle \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, \overline{v(s)}\, k_1\,(s,t)\, dt\, ds.$$

Como k_1 é simétrico, temos que $k_1\,(t,s) \;=\; k_1\,(s,t)$. Logo as integrais em (4.6) e (4.7) são iguais e assim

$$\langle Tu, v \rangle \;=\; \langle u, Tv \rangle.$$

Portanto, T é auto-adjunto.

Vamos calcular os autovalores e as autofunções de T.

Seja λ um autovalor de T e f a correspondente autofunção. Logo,

$$\begin{aligned} T(f) &= \lambda f \\ T(f)(v) &= \lambda f(v), \quad \forall\, v\, \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big). \end{aligned}$$

Por (4.4), temos que

$$T(f)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\, du.$$

Logo devemos ter

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\, du = \lambda\, f(v). \tag{4.8}$$

Se $\lambda = 0$ então $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\, du = 0;\;\; \forall v \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)$.

Como $f \in L^1\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, de acordo com o Teorema $A.4$ do Apêndice, a função

$$F(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(x)\, dx$$

é absolutamente contínua e derivável com $F'(v) \;=\; f\Big(\dfrac{\pi}{2} - v\Big)$. Mas, por hipótese $F(v) = F'(v) = 0$ e, assim, $f\Big(\dfrac{\pi}{2} - v\Big) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ quase sempre.

Portanto, λ é diferente de zero. Daí podemos dividir toda a equação (4.8) por λ. Assim,

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\ du = f(v).$$

Para derivar a equação acima, em v, devemos verificar se f é contínua e derivável.

a) Devemos mostrar que f é contínua, ou seja, $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ v\ \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$|v - v_0| < \delta \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| < \epsilon.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|f(v) - f(v_0)| &= \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\ du - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}-v_0} f(u)\ du\right| \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\quad \left|\int_{\frac{\pi}{2}-v_0}^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\ \ du\right| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\quad \int_{\frac{\pi}{2}-v_0}^{\frac{\pi}{2}-v} |f(u)|\ \ du \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\quad \left(\int_{\frac{\pi}{2}-v_0}^{\frac{\pi}{2}-v} 1^2\ \ du\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{2}-v_0}^{\frac{\pi}{2}-v} |\ f(u)\ |^2\ \ du\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\|f\|_2}{|\lambda|}\ \ |v - v_0|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Tomando $\delta = \left(\frac{|\lambda|\ \epsilon}{\|f\|_2}\right)^2$, temos $|v - v_0| < \delta \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| < \epsilon$.

Logo f é contínua.

b) Devemos mostrar que f é derivável. Para tanto, basta utilizarmos o teorema $A.5$ do apêndice, logo concluímos que f é derivável.

Agora vamos derivar a equação (4.8), que é igual a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\ du = \lambda\ f(v).$$

Seja $F(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u)\ du$, vamos encontrar $F'(v)$.

Tome $H(v) = \int_0^{v} h(u)\ du$, onde $h(u) = f(u)$ e $g(v) = \frac{\pi}{2} - v$. Assim,

$$F(v) = H(g(v)) = \int_0^{g(v)} f(u)\, du, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} F'(v) &= H'(g(v))\, g'(v) \\ &= h(g(v))\, (-1) \\ &= -f\Big(\frac{\pi}{2} - v\Big). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$f\Big(\frac{\pi}{2} - v\Big) = -\lambda\, f'(v). \tag{4.9}$$

Derivando a equação (4.9), em v temos:

$$-f'\Big(\frac{\pi}{2} - v\Big) = -\lambda\, f''(v) \Rightarrow f'\Big(\frac{\pi}{2} - v\Big) = \lambda\, f''(v).$$

Mas,

$$f'\Big(\frac{\pi}{2} - v\Big) = -\frac{1}{\lambda}\, f\Big(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - v)\Big) = -\frac{1}{\lambda}\, f(v).$$

Logo, $\lambda^2\, f''(v) = -f(v)$.

Assim temos a seguinte equação:

$$\lambda^2\, f''(v) + f(v) = 0,$$

que é uma Equação Diferencial Ordinária, cuja solução geral é

$f(v) = A\, \cos\Big(\dfrac{v}{\lambda}\Big) + B \,\text{sen}\, \Big(\dfrac{v}{\lambda}\Big)$, com A e B constantes arbitrárias.

Utilizando (4.8), vamos calcular $f\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)$. Note que,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} f(u)du = \lambda\, f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \Rightarrow f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0.$

Agora, fazendo $v = 0$ na equação (4.9), temos $f\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = -\lambda\, f'(0) \Rightarrow f'(0) = 0$.

Mas,

$$f'(v) = -\frac{A}{\lambda}\,\text{sen}\,\Big(\frac{v}{\lambda}\Big) + \frac{B}{\lambda}\, \cos\Big(\frac{v}{\lambda}\Big).$$

Logo,

$f'(0) = -\dfrac{A}{\lambda}\,\mathrm{sen}(0) + \dfrac{B}{\lambda}\cos(0) = 0 \Rightarrow \dfrac{B}{\lambda} = 0 \Rightarrow B = 0.$

Assim, $f(v) = A\ \cos\left(\dfrac{v}{\lambda}\right)$. Logo, $0 = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = A\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2\lambda}\right)$.

Supondo $A \neq 0$ para evitar a solução nula, então

$$\cos\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, $\lambda = \dfrac{1}{1+2k}$.

Concluímos que λ deve ser o inverso de um inteiro ímpar. Agora λ e $-\lambda$ podem dar origem a mesma autofunção $f(v) = \cos\left(\dfrac{v}{\lambda}\right)$. Para escolher o sinal de λ, vamos tomar $v = 0$ na equação (4.8). Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\ du = \lambda\ f(0).$$

Mas,

$f(u) = A\ \cos\left(\dfrac{u}{\lambda}\right) \Rightarrow f(u) = A\ \cos((2k+1)u)$ e $f(0) = A\ \cos(0) \Rightarrow f(0) = A$

Logo, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\ \cos\left((2k+1)u\right)\ du = \lambda\ A \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2k+1}\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}.$

Pela seguinte tabela podemos observar melhor o comportamento de λ e de $f(v)$.

K	$\lambda = 1/(2k+1)$	$\lambda = (-1)^k/(2k+1)$	$f(v) = \cos(v/\lambda)$
-4	$-1/7$	$-1/7$	$\cos(7v)$
-3	$-1/5$	$1/5$	$\cos(5v)$
-2	$-1/3$	$-1/3$	$\cos(3v)$
-1	-1	1	$\cos(v)$
0	1	1	$\cos(v)$
1	$1/3$	$-1/3$	$\cos(3v)$
2	$1/5$	$1/5$	$\cos(5v)$
3	$1/7$	$-1/7$	$\cos(7v)$
4	$1/9$	$1/9$	$\cos(9v)$.

Da terceira coluna na tabela acima concluímos que os autovalores são: $\lambda = 1,\ -1/3,\ 1/5,\ ...$ e têm sua correspondente autofunção $f(v) = \cos\left(\dfrac{v}{\lambda}\right)$ satisfazendo a equação (4.8), para todo v em $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Pelo teorema $A.7$ do apêndice temos que $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\,(\cos(v), \cos(3v), \cos(5v), ...)$ formam uma base em $L^2\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vamos mostrar que T é compacto. Para fazer isto, usaremos o teorema $A.6$ do apêndice.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em $L^2\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Inicialmente mostraremos que $T(f_n)$ é limitada, ou seja, $\|T(f_n)\|_2{}^2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |T(f_n)(x)|^2\,dx \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostramos anteriormente que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |(Tf)(v)|^2\,dv \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(u)|^2\,du.$$

Logo, $\|T(f_n)\|_2 \leq \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(v)|^2 dv} \ \leq\ \dfrac{\pi}{2}\,c$. Assim, $T(f_n)$ é limitada.

Vamos mostrar que $T(f_n)$ é equicontínua, ou seja, $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x, y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ temos que $|x - y| < \delta \Rightarrow |T\ f_n(x) - T\ f_n(y)| < \epsilon,\ \ \forall\ \ n \in \mathbb{N}$.

Mas,

$$\begin{aligned}
\big|\, Tf_n(x) - Tf_n(y)\big| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(u)\ k_1(u,x)\ du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(u)\ k_1(u,y)\ du\right| \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(u)|\ |k_1(u,x) - k_1(u,y)|\ du \\
&\leq \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(u)|^2\ du\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |k_1(u,x) - k_1(u,y)|^2\ du\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(u)|^2\ du\Big)^{\frac{1}{2}} \leq c_1$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} |k_1(u,x) - k_1(u,y)|^2\ du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} |k_1(u,x) - k_1(u,y)|^2\ du \\
&+ \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}-y} |k_1(u,x) - k_1(u,y)|^2\ du \\
&+ \int_{\frac{\pi}{2}-y}^{\frac{\pi}{2}} |k_1(u,x) - k_1(u,y)|^2\ du \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}-y} 1du \\
&= x - y = |x-y|, \qquad \textit{onde}\ \ x > y.
\end{aligned}$$

Logo, $\big|\ Tf_n(x) - Tf_n(y)\ \big| \leq c_1\ \sqrt{|x-y|}$.

Assim, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon^2}{{c_1}^2}$, temos que para $\big|\ x-y\big| < \delta \Rightarrow \big|\ Tf_n(x) - Tf_n(y)\big| < \epsilon$,

portanto $T(f_n)$ é equicontínua.

Pelo teorema $A.6$ do apêndice, temos que $T(f_n)$ possui uma subsequência que converge uniformemente e, assim, de acordo com a definição $D.2$ do apêndice, T é um operador compacto.

$\square$

Corolário 4.1. *O operador T^n é compacto e auto-adjunto em $L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$. Os auto-valores, cada um com multiplicidade um são $\dfrac{1}{(4k+1)^n}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ com as correspondentes autofunções ortogonais $\Phi_k(u) = \cos((4k+1)u)$.*

Demonstração:

Como T é compacto então $T^n = T \circ T \circ \ldots \circ T$ também é compacto de acordo com a proposição $B.2$ do apêndice.

Além disso, T^n é auto-adjunto, pois T é auto-adjunto. De fato, para $n = 2$ temos:

$$\left\langle T^2(u), v \right\rangle \;=\; \left\langle T(T(u)), v \right\rangle \;=\; \left\langle T(u), T(v) \right\rangle \;=\; \left\langle u, T^2(v) \right\rangle,$$

analogamente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que, se λ e f são autovalor e autofunção de T, respectivamente , isto é, $T(f) = \lambda f$ então,

$$T^2(f) = T(T(f)) = T(\lambda f) = \lambda T(f) = \lambda^2 f.$$

Assim λ^2 e f são os autovalores e autofunções de T^2, respectivamente.

Analogamente para $n \in \mathbb{N}$ fixado.

$\square$

Corolário 4.2. *Toda função f em $L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ é da forma*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \;\cos\left((4k+1)u\right)$$

com coeficientes f_k dados por

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \;\cos\left((4k+1)u\right)\, du$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\; (T^n f)(u)\; du = \frac{\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{{f_k}^2}{(4k+1)^n} \tag{4.10}$$

Demonstração:

De acordo com o teorema (4.1) e o teorema $A.7$ do apêndice, as autofunções de T formam uma base Hilbertiana em $L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, isto é, $\forall f \in L^2\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, temos que $f(u) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \, \cos\left((4k+1)u\right)$, onde $f_k \in \mathbb{R}$.

O cálculo dos coeficientes f_k é feito como em Brézis [6]. Para $i \in \mathbb{Z}$ fixado temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\,\cos\left((4i+1)u\right)\,du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\,\cos\left((4k+1)u\right)\,\cos\left((4i+1)u\right)\,du \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left((4k+1)u\right)\,\cos\left((4i+1)u\right)\,du \\
&= f_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left((4i+1)u\right)\,\cos\left((4i+1)u\right)\,du \\
&= f_i\,\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Então, $\quad f_i = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\,\cos\left((4i+1)u\right)\,du.$

Agora mostraremos a igualdade (4.10), onde

$$\begin{aligned}
(T^n f)(u) &= T^n\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\,\cos\left((4k+1)u\right)\Big) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T^n\big(f_k\,\cos\left((4k+1)u\right)\big) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\,T^n(\cos\left((4k+1)u\right)) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(4k+1)^n}\,\cos\left((4k+1)u\right)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\,(T^n f)(u)du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(4k+1)^n}\ \cos\left((4k+1)u)\right)du \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \frac{f_k}{(4k+1)^n}\ \cos\left((4k+1)u)\right)du \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(4k+1)^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \cos\left((4k+1)u)\right)du \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(4k+1)^n} f_k \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{{f_k}^2}{(4k+1)^n}\ .
\end{aligned}$$

□

Finalmente, através da proposição abaixo, estabelecemos uma relação entre o traço de um operador T^n da classe do traço e o volume do politopo Π_n. Para a definição de operador da classe do traço veja definição $D.5$ do apêndice.

Proposição 4.3. *T^n é da classe do traço.*

Demonstração:

De acordo com o corolário (4.1) temos:

$T^n(\Phi_k) = \dfrac{1}{(4k+1)^n}\ \Phi_k$, onde $\Phi_k(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\ \cos((4k+1)u)$ é a autofunção.

De acordo com as definições $D.3$ e $D.4$ do apêndice temos:

$tr(|T^n|) = \displaystyle\sum_k \left\langle \Phi_k, \sqrt{(T^n)^* T^n}(\Phi_k)\ \right\rangle.$

Mas T^n é autoadjunto, logo $\sqrt{(T^n)^* T^n} = \sqrt{T^n T^n} = T^n$.

Assim, $\sqrt{(T^n)^* T^n}\ (\Phi_k) = T^n(\Phi_k) = \dfrac{1}{(4k+1)^n}\ \Phi_k.$

Portanto,

$$\begin{aligned} tr(|T^n|) &= \sum_k \left\langle \Phi_k, \frac{1}{(4k+1)^n}\ \Phi_k \right\rangle \\ &= \sum_k \frac{1}{(4k+1)^n}\ \ \| \Phi_k \|^2 \\ &= \sum_k \frac{1}{(4k+1)^n} \\ &< \infty \end{aligned}$$

$\square$

Logo, T^n é da classe do traço e além disso $tr(|T^n|) = S(n)$.

Os resultados vistos acima nos permitem apresentar uma nova demonstração do teorema (3.1) que relaciona o volume do politopo Π_n com a soma $S(n)$.

O traço de um operador da classe do traço também é a integral do seu núcleo (no nosso caso k_n) sobre a diagonal.

De fato, temos que $Tf(x) = \displaystyle\int k_1(y,x)f(y)dy$. Como T é auto-adjunto e compacto, T tem uma base de autovetores, isto é, podemos representar T da seguinte forma:

$Tf(x) = \displaystyle\sum_n \lambda_n \langle f, \Phi_n \rangle \Phi_n(x)$, onde a soma converge em L^2.

Assim,

$$\begin{aligned} tr(T) &= \sum_n \langle \Phi_n, T\Phi_n \rangle = \sum_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_n(x)\ \overline{T\Phi_n(x)}dx \\ &= \sum_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{k_1(y,x)\Phi_n(y)}\ \Phi_n(x)dydx \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $\{\Phi_n(x)\Phi_m(y)\}_{m,n}$ é base ortonormal de $L^2\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]^2\right)$. Logo, $k_1(y,x) = \displaystyle\sum_{m,n} c_{m,n}\Phi_n(x)\Phi_m(y)$. Após alguns cálculos, obtemos $c_{m,n} = 0$

quando $m \neq n$ e $c_{n,n} = \lambda_n$. Substituindo a expressão para $k_1(y,x)$ na expressão para o traço dada acima, obtemos que

$$tr(T) = \sum_n \lambda_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(x,x)dx.$$

Em nosso caso, utilizando o resultado acima, temos:

$$tr(|T^n|) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n(u,u)du.$$

Assim, de acordo com a proposição 4.1 b) e com a proposição 4.3, temos:

$$Vol(\Pi_n) = tr(|T^n|) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(4k+1)^n}.$$

$\square$

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos a série $S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4k+1)^{-n}$. Uma importância desta série está na sua relação com as séries Zeta de Riemann e L de Dirichlet.

Mostramos que $S(n)$ é um múltiplo racional de π^n de três maneiras diferentes, isto é, através do uso de funções geradoras com a teoria de variáveis complexas; relacionando $S(n)$ através da mudança de variáveis de E. Calabi com o volume de um politopo em $\mathbb{R}^n$ e finalmente utilizando-se da teoria de operadores integrais lineares.

Pensamos que possivelmente tais métodos podem ser utilizados para obtermos conclusões a respeito de outras séries.

Finalmente gostariamos de ressaltar que a série Zeta de Riemann ainda apresenta problemas em aberto, por exemplo, nenhuma soma da Zeta é conhecida para os valores ímpares.

APÊNDICE A

Teorema A.1. *Seja a série dupla* $\sum(x_{ij})$ *absolutamente convergente em* $\mathbb{R}^p$*. Então ambas as séries iteradas* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}$ *convergem para o mesmo valor anterior.*

Demonstração: Veja BARTLE [2] na página 283.

Definição D.1. *Seja* $F \subset \mathbb{R}^m$ *e* $f : F \to F$ *uma função. Dizemos que* f *é uma contração se* $\exists\ 0 < \gamma < 1$ *tal que* $|f(x) - f(y)| \leq \gamma\, |x - y|; \forall\, x, y \in F$.

Teorema A.2. *Teorema do Ponto Fixo para Contrações: Seja* $F \subset \mathbb{R}^m$ *um subconjunto fechado e* $f : F \to F$ *uma contração. Dado qualquer ponto* $x_0 \in F$*, a seqüência* $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \ldots, x_{k+1} = f(x_k),\ \ldots$ *converge para um ponto* $a \in F$*, que é o único ponto fixo de* f.

Demonstração: Veja LIMA [12] na página 279.

Teorema A.3. *Teorema de Mudança de Variáveis: Sejam* $h : U \to V$ *um difeomorfismo de classe* C^1 *entre abertos,* $U, V \subset \mathbb{R}^m, X \subset U$ *um compacto J-mensurável e* $f : h(X) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável. Então* $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ *é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot det|h'(x)|dx$$

Demonstração: Veja LIMA [12] na página 387.

Teorema A.4. *Seja* $g \in L^1(a,b)$ *e* $f(x) = \int_a^x g(t)\ dt$. *Então* f *é absolutamente contínua e* $f'(x) = g(x)$ *quase sempre em* (a,b).

Demonstração: Veja RUDIN [15] na página 176.

Teorema A.5. *Seja* f *uma função integrável a Riemann em* $[a,b]$. *Para* $a \leq x \leq b$, *definimos* $F(x) = \int_a^b f(t)\ dt$. *Então* F *é contínua em* $[a,b]$. *Além disso, se* f *é contínua em um ponto* x_0 *de* $[a,b]$, F *é derivável em* x_0 *e* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demonstração: Veja RUDIN [14] na página 130.

Teorema A.6. *Seja* K *um conjunto compacto em* $\mathbb{R}^n$.

(a) *Se* (f_n) *é uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas em* K, *então* (f_n) *é equicontínua em* K.

(b) *Se* (f_n) *é limitada e equicontínua em* K, *então* (f_n) *contém uma subsequência uniformemente convergente e* (f_n) *é uniformemente limitada em* K.

Demonstração: Veja RUDIN [14] na página 163.

Teorema A.7. *Seja* H *um espaço de Hilbert separável e* $T : H \to H$ *um operador auto-adjunto e compacto. Então* H *admite uma base Hilbertiana formada pelos vetores próprios de* T. *Além disso, o único ponto de acumulação possível para o conjunto de autovalores é* $\lambda_0 = 0$ *e cada autoespaço associado a um autovalor não nulo tem dimensão finita.*

Demonstração: Veja BRÉZIS [6] na página 97.

Proposição B.1. *Desigualdade de Cauchy-Schwartz: Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $f, g \in L^2(\Omega)$, *então:*

$$\int_\Omega \big|f(x)g(x)\big|dx \leq \Big(\int_\Omega \mid f(x) \mid^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} . \Big(\int_\Omega \mid g(x) \mid^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração: Veja BRÉZIS [6] na página 56.

Proposição B.2. *Sejam* E, F, G *três espaços de Banach,* $T : E \to F$ *linear contínua e* $S : F \to G$ *um operador compacto. Então* $SoT : E \to G$ *é um operador compacto.*

Demonstração: Veja BRÉZIS [6] na página 90.

Definição D.2. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach. Dizemos que o operador* $T \in L(X, Y)$ *é compacto se para toda sequência* $(x_n) \subset X$, (Tx_n) *tem uma uma subsequência convergente em* Y.

Definição D.3. *Seja* H *um espaço de Hilbert separável e* $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma base ortonormal de* H. *Para cada operador positivo* $T \in L(h) = \{\, T : H \to H$ *tal que* T *é linear e limitado*$\}$ *definimos seu traço como:*

$$tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \big\langle \Phi_n, T\Phi_n \big\rangle$$

Definição D.4. *Dada* $T \in L(h)$, *definimos* $|T| = \sqrt{T^*T}$ *onde* T^* *é o adjunto de* T.

Definição D.5. *Dado* $T \in L(h)$, *dizemos que* T *é da classe do traço se* $tr(|T|) < \infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] APÉRY, R. *Irrationalité de $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$.* Astérisque, 61, 1979.

[2] BARTLE, Robert G. *Elementos de análise real.* Rio de Janeiro : Campus, 1983.

[3] BEUKERS, F. *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$.* Bull London Math. Soc., 1979.

[4] BOYER, Carl B. *História da matemática.* São Paulo : Edgard Blücher, 1974.

[5] BISZTRICZKY, T. *Polytopes: abstract, convex, and computational.* Kluwer Academic, 1994.

[6] BRÉZIS, Haïm. *Análisis funcional* : teoría y aplicaciones. Madrid : Alianza Editorial, 1983.

[7] CHURCHILL, Ruel V. *Variáveis complexas e suas aplicações.* São Paulo : McGraw-Hill do Brasil, 1975.

[8] EDWARDS, H. M. *Riemann's zeta function.* Academic Press, 1974.

[9] ELKIES, Noam D. On the sums $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(4k+1)^{-n}$. *Amer. Math. Monthly*, 110, 7, 2003.

[10] EULER, L. *Institutiones calculi diferentialis.* St. Petesburg : Acad. Imp. Sci. Petropolitanae, 1755.

[11] KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times.* v. 3. New York : Oxford University Press, 1972.

[12] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise.* 2. ed. Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989, v. 2.

[13] REED, Michael ; SIMON, Barry. *Méthods of modern mathematical physics.* New York : Academic Press, 1972.

[14] RUDIN, W.. *Princípios de análise matemática.* Rio de Janeiro : Livro técnico S. A., 1971.

[15] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis.* 2.ed. Nova York : MacGraw-Hill Book Company, 1974.

[16] SPIEGEL, Murray R. *Manual de fórmulas e tabelas matemáticas.* São Paulo : McGraw-Hill, 1973.