Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação – PGIE

O DIÁLOGO MATEMÁTICO E O PROCESSO DE TOMADA DE CONSCIÊNCIA DA APRENDIZAGEM EM AMBIENTES TELEMÁTICOS

Linha de Pesquisa: Ambientes Informatizados de Ensino-Aprendizagem

LAURETE ZANOL SAUER

Porto Alegre

2004

Laurete Zanol Sauer

O diálogo matemático e o processo de tomada de consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos

Tese apresentada ao Curso de Pós-graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, para obtenção do título de Doutor em Informática na Educação.

Orientador: Dr Antônio Carlos da Rocha Costa

Co-orientadora: Dr[a] Cleci Maraschin

Porto Alegre

Abril de 2004

AGRADECIMENTOS

A Deus agradeço, reconhecendo Sua presença em todos os momentos e nesta fase, em especial, quando foi possível confirmar o valor de minha fé, vivendo-a com grande intensidade. Convocou-me a aproveitar a vida e a aceitar o que ela me oferece, o que me faz acreditar que vale a pena vivê-la procurando sempre ser feliz. Compreendi que *"a fé e a razão constituem como que as duas asas pelas quais o espírito humano se eleva para a contemplação da verdade"*, conforme sábias palavras de João Paulo II (1998).

O apoio, o abraço, o ouvido e o colo, tudo o que depende não somente de mim, tenho recebido, o que me torna ainda mais comprometida com as pessoas queridas que me acompanharam nesta trajetória. Sei que não esperam meu agradecimento e, sim, minha felicidade. Eu mesma, nem saberia agradecer com palavras tantos gestos de carinho, de amizade e de apoio que recebi e que me fizeram, também, acreditar que poderia vencer esta etapa.

Mesmo assim quero expressar, como forma de agradecimento, meu desejo de que também encontrem a felicidade e a satisfação que me proporcionaram, cada um a seu tempo, a seu modo, de acordo com suas possibilidades.

Aos queridos orientadores Cleci Maraschin e Antônio Carlos da Rocha Costa que me compreenderam, desafiaram, apoiaram, e com quem também divido esta realização.

Aos brilhantes professores do curso de Informática na Educação, com quem tive o privilégio de conviver e que influenciaram sobremaneira o meu trabalho. Na ordem de realização das disciplinas: Lea Fagundes, Liane Tarouco, Rosa Viccari, Lucila Santarosa, Fernando Becker e Sérgio Franco.

Aos caros colegas e amigos que atentamente assistiram a apresentação de meu trabalho e que brindaram comigo a conclusão de uma fase tão significativa na vida de um pesquisador que valoriza a busca do conhecimento e encontra satisfação nisto.

À especial banca formada pelos professores Fernando Becker, Helena Noronha Cury e Walter Antonio Bazzo que me honraram com sua leitura atenta e sugestões valiosas que qualificaram meu trabalho.

À prof[a]. Margaret Axt que, com competência e atenção, vem atuando na coordenação do PGIE.

À Maria do Carmo Andrade Toscani, secretária do PGIE, pelo auxílio, sempre que necessário.

À minha querida Odila, mãe maravilhosa que ainda me incentiva e acompanha, me encorajando, protegendo e abençoando e me ensinando sempre mais a enfrentar desafios.

Ao meu amado Flávio, pelo amor, pela força, incentivo, paciência e auxílio na realização deste trabalho.

Às minhas jóias mais preciosas, o Felipe e a Débora, pelo muito que me ensinam desde que entraram na minha vida para me fazer muito mais feliz.

À minha queridíssima amiga Isolda, pelo companheirismo, parceria e apoio, com quem divido grande parte deste trabalho.

Às queridas amigas: Eliana Maria do Sacramento Soares, a quem devo minha gratidão também pela leitura atenta e sugestões relevantes na interpretação das análises realizadas; Carla Valentini e Naura Andrade Luciano, também colegas neste curso de doutorado, que me acompanharam com carinho e a todos os demais colegas com quem tive a satisfação de conviver durante o curso.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Caxias do Sul e aos meus alunos, que permitiram a realização das pesquisas, em especial às queridas bolsistas de iniciação científica que, também acreditando que podemos melhorar as condições de aprendizagem de seus colegas, dispuseram-se a prestar todo o auxílio, valorizando também a aprendizagem sob o enfoque deste trabalho.

E há o meu adorável pai Edevino Domenico Zanol, que só não está aqui pois precisou partir muito cedo, mas de quem ainda sinto a presença e o sorriso de admiração e orgulho que sempre me incentivaram, em todas as minhas tentativas de progresso.

A todos quero poder dar meu abraço sincero, que represente palavras que não foram escritas e o agradecimento por terem, também, iluminado meus caminhos nesta fase de minha vida!

O papel de uma teoria científica não é o de fornecer uma solução tão geral dos problemas que se torne irrefutável à experiência, mas, ao contrário, o de abrir novos caminhos sobre os quais se reencontrarão, cedo ou tarde, novos obstáculos fecundos.

(PIAGET apud MONTANGERO, 1998, p. 15).

RESUMO

Este estudo discute a possibilidade do emprego de ambientes computacionais de aprendizagem para a educação matemática de graduandos universitários. Além da organização do conteúdo matemático de Cálculo Diferencial e Integral em atividades realizadas no ambiente implementou-se um diálogo reflexivo entre os participantes da experiência. Busca-se analisar se o diálogo promove tomadas de consciência tanto no sentido dos conteúdos aprendidos (operatividade conceitual) como dos próprios modos dos alunos aprender e significar os conteúdos matemáticos.

A Epistemologia Genética de Piaget e a Pedagogia de Freire são as teorias que fundamentam as leituras dos diálogos promovidos e analisados.

São criados e analisados espaços de experimentação, de conversação, em que sejam possíveis a compreensão das noções matemáticas, a observação questionadora e a possibilidade de argumentação; que permita estimular a capacidade de criar e recriar, a fim de confirmar a relação de co-implicação entre as concepções epistemológicas do aluno e a aprendizagem decorrente de seu envolvimento em diálogos matemáticos.

A análise dos dados demonstra que a experiência de aprendizagem configurada possibilitou a realização de atividades de interação com cooperação, que promove descentração e a conseqüente tomada de consciência (do ponto de vista pessoal e das atividades próprias), culminando com o desenvolvimento de autonomia intelectual, necessária à aprendizagem. Essa análise também demonstra a importância de pensar a respeito do que sabemos, como sabemos, como fazemos para saber e o que estamos fazendo e aprendendo, o que ajuda a aumentar o grau de consciência e, conseqüentemente, promove melhores níveis de aprendizagem, a partir da participação ativa em diálogos, com demonstração de reflexão crítica.

ABSTRACT

This study discusses the possibility of using learning computing environments to mathematical education for university students. Besides organizing the Differential and Integral Calculus content in activities performed in this environment, it was implemented a reflexive dialogue among participants in this experiment. It is intended to analyze if this dialogue makes students be aware concerning their learned content (conceptual operating situation) as well as their own ways of learning and meaning mathematical subjects.

Piaget's genetical epistemology and Freire's pedagogy are theories that support the readings of the promoted and analyzed dialogues.

Experimental and conversational spaces are created and analyzed, in order to make possible to comprehend mathematical notions, to observe critically and to argumentate. It is necessary to make possible a stimulation to creation and recreation capacities, in order to confirm the relationship of co-implication between the students' epistemological conceptions and learning from their envolvement with mathematical dialogues.

Data analysis has shown that the presented learning experience made possible to accomplish interaction activities with cooperation, promoting a decentralization and, consequently, learning awareness (from personal point of view and own activities). It culminates in developing intellectual autonomy, which is necessary to learn. This analysis also demonstrates the importance of thinking about what we know, how we know, how we make to know, and what we are doing and learning. It helps to increase consciousness degree and, as a result, it promotes better learning levels from the active participation in conversation, demonstrating critical reflection.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO: SOB O SOL

TECENDO A MANHÃ

Um galo sozinho não tece uma manhã:
ele precisará sempre de outros galos.
De um que apanhe o grito que ele
e o lance a outro; de um outro galo
que apanhe o grito que um galo antes
e o lance a outro; e de outros galos
que com muitos outros galos se cruzem
os fios de sol de seus gritos de galo,
para que a manhã, desde uma teia tênue,
se vá tecendo, entre todos os galos.

E se encorpando em tela, entre todos,
se erguendo tenda, onde entrem todos,
se entretendendo para todos, no toldo
(a manhã) que plana livre de armação.
A manhã toldo de um tecido tão aéreo
que, tecido, se eleva por si: luz balão.

(JOÃO CABRAL DE MELO NETO)

Um educador sozinho não tece uma manhã. Ele precisa dos outros, educadores e educandos, que precisam dele e todos precisamos dos raios de sol que, cruzados em teia, se constituam tenda onde possamos estar todos, sujeitos autônomos, porém desafiados pelo desejo de mudar, de romper com as antigas manhãs e dispostos a formar uma comunidade livre de armação em que o *querer bem*, o *respeito*, a *ética*, a *esperança*, a *dignidade*, a *reflexão crítica* e a *aceitação do novo* sejam suporte para a construção do conhecimento.

A consciência sobre dificuldades que professores e alunos encontram ao lidarem com a Matemática, aliada à da necessidade de enfrentar essa questão, dada a sua importância no contexto educacional, refletindo-se nos mais diversos setores da atividade humana, sempre me desafiou. E, com maior ou menor afinco, dependendo da oportunidade, nunca deixei de questionar-me sobre razões para tais dificuldades, não só por vivenciá-las, mas principalmente por aceitar o desafio. Percebi que para enfrentá-lo é preciso, dentre outras coisas, encontrar formas de *escutar* e *encorajar* colegas e alunos. E é para eles que é endereçado este trabalho. Procurando redigir esta introdução, refletindo sobre o estudo realizado, percebo que a metáfora do Sol está presente durante todo o desenvolvimento da pesquisa, especialmente no que se relaciona à tomada de consciência, tanto de minha parte, como pesquisadora, como das constatações em relação às possibilidades que vislumbro ao destacá-la como elemento favorecedor de aprendizagem. Com efeito, a superação das dificuldades evidenciadas requer o abandono de algumas práticas pedagógicas consolidadas, o que não é fácil e somente pode ser desencadeado na reflexão sobre tais práticas e na conseqüente *tomada de consciência* da necessidade e das possibilidades de mudança. Por outro lado, a construção do conhecimento, em cada nível do desenvolvimento humano, ocorre como conseqüência da interiorização das ações, o que só se dá *conscientemente*. Assim, o movimento do Sol ajuda a evidenciar como é possível sair do *não-saber* para a *tomada de consciência*, em qualquer uma das posições em que nos encontremos, quais sejam, as de professor ou de aluno.

Enquanto professora-pesquisadora, tenho procurado proporcionar ambientes de aprendizagem em que possam ser considerados saberes, concepções e expectativas dos alunos. Com uma proposta pedagógica cuja fundamentação, conforme justifico, é baseada na Epistemologia Genética, tais ambientes de aprendizagem são concebidos levando em consideração o ponto de vista do aluno sobre seu papel, o papel do professor e o que ambos pretendemos com a disciplina ou o curso. Todas as informações são levantadas por meio de diálogos que visam também promover a reflexão sobre a importância de atividades interativas como colaboradoras de aprendizagem. Ao levar em conta as concepções do aluno, entendo que uma proposta construtivista, baseada no diálogo, permite a aproximação de Piaget e Freire, que me fornecem argumentos para justificá-la. Nesses ambientes, nem sempre é possível *ouvir* o aluno, mas é sempre possível *escutá-lo*, procurando valorizar seu estudo, respondendo aos seus anseios com respeito e expectativa. Este, por sua vez, precisa sentir-se também desafiado, de forma que aceite envolver-se. Minha aposta é que, quando isso ocorre, também ocorre aprendizagem que, em Matemática, não dispensa boas justificativas e argumentos, indo além de simples *traduções* de operações realizadas.

Assim, no segundo capítulo, procuro descrever *questões e contexto da pesquisa*, fazendo um retrospecto da caminhada, desde as reflexões sobre minha própria atuação como professora, diante das exigências relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral. Nesse cenário situo o campo de problematizações que emergem de questionamentos diante de problemas identificados e vivenciados por alunos e professores preocupados com a aprendizagem e com a aprendizagem de Matemática, em particular de Cálculo Diferencial e

Integral. Buscando fazer frente a tais exigências, destaco a necessidade de encontrar apoio numa teoria de aprendizagem capaz de fundamentar novas ações e justifico minha opção pela Epistemologia Genética de Piaget. A partir de seus pressupostos, situo o foco da pesquisa na relação de co-implicação entre concepções epistemológicas e aprendizagem ativa, oportunizada por ações e reflexões, desencadeadas pelo diálogo.

No terceiro capítulo, *condições de aprendizagem* são destacadas com a finalidade de justificar possíveis ações a serem implementadas, levando em conta os conceitos propostos por Piaget e autores cujas teorias permitem a aproximação com a Epistemologia Genética. Encontro em Freire argumentos que justificam o diálogo como possibilidade de ação conscientizadora que não dispensa a tomada de consciência piagetiana.

Diante dessas considerações, no quarto capítulo, *ambientes de aprendizagem enriquecidos com recursos telemáticos* são apresentados a partir de minha concepção de ambiente de aprendizagem. São destacadas as principais características e os recursos tecnológicos disponíveis nos ambientes de apoio ao desenvolvimento de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e do projeto Programa em educação a distância para a melhoria das condições de aprendizagem de Matemática (Mecam), fundamentais para a realização da pesquisa. O Mecam é descrito, neste capítulo, como um projeto de pesquisa institucionalizado na Universidade de Caxias do Sul, visando oferecer cursos a distância para alunos reprovados, a partir do qual também é possível considerar as questões que movimentam este estudo.

No quinto capítulo, o *delineamento da pesquisa* é realizado com um tratamento de pesquisa-ação com observação participante. Os diálogos que envolveram alunos de Cálculo Diferencial e Integral e do projeto Mecam, promovidos e registrados nos ambientes de aprendizagem, fornecem os indicadores para a análise interpretativa apresentada e discutida neste capítulo.

Finalmente, no sexto capítulo, retomo a caminhada, como forma de rever e reconstruir o plano, procurando evidenciar algumas conclusões que também apontam para a necessidade de novas pesquisas que confirmem ou esclareçam questões que emergem de novas possibilidades destacadas.

2 QUESTÕES E CONTEXTO DA PESQUISA

A essência de toda vida é a emoção que existe
dentro de você, é a sua atitude para com os outros.
Se a sua motivação é pura e sincera, todo o resto vem por si.
Você pode desenvolver essa atitude correta
para com seus semelhantes baseando-se na bondade,
no amor, no respeito e, sobretudo, na clara
percepção da singularidade de cada ser humano.
(DALAI LAMA)

A pesquisa está inserida no contexto da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. No retrospecto da caminhada, desde as primeiras preocupações como professora de disciplinas matemáticas na graduação, descrevem-se algumas constatações relacionadas a exigências e condições de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. A busca por uma teoria de aprendizagem é um dos primeiros desafios a serem enfrentados, a fim de fundamentar novas ações, a partir da criação de ambientes de aprendizagem com características interativas, que privilegiem a ação, a reflexão, a argumentação e a pesquisa. As reflexões sobre possíveis concepções de aprendizagem orientaram para a Epistemologia Genética, teoria na qual se encontra "sossego" para as inquietações, que deram origem a este estudo. São explicitadas as questões de pesquisa e o objetivo do estudo.

2.1 Primeiros caminhos percorridos

Este estudo tem origem em projetos nos quais a pesquisadora envolveu-se com o objetivo de repensar as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral para cursos de Engenharia, Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Ciências da Computação na Universidade de Caxias do Sul. Diante do grande número de evasões, reprovações e do desestímulo de alunos, era imperiosa a necessidade de se buscar alternativas de ação pedagógica que, aliadas a outras medidas, pudessem dar conta desses problemas que, desde muitos anos, subsistem na Universidade. Com efeito, a partir de uma revisão bibliográfica (ALVES, 1997; ÁVILA, 1993; BAZZO, 1996, 1998; BARBOSA; NETO, 1995; BOTOMÉ, 1994; GIORGETTI, 1996; LIMA, 1995; LORENZATO, 1993; MASETTO, 1995; MURPHY, 2003; NASCIMENTO; NASSER, 1997; PATERLINI, 1997), confirmou-se a preocupação relacionada a esse problema em nível mundial. Em diversas instituições de ensino superior essa problemática vem sendo discutida, pois todas apresentam índices elevados de abandono e insucesso.

A aprendizagem, não somente de Cálculo Diferencial e Integral, mas de Matemática, de modo geral, na forma como vem sendo concebida, tem sido, ao longo dos anos, um problema para alunos e professores do grande número de cursos universitários em que a mesma é exigida. Na Universidade de Caxias do Sul, aproximadamente 76% dos cursos oferecidos contêm, em seus programas, disciplinas de Matemática.

De outra parte, questões como: *que conhecimentos matemáticos estudantes de graduação devem adquirir*?; *que habilidades deverão ser desenvolvidas*?; *de que forma a tecnologia pode contribuir com o desenvolvimento de habilidades necessárias*? preocupam a comunidade acadêmica que anseia por proporcionar a seus cursos a qualidade necessária, para que os egressos encontrem colocação no mercado de trabalho que exige, cada vez mais, habilidades de comunicação falada e escrita sobre as idéias matemáticas que, em graus variados, estão envolvidas nas mais diversas áreas do conhecimento.

A comunidade matemática, formada por professores responsáveis pelas disciplinas nos diferentes cursos, associações de professores representantes de universidades, comissões encarregadas da análise e elaboração de currículos e integrantes de órgãos administrativos, no Brasil e no mundo, tem se empenhado na organização de programas que contemplem as necessidades atuais, estas, cada vez mais exigentes quanto à qualidade dos conhecimentos matemáticos ainda que, em níveis diferenciados, conforme a natureza dos cursos. Nesse sentido, muitas recomendações, relacionadas ao perfil e às habilidades dos egressos de diferentes cursos, tais como: Licenciatura em Matemática, Física, Engenharias, Computação, dentre outros, têm sido apontadas como possibilidades de atender às expectativas atuais em termos de conhecimentos matemáticos. Das publicações nacionais e internacionais consultadas, selecionaram-se algumas diretrizes, dentre aquelas elaboradas por comissões representantes da Secretaria de Educação Superior do Ministério de Educação e Cultura[1] e outras pelo *Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of the Mathematical Association of América*[2], em documento intitulado *"Mathematics and Computer Science Concentrations in 2010: What Should Students Konw?"*, apresentadas a seguir:

- ✓ solidificar formação básica e profissional geral, incluindo aspectos humanísticos, sociais, éticos e ambientais;
- ✓ capacitar para resolver problemas concretos, promovendo abstrações, modelando casos reais e adequando-se a novas situações;
- ✓ desenvolver capacidade de análise de problemas e síntese de soluções integrando conhecimentos multidisciplinares;
- ✓ aprimorar capacidade de elaboração de projetos e proposição de soluções técnica e economicamente competitivas;
- ✓ desenvolver capacidade de absorver novas tecnologias, promover inovações e conceber com criatividade aplicações na respectiva área de atuação;
- ✓ desenvolver capacidade de comunicação e liderança para trabalhar em equipe;
- ✓ transmitir e registrar, de forma ética, seu conhecimento e produção;
- ✓ conscientizar sobre a necessidade de contínua atualização profissional e de constante atitude empreendedora;
- ✓ conscientizar sobre a importância da busca permanente da qualidade em produtos e processos no exercício da atividade profissional;
- ✓ conscientizar sobre responsabilidade na solução dos problemas da sociedade;
- ✓ selecionar materiais, métodos e processos, levando em conta aspectos técnicos, éticos, sociais e ambientais;
- ✓ pesquisar, extrair resultados, analisar e elaborar conclusões, propondo soluções

---

[1] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. Secretaria de Educação Superior. Disponível em: <http://www.mec.gov.br>. Acesso em: 2 out. 2003.

[2] THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA. Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of the Mathematical Association of America. Disponível em: <http://www.maa.org/news/students2010.html> Acesso em: 5 set. 2003.

para problemas da área;

- ✓ aplicar princípios científicos e conhecimentos tecnológicos a problemas práticos e abertos da área;
- ✓ demonstrar noção de ordem de grandeza na estimativa de dados e na avaliação de resultados;
- ✓ desenvolver raciocínio espacial, lógico e matemático;
- ✓ esboçar, ler e interpretar desenhos, gráficos e imagens;
- ✓ sintetizar informações e desenvolver modelos para a solução de problemas da área;
- ✓ utilizar tecnologias e recursos adequados para o exercício da profissão;
- ✓ planejar, realizar análise de custo/benefício e tomar decisões, levando em conta cenários conjunturais;
- ✓ assimilar e aplicar novos conhecimentos;
- ✓ demonstrar capacidade de argumentação e síntese, aliada à compreensão e expressão em Língua Portuguesa;
- ✓ pensar analítica e criticamente, formular e resolver problemas, interpretando criticamente suas soluções;
- ✓ compreender demonstrações matemáticas, familiarizar-se com diversos tipos de provas, visando ao desenvolvimento da habilidade de argumentação e comunicação oral e escrita da Matemática;
- ✓ aplicar conhecimentos matemáticos em diversas áreas, como forma de apreciar o papel da Matemática em outras áreas que a utilizam;
- ✓ lidar com recursos tecnológicos, tais como *softwares* de computação algébrica e gráfica, bem como linguagem de programação, dentre outras.

A lista não termina aqui e o propósito, ao apresentá-la, é chamar a atenção para o que se espera da Matemática na graduação, o que também é necessário considerar neste trabalho. Assim como Polya (1985), quando se referiu à variedade de objetivos propostos em programas de Matemática, entende-se que todos esses, interpretados de modo concreto e razoável, apresentam muitas superposições. É certo que precisamos tomá-los em conjunto, identificando aqueles que, em cada caso, possam ser contemplados pelas diversas disciplinas de graduação, como ações efetivas no domínio do conhecimento matemático. Porém, é certo também, que o alcance de tais objetivos, no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral, depende em grande parte de propostas metodológicas que despertem no aluno a curiosidade e a motivação necessárias para a aprendizagem a partir do envolvimento e do reconhecimento de sua importância na formação universitária. Acredita-se, como D'Ambrosio (1986), que essa é uma das principais medidas a serem consideradas, a fim de trazer o conhecimento avançado e sofisticado do Cálculo Diferencial e Integral ao nível de sua devida apreciação e utilização por parte dos alunos egressos dos diferentes cursos de graduação.

Propostas metodológicas, baseadas na transmissão de informações descontextualizadas, certamente não serão suficientes para que o aluno seja capaz de utilizá-las adequadamente em outras situações; de analisar novos problemas, integrando conhecimentos multidisciplinares ou de elaborar novos projetos, propondo soluções técnica e economicamente competitivas, ou mesmo pesquisar, extrair resultados, analisar e elaborar conclusões, propondo soluções para problemas de seu interesse. Nesses ambientes em que o aluno é agente passivo no processo de aprendizagem, é muito difícil que venham a ser desenvolvidas habilidades de interpretação; raciocínios espaciais, lógicos e matemáticos; de esboço, leitura e interpretação de desenhos, gráficos e imagens; de síntese de informações ou de argumentação, aliadas à compreensão e expressão em Língua Portuguesa. Isso porque, em tais ambientes, o que é valorizado é o conhecimento do professor e a estruturação dos conteúdos, respeitando o cronograma da disciplina. O aluno não é envolvido afetivamente, questiona sua importância no curso, não vê significado algum nos conceitos abordados.

Ao contrário, em ambientes de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral que considerem o envolvimento e a disposição, por meio de ações motivadas pelo interesse de quem quer aprender, tudo isso é possível. Até porque, é muito importante que o aluno, seja qual for sua área de interesse, reconheça a importância de raciocinar, analisar e argumentar com clareza, defendendo seus pontos de vista; de demonstrar idéias, lidar com informações e com tecnologia.

Buscando maneiras criativas de melhorar o desempenho dos estudantes na compreensão das idéias do mesmo, movimentos de reforma do Cálculo, já desde a década de 80, apontavam para a necessidade de enfatizar, em seus programas, o que é realmente essencial selecionando, dentre as habilidades e competências sugeridas para os egressos dos diferentes cursos, aquelas que propiciem a passagem do conhecimento mecânico de efetuar operações ou manipular algoritmos para sua efetiva utilização em situações do cotidiano. Para D'Ambrosio (1986, p. 44) a "transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para uma situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da Matemática (*e do Cálculo, em particular*), e talvez o objetivo maior de seu ensino" (grifo nosso).

Nesse cenário é que a utilização de novas tecnologias passou a ser considerada como alternativa metodológica para superação de dificuldades relacionadas à aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, bem como para atender às expectativas relacionadas ao perfil e às habilidades dos egressos dos cursos da área de Ciências Exatas. Artigos e livros nacionais e internacionais e *softwares* produzidos no Exterior passaram a influenciar o desenvolvimento das primeiras experiências realizadas de forma isolada, em algumas universidades brasileiras. Autores utilizados como principais referências na disciplina (ANTON, 2000; EDWARDS, PENNEY, 1997; HUGHES-HALLET et al., 1997; LARSON, HOSTETLER, EDWARDS, 1998; STEWART, 2001; THOMAS, 2003) passaram a apresentar, em seus textos, sugestões de inclusão de recursos computacionais, ao abordarem problemas visando aprofundar a compreensão dos conceitos e não somente de manipulações algébricas rotineiras. Ao mesmo tempo, a preocupação relacionada a tal inclusão já se fazia sentir, por meio de recomendações sugerindo que a qualidade do aprendizado depende, em grande parte, da qualidade das tarefas propostas aos alunos e não da disponibilidade ou do emprego de tecnologias computacionais (D'AMBROSIO, 1986; VALENTE, 1993; PALIS, 1995; CORSETTI; SARTOR; SAUER, 1999; SARTOR; SAUER, 2000). Um levantamento realizado por Cury (2002), sobre trabalhos apresentados em Congressos Brasileiros de Ensino de Engenharia (Cobenge) dos últimos 10 anos, envolvendo disciplinas de Cálculo, confirmou que a utilização de computadores foi um dos temas mais discutidos na última década. De fato, essa é uma área de pesquisa ainda bastante profícua, porém, atualmente, mais no sentido de como se pode utilizá-los com benefícios para a aprendizagem. Não se trata mais de discutir sobre sua inclusão ou não, pois, considerando a realidade atual, não se pode mais ignorá-los, conforme é possível constatar analisando produções bibliográficas e anais de eventos científicos, nacionais e internacionais, realizados desde então.

Nesse contexto de problematização inicial, realizaram-se as primeiras experiências incluindo a utilização do computador em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. A preocupação foi, desde o início, com a aprendizagem de Cálculo, o que vai além da escolha de um *software* ou da utilização do computador como um recurso novo que até pode *chamar a atenção* do aluno. Porém, se utilizado somente para transmitir informações e conteúdos, não produzirá as mudanças que queremos. Assim sendo, procurou-se promover atividades de aprendizagem em que os conceitos pudessem ser abordados através de seus aspectos gráficos, numéricos, algébricos e verbais, desenvolvendo-os a partir de investigações baseadas na intuição e no bom senso, ao invés de suas definições puramente abstratas, passando da idéia de um sistema puramente representacional a uma experiência vivida de matemática. Isso foi possível com a inclusão de um *software* matemático, pois sem isso se gastava o tempo de uma aula com manipulações rotineiras, de cálculo, para a obtenção de resultados, em detrimento de suas análises e possibilidades de aplicações.

À medida que se evoluiu nessa prática metodológica de utilização do computador, foi possível perceber que tais análises de resultados e de possíveis aplicações implicam e possibilitam tipos diferentes de interação que permitem avançar, através da comunicação, desde que sejam incluídos recursos para isso. Assim sendo, foram criadas listas de discussão[3], através das quais foi possível ultrapassar as fronteiras da sala de aula e promover o envolvimento dos estudantes em discussões iniciadas, porém nem sempre concluídas satisfatoriamente em sala de aula. Ou seja, tornou-se possível incrementar o conversar sobre Matemática ao invés de somente manipular símbolos e regras. As trocas de mensagens nessas listas de discussão, aliadas à possibilidade de anexar arquivos matemáticos, permitem um aprofundamento das discussões desencadeadas, contando com a participação de um maior número de interessados indiscutivelmente. Observou-se que estudantes que dificilmente questionam ou participam de discussões em sala de aula, não raro enviam suas contribuições às discussões via lista. Nos poucos casos de não-familiaridade com os recursos da internet, é rápida a aquisição dos conhecimentos necessários para a comunicação à distância. Porém já se questionava sobre o que poderia promover o estímulo de participar, trazendo também aqueles que apenas observavam "de longe" as discussões. E assim prosseguiu-se no caminho da reflexão sobre benefícios decorrentes de atividades de interação, em que são solicitadas explicações ou verbalizações sobre como chegaram a determinadas conclusões, ou como estão pensando sobre um determinado problema, enquanto raciocinam.

A fim de planejar ações visando aperfeiçoar a participação no processo educativo, reflexões foram orientadas no sentido de fundamentar novas ações pedagógicas. Compreendeu-se que tal exigência está longe do professor que *dá aulas*, *explica*, *passa conhecimentos*, *julga a partir da repetição de comportamentos*. Esse professor entende que a aprendizagem ocorre a partir da observação do aluno, passivamente, memorizando informações que deve repetir nas avaliações e é co-responsável pelo fracasso da educação em muitas instituições de ensino, em todos os níveis, comprovado pelos baixos níveis de desempenho no mercado de trabalho, constantemente apontados por pesquisas realizadas.

Entretanto, a partir de estudos e reflexões, muitos professores estão construindo

---

[3] Grupo de discussão organizado com uma finalidade específica, como uma disciplina, grupo de pesquisa ou outro, com algum tema em comum, cujas mensagens são distribuídas por correio eletrônico a todos os participantes da lista.

novas práticas. A investigação e a realização de experiências, acompanhadas de suas análises, são determinantes na construção de novos fazeres. Porém essa construção é lenta, difícil, passível de discussões. O abandono de práticas pedagógicas consolidadas é muito difícil. Trata-se de algo mais do que uma ruptura cultural; trata-se de uma ruptura epistemológica, o que não é um processo espontâneo. Mudanças qualitativas implicam experiências, voltar atrás. Porém é preciso sermos persistentes quando percebemos que as coisas não estão bem.

Mais do que nunca, é preciso uma abertura para a educação continuada, para o trabalho em equipe, permitindo uma troca de experiências que possibilite uma reflexão crítica e contínua produção de conhecimento sobre esse tema.

As reflexões, nesse sentido, prosseguiram com o interesse em analisar e problematizar o modo como os alunos aprendem. As possibilidades e os limites de aprendizagem de sujeitos ingressantes na universidade, na maioria das vezes trabalhadores, bem como condições e possibilidades de aprendizagem, precisam ser considerados.

2.2 Os alunos neste contexto

A Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), no Brasil, em parceria com o Ministério da Educação e Cultura (MEC), divulgou, em abril de 2003, os resultados de uma pesquisa realizada em 13 capitais brasileiras, concentrações urbanas onde se localiza a grande parte da matrícula no Ensino Médio[4]. Coordenada por Miriam Abramovay e Mary Garcia Castro, foi considerada a maior pesquisa já realizada sobre o assunto na América Latina. Alguns resultados, apontados na obra *Ensino Médio: múltiplas vozes*, são significativos e discutidos a seguir. Para os alunos o principal objetivo do ensino médio é "preparar para o curso superior (vestibular)", resposta apresentada por mais da metade deles, tanto em escolas públicas como em escolas privadas. O segundo principal objetivo foi apontado como sendo "a busca de um futuro melhor". Entretanto, aproximadamente a metade dos professores e dos alunos considera que o Ensino Médio deveria preparar para o mercado de trabalho, porém registram que isso só pode ocorrer como

---

[4] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Disponível em: <http://www.educacao.gov.br/semtec/noticias/notli28.shtm>. Acesso em: 10 set. 2003.

conseqüência da continuação dos estudos em nível superior.

Quanto aos problemas apontados, 75% dos professores entrevistados, tanto de escolas públicas quanto de escolas privadas, denunciam o desinteresse dos alunos. Estes, por sua vez, valorizam o aprendizado, mas consideram insuficiente o que aprendem na escola, principalmente os da escola pública.

Dentre as várias recomendações apontadas pela pesquisa, a partir dos dados levantados, encontram-se sugestões de "adoção de medidas para a melhoria da qualidade do ensino e cultivo do hábito e gosto por estudar".

Quanto aos alunos que chegam à universidade, estes também são conhecidos por certas concepções que os tornam bastante dependentes de resultados de avaliações e não de sua implicação no processo e, como não poderia deixar de ser, resistentes a toda e qualquer proposta de modificação. Não faltam argumentos e depoimentos, tanto por parte de professores quanto dos próprios alunos, que confirmam a falta de interesse, de motivação ou de comprometimento com a aprendizagem. Muitos deles declaram estarem interessados, em primeiro lugar, na obtenção do diploma. Não têm hábitos de estudo e não vêm nisso motivo de preocupação, justificando que o trabalho e muitos outros compromissos os impedem de estudar. Acostumados a receberem informações passivamente, muitas vezes conscientes da ineficácia do *ensino* assim promovido, declaram abertamente que estão ali para "receber os conhecimentos" que o professor tem e "deve saber transmitir", para que o resultado possa ser traduzido por uma *boa nota na avaliação*. Diante dessa realidade, qualquer tentativa de *modificação da sala de aula* é recebida com desconfiança e resistência. Afinal, no modelo tradicional basta prestar atenção e preparar-se para as provas, que apenas exigem memorização e imitação, possibilitando, assim, melhores chances de sucesso. Assim sendo, *prudentemente* reagem às mudanças metodológicas que, nem sempre, são coerentes com os critérios de avaliação.

Passam a vida inteira sem compreender o sentido de um texto ou a finalidade de uma fórmula, que utilizam como se fosse mágica, contentando-se com isso, como se o fizessem só para agradar o professor.

Para Lafortune e Saint-Pierre (1996) os alunos têm opiniões diversas relativamente a diferentes aspectos da Matemática. Não aprenderam e demonstram não valorizar habilidades como argumentar com clareza, defender seus pontos de vista, justificar procedimentos adotados na resolução de problemas matemáticos. Para muitos, a Matemática é um conjunto de fórmulas e procedimentos e para aprendê-la basta seguir uma instrução que, como um manual, contém passos a serem seguidos. "[...] quando falamos de Cálculo, estamos falando numa Ciência Exata e não em questões subjetivas [...]"[5] ou "[...] o problema do **ensino** de matemática começa a ter sua **equação invertida**. Não são os estudantes que não aprendem, são os professores que não ensinam. [...]".[6] Opiniões como essas tomam, muitas vezes, a forma de idéias pré-concebidas, de preconceitos, de crenças e de mitos veiculados à sua volta, em relação à Matemática, à sua aprendizagem e às pessoas que a ensinam. Conforme Cury e Pinent (2000), pode-se inferir que alguns alunos de graduação apresentam idéias contraditórias, possivelmente assimiladas acriticamente, a partir de concepções e crenças assumidas por pais, amigos, professores ou mesmo veiculadas através de meios de comunicação. Entende-se que essas idéias preconcebidas, esses preconceitos, esses mitos e essas concepções constituem, muitas vezes, um obstáculo ao envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem.

Todas essas dificuldades não podem ser ignoradas. Ao contrário, é preciso conhecê-las para que seja possível planejar estratégias que permitam superá-las e conquistar a satisfação que ambos, professor e aluno, almejam.

Uma mudança de paradigma nesse sentido implica mudança na visão de mundo, de entendimento da realidade. Para que nossos alunos tenham condições de lidar com a nova realidade, passa a ser necessário *construir*, *aprender*. Porém é desejável que esteja claro para ambos, professor e aluno, como se dá o *aprender*.

Concomitantemente ao desenvolvimento de estudos no curso de informática na educação procurou-se, diante da problematização inicial destacada e de resultados das primeiras experiências que se apresentavam no dia-a-dia da própria atuação profissional, analisar diferentes concepções epistemológicas e suas influências em práticas educativas comumente utilizadas. O cenário que se apresentava exigia, para que se pudesse bem interpretá-lo e conduzi-lo de forma eficaz, reflexão crítica sobre a relação existente entre práticas pedagógicas e concepções epistemológicas.

---

[5] Opinião manifestada por um aluno de Cálculo Diferencial e Integral, em mensagem enviada ao fórum de discussões da disciplina (2002).

[6] Conforme a reportagem "Um **cálculo** no meio do **caminho**". Folha de São Paulo. (FERREIRA; CAMARGO, 25 fev. 2003).

2.3 Em busca de uma teoria de aprendizagem ...

Que base conceitual é capaz de fundamentar o planejamento de ambientes de aprendizagem onde o estudante tenha espaço para agir, discutir, problematizar e analisar a sua ação? Um modo de explicar o aprender no qual possam ser considerados os aspectos físico, biológico, mental, psicológico, cultural e social? Que leve em conta a interdependência entre os processos de pensamento, de construção do conhecimento e do ambiente, que promova a visão de contexto, sem separar o sujeito de sua circunstância e de seus relacionamentos, auxiliando-o a perceber o mundo como uma teia sistêmica e interligada, de forma a evidenciar os processos cíclicos da natureza, da qual se faz parte? Um modo de pensar, que desencadeie um novo sistema ético com valores, percepções e condutas que contribuam para o desenvolvimento sustentável?

Conforme Sauer (2000), na concepção empirista de aprendizagem, encontra-se a psicologia behaviorista (ou comportamentalista), representada por autores como Watson e Skinner, cuja explicação é baseada na idéia do condicionamento, ou seja, a aprendizagem é uma modificação do comportamento, gerada por um estímulo externo daquele que ensina, para aquele que aprende. As práticas pedagógicas, nesse caso, estão centradas no professor e baseiam-se na transmissão de conteúdos e no controle, refletindo mudanças sistemáticas e operacionais no ambiente e na proposta de trabalho, a fim de tornar mais prováveis as respostas desejadas. O aluno, por sua vez, é agente passivo do processo, agindo somente em resposta a estímulos externos provenientes do professor ou do ambiente, e o conhecimento passa a ser entendido como uma seqüência de estímulos e respostas. Essa concepção não tematiza o sujeito e sua circunstância, sua atividade e implicação no processo de aprendizagem.

A concepção apriorista, a psicologia da Gestalt, representada por Max Wertheimer, Köhler e Koffka, supervaloriza a percepção e explica a aprendizagem, de acordo com Hilgard (1973), como algo que ocorre de modo súbito, por *insight*, por uma capacidade inata, *a priori*, que o indivíduo traz consigo. De acordo com essa teoria, a percepção humana não é a soma dos dados sensoriais, mas passa por um processo de reestruturação que configura uma forma, uma *Gestalt*; não há conjuntos de elementos, mas unidades estruturadas; o todo é mais do que a soma das partes. As práticas pedagógicas, nesse caso, aparentemente centradas no aluno, visam permitir que o *insight* ocorra a partir de atividades estruturadas, de tal forma que os aspectos significativos sejam percebidos. Apesar da explicitação de uma atividade para o que aprende, não explica processos, não existe a idéia de caminhos de estruturação. A estrutura está pronta, o que necessita é ser ativada de determinada maneira.

A teoria da Complexidade, de Edgar Morin; da Biologia do Conhecimento, de Maturana, dentre outros, indicam novas perspectivas que emergem do pensamento científico para investigar a linguagem, a aprendizagem e a construção do conhecimento. Essas bases teóricas parecem ser capazes de relacionar cognição, aprendizagem e vida.

É possível dizer que esses referenciais têm caracterizado o modelo atual de Ciência, que explica a relação do homem com a natureza e com a vida, e esclarecem, da mesma forma, como acontece a aprendizagem e a compreensão do mundo a partir de um novo referencial de sujeito. O sujeito é compreendido em função de seu constante processo de *construção*, transformando-se a partir de suas ações sobre o mundo. É um sujeito em constante intercâmbio com o meio, mediante processos *interativos*, onde sujeito e objeto são organismos vivos, ativos e abertos. O ser que se constrói a partir das relações com o mundo físico e social dá a dimensão *sociocultural*. À medida que constrói a consciência da estreita comunhão do homem com a totalidade indivisível, compreendendo-se como parte integrante do universo, o sujeito projeta-se como *transcendente* e como co-responsável para a construção da realidade futura. Segundo Moraes (1997), esse referencial pode ser identificado como o *paradigma educacional emergente* e reconhecido como construtivista, interacionista, sociocultural e transcendente. Esse paradigma emergente fornece elementos para compreender os processos desenvolvidos quando sujeitos interagem através de redes e podem permitir uma mediação no sentido de orientar o processo de aprendizagem.

Entretanto, decidiu-se para este estudo tomar a Epistemologia Genética como base conceitual, também por compartilhar os pressupostos do paradigma educacional emergente. Porém, a Epistemologia Genética é precursora, em muitos sentidos, desse atual modo de pensar a aprendizagem. Além disto, encontram-se nesta teoria elementos essenciais para que seja possível analisar o processo de tomada de consciência e o que este significa para a aprendizagem, conforme o objetivo do presente estudo.

Em sua concepção construtivista e interacionista, a Epistemologia Genética de Jean Piaget fornece um modelo explicativo do desenvolvimento cognitivo, capaz de significar os modos de aprender atualizados de cada sujeito. Analisando concepções empiristas e aprioristas, Piaget destaca aspectos positivos encontrados em ambas, quando afirma, a partir de suas pesquisas, que a experiência é um dos fatores fundamentais na construção do conhecimento. Também destaca, a favor do apriorismo, a importância dos processos internos, da bagagem genética. E aponta um fator comum às duas, apesar de serem inconciliáveis: a passividade do sujeito. Esse é o fator fundamental, o que distingue sua posição de outras. Justifica que é através da interação entre ambos: fatores externos e internos, que ocorre o desenvolvimento e a formação do conhecimento. Aprendizagem, de acordo com Piaget, pode ser explicada pelo desenvolvimento de estruturas mentais, e só ocorre na ação, isto é, quando o sujeito age sobre os objetos e sofre as influências dessa ação sobre si mesmo. Mas é somente a ação motivada que tem sentido, aquela que o indivíduo sente como necessária, espontânea, que produz uma implicação subjetiva. É a ação que emerge das perguntas, que provoca reflexões e desequilíbrios. A ação que é só do exterior, do outro, e que é apenas observada, mesmo que seja com atenção, não frutifica. O conhecimento nasce toda vez que o sujeito se apropria do seu agir.

A grande contribuição da Epistemologia Genética consiste, pois, na compreensão do ser humano como sujeito que constrói seus conhecimentos a partir de sua interação com seu meio físico e social.

Concentrou-se aqui o interesse, acreditando que na Epistemologia Genética é possível encontrar respostas às questões que buscam também relacionar os modos como a tomada de consciência sobre o aprender se produz.

Compreendeu-se que algumas concepções de aprendizagem, bastante presentes em ambientes educacionais, não dão suporte a um fazer pedagógico que considere o estudante como tendo um caminho já percorrido, com conhecimentos já construídos, a partir dos quais, na relação com novos objetos de conhecimento e na interação com o ambiente, pode sustentar as aprendizagens.

Quando o professor entra como um personagem importante nesse processo, este pode favorecer as condições de aprendizagem dos alunos e, conseqüentemente, uma compreensão maior da vida e de formas de viver que os realizem e desenvolvam suas capacidades a partir dos caminhos de aprendizagem já percorridos.

A partir dessas concepções tem-se procurado, nas atividades docentes, promover a participação – intervenção, a partir da formulação de problemas que possam ser discutidos por todos aqueles que estiverem motivados e dispostos a construir seu próprio percurso de aprendizagem. Na realidade, a possibilidade de modificação da tradicional sala de aula presencial, baseada no baixo nível de participação oral dos alunos; na ênfase em atividades solitárias; na aprendizagem mecânica de conteúdos, como principal objetivo do ensino; na distribuição do conhecimento, depende de vários fatores, mas o mais importante está relacionado a uma atitude de ambos, professor e aluno, de aceitarem e concordarem com os benefícios dessas modificações. Tais modificações exigem uma ampla revisão do papel do professor, mas também do aluno. Abordagens construtivistas têm sugerido a presença freqüente do professor como orientador, questionando, argumentando, aceitando sugestões construtivas, rejeitando atitudes negativas, valorizando todas as respostas, mas, também, atitudes como respeito, generosidade, humildade, coragem, confiança e tantas outras. Enfim, converter o currículo, a partir das questões do aluno, em algo que faça sentido para ele e lhe traga satisfação. Ao aluno caberá, como agente ativo desse processo, envolver-se e procurar reconhecer os benefícios de sua participação.

2.4 Questões e objetivo

Ao longo deste capítulo, procurou-se descrever o contexto de problematização inicial. Nesta fase, a realização e análise das primeiras experiências, concomitantemente aos estudos e às reflexões individuais e coletivas sobre as novas necessidades e possibilidades que se apresentavam, muitas questões foram surgindo. Propostas de solução, acompanhadas de ações correspondentes, foram sendo colocadas em prática. Assim, a *construção do problema* desta pesquisa leva em consideração o diagnóstico da realidade e a conseqüente tomada de decisões, tanto em relação às teorias de apoio quanto à sua configuração. Entende-se que esse processo está em consonância com uma metodologia de pesquisa-ação com observação participante[7], e propõe-se a análise de experiências realizadas no projeto Mecam[8] e em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral[9], que utilizam ambientes virtuais de aprendizagem, para responder às seguintes questões:

---

[7] Descrita no capítulo 5, seção 5.1.
[8] O projeto Mecam é apresentado no capítulo 4, seção 4.2.
[9] O ambiente de apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral é apresentado no capítulo 4, subseção 4.1.1.

1. O *diálogo sobre os modos de aprender Matemática*, em ambientes virtuais de aprendizagem, gera processos de descentração e de tomada de consciência que possibilitam o reconhecimento da importância da implicação subjetiva na construção do conhecimento?

HIPÓTESE: Ambientes virtuais de aprendizagem possibilitam a realização de atividades de interação com cooperação, que promovam descentração e a conseqüente tomada de consciência (do ponto de vista pessoal e das atividades próprias), culminando com o desenvolvimento de autonomia intelectual, necessária à aprendizagem.

2. O *diálogo matemático* promove a tomada de consciência e a aprendizagem?

HIPÓTESE: Pensar a respeito do que sabemos, como sabemos, como fazemos para saber e o que estamos fazendo e aprendendo ajuda a aumentar o grau de consciência e, conseqüentemente, promove melhores níveis de aprendizagem, a partir do envolvimento do aluno nas atividades de discussão sobre os conceitos matemáticos.

Objetivo

O principal objetivo deste estudo é produzir e analisar espaços de experimentação, de conversação, em que sejam possíveis a compreensão das noções matemáticas, a observação questionadora e a possibilidade de argumentação; que permita estimular a capacidade de criar e recriar, a fim de confirmar a relação de co-implicação entre as concepções epistemológicas do aluno e a aprendizagem decorrente de seu envolvimento em diálogos matemáticos.

Para viabilizar a pesquisa, no capítulo 3 é apresentada a fundamentação teórica, com o apoio da qual são criados ambientes virtuais de aprendizagem, descritos no capítulo 4, nos quais são promovidos diálogos analisados no capítulo 5.

3 CONDIÇÕES DE APRENDIZAGEM

Para Tales ... a questão primordial
não era o que sabemos,
mas como o sabemos.
(ARISTÓTELES apud BOYER, 1996, p. 33).

A opção teórica pela Epistemologia Genética também influenciou no planejamento desta pesquisa, a partir de reflexões sobre como Piaget construiu sua obra, desde o início marcada pelo desejo de encontrar a explicação do conhecimento, porém sempre atento a todos os fatores, internos e externos ao sujeito, que precisam ser considerados. Assim, neste capítulo, descrevem-se as certezas *provisórias* relacionadas às condições de aprendizagem, elegendo os conceitos da teoria com potencial para fundamentar ações metodológicas no âmbito de disciplinas de Matemática para a graduação. Apresenta-se o *diálogo*, conforme Freire, como fenômeno humano, cujos elementos constitutivos comportam a ação e a reflexão e, conseqüentemente, pode promover a tomada de consciência e a aprendizagem.

3.1 Relações dinâmicas entre razão e emoção

É por meio da luz e por meio de uma idéia clara
que a mente vê as essências das coisas, os números e as extensões.
É por meio de uma idéia vaga ou por meio do sentimento
que a mente julga a existência das criaturas e
conhece sua própria existência.
(MALEBRANCHE[10] apud DAMÁSIO, 2002, p. 395).

Uma das dimensões fundamentais da compreensão da aprendizagem como capacidade humana fundamental reside na compreensão das relações dinâmicas entre razão e emoção. Esta é entendida como a energética da estrutura cognitiva e revela-se no interesse, na motivação, no sentimento de necessidade (BECKER,[11] 2003). É o cenário, a condição *sine qua non*, o contexto para a aprendizagem. Se não há um marco de relações pessoais, sem ameaças, de companheirismo, nos sentimos emocionalmente julgados, desprotegidos e não ocorre a aprendizagem. Por outro lado, se atribuirmos somente às emoções o motivo de nossas ações, negamos o papel fundamental da inteligência no desenvolvimento humano. Para Damásio (2000), considerar a relevância das emoções nos processos de raciocínio *não* significa que a razão seja menos importante do que as emoções, que deva ser relegada ao segundo plano ou deva ser menos cultivada. Em outra obra, Damásio (2002) apresenta o relato de pesquisas que indicam que uma redução seletiva da emoção é, no mínimo, tão prejudicial para a racionalidade quanto a emoção excessiva. De fato, a razão é influenciada pelas emoções que, quando bem direcionadas e bem situadas, parecem constituir um sistema de apoio para o edifício da razão. Segundo esse autor, uma série de experimentos recentes sobre o aprendizado também fornece dados que comprovam o papel da emoção nesse processo e exemplifica: se nos contarem duas histórias que diferem apenas pelo conteúdo emocional, lembraremos de muito mais detalhes da *história emocional*. Assim, ao levar em consideração a função importante das emoções, é possível realçar seus efeitos positivos e

---

[10] Nicolas Malebranche, filósofo francês que viveu no século XVII, escreveu: “C’est par la lumière et par une idée claire que l’esprit voit les essences des choses, les nombres et l’étendue. C’est par une idée confuse ou par un sentiment, qu’il juge l’existence des créatures, et qu’il connait la sienne propre.” (*De la recherche de la verité.* Paris: A. Pralard, 1678-9, p. 914).

[11] Comentário acerca da proposta de tese extraído do parecer descritivo datado de 17 de dezembro de 2003.

reduzir seu potencial negativo.

Piaget (1978; 1983), quando explica que a afetividade representa a fonte energética da qual depende o funcionamento da inteligência, afirma: para que a inteligência funcione é necessário um motor, que é o afetivo. Ao contrário, o aspecto cognitivo das condutas é caracterizado por sua estrutura. E explica, com um exemplo:

> Tome, por exemplo, duas crianças, em relação às suas lições de aritmética. Uma que gosta de matemática, e progride; a outra, que tem a impressão de não compreendê-la e que tem sentimentos de inferioridade e todos os complexos bem conhecidos nas lições de matemática, dos fracos em matemática. O primeiro irá bem mais rápido; o segundo, bem mais lentamente. Mas para ambos, dois e dois farão quatro. Isto não modifica nada da estrutura adquirida. (PIAGET, 1978, p. 72).

Piaget, assim, argumenta que a afetividade não engendra e não modifica as estruturas cognitivas. Os mecanismos afetivos e cognitivos permanecem sempre indissociáveis, porém distintos, uma vez que os primeiros dependem de uma energética e os outros, de estruturas. De acordo com Furth (1995), o próprio uso do termo *construção*, na sustentação de Piaget, ao afirmar que "o conhecimento é uma construção", implica não somente Lógica (conhecimento lógico-matemático para Piaget) mas também dispêndio de energia.

Explica Furth (1995, p. 143):

> Assim, o conhecimento como arcabouço necessário das interações organismo-contexto extrai seu material enriquecido de seu próprio funcionamento. Ele é autônomo no sentido de ser auto-regulado. Mas, ao mesmo tempo, a energia para expandir-se, para conquistar crescentemente maior interação ambiental está dentro do conhecimento desde seus começos biológicos. O elo símbolo-libido [...] como característico do conhecimento humano é, por si mesmo, a expansão evolucionária da ligação entre conhecimento e motivação [...]

Furth (1995, p. 18) referiu-se ao elo símbolo-libido quando assinalou o ponto de encontro entre Piaget e Freud: "Enquanto Piaget explicava o 'como' das ações e símbolos, sua organização interna e coesão lógicas, Freud explorou o 'por quê' atrás desses atos [...]"

Essa aproximação entre os dois autores apresenta valiosos argumentos que também confirmam a nociva cisão entre conhecimento e emoção, entre operação mental e cooperação interpessoal, entre conhecimento e desejo.

E, ao refletir sobre tantas evidências de conciliação, procura-se identificar possibilidades de considerá-las em ambientes de aprendizagem com características interacionistas.

Considerando que o conhecimento dá-se pela interação ou pelas trocas do organismo com o meio, Piaget valoriza um tipo de relação social, como a forma ideal de relações entre indivíduos autônomos, definida pela reciprocidade: a cooperação. No plano social ela implica respeito mútuo, solidariedade, liberdade ou autonomia de pessoas em interação. Quanto à autonomia, esta é também um processo de construção de sentimentos, na medida em que resulta da interação em um modo de conviver cooperativo onde o sujeito é capaz de relativizar seu ponto de vista em relação aos demais, coordenando suas ações em cooperação com os outros. Isso, no plano intelectual, permite o acesso à lógica (PIAGET apud MONTANGERO; NAVILLE, 1998).

A cooperação é também a condição para a construção, pelo sujeito, das normas morais. Com efeito, de acordo com Piaget (1978), a formação moral é uma das construções em que fica evidente a inter-relação entre os elementos afetivos e sociais, dos esquemas cognitivos e afetivos, ao mesmo tempo.

Não há dúvidas quanto à importância da responsabilidade e confiança mútua entre estudantes e professores, o que gera ambientes de produção e construção. Nesses ambientes, o conversar não é só racional mas também afetivo, constituindo-se, assim, como espaços de convívio e de discussões onde a consensualidade possa resultar do próprio processo interativo. Espaços como esses propiciam: (des)construção de idéias; (des)fazer aprendizagens; minimizar dificuldades e conquistar a satisfação do saber, de se tornarem capazes e de poderem ser co-criadores da história do seu tempo. A relação entre razão e emoção que emerge dessas possibilidades, evidencia sua interdependência, na medida em que se compreende que, de fato, não há comportamento ou estado puramente cognitivo, sem afeto, nem puramente afetivo, sem o envolvimento de algum elemento cognitivo. De acordo com Piaget (1962), separados um do outro, não haveria interesse nem necessidade nem motivação; os problemas não seriam colocados e não haveria ações inteligentes. O afeto e a cognição resultam de uma adaptação contínua e interdependente, em que os esquemas afetivos levam à construção da personalidade, enquanto os esquemas cognitivos conduzem à inteligência.

Em ambientes de aprendizagem, o professor pode ser incentivador e co-participante de diálogos guiados pelo desejo de escutar e compreender o interlocutor. Assim, se um problema desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, aquele que o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (POLYA, 1986).

Além disso, quando o diálogo é baseado na cooperação, a relação permite a descentração, na medida em que o ponto de vista do outro é levado em consideração. Assim, o conceito de cooperação está estreitamente ligado ao de descentração. Um sujeito cuja perspectiva é determinada por sua ação não tem nenhuma razão para estar consciente de qualquer coisa, exceto de seus resultados; por outro lado, descentrar-se, ou seja, deslocar seu centro e comparar uma ação com outras possíveis, particularmente com as ações de outras pessoas, conduz a uma consciência do *como* e ainda às verdadeiras operações (MONTANGERO; NAVILLE, 1998). Com efeito, toda evolução em direção ao conhecimento formalizado consiste, também, na inserção do ponto de vista próprio em um conjunto de pontos de vista possíveis, o que pode ser entendido como um processo de libertação de um ponto de vista subjetivo. Conseqüentemente, tal possibilidade de coordenação de pontos de vista, proporcionada por atividades de cooperação, possibilita autonomia, o que, no âmbito educativo, pode ser desenvolvido através de atividades que propiciem a reflexão de modo crítico e a coerência lógica. Dessa forma, entende-se por que o conversar sobre a atividade educativa possibilita um exercício de descentração, de autonomia e resultar em uma aprendizagem significativa.

Novamente, para que tudo isso seja possível, é preciso que tanto o professor quanto o aluno estejam dispostos a enfrentar os desafios, o que demanda, freqüentemente, mudança de paradigma de ambas as partes, a partir da identificação e superação de obstáculos epistemológicos, isto é, de acordo com Kamii (1984), ao mudar o foco de nosso pensamento daquilo que nós *fazemos* para *como aprendemos*, podemos começar a ver os temas acadêmicos e a autonomia moral partindo do ponto de vista de *como aprendemos*.

Isso nos remete ao problema da tomada de consciência que é a interpretação e a explicação da ação, ou a reconstituição conceitual da ação, sua compreensão. “Trata-se de saber como se tem êxito” (PIAGET apud BRINGUIER, 1978, p. 127).

3.2 A tomada de consciência

É graças à emoção que brota a consciência.
(TRAN-THONG apud OLIVEIRA, 2001, p. 131).

Piaget apud Bringuier (1978) esclarece que a tomada de consciência não é um novo modo de ver as coisas, que projetaria esclarecimentos sobre realidades até então obscuras, mas sem nada mudar. Não é um processo de iluminação que permite que as coisas sejam vistas como estavam. É muito mais do que isso, pois consiste em fazer passar de um plano inferior inconsciente a um plano superior consciente. Ora, se uma ação é bem-adaptada, não tem necessidade de tomada de consciência, ao contrário, quando uma regulação[12] ativa se torna necessária, o que supõe escolhas intencionais entre duas ou várias possibilidades, há tomada de consciência em função dessas necessidades mesmas. Assim, a tomada de consciência é sempre uma reorganização e não somente uma tradução ou uma evocação.

Claparède (PIAGET, 1977b) enunciou uma *lei* da tomada de consciência, segundo a qual esta se produziria apenas a propósito de desadaptações, não intervindo então, por ser inútil, quando se trata de mecanismos usuais na medida em que já estão adaptados. Entretanto, Piaget, que tomou emprestado de Claparède esse conceito e o desenvolve à sua maneira (MONTANGERO; NAVILLE, 1998), esclarece que a tomada de consciência não exige inadaptação, isto é, pode ocorrer progressivamente, mesmo quando os objetivos iniciais são atingidos sem nenhum fracasso (PIAGET, 1977a). Nesse caso, como o progresso não está ligado às dificuldades da ação, ele só pode resultar do próprio processo de assimilação, como integração às estruturas[13] prévias. Determinar para si mesmo um objetivo em face do objeto já é assimilar esse objeto a um esquema[14] prático; na medida em que o objetivo e o resultado do ato permitem que se desencadeie a consciência, embora permanecendo generalizáveis em

---

[12] "A noção de regulação remete a um mecanismo de auto-correção dos erros que tende a restabelecer o equilíbrio cognitivo ou a regular a evolução do desenvolvimento na direção de um equilíbrio melhor; [...] as regulações são os instrumentos da equilibração [...]." (MONGANTERO; NAVILLE, 1998, p. 222).

[13] "[...] a noção de estrutura é a mais freqüentemente utilizada para designar as formas de organização dos raciocínios." (MONGANTERO; NAVILLE, 1998, p. 179).

[14] "Chamaremos de *esquemas* de ações aquilo que, em uma ação, é, assim, transponível, generalizável ou diferenciável de uma situação à seguinte, dito de outro modo, o que há de comum às diversas repetições ou aplicações da mesma ação." (MONTANGERO; NAVILLE, 1998, p. 166).

ações, o esquema se torna conceito e a assimilação se faz representativa, isto é, suscetível de evocações em extensão.

Para Damásio (2002, p. 169),

> *Consciência* é o termo abrangente para designar os fenômenos mentais que permitem o estranho processo que faz de você o observador ou o conhecedor das coisas observadas, o proprietário dos pensamentos formados de sua perspectiva, o agente em potencial. A consciência não é externa a este processo, é uma parte de seu processo mental.

Assim, para esse autor, o problema da consciência está em função de dois atores principais: o *organismo* (sujeito) e o *objeto* (o que quer que venha a ser conhecido no processo da consciência), e em função das *relações* que esses atores mantêm durante suas interações naturais; essas relações, por sua vez, são os conteúdos do conhecimento que denominamos consciência. Vista dessa perspectiva, a consciência permite construir um conhecimento sobre dois fatos: um organismo está empenhado em relacionar-se com algum objeto, e o objeto nessa relação causa uma mudança no organismo. Entretanto, esclarece:

> A consciência não é toda a mente humana e, a meu ver, tampouco é o ápice da complexidade mental. Os truques biológicos que causam a consciência têm muitas conseqüências, mas vejo a consciência como um intermediário e não como o ponto culminante do desenvolvimento biológico. A ética, o direito, a ciência e a tecnologia, a arte e a compaixão – estes são os ápices da biologia, no meu entender. Decerto não teríamos nada disso sem os prodígios da consciência como fonte de cada nova realização. Ainda assim, a consciência é o alvorecer, não o meio-dia, e muito menos o pôr-do-sol. (DAMÁSIO, 2002, p. 48).

E complementa, afirmando que essas “maravilhosas criações da mente humana” são conseqüência direta de um sistema nervoso que, sendo capaz de consciência, também está equipado com uma vasta memória, linguagem e inteligência.

Damásio (2002) também se refere às pontes ligando a emoção e a consciência, afirmando que, assim como a emoção, a consciência está alicerçada na representação do corpo. Do ponto de vista neurológico, quando a consciência está ausente, em geral a emoção também está ausente, sugerindo que, embora emoção e consciência sejam fenômenos diferentes, seus alicerces podem estar ligados. Quando temos consciência de nossos sentimentos, sendo capazes de refletir, planejar e decidir, podemos controlar nossas emoções. Isso é o que se chama razão.

Quando Piaget afirma que uma pessoa jamais resolverá um problema se este não a interessar, compreendemos bem a motivação como o motor afetivo da ação. Neste trabalho o emocionar está relacionado a uma *ambiência* de aceitação, de convite ao aprender, que pode constituir fonte de motivação para a aprendizagem. A partir daí, havendo interesse, a busca de uma resposta pode levar à reflexão e conseqüentemente ao desenvolvimento. A reflexão, como ato mental de reconstrução e reorganização de um novo conteúdo, remete-nos ao processo de abstração. A importância desse processo na aquisição de conhecimentos foi salientada desde Aristóteles e, de acordo com Piaget (1995), sempre que o sujeito reflete sobre suas ações, buscando apropriar-se delas, realiza abstração: *empírica* quando retira suas conclusões a partir dos próprios objetos ou mesmo das ações que executa sobre as características materiais dos mesmos, e *reflexionante* quando tais conclusões levam em consideração as coordenações das ações, podendo permanecer inconscientes ou permitir a tomada de consciência.

Na abstração empírica ou simples, o sujeito depreende uma propriedade daquilo que observa. Esta já ocorre em todos os níveis de conhecimento, e em seu nível mais elaborado decorre de um método experimental. É importante destacar que, para o sujeito abstrair novos conhecimentos dos observáveis empíricos, é preciso que estes possam ser integrados às suas estruturas prévias (assimilação).

A abstração reflexionante, por sua vez, é um dos motores do desenvolvimento cognitivo; é a que permite o estabelecimento de relações, aperfeiçoando-se sempre mais, em virtude de seu próprio mecanismo de reflexão sobre as reflexões. Esse processo aparece também no plano do pensamento adulto, científico ou pré-científico. De acordo com Piaget (1995), a abstração reflexionante comporta dois aspectos: um *reflexionamento*, entendido como uma projeção sobre um patamar superior daquilo que foi tirado de um inferior e uma *reflexão*, como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi transferido do inferior. Montangero e Naville (1998) distinguem três tempos no processo de abstração reflexionante, quais sejam: a abstração propriamente dita, o reflexionamento e a reflexão. Esta última, a reflexão, enriquece notavelmente o conhecimento extraído, o que justifica o resultado de uma abstração reflexionante como uma nova forma de conhecimento ou instrumento do pensamento.

Porém, não estamos sempre conscientes dos novos instrumentos de raciocínio que utilizamos. Quanto à abstração que acarreta *tomada de consciência*, trata-se da *abstração refletida*, uma variedade de abstração reflexionante. Esse processo, caracterizado como um processo endógeno, é o que *sustenta a formação de novos conhecimentos*, conforme afirma Piaget (1995, grifo nosso).

O processo de abstração cujo resultado torna-se consciente está presente no desenvolvimento das estruturas lógico-matemáticas. Piaget distingue dois tipos de experiência: a experiência física e a experiência lógico-matemática. No caso da experiência física, o sujeito, ao agir sobre os objetos, extrai destes ou de suas ações sobre estes, suas propriedades. Realiza, assim, abstrações empíricas. Já, com relação à experiência lógico-matemática, o sujeito, ao agir sobre os objetos, extrai sua informação das propriedades das ações que exerce sobre os mesmos. Temos, nesse caso, abstração refletida (BECKER, 1997). As operações lógico-matemáticas do sujeito se interiorizam, assim, graças às abstrações reflexionantes que elaboram operações sobre outras operações. O duplo movimento de interiorização e exteriorização liberta o pensamento da ação material. Contrariamente à experiência física, em que os dados são obtidos das características do objeto, na experiência lógico-matemática os mesmos são obtidos das propriedades das ações sobre os objetos. Quando tais ações são interiorizadas em operações, podem ser realizadas simbolicamente (PIAGET, 1983).

Em outra obra, Piaget (1977a) explica o movimento de interiorização, que é o das abstrações refletidas, produto consciente das abstrações reflexionantes: esse movimento é marcado primeiramente pela tomada de consciência da ação própria; porém, logo que a conceituação se torna operatória,[15] essa tomada de consciência começa a tornar-se uma reflexão do pensamento sobre si mesmo. No domínio lógico-matemático, isso significa que o sujeito se torna capaz de teoria e não mais de raciocínios *concretos*, em função da nova capacidade de elaborar operações sobre operações.

Quanto ao duplo movimento de interiorização (lógico-matemático) e exteriorização (físico e causal), Piaget (1977a) afirma: a tomada de consciência ocorre como conseqüência dos progressos da abstração. Compreende-se, assim, que a construção do conhecimento matemático se dá, exclusivamente, por processos de tomada de consciência.

Reflexões dessa natureza ocorrem concomitantemente à busca por formas de melhor intervir nas situações de aprendizagem, no sentido de promover a tomada de consciência das

---

[15] Relativa às operações mentais. (MONTANGERO; NAVILLE, 1998).

ações através do diálogo. Em primeiro lugar, visando levar o aluno a identificar seus próprios objetivos, reconhecendo a importância de posicionar-se em relação ao seu papel no ambiente. O fato de nos propormos a alcançar determinado objetivo já é um ato consciente e o êxito é uma conseqüência, mesmo que exija esforços. De fato, nesse sentido, cabe ao professor a coordenação das ações necessárias para que o ambiente tenha condições de propiciar a aprendizagem. A aprendizagem referida aqui não se resume à realização correta de operações, manipulação de *softwares*, utilização de fórmulas e algoritmos desprovidos de significado, que os alunos realizam *inconscientemente*. De fato, a habilidade requerida para a utilização de uma fórmula ou regra matemática é necessária, porém não suficiente. Uma forma *passiva de aprendizagem* leva à insegurança e dependência do aluno, apenas atento às instruções do professor.

Como planejar estratégias de aprendizagem que levem ao desenvolvimento de habilidades relacionadas à autonomia, ao pensamento crítico e à capacidade de aplicar os conceitos matemáticos com conhecimento e criatividade?

Concorda-se com Damásio (2002) quando afirma que a consciência está sempre presente no processo de criatividade humana, porque sua luz é indispensável. E a criatividade, aqui entendida como a habilidade de gerar novas idéias, exige a organização de pontos de vista e só pode ser exercitada através de situações em que seja necessário descentrar-se, procurando entender o ponto de vista do outro e, a partir daí, criar argumentos que justifiquem um determinado procedimento ou uma atitude.

Isso não é fácil, exige a disposição de participar ativamente do próprio percurso de aprendizagem. Além disso, conforme Piaget (1977b), a tomada de consciência é fácil numa conceituação simples, isto é, na aplicação direta de uma forma a um conteúdo (o que em geral sucede na periferia da ação), é tanto mais difícil e, por conseguinte, demorada, quando exige uma conceituação reflexiva sobre composições internas. Dito de outra forma, quando não implica na necessidade de uma reconstrução de estruturas, a tomada de consciência é fácil e há maior probabilidade de ocorrer. Ao contrário, quanto há uma conceituação reflexiva sobre composições internas ou reorganização inicial, o grau de reflexão é grande e muito mais difícil a tomada de consciência, com uma menor probabilidade de ocorrer.

Dessa forma, a manipulação dos símbolos matemáticos, a realização correta de operações, baseadas em algoritmos ou em regras práticas, e a execução mecânica de procedimentos matemáticos podem ocorrer independentemente da sua compreensão. Como a tomada de consciência implica, necessariamente, uma conceituação (PIAGET, 1977b), essas habilidades estão mais de acordo com a *passividade*. Sob esse enfoque, conforme destacado em Sauer e Soares (2004), a tomada de consciência, como conseqüência da abstração, pode ser promovida por meio de processos: explorando, fracassando, tentando, corrigindo, obtendo dados, elaborando conjecturas, testando-as, construindo explicações que são resultados de inferências, comparando, fazendo analogias, refletindo. Uma nova experiência é comparada com outras e hipóteses são criadas, verificadas, confrontadas, explicadas, outras expectativas são criadas e assim por diante. Nesse cenário, o professor é o responsável pelas intervenções, através de diálogos, no sentido de provocar, instigar a mente do aluno, fazendo-o pensar, mostrar suas idéias, refletir, dar explicações, tomar decisões, sempre levando em consideração outros pontos de vista, o que exige descentração.

Quanto aos graus de desenvolvimento, estes estão diretamente relacionados aos questionamentos e desafios propostos, promovendo sucessivas tomadas de consciência. E cada passagem de um estado de inconsciência para um estado consciente não é um simples processo de iluminação, exige reconstruções, implicando uma construção conceitual (PIAGET, 1977a).

De fato, a tomada de consciência ocorre como efeito resultante da conceituação sobre a ação, ou seja, seu ponto de partida são os resultados exteriores (visíveis) das ações. Quanto à conceituação, explica Piaget (1977a, p. 208): "[...] está longe de constituir apenas uma simples leitura: ela é uma reconstrução, e que introduz características novas sob a forma de ligações lógicas, com estabelecimento de conexão entre a compreensão e as extensões, etc."

Somente nessas condições é que ocorre a análise dos meios empregados e, por fim, as coordenações gerais (reciprocidade, transitividade, etc.).

A partir dessas constatações, um olhar atento sobre as interações vivenciadas sugere a possibilidade de identificar níveis de tomada de consciência, com a finalidade de compreender como evolui a ação em suas relações com a conceituação.

Com efeito, uma análise dos dados obtidos revela três níveis diferenciados de ações e conceituações. O estudante do *primeiro nível* é aquele que realiza operações, aplica fórmulas, regras e procedimentos sem saber traduzi-los: sabe fazer mas não sabe explicar. Realiza ações sem saber como as consegue realizar. Em alguns casos, o êxito nas operações não ocorre, ainda, nesse nível. No *segundo nível*, o sujeito sabe fazer, não sabe explicar mas, sim, traduzir. Ou seja, ainda não há consciência do detalhe das ações efetuadas, nem de sua ordem de sucessão. Em ambientes de aprendizagem onde são enfatizadas atividades de *treinamento* de regras ou manipulações de fórmulas, o estudante, capacitado graças às suas ações, permanece muito tempo inconsciente de suas próprias estruturas cognitivas. Mesmo quando os problemas são diferentes, ele não faz dessas habilidades um tema de reflexão antes de atingir um nível mais elevado de abstração. É o que se observa freqüentemente quando se pergunta a um estudante como sabia que deveria resolver daquele modo, e este se limita a relatar suas sucessivas ações: primeiro multipliquei, depois elevei ao quadrado, etc. Nesse nível as tomadas de consciência dependem de regulações ativas da ação, enquanto as tentativas iniciais, baseadas em meras regulações automáticas, dão lugar apenas a uma consciência do resultado obtido, não sabendo justificá-lo, ou justificando-o equivocadamente. Para Piaget (1978) isso é um caso típico de atraso na tomada de consciência em relação à ação, como no caso dos sucessos precoces, ou seja, são levados em conta somente os resultados da ação. A compreensão da ação ou, em outras palavras, sua interpretação conceitual permanece atrasada.

Finalmente, observa-se um *terceiro nível*, em que o estudante sabe fazer e sabe explicar. Nesse nível encontra-se a capacidade de antecipar resultados e a de escolher entre meios diferentes, sem limitar-se a cálculos automáticos. Isso favorece a tomada de consciência, visto que já se trata de processos que exigem abstrações. Há uma influência da conceituação sobre a ação, o que permite, diante de um problema, estabelecer um plano de resolução, ou seja, a programação completa sabendo *o que fazer* e *por que fazer desta maneira*. A solução do problema é compreendida desde o seu enunciado e, antes de qualquer tentativa, o aluno deduz o que é conveniente fazer. Nesse nível, lembra dos conceitos, mesmo quando foram construídos com hesitações e experiências, ou através de ações baseadas em *tentativas e erros*. A essas etapas de abstração reflexionante correspondem, como é natural, os momentos sucessivos da tomada de consciência e da compreensão, culminando com abstração refletida.

Segundo Piaget (1977a), a lei geral que parece resultar dos fatos estudados, e é o que se identifica nesta pesquisa, é que a tomada de consciência procede da periferia para o centro. O autor justifica que, embora a determinação dos objetivos de uma ação comporte mais fatores internos do que externos, os primeiros escapam antes à consciência. Além disso, o conhecimento procede não do sujeito nem do objeto, mas da interação entre os dois. Daí o fato de a determinação dos objetivos e a obtenção de resultados serem chamadas de periféricas. Nesse nível a conceituação influencia a ação, isto é, à medida que as ações puderem ser justificadas, novas reconstruções conduzirão à tomada de consciência.

Ao compreender o processo de tomada de consciência como um processo de construção de conhecimento, procura-se justificar o papel do diálogo nesse processo.

3.3 A tomada de consciência e o diálogo

O educador que escuta aprende a difícil lição de transformar o seu discurso, às vezes necessário, ao aluno, em uma fala ***com*** *ele.*
(FREIRE, 2001a, p. 128)

Segundo Piaget (apud BRINGUIER, 1978), desde o primeiro nível de tomada de consciência, não é que o sujeito não saiba nada de suas ações bem sucedidas; ele compreende o essencial, mas em ação e não em pensamento. Os resultados são mais ou menos conscientes na medida em que consegue formular verbalmente, a fim de comunicá-los a outra pessoa ou mesmo para se opor a julgamentos diferentes.

Em ambientes de aprendizagem é possível promover, na evolução das ações, a passagem de um nível de tomada de consciência a outro, mais elevado, por meio de atividades que incentivem o aluno a refletir e a escrever sobre suas idéias, justificando procedimentos adotados, analisando resultados obtidos nas resoluções de problemas, e também refletindo sobre o papel que lhe cabe na construção do seu conhecimento. Ou seja, como o processo de tomada de consciência implica em conceituação, o diálogo é fundamental pois só conceituamos refazendo a experiência (ação) pela linguagem. Com isso o aluno pode desenvolver o próprio ato de pensar e essa atividade reflexiva proporciona melhorias, na compreensão dos conceitos matemáticos e nos níveis da motivação, imprescindíveis para o aprender.

Tal desenvolvimento pode também ser potencializado através de ações no sentido de procurar solução para os problemas, interagindo e cooperando com os colegas. Porém, não pode faltar a presença do professor, atento, intervindo oportunamente, coordenando as discussões, valorizando toda e qualquer contribuição e incentivando novas intervenções, sempre que necessário. Os resultados, então, não se traduzem exclusivamente por aquisição de *conteúdos* mas pelo desenvolvimento de novas habilidades, tais como ler e reler até compreender, interpretar informações, reconhecer e valorizar gestos e atitudes de interesse e solidariedade e tantos outros gerados pela disposição de participar, colaborando em benefício próprio e coletivo.

Os graus de desenvolvimento dos alunos envolvidos variam, e tem-se como princípio respeitar os diferentes níveis ou diferentes tempos (psicológico, cronológico, histórico, social, biológico), o que requer estratégias de ensino baseadas em propostas de estudo flexíveis, além de disponibilização de material de apoio adequado.

Não se pode observar o conhecimento mas, sim, a ação (PIAGET apud FURTH, 1995). E as ações que observamos com atenção podem fornecer informações necessárias para criar estratégias adequadas aos diferentes níveis de conhecimento e, conseqüentemente, colaborar com o progresso de cada um. Conforme Piaget (1978), a partir de um certo nível, há influência da conceituação sobre a ação.

Nesse sentido é que se considera fundamental a presença do professor na função de propor novos questionamentos ou desafios, visando à compreensão e à construção dos conhecimentos, preservando a liberdade, no sentido de promover o desenvolvimento da aprendizagem a partir das respostas apresentadas, bem como transformando erros em fontes de novas elaborações. Essa tarefa não é fácil, requer, além de conhecimento, bom senso e experiência, facilidade na utilização dos recursos e praticidade para adequá-los às necessidades de cada situação.

Além disso, não são todos os que são atingidos pelo estímulo que promove o desejo de *aprender mais*, aprofundando seus conhecimentos, de acordo com sugestões recebidas, acreditando na possibilidade de superar obstáculos a partir de atividades de interação com cooperação. É necessário que o professor tenha sensibilidade para reconhecer e ajudar o aluno a superar tais obstáculos que o impedem de participar e de adquirir confiança e segurança suficiente para superar suas dificuldades. A presença constante do professor, como incentivador de toda e qualquer participação, que expresse envolvimento, seja de ordem cognitiva ou emocional, é fundamental. Valorizá-lo pelo que mostra conhecer, ao contrário de desvalorizá-lo pelo que não conhece, é a base para as intervenções do professor.

Entretanto, sabe-se que nem sempre é possível contar com a participação de todos. Isso porque deve haver algo mais que atraia o aluno. E esse algo mais é o seu *querer*, a sua *motivação*, o seu reconhecimento da importância de participar, aceitando os desafios. Aqueles alunos que estão acostumados a freqüentar cursos de graduação esperando cumprir tarefas cujo teor consiste em repetir procedimentos que o professor deve demonstrar primeiramente, não têm a preocupação de compreender, tampouco consideram isso relevante. Sabe-se que, em muitos casos, há motivos para isso e não é intenção discuti-los aqui. Entretanto, procura-se assumir a própria parcela de responsabilidade por uma educação de qualidade, uma educação que não se traduz simplesmente pelo ato de ensinar. Nesse sentido, a partir de atividades que incentivem a avaliação do próprio processo individual de desenvolvimento, analisando o respectivo desempenho e procurando identificar e justificar, explicitando o assunto relacionado e as dificuldades encontradas, e apontando possíveis ações que possam auxiliá-lo a superá-las, o aluno pode avaliar seu grau de envolvimento e assumir sua responsabilidade, se assim o desejar.

Evidentemente, há a possibilidade de permanecer no mesmo nível em que se encontra, caso não tenha interesse em acompanhar a discussão. Porém não há dúvidas com relação ao progresso daqueles que acompanham as discussões, procurando envolver-se e concluir, de acordo com as sugestões apresentadas.

Quanto ao papel de professora-orientadora, acredita-se tê-lo desempenhado, até aqui, motivada pela convicção de que não se aprende sozinho, mas, sobretudo, porque a aprendizagem precisa da motivação humana e da decorrente avaliação (DEMO, 2002a).

Mas é importante lembrar, como sugerem Freire e Freire (2001, p. 75):

> [...] não é a partir do que é feito apenas na sala de aula que ele ou ela será capaz de apoiar os alunos e as alunas na reconstrução da posição deles no mundo. É importante que saibamos que o tempo limitado da sala de aula representa apenas um momento da experiência social e individual total do aluno.

E prossegue: "O que deve fazer um professor a fim de abrir-se, ele ou ela mesma, rumo à reconstrução do mundo num sentido democrático?"

Opta-se pelo diálogo. E o diálogo pode ocorrer também fora da sala de aula. A partir de um encontro presencial é possível explorar a possibilidade de estabelecer e continuar esse encontro e essa discussão. Os recursos telemáticos disponíveis, nos ambientes de aprendizagem, organizados de acordo com esses pressupostos, permitem que os alunos envolvam-se em formas dialógicas escritas mas que, nem por isso, estão fixas, estáticas. Ao contrário, torna-se possível, a partir daí, a construção com co-operação, de textos que *traduzem* a trajetória percorrida durante sua construção: são as produções coletivas.[16]

Para Freire (2003), "o diálogo é o encontro dos homens, mediatizados pelo mundo, para pronunciá-lo, não se esgotando, portanto, na relação eu-tu". Porém impõe uma condição de possibilidade desse encontro:

---

[16] As produções coletivas estão caracterizadas no capítulo 4.

> Se ele é o encontro em que se solidarizam o refletir e o agir de seus sujeitos endereçados ao mundo a ser transformado e humanizado, não pode reduzir-se a um ato de depositar idéias de um sujeito no outro, nem tampouco tornar-se simples troca de idéias a serem consumidas pelos permutantes" (FREIRE, 2003, p. 79).

Entende-se, assim, que a proposta pedagógica de Freire contempla ambos os aspectos, afetivo e cognitivo, a serem considerados em ambientes de aprendizagem, conforme destacado acima. Quanto à importância da tomada de consciência no processo, esta é também destacada nessa proposta pedagógica. Com efeito, Fiori (apud FREIRE, 2003) afirma que, para Freire, a consciência emerge do mundo vivido, objetiva-o, problematiza-o, compreende-o como projeto humano.

Becker (1997, p. 149) ao promover o encontro entre Piaget e Freire revela: "[...] o processo de conscientização (Freire), através de progressivas tomadas de consciência (Piaget), progride no sentido da reversibilidade completa, característica fundamental da operação formal, da mediação conceitual."

De fato, o diálogo pode promover a conceituação, a partir de uma postura curiosa, aberta, alegre, crítica, reflexiva, comprometida, fraterna, ética de todos os envolvidos no processo e dispostos a aceitar o desafio.

3.4 Aprendizagem de Matemática: fatores psicológicos e fatores pedagógicos

> *A Matemática pode ser comparada a um moinho magnificamente bem feito que mói farinha tão fina quanto se deseja: mas o que você recebe depende do que você põe lá; e assim como o melhor moinho do mundo não pode tirar farinha de trigo de grãos de ervilha, também páginas de fórmulas não tirarão um resultado definido de dados imprecisos.*
> (HUXLEY apud BOYER, 1996, p. 440).

Convém considerar, também, o resultado de pesquisas realizadas por autores que investigaram e analisaram fatores psicológicos e fatores pedagógicos que intervêm na aprendizagem de Matemática, o que é necessário levar em conta no desenvolvimento de ações pedagógicas eficazes.

Para discutir a questão psicológica, relacionada a tais fatores, encontrou-se na Epistemologia Genética algumas explicações importantes.

Segundo o grupo Bourbaki[17] apud Piaget (1968), as três estruturas fundamentais sobre as quais repousa o edifício matemático são as estruturas algébricas, cujo protótipo é o *grupo*, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas. Com o interesse em analisar o desenvolvimento psicológico das operações aritméticas e geométricas espontâneas[18] da criança e, sobretudo, as operações lógicas que constituem suas necessárias condições prévias, Piaget (1968) examinou-as uma a uma. Sem entrar em detalhes quanto às propriedades de tais estruturas, identificadas a partir das pesquisas realizadas, procura-se aqui destacar alguns fatos que deverão auxiliar no esclarecimento de aspectos imprescindíveis a serem considerados na realização desta pesquisa.

Com relação à noção de estrutura, esta, independentemente da evolução da Matemática, é uma noção que foi freqüentemente utilizada por Piaget apud Montangero e Naville (1998), inspirado na noção de estrutura em Matemática para designar as formas de organização dos raciocínios. Segundo esse autor, Piaget recorreu ao conceito de estrutura para explicar a coerência do pensamento lógico e a idéia de necessidade que a acompanha mostrando que, assim como na Matemática, a coordenação das ações abre a possibilidade de as estruturas mentais organizarem os conhecimentos de uma forma mais complexa, formalizando-os. Tal conceito é o que estabelece relações entre partes e todo no interior do sujeito, que nem sempre tem consciência disso. Com efeito, as estruturas não estão no espírito do sujeito nem no meio externo, mas são construídas progressivamente. Assim, o processo do desenvolvimento das estruturas mentais é explicado por esse autor, como sendo um processo de construção lógico-matemática de complexidade crescente.

Piaget introduziu a estrutura de grupo como conceito explicativo das condutas, para depois considerar a aplicação desse modelo à lógica da criança. De modo geral, sublinha Piaget (1968), o *grupo* é a tradução simbólica de alguns caracteres fundamentais do ato de inteligência, como possibilidade de coordenação das ações. Além do grupo, outras estruturas do tipo algébrico são requeridas para as primeiras operações lógicas, tais como as inclusões da parte no todo, dentre outras.

---

[17] Grupo de matemáticos que formaram uma secreta *societé anonyme*, conforme Boyer, C., 1996.
[18] Espontâneo significa independente do ensino escolar, mas não, naturalmente, dos estímulos do meio social em geral, conforme Piaget, 1968.

Quanto às estruturas de ordem, estas são estruturas de relações (sucede, precede, menor, maior, etc.) e não de operações. Já, com relação às estruturas topológicas, é interessante destacar que os estudos de Piaget apontam para o fato de que a construção das noções e das operações geométricas, no desenvolvimento espontâneo da criança, não ocorre na mesma ordem histórica das etapas da geometria. Historicamente, a geometria euclidiana ou métrica precedeu em muitos séculos a geometria projetiva, e a topologia somente passou a ser considerada mais recentemente. Hoje a topologia, tratando das propriedades de figuras que permanecem invariantes por deformação contínua, entusiasmaria matemáticos do século XVIII, se pudessem voltar à vida, pois a reconheceriam como enorme avanço sobre sua correlação de figuras (BOYER, 1996).

Enfim, as estruturas algébricas, as de ordem e as topológicas correspondem às estruturas da inteligência e, portanto, é necessário basear a didática matemática na organização dessas estruturas operatórias. Do ponto de vista psicológico, essas operações derivam de ações que se interiorizam, coordenando-se em estruturas. Piaget identifica quatro estágios no desenvolvimento das funções cognitivas, respectivamente: o sensório-motor (antes do aparecimento da linguagem, quando a inteligência consiste unicamente em coordenar as ações); o pré-operatório (ou intuitivo, quando, em termos de operações, falta a reversibilidade); o operatório concreto (a criança ainda raciocina em termos de objetos e não em termos de hipóteses mas já há reversibilidade por inversão ou negação e por reciprocidade), e o operatório formal, com a chegada de uma lógica mais completa que alcança um equilíbrio (PIAGET, 1972; INHELDER; PIAGET, 1976). Com relação às estruturas intelectuais desenvolvidas até o último período (operatório formal), estas surgem lentamente, mas de acordo com os estágios de desenvolvimento, cuja ordem se mantém, mostrando que cada estágio é necessário para a construção do seguinte. Entretanto, a sua velocidade varia entre os sujeitos e também dependendo do meio social.

Piaget (1972, p. 5) explica:

> Esses diferentes ritmos seriam devidos à qualidade e freqüência de estimulação intelectual recebidas dos adultos ou obtidas das possibilidades disponíveis, para a criança, de atividade espontânea no seu meio. No caso de estimulação e atividades pobres, não é preciso dizer que o desenvolvimento do terceiro e quarto períodos, acima mencionados, será mais lento. Quando chega ao pensamento formal, poderíamos propor que haverá um retardo ainda maior em sua formação (por exemplo, entre 15 e 20 anos e não entre 11 e 15 anos). Ou que, talvez, em condições extremamente desvantajosas, um certo tipo de pensamento nunca se formará realmente ou se desenvolverá apenas naqueles indivíduos que mudarem o seu ambiente enquanto o desenvolvimento ainda for possível.

Porém, assinala Piaget (1968), as estruturas-mãe, apontadas anteriormente, coordenam-se muito rapidamente entre si e engendram, mediante suas composições interestruturais, algumas estruturas mais tardias cuja importância não é menor para a construção das noções lógicas e matemáticas. Isto é, conforme Piaget (1972), o funcionamento e a estrutura cognitiva envolvem todos os aspectos da evolução mental e psicofisiológica e não apenas os aspectos mais *instintivos*, emocionais e sociais, o que está de acordo com a análise realizada na seção 2.1.

As operações formais que sustentam os raciocínios complexos do adolescente e do adulto, são operações na segunda potência: elas podem apoiar-se nas operações concretas ou nas proposições expressas verbalmente em termos de hipóteses. Do ponto de vista social, no estágio que se caracteriza pela capacidade de pensar hipoteticamente e deduzir as suas conseqüências, analisa Piaget (1972, p. 3):

> [...] há também uma importante conquista. Primeiramente, o pensamento hipotético muda a natureza das argumentações. Uma argumentação frutífera e construtiva significa que, por meio do uso de hipóteses, podemos adotar o ponto de vista do adversário (embora sem necessariamente acreditar nele) e retirar as conseqüências lógicas que ele implica. Dessa forma, podemos julgar o seu valor depois de ter verificado as conseqüências. Em segundo lugar, o indivíduo que se torna capaz de pensamento hipotético, por isto mesmo, interessar-se-á por problemas que vão além do seu campo imediato de experiências. Conseqüentemente, o adolescente está capacitado para compreender e até mesmo construir teorias e participar na sociedade e ideologias dos adultos. Essa capacidade, é claro, acompanhada freqüentemente, por um desejo de transformar a sociedade e, ainda, se necessário, destruí-la (em sua imaginação) para construir outra melhor.

Esse comportamento dirigido por hipóteses baseadas em modelos causais mais ou menos refinados, que caracterizam o nível operatório formal, implica a elaboração de raciocínios combinatórios (estruturas de rede) e das estruturas do grupo INRC.

Quanto às operações combinatórias, a pesquisa psicológica de Piaget confirma a capacidade (independente do treinamento escolar) de realizar operações envolvendo análise combinatória no sentido experimental, não necessariamente com relação às fórmulas matemáticas. O sistema combinatório, inexistente no período anterior, é essencial do ponto de vista lógico: relações de implicação, disjunção e incompatibilidade resultam de combinações sem as quais não é possível a lógica proposicional.

O grupo INRC, por sua vez, "[...] como o agrupamento de operações concretas, remete, ao mesmo tempo, a um modelo matemático dos comportamentos e a uma realidade psicológica, ou seja, uma estrutura que organiza as operações do sujeito” (MONTANGERO; NAVILLE, 1998, p. 194-195). O que caracteriza sua estrutura, com relação à estrutura mais fraca, é a composição em um único sistema de duas formas de reversibilidade, que existiam antes separadamente. O sistema liga as quatro operações ou transformações seguintes:

- I (a operação idêntica)
- N (a operação inversa)
- R (a operação recíproca)
- C (a operação inversa da recíproca)

Seja, por exemplo, a relação p ou q. Tem-se:

I (p v q) = $p \vee q$
N (p v q) = $\overline{p} \wedge \overline{q}$
R (p v q) = $\overline{p} \vee \overline{q}$
C (p v q) = $p \wedge q$

Quadro 1: As transformações do grupo INRC sobre a relação de disjunção

No quadro 1 é possível observar como as transformações do grupo INRC são caracterizadas na relação de disjunção (p ou q). Assim, o fato de permanecer imutável caracteriza a transformação identidade I; quando se transforma em sua negativa N (reversibilidade por negação ou inversão), tem-se ‘não p e não q’; quando se transforma na sua recíproca (reversibilidade por reciprocidade) resulta ‘não p ou não q’ e, ao transformar-se na sua correlativa, o resultado é ‘p e q’.

O grupo INRC tem uma estrutura que permite ao sujeito combinar em uma operação a negação e a recíproca, o que não era possível em nível das operações concretas. Trata-se da reversibilidade, que é possível quando o pensamento tem acesso à operação direta e à sua inversa simultaneamente. De forma genérica, essa estrutura permite a compreensão da diferença entre a cessação ou a anulação de um efeito, bem como a compensação desse efeito por outra variável, o que não elimina, porém neutraliza o efeito (PIAGET, 1972).

Inicialmente, as operações formais eram apresentadas como simples operações, semelhantes às operações concretas, mas aplicadas às proposições. Piaget e Inhelder (1976) definiram as operações formais no plano psicológico.

A coordenação dessas diferentes operações e possibilidades de reversibilidade em um sistema único explica, segundo Piaget, o poder novo do raciocínio do adolescente e do adulto com relação ao da criança. As possibilidades de composições de operações tornam-se muito numerosas e uma grande variedade de problemas complexos pode, assim, ser resolvida. Esse novo poder permite ao conhecimento ultrapassar o real, abrindo o *caminho indefinido das possibilidades*. Com efeito, para Piaget (1972), essa lógica "[...] constitui a essência da lógica dos adultos cultos e ainda proporciona a base para as formas elementares do pensamento científico".

Vale ressaltar, aqui, que tais esquemas apresentam dois aspectos: um lógico e outro matemático cuja necessidade o sujeito pode sentir devido à exigência de um problema a ser resolvido. Assim, tornam-se possíveis: as operações combinatórias, a aquisição do sistema operatório das proporções, a coordenação de dois sistemas de referência e a relatividade dos movimentos e das velocidades, a compreensão da noção de equilíbrio mecânico, a compreensão da noção de probabilidade, bem como da noção de correlação, as compensações multiplicativas, além de outras formas de compensação que ultrapassam a experiência, tais como a conservação de volume e do movimento retilíneo uniforme. Tais noções, esquemas ou operações são inacessíveis em nível concreto, porque sua organização supõe as operações precedentes.

Isso permite compreender o processo do desenvolvimento do ser humano, tal como é explicado por Piaget, como fundamentalmente um processo de construção lógico-matemática de complexidade crescente.

As considerações apresentadas, então, influenciam diretamente no trabalho do educador, queira ele ou não. Para Piaget et al. (1968), o objeto do ensino da Matemática será sempre alcançar o rigor lógico, o que se interpreta como o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de argumentar com clareza e justificar pontos de vista, expressando-se de forma coerente. Para isso, o recurso inicial às ações é uma boa medida, já que psicologicamente as operações derivam de ações que se interiorizam, coordenando-se em estruturas. E isso não é empirismo, argumenta Piaget et al. (1968). Há empirismo quando o educador substitui uma demonstração matemática por uma experiência física com leitura dos resultados obtidos, não quando a experiência serve para a coordenação das ações, e a abstração se refere a essas ações e não ao objeto. Desse modo, a experiência prepara o espírito dedutivo, ao invés de contestá-lo. De fato, o recurso à experiência e à ação não compromete em nada o rigor dedutivo quando necessário. Ao contrário, permite a boa compreensão dos conceitos, tanto mais quanto mais tenha havido participação ativa em lugar da contemplação passiva dos resultados das ações realizadas por outro.

Nesse sentido é que se revela a importância de um meio favorável, no qual a experiência adquirida proporcione ao indivíduo o alimento cognitivo e a estimulação intelectual necessários para cada construção; isso está na dependência, também, dos fatores espontâneos e endógenos dos sujeitos normais e, ainda que não resulte exclusivamente do processo de transmissão social, faz parte da formação das operações.

> "[...] um meio favorável para a 'co-operação', ou seja, operações realizadas em comum (por exemplo, o papel da discussão, crítica ou ajuda mútua, problemas levantados como resultado de trocas de informação, elevada curiosidade devida à influência do grupo social, etc.)" (PIAGET, 1972, p. 6).

Afirmando que se sabe muito pouco ainda sobre o período que separa a adolescência da vida adulta, Piaget (1972) apresenta algumas possibilidades de interpretação para as diferenças cada vez maiores entre os sujeitos, a partir do estágio das operações formais. Numa dessas interpretações, exemplifica com a evolução do desenho, referindo-se ao teste "desenho da figura humana". A partir desse estágio, Piaget (1972, p. 6) entende que:

> [...] a qualidade do desenho nada mais tem a ver com o nível de inteligência. Neste caso temos um bom exemplo de um padrão de comportamento que é, primeiramente, subordinado a uma evolução geral de estágios [...] e, depois disso, torna-se gradualmente diversificado de acordo com critérios de atitudes individuais de preferência a um desenvolvimento geral comum a todos os indivíduos.

Piaget generaliza essa interpretação para todos os campos trazendo, também, o exemplo da Matemática, com a distinção feita por Poincaré, quando afirmou que há dois tipos de matemáticos: os *geômetras*, que pensam de forma mais concreta, e os *algebristas*, que pensam mais abstratamente. É importante lembrar que Poincaré considerou a Matemática como seu domínio, estando igualmente à vontade em todos os ramos, puros e aplicados e, efetivamente, deixando contribuições em muitas áreas dessa ciência. Além disso reconhecia que tinha dificuldades com cálculos aritméticos simples. Isso, para Boyer (1996), mostra que para ser um grande matemático não é necessário ter facilidade com números.

Assim, compreende-se que alguns são mais talentosos para a física do que para a lógica ou matemática ou o contrário. Com efeito, Piaget (1972, p. 7) conclui que “todos os sujeitos normais atingem o estágio das operações formais ou a estruturação [...]. Porém, eles atingem este estágio em diferentes áreas de acordo com suas aptidões e suas especializações profissionais (estudos avançados ou diferentes tipos de aprendizagem para as várias profissões)”. Conseqüentemente parece ser provável que todos os sujeitos normais atingem o estágio das operações formais, ou seja, tornam-se capazes de argumentar de forma hipotética, dissociar variáveis envolvidas, raciocinando em termos de combinações, negações e reciprocidades, desde que seja no seu campo particular de interesse. Assim sendo, em outras situações, a falta de conhecimento, ou o fato de terem esquecido certas idéias que são particularmente familiares enquanto freqüentam a escola, pode dificultar o raciocínio formal, dando a impressão de estarem no nível concreto.

Além dessas questões psicológicas discutidas até aqui, há outros fatores que intervêm na aprendizagem da Matemática e que se pretende discutir. Trata-se de considerar as pessoas e os mecanismos mentais que intervêm no pensamento matemático e no ato de aprender; as estruturas matemáticas e seu próprio dinamismo, e as relações dessas estruturas com as da realidade, em particular, no campo das aplicações. De acordo com Gattegno (apud PIAGET et al., 1968), isso é necessário para colocar-se a questão pedagógica da Matemática.

Tradicionalmente a Matemática é uma disciplina apresentada através de uma série determinada de capítulos, ordenados segundo critérios que, nem sempre, levam em consideração as estruturas mentais associadas aos mesmos. Isso pode ser justificado, levando em consideração os fatores psicológicos expostos anteriormente. Ocorre que, nem sempre, as estruturas mentais dos alunos encontram-se no nível operatório formal, necessário para o desenvolvimento dos programas. O professor vê-se, então, responsável pela difícil tarefa de decidir entre *cumprir o programa* ou *converter o programa, de acordo com os conhecimentos apresentados pelos alunos, em algo que tenha significado para eles, trazendo-lhes a satisfação e o gosto pela aprendizagem de Matemática.*

Como enfrentar esse desafio?

Para Gattegno (apud PIAGET et al., 1968) isso é possível através de um método dinâmico, cuja essência está em atuar de maneira tal que os próprios alunos reconheçam suas estruturas mentais em correspondência com a idéia suscitada pelas ações do professor. Assim esse autor ilustra sua visão de como a Matemática poderia ser apresentada, problematizando, desde questões associadas à adição de frações, abordadas inicialmente nas primeiras séries, até o conceito abstrato de funções, através de abordagens algébricas ou geométricas, na última série do Ensino Médio, para ser retomado no primeiro semestre de Cálculo Diferencial e Integral, quando se constitui no conceito fundamental inicial.

Com relação à adição de frações, por exemplo, qual o professor de matemática que nunca se surpreendeu ao observar aquele aluno que não compreende por que $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ não é igual a $\frac{3}{5}$, mesmo depois de lhe ter sido apresentado o algoritmo da adição de frações? O que ocorre nesse caso? Qual é a dificuldade? Por que o mesmo símbolo "+" é empregado tanto para números inteiros como para números fracionários e, no entanto, a mesma regra não se adapta para ambos os tipos de números? Aqui é preciso que o professor leve em conta que a regra pode não ter significado algum para o aluno, a menos que seja precedida de discussão, com compreensão, sobre as equivalências entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$, respectivamente, o que lhe permitirá compreender que $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ é equivalente a $\frac{3}{6}+\frac{4}{6}$ e, conseqüentemente, resulta $\frac{7}{6}$.

Outra questão delicada e que é causa de dificuldades por parte dos alunos, está relacionada às potências com expoente negativo. Assim, espera-se que a igualdade $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ seja natural para o estudante universitário. Entretanto, sabe-se que não é assim e que nem sempre está claro que, na igualdade, estão sendo relacionadas duas operações: divisão e potenciação. Freqüentemente o sinal negativo, no resultado, dá ao aluno a suspeita de que estão sendo relacionadas as operações de divisão e subtração.

Enfim, no nível de atuação da pesquisadora, não faltam evidências de equívocos demonstrados pelos alunos durante a realização da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. E não há dúvidas de que, dependendo da postura do professor, tais equívocos passam completamente despercebidos pelo aluno (e até mesmo pelo professor), que nem sequer suspeita de que possam constituir-se em empecilhos para o seu desenvolvimento em termos de aprendizagem de Matemática.

- ✓ Por que $y^2 = x$ não é equivalente a $y = \sqrt{x}$?
- ✓ Por que $(a+b)^2$ é diferente de $a^2 + b^2$?
- ✓ Por que $\frac{n}{0}$ não é igual a 0 nem igual a n?
- ✓ Por que $sen^2 x \neq sen x^2$?
- ✓ Por que os zeros da função definida por $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ são conhecidos, de imediato, como sendo iguais a 1, 2 e 3?
- ✓ Por que uma função crescente pode ser negativa?

Questões dessa natureza não podem ser desconsideradas, sob pena de ficar prejudicada a compreensão de conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. De fato, até esse nível, praticamente são estudadas apenas operações e suas propriedades; porém, agora são necessárias novas estruturas em que relações de desigualdade, operações reversíveis, correspondências ou equivalências aparecem com destaque no estudo de funções. Nesse nível é oportuno que o aluno perceba a importância de utilizar abordagens algébricas, geométricas, numéricas ou verbais, sempre que possível. Diante disso, não se pode deixar passar a oportunidade de verificar se está clara, para ele, a relação entre tais abordagens para uma mesma equação ou função, por exemplo.

Conforme as pesquisas sobre erros em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral realizadas por Cury (2004), é freqüente encontrarem-se alunos que não estão familiarizados com as operações com números reais, razões e proporções, funções, em especial com algumas delas, como as funções trigonométricas, ainda que estes sejam temas abordados no Ensino Fundamental ou Médio e, conseqüentemente, encontrando dificuldades em compreender os tópicos de Cálculo. É preciso, pois, que os professores estejam conscientes dessa realidade, de forma que possam explorar os erros e, assim, descobrir maneiras de contribuir de forma mais efetiva com a aprendizagem dos alunos. Com efeito, o treinamento em exercícios não permitirá ao aluno a compreensão dos novos conceitos.

Enfim, sugestões valiosas sobre como o professor pode introduzir os conceitos de forma gradativa, assegurando-se, antes de passar a um novo nível, de que o aluno tenha segurança suficiente para isso, são encontradas em muitas obras. Porém sabe-se das dificuldades, em ambientes tradicionais de aprendizagem, em considerar todas as dúvidas dos alunos, principalmente pela paciência e preocupação que isso demanda, visto que algumas aulas podem ser consideradas "perdidas".

Conforme Cury (2004):

> Efetivamente, exigências acadêmicas que pressionam os docentes a cumprir a totalidade dos programas de suas disciplinas, acrescidas de concepções fortemente arraigadas sobre o papel do professor – detentor do conhecimento e que deve repassá-lo aos alunos – prejudicam, muitas vezes, a emergência de propostas inovadoras, de experiências que propiciem a exploração do potencial dos alunos, bem como a descoberta de suas dificuldades.

Entretanto é inegável, também, a impossibilidade de serem obtidos resultados que estejam além das capacidades de nossos alunos. Além disso, o desconforto ocasionado por exposições incompreensíveis para eles é um dos fatores responsáveis pelo clima de desconfiança, insegurança e desmotivação que, inegavelmente, já se teve oportunidade de vivenciar.

As sugestões aqui apresentadas têm, assim, a finalidade de servir como exemplo ilustrativo de algumas questões abertas que podem servir como pontos de partida para diálogos matemáticos que possam vir a ter significado para o aluno.

Diante dessas considerações é que esta pesquisa está sendo realizada, acreditando que, por meio da comunicação proporcionada pelos recursos disponíveis nos ambientes de aprendizagem, é possível conhecer o ponto de vista do aluno. Com efeito, este somente expressa verbalmente aquilo que experimenta mentalmente. Por isso, objetiva-se promover diálogos em que ele seja incentivado a comunicar suas idéias, o que, além de trazer-lhe benefícios, permite também, por meio da socialização, favorecer todo o grupo interessado. Tais diálogos podem também ser conduzidos no sentido de aperfeiçoar a linguagem, uma vez que a comunicação precisa ser clara. Conforme Cury (2004), a dificuldade de ler e escrever – no sentido de não entender o que é lido ou o que está sendo escrito – impossibilita a interpretação do texto e, conseqüentemente, a reelaboração mental de seu conteúdo. Quanto à formalização e às demonstrações necessárias, estas também têm seu espaço, em momento oportuno. Ao professor atento e conhecedor de sua disciplina, não faltam oportunidades de intervir, no sentido de concluir as discussões da melhor forma possível, levando em consideração o rigor e a formalização adequados a cada situação.

3.5 Continuando o percurso: possibilidades

Educação é tudo que se sabe depois que se esquece
o que se aprendeu na escola.
(EINSTEIN, s.d.)

A partir da análise das questões até aqui destacadas, entende-se que a história do conhecimento matemático é um processo sociogenético encadeado e cumulativo, ou seja, as construções posteriores se apoiaram nas idéias que deram origem à Matemática. Portanto, é expressivo, como possibilidade de significação, respeitar a lógica própria dessa construção, isto é, introduzir novos conceitos e auxiliar o aluno na (re)construção dos conceitos prévios, de acordo com as estruturas necessárias que suportam cada novo conhecimento. De fato, os conceitos presentes nos primeiros níveis de escolarização são realmente fundamentais, pois serão infalivelmente requeridos em etapas subseqüentes onde se estuda Matemática.

Mas, como vimos, não é por conta do tempo cronológico que se dá o desenvolvimento cognitivo nem pela passagem na escolarização anterior. O fato de o aluno estar na universidade não garante que tenha habilidade de lidar com conceitos supostamente adquiridos anteriormente.

Portanto, não faz sentido tratar dos conhecimentos matemáticos como um conjunto de regras e fórmulas praticadas em situações-modelo. Mais importante que aplicar corretamente determinada regra é reconhecer sua devida aplicação ou a compreensão de seu sentido. Ainda que se traduzam por fórmulas ou algoritmos práticos, que permitem calcular mais rapidamente os resultados, os mesmos não podem tomar o lugar dos conceitos, como se somente esses fossem os objetos novos a serem assimilados. A essência não está no conhecimento em si, em nível de informação, mas na compreensão do seu significado. Por isso é que as estruturas mentais podem explicar os modos de aprender, de organizar as informações. Uma fórmula, por exemplo, deve ser a tradução simbólica de uma idéia. Dessa forma não pode ser desvinculada do entendimento do fenômeno que representa (LIMA; SAUER, 2003). De acordo com Kamii (1984), impor os conteúdos como uma lista de conceitos a serem aprendidos equivale à tentativa de fazer com que uma árvore cresça colocando as folhas a partir do exterior.

A experiência corriqueira de aprendizagem se resume em momentos de memorização de conteúdos fragmentados e não contextualizados, que dependem de capacidades perceptivas. Ao contrário, em ambientes de aprendizagem em que seja oportunizada a *conversação matemática* é possível desenvolver a capacidade de criar e recriar.

É na qualidade das ações que o conhecimento matemático pode ser visto como capacidade organizadora do conhecimento humano que provém, precisamente, da capacidade de retirar as qualidades da coordenação das próprias ações. Mas a tomada de consciência somente se produz ao se instaurar um espaço de convivência, de *diálogo matemático* e não somente uma série de exercícios manipulativos de regras e de símbolos.

"Uma das formas de abstração reflexionante, apontada pela epistemologia piagetiana como horizonte de desenvolvimento, dá-se apenas por tomada de consciência, esta vista como apreensão dos mecanismos da própria ação" (BECKER, 2001). Mas os atos próprios do *fazer matemático* como experimentar, visualizar e interpretar, prever, induzir, generalizar, abstrair e demonstrar nem sempre se constituem como apropriações para os estudantes. Pesquisas mostram que poucos estudantes universitários parecem ter chegado às operações formais, mesmo depois de terem sido bem-sucedidos na escola secundária. Não se pode, portanto, deixar de oferecer diferentes possibilidades de gerar e organizar idéias. Aproveita-se pouco do potencial da Matemática para o desenvolvimento e a organização do pensamento, se for tratado apenas o seu lado calculista em treinamento de resoluções numéricas.

Ambientes de aprendizagem que possibilitam a interação e o envolvimento em atividades de colaboração, incentivando a naturalidade da expressão como fator de desenvolvimento cognitivo dão conta, também, do fator social desse desenvolvimento. Contudo, de acordo com Piaget, "a socialização é uma estruturação com a qual o indivíduo contribui na medida em que recebe [...]" (MONTANGERO; NAVILLE, 1998) e isso justifica seu aspecto insuficiente. Assim, novamente, destaca-se a importância do papel do professor, no sentido de conduzir as atividades de forma que o aluno sinta-se valorizado por suas contribuições, na medida em que as oferece e é acolhido.

No próximo capítulo é apresentada a concepção que fundamenta a criação de ambientes de aprendizagem, nos quais sejam possíveis a compreensão da realidade, a observação questionadora e a realização de diálogos matemáticos, que propiciem a tomada de consciência e, conseqüentemente, a aprendizagem de Matemática. São também descritos os ambientes de apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e para a realização do projeto Mecam.

4 AMBIENTES DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ENRIQUECIDOS COM RECURSOS TELEMÁTICOS

Na continuidade do percurso são considerados os fatores já destacados, como possibilidade de fundamentar a criação de ambientes de aprendizagem de Matemática apoiados por recursos tecnológicos, o que é levado em consideração no planejamento e na criação dos ambientes telemáticos para apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e para a realização do projeto MECAM, aqui descritos com base nas considerações iniciais.

4.1 Ambientes de aprendizagem de Matemática

Diante de todas as considerações até aqui destacadas, compreende-se que um ambiente de aprendizagem pode ser o lugar comum de professores e alunos, em que princípios didáticos e psicopedagógicos revelem suas concepções de aprendizagem, concebendo-a como um processo que requer a participação ativa daqueles que querem aprender, entendendo como participação ativa o envolvimento em atividades de reflexão, interação e cooperação.

Em relação a ambientes de aprendizagem de Matemática, para Skovsmose (2000), esse paradigma se diferencia do cenário para investigação, no qual a Matemática se enquadra no paradigma do exercício.

> Este movimento em direção a um novo paradigma em que os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada pode contribuir para o enfraquecimento da autoridade da sala de aula tradicional de Matemática e engajar os alunos ativamente em seus processos de aprendizagem. Minha expectativa é que caminhar entre os diferentes ambientes de aprendizagem pode ser uma forma de engajar os alunos em ação e reflexão e, dessa maneira, dar à Educação Matemática uma dimensão crítica. (SKOVSMOSE, 2000, p. 66).

Segundo esse autor, as práticas de sala de aula baseadas nesse novo paradigma diferem fortemente das práticas tradicionais, nas quais a aula de Matemática é dividida em dois momentos distintos onde o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados. Variações, nesse mesmo paradigma, consistem, não raro, de aulas em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição ou daquelas em que o aluno fica a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. Sequer a justificativa da relevância dos exercícios faz parte dessa aula, cujos exercícios tem “uma e somente uma” resposta correta. Skovsmove cujo trabalho de investigação não aprofunda a análise sobre a utilização de recursos tecnológicos apresenta uma contribuição relevante no que se refere à Educação Matemática crítica, que pode ser caracterizada em termos de diferentes preocupações:

> Uma delas é o desenvolvimento da *materacia*, vista como uma competência similar à *literacia* caracterizada por Freire. *Materacia* não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela Matemática. A Educação Matemática crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da Educação Matemática como suporte da democracia implicando que as micro-sociedades das salas de aula de Matemática devem também mostrar aspectos de democracia. A Educação Matemática crítica enfatiza que a Matemática como tal não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido (não importa se os processos de aprendizagem são organizados de acordo com uma abordagem construtivista ou sócio-cultural). A Matemática em si é um tópico sobre o qual é preciso refletir. [...] Fazer uma crítica da Matemática como parte da Educação Matemática é um interesse da Educação Matemática crítica. (SKOVSMOSE, 2000, p. 68).

De acordo com essa concepção, um ambiente de aprendizagem de Matemática deve promover situações que levem os alunos a produzirem significados a conceitos e atividades matemáticas. Concorda-se com Skovsmose quanto à interpretação de *significado*, não somente como uma característica das ações ou dos conceitos, mas também dos motivos das ações, o que inclui o contexto para localizar o objetivo de uma ação realizada pelo aluno na aula de Matemática. Tal contexto pode ser a própria Matemática ou uma situação fictícia, descrita pelo autor do livro didático que está sendo utilizado, ou ainda, por uma situação concreta. Em qualquer uma destas abordagens é possível superar o paradigma do exercício e promover aprendizagem significativa, dependendo da concepção epistemológica com a qual o ambiente é construído.

Skovsmose afirma que os computadores têm ajudado a promover melhorias na Educação Matemática, salientando, porém, que tais melhorias estão relacionadas à superação do paradigma tradicional. A simples inclusão do computador não garante a aprendizagem significativa. Porém, a sua utilização pode influenciar muitas coisas, dentre elas, a forma como o significado é produzido. Justifica essa afirmação referindo-se a "uma razão epistemológica para isso: é que o computador não é simplesmente um instrumento que estende nossa maneira de pensar; em vez disso, reorganiza nosso pensamento" (SKOVSMOSE, 2000, p. 86). Isso depende da habilidade de como o professor conduz o ambiente, nunca desperdiçando oportunidades de promover aprendizagem. Para isso é necessário aceitar o desafio, principalmente diante das *questões inesperadas*, o que dificilmente ocorre em ambientes tradicionais de aprendizagem. Um dos grandes benefícios decorrentes da superação do paradigma tradicional está relacionado ao desenvolvimento de *autonomia intelectual*, "caracterizada em termos da consciência e da disposição dos alunos para recorrer às suas próprias capacidades intelectuais quando envolvidos em decisões e julgamentos matemáticos" (COBB; YACKEL apud SKOVSMOSE, 2000, p. 87).

Segundo essa concepção, um ambiente de aprendizagem não pode ser rígido nem completamente estruturado, mas um ambiente que possibilite modificações no processo, dependendo das interações e situações que se apresentem. De fato, não é suficiente disponibilizar páginas na *Web* com ferramentas e recursos tecnológicos.

Ponte et al. (2003) sustenta que a utilização de recursos tecnológicos na criação de ambientes de aprendizagem de Matemática, oferece múltiplas potencialidades educativas que constituem boas perspectivas na formação de professores de Matemática. Identifica-se, na análise realizada por esse autor, muitas convergências com resultados deste estudo, em relação à utilização de recursos tecnológicos. Aponta como benefícios decorrentes da utilização de recursos tecnológicos a possibilidade de assumir valores e atitudes profissionais, tais como a necessidade de descobrir e investigar por si próprios, e o papel construtivo das discussões e da colaboração na realização de tarefas profissionais, aspectos sem dúvida importantes na caracterização da identidade profissional do professor de Matemática.

Salienta:

> Estas tecnologias permitem perspectivar o ensino da matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica. Além disso, permitem que o professor dê maior atenção ao desenvolvimento de capacidades de ordem superior, valorizando as possibilidades de realização, na sala de aula, de atividade e projetos de exploração, investigação e modelagem. Deste modo, as TIC[19] podem favorecer o desenvolvimento nos alunos de importantes competências, bem como de atitudes mais positivas em relação à matemática e estimular uma visão mais completa sobre a natureza desta ciência. (PONTE et al., 2003, p. 1).

Conforme esse autor, a internet, possibilitando a comunicação síncrona[20] e assíncrona,[21] constitui uma ferramenta de grande utilidade para o trabalho colaborativo e representa um instrumento de trabalho essencial do mundo de hoje, razão pela qual desempenha um papel cada vez mais importante na educação. Contudo, também ressalta sua preocupação em utilizá-la numa perspectiva de desenvolvimento do conhecimento profissional por parte dos futuros professores, que devem estar atentos aos seus benefícios em termos de aprendizagem de Matemática.

Sabe-se que, ainda hoje, o papel do professor é, para muitos alunos e professores, o de fornecer informações aos alunos, controlar a sala de aula, de forma que todos atinjam os mesmos objetivos no mais curto espaço de tempo. Considera-se relevante reproduzir, aqui, a proposta de Ponte para um quadro de ensino inovador, que traduz mudanças no papel do professor, potencializadas pelas TIC, conforme o quadro 2.

Velhos papéis	**Novos papéis**
Fornecer informação	Criar situações de aprendizagem
Controlar	Desafiar, apoiar
Uniformizar	Diversificar

Quadro 2: Mudanças no papel do professor potencializadas pelas TIC (PONTE et al., 2003, p.5)

[19] TIC: Tecnologias de Informação e Comunicação.
[20] Comunicação síncrona: ocorre em tempo real, isto é, os participantes estão ligados em rede.
[21] Comunicação assíncrona: sem ligação direta. A interação não é em tempo real.

Assegura Ponte et al. (2003, p. 7): “No quadro de um ensino inovador, esse papel (do professor) será cada vez mais marcado pela preocupação em criar situações de aprendizagem estimulantes, desafiando os alunos a pensar, apoiando-os no seu trabalho e favorecendo a divergência e a diversificação dos percursos de aprendizagem.”

Dentre os benefícios decorrentes da utilização de recursos tecnológicos em ambientes de aprendizagem de Matemática, esse autor destaca alguns que se considera relacionados aos interesses desta pesquisa:

- a possibilidade de adoção do ponto de vista próprio, por parte dos alunos;
- o desenvolvimento do espírito crítico dos alunos;
- a possibilidade de uma lógica de produção (de informação, de materiais, de documentos, que por sua vez podem ser transformados por todo o grupo envolvido);
- a possibilidade de ampliação dos conhecimentos matemáticos, que naquele caso ocorreu como conseqüência da produção de páginas sobre um tema da Matemática e, nesta pesquisa, ocorre como conseqüência do envolvimento nas discussões geradas pelas problematizações sobre questões matemáticas;
- o desenvolvimento de autonomia, proporcionado pela experimentação, exploração e pelo papel ativo dos alunos em ambientes com essas características;
- a possibilidade de exploração de uma outra dimensão da Matemática, mais relacionada à vida real, devido à ajuda que as representações computacionais podem oferecer na “visualização de conceitos de difícil compreensão”;
- melhores oportunidades de exploração e investigação;
- a valorização do papel ativo do aluno, da pesquisa e da colaboração entre grupos;
- a melhoria da qualidade do produto final, em termos das atividades realizadas.

As estratégias utilizadas na criação de ambientes de aprendizagem, enriquecidos com recursos telemáticos, possibilitam a realização de atividades que valorizam o envolvimento do aluno, transformando em virtual a distância física, constituindo-se em elementos de colaboração para a aprendizagem, além de proporcionar o desenvolvimento de condutas solidárias.

Assim sendo, conforme Valentini (2003), o entendimento de *ambiente virtual de aprendizagem* não está restrito ao desenvolvimento de materiais pedagógicos destinados ao ensino, mas a um contexto de interação onde o aluno interage com interlocutores variados (colegas e professores), teorias, tecnologias de comunicação e informação, consigo mesmo (por meio de num movimento de reflexão e tomada de consciência), além de textos e hipertextos, resultantes de um processo que está em permanente construção.

> Um ambiente de aprendizagem é mais do que um endereço no ciberespaço onde os alunos acessam informações e enviam dados e respostas, é um complexo problemático que é atualizado a partir das diferentes e criativas soluções e encaminhamentos dados pela comunidade de aprendizagem, implicando para isto numa interação mútua. Desta forma, não basta navegar é preciso construir e reconstruir-se nos mares da aprendizagem. Nessa construção é necessário que o aprendiz possa apropriar-se do ambiente e dos recursos tecnológicos. A apropriação é entendida aqui como o envolvimento do aprendiz no processo de compreensão e adaptação ao ambiente (estrutura, recursos tecnológicos e dinâmica das interações) que o permite, ao longo do percurso, dizer "nosso ambiente". A flexibilidade na apropriação do ambiente, considerando as particularidades de cada sujeito, o tecer de significados que é processo de cada aprendiz, deve ser compreendida como inerente ao processo de apropriação do ambiente virtual de aprendizagem. Só há verdadeira apropriação do ambiente se houver flexibilidade na sua aplicação com relação à estrutura, recursos tecnológicos e dinâmica das interações. (VALENTINI, 2003).

Nesses ambientes, conforme Dillenbourg (2002), os participantes não são somente ativos, mas também atores; não estão restritos ao uso de informações da *Web*, mas tornam-se produtores de informação, eles entram no jogo. Atividades de aprendizagem não se restringem à resolução de exercícios que dependem apenas de seu resultado, mas do processo.

De acordo com Valentini (2003, p. 74):

> Sabemos que todo fazer pedagógico reflete uma concepção epistemológica. Esta concepção, mesmo que inconsciente, define os papéis do professor e do aluno no processo de ensino-aprendizagem. Assim, também um ambiente virtual de aprendizagem deixa transparecer a abordagem epistemológica e psicopedagógica em que foi concebido, mesmo que não estejam explícitos esses pressupostos [...]. Para a epistemologia construtivista-interacionista é na interação do sujeito com o ambiente que a aprendizagem se dá. O sujeito aprende na medida em que constrói conhecimento novo, através da ação e da problematização da ação. Uma educação fundamentada nessa epistemologia educa a partir da interação, buscando compreender o sujeito como aprendente a vida inteira, sendo que a experiência anterior "sustenta" a próxima proposição, desafio ou problematização.

Dillenbourg (2002) também afirma que um ambiente de aprendizagem, presencial ou à distância, depende da concepção sob a qual é criado e utilizado. A eficácia de um ambiente de aprendizagem não depende da tecnologia mas das concepções didáticas e psico-pedagógicas do professor. Além disso, para esse autor, ambientes virtuais de aprendizagem não estão restritos à educação a distância. A comunicação assíncrona fornece flexibilidade de tempo, uma preocupação crescente em nossa sociedade e, ao combinar distância e presença, é possível aumentar o potencial de um ambiente de aprendizagem.

De acordo com suas pesquisas, a primeira oportunidade óbvia dos ambientes virtuais de aprendizagem é que eles dão suporte a interações sociais de muitas formas: síncrona *versus* assíncrona; baseadas em texto *versus* áudio ou vídeo; um-para-um *versus* um-para-muitos. Porém, novamente, essas possibilidades definem efeitos potenciais e não reais e não estão isentas de problemas. Explica:

> Por exemplo, freqüentemente encontramos professores que acreditam que, já que seus estudantes usam e-mail, eles vão começar a fazer perguntas mais inteligentes e com mais freqüência. Em nossa experiência com ensino na *Web*, raramente este é o caso. A maioria das conversas via e-mail são sobre como encontrar recursos, negociar datas limites, marcar um encontro. Espontaneamente, eles enviam poucas mensagens de e-mail ricas em conteúdo. O mesmo aplica-se aos fóruns educacionais, nos quais é muito difícil manter o fluxo de mensagens. O problema não é devido à tecnologia mas ao contexto educacional. Estudantes não iniciarão comunicações com o professor somente pelo fato da comunicação. [...] o desafio pedagógico não é imitar interações face-a-face, mas explorar funcionalidades de comunicação diferentes e novas, que são eficazes em ambientes virtuais de aprendizagem. (DILLENBOURG, 2002, p. 36).

Concorda-se com essas afirmações, entendendo que atividades colaborativas são eficazes quando os participantes engajam-se em discussões motivadas pela sua própria curiosidade, discutindo sobre suas dificuldades, argumentando suas respostas, questionando sobre suas dúvidas e não simplesmente para cumprir tarefas. O professor, por sua vez, pode incentivar que interações dessa natureza ocorram, valorizando todas as participações, satisfazendo sua curiosidade e, na medida do possível, mantendo-os envolvidos a partir de novos desafios oportunos.

Para Maçada (2001, p. 42-3), num ambiente virtual de aprendizagem:

- a relevância está na atividade cognitiva dos alunos, na interação de uns com os outros e com as tecnologias disponíveis;
- deve-se incentivar a interação, explicação, reformulação, criação de *teorias* através da ação e da operação;

- cada participante recria-o na convivência, por meio de suas interações, de seus questionamentos, de contribuições, críticas, ações, operações, sempre perpassado pela tecnologia;
- cada participante faz diferentes observações e leituras de acordo com seus interesses, sua experiência;
- as fontes de informação têm uma virtualidade que possibilita ao sujeito atualizar uma ou várias soluções para sua questão sem, contudo, esgotar todas as possibilidades;
- o processo de virtualização é dinâmico, remontado a cada solução atualizada.

Uma das contribuições do estudo realizado por Maçada consiste na análise de resultados que evidenciaram que o uso da tecnologia (*softwares* e espaços que possibilitem a reflexão escrita sobre a ação realizada) e a comunicação ao operar de um *software* produzem maior versatilidade tecnológica, bem como uma tomada de consciência dos processos da própria aprendizagem (MAÇADA, 2001, p. 145).

A partir dessas considerações, a criação de um ambiente que possibilitasse ao sujeito aprender, construir uma cultura informatizada e um saber cooperativo, onde a interação é privilegiada, é o pressuposto que norteia a construção do ambiente virtual de aprendizagem para a utilização como apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, em contínuo aperfeiçoamento.

4.1.1 O ambiente de apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral

O ambiente virtual de aprendizagem, como apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral,[22] foi organizado com o propósito de, além de fornecer informações relacionadas aos conteúdos, acompanhar os estudantes com ações que visem ao desenvolvimento da autonomia, da solidariedade, da capacidade de lidar com problemas e com tecnologia e de tomar decisões com conhecimento e confiança. Sua proposta fundamenta-se na epistemologia e pedagogia construtivista-interacionista cuja concepção de

---

[22] Disponível em: www.ucs.br/deme/disciplinas/calculo.

aprendizagem está fortemente relacionada à interação do sujeito com o ambiente. Assim é que sua integração, como apoio às disciplinas, constitui-se num grande desafio cujo enfrentamento depende mais do redimensionamento dos papéis de professor e aluno do que da utilização de recursos tecnológicos. A partir desses pressupostos teóricos a proposta pedagógica que orienta sua inclusão privilegia a ação e reflexão de alunos e professor cuja presença não é, necessariamente, física, o que não impede que seja atenta, disponível, problematizadora e incentivadora.

Todas as atividades propostas, presencialmente ou a distância, visam à participação ativa do aluno em todos os momentos, seja através da sugestão de leituras relacionadas aos temas de estudo, seja por meio de momentos de (re)construção e sistematização dos conceitos. Nesses momentos são promovidas discussões sobre as idéias centrais relacionadas aos temas de estudo, ou mesmo sobre questões significativas de aplicação dos conceitos abordados. Procurando valorizar a socialização das idéias, as interações e as colaborações, é possível transformar erros em oportunidades de desenvolvimento, (re)construindo conceitos; visando ao desenvolvimento de habilidades, tais como analisar, argumentar com clareza e com base nas teorias estudadas; defendendo seus pontos de vista; expondo e desenvolvendo idéias; lidando com informações e com tecnologia. Afinal, essas são habilidades e competências necessárias para lidar com o mercado de trabalho no qual nossos alunos estão ou estarão inseridos, de forma a resolver problemas e a realizar transformações relacionadas à melhoria da qualidade de vida com a contribuição da ciência e da tecnologia.

O ambiente é constituído por um conjunto de ferramentas que permitem a comunicação e realização de tarefas e é organizado em espaços ou contextos de aprendizagem. Todos os recursos utilizados justificam-se por suas diferentes finalidades e integram os espaços de acordo com as necessidades detectadas ou confirmadas durante a realização das disciplinas.

O texto de apresentação do ambiente (Figura 1) representa um convite a todos os que estiverem dispostos a se envolver e que concordarem com os benefícios de seu envolvimento para a construção de aprendizagens de valor, conforme se procura deixar claro, justificando que somente a ação motivada tem sentido, ou seja, aquela que o indivíduo sente como necessária, espontânea, que vem de dentro, a ação que emerge das perguntas, que provoca reflexões e desequilíbrios. A ação que é apenas do exterior, do outro, e que é apenas observada, mesmo que seja com atenção, não frutifica. O conhecimento nasce toda vez que o ser humano se apropria do seu pensar e do seu agir. No caso específico da Matemática, as ações são as expressões dos atos próprios do *fazer matemático* como experimentar, visualizar, interpretar, prever, induzir, generalizar, abstrair e demonstrar.

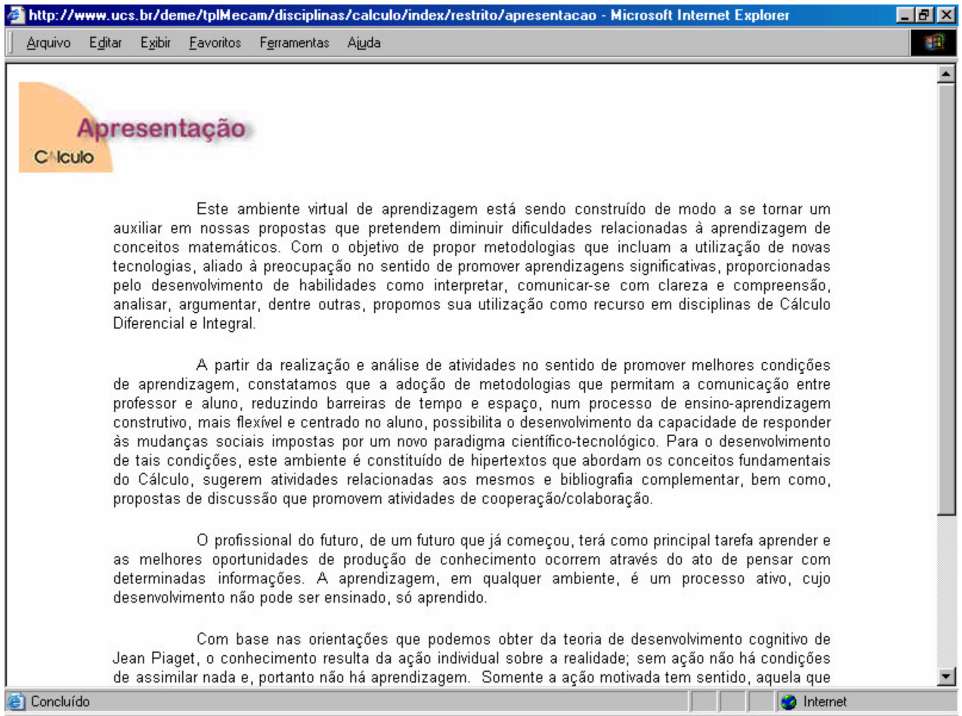


Figura 1: Apresentação do ambiente de apoio às disciplinas de Cálculo

Além dos espaços que contêm informações relativas aos programas e às propostas das disciplinas, bem como agendas de atividades e orientações iniciais para sua realização, sugestões de bibliografia, *links* que conduzem a *sites* sobre assuntos relacionados aos temas de estudo e material de apoio constituído por *notas de aula*, destacam-se os seguintes contextos de aprendizagem no ambiente:

- *Discussões*: espaço onde a maior parte das construções e interações ocorre, propiciadas por uma ferramenta de fórum que permite a utilização de arquivos anexos, imprescindíveis, dada a impossibilidade de utilização da linguagem matemática em editores comumente encontrados. O fórum é destinado às discussões relacionadas aos temas de estudo. Tendo em vista que aprendizagem é, por excelência, construção e interação, conforme explicitado no quadro conceitual de referência fundamentado na Epistemologia Genética e discutido no capítulo 2, destaca-se que o verdadeiro diálogo instaura-se como possibilidade de coordenação de pontos de vista, sendo conduzido pelo interesse em compreender o outro, gerando relações de cooperação. Estas, por sua vez, estreitamente relacionadas ao processo de descentração, opõem-se, do ponto de vista intelectual, ao egocentrismo ou à centração e, no plano social, conduzem à solidariedade, liberdade e autonomia. Na figura 2, observa-se a tela de um espaço para discussões, onde foram suprimidos os nomes dos responsáveis pelo início de cada discussão.

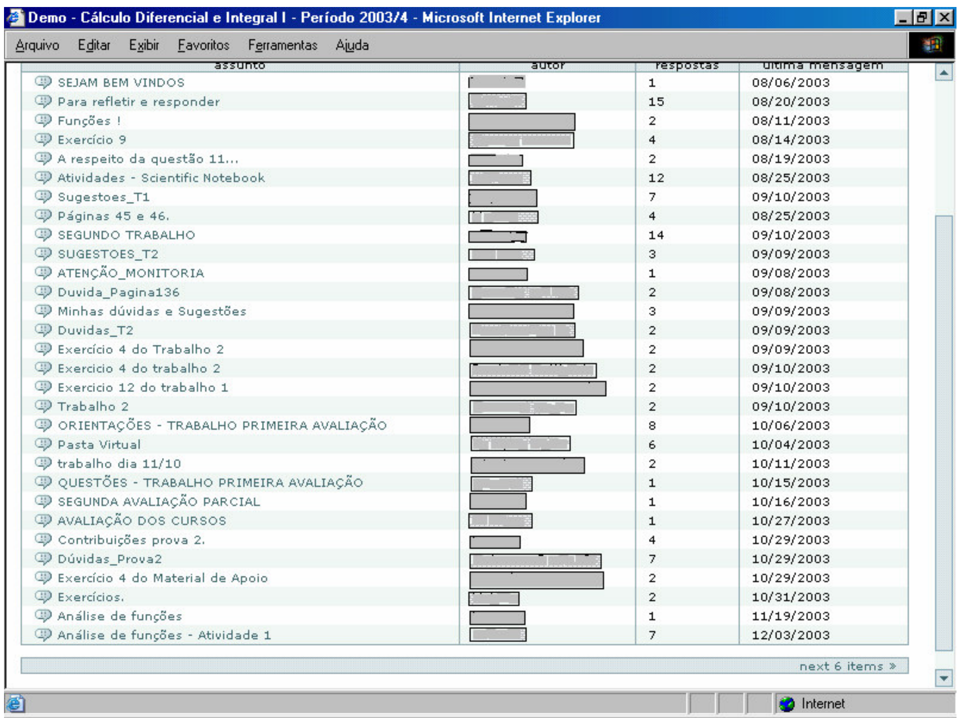


Figura 2: Espaço para discussões

Ainda que as discussões não se constituam sempre como atividades “obrigatórias”, permitem refletir sobre possibilidades de identificar dificuldades, melhorar a compreensão, esclarecer dúvidas e socializá-las, propiciando, dessa forma, benefícios a todo o grupo envolvido, sempre que houver interesse. De acordo com Piaget apud Montangero e Naville (1998), “[...] a princípio a atividade cognitiva está submetida à ação própria e ao ponto de vista imediato. Posteriormente ela se libera, de forma progressiva, de seus limites iniciais [...]”. Com efeito, tais discussões possibilitam o desenvolvimento cognitivo e compete ao professor incentivar a participação de todos. Assim, todas as contribuições, sejam através de questionamentos, conclusões, seja por meio de sugestões de aperfeiçoamento para questões próprias ou de colegas, são incentivadas e valorizadas no processo de avaliação. Na figura 3, observa-se o recorte de um arquivo anexo a uma mensagem enviada ao fórum, contendo um trecho de uma discussão relacionada a uma atividade proposta.

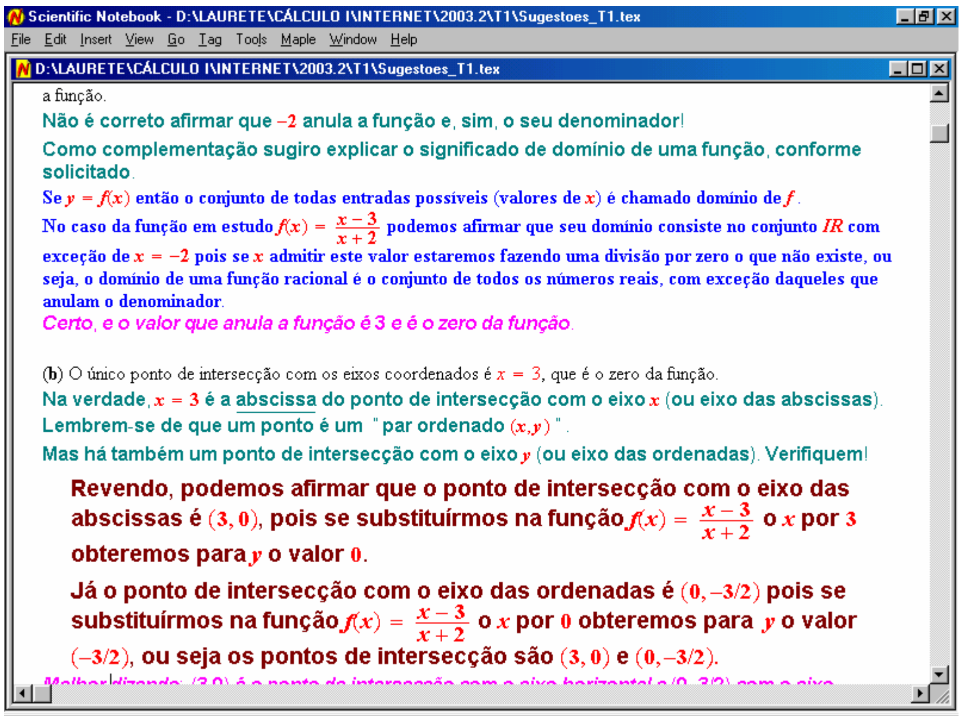


Figura 3: Arquivo anexo a uma mensagem do fórum

- *Software matemático*: a opção foi por um editor de textos que agregasse bibliotecas destinadas a processamentos algébricos, geométricos e numéricos e que proporcionasse a utilização da sintaxe matemática tal como é usualmente expressa, sem a necessidade de conhecimentos em programação. Com sua utilização são possibilitadas discussões no fórum, através do recurso do editor matemático, como é o caso do arquivo mostrado na figura 3. As diferentes fontes identificam diferentes autores de cada uma das intervenções ocorridas durante a discussão.
- *Atividades*: espaço destinado ao registro de todas as atividades promovidas, organizadas em forma de hipertextos que contêm as *produções coletivas*, como na figura 4.

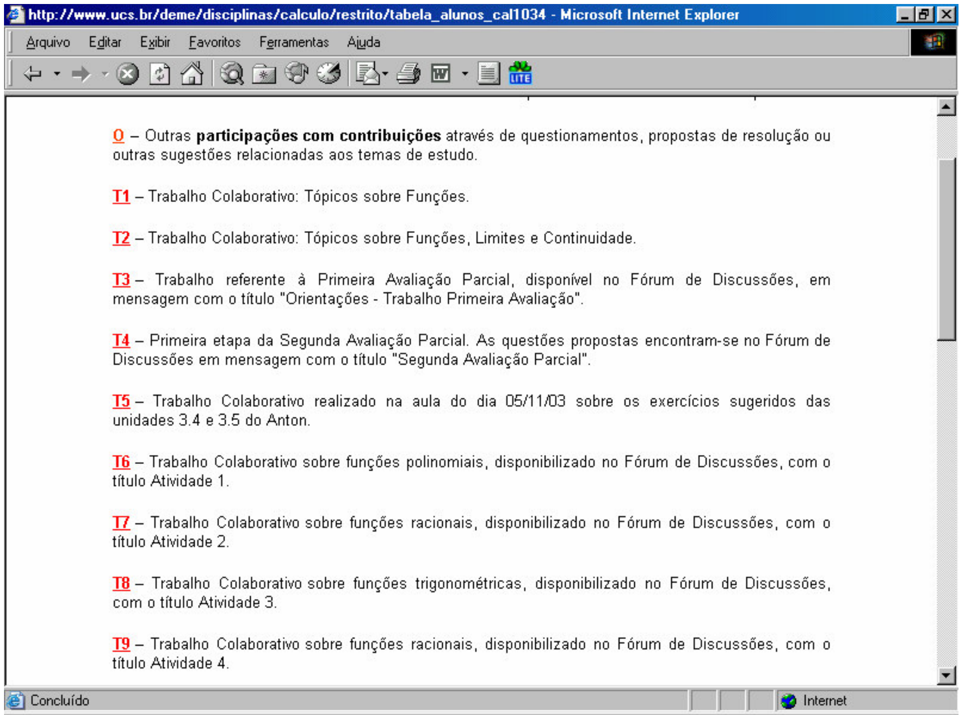


Figura 4: Espaço das *atividades* com o registro das produções coletivas

As *Produções coletivas* são textos produzidos de forma cooperativa, durante as discussões relacionadas a cada atividade. As mesmas ocorrem no espaço das *discussões* e são deslocadas, quando concluídas (mesmo que parcialmente), para o espaço das *atividades*, com o objetivo de concentrar todas as contribuições relacionadas a uma determinada discussão. Ficam acessíveis a partir dos *links* relacionados a cada atividade proposta.

Uma produção coletiva é, assim, comparada a um *texto dialógico* que, para Freire e Freire (2001), não imobiliza o diálogo que a originou. Ao contrário, de certa forma, reforça seu sentido, além de mantê-lo vivo e dinâmico. Isso porque cada leitura pode ser a reinvenção do mesmo; a partir do momento em que o leitor envolve-se novamente, está continuamente reinventando e redialogando. Como refere D'Agord (2000), o registro de uma produção coletiva, construída em uma atividade de co-operação, permite não apenas que os participantes tomem contato com o trabalho dos colegas, mas que possam interagir desde seus diferentes pontos de vista, uns com os outros, transformando-a, através da inserção de novas contribuições.

As produções coletivas, na forma como são construídas, revelam-se verdadeiros exercícios de co-operação, no sentido dado por Piaget apud Montangero e Naville (1998), como resultados de ajustamentos de pensamentos próprios ou de ações pessoais aos pensamentos e às ações dos outros. Dessa forma, o controle mútuo das atividades é exercido entre os participantes que cooperam. Além disso, a qualquer momento é possível problematizá-los novamente. E, ao continuá-los ou ao ser desafiado pelas idéias discutidas, pode assumir a responsabilidade de envolver-se na sua incompletude. Na verdade, trata-se de um espaço que se mantém aberto e que deve ser valorizado por todos, mesmo por aqueles que ainda não participaram de sua construção. O desafio continua sendo responder ao que ainda não foi respondido, ou responder a seu modo àquilo que não está claro. Cabe a cada participante do grupo retomar o diálogo sempre que houver interesse.

As figuras 5 e 6 apresentam recortes de produções coletivas, resultantes de atividades propostas e que estão acessíveis a partir dos *links* correspondentes.

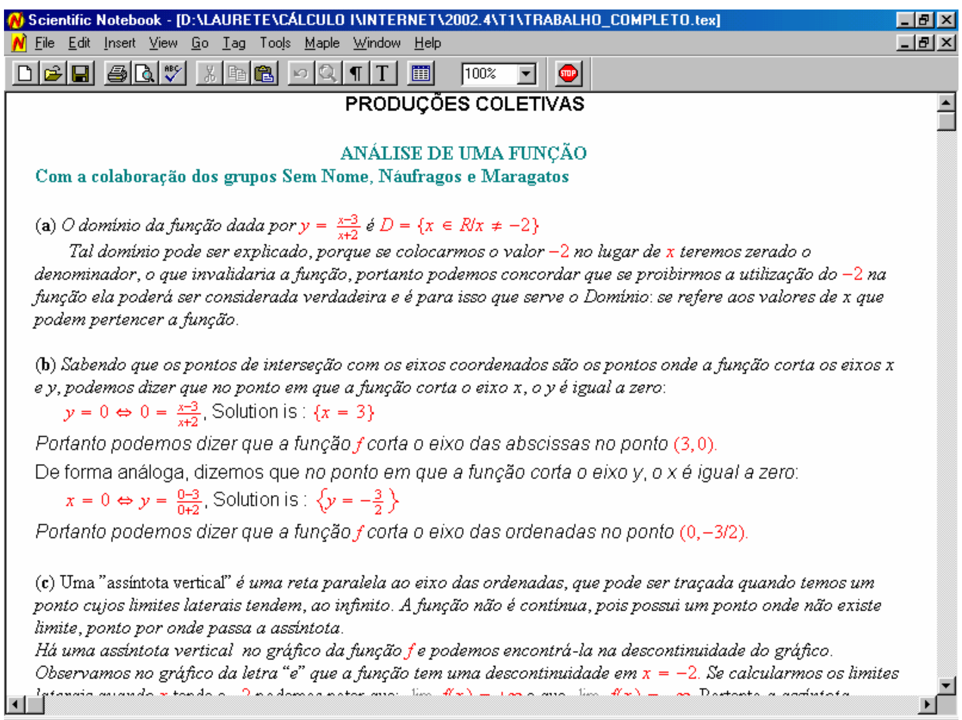


Figura 5: Trecho de uma produção coletiva

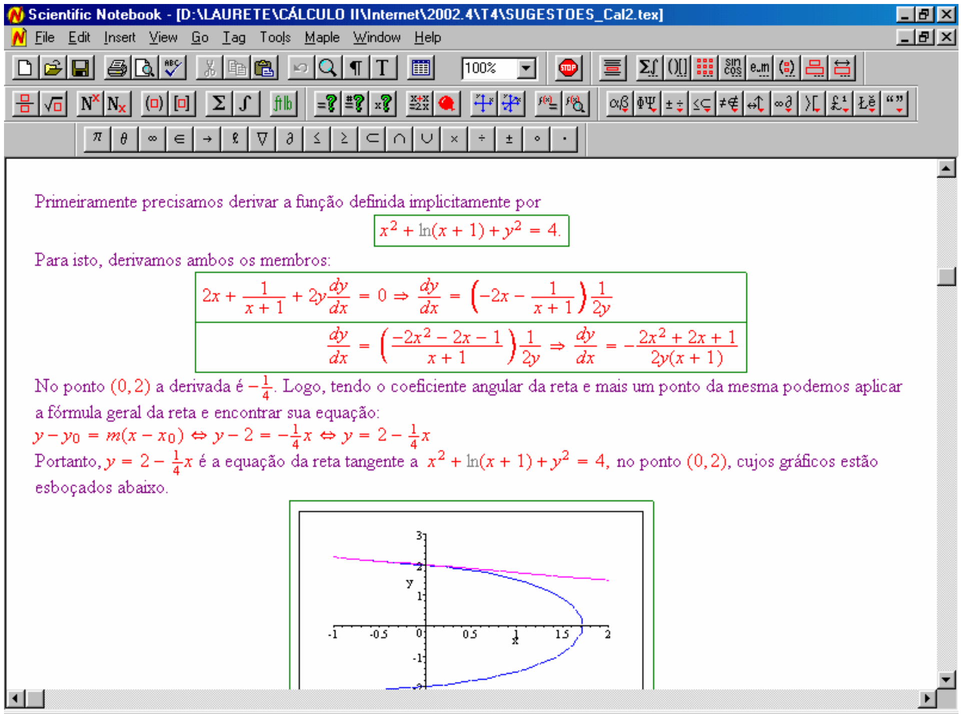


Figura 6: Trecho de uma Produção Coletiva

No espaço *atividades*, estão disponíveis também as pastas individuais (*portfólio*) de cada aluno cuja finalidade é servir como registro de suas produções, ou outros materiais resultantes de seus estudos relacionados à disciplina. Além disso fica disponível, também nesse espaço, a *tabela das atividades* onde estão registradas todas as participações de cada aluno, conforme mostra a figura 7, que contém a tela desse espaço, referente a uma das disciplinas que utilizam o ambiente de apoio. Esse registro é feito e atualizado pelo professor e visa dar ciência aos alunos do acompanhamento de sua participação no processo, como forma de incentivar que assumam a responsabilidade na realização das atividades sugeridas como estudo, ainda que não se constituam como atividades obrigatórias. São relacionadas aos conceitos da disciplina e constituem os temas de discussão no fórum. A coluna da esquerda foi suprimida por corresponder à lista dos nomes dos participantes omitidos neste trabalho.

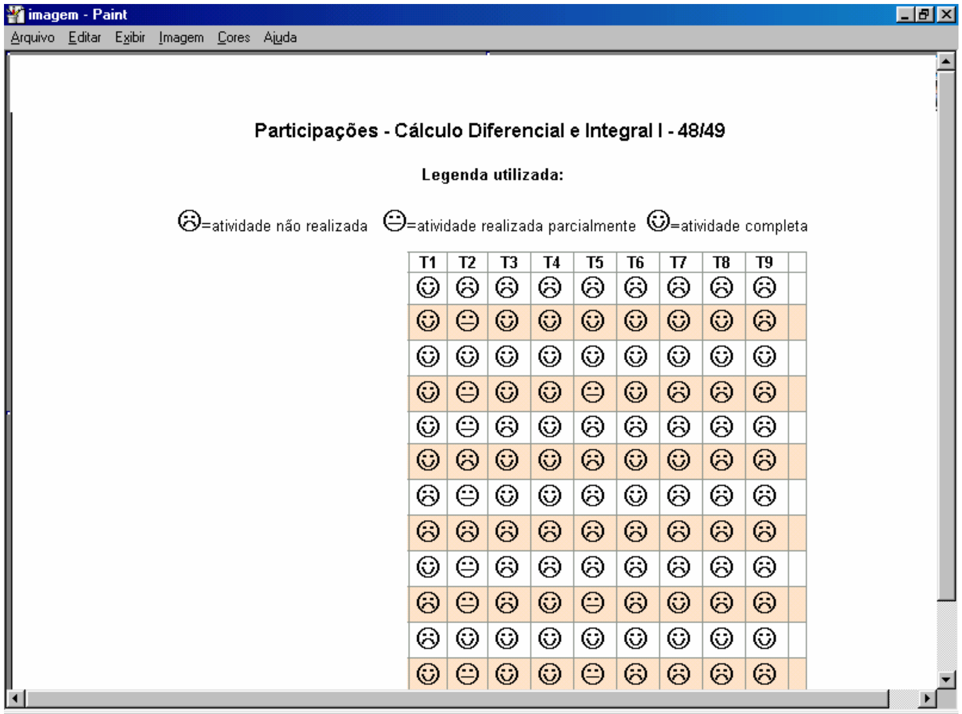


Figura 7: Registro de participação na realização das atividades propostas

Os critérios para a definição da legenda utilizada, de acordo com a figura 7, dizem respeito ao envolvimento nas discussões geradas pela participação do aluno. Isto é, uma atividade é considerada *realizada parcialmente* sempre que o aluno não der continuidade a uma discussão iniciada por ele, relativamente aos questionamentos gerados pela mesma, o que é incentivado e bem recebido a qualquer momento, no decorrer do semestre ou curso. Os demais casos expressam exatamente o título que recebem, ou seja, o aluno pode não demonstrar *nenhum envolvimento* com a atividade, não apresentando nenhuma contribuição ao grupo, ou, na melhor das hipóteses, *envolver-se na discussão* até que todos os questionamentos que surgirem fiquem esclarecidos, o que também envolveu a professora e os colegas. É importante para o processo de tomada de consciência a posição do professor.

Esse ambiente virtual é considerado um apoio ao desenvolvimento de disciplinas presenciais. Na dinâmica das interações, é possível que uma discussão iniciada em sala de aula continue através da troca assíncrona de mensagens via *fórum,* para ser concluída em sala de aula. Ou, ao contrário, iniciar como uma dúvida enviada para o *fórum* e concluir na sala de aula. Na verdade todos os movimentos são possíveis e é importante que os interagentes organizem-se e adaptem-se a essa nova temporalidade (VALENTINI, 2003).

As trocas interativas, no ambiente virtual de aprendizagem, ocorrem através da escrita. Ela é que alimenta e dá vida ao ambiente. Os textos postados determinam seu funcionamento e sua organização. E as relações decorrentes das novas possibilidades que emergem permitem ao aluno ultrapassar a condição de expectador passivo para a condição de sujeito cooperativo e criativo.

Conforme Valentini (2003) identificou em sua pesquisa, algumas relações heterárquicas identificadas naquele caso são também encontradas no presente estudo:

a) a autonomia de colaboração e inexistência de regras fixas impostas pelo professor e a possibilidade de negociação, o que reflete a cooperação; as possibilidades não são previsíveis, pois as interações emergem durante o processo;
b) sua própria dinâmica oportuniza idas e vindas, negociadas ao longo do processo, de acordo com os interesses e as necessidades de cada participante; isso requer também a habilidade e disponibilidade do professor para acompanhar a diversidade de aprendizagens e obstáculos de cada aluno, procurando, em cada intervenção, contribuir com todo o grupo;
c) as comunicações do professor não são informativas mas, sempre, um convite à reflexão, à busca e ao questionamento.

Quanto aos temas das discussões, justifica-se como Moll e Barbosa (apud VALENTINI, 2003): “não há conhecimento sem conteúdo, pois as estruturas cognitivas se constroem a partir dos conteúdos”. Ou seja, as atividades relacionadas aos temas de estudo do Cálculo Diferencial e Integral dão origem às participações dos interessados. Em continuação, o ambiente, sendo construído a partir das interações com o grupo, necessita de um professor interagindo constantemente e abrindo espaços para a construção de novos saberes, estimulando o desenvolvimento de autonomia intelectual. Cada participante é um sujeito ativo, cooperativo, interativo, criativo, que assim participa da construção de seu conhecimento em ação. É livre para interagir nos momentos que julga oportuno, numa linguagem livre e não por padrões de respostas ou interações. A elaboração pessoal, característica das mensagens dos alunos, é indicativa do desenvolvimento. O aluno decide quando e como interagir e, dessa forma, compromete-se com sua aprendizagem e com as aprendizagens do grupo, superando a submissão às regras externas impostas, muitas vezes, pelo próprio professor.

A utilização de ambientes de aprendizagem enriquecidos com recursos que possibilitem a cooperação permite, também, contemplar uma dimensão mais humana da educação que é a educação para a compreensão. A participação com dúvidas ou contribuições nas discussões é, assim, incentivada como um ato de solidariedade que pode, ao mesmo tempo, beneficiar todo o grupo. Ao incentivar a realização de atividades que têm uma repercussão social, estar-se-á, de certa forma promovendo o desenvolvimento de condutas relevantes, tais como a compreensão da informação e a compreensão humana que, para Morin (2002), são condições e garantia da solidariedade intelectual e moral da humanidade.

4.2 O Projeto Mecam

Considera-se relevante neste trabalho apresentar uma breve descrição de um projeto de pesquisa, do qual esta autora faz parte, na qualidade de pesquisador coletivo,[23] proposto também com a finalidade de desenvolver estudos relacionados a esta tese. Tal descrição, bem como sua metodologia e o ambiente de aprendizagem podem ser encontrados, também, na tese de doutorado em Informática na Educação do PGIE, “Mecam: Metodologia e recursos tecnológicos para a melhoria das condições da aprendizagem de matemática”, da professora Isolda Giani de Lima, pesquisadora integrante desse projeto. No seu trabalho, cuja leitura se recomenda, é realizado um estudo em que procura evidenciar a aprendizagem de noções matemáticas decorrentes do desenvolvimento cognitivo no ambiente de aprendizagem do Mecam.

O Programa em Educação à Distância para a Melhoria das Condições de Aprendizagem de Matemática (Mecam)[24] constitui uma investigação aplicada sobre a real possibilidade de fundamentar nova e diferenciada proposta pedagógica, frente às dificuldades de aprendizagem observadas nas disciplinas iniciais de matemática nos diferentes cursos do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade de Caxias do Sul. O desenvolvimento do projeto prevê a implantação de um programa em educação à distância que visa, em primeiro lugar, avaliar as reais condições dos alunos ingressantes nestes cursos e buscar estratégias que permitam interferir na melhoria dos processos de ensino-aprendizagem e, como conseqüência, modificar os atuais índices que refletem um elevado número de reprovações e desistências que ocorrem nessas disciplinas.

---

[23] Conforme Barbier (1996), *pesquisador coletivo* pode ser definido como um grupo com objetivo comum, organizado de tal forma que o trabalho é contínuo e ininterrupto, o que assegura a continuidade de um processo já iniciado. Não pode ser reduzido à soma dos membros.

[24] Disponível em: <www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam3ed >.

O programa é oferecido a alunos que, sem terem desistido no decorrer do semestre, reprovam em disciplinas iniciais de conteúdos matemáticos, como outra opção em lugar de refazer um mesmo caminho já trilhado. O que se busca é um modo educativo, onde se possa proporcionar a (re)elaboração dos conceitos estudados e os de Matemática básica, que se tornaram dificuldades como pré-condições ou como elementos de aplicação.

A expectativa é que o suporte fornecido pelo ensino a distância, programado para acompanhar estudantes em relação às suas dificuldades em Matemática, possa, além de melhorar o seu desempenho nas disciplinas relacionadas, promover o início de um trabalho mais interativo onde o professor possa realmente "desequilibrar", para que o aluno reflita e se responsabilize por sua ação. Então, a partir dessa reflexão, possa de fato construir seu conhecimento.

O propósito central do Mecam consiste em responder à seguinte pergunta: "Quais as reais possibilidades e sob que condições pode ser proporcionada a (re)elaboração de aprendizagens, sem a necessidade da reprovação direta e de refazer a disciplina a alunos que reprovam em disciplinas iniciais de conteúdos matemáticos, em diferentes cursos oferecidos no Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade de Caxias do Sul?"

Seus objetivos específicos são:

✓ elaboração de um programa à distância a ser desenvolvido paralelamente à continuidade dos estudos em disciplinas de Matemática, com o propósito de promover a retomada das condições necessárias para a aprendizagem efetiva dos conhecimentos que determinaram a reprovação na disciplina cursada;

✓ promover a (re)construção e a fundamentação dos conceitos de Matemática básica, que constituem condições para as aprendizagens propostas na disciplina cursada;

✓ promover a (re)construção dos conceitos propostos na disciplina cursada, através de análise e discussão dos procedimentos adotados na resolução de problemas, durante o desenvolvimento da mesma, e da proposição de novos e desafiadores problemas como forma de aprofundar e intensificar os níveis de compreensão estabelecidos;

✓ utilizar os erros presentes nas resoluções de tarefas e questões de avaliações ou trabalhos realizados, no decorrer da disciplina, como fontes de reconhecimento do que precisa ser revisto, estudado, aprendido e (re)elaborado, para que sejam superadas as dificuldades e possam ser estabelecidas novas relações que apóiem o desenvolvimento de estruturas cognitivas;

✓ programar orientações e atividades que contribuam para o desenvolvimento de condutas de responsabilidade e autonomia nos processos de aprendizagem;

✓ coletar dados e informações, de real valor, para que os professores, nas suas diferentes disciplinas de Matemática, programem e reprogramem intervenções pedagógicas;

✓ criar estratégias que incentivem o aluno a avaliar seu próprio desempenho;

✓ criação de um ambiente de aprendizagem, em plataforma adequada para ensino a distância, que será disponibilizado na *web*, para o desenvolvimento do programa;

✓ interferir positivamente nos índices atuais de aproveitamento nas disciplinas iniciais de Matemática em diferentes cursos do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia;

✓ buscar as alternativas burocráticas que possibilitem e oficializem o programa de melhoria das condições de aprendizagem em disciplinas de Matemática.

O projeto Mecam está vinculado ao grupo de pesquisa LaVia, como um subsistema deste, desde sua implantação, em agosto de 2001.

O grupo de pesquisa Laboratório de Ambientes Virtuais de Aprendizagem: Construindo Comunidades Virtuais de Aprendizagem (LaVia) – Fase 2,[25] congrega pesquisadores de diversas áreas do conhecimento e bolsistas de iniciação científica e visa integrar vários subsistemas que realizam pesquisas relacionadas a *ambientes virtuais de aprendizagem*, compartilhando conhecimento e somando esforços tecnológicos e epistemológicos.

A proposta do LaVia é fruto de um trabalho interativo e cooperativo que, em seu início, propôs a criação de um laboratório interdisciplinar que congregasse diferentes projetos em andamento, implementando, desenvolvendo e avaliando formas alternativas para a criação de ambientes virtuais de aprendizagem; analisando de forma compartilhada as possibilidades reais e os limites no uso das alternativas tecnológicas; examinando novas estratégias educacionais e avaliando o processo de aprendizagem em decorrência das interações em ambientes virtuais de aprendizagem.

O principal desafio desse grupo de professores-pesquisadores está sendo a construção do referencial epistemológico comum que fundamente e sustente o desenvolvimento dos ambientes virtuais de aprendizagem.

Os ambientes de aprendizagem criados são concebidos com bases teóricas construtivistas. Nesse sentido busca-se ultrapassar as concepções tradicionais de ensino-aprendizagem, possibilitando construir uma cultura informatizada e um saber compartilhado, onde a interação mútua é meio para a construção do conhecimento. O projeto visa analisar diferentes aspectos relacionados ao processo de aprendizagem num ambiente virtual: relações

---

[25] Disponível em: <http://ucsnews.ucs.br/lavia>.

entre emoção e cognição, perfil do aluno, interação mútua, ferramentas disponibilizadas, plataformas educacionais, hipertextos, autoconhecimento, autonomia, avaliação formativa dentre outros. Este estudo é base para o entendimento dos processos de aprendizagem em ambientes virtuais bem como para a construção, análise e aperfeiçoamento desses ambientes. Os dados são coletados em ambientes desenvolvidos pelos pesquisadores integrantes para a realização de disciplinas de graduação, cursos ou seminários em diferentes áreas.

O desafio de congregar pesquisadores de diferentes áreas de conhecimento e bolsistas de iniciação científica desencadeou a busca de possibilidades para operacionalizar o trabalho em equipe, dentre elas a organização dos pesquisadores em subsistemas, ou seja, subgrupos envolvidos com problemas específicos dentro da pesquisa. Na fase atual, os pesquisadores do grupo de pesquisa LaVia estão integrados numa comunidade de pesquisa e aprendizagem, tendo como base metodológica a pesquisa-ação. Cada subsistema do LaVia, com seus objetos de pesquisa mais específicos, tem avançado em diferentes focos da aprendizagem em ambientes virtuais.

A produção científica do LaVia tem discutido o processo de constituição de nossa comunidade de aprendizagem e pesquisa, bem como as experiências de implantação de novas tecnologias no ensino superior (SOARES, E. M. S. et al., 2001a; SOARES, E. M. et al., 2001b). Ainda, cada subsistema do LaVia, em seus objetos de pesquisa mais específicos, tem avançado em diferentes focos da aprendizagem em ambientes virtuais como nos artigos de SOARES, E. M. S.; VALENTINI, C. B. (2002); LIMA, I.G.; SAUER, L.Z. (2000); LIMA, I.G.; SAUER, L.Z. (2002); LUCIANO, N. A.; VALENTINI, C. B.; ANDREOLA, T. (2002).

A participação da pesquisadora no LaVia, por meio do projeto Mecam, um de seus subsistemas, permite realizar e discutir experiências, a fim de coletar dados no sentido de especificar e formalizar aspectos relacionados à tomada de consciência em ambientes de aprendizagem de Matemática que são objetos de pesquisa neste estudo.

Na fase experimental do projeto Mecam foram programados três cursos de Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I, como parte dos objetivos propostos inicialmente. Os ambientes virtuais de aprendizagem, construídos para a realização dos dois primeiros, já realizados, respectivamente nos períodos acadêmicos 2003.1 e 2003.3, podem ser acessados, respectivamente, em: http://www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam e http://www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam2ed. A terceira edição está sendo realizada durante o período letivo 2004.2.

Os dados obtidos durante sua realização fazem parte do conjunto de dados para análise no presente estudo.

4.2.1 O ambiente de aprendizagem do Mecam

O ambiente virtual de aprendizagem do Mecam foi construído com base nos mesmos pressupostos teóricos que fundamentam a construção do ambiente de apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, descritos no capítulo 4. Como naquele, todos os recursos tecnológicos são idealizados, depurados e organizados de modo a permitirem fácil acesso e flexibilidade de utilização, mesmo para aqueles alunos menos familiarizados com recursos da internet, de modo a não provocar embaraços tecnológicos que interfiram nos estudos de Cálculo. Assim sendo, tais recursos constituem-se apenas no que é necessário e indispensável para a realização do curso. Entretanto, por se tratar de um curso a distância, tendo o virtual como o único ambiente de aprendizagem, algumas particularidades o distinguem do ambiente de Cálculo. A seguir se descreve, justificando, as características do ambiente do Mecam que o viabilizam como um curso a distância.

- A *Dinâmica do curso* é um espaço em que, além da apresentação do programa, é explicitada sua metodologia, de forma a tornar claros para os alunos os pressupostos teóricos e as concepções de aprendizagem que a fundamentam; as orientações para a realização das atividades e a participação efetiva no curso, além dos critérios de avaliação, que consideram: a realização das atividades, a disposição para o seu aperfeiçoamento, a proposição de questionamentos relevantes, a participação com contribuições nas discussões coletivas e a evolução da qualidade das produções, observada por comparação de trabalhos apresentados.

- A *Agenda* é um espaço reservado para comunicações e avisos referentes ao desenvolvimento do curso. Oficialmente são divulgadas as datas que definem os prazos máximos para a conclusão de cada atividade, ficando a critério do aluno antecipar esses tempos, de modo a permitir a análise crítica de seu trabalho e receber sugestões de aperfeiçoamentos que possam ser realizados dentro dos prazos estabelecidos. Nesse espaço é divulgada, também, a data do *encontro presencial*, tão logo estejam concluídas as atividades programadas. Durante esse encontro, como condição de aprovação, o aluno deve mostrar-se apto a prestar esclarecimentos sobre as atividades que realizou, confirmando a autoria da participação em entrevista realizada individualmente. A própria natureza das interações promovidas durante o curso, possibilitada pelas problematizações individualizadas, conforme as características de cada contribuição, permite ao professor a identificação de cada participante. Na entrevista presencial é possível perceber, por meio de um diálogo, se o aluno é realmente o autor das produções que estão em seu nome. Além disto é possível oportunizar também, durante esse encontro, o aperfeiçoamento de questões que ficaram em aberto nas atividades e que estão devidamente apontadas nos arquivos com as discussões completas.

- Um *Material de apoio* está disponível em um espaço de mesmo nome, onde são encontradas orientações sobre procedimentos de instalação do *software Scientific Notebook*, bem como respostas a *perguntas freqüentes* sobre questões tecnológicas, tanto relacionadas ao próprio *software* quanto aos demais recursos disponíveis no ambiente. A figura 8 apresenta a tela desse espaço.

Figura 8: Tela do contexto do material de apoio

- Em *Leituras* podem ser encontradas, além das referências bibliográficas sugeridas, *links* de acesso a endereços relacionados aos temas de interesse do curso. Além disso, neste espaço são disponibilizadas *Notas de Aula* referentes aos tópicos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Trata-se de uma fonte para consulta rápida, em linguagem simples, com o propósito de familiarizar o aluno em seus estudos iniciais. Esse espaço, organizado inicialmente com o material de polígrafos e notas de aula produzidas pelos professores da disciplina, tem o propósito, no Mecam, de agregar as produções coletivas[26] originadas das edições anteriores, à medida que forem sendo realizadas, de modo que se constitua em um acervo que, por ter sido produzido pelos próprios alunos, utilizando sua própria linguagem, possa servir como apoio às próximas edições do programa. Essa organização, entretanto, ainda não foi possível, visto tratar-se de um trabalho que requer uma atenção especial no sentido de inseri-lo no contexto da disciplina de forma coerente e organizada e não como uma lista de tópicos isolados, cuja inclusão nada acrescente ao ambiente. Na realidade esse objetivo prevê a disponibilização de tal material na forma de um hipertexto,[27] a partir do qual seja possível um processo de comunicação organizado de forma não linear o que, do ponto de vista epistemológico, está relacionado ao próprio processo da aprendizagem. De acordo com Pais (2004), a "importância pedagógica do hipertexto tem origem quando se percebe que a lógica de seu funcionamento aproxima-se da complexidade inerente ao processo de aprendizagem". Dessa forma, as produções coletivas podem oferecer informações e pontos de partida para desencadear a busca de outras informações, o que permite respeitar o ritmo particular de aprendizagem de cada aluno, redimensionando-o, quando for o caso.

- A proposta metodológica norteadora do programa considera a investigação sobre as condições iniciais do aluno que ingressa no curso e a possibilidade de aprimorá-la, por um processo de reflexão e tomada de consciência que o leve à construção de conhecimentos e à adoção de nova postura de autonomia e de responsabilidade por sua aprendizagem. Assim sendo, o conjunto de atividades, visando à (re)construção dos conceitos estruturais da disciplina é proposto para o desenvolvimento dos estudos e encontra-se disponível no ambiente, desde o início do curso. Cada atividade consta de um problema e um questionamento inicial que gera um processo de problematizações, com a finalidade de identificar as dificuldades relacionadas aos conceitos envolvidos e ao reconhecimento da Matemática já construída. Não há ordem determinada para a resolução das atividades. A sugestão é que sejam desenvolvidas antes as que tratam de assuntos mais familiares como uma forma de estímulo e de adquirir confiança, para quem chega de uma suposta reprovação. Durante todo o trabalho, desde o princípio, é orientado a buscar auxílio na bibliografia recomendada, para apresentar, em cada momento, o que julgar ser o melhor, de acordo com sua condição.

---

[26] As produções coletivas, no decurso de cada edição, têm espaço próprio, que é descrito logo mais, nesta seção.

[27] De acordo com Clement (apud PAIS, 2004), trata-se de um conjunto constituído de informações não hierarquizadas e integradas entre elas por conexões que o leitor pode ativar e que permitem um acesso rápido a cada um dos elementos constitutivos do conjunto.

Na figura 9 é apresentada a tela do contexto das *Atividades*.

Figura 9: Tela do contexto das *Atividades* do Mecam

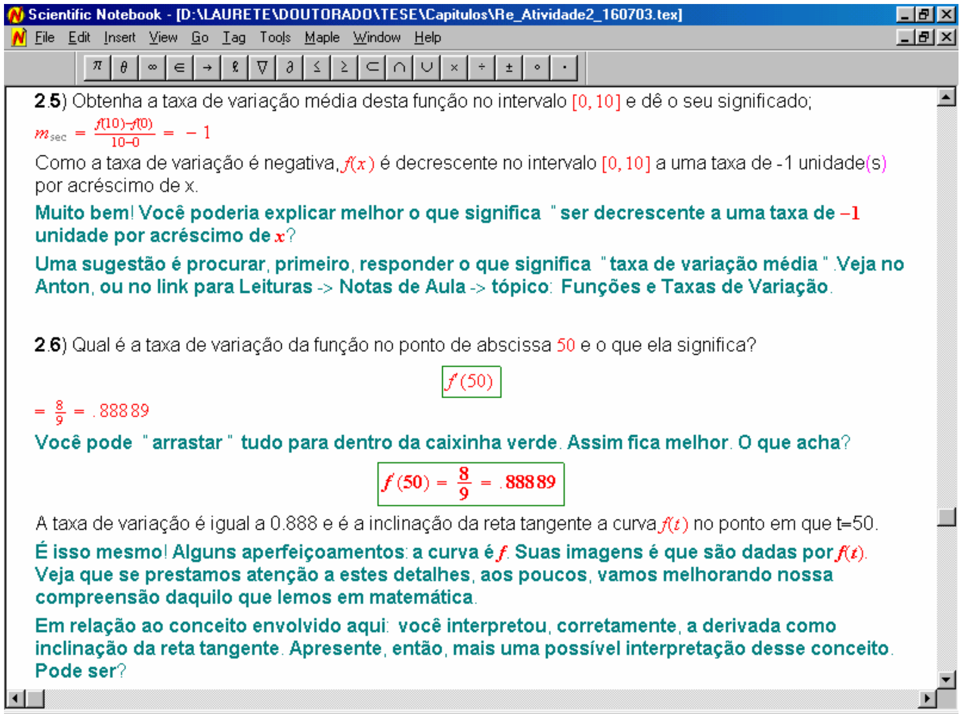
Fazem parte do processo a análise e a discussão dos procedimentos adotados na resolução dos problemas e a proposição de novos questionamentos que utilizam os erros ou acertos como fontes de reconhecimento do que precisa ser (re)elaborado para que sejam superadas as dificuldades ou como geradores de desafios que visem estabelecer novas relações e níveis mais elevados de compreensão (LIMA; SAUER, 2002). Os alunos devem, portanto, participar ativamente e mostrar disposição para o aperfeiçoamento das atividades, buscando aprimorá-las no sentido da compreensão dos conceitos por exploração dos significados.

Nos questionamentos e na solicitação de justificativas, são sugeridas diferentes abordagens para as questões, com o propósito de auxiliar no entendimento dos significados. Em geral, os alunos iniciam com procedimentos algébricos – resolver uma equação ou aplicar uma fórmula –, mas, ao utilizarem outras formas como a simulação numérica, tradução da simbologia com as próprias palavras ou a visualização geométrica, aumentam as possibilidades de compreensão.

- Todas as discussões relacionadas às atividades matemáticas são realizadas no espaço das *Discussões* que, como no ambiente de Cálculo, conta com um fórum que permite anexar arquivos. No ambiente do Mecam conta-se, também, com um recurso de *Correio Interno* para a troca de mensagens envolvendo outros assuntos, não especificamente relacionados às atividades matemáticas. O fórum é um recurso de destaque nesse ambiente por ser o único espaço para interações e construções. Durante a realização de cada um dos cursos, foram necessárias várias atualizações para evitar dificuldades de utilização desse recurso, devidas à grande quantidade de mensagens.

É importante destacar que todas as produções são geradas por dificuldades manifestadas pelo aluno ou pelas problematizações que se constituíram como desafios para vários deles. Diferentemente do ambiente de Cálculo, no Mecam as produções coletivas são textos não necessariamente relacionados a uma única atividade proposta, ou seja, uma atividade pode gerar várias produções coletivas.

Isso porque as discussões que acontecem no espaço do fórum são relacionadas, em grande parte, às dúvidas individuais, uma vez que cada atividade é problematizada de forma diferente para cada aluno, isto é, a problematização depende das respostas que apresenta quando do envio da atividade. As figuras 10 e 11, a seguir, ilustram essa diversidade, mostrando a mesma atividade respondida por dois alunos, onde se observa a necessidade de problematizações distintas, de acordo com as respectivas respostas apresentadas.


Scientific Notebook - [D:\LAURETE\DOUTORADO\TESE\Capitulos\Re_Atividade2_160703.tex]

2.5) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo [0, 10] e dê o seu significado;

$m_{sec} = \frac{f(10)-f(0)}{10-0} = -1$

Como a taxa de variação é negativa, $f(x)$ é decrescente no intervalo [0, 10] a uma taxa de -1 unidade(s) por acréscimo de x.

Muito bem! Você poderia explicar melhor o que significa "ser decrescente a uma taxa de -1 unidade por acréscimo de x?

Uma sugestão é procurar, primeiro, responder o que significa "taxa de variação média". Veja no Anton, ou no link para Leituras -> Notas de Aula -> tópico: Funções e Taxas de Variação.

2.6) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?

$\boxed{f'(50)}$

$= \frac{8}{9} = .88889$

Você pode "arrastar" tudo para dentro da caixinha verde. Assim fica melhor. O que acha?

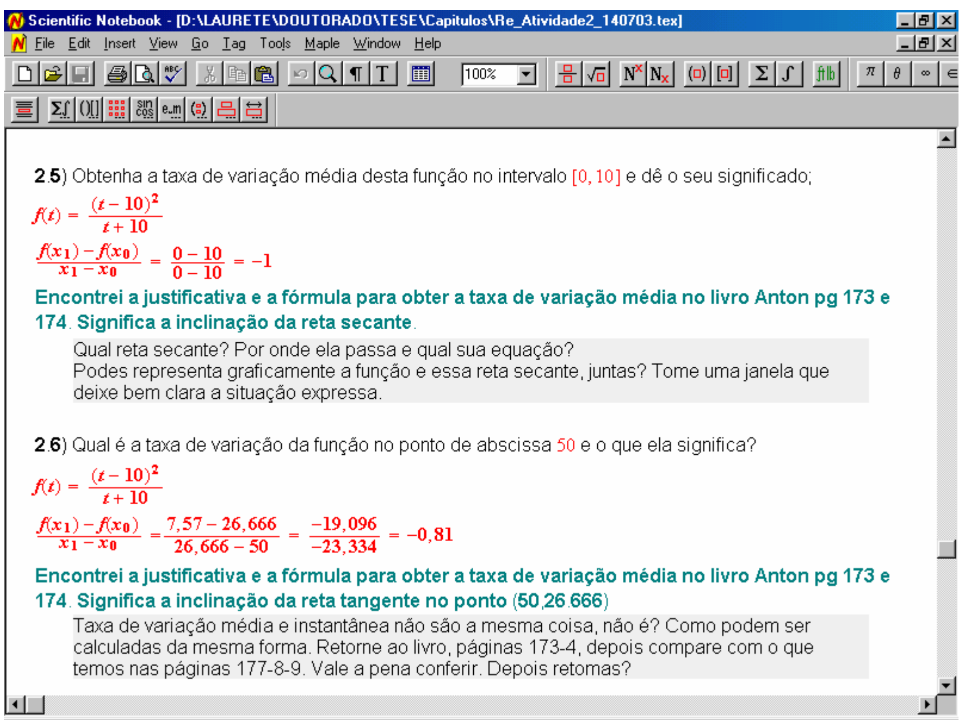
$\boxed{f'(50) = \frac{8}{9} = .88889}$

A taxa de variação é igual a 0.888 e é a inclinação da reta tangente a curva $f(t)$ no ponto em que t=50.

É isso mesmo! Alguns aperfeiçoamentos: a curva é f. Suas imagens é que são dadas por $f(t)$. Veja que se prestamos atenção a estes detalhes, aos poucos, vamos melhorando nossa compreensão daquilo que lemos em matemática.

Em relação ao conceito envolvido aqui: você interpretou, corretamente, a derivada como inclinação da reta tangente. Apresente, então, mais uma possível interpretação desse conceito. Pode ser?

Figura 10: Possíveis problematizações para uma atividade


Scientific Notebook - [D:\LAURETE\DOUTORADO\TESE\Capitulos\Re_Atividade2_140703.tex]

2.5) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo [0, 10] e dê o seu significado;

$f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{0-10}{0-10} = -1$

Encontrei a justificativa e a fórmula para obter a taxa de variação média no livro Anton pg 173 e 174. Significa a inclinação da reta secante.

Qual reta secante? Por onde ela passa e qual sua equação?
Podes representa graficamente a função e essa reta secante, juntas? Tome uma janela que deixe bem clara a situação expressa.

2.6) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?

$f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{7,57-26,666}{26,666-50} = \frac{-19,096}{-23,334} = -0,81$

Encontrei a justificativa e a fórmula para obter a taxa de variação média no livro Anton pg 173 e 174. Significa a inclinação da reta tangente no ponto (50,26.666)

Taxa de variação média e instantânea não são a mesma coisa, não é? Como podem ser calculadas da mesma forma. Retorne ao livro, páginas 173-4, depois compare com o que temos nas páginas 177-8-9. Vale a pena conferir. Depois retornas?

Figura 11: Possíveis problematizações para uma atividade

Assim sendo, para cada aluno e em cada atividade, as propostas de estudo e o material de apoio têm caráter flexível, adequado a cada situação. As discussões, por sua vez, ocorrem em diferentes níveis, dependendo da necessidade, do interesse e da disponibilidade de cada um. Quanto ao grau de desenvolvimento dos alunos envolvidos, tem-se como princípio respeitar seus diferentes níveis. Cada conquista traduz um entendimento a mais e alimenta o passo seguinte. "A motivação é impulsionada pelo motor afetivo, de tal forma que o sujeito esteja disposto a buscar respostas às suas dúvidas e seja capaz de construir conhecimentos a partir dos que possui" (MATURANA, 1999).

Quanto ao tempo destinado às atividades, não são considerados prazos finais para o término de cada uma, mas uma data-limite para a primeira entrega de cada atividade. A partir desta, a elaboração das demais e os aperfeiçoamentos sugeridos para cada uma ocorrem simultaneamente. O prazo final para os aprimoramentos é agendado para uma semana antes do término do curso, quando os alunos se apresentam para a entrevista presencial. Nessa ocasião ocorre, também na presença do aluno e com sua concordância, com a devida justificativa, a confirmação da aprovação ou reprovação e o registro de sua opinião em relação à proposta de aprendizagem que o curso oferece.

- A diversidade de problematizações gerada pelos diferentes questionamentos, como retorno a uma mesma atividade constitui, na maior parte, o conteúdo dos tópicos que constituem as *Produções Coletivas*. Conseqüentemente esse espaço, no Mecam, é também atualizado freqüentemente. Na figura 12, observa-se a tela do espaço das *Discussões* com seus três contextos de interação.

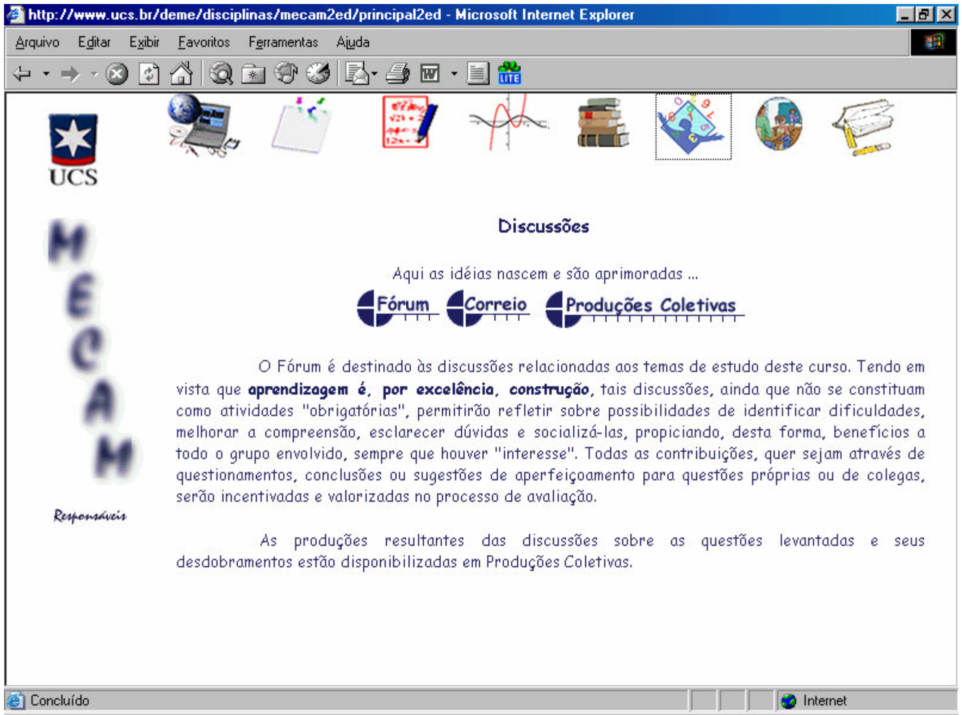


Figura 12: O espaço das *Discussões* no Mecam

Vale o destaque para a boa qualidade das *Produções Coletivas* que, neste espaço, são disponibilizadas em forma de hipertextos, porém ainda separados por tópicos originados das discussões em torno de cada um dos questionamentos, como mostra a figura 13.

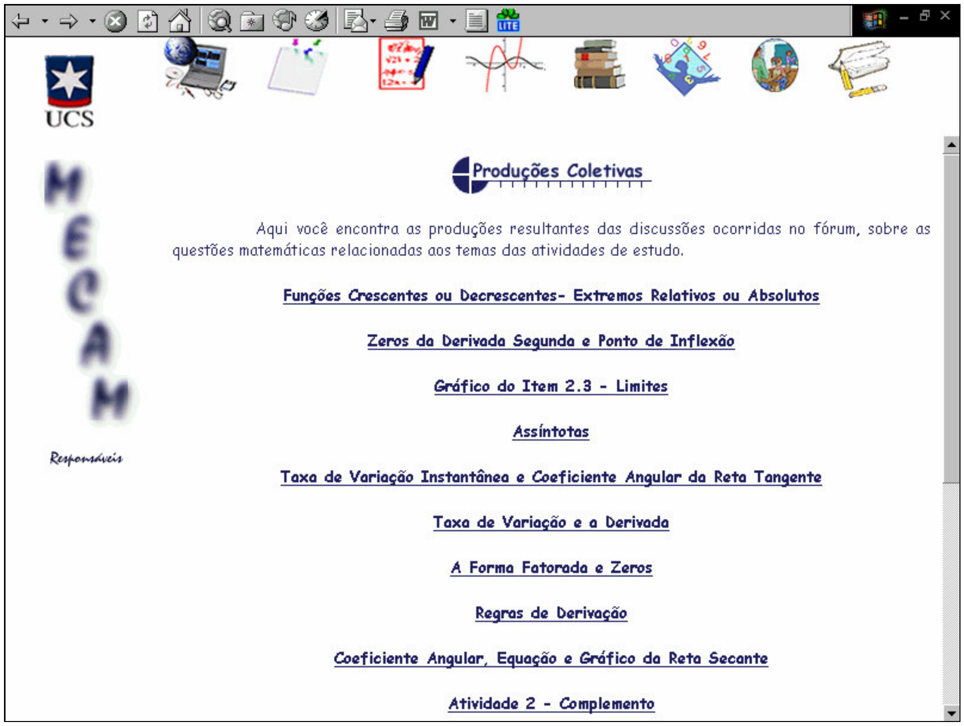


Figura 13: O espaço das *Produções Coletivas* no Mecam

Na figura 14 observa-se o trecho de uma das produções geradas no decorrer da segunda edição do programa.

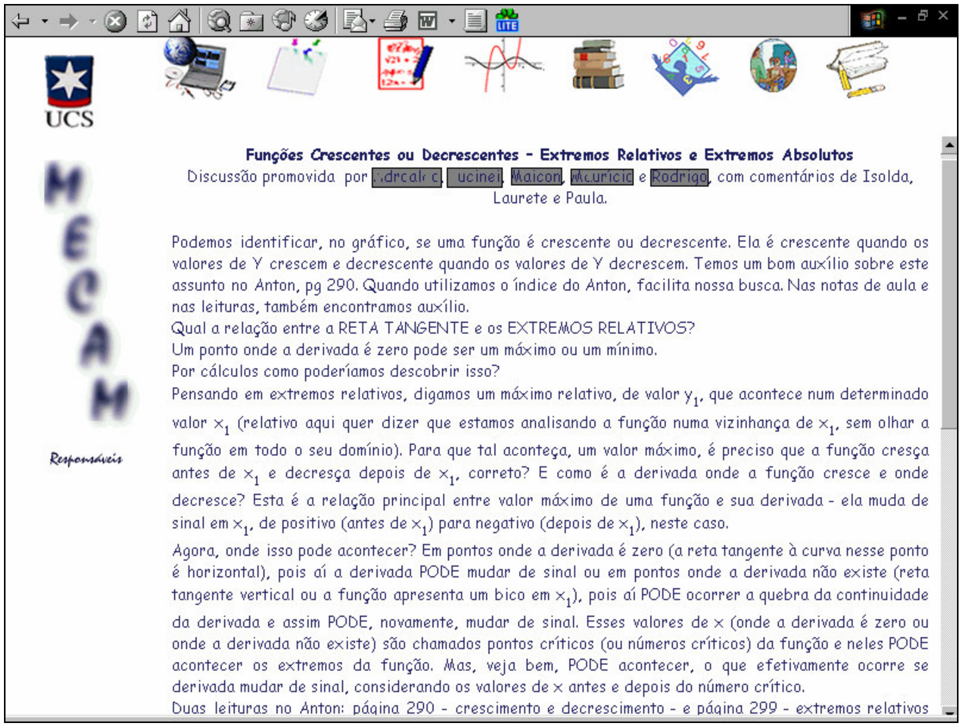


Figura 14: Uma produção coletiva no Mecam

É importante destacar que, mesmo buscando a coerência e a unidade entre os espaços que compõem o ambiente virtual de aprendizagem, descritos acima, as dissonâncias e diversidades precisam ser consideradas nesse sistema (VALENTINI, 2003). Quer dizer, embora se busque propiciar trocas heterárquicas, desenvolvimento de autonomia, múltiplas formas de interação e problematização, encontram-se momentos de dificuldades e de desencontros que também fazem parte do processo. Tais dificuldades e desencontros estão relacionados ao uso da tecnologia, às interações entre os sujeitos, ao entendimento da aprendizagem como reprodução, ao medo de errar, à resistência e dificuldade em expressar suas idéias a partir da escrita, dentre outros.

De qualquer forma se considera que, talvez mais importante do que se constituir numa opção de ensino a distância para alunos reprovados, com determinado perfil, seja a proposta metodológica deste programa cujas atividades permitem gerar um processo reflexivo que os leve a assumir sua parcela de responsabilidade pela sua aprendizagem, desenvolvendo autonomia e, conseqüentemente, a capacidade de aprender a aprender.

Desde o princípio dos estudos, professoras-pesquisadoras e monitoras, estiveram imbuídas em alicerçar o ambiente de aprendizagem com recursos tecnológicos simples, porém decisivos para a realização dos estudos num curso a distância, e no aperfeiçoamento da metodologia como recurso didático capaz de promover a interatividade, no sentido que Silva (2000) dá ao termo, onde o papel do professor é o de *dar conta* das interações, é o de estar atento à rede de relações que se estabelece na comunidade de aprendizagem envolvida. Na fase dos experimentos, juntaram-se os estudantes com a mesma disposição de fazer acontecer, de transformar sua realidade, não somente a de alunos reprovados, mas também a realidade de uma aprendizagem concebida como um fazer, que vai se modificando na direção de um compreender. Nesse sentido o problema da aprendizagem diz respeito a todos, pesquisadores e participantes, envolvidos de modo cooperativo e participativo na busca de novas soluções.

No próximo capítulo, sob tais pressupostos, é apresentado o delineamento da pesquisa realizada com vistas a responder às questões e a alcançar o objetivo desta tese.

5 UMA ANÁLISE QUALITATIVA

Em qualquer processo de pesquisa [...]
aprende-se do que já se aprendeu, por reestruturação,
reciclagem, até porque somos seres com
passado, memória, sentido.
(DEMO, 2002b, p. 52)

A análise dos dados discutida neste capítulo, assim como a pesquisa, também pode ser associada aos movimentos do Sol (base teórica). Num primeiro momento, como no alvorecer, quando programamos nosso dia (processo em andamento), foi necessário selecionar, no imenso conjunto de dados, aqueles que fornecem indicadores de *concepções dos alunos* sobre a aprendizagem e sobre nossos papéis na construção do conhecimento matemático. A análise de tais concepções é realizada com a finalidade de conhecer o ponto de vista do aluno para levá-lo em consideração nas intervenções promovidas em diálogos. A partir daí, no momento de maior luminosidade, começa-se a compreender e procura-se demonstrar como os *diálogos matemáticos* podem promover e revelam o progresso, em termos de aprendizagem, daqueles que se envolveram em atividades de discussão sobre o seu fazer para compreender. Finalmente, como no entardecer, a reflexão sobre a jornada é imprescindível e é representada, na análise, pelo seu terceiro momento, quando são consideradas as relações entre as categorias *concepções dos alunos*, e *diálogos matemáticos*, daqueles que participaram de atividades promovidas. Essa nos traz indicadores, com boas expectativas para “um novo dia” dando margem a novas reflexões e novas construções.

5.1 Proposta metodológica

Neste estudo foi adotada uma estratégia de "pesquisa-ação com observação participante", assim denominada devido às suas características como pesquisa-ação, conforme Thiollent (1988) e Barbier (1996), valendo-se da técnica de observação participante, conforme Barbier (1996).

De acordo com Thiollent (1988), a *pesquisa-ação*, enquanto alternativa metodológica que, além da participação, supõe uma ação planejada, obedece a prioridades estabelecidas a partir de um diagnóstico da situação no qual os participantes têm voz e vez. Suas bases empíricas, voltadas para a descrição de ações concretas, apóiam intervenções na resolução de problemas efetivamente detectados. Inicia, assim, com observação[28] e ação[29] e progride na teorização, de acordo com a análise realizada, a partir da observação e descrição de situações concretas. Isso não implica a dedução do geral ao particular nem indução do particular ao geral, mas num constante vaivém atento às exigências teóricas e práticas visando solucionar os problemas detectados.

Trata-se, pois, de uma pesquisa realizada em estreita associação com uma ação na qual pesquisadora e participantes, representativos da situação, estão envolvidos de modo cooperativo e participativo. A participação dos pesquisadores, no problema investigado, é absolutamente necessária e efetiva, isto é, não se trata de uma participação como um membro do grupo observado, mas de uma participação com ação problemática e problematizadora merecendo investigação para ser elaborada e conduzida (THIOLLENT, 1988). Quanto aos demais participantes, esses por sua vez têm algo a *dizer* e a *fazer*. Não se trata de um simples levantamento de dados.

Os principais aspectos considerados por Thiollent (1988), presentes neste estudo, analisado sob o ponto de vista da pesquisa-ação estão relacionados:

- à interação entre pesquisadora e pessoas implicadas na situação investigada;
- ao seu objetivo que consiste em esclarecer e, se possível, resolver os problemas da situação observada;
- ao acompanhamento das decisões, das ações e de toda a atividade intencional dos atores da situação;

---

[28] Conforme descrito no capítulo 2, referente à origem da pesquisa.
[29] Conforme descrito nas subseções 5.2.1 e 5.2.2, referentes à análise dos dados.

- à produção de conhecimento e ao nível de consciência das pessoas envolvidas na situação investigada.

Com relação a este último aspecto, evidencia-se que não se trata apenas de resolver um problema, mas de desenvolver a consciência, tornando mais evidente aos olhos dos interessados a natureza e complexidade do mesmo.

Especificamente, no que tange aos seus objetivos como uma pesquisa-ação, conforme Thiollent (1988), identifica-se neste estudo:

- os objetivos de pesquisa ou os objetivos de conhecimento, quais sejam: obter informações, aumentando nosso conhecimento sobre determinadas situações e capacidades de ação, neste caso a confirmação da hipótese de que a participação do aluno num ambiente virtual de aprendizagem depende de sua concepção epistemológica e da conseqüente relação de co-implicação entre esta e a aprendizagem decorrente de seu envolvimento em diálogos matemáticos;
- os objetivos de ação ou objetivos práticos, quais sejam: contribuir com o melhor equacionamento possível do problema central da pesquisa, com levantamento de soluções e proposta de ações correspondentes. Neste estudo, esses objetivos referem-se à promoção de melhores níveis de aprendizagem como conseqüência do envolvimento em diálogos promovidos visando levar o aluno a refletir sobre questões epistemológicas e, conseqüentemente, valorizar a aprendizagem decorrente de ação.

Thiollent afirma que, em geral, com maior conhecimento, a ação é mais bem conduzida. Entretanto ressalta a importância do equilíbrio entre os dois tipos de objetivo, sugerindo que os objetivos práticos sejam vistos com *realismo*, isto é, sem exageros na definição das soluções alcançáveis. “Nem todos os problemas têm soluções em curto prazo.”

Neste estudo, caracterizado como uma pesquisa-ação com observação participante, a pesquisadora está implicada desde o início e sua atitude é sempre uma atitude de *escuta*. Para Barbier (1996), trata-se de uma *escuta sensível* que é um *escutar/ver* que se apóia na disposição de compreender o aluno, suas atitudes, seus comportamentos. Essa escuta, nesse caso, é sempre uma escuta-ação espontânea, que age e adapta-se imediatamente a cada acontecimento, mesmo que não esteja previsto. Com efeito, são as respostas *imprevisíveis* que orientam os diálogos.

A noção de implicação também surge no contexto desta pesquisa como “engajamento pessoal e coletivo da pesquisadora” que caracteriza o modo pelo qual se envolve na atividade. “Implicar-me consiste sempre em reconhecer simultaneamente que eu implico o outro e sou implicado pelo outro na situação interativa" (BARBIER, 1996).

Assim, a cada fase da pesquisa, a avaliação e a reflexão – antes da ação e depois da ação – estão juntas. Essa dinâmica exige, em todas as fases, a realização de ações no sentido de corrigir problemas detectados, concomitantemente à sua realização. Nesta pesquisa, discussões que não promoveram reflexões esperadas foram muitas vezes ocasionadas por questões mal formuladas, ou mesmo por interpretações precipitadas e sem qualidade representativa. Tais interpretações, em geral, dizem respeito à unanimidade esperada como decorrência de certas propostas, o que é um equívoco. Com efeito, não existe uma proposta que se constitua numa ação eficaz para todo o grupo. Assim sendo, muitos aspectos relacionados ao seu desenvolvimento foram elucidados no decorrer da mesma, implicando mudança de rumos, adaptação ou substituição de estratégias planejadas, que na realidade se mostraram inviáveis ou ineficazes antes mesmo de serem colocadas em prática.

Nesse processo reside a *aprendizagem* da pesquisadora, a partir da reflexão sobre ações e resultados decorrentes, acompanhados de seminários envolvendo os grupos de pesquisa e da base teórica que fundamenta todo o estudo.

O planejamento, desenvolvimento e a construção dos ambientes de apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, além dos ambientes para a realização das duas edições do projeto Mecam, acompanhados da reflexão permanente e do registro de resultados em cada etapa, constituíram a fonte de dados para a análise. As situações de aprendizagem observadas consistiram de questionários e participações espontâneas dos alunos, as quais originaram discussões, resolução de problemas de forma cooperativa, diálogos sobre os temas de estudo e atividades de auto-avaliação. Participaram cerca de seiscentos e noventa estudantes cujas mensagens foram organizadas, de acordo com as categorias evidenciadas neste estudo (quadros 3 e 4), em pastas contendo aproximadamente, quatro mil e duzentos arquivos originados de suas intervenções em listas ou fóruns de discussão, a partir de sua inclusão, ou nas pastas individuais disponíveis nos ambientes virtuais de aprendizagem para apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral,[30] ministradas nos oito semestres letivos de 2000 a 2003 e para a realização dos dois cursos de Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I,[31] programados pelo projeto Mecam[32], nos períodos acadêmicos 2003.1 e 2003.3.

---

[30] Disponível em: <www.ucs.br/deme/disciplinas/calculo>.
[31] Disponíveis em: <www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam> e <www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam2ed>.
[32] O projeto Mecam é apresentado na seção 4.2.

A análise dos dados foi realizada com base no diagnóstico de uma realidade vivenciada a partir de uma fase exploratória, quando foram identificados problemas relacionados à aprendizagem de Matemática na graduação, conforme apresentado no capítulo 1. À luz da epistemologia genética de Jean Piaget,[33] da pedagogia de Paulo Freire,[34] com a valiosa contribuição das pesquisas já realizadas por Becker[35] e dos estudos referentes à consciência, realizados por Damásio[36] e Furth,[37] foi possível identificar três conjuntos de categorias: o primeiro, relacionado às *concepções iniciais dos alunos*, o segundo aos *diálogos matemáticos*, desenvolvidos visando à aprendizagem a partir do envolvimento em processos de reflexão sobre o significado dos conceitos, e o terceiro relacionado às *concepções em processo*. Essas se referem, em particular, às concepções dos alunos sobre condições de aprendizagem possibilitadas pela sua participação no ambiente de aprendizagem, de acordo com a metodologia utilizada no decorrer da disciplina ou do curso.

Para a análise da primeira categoria, *concepções iniciais dos alunos*, foram considerados (conforme detalhado em 5.2.1) depoimentos sobre:

- Condições de aprendizagem
- Conhecimento matemático
- Papel do professor
- Papel do aluno
- Papel do diálogo

Quadro 3: Categoria *Concepções dos alunos*

O conjunto de informações obtidas, de acordo com as subcategorias que se constituem como unidades de análise referentes às concepções dos alunos, destacadas no quadro 3, fornece, conforme a análise realizada, indicadores de *obstáculos pedagógicos* a serem superados. Conforme Becker (2002), quando se referiu aos professores, entende-se que

---

33 PIAGET, 1962; 1968; 1974; 1977a; 1977b; 1978; 1983; 1993; 1995.
34 FREIRE, 1995; 2001; 2003.
35 BECKER, 1997; 2001; 2002.
36 DAMÁSIO, 2000; 2002.
37 FURTH, 1995.

também a análise das concepções reveladas em respostas aos questionamentos promovidos pode contribuir para a crítica epistemológica do aluno que, influenciado por práticas didático-pedagógicas autoritárias às quais é submetido durante sua vida acadêmica, chega, muitas vezes, à universidade, esperando receber os conhecimentos que o professor tem e deve saber transmitir. Com essa atitude passiva, "cobra" do professor toda a responsabilidade pela sua aprendizagem, dificultando ações que visem promover seu envolvimento em atividades de estudo. Assim, a superação dos obstáculos pedagógicos, concepções originárias do senso comum, herdadas e recicladas pela academia, mantidas e passivamente aceitas pelo "senso comum acadêmico", pode ser vista como uma condição para participação reflexiva em diálogos promovidos, como uma forma de envolvê-lo, dessa feita, com o conhecimento matemático. A articulação e o diálogo produzem uma relação de confiança que, segundo Freire (2003), vai tornando os sujeitos dialógicos cada vez mais companheiros na pronúncia do mundo e, conseqüentemente, permite que os diálogos matemáticos se tornem significativos.

Além disso, os estudos realizados por Bachelard (2001), ao procurar estabelecer a relação dos homens com seu próprio saber, apontam para a superação de obstáculos ao conhecimento como um desafio a ser enfrentado. Os *obstáculos epistemológicos*, segundo o autor, podem ser identificados no desenvolvimento histórico do pensamento científico, bem como na prática da educação. Nesse segundo caso, aparecem no contexto educacional e revelam-se como *obstáculos pedagógicos*, que demandam ao educador o conhecimento de como se dá o conhecer, de forma a influenciar decisivamente sua prática pedagógica.

Entende-se que a promoção de diálogos que auxiliem a superação de obstáculos pedagógicos é condição para a superação de obstáculos epistemológicos, já sedimentados pela vida cotidiana do aluno. Nesse estudo, a análise de tais obstáculos pedagógicos revelou-se imprescindível no sentido de promover ações que levem em conta o que este entende ser o seu papel na construção do conhecimento, o papel do professor e o papel do diálogo.

Os *diálogos matemáticos*, por sua vez, revelam uma complexificação da aprendizagem de Matemática e permitem a identificação das subcategorias, conforme o quadro 4, a seguir.

▪ aplicar fórmulas (fazer) ▪ traduzir operações realizadas (descrever) ▪ explicar, argumentar, justificar (compreender)

Quadro 4: Categoria *Diálogos matemáticos*

Tais subcategorias são associadas a níveis de tomada de consciência das ações e das relações entre a conceituação e a ação e analisadas à luz da epistemologia genética (PIAGET, 1977a, 1995).

As análises de *concepções iniciais dos alunos* e de *diálogos matemáticos* são realizadas separadamente, com o objetivo de melhor compreendê-los e, possivelmente, evidenciar a relação de co-implicação entre ambas, na medida em que um não é pré-requisito para o outro, além de ocorrerem simultaneamente nos ambientes de aprendizagem. Essa relação é analisada num terceiro momento, quando são levados em consideração depoimentos apresentados no decorrer da disciplina ou curso, concomitantemente à realização dos diálogos matemáticos.

5.2 Uma análise interpretativa

Para uma interpretação dos enunciados e dos diálogos foram selecionados, de modo intencional, os extratos que melhor explicitam e ilustram concepções ou saberes relacionados às subcategorias evidenciadas, em cada uma das categorias. Isto é possível no contexto desse estudo, diante do interesse em conduzir os diálogos, visando promover reflexão e conscientização. Além disto, durante a evolução da pesquisa, a aprendizagem decorrente do processo de investigação possibilitou a utilização de informações já disponíveis para a orientação de novas ações. Assim, conforme Thiollent (1988), a seleção dos extratos considera sua representatividade qualitativa no conjunto das categorias e subcategorias destacadas, isto é, os aspectos mais significativos relacionados às mesmas.

Cabe ressaltar que alguns desses extratos se constituem, de fato, como *diálogos*, de acordo com Freire (1995, 2001, 2003), na medida em que, além de deixarem transparecer diversos pontos de vista, aceitam a socialização de idéias, interagindo e buscando construir relações com consciência. Outros, por sua vez, em forma de *monólogos*, são apresentados como simples opiniões ou perguntas, mas fechando-se à tomada de consciência, quando não aceitam ou não valorizam a discussão e a consideração de outros pontos de vista, não retornando para a continuação ou mesmo conclusão. Isso pode ser conseqüência de insegurança, desinteresse, desmotivação, ou de outro, e tal análise não foi objetivo deste estudo. Contudo, de acordo com a análise realizada, alguns monólogos também apresentam contribuições importantes e permitiram, em muitos casos, o exercício e a compreensão de possibilidades de mediação do auto-reconhecimento e da conscientização sobre a importância do envolvimento e do compromisso com o próprio processo de construção do conhecimento. Além disso, os mesmos constituem-se, muitas vezes, objetos de reflexão que podem fornecer indicadores de novas ações, com vistas a promover a crítica almejada, ao revelarem concepções epistemológicas baseadas na aprendizagem passiva, na memorização e manipulação de fórmulas e algoritmos desprovidos de significado, de acordo com as quais entendem a possibilidade de construção do conhecimento matemático.

5.2.1 Concepções iniciais dos alunos

Indicadores de *concepções iniciais dos alunos* podem ser encontrados em atividades de auto-avaliação ou em questionários organizados para atender aos interesses desse estudo, bem como de participações espontâneas nas listas ou fóruns de discussão. Em qualquer uma das formas são sempre promovidos visando, não apenas conhecer o ponto de vista do aluno, mas levá-lo em consideração na programação das atividades de aprendizagem ou em estratégias e intervenções na disciplina ou no curso. Decidiu-se, para este estudo, proceder à análise de respostas apresentadas pelos alunos a um questionário, conforme o Extrato 2, por entender que as mesmas fornecem indicadores representativos de todas as subcategorias relacionadas às concepções iniciais, em geral observadas, suficientes para a análise dos diálogos matemáticos. Esse questionário foi apresentado, no primeiro dia de aula, a duas turmas de alunos de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Justifica-se a importância dessas reflexões iniciais procurando apresentar aos alunos os elementos centrais da proposta metodológica, quais sejam: a realização de atividades que levem à tomada de consciência sobre o fazer e o aprimoramento do mesmo por meio de diálogos que auxiliem na busca da compreensão dos conceitos e no desenvolvimento de aprendizagens significativas. O reconhecimento dos benefícios dessa prática pedagógica levou a investir no diálogo como forma de manter o envolvimento do estudante em atividades de reflexão. Ao escrever ou falar sobre o que está pensando, o sujeito pode agir sobre o meio, sobre algum objeto, algum conteúdo, sobre as próprias ações, interagindo com outros sujeitos e, ao fazer isso, ele tem condições de voltar-se sobre si mesmo e, por um processo de tomada de consciência, desenvolver-se (BECKER, 2001).

Assim sendo, tanto em sala de aula, quanto nos fóruns de discussões do ambiente de apoio para disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral[38] ou dos cursos a distância do projeto Mecam,[39] procurou-se incentivar o diálogo, justificando o convite ao envolvimento.

Extrato 1: "Mensagem de boas-vindas"

Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Próxima Mensagem: Para refletir e responder

SEJAM BEM-VINDOS!
Autor: **Laurete**
Data: Aug 6, 2002 2:58 pm

Caros alunos
Este espaço foi criado para discutirmos sobre dúvidas, sugestões de resolução ou comentários relacionados aos temas que estaremos estudando em Cálculo Diferencial e Integral. Quando estiverem estudando, lembrem-se de utilizá-lo de forma colaborativa, tendo em mente que qualquer pergunta relacionada aos nossos temas de estudo será bem recebida e poderá ser uma forma de contribuir com o grupo! Acredito nos benefícios desta forma de estudar e quero incentivá-los a envolverem-se de forma significativa, isto é, sempre que estiverem interessados ou curiosos e não apenas para cumprir obrigações. Não há aprendizagem sem envolvimento, sem "querer", sem ter curiosidade e interesse.
Com isso em mente, participem de nossas discussões!
Abraços e bom semestre a todos.
Laurete

A construção de um ambiente favorável à produção do conhecimento não dispensa a convivência fundada na ética, no respeito aos saberes dos alunos, assumindo uma postura curiosa e, ao mesmo tempo, incentivando-os a se assumirem sujeitos socioistórico-culturais

---

[38] Disponível em <www.ucs.br/deme/disciplinas/calculo>.
[39] Disponíveis em <www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam> e <www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam2ed>.

do ato de conhecer (OLIVEIRA apud FREIRE, 2001). O acolhimento, acompanhado da reflexão sobre a importância de se compreender e se reconhecer os mecanismos de construção de conhecimento, seus processos de desenvolvimento, suas relações e expectativas, pretende apresentar a proposta didático-pedagógica baseada no diálogo, não na doação nem na imposição de um conjunto de informações. Busca-se, conforme sugere Freire (2001), problematizar o conteúdo programático do aluno, para poder devolvê-lo de forma organizada, sistematizada e acrescida dos elementos que este entregou à pesquisadora de forma desestruturada. Para isso é preciso conhecer seus conhecimentos.

O convite à reflexão é feito por meio de perguntas como as do Extrato 2 cujas respostas, conforme justificado anteriormente, foram selecionadas para a análise relacionada ao primeiro conjunto de subcategorias. Estas têm revelado concepções de aprendizagem passiva, baseada em atividades de repetição de exercícios e na ausência de atividades de interação, conforme fica evidente em respostas apresentadas e analisadas nos Extratos 4 a 20.

Extrato 2: "Um convite à reflexão"

Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Mensagem Anterior: SEJAM BEM-VINDOS!
Próxima Mensagem: Exercício 4 - Letra b

Para refletir e responder
Autor: **Laurete**
Data: Aug 5, 2002 11:44 am

Caro aluno
Solicito que responda às seguintes perguntas após refletir sobre sua disponibilidade e disposição com relação à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral:

1) você gosta de estudar Matemática? Por quê?
2) de que modo estuda Matemática?
3) costuma estudar somente para as avaliações ou semanalmente?
4) como pretende proceder, em relação às questões anteriores, com o Cálculo?
5) quais são suas principais dificuldades em Matemática?
6) em geral, costuma procurar auxílio imediato para resolver suas dúvidas ou espera a prova para ver se ela vai aparecer lá?
7) você acredita que dependemos somente dos professores para aprender?
8) qual é o papel do aluno?
9) qual é o papel do professor?
10) você acredita que poderemos utilizar este canal para esclarecer dúvidas? Por quê?

Comentários: ordenar por [Data] [Autor] [Assunto]
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:47)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:47)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:47)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:49)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:50)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:50)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:52)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:52)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:52)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:52)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:52)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:53)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:54)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:54)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:56)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:59)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:59)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 21:59)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 22:00)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 22:01)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 22:03)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 22:03)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 22:06)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 22:08)
Re: Para refletir e responder (por : terça, 05 de agosto de 2002 às 22:09)
Re: Para refletir e responder (por : quarta, 06 de agosto de 2002 às 08:06)
Re: Para refletir e responder (por : quarta, 06 de agosto de 2002 às 09:56)

De fato, poucos são os que não aceitam o convite. De forma geral, a grande maioria dos alunos procura apresentar seus pareceres, ainda que, muitas vezes, por meio de respostas vagas, sem reflexão, o que é perfeitamente compreensível, pois alguns deixam transparecer a surpresa por *conversar sobre estes assuntos em uma aula de Matemática*, conforme registros apresentados no fórum, juntamente com as respostas.

Extrato 3: "Aceitando o convite"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 6, 2002 8:06 am

(...) estou pensando desde ontem, depois do texto que nos passou. Na hora achei um tanto quanto estranho aquelas perguntas numa aula de matematica, mas elas me fizeram parar para pensar como estudante (...) confesso que ontem achei estranho, mas hoje percebo o quanto util pode ser, é claro, se bem explorado. Não imaginava a ideia de esclarecer duvidas e dar opinioes a respeito de matematica por e-mail.
Parabens, acho que nos vai auxiliar muito.

O texto ao qual a mensagem se refere é uma adaptação baseada em Introdução à Engenharia, conforme Bazzo e Pereira (1996, cap.1) e em A aventura de ser estudante, conforme Arruda, Oliveira e Preti (2001), chamando a atenção para a importância do planejamento de horários de estudo, bem como de seu bom aproveitamento, na medida do possível, sempre procurando evidenciar, justificando, o interesse em promover atividades de cooperação e interação com o grupo, o que exige disponibilidade de tempo, disposição para participar e uma crítica epistemológica que permita o reconhecimento disso como condição de aprendizagem. Salienta o texto: "[...] *sabemos de dificuldades que, como todos nós, enfrenta. Porém, apenas aguardar que os professores lhe entreguem conhecimentos previamente elaborados é uma atitude muito comodista, incompatível com os propósitos maiores de uma formação universitária e que não lhe trará benefício algum. Se tiver seus afazeres planejados, as atividades fluirão com maior produtividade e o tempo renderá mais* [...]*"*.

Percebeu-se, em manifestações presenciais, instantâneas, ou mesmo nas que foram expressas em mensagens, como a do Extrato 3, a importância de partir de atividades de reflexão nas quais os estudantes sejam incentivados a se auto-avaliarem como tal.

Finaliza o texto mencionado no Extrato 3: "*Finalmente, falando de você como estudante, gostaríamos que fizesse algumas considerações, tais como:*

- ✓ *Você já parou para se analisar, se auto-avaliar como estudante?*
- ✓ *Como é que você costuma estudar?*
- ✓ *Com que freqüência costuma ler e estudar?*
- ✓ *Costuma discutir sobre suas dúvidas?*

Faça isto e procure reconhecer a importância de conhecer-se como estudante. Para isto é imprescindível identificar seus hábitos de estudo e avaliar se eles ajudam ou *atrapalham sua aprendizagem!*

Seja uma águia, voe alto! Terá uma outra visão das coisas e do mundo!"

Relativamente aos interesses desse estudo, a leitura e interpretação de respostas a essas perguntas, informalmente obtidas em sala de aula ou registradas no fórum de discussões, forneceram, ao longo dos semestres em que foram realizadas, informações valiosas para a orientação dos diálogos promovidos. Creio que cada uma dessas questões poderia constituir um tema de pesquisa, embora não seja esse o objetivo do presente estudo. Porém é importante observar as concepções evidenciadas nos extratos selecionados para comentar aqui e que fornecem argumentos para as discussões posteriores.

No que tange aos interesses deste estudo, as seis primeiras respostas apresentadas às perguntas que constam do Extrato 2 fornecem indicadores das categorias *condições de aprendizagem* e *conhecimento matemático*, conforme é possível acompanhar na seleção organizada nos extratos seguintes, em que se procura justificar algumas constatações.

Extrato 4: "Condições de aprendizagem" e "Conhecimento matemático"

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor: [redacted]
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

1) Sim.
2) Separando-os e fazendo os exercícios em 02 livros.
3) Semanalmente.
4) Pretendo estudar "quase" todos os dias.
5) Adequação do segundo grau com a UCS.
6) não procuro auxílio imediato.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor: [redacted]
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

1) Sim. Porque é fundamental para nossa vida.
2) Freqüentando as aulas e prestando atenção.
3) Geralmente estudo para as avaliações.
4) Dar mais atenção a disciplina e tirar todas as minhas dúvidas.
5) Dificuldade de comunicação com a professora.
6) Procurar auxílio imediato.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor: [redacted]
Data: Aug 5, 2002 9:30 pm

1) Gosto, acho uma matéria muito interessante, apesar de ter enfrentado muitas dificuldades nesta disciplina.
2) Sempre com atividades práticas, não consigo aprender somente com teorias.
3) Somente para as avaliações.
4) Pretendo modificar meus métodos.
5) Minhas principais dificuldades se concentraram na minha falta de conhecimento sobre a matéria do ensino médio, pois meu curso de ensino médio concentrava-se em formar um técnico contábil e não preparava para demais cursos e profissões.
6) Tenho a certeza de que meus métodos estão errados, porém a verdade é que não costumo pedir auxílio, estou procurando mudar essa metodologia de estudo.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor: [redacted]
Data: Aug 5, 2002 9:57 pm

1) Não muito mas, se faz necessário e aprimora muito a nossa lógica e raciocínio.
2) Faço os exercícios práticos recomendados sempre após explicação do conteúdo.
3) Costumava estudar somente para as avaliações.
4) Pretendo me empenhar ao máximo e disponibilizar algumas horas de meu lazer, para me dedicar um pouco mais a esta cadeira.
5) Entender o conceito e escrever o mesmo. O cálculo (prática) depois de conhecido um exemplo de resolução se torna muito mais fácil.
6) Procuro imediatamente, no entanto, muitas vezes sinto receio por pensar que minhas dúvidas possam ser banais aos olhos de outros.
[...]

Afirmam gostar de Matemática, o que é um fator positivo, considerando sua importância no curso que escolheram. Além disso, reconhecer que "*é fundamental para nossa* *vida*” equivale a reconhecer a possibilidade de compreender o mundo, pois, como dizia Galileu (apud BECKER, 1999), o mundo foi criado em linguagem matemática: era preciso que o homem aprendesse Matemática para compreender o mundo. Ainda, segundo o autor, tanto para Galileu, quanto para Piaget, a matematicidade constitui condição fundamental para a compreensão do mundo e até condição ontológica do ser humano. Não se encontra, pois, nesses depoimentos, nada que se relacione a inibições afetivas que, conforme Piaget (1974), conferem ao aluno, com bastante freqüência, um sentimento de inferioridade nas aulas que versam sobre essa matéria. Ocorre que, como se observou nas demais respostas, suas concepções revelam a submissão e a dependência de métodos que tratam a Matemática como uma disciplina intelectual inteiramente organizada, bastando, para aprendê-la, memorizar fórmulas e algoritmos, no que, na maioria das vezes, foram bem-sucedidos até aqui. Assim, de acordo com o segundo depoimento do Extrato 4, para aprendê-la é preciso “*prestar atenção em aula”* e, como conseqüência, “*freqüentando as aulas e estudando para as avaliações*” é o caminho. Referem-se às *atividades práticas* como sendo resolução de exercícios ou problemas matemáticos e às *atividades teóricas* como sendo as que visam à compreensão dos conceitos: “*para aprender, faço os exercícios práticos*”. Essas concepções justificam, em grande parte, a resistência aos *diálogos matemáticos*, pois conversar sobre Matemática é visto como “*teorizar, o que não compete à Matemática, que é uma ciência exata*”, como se verá mais adiante.[40] Isto pode ser interpretado como um obstáculo pedagógico, o que dificulta a conceituação e, conseqüentemente a tomada de consciência necessária para uma aprendizagem significativa. O conhecimento matemático é assim entendido como um conjunto de exercícios que dependem dos temas estudados no Ensino Médio, apontado como a origem das dificuldades. Reconhecem a necessidade de “*estudar mais*” ou de “*mudar o método*”, o que pode ser entendido, aqui, como um primeiro indício de descentração, diante da consideração de um outro ponto de vista, nesse caso, os argumentos relacionados às concepções epistemológicas próprias da pesquisadora, explicitadas nos capítulos anteriores, que se costuma discutir presencialmente. O convite ao diálogo, justificado como condição para a adoção de estratégias que viabilizem melhores condições de aprendizagem, está sendo levado em consideração. Porém, o último depoimento do Extrato 4, “*sinto receio por pensar que minhas dúvidas possam ser banais aos olhos de outros*”, nos remete a uma dimensão ética da educação, que precisa ser contemplada. É verdade que essa manifestação pode ser devida a outras causas, porém se sabe que nem todas as práticas educativas são baseadas no

---

[40] Ver Extrato 48.

respeito à dignidade do educando, sua autonomia, sua identidade em processo. Para Freire (1995) esse respeito é conseqüência da vigilância do bom senso, necessário na condução das atividades didático-pedagógicas. É fundamental que os alunos percebam o respeito e a lealdade como são conduzidos os diálogos, de modo a sentirem-se valorizados por suas contribuições e incentivados a exporem suas dúvidas, em benefício próprio e do grupo.

A quase total ausência de concepções interacionistas e a dependência exclusiva do professor para aprender é uma das grandes constatações, salvo por algumas referências aos "*estudos em grupo*" ou a "*trocar idéias com colegas e monitores*". Mas ainda assim, "*para as avaliações*".

No Extrato 5, observam-se depoimentos que já apontam para um novo paradigma, ao demonstrar uma valorização das atividades interativas.

Extrato 5: "Condições de aprendizagem" e "Conhecimento matemático"

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:39 pm

1) Gosto pois percebi a importância de tomar a iniciativa nos estudos. Aprendi, quase no final do último semestre, a não esperar somente das explicações em sala de aula.
2) Em grupos de até 4 pessoas, em monitorias e realizando exercícios propostos.
3) Estudava pra resolver os exercícios propostos e também para as avaliações.
4) Da mesma forma como procedi no último semestre pois a sua metodologia será a mesma.
5) Tomar a iniciativa de aprender fora da aula aquilo que não havia aprendido em sala.
6) Antes eu aguardava, até perceber que não podia ficar aguardando. Pretendo, agora, buscar auxílio de imediato e quando não sentir necessidade, procurar utilizar o tempo ocioso pra trocar idéias com colegas e monitores.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:43 pm

1) Sim, pois tive a noção de saber taxas de variação média e instantânea, entre outras. No MECAM, tive um aprofundamento muito melhor do que nas aulas, o que me ajudou muito.
2) Geralmente estudava um pouco no fim de semana, já que não dava pra se aprofundar muito nos estudos, sabendo que tinha outras quatro disciplinas pra estudar também. E, nos dias de semana, trabalho também.
3) Me dedicava mais quando tinha avaliações, pois deixava de estudar outras disciplinas pra estudar só pra prova de cálculo. Isto quando não tinha outras 4 provas, como foi na última semana de aula, que foi muito ruim. Estudo semanalmente também.
4) Fico contente em saber que, como no MECAM, teremos pra cálculo um fórum também. Como me auxiliou muito pro MECAM, provavelmente me ajudará bastante em cálculo. Assim, ao surgir dúvidas no estudo, pode-se recorrer ao fórum, obtendo logo uma resposta.
5) Em geral, creio que foi entender o por quê de se usar o conceito aprendido nas atividades propostas.
6) Procuro sempre sanar minhas dúvidas se surgirem na aula. Com o fórum, as dúvidas serão mais rapidamente resolvidas por causa da discussão.
[...]

Os dois depoimentos que constam do Extrato 5 são de estudantes que já participaram de uma disciplina e do projeto Mecam, respectivamente, onde essa metodologia foi utilizada. Assim, pretender "*continuar estudando da mesma forma*" e "*recorrer ao fórum, obtendo logo uma resposta*" é, aqui, entendido como o reconhecimento da importância, já confirmada, de atividades interativas como colaboradoras de aprendizagem. Quanto ao conhecimento matemático, este pode ser construído, também, sem a presença do professor, "*fora da sala de aula*" e a partir de atividades de discussão. No primeiro depoimento do Extrato 5, perceber "*a importância de tomar a iniciativa nos estudos*" pode ser o resultado da reflexão sobre a importância de considerar outros pontos de vista, indício de descentração, que pode contribuir com o desenvolvimento de autonomia intelectual. Ainda, para "*tomar a iniciativa de aprender fora da sala de aula*", é preciso ter reconhecida a vantagem disso em relação à resolução de atividades que o professor determina, depois avalia. Ao reconhecer essa possibilidade, o aluno organiza seu estudo e desenvolve autonomia (PIAGET, 1974).

Além disso, a preocupação em "*entender o por quê de se usar o conceito*", manifestada no segundo depoimento do Extrato 5, conforme a resposta à quinta pergunta, já denota uma importante condição para a construção do conhecimento matemático, relacionada aos significados dos conceitos, geralmente traduzidos por fórmulas ou algoritmos. De fato, sem tal compreensão, o conhecimento matemático pode ser visto como o conjunto de tais fórmulas ou algoritmos cuja manipulação mecânica de nada serve.

Porém, há outros alunos que também demonstram valorizar a interação e a disposição para envolver-se, como condições de aprendizagem e que também entendem o conhecimento matemático como algo mais do que um conjunto de exercícios, conforme se observa no depoimento selecionado para o Extrato 6.

Extrato 6: “Condições de aprendizagem” e “Conhecimento matemático”

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:43 pm

1) Sim, pois é uma ciência cheia de desafios e exata; e o mais importante é que tudo pode ser comprovado através de cálculos ou gráficos, pra tudo há um porquê.
2) Lendo o livro e sempre fazendo os exercícios solicitados pelo professor e às vezes estudando em grupo.
3) Confesso que nunca estudava extra-classe, sempre procuro me concentrar o máximo que eu posso na aula; como uma maneira de otimizar o tempo.
4) Participar do fórum de discussões, sempre discutindo minhas dúvidas.
5) Não tenho dificuldade em matérias específicas de matemática, talvez no fato de realmente compreender o uso de certas fórmulas e operações; não ser uma estudante robô que somente executa uma seqüência de tarefas, mas que compreenda isso.
6) Atualmente mudei bastante minha maneira de proceder em relação a isso e tenho me dedicado sempre, durante todo o semestre.
[...]

A disposição manifestada de “*participar do fórum de discussões*” para discutir sobre suas dúvidas, provavelmente tem relação com sua curiosidade sobre os “*porquês*” da Matemática. Para esse estudante, o conhecimento matemático não é “*uma seqüência de tarefas*”; parece entender que requer construção e que faz parte do desenvolvimento do ser humano como, fundamentalmente, um processo lógico-matemático de complexidade crescente (BECKER, 1999). No caso do depoimento, “*compreender o uso de certas fórmulas e operações*” já assinala o início de um processo lógico-matemático, na medida em que isso requer, não somente a compreensão de fórmulas, mas de sua aplicabilidade ou adequação e é na compreensão da ação (aplicação de fórmula) e da coordenação das ações (compreensão da adequação da fórmula) que está a qualidade de uma experiência lógico-matemática.

No Extrato 7, a seguir, também é possível observar essa qualidade do conhecimento matemático, já evidenciada na concepção do estudante, porém numa perspectiva determinada por sua ação, como num processo de centração, quando apenas a perspectiva própria é considerada.

Extrato 7: "Condições de aprendizagem" e "Conhecimento matemático"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:43 pm

1) Talvez a matemática não seja minha futura profissão ou pelo menos a principal, mas com certeza terá muito uso nela. Por esse motivo, invisto na matemática e também gosto da área. Li documentários sobre a matemática e o cotidiano e aprendi sua importância no dia a dia moderno, sua aplicabilidade. Gosto da matemática.
2) As aulas não eram práticas, mas sempre que possível procurava uma aplicabilidade da matéria no dia a dia.
3) Até o segundo ano do ensino médio, estudava dessa forma. Já no último, com a proximidade do vestibular, passei a estudar de forma diferente, o que me fez gostar ainda mais da área.
4) Pretendo – e vou me esforçar para conseguir – estudar não só a teoria, mas sua aplicabilidade, principalmente na informática; minha área.
5) A memorização de alguns conceitos e o entendimento mais a fundo nas questões que ocorrem no vestibular, que costumam fugir do padrão escolar.
6) A princípio, tendo a me virar; tento fazer sozinho.
[...]

Todas as suas respostas apresentam uma tendência à indiferenciação, em razão da supremacia da perspectiva própria, conforme Montangero e Naville (1998), até mesmo diante da possibilidade sugerida pela sexta pergunta, quanto a procurar auxílio para suas dúvidas: "*tendo a me virar; tento fazer sozinho*". Essa tendência pode ser caracterizada como um processo de centração, que é exercido sobre suas ações, sem crítica nem relativização. Sabe-se que a aquisição de um conjunto de conhecimentos requer contínuas reorganizações a partir de relações já estabelecidas, isto é, por um processo de contínuas descentrações a partir de centrações prévias (PIAGET apud MONTANGERO; NAVILLE, 1998). Entretanto, outros indicadores relacionados às condições de aprendizagem são identificados neste depoimento, como o interesse e a disposição para o estudo: "*estudar não só a teoria, mas sua aplicabilidade* [...] *na informática, minha área*".

As respostas às perguntas 7, 8 e 9, mencionadas no Extrato 2, que se passa a analisar a seguir, contêm importantes indicadores relacionados às concepções dos alunos sobre seu papel e o papel do professor em ambientes de aprendizagem.

Extrato 8: "Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:34 pm

[...]
7) Não (dependemos somente dos professores para aprender), deve haver interesse do aluno também.
8) (O papel do aluno é) aprender o que for passado pelo professor.
9) (O papel do professor é) passar ao aluno o que lhe foi solicitado.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:34 pm

[...]
7) Sim, com certeza sozinhos seria muito mais difícil aprender.
8) (O papel do aluno é) estudar, aprender e procurar ajuda de seu professor sempre que necessário.
9) (O papel do professor é) auxiliar o aluno em seus estudos.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:35 pm

[...]
7) Acredito que os professores são muito importantes para o aprendizado pois nos colocam exemplos que muitas vezes não encontramos em livros. Outro ponto forte do professor é a didática que é muito melhor do que qualquer livro.
8) O papel do aluno é se empenhar e buscar maior conhecimento naquilo que lhe é proposto.
9) O papel do professor é sanar as dúvidas do aluno e lhe apresentar uma didática de fácil compreensão, sem se deter muito a livros e sim com uma visão própria.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:35 pm

[...]
7) Acho muito importante o papel do professor na aprendizagem, pois sem ele não saberíamos nem como começar. Primeiramente temos que nos conscientizar que somos estudantes.
8) O papel do aluno não é somente ir pra sala de aula sentar numa cadeira e esperar pelo professor. Ele está lá para nos auxiliar da melhor forma possível, nos mostrando qual a maneira certa de fazermos as coisas. A partir daí o aluno, se tiver interesse, irá buscar as informações necessárias para melhorar seu aprendizado.
9) Já respondido acima.
[...]

O conhecimento está no professor, mesmo que, nos quatro depoimentos acima, se encontre, na concepção do papel do aluno, o reconhecimento da importância do seu *querer*: "*deve haver interesse do aluno também*", "*procurar ajuda*", "*se empenhar*" e "*buscar as informações necessárias*", respectivamente. Porém, a causa da aprendizagem está no professor, não na atividade do aluno. A dependência do professor, revelada pela afirmação de que o aluno deve buscar maior conhecimento "*naquilo que lhe é proposto*", sendo que o professor deve "*apresentar uma didática de fácil compreensão*" e mostrar "*qual a maneira certa de fazermos as coisas*", revela a concepção de que o conhecimento deve ser ampliado a partir do que o professor apresenta.

Extrato 9: "Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:38 pm

[...]
7) Não (dependemos somente do professor para aprender), acho que temos vários meios de aprender, afinal, há um mundo de possibilidades de auxílio e complementação de sua pesquisa, mas considero o professor o alicerce para um bom aprendizado.
8) (O papel do aluno) É o papel de questionador, não no sentido de contrariar, mas de crescer.
9) (O papel do professor) Gerenciar o estudante, tanto nas matérias específicas, quanto nas formas de estudar, ensinar, e não somente "passar a informação", para podermos realmente compreender o porquê de certa fórmula, por exemplo, e não somente decorá-la.
[...]

Para esse aluno, ainda que se assuma como sujeito da aprendizagem, que pode complementar sua pesquisa e que questiona, é o professor quem tem o conhecimento, tanto das fórmulas quanto dos respectivos significados, além das "*formas de estudar*". Sua resposta revela a convicção (generalizada, de acordo com Piaget, 1974) de que o ensino de Matemática dispensa o conhecimento de como as noções se constroem, bastando o conhecimento de fórmulas ou algoritmos práticos ainda que com os devidos porquês.

Extrato 10: "Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:36 pm

[...]
7) Com certeza, não dependemos somente dos professores para aprender, precisamos acima de tudo ter vontade e dedicação partindo de nós mesmos.
8) Cabe ao aluno prestar atenção, realizar as atividades propostas e esclarecer as dúvidas que surgem.
9) Ao professor cabe o papel de orientar o aluno ao longo da matéria, esclarecendo as dúvidas e propondo atividades para facilitar a compreensão da matéria.
[...]

Aqui a concepção sobre o papel do aluno está baseada apenas em comportamentos: *"prestar atenção e realizar as atividades propostas"*; quanto a "*esclarecer as dúvidas*" está mais na dependência do seu interesse, afirmando que *"precisamos, acima de tudo, ter vontade e dedicação partindo de nós mesmos*". O papel do professor, aqui também, visto como o detentor do conhecimento, deve ser o de facilitador, "*propondo atividades para facilitar a compreensão da matéria*". Não existe, conforme essas respostas, a possibilidade de o professor não saber. Ao contrário, o professor sabe e deve organizar o conteúdo para que fique mais fácil. Com dedicação e vontade, bastará cumprir as tarefas determinadas pelo professor para aprender. Mesmo que seja por pouco tempo, pois, assim como Piaget (1974), todos sabemos que pouco resta dos conhecimentos adquiridos na escola, cinco, dez ou vinte anos após o término do Ensino Médio. O próprio aluno, no contexto desta pesquisa, já deve saber disso, considerando que *aprendeu* tantos conceitos, algoritmos e procedimentos matemáticos que, no entanto, não estão consolidados. Então para que serviram? Melhor seria que tivesse sido orientado de acordo com sua curiosidade e interesse. É preciso que o aluno experimente, conforme sugere Piaget (1974), a satisfação de conquistar por si mesmo um certo saber, com a aquisição de um método que lhe será útil por toda a vida e aumentará permanentemente sua curiosidade, sem o risco de estancá-la.

Extrato 11: "Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:41 pm

[...]
7) Não (dependemos somente dos professores para aprender). Eu sou muito auto-didata. Eu acho importante um professor mas não tudo.
8) Estudar e esgotar o professor de perguntas.
9) O professor tem um papel que vai além de ensinar a sua disciplina, que é também ajudar o aluno a criar uma consciência e um senso crítico.
[...]

Nesse depoimento, fica evidente uma dimensão que vai além do conteúdo da disciplina. Para Freire (2001) faz parte da tarefa docente não apenas ensinar os conteúdos mas também ensinar a pensar certo. Para isso, uma das condições necessárias é não estarmos demasiado certos de nossas certezas [...] deixar transparecer aos educandos que uma das belezas de nossa maneira de estar no mundo e com o mundo, como seres históricos, é a capacidade de, intervindo no mundo, conhecer o mundo. O depoimento do estudante revela a busca do conhecimento num sentido mais amplo, *não o conhecimento do professor*, como manifestado em outros depoimentos. A sua visão parece estar aberta ao desenvolvimento do pensamento crítico quando manifesta sua disposição para discussão: "*esgotar o professor de perguntas*", assumindo a responsabilidade por sua aprendizagem: "*estudar*" com o auxílio do professor, que deve "*ajudar o aluno a criar uma consciência e um senso crítico*".

Extrato 12: " Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:43 pm

[...]
7) Não dependemos só dele (professor) mas se ele explica bem não é necessário nada mais.
8) O papel do aluno é aprender através do seu estudo e questionamentos.
9) De auxiliar o estudo do aluno.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:43 pm

[...]
7) Não (dependemos somente do professor para aprender).
8) (O papel do aluno) É aprender o máximo possível.
9) (O papel do professor) Ensinar de modo que o aluno aprenda facilmente.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:43 pm

[...]
7) Quase que 95% (dependemos do professor).
8) (O papel do aluno) Estudar.
9) (O papel do professor) Ensinar.
[...]

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

[...]
7) Não (dependemos somente) do professor, mas do método de exposição da matéria e do comprometimento do aluno.
8) (O papel do aluno é) Estudar a matéria e tirar as dúvidas.
9) (O papel do professor é) Ensinar e tirar as dúvidas.
[...]

Nos depoimentos selecionados para o Extrato 12, a semelhança é sutil, isto é, embora aparentemente diferentes, as respostas parecem estar apoiadas na mesma concepção: o professor ensina e o aluno aprende. É preciso criar estratégias para que os alunos superem essa concepção originada, provavelmente, ao longo de sua história. Conforme Freire (2001), toda prática educativa demanda a existência de sujeitos, um que, ensinando aprende, outro que, aprendendo ensina. É preciso que estejamos atentos ao que o aluno tem para nos ensinar, porém é imprescindível que este esteja consciente dessa possibilidade. Quanto ao ato de aprender, que compete a ambos, professor e aluno, trata-se de construir, reconstruir, constatar para mudar, enfim, uma aventura criadora e, por isso mesmo, muito mais rico do que meramente repetir a lição dada.

Uma concepção de aprendizagem, em que o aluno se coloca como sujeito ativo no processo fica mais evidenciada nos depoimentos selecionados no Extrato 13.

Extrato 13: "Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:44 pm

[...]
7) Não (dependemos somente dos professores para aprender). O ensino é uma via de mão-dupla; o professor ensina mas o aluno tem de querer aprender.
8) (O papel do aluno) Estudar, perguntar, sugerir, pesquisar, participar, interagir com os demais colegas e o professor.
9) (O papel do professor) Ensinar, interagir com os alunos, esclarecer dúvidas e estar aberto aos possíveis ensinamentos dos alunos.
[...]

Nesse depoimento o aluno deixa transparecer a disposição ao envolvimento, ao assumir a responsabilidade de *"estudar, perguntar, sugerir, pesquisar, participar, interagir com os demais colegas e o professor"*. Compete ao professor, além de *"ensinar, interagir com os alunos, esclarecer dúvidas e estar aberto aos possíveis ensinamentos dos alunos"*, estar atento à *coerência entre o que dizemos e o que fazemos*. E o aluno também precisa compreender a importância dessa relação, de modo que possa ser bem-sucedido.

Para que o professor possa interferir, auxiliando no desenvolvimento cognitivo do aluno, é preciso que ambos, professor e aluno, sejam criadores, instigadores, inquietos, rigorosamente curiosos, humildes e persistentes. Faz parte das condições, em que aprender é criticamente possível, a pressuposição por parte dos educandos de que o educador já teve ou continua tendo experiência da produção de certos saberes, e que estes não podem a eles (os educandos) ser simplesmente transferidos. Ao contrário, nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo (FREIRE, 2001).

Extrato 14: "Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:44 pm

[...]
7) Não (dependemos somente dos professores para aprender), tenho certeza de que deve existir uma relação professor aluno onde a contribuição e dedicação do aluno deve ser superior a do professor.
8) (O papel do aluno) Buscar auxílio, tirar suas dúvidas e questionar sempre que considerar oportuno. Sentir-se plenamente satisfeito com o conhecimento recebido.
9) (O papel do professor) Auxiliar o aluno, oferecer a este condições para que ele se sinta a vontade para questionar.
[...]

Esse depoimento revela uma concepção de que não vale a pena estudar por estudar. Parece ser importante "*Sentir-se plenamente satisfeito com o conhecimento recebido*". De fato, se houver "*condições para que ele se sinta à vontade para questionar*", isto será possível, a partir de uma postura aberta: do professor, valorizando e incentivando a reflexão crítica e do aluno, não pensando criticamente apenas sobre os conteúdos programáticos mas, ao mesmo tempo, sobre a maneira mais aberta, dialógica, ou mais fechada, autoritária, com que este ou aquele professor ensina (FREIRE, 2001). É preciso que o aluno compreenda que o conhecimento é construído (não *recebido*) e é conseqüência de ação, de intervenção questionadora, buscando a compreensão.

Extrato 15: "Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:46 pm

[...]
7) Acredito que o aluno e o professor são responsáveis por um bom rendimento e aproveitamento da disciplina, e acho importante que o professor saiba passar para o aluno onde e como irá aplicar certos cálculos no seu dia a dia.
8) (O papel do aluno é) Exercitar as atividades executadas em sala de aula e esclarecer eventuais dúvidas com o seu professor.
9) (O papel do professor é) Esclarecer dúvidas do aluno e principalmente saber passar seu conhecimento com qualidade para que o aluno compreenda o porque de estar estudando determinada matéria.
[...]

No depoimento anterior, o aluno declara sua concepção sobre aprender através de treinamento, na medida em que considera como sua tarefa "*exercitar as atividades executadas em sala de aula*". Novamente se justifica, com o apoio de Freire (2001), que formar é muito mais do que puramente treinar o educando no desempenho de destrezas. Daí a necessidade de que esse educando assuma uma postura mais crítica, reconhecendo que o *exercício* necessário pode ser aquele que leva em consideração as atividades realizadas em sala de aula, mas de forma a analisá-las, compreendendo seu significado e identificando possibilidades de aplicá-las em novas situações. Para que isso seja possível, é preciso que o professor esteja atento às intervenções que, oportunamente, podem permitir que o aluno reveja suas concepções.

Extrato 16: "Papéis do professor e do aluno"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:34 pm

[...]
7) Não (dependemos somente dos professores para aprender).
8) O papel do aluno deve corresponder por uma pessoa esforçada, dedicada com autonomia no pensar e responsabilidade no agir.
9) O papel do professor deve ser mais de guia, tentando fazer com que o aluno pense com autonomia.
[...]

O desenvolvimento da autonomia é uma das metas de uma educação de qualidade. Ao demonstrar o reconhecimento da autonomia como uma de suas responsabilidades, o educando revela, no extrato acima, sua independência da palavra do professor quanto ao que está certo ou errado, o que deve ler ou como deve estudar. O professor, no papel de "guia" pode, então, orientá-lo a partir de suas decisões, concordando, problematizando, questionando, incentivando, *cooperando*, no sentido dado por Piaget (apud MONTANGERO; NAVILLE, 1998), isto é, sem a intervenção de qualquer elemento de autoridade ou de prestígio.

Quanto ao *papel do diálogo*, este é evidenciado na última resposta ao questionário em que, praticamente, todos os alunos apresentam expectativas positivas quanto à sua realização, através do fórum, como forma de esclarecer dúvidas, respondendo à pergunta:

Você acredita que poderemos utilizar este canal (o fórum) para esclarecer dúvidas? Por quê?

Algumas respostas não serão discutidas, apenas mencionadas, pois se trata de respostas vagas, dificultando sua análise. Porém é possível confirmar a presença marcante da expectativa positiva quanto à utilização do fórum, em justificativas como: "*pela sua agilidade*", "*todo tipo de auxílio é bem-vindo*", "*é uma forma dinâmica que podemos utilizar não somente na universidade*", "*maneira fácil de tirar as dúvidas com o professor fora do horário de aulas*", "*pois é um canal aberto a todos e de fácil acesso*", "*estamos na era da informática*" ou "*para abreviar o tempo da dúvida*". Entretanto, observa-se freqüentemente a concepção do fórum com um fim prático e não como possibilitador de uma comunidade de pensamento.

As raras exceções foram observadas em respostas duvidosas quanto aos benefícios do fórum, justificadas pela "*inexperiência com recursos da internet*", ou em sua "*utilização para tal finalidade*", ou mesmo "*pela impossibilidade de esclarecer dúvidas a distância*". Não se pode deixar de mencionar, contudo, que a sua agregação aos ambientes de aprendizagem não interferiu na quantidade de diálogos em sala de aula, porém, e muito, na sua qualidade, conforme uma análise comparativa realizada durante a evolução da pesquisa.

Ainda que a pergunta feita não se referisse ao termo *diálogo*, na concepção entendida nesta pesquisa,[41] as respostas selecionadas para análise revelam alguns indicativos do reconhecimento de aspectos interativos do fórum, conforme se pode observar nos depoimentos destacados na análise, por considerá-los de maior relevância no presente estudo.

---

[41] Ver seção 3.3.

Extrato 17: "Papel do diálogo"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

[...]
10) Com certeza, pois as dúvidas geralmente são de vários alunos.

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:37 pm

[...]
10) Sim, porque conseguiremos adquirir e trocar conhecimento.

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

[...]
10) Sim. Porque não precisamos esperar até a próxima aula para resolvê-las e também porque talvez não seja uma dúvida só nossa e já tenha sido discutida.

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

[...]
10) Sim, pois é uma maneira de solucionar as dúvidas e todos podem ajudar.

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

[...]
10) Se esse canal conter material de qualidade, sem dúvida será um excelente meio de comunicação e um ótimo acervo pra todos os alunos e para o professor.

Entende-se que as manifestações desses alunos apontam para uma concepção que valoriza o caráter interativo do fórum, evidenciado por expressões como "*discutir dúvidas de vários alunos*", "*adquirir e trocar conhecimentos*", "*talvez não seja uma dúvida só nossa*", "*todos podem ajudar*" ou "*ótimo acervo para alunos e para o professor*". De fato, tal recurso em ambientes telemáticos construídos com uma concepção construtivista de conhecimento e de aprendizagem, permite que as discussões iniciadas em sala de aula possam ser concluídas ou aperfeiçoadas a distância, com a participação de todos os interessados. Ou mesmo, atividades de complementação podem ser programadas e discutidas à distância, conforme será demonstrado na subseção 5.2.2. Entretanto, para isso é necessária a valorização da participação como uma atividade cooperativa que pode promover aprendizagem.

Conseqüentemente, e de acordo com as respostas analisadas anteriormente, existe o receio de aceitar o convite e isso foi possível observar quando desta análise também.

Extrato 18: “Papel do diálogo”

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:33 pm

[...]
10) Sim, no entanto é muito difícil, pois estamos no 1º. semestre e com um pensamento ainda de estudante de 2º. Grau.

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:37 pm

[...]
10) Sim, apesar de acreditar q dúvidas devem ser esclarecidas pessoalmente.

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

[...]
10) Sim. Porque poderemos enviar as dúvidas a qualquer momento. Mas é muito importante que o professor explique utilizando o quadro para ficar mais fácil de entender.

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:47 pm

[...]
10) Acho que o melhor canal para esclarecer dúvidas sempre será ao vivo e a cores.

A expressão que faz referência a “*um pensamento ainda de estudante de 2º. Grau*” pode estar relacionada a uma concepção tradicional de aprendizagem, fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, incompatível, portanto, com atividades que requerem a participação ativa do aluno. As respostas que apontam para dificuldades de esclarecer dúvidas através do fórum, podem estar relacionadas à própria dificuldade de *perguntar*. Para esses alunos, provavelmente, para esclarecer dúvidas relacionadas à Matemática, é preciso *assistir* o professor resolvendo exercícios, até porque dúvidas, nesse caso, estão sempre ligadas às manipulações algébricas de fórmulas ou algoritmos, sem a necessidade de compreendê-los (PIAGET, 1974). Isso é possível concluir também ao analisar o Extrato 19.

Extrato 19: “Papel do diálogo”

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:33 pm

[...]
10) Sim, mas acredito que muitas vezes o aluno terá dificuldades em transcrever sua dúvida para uma simples pergunta. Apesar disto, acredito que aluno e professor podem interagir de uma melhor maneira e poderão ter um contato melhor extra aula.

A dificuldade em traduzir uma dúvida revela que não há, ainda, compreensão suficiente, sequer para referir-se ao tema em questão. Isso é freqüentemente observado, quando conversamos informalmente sobre Matemática e o aluno não consegue dizer sequer sobre qual assunto está estudando. Às vezes citam alguma fórmula para referir-se ao que estão estudando. No caso do Extrato 19, não é o fórum que pode dificultar a expressão da dúvida mas a falta das noções fundamentais que lhe permitam questionar.

Quanto aos alunos que já tiveram a oportunidade de utilizar o recurso de fórum em disciplinas anteriores, sua avaliação é positiva, como se pode observar a partir da análise do Extrato 20.

Extrato 20: “Papel do diálogo”

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Em resposta a: Para refletir e responder
Próxima Mensagem: Re: Para refletir e responder

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:30 pm

[...]
10) Eu já comprovei por experiência pessoal que é realmente de muito bom proveito esse fórum de discussões; é uma maneira rápida e eficiente de tirar as dúvidas, não tendo de esperar até a próxima aula e interagindo com os colegas.

Re: Para refletir e responder
Autor:
Data: Aug 5, 2002 9:30 pm

[...]
10) Sem dúvida, com o MECAM aprendi que podemos esclarecer dúvidas com o fórum muito mais rápido e prático, do que ficar perdendo muito tempo buscando monitoria ou esperando a próxima aula. Acho muito importante também quando os colegas participam porque assim é um meio de expressar as opiniões de cada um e assim criar um verdadeiro “fórum”, criando discussões úteis e legais.

De forma geral, nos Extratos 17 a 20, com relação a discutir sobre Matemática, também se observou, na melhor das hipóteses, a expectativa de receber respostas rapidamente e não de levar em consideração outras idéias, salvo pelo último depoimento do Extrato 20. Por um lado, o reconhecimento da utilização do fórum com benefício para a aprendizagem, conforme observado na maioria dos depoimentos, é positivo, pois para utilizá-lo é necessário agir, o que é condição de aprendizagem. Por outro lado, o que se pretende é muito mais do que isso. É preciso que seja utilizado como um recurso que possibilite a cooperação em atividades de discussão e não apenas para perguntas e respostas isoladas.

A análise realizada até aqui, ainda que baseada em respostas às questões iniciais, fornece indicadores para a promoção dos diálogos no decorrer da disciplina ou do curso. A própria reflexão sobre tais questões é provocadora e até mesmo sua simples leitura, por parte dos alunos, pode contribuir para torná-los cientes de concepções que fundamentam as propostas metodológicas da pesquisadora. Acredita-se, como Becker (2001), que o aluno somente aprenderá alguma coisa, isto é, construirá algum conhecimento novo, se ele agir e problematizar sua ação.

Dessa forma entende-se que, além de estar exercendo uma curiosidade própria, inquietante, que projeta na busca do aprender e do ensinar, se está problematizando para que os alunos assumam-se como co-autores dos ambientes a serem desenvolvidos. Não se pretende promover um vai-e-vem de perguntas e respostas. Assim como um monólogo, uma resposta, ou conjunto de respostas, como as analisadas nos Extratos 3 a 20, pode constituir-se como *fechamento da consciência*, uma vez que consciência é abertura. Entretanto, momentos de solidão (não de isolamento), de reconhecimento de si mesmo, como sujeito responsável pela sua própria aprendizagem, também podem promover a socialização que é uma condição para a efetivação dos diálogos. A natureza social desse processo faz da dialogicidade uma relação natural a ele. Mesmo assim, a dialogicidade não nega a validade de momentos explicativos. Nesse caso, a análise, realizada nesta fase inicial do processo, caracteriza uma postura epistemologicamente curiosa que, conforme Freire e Freire (2001), diferentemente da curiosidade ingênua, é metodicamente rigorosa. Isto é, constitui a passagem do conhecimento em nível do *senso comum* para o do conhecimento científico. A referência é aos *achados* da busca inicial, fundamentais para a constituição do contexto de aprendizagem; não são *respostas a perguntas que não foram feitas*, tampouco *opiniões* que, para Bachelard (2001) opõem-se à Ciência: a opinião está sempre errada, pensa mal, não pensa, traduz necessidades em conhecimentos. Entretanto, ao examiná-los criticamente se pode continuar a busca, porém, levando-os em consideração na criação de ambientes, onde se possa *escutar*, *desafiar*, *apoiar* e *encorajar* os alunos, em contextos de aprendizagem de Matemática que levem em consideração os obstáculos pedagógicos evidenciados.

Esses, de modo geral, como se viu, revelaram alunos submissos, dependentes do professor, que concebem a Matemática como um conjunto de destrezas cuja aplicação requer o devido treinamento, sob o comando do professor, visto como o detentor do conhecimento que deve ser passado ao aluno. Ou seja, o conhecimento é um conjunto de saberes, fechado e estático e dá-se na sala de aula. Para mudar esse cenário é preciso, pois, criar situações que promovam desenvolvimento epistemológico. São situações que podem ser organizadas com a realização de diálogos, por meio dos quais se procura destacar a importância de uma postura aberta, dinâmica, curiosa, indagadora e de que todos, professores e alunos, assumam-se *epistemologicamente curiosos* (FREIRE, 2001). Conforme as hipóteses deste estudo,[42] à medida que suas concepções epistemológicas se modificam, assim também seu autoconhecimento, suas funções, seus papéis, como alunos e como seres humanos, podem ser revistos, o que certamente traz benefícios em termos de aprendizagem de Matemática, conforme a análise apresentada nas seções 5.2.2 e 5.2.3. Dessa forma justifica-se a análise inicial: “o diálogo começa na busca do conteúdo programático”. Assim como Freire (2003), o conteúdo programático não pode ser imposto ao aluno, sem que se reflita sobre as condições sob as quais o diálogo será possível ou o sobre *o que* iremos dialogar, ao construir os conceitos matemáticos.

5.2.2 Diálogos matemáticos

As atividades dos alunos, não o conteúdo apresentado pelo professor, são o ponto central dessa proposta pedagógica, de acordo com a concepção que a fundamenta. Acredita-se que uma importante fonte de aprendizagem está nas contribuições apresentadas pelos alunos, embasadas em suas próprias experiências e pré-conceitos. Assim sendo, os *diálogos matemáticos* têm sempre como ponto de partida atividades de estudo. A partir de respostas apresentadas num primeiro momento e levando em consideração os conhecimentos então demonstrados, é possível investir no aperfeiçoamento ou aprofundamento dos conceitos de

[42] Explicitadas na seção 2.4.

interesse na disciplina ou no curso. Um ponto de destaque dessa metodologia consiste na possibilidade de identificar as dificuldades de cada aluno e, em cada caso, promover a (re)construção de conhecimentos, levando em consideração os que ele já possui. Os *diálogos matemáticos* constituem-se, assim, como conversações inspiradas no Método Clínico,[43] proposto por Piaget. Nele, o aluno, além de resolver um problema analiticamente, auxiliado ou não por computador, tem a tarefa de justificar seus procedimentos e analisar os resultados obtidos no contexto da situação envolvida.

Cabe ressaltar que não se pretende nem seria possível, com os diálogos apresentados, abordar com o devido rigor os conceitos matemáticos envolvidos nos mesmos. Ao contrário, entende-se que os diálogos são promovidos procurando levar em consideração o estágio de desenvolvimento, o interesse, a necessidade e as possibilidades dos alunos nesse contexto. Além disso, encontra-se em D'Ambrosio (1986, p. 23) elementos que ajudam a justificar a maneira como se conduzem os diálogos:

> [...] sensibilidade para rigor matemático é algo que se adquire, que se sente após alguma vivência com Matemática, e que surge naturalmente com o desenvolvimento do que poderíamos chamar "intuição para rigor". [...] A ênfase está em despertar no estudante curiosidade e espírito inquisitivo que, aliado a algum gosto pelo assunto, o motivará a procurar tratamento mais aprofundado e rigoroso. [...] O quanto de profundidade e de rigor é atingido no tratamento de qualquer assunto matemático, depende única e exclusivamente do indivíduo que está se exercitando na procura desse assunto.

Muitas questões são esclarecidas e passam a fazer parte de *nosso conhecimento*, quando são de nosso interesse, quando surgem como um questionamento, uma necessidade nossa e não durante uma exposição em sala de aula, ou mesmo em outra atividade que não tenha sido desencadeada nessas condições. Com esses pressupostos é que são desenvolvidos os diálogos matemáticos. Ao adotar uma linguagem simplificada, no início do processo, é possível eliminar dificuldades, tratando os conceitos, inicialmente, de forma experimental, o que não impede, ao contrário, espera-se que propicie seu tratamento com o devido rigor e

---

[43] O Método Clínico é um método de conversação livre sobre um tema dirigido pelo interrogador que segue as respostas da criança, que lhe pede que justifique o que diz, explique, diga por que, que lhe faz contra-sugestões, etc. "Seguindo a criança em cada uma de suas respostas, depois, sempre guiado por ela, fazendo que fale cada vez mais livremente, acaba-se por obter, em cada um dos domínios da inteligência (lógica, explicações causais, função do real, etc.) um procedimento clínico de exame análogo ao que os psiquiatras adotaram como meio de diagnóstico" (PIAGET, apud DOLLE, 1981, p. 25).

formalismo, com maior profundidade, quando o aluno estiver em condições e tiver interesse em sua devida apreciação. Conforme Lima e Sauer (2000), acredita-se que o professor, como bom explorador de idéias, deve reunir algumas qualidades como: saber observar, deixar que o aluno expresse fielmente seus saberes, incentivando-o e procurando nas respostas por algo precioso: quando corretas, por relações, em níveis mais complexos ou complementares, que pode estabelecer a partir delas e, quando incorretas, por argumentos questionadores, de análise e discussão. Assim poderá, realmente, auxiliar o aluno na aprendizagem significativa da Matemática, isto é, aquela que tem significado[44] para ele. Com efeito, os diálogos promovidos, embora possam parecer superficiais, pretendem marcar o início de um processo que permite resgatar, a partir da fala do aluno, elementos que revelem suas condições de aprendizagem.

Os diálogos selecionados nos Extratos 21 a 23 apresentam discussões desencadeadas por uma das atividades propostas no curso Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I, da primeira edição do Mecam.[45] A mesma refere-se às funções, fundamentais no estudo do Cálculo e possibilitou a análise de algumas, dentre as mais importantes, relativamente às suas formas algébricas e geométricas, auxiliando no desenvolvimento de habilidades de leitura e interpretação de gráficos. O reconhecimento de propriedades elementares, como domínio, imagem, crescimento, sinal e módulo, além da exploração de aspectos relacionados à construção de novas funções, a partir de operações algébricas e movimentos de seus gráficos, como transladar, refletir e esticar, também foi possível. A atividade foi proposta nos seguintes termos:

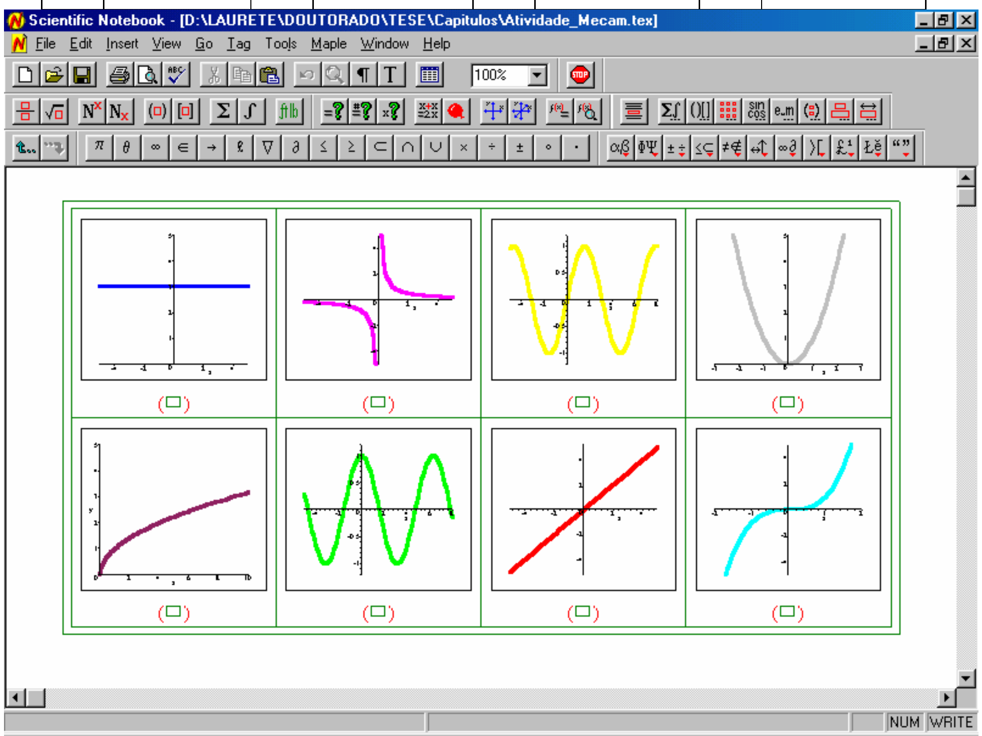
---

[44] Conforme apresentado na seção 4.1, de acordo com Skovsmose: *significado* não é somente uma característica das ações ou dos conceitos, mas também dos motivos das ações, o que inclui o contexto para localizar o objetivo de uma ação realizada pelo aluno na aula de Matemática.

[45] Disponível em: <http://www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam>.

Associe cada uma das funções dadas, ao respectivo gráfico, enumerando-o de acordo com a função que ele representa.

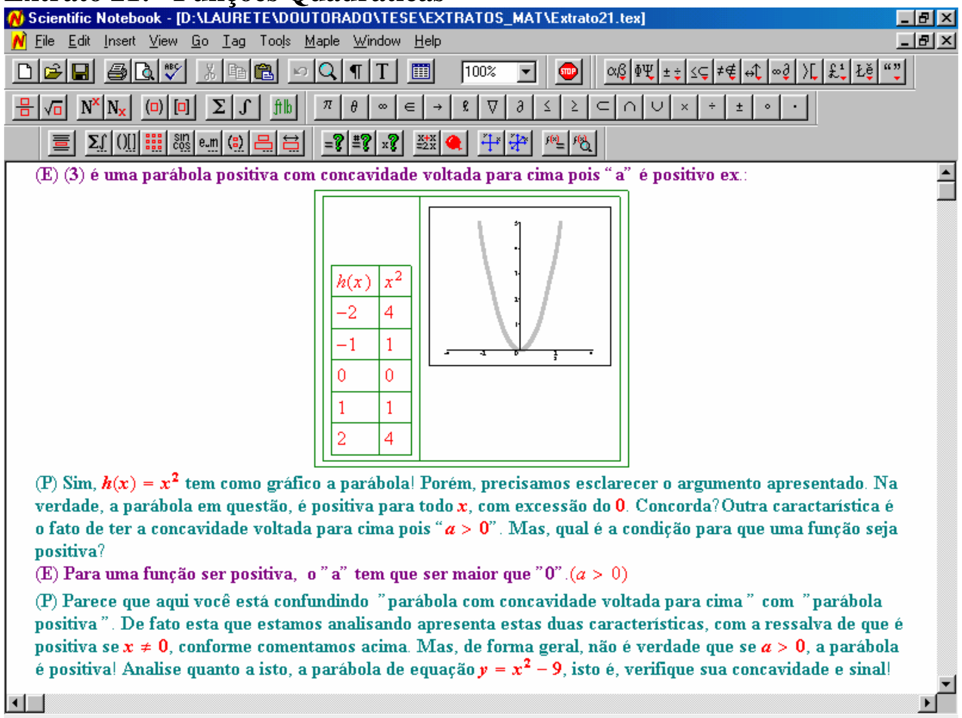
(1)	$f(x) = 3$	**(2)**	$g(x) = x$	**(3)**	$h(x) = x^2$	**(4)**	$l(x) = x^3$
(5)	$m(x) = \dfrac{1}{x}$	**(6)**	$n(x) = \sqrt{x}$	**(7)**	$p(x) = senx$	**(8)**	$q(x) = cosx$



A seguir, escreva um argumento que justifique a opção feita, em cada caso.

Essa atividade gerou uma série de diálogos, relacionados a cada uma das funções envolvidas, dos quais selecionaram-se alguns para analisar neste estudo. Estes se referem à função quadrática, definida por $h(x) = x^2$ e corretamente relacionada ao respectivo gráfico por todos os alunos que participaram. Entretanto, e isto justificou o interesse em selecioná-los, foi possível evidenciar, a partir dos argumentos apresentados para justificar a escolha, diferentes níveis de conhecimento, relacionados à tomada de consciência, conforme a análise realizada.

Extrato 21: "Funções Quadráticas"



Nesse diálogo entre professora (**P**) e aluno (**E**), a justificativa apresentada inicialmente, de que "*a parábola é positiva e com concavidade voltada para cima pois 'a' é positivo*", no mínimo já requer o esclarecimento, com a devida justificativa, das duas afirmações feitas. Ora, uma parábola pode ser positiva ou negativa, independentemente do coeficiente "*a*", referido na resposta apresentada. Quanto à sua concavidade, esta sim está relacionada ao coeficiente mencionado. Assim, a continuação do diálogo revela a incompreensão de conceitos que, muito provavelmente já lhe foram *ensinados*. Afirma-se isso porque a função quadrática é tema presente em todos os programas de Ensino Fundamental e Médio. Os conceitos referidos são os de concavidade e sinal de uma parábola e, neste último aspecto, de uma função em geral, cuja ausência já é possível observar no Extrato 21. Nesse caso, de acordo com as subcategorias evidenciadas, observa-se, de início, um primeiro nível de *ação sem conceituação*, conforme Piaget (1977a), ao relacionar, corretamente, a função quadrática ao respectivo gráfico sem, contudo, saber por quê. Além disso, a primeira problematização recebida como retorno não implicou nenhuma modificação, uma vez que, na segunda resposta dada por **E**, o mesmo argumento foi apresentado, tanto para justificar a concavidade quanto para afirmar que a parábola é positiva: "*pois 'a' é positivo*" ou "*a é maior do que 0*". Isto é, percebe-se claramente que o aluno não tem consciência de que se trata de duas afirmações distintas, que dependem de características distintas.

Porém a segunda problematização o levou a refletir e, conseqüentemente, a identificar dúvidas, o que lhe permitiu perguntar, no fórum, não somente em relação ao tema da discussão naquele momento, como também sobre *crescimento e decrescimento* de uma função, o que ainda não havia surgido na discussão. De fato, além de saber *o que* perguntar, em muitos casos, o próprio receio de manifestar a dúvida pode ser um empecilho ao envolvimento de forma cooperativa, o que já havia sido evidenciado em depoimentos como o que foi analisado no Extrato 19. Porém observa-se, no Extrato 22, que **E** manifesta sua tentativa de superação desse empecilho, quando é imprescindível que seja acolhido, de modo a sentir-se confiante e assim valorize, ele também, sua participação.

Extrato 22: "Crescimento e sinal de uma função"

[Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Mensagem Anterior: Exercício 6d e 10 - Anton página 23
Próxima Mensagem: Atividade 2

Atividade 1
Autor: **E**
Data: Jan 19, 2003 11:26 am

Pode parecer ridícula, mas existe alguma diferença entre uma função ser crescente ou decrescente e ela ser positiva ou negativa? Sinceramente, eu andei procurando respostas, mas não achei. Gostaria de tirar essa minha dúvida.
Obrigado.

Re: Atividade 1
Autor: **Laurete**
Data: Jan 19, 2003 1:23 pm

Olá amigos
Se é que algo pode ser ridículo, neste caso, é ficar com a dúvida por receio de perguntar, não acham? Não há nada mais eficiente na construção do conhecimento, do que a discussão, cooperação /colaboração entre os que estudam determinado assunto. Precisamos aprender a fazer isso e deixar de lado tudo o que possa nos impedir de crescer e construir nosso conhecimento. Lembre-se de que sua dúvida pode impedi-lo de avançar!
Respondo à sua pergunta com um exemplo e você procura esclarecer pesquisando na bibliografia ou no site de apoio. Pode ser?
Pois bem, a função dada por $f(x) = x^2 + 1$ é positiva em todo o seu domínio, o conjunto dos números reais. Mas é decrescente para valores menores do que 0 e é crescente para valores maiores do que 0. Verifique isto! (Sugestão: construa seu gráfico para compreender melhor).
Aguardo suas conclusões.

Re: Atividade 1
Autor: **E**
Data: Jan 19, 2003 4:12 pm

Certo Laurete, encontrei na página 290 as seguintes definições:
Uma função é crescente num intervalo, se para todo *x* deste intervalo, à medida que *x* aumenta, *y* aumenta também. Do contrário, se à medida que *x* aumentar, *y* diminuir, então será decrescente. Uma função é positiva num intervalo, se para todo *x* deste intervalo, *y* for positivo. Será negativa se para todo *x* deste intervalo, *y* for negativo.
É isto?

Re: Atividade 1
Autor: **M**
Data: Jan 20, 2003 9:16 am

Gostaria de acrescentar aqui um comentário, que talvez possa esclarecer essa dúvida, a qual eu tb não tinha raciocinado: Continuando do ponto em que o colega parou, poderíamos dizer que uma função crescente (ou parte) pode ser negativa, se verificarmos que f(x) tem valor negativo (isso não impede que a função cresça) e vice-versa.
Espero ter colaborado.

Re: Atividade 1
Autor: **Laurete**
Data: Jan 20, 2003 11:13 am

Está correto o seu raciocínio, que complementa muito bem a excelente contribuição do colega **E**. Crescimento e sinal de uma função, são características independentes uma da outra. Assim sendo, podemos ter uma função decrescente e positiva num intervalo, ou então crescente e negativa. Vejam, agora, se é possível concluir a respeito da função dada por $y = x^2 - 9$, quanto a isto.

Re: Atividade 1
Autor: **K**
Data: Jan 20, 2003 4:12 pm

Bem, não sei se será de grande ajuda, mas a função dada é decrescente até -9 e crescente depois disto.

Re: Atividade 1
Autor: **Laurete**
Data: Jan 20, 2003 4:53 pm

Bem, o fato de discutir sobre algo que está pensando, em alguns momentos pode ser mais útil para você mesmo do que para os outros. Quando diz que sua contribuição talvez não ajude, isto pode ser verdade somente para quem não está interessado nisso, no momento, mas lembre-se de que sempre será de grande utilidade para você mesmo. Só isso já justifica o grande benefício de sua participação.
Quanto ao seu parecer, por quê não apresenta o gráfico para confirmar? Podemos esclarecer um pouquinho melhor estes conceitos.
[...]

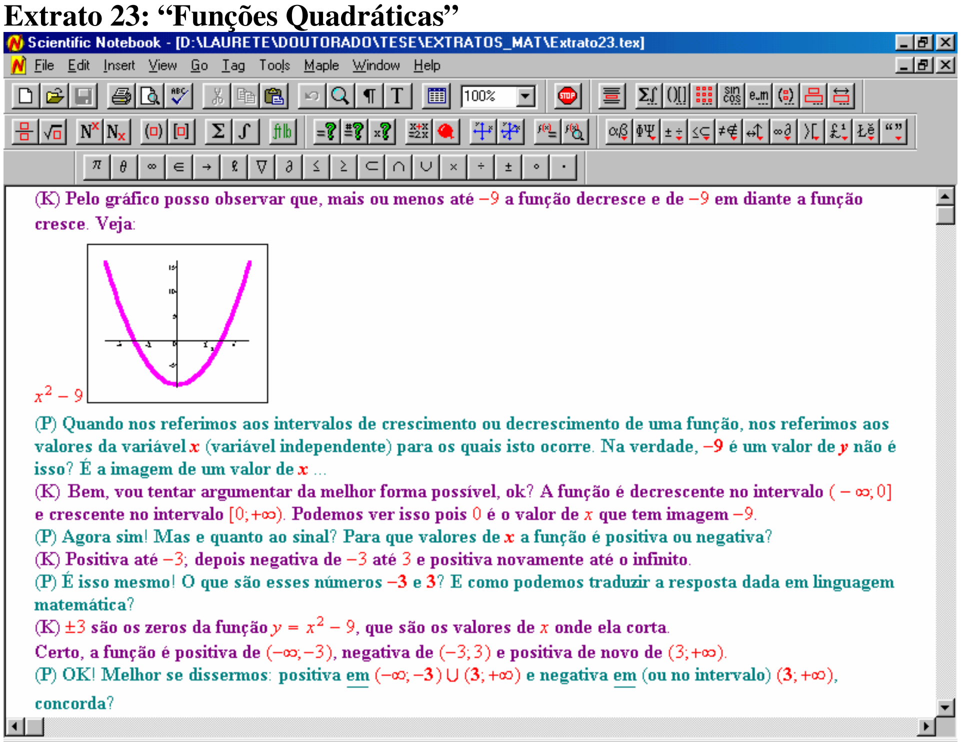
O Extrato 22 mostra o diálogo iniciado a partir das dúvidas do aluno **E**, já envolvido no Extrato 21. Ao relatar suas dúvidas, aceitou o desafio proposto, o que lhe permitiu a conceituação a partir da tomada de consciência (segundo nível) apresentando, com suas palavras,[46] os conceitos de função crescente, decrescente, positiva e negativa o que, sem dúvida, lhe permitiu evoluir na compreensão do significado desses conceitos. Nesse nível, conforme o estudo apresentado na seção 3.2, o sujeito sabe fazer, não sabe explicar, mas, sim, traduzir. Porém, ao se constituir como satisfação de sua própria curiosidade, é possível tornar-se um tema de reflexão e, conseqüentemente, lhe permitir um nível mais elevado de tomada de consciência.

[46] As definições de função crescente ou decrescente, apresentadas na página 290 (ANTON, 2000), conforme relato do aluno, estão em linguagem formal. Além disso, nesta referência não se encontra a definição de funções positivas ou negativas, o que leva a concluir que a fonte para esta foi outra. Além disso, em nenhuma das referências sugeridas para consulta, tais definições são apresentadas exatamente nesses termos.

A intervenção de outros colegas, **M** e **K**, que demonstraram estar acompanhando a discussão, também pode ser observada. O aluno **M** revela, de imediato, estar no mesmo nível de **E**, ao relacionar crescimento ou decrescimento ao sinal de uma função. No caso de **M**, trata-se de uma conceituação operatória, ao coordenar e interpretar diferentes propriedades, característica, já, de abstração reflexionante. Com efeito, de acordo com o estudo apresentado na seção 3.2, esta fica evidenciada quando o aluno **M** relaciona os conceitos que estavam sendo discutidos, concluindo que *"uma função crescente pode ser negativa* [...] *e vice-versa"*.

Quanto ao aluno **K**, observa-se a tomada de consciência no nível da ação, apenas, pois não foi evidenciada, ainda, no nível da tradução ou conceituação da ação. Isso pode ser dito, pois suas conclusões (*"a função dada é decrescente até -9 e crescente depois disso"*) parecem estar baseadas na observação do gráfico, uma vez que -9 é, de fato, o valor que *aparece* no gráfico da função dada, como sendo o seu valor mínimo. Mas aceitou a sugestão de apresentar este gráfico, envolvendo-se na discussão para concluir corretamente quanto aos intervalos de decrescimento e de crescimento da mesma, conforme mostra o Extrato 23.

Extrato 23: "Funções Quadráticas"


Scientific Notebook - [D:\LAURETE\DOUTORADO\TESE\EXTRATOS_MAT\Extrato23.tex]

File Edit Insert View Go Tag Tools Maple Window Help

(K) Pelo gráfico posso observar que, mais ou menos até -9 a função decresce e de -9 em diante a função cresce. Veja:

$x^2 - 9$

(P) Quando nos referimos aos intervalos de crescimento ou decrescimento de uma função, nos referimos aos valores da variável x (variável independente) para os quais isto ocorre. Na verdade, -9 é um valor de y não é isso? É a imagem de um valor de x ...

(K) Bem, vou tentar argumentar da melhor forma possível, ok? A função é decrescente no intervalo $(-\infty;0]$ e crescente no intervalo $[0;+\infty)$. Podemos ver isso pois 0 é o valor de x que tem imagem -9.

(P) Agora sim! Mas e quanto ao sinal? Para que valores de x a função é positiva ou negativa?

(K) Positiva até -3; depois negativa de -3 até 3 e positiva novamente até o infinito.

(P) É isso mesmo! O que são esses números -3 e 3? E como podemos traduzir a resposta dada em linguagem matemática?

(K) ± 3 são os zeros da função $y = x^2 - 9$, que são os valores de x onde ela corta.

Certo, a função é positiva de $(-\infty;-3)$, negativa de $(-3;3)$ e positiva de novo de $(3;+\infty)$.

(P) OK! Melhor se dissermos: positiva <u>em</u> $(-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$ e negativa <u>em</u> (ou no intervalo) $(3;+\infty)$, concorda?

Pode-se observar, na discussão descrita nos Extratos 21 a 23, o progresso do primeiro para o segundo nível de tomada de consciência, tanto por parte do aluno **E** quanto de **K**, possibilitado pelo diálogo. Em ambos os casos houve conceituação: no caso de **E**, a partir do desafio proposto, acompanhado de um exemplo com a sugestão de que buscasse argumentos na bibliografia; no caso de **K**, ao apresentar seu parecer na discussão iniciada pelo colega e envolvendo-se no diálogo que lhe permitiu concluir corretamente. De fato, acompanhando a participação de cada um desses estudantes, é possível constatar o referido progresso, desde a realização de ações *mecânicas*, sem reflexão, acompanhadas de afirmações baseadas na simples observação da parábola em questão, até as coordenações de ações demonstradas nos últimos argumentos apresentados (por parte de **E**, ver Extrato 22 e por parte de **K**, ver Extrato 23).

Cabe salientar que a atividade que gerou os diálogos selecionados nos Extratos 21 a 23 possibilitou outras abordagens e outras discussões, originando uma produção coletiva.[47] Ou seja, quando todas as dúvidas e questões, decorrentes das discussões relacionadas à atividade que estava em discussão, foram esclarecidas (ainda que provisoriamente, pois sempre poderá ser retomada), a mesma foi deslocada do fórum para o espaço das produções coletivas, em forma de um arquivo organizado com o registro de todas as principais contribuições apresentadas.

Os Extratos 24 a 28 referem-se aos diálogos ocorridos em torno de um problema proposto em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Esse problema está inserido no contexto das *funções lineares*, utilizadas na modelagem matemática de uma grande variedade de fenômenos cuja observação sugere ser constante a taxa de variação entre as variáveis envolvidas. O interesse na análise das discussões geradas por esse problema deve-se à constatação do progresso observado durante sua discussão, mesmo nos casos em que os cálculos estavam corretos.

Foi o seguinte o problema proposto:

> Um estacionamento numa universidade cobra R$ 3,00 por dia, mas oferece um selo por R$ 40,00 com o qual o estudante paga somente R$ 0,25 por dia.
> **a)** determine as equações para o custo C do estacionamento por x dias no mês com os dois tipos de pagamento e esboce o gráfico das equações para $0 < x \leq 30$.
> **b)** calcule o valor de x no qual os dois gráficos se interceptam e discuta o significado desse valor.

[47] Ver sobre as produções coletivas no capítulo 4, subseção 4.1.1.

Extrato 24: “Funções Lineares”

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Mensagem Anterior: Problema 14
Próxima Mensagem: Zeros de funções

Problema 15
Autor: **A**
Data: Mar 21, 2002 10:15 am

[...] Para calcular fiz o seguinte:
Usei 3x para três reais e 0,25x + 40 para dizer q foram pagos 40 reais de mensalidade mais 0,25 centavos por dia.
Para 3x dei valores ate chegar a 30, e para 0.25x + 40 dei valores negativos como -1 ,-2,... pois
achei que dando valores positivos à segunda função achei que elas acabariam não se encontrando;
pois a reta 3x cresce bruscamente, enquanto a reta 0.25x + 40 cresce mais lentamente.
Depois conclui que igualando um a outro obteria o valor onde elas se encontram.
Acho que não me expressei bem mas deve da pra entender (...)

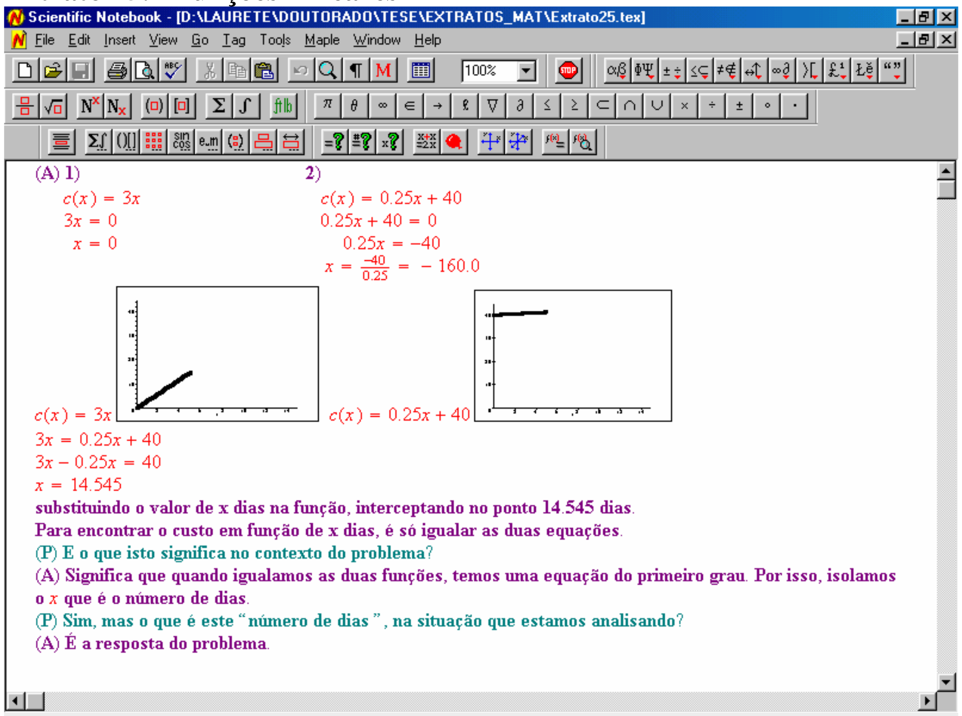
Re: Problema 15
Autor: **Laurete**
Data: Mar 21, 2002 10:53 am

[...] Sim, mas o que você concluiu com isto? O que representa “o valor onde elas se encontram” ? O que são “elas” ?

No comentário apresentado pelo aluno **A,** é possível observar a dificuldade em expressar o raciocínio utilizado, bem como a finalidade dos cálculos que efetuou. De fato, sua primeira intuição parece ter sido a de que poderia haver um valor negativo, ou mesmo nenhum valor comum às duas funções, conforme suas palavras: “*achei que dando valores positivos à segunda função elas acabariam não se encontrando*”. *Dar valores*, aqui, significa atribuir valores numéricos à variável *x* e calcular o valor correspondente em cada função. Seria possível que não houvesse vantagem de uma proposta em relação à outra? Ou, então, que o valor de *x* (número de dias), comum às duas, fosse um número negativo? Afirmando que realizou alguns testes, deixa a impressão de não ter claro o que está calculando.

No Extrato 25, a seguir, **A** procura responder ao questionamento da professora, demonstrando aceitar avançar, dessa vez escrevendo, em linguagem formal, praticamente o mesmo que já havia escrito anteriormente, mas incluindo gráficos e nomes para as duas funções e também mostrando “*o valor onde elas se encontram*”. Quanto ao *nome* dado às funções, o fato de ser o mesmo: “$\underline{c(x)} = 3x$ e $\underline{c(x)} = 0,25x + 40$”, revela *indiferenciação*, o que é característico da ausência de tomada de consciência ao nível da conceituação.

Extrato 25: "Funções Lineares"



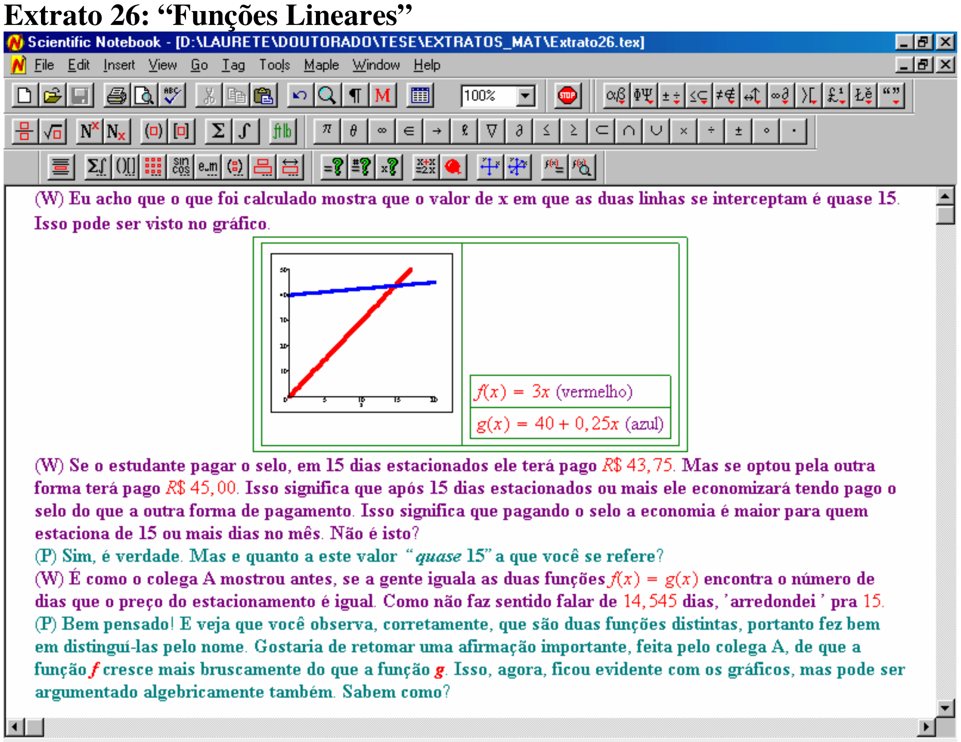
Observa-se inicialmente a determinação do zero de cada uma das funções, o que pode ser interpretado como uma ação sem reflexão, uma vez que os mesmos não têm interesse, neste contexto. O questionamento quanto ao significado do último resultado obtido pode promover a reflexão sobre tal contexto, sobre a situação real que está em questão. Porém, isso ainda não ocorre, a julgar pelo argumento apresentado, que é a *tradução* das operações realizadas com a finalidade de obter "*a resposta do problema*". Parece não haver dúvida de que se trata de manipulações algébricas sem significado ainda, embora estejam corretas, do ponto de vista das operações realizadas. A apresentação dos gráficos envolvidos, esboçados separadamente, em *janelas de visualização*, que não permitem a análise da relação entre ambos, é uma prova disso.

Segundo Piaget (apud BRINGUIER, 1978), nesse primeiro nível não é que o sujeito não saiba nada de suas ações bem-sucedidas; ele compreende o essencial, mas em ação e não em pensamento. De fato, o aluno **A** limita-se à tradução de algumas ações; porém, não todas as que realizou. Sua concepção, conforme se observou em depoimentos relacionados aos papéis de professor e aluno, como por exemplo, no Extrato 8, está de acordo com a análise realizada naquele caso: cumpre seu papel de realizar o que foi solicitado, aplicando fórmulas corretamente. Nesse nível o aluno não está atento ao processo, pois realiza operações, aplica fórmulas, regras e procedimentos sem saber traduzi-los: sabe fazer mas não sabe explicar. Realiza ações sem saber como as consegue realizar.

Embora haja alguns indícios de progresso, ao traduzir algumas ações realizadas, como: *"igualamos as duas funções ... isolamos o x"*, vai tateando nas diversas operações de que tem conhecimento. O que lhe importa é a resposta correta do problema.

Entretanto, a curiosidade, o desequilíbrio e a necessidade da confirmação do professor, em muitas situações, têm um efeito positivo em ambientes de aprendizagem abertos ao diálogo. Conforme Freire e Freire (2001), dependendo do tratamento dado à curiosidade, esta, enquanto desafio, pode provocar o desenvolvimento de novos conhecimentos. E a intervenção do aluno **W** confirma isso, no Extrato 26, procurando apresentar sua versão, não ignorando, entretanto, o que já havia sido discutido anteriormente sobre o problema, o que leva a supor que estava aguardando alguma confirmação para sentir-se seguro.

Extrato 26: "Funções Lineares"



(W) Eu acho que o que foi calculado mostra que o valor de x em que as duas linhas se interceptam é quase 15. Isso pode ser visto no gráfico.

$f(x) = 3x$ (vermelho)

$g(x) = 40 + 0,25x$ (azul)

(W) Se o estudante pagar o selo, em 15 dias estacionados ele terá pago $R\$ 43,75$. Mas se optou pela outra forma terá pago $R\$ 45,00$. Isso significa que após 15 dias estacionados ou mais ele economizará tendo pago o selo do que a outra forma de pagamento. Isso significa que pagando o selo a economia é maior para quem estaciona de 15 ou mais dias no mês. Não é isto?
(P) Sim, é verdade. Mas e quanto a este valor "*quase* 15" a que você se refere?
(W) É como o colega A mostrou antes, se a gente iguala as duas funções $f(x) = g(x)$ encontra o número de dias que o preço do estacionamento é igual. Como não faz sentido falar de $14,545$ dias, 'arredondei' pra 15.
(P) Bem pensado! E veja que você observa, corretamente, que são duas funções distintas, portanto fez bem em distinguí-las pelo nome. Gostaria de retomar uma afirmação importante, feita pelo colega A, de que a função ***f*** cresce mais bruscamente do que a função ***g***. Isso, agora, ficou evidente com os gráficos, mas pode ser argumentado algebricamente também. Sabem como?

Para o aluno **W**, parece estar clara a diferença entre as duas formas de pagamento, bem como do significado da *resposta* do problema, já mencionada por **A**, naquele caso, ainda de forma vaga. Como esta, outra afirmação feita pelo aluno **A,** e observada no Extrato 24, revelou-se ocasional, pelo fato de não mais ter retornado à discussão. Trata-se da observação de que *"a reta 3x cresce mais bruscamente"* e que procurou-se valorizar, trazendo-a ao último comentário. Entretanto passou-lhe despercebido, também, o incentivo da pesquisadora, pois não mais demonstrou envolvimento. Provavelmente considerou cumprida sua tarefa, ao ter tido a iniciativa de enviar a primeira contribuição relacionada ao problema em questão. Isso ocorre com freqüência. Adiante se comenta sobre concepções dessa natureza, reveladas em atividades de auto-avaliações realizadas.[48]

Com relação ao último questionamento proposto no Extrato 26, este foi retomado por **W**, como mostra o Extrato 27.

Extrato 27: "Funções Lineares"

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Mensagem Anterior: Problema 14
Próxima Mensagem: Zeros de funções

Re: Problema 15
Autor: **W**
Data: Mar 23, 2002 6:15 pm

Acho que sei por quê uma sobe mais rapidamente e a outra mais lentamente. É o coeficiente angular maior. No caso de $f(x) = 3x$ e de $g(x) = 40 + 0,25x$, como 3>0,25, então *f* sobe mais rápido do que *g*.

Re: Problema 15
Autor: **Laurete**
Data: Mar 23, 2002 9:03 pm

Perfeito, é o coeficiente angular de uma reta que determina a 'rapidez de variação' de y em relação a x. Lembremos que, no caso de *f*, para cada aumento de uma unidade em *x*, *y* aumenta 3 unidades, ao passo que no caso de *g*, para cada aumento de uma unidade em *x*, *y* aumenta 0,25. Essa interpretação do conceito de coeficiente angular é muito útil e em diversas situações explica o comportamento de uma função na análise de um fenômeno.
Foi muito importante a sua contribuição!!

As intervenções do aluno **W** demonstram sua compreensão das ações realizadas, em relação ao problema que estava em discussão. Além disso, ao justificar por que *"f sobe mais rápido do que g"*, demonstra ter refletido sobre o significado geométrico de coeficiente angular, integrando-o numa nova estrutura à medida que o relacionou à rapidez da elevação dos custos do estacionamento, nas modalidades representadas por *f* e *g*. Isso caracteriza uma

---

[48] Ver Extratos 48 a 54.

lógico-matemática.[49] O progresso é revelado, aqui, com a justificativa baseada, não mais no gráfico observado, mas em propriedades das funções ali representadas, o que caracteriza uma operação lógico-matemática.

Além disto, acredita-se que são esses os momentos nos quais se pode aproveitar para *pensar junto com o aluno*, estimulando o desenvolvimento do pensamento crítico, de modo que perceba a insuficiência da mera tradução dos conceitos. Isso estimula o professor, também, ao observar que, mesmo alunos que não haviam participado, até então, demonstram estar interagindo no ambiente, como é o caso de **F**, cuja participação é relatada no Extrato 28 a seguir. Nesse caso o destaque de sua participação justifica-se pela disposição em reunir todas as informações relacionadas ao *problema do estacionamento*, atendendo a uma sugestão apresentada, quando se julgou ter considerado todos os questionamentos apresentados.

---

[49] O peculiar das estruturas lógico-matemáticas é ultrapassar aquelas que as precedem, integrando-as, como conseqüência de raciocínios e de experiências lógico-matemáticas que, contrariamente às experiências físicas, permitem a leitura das propriedades introduzidas pela ação no objeto; essas ações, interiorizadas em operações, podem agora ser realizadas simbolicamente e, portanto, dedutivamente, e se referem às propriedades das ações ou operações e não dos objetos (PIAGET, 1983).

Extrato 28: "Funções Lineares"

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

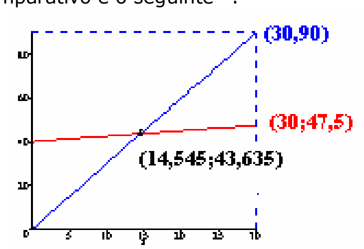
Mensagem Anterior: Problema 14
Próxima Mensagem: Zeros de funções

Re: Problema 15
Autor: **Laurete**
Data: Mar 27, 2002 9:01 am

Pessoal, acho que já temos uma boa produção relacionada ao que comentamos sobre as funções lineares envolvidas no problema que discutimos durante esta semana. Alguém poderia juntar as idéias principais, o que acham?

Re: Problema 15
Autor: **F** [redacted]
Data: Mar 28, 2002 3:17 pm

Bom, posso tentar: O problema fornece duas formas de efetuar um pagamento de um estacionamento , a primeira delas sugere um pagamento de 3 reais ao dia , sem nenhum desconto , a Segunda sugere uma forma de pagamento em que o estudante paga uma selo de 40 reais , e com ele paga somente 0,25 centavos por dia de estacionamento.
a) A primeira equação , na qual o estudante paga 3 reais ao dia é a seguinte: G(x) = 3x.
A Segunda equação , na qual o estudante paga um selo de 40 reais e depois 0,25 centavos ao dia é a seguinte: F(x) = 40+0,25x.
Para as duas , o gráfico comparativo é o seguinte[50]:



A linha azul representa a equação g(x), na qual o estudante paga 3 reais ao dia , e a linha vermelha representa a equação f(x) , na qual o estudante recebe o selo de desconto.

b) O valor de x , no qual os dois pontos do gráfico se interceptam , como podemos ver no gráfico acima, é o ponto 160/11 , ou o valor 14,54545455 , então , o que significa isso? , é simples , quando o estudante for fazer sua opção deve levar em conta quantos dias do mês ele pretende estacionar , se esse valor for acima desse numero , então o estudante deve optar pela Segunda opção , a qual ele paga 40 reais e depois somente 25 centavos por dia , e se o estudante que estacionar menos de 14 dias (vamos arredondar esse numero para 14 ou 15 , uma vez que não temos como contar ''meios'' dias) deve optar pela primeira forma de pagamento , na qual ele paga 3 reais por dia.
Para termos uma idéia do que a opção errada iria causar , se tivéssemos 2 estudantes , dispostos a estacionar durante 30 dias por mês , e cada um optasse por uma forma de pagamento , no final de 30 dias , o estudante que optou pelo selo iria sair com um desconto de R$ 42,5 em relação ao outro estudante , que gastaria 90 reais ao mês, enquanto o primeiro apenas R$ 47,5, muito mais satisfatório.
Obs: Para chegar nesses resultados , temos que primeiro observar as duas situações , como na primeira não havia nada de especiais bastava escrever a função de x direto , sendo x os dias sempre multiplicados por 3 reais , já na segunda situação , temos que primeiro observar que o valor do pagamento era de 25 centavos , então teríamos que ter o valor x dias multiplicado por 25 centavos , só que nessa situação teríamos de adicionar um valor de 40 reais , que é o valor do selo , à equação.
A título de curiosidade , se usássemos as mesmas funções para um ano , o estudante que não pegou o selo estaria muito indignado a essa altura , uma vez que ele teria pago 1080 reais , enquanto o outro estudante teria pago muito menos , 570 reais , quase a metade.

[50] O gráfico foi enviado como documento anexo à mensagem reproduzida aqui, visto que a ferramenta não permite a edição de figuras. Porém, para não prejudicar a compreensão de sua análise, decidiu-se inseri-lo junto ao texto, modificando também sua apresentação na mensagem que, originalmente era: "Para as duas o gráfico comparativo vai no arquivo anexo", além da frase que se refere às cores, incluída, aqui, logo abaixo do gráfico.

É importante destacar a participação do aluno **F** que, como se pode observar no Extrato 28, ressaltou os principais aspectos da discussão ocorrida acrescentando, com clareza e compreensão, seu ponto de vista. Ao analisar as conseqüências de uma *"opção errada"*, demonstra a capacidade de considerar e coordenar outras possibilidades para explicar o fenômeno. Nesse nível de tomada de consciência (terceiro nível), em que o sujeito sabe fazer e sabe explicar, encontra-se a capacidade de antecipar resultados e escolher entre meios diferentes, sem limitar-se a cálculos automáticos. Aqui, a influência da conceituação sobre a ação lhe permitiu estabelecer o plano de resolução, ou seja, a análise das funções envolvidas, sabendo *o que* e *por quê*. A solução do problema é compreendida desde o seu enunciado, pois, antes de qualquer tentativa, analisou os dados disponíveis: "[...] *Para chegar nesses resultados, temos que primeiro observar as duas situações* [...]*"*. Nesse caso, o ato de *observar* é uma ação sobre os objetos (as funções). E, ao refletir sobre essas ações, procurando reconstruí-las ou apropriar-se delas, além de enriquecê-las com propriedades observadas, o aluno **F** realizou abstrações reflexionantes, cujo resultado é a tomada de consciência neste nível (PIAGET, 1977a).

Nesse processo de interação, evidentemente, não são todos os alunos contemplados com os benefícios de uma participação ativa. Na verdade, isso já está previsto, a partir da análise dos primeiros indicadores relacionados às concepções epistemológicas dos alunos, conforme conclui-se ao analisar os Extratos 4 a 20. Porém, e esta foi a principal finalidade de sua análise, fornecem orientações de modo que a condução dos diálogos proporcione benefícios, se não a todos os alunos, mas a todos os que concordarem em envolver-se, encontrando satisfação nisso. Essa tarefa não é fácil e, em muitos diálogos, é possível observar a resistência ao envolvimento, por parte do aluno, como é o caso da discussão descrita no Extrato 31.

Nos Extratos 29 a 32 analisa-se um diálogo relacionado ao problema da reta tangente, que representa um dos temas essenciais do Cálculo.[51] Nessa situação de aprendizagem, o problema foi formulado nos seguintes termos:

---

[51] Quatro grandes problemas, nos quais matemáticos europeus estavam trabalhando durante o século XVII, motivaram os trabalhos de Newton e Leibniz naquela época e representam os temas essenciais do Cálculo hoje: o problema da reta tangente, o problema da velocidade e da aceleração, o problema de máximos e mínimos e o problema da área. O primeiro (problema da reta tangente) está relacionado a uma das mais importantes aplicações da derivada de uma função.

Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função *f*, definida por $f(x) = x^2 + 1$, no ponto de abscissa -1.

O interesse na análise desse diálogo deve-se ao fato de ter iniciado com a *solicitação da resposta*, por parte do aluno **L**, conforme é possível observar no Extrato 29.

Extrato 29: "Derivada e a equação da reta tangente"

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Mensagem Anterior: Derivada
Próxima Mensagem: Reta tangente

Equação da reta tangente
Autor: **L**
Data: Sep 21, 2002 10:15 am

Oi Laurete! Estou com muitas dúvidas sobre a equação da reta tangente se você puder, me mande a resposta dele e algumas dicas, que eu dou um jeito de fazer... Obrigado.

Re: Equação da reta tangente
Autor: **Laurete**
Data: Sep 21, 2002 2:18 pm

Olá, gostaria de saber o que está pensando a respeito para, então, sugerir. O importante é partirmos do que você já sabe! Tente escrever algo, mesmo que seja preciso pesquisar para isto! Aguardo. Um abraço.

Re: Equação da reta tangente
Autor: **L**
Data: Sep 21, 2002 5:23 pm

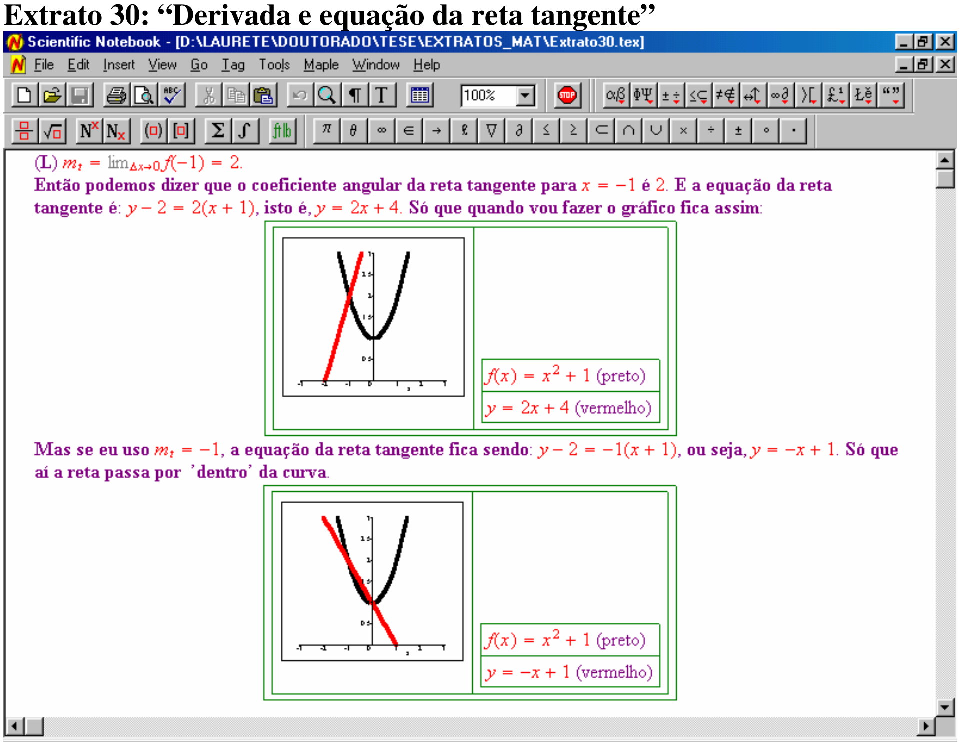
Oi Laurete, eu fiz o exercício, mas acontece que não deu certo. Fiz de dois jeitos e gostaria de saber se um deles está certo ou nenhum??? Veja o arquivo anexo. Abraços.

É evidente, aqui, a dependência, por parte do aluno **L**, da resposta do problema, para poder solucioná-lo. Entretanto:

> [...] a educação da resposta não ajuda em nada a curiosidade indispensável ao processo cognitivo. Ao contrário, ela enfatiza a memorização mecânica de conteúdos. Só uma educação da pergunta aguça, estimula e reforça a curiosidade. Claro que o erro da educação da resposta não está na resposta e sim na ruptura entre ela e a pergunta. O erro está em que a resposta é discursada independentemente da pergunta que a provocaria. Da mesma forma, a educação da pergunta estaria errada se a resposta não se percebesse parte da pergunta. Perguntar e responder são caminhos constitutivos da curiosidade (FREIRE,1995, p.19).

Com isso em mente, para a continuação do diálogo, analisa-se o arquivo enviado e apresentado no Extrato 30, em que mostra *"os dois jeitos"* que tentou para resolver o problema, procurando atender à sua solicitação de forma que possa orientá-lo a partir do caminho já iniciado. Fica evidente que está "tateando" na busca de uma reta que tangencie a curva. É reconhecida sua dificuldade em "traduzir" suas dúvidas, por estar atento às ações, através da utilização das fórmulas que conhece, sem procurar compreendê-las.

Extrato 30: "Derivada e equação da reta tangente"



Não se pode deixar de observar que está utilizando corretamente a fórmula para a determinação da equação de uma reta e, portanto, que realiza ações constituídas por um saber já elaborado, qual seja, o de aplicar algumas fórmulas corretamente, o que é característico do primeiro nível de tomada de consciência. E, ao valorizar esse conhecimento que está demonstrando, procura-se apresentar alguns questionamentos que lhe permitam avançar. O Extrato 31 mostra a continuação do diálogo.

Extrato 31: Derivada e equação da reta tangente

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Mensagem Anterior: Derivada
Próxima Mensagem: Reta tangente

Re: Equação da reta tangente
Autor: **Laurete**
Data: Sep 22, 2002 9:57 am

[...] Analisei o arquivo enviado e entendo que está utilizando a fórmula adequada para determinar a equação de uma reta, em geral. Também observei que o 'ponto' utilizado é um ponto conhecido da reta. Nas suas duas tentativas de determiná-la você prestou atenção a isto.
Porém, ao observar o que difere nas suas duas tentativas, entendo que não está claro o conceito de 'm_t' que está utilizando. E é sobre este que estamos estudando agora. Deixo então questões para refletir:
- O que você entende por 'm_t' ?
- Como você lê a expressão[52] em que apresenta o valor de m_t ?
- O que ele representa na equação de uma reta?
Por enquanto vou deixar estas idéias para que você pense mais um pouquinho e depois retorne.
Sua contribuição é bastante importante.
Caso alguém possa auxiliar, será bem-vindo! Abraços, Laurete.

Re: Equação da reta tangente
Autor: **L**
Data: Sep 22, 2002 2:18 pm

Sinceramente, sua explicação me confundiu muito mais! Mas de qualquer forma obrigado!
[...]

Re: Equação da reta tangente
Autor: **Laurete**
Data: Sep 22, 2002 4:21 pm

Mas você não perguntou ainda! Solicitou a resposta do problema e isto não vai lhe ajudar. Por isso procurei dar algumas sugestões, não explicações, que lhe ajudem a pensar! Quando tiver refletido sobre isto, formule sua pergunta. Talvez, então, poderei 'explicar' algo que você 'queira' saber e então conduzir esta explicação levando em consideração o que já sabe! Abraço, Laurete.

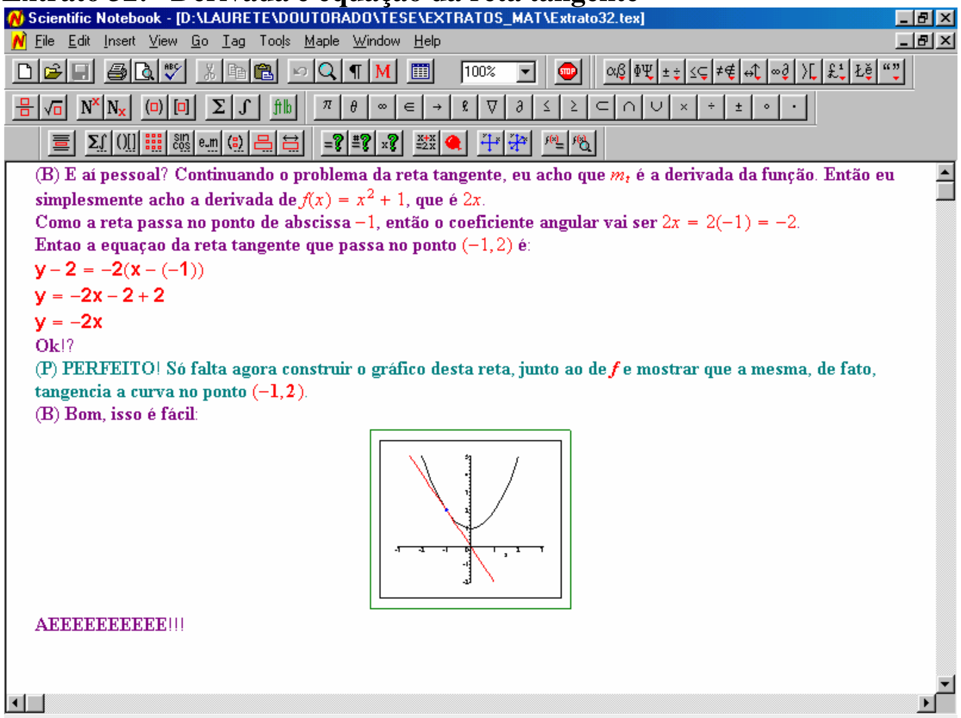
---

[52] $m_t = \lim_{\Delta t \to 0} f(-1) = 2$

A insatisfação de **L**, aqui manifestada, está de acordo com a análise realizada nos Estratos 4 a 20, quando se identificou a falta de importância dada ao processo; o que importa é a resposta. Essa atitude parece estar relacionada à fixação cognitiva nos objetivos imediatos de suas ações, à fixação na perspectiva própria que, para Piaget (apud Montangero e Naville, 1998), corresponde à noção de centração. Ao contrário, a descentração, ou seja, a comparação de suas ações com outras possíveis, levando em consideração os questionamentos que lhe foram sugeridos conforme o Extrato 31, permitir-lhe-ia a tomada de consciência dos objetivos de suas ações. Esta só é possível a partir da disposição de refletir sobre os resultados de suas ações, o que **L** não demonstrou valorizar.

Mas, levando em consideração o que se constatou ao analisar os Extratos 17 e 18, *"as dúvidas geralmente são de vários alunos"*, *"talvez não seja uma dúvida só nossa"* , *"todos podem ajudar"*. Além disso, lembrando também que cada um tem seu tempo, é possível aguardar. E, invariavelmente, a necessidade de confirmação de hipóteses se faz sentir por parte daqueles que acompanham o diálogo, tendo em vista a aprendizagem. Considera-se esse um exercício com bons resultados, uma vez que possibilita o desenvolvimento da autonomia, a partir da cooperação, na medida em que esta pressupõe a ação sobre operações do outro. Isso requer sensibilidade, de modo que o colega que iniciou a discussão sinta-se valorizado por isso e, nunca, inferiorizado por não tê-la concluído. No Extrato 32 apresenta-se a continuação do diálogo iniciado por **L**, pelo colega **B**.

Extrato 32: "Derivada e equação da reta tangente"



B comemora ao demonstrar que o gráfico corresponde ao que procurávamos. Isso é significativo e pode estar revelando o sentimento de segurança, necessário como compensação do esforço realizado na tentativa de compreender o conceito de derivada aplicado ao problema da tangente a uma curva. Sua intervenção não responde, ainda, todos os questionamentos sugeridos no Extrato 31, uma vez que não se referiu à leitura da expressão $m_t = \lim_{\Delta t \to 0} f(-1) = 2$, conforme solicitado. De fato, do modo como foi escrita, revela a falta de compreensão da *definição de derivada em termos de limite*, pois se trata de uma expressão sem sentido, e nenhuma das igualdades ali contidas é verdadeira. Interpreta-se sua inclusão como argumento por parte de **L**, no Extrato 30, de acordo com a concepção evidenciada, ao tentar resolver sem compreender. Porém, o fato de **B** não intervir nessa questão, confirma, também, meu conhecimento de que a compreensão da definição de derivada é um tema delicado no estudo do Cálculo, que requer a construção de novas estruturas lógico-matemáticas. Cabe observar que, de acordo com pesquisas realizadas, existem obstáculos relacionados à aprendizagem da derivada como um limite. Porém é possível trabalhar, em Cálculo, com as aplicações desses conceitos, deixando sua formalização para os cursos de Análise.[53] De fato, no contexto em que esse diálogo ocorreu, tais obstáculos ficaram evidenciados e não é objeto deste estudo abordar de que forma podem ser enfrentados. De um modo geral, é possível afirmar que esse tipo de atividade, como a que foi comentada nos Extratos 29 a 32, pode dar início, juntamente com o desenvolvimento do conceito de limite, à construção de estruturas, a partir de experiências lógico-matemáticas que propiciem a integração dos dois conceitos. Ou seja, fica a critério do professor conduzir a discussão para essa abordagem ou não.

De qualquer forma, também aqui se constatou que o diálogo possibilitou a conceituação que retira elementos da ação (cálculo da derivada), por parte de **B**, ao relacionar o conceito de derivada com o coeficiente angular (*"m_t é a derivada da função"*), ainda que não tenha revelado o significado que atribui a esse conceito, em termos de limites mas em termos de uma de suas aplicações, isto é, o *coeficiente angular* da reta tangente à curva. O caso de haver reflexão sobre as ações, com deficiência, em termos de compreensão conceitual, de acordo com Piaget (1977a), é característico do segundo nível de tomada de consciência, como parece ocorrer com **B**. Quanto ao aluno **L**, sua resistência à consideração das questões sugeridas para reflexão pode ser devida ao conflito com um esquema anterior: no Ensino Médio utilizava essa mesma fórmula com sucesso, determinando a equação de uma reta, muitas vezes sem estar atento ao significado de cada um dos termos envolvidos na fórmula utilizada. Agora é necessária uma reconstrução, compreendendo o significado da derivada como sendo o coeficiente angular da reta tangente a uma curva num de seus pontos. Entende-se que na medida de seu interesse, o acompanhamento do diálogo por ele iniciado, aliado à sua capacidade de superação do conflito, pode levar à tomada de consciência e à aprendizagem.

O problema de determinação da reta tangente a uma curva, seguida do cálculo da área de uma região foi o tema das discussões analisadas nos Extratos 33 a 36. O interesse na análise do diálogo, gerado por esse problema reside, precisamente, na importância da relação entre ambos os conceitos envolvidos, no estudo do Cálculo Diferencial e Integral e no grau de abstração cuja compreensão exige. No caso deste estudo, o diálogo foi desencadeado justamente pela dificuldade relacionada à equação da reta tangente à curva, já mencionado quando das análises que acompanham os Extratos 29 a 32. Entretanto, a discussão que se

---

[53] É comprovado (CORNU, 1983; SIERPINSKA, 1983, 1985, 1987 apud MILANI, 2002) que existem alguns obstáculos à aprendizagem do conceito de limite. Quando se trabalha com a derivada através desse conceito, as idéias que constituem os obstáculos podem vir à tona. Uma das formas de superar esses obstáculos é enfrentá-los, como mostrou Milani (2002) quando tratou do obstáculo infinitesimal à aprendizagem do conceito de limite, ao trabalhar, com alunos de Cálculo, a derivada via abordagem infinitesimal e via conceito de limite.

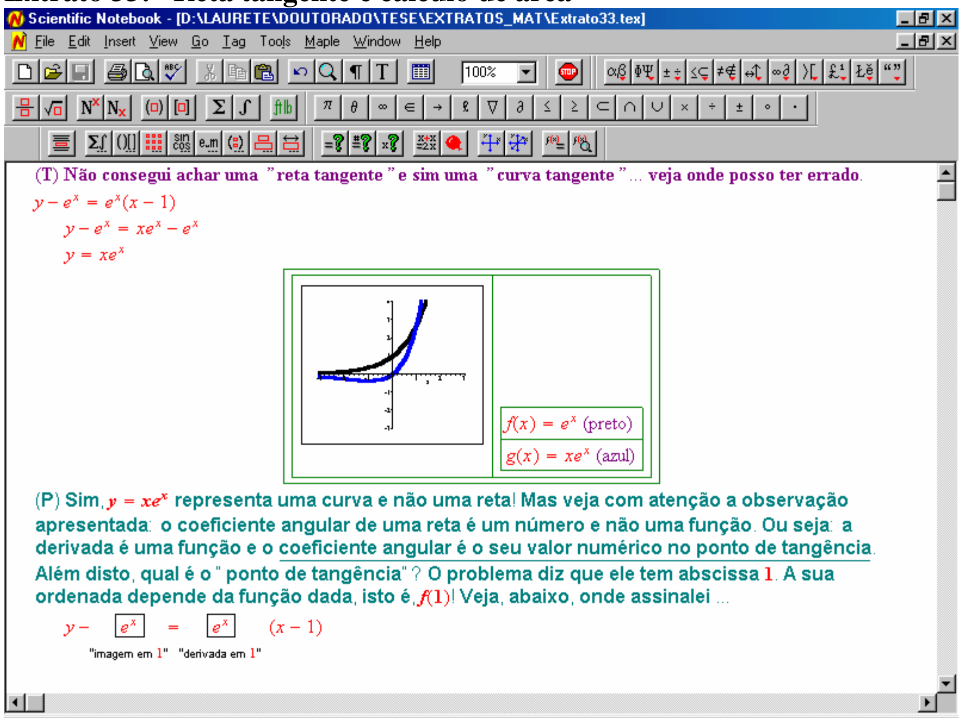
passa a analisar foi verificada em uma disciplina de Cálculo, do segundo semestre quando, supostamente, já se deveria contar com a compreensão desse conceito, pelo menos em nível de suas aplicações. Ocorre que, freqüentemente, o mesmo não foi construído em bases sólidas e, conforme comentado no parágrafo acima, o conhecimento do aluno não passa do conhecimento da ação relacionada à aplicação de certas fórmulas, sem compreensão.

O problema que gerou a discussão foi formulado, acompanhado de uma observação referente à equação da reta tangente, levando em consideração a possibilidade de que a dificuldade relacionada ao conhecimento da fórmula, para a determinação da equação de uma reta, pudesse representar um obstáculo à sua realização, o que se procurou evitar. Foi assim formulado:

(a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função dada por $y = e^x$ no ponto de abscissa 1.
Obs.: A reta tangente a uma curva num de seus pontos (x_1, y_1) pode ser obtida a partir de $y - y_1 = m(x - x_1)$ onde m representa o seu coeficiente angular (derivada da função dada, naquele ponto).
(b) Construa os gráficos da curva e da reta, num mesmo sistema de eixos.
(c) Determine a área da região compreendida entre o gráfico da função dada, a reta $x = 0$ e a reta tangente obtida em **(a)**, justificando, com suas palavras, o raciocínio utilizado e apresentando argumentos para isso.

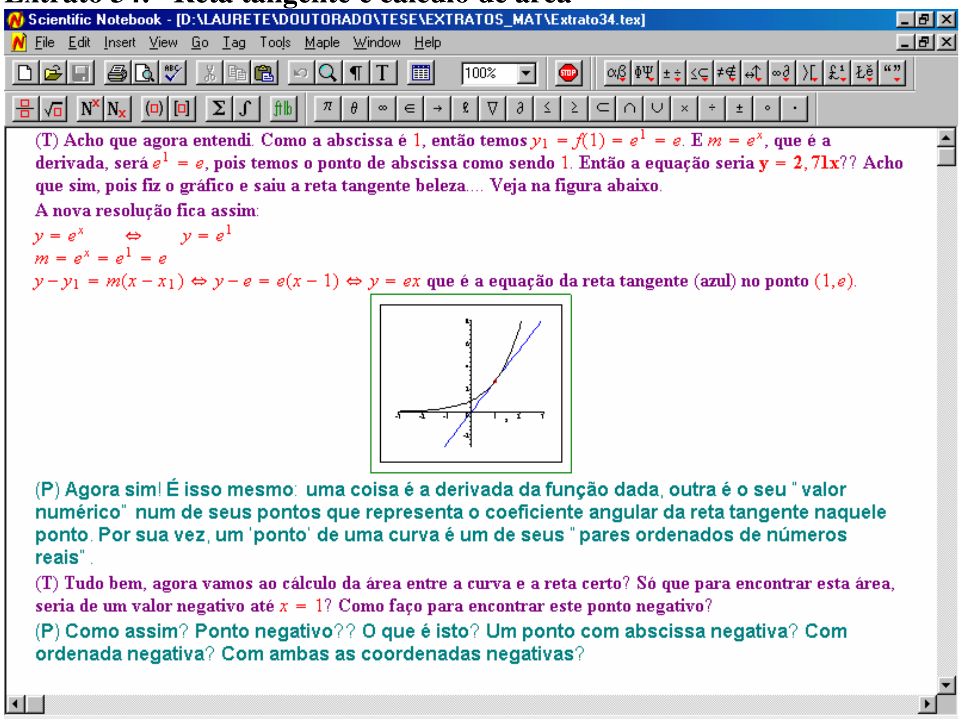
O Extrato 33 relata a dúvida inicial, que motivou a participação do aluno **T**.

Extrato 33: "Reta tangente e cálculo de área"



A observação dada no enunciado do problema não foi suficiente para que **T** refletisse sobre o significado dos termos da fórmula que estava sendo sugerida. Ao contrário: de posse da mesma, passou imediatamente a realizar cálculos, sem refletir. Esse comportamento está de acordo com concepções evidenciadas nos Extratos 4 a 7, nos quais se analisam afirmações que relacionam a aprendizagem de Matemática com a realização de *"exercícios práticos"* e o conhecimento matemático como um conjunto de fórmulas ou algoritmos que devem ser exercitados. De acordo com a análise realizada do Extrato 6, o que faltou, no caso do aluno **T**, foi a diferenciação dos termos envolvidos na fórmula, apesar de ter realizado cálculos corretamente: função em lugar de valor numérico da função. A tomada de consciência tem muito a ver com o ato de distinguir, e o crescer do conhecimento é um movimento intelectual da não-diferenciação para a diferenciação (PIAGET apud KESSELRING, 1990). O que o levou a refletir, finalmente, foi a perturbação gerada pelo fato de ter encontrado uma curva e não uma reta, como resultado de seus cálculos. É preciso que estejamos atentos para promover intervenções que levem os alunos a refletir. Nessas condições tornou-se possível a tomada de consciência de segundo nível, com relação à aplicação desse conceito, ao constatar que havia utilizado a função ao invés de sua imagem no ponto de tangência e a derivada ao invés de seu valor numérico naquele ponto, conforme revela no Extrato 34.

Extrato 34: "Reta tangente e cálculo de área"



(T) Acho que agora entendi. Como a abscissa é 1, então temos $y_1 = f(1) = e^1 = e$. E $m = e^x$, que é a derivada, será $e^1 = e$, pois temos o ponto de abscissa como sendo 1. Então a equação seria $\mathbf{y = 2,71x}$?? Acho que sim, pois fiz o gráfico e saiu a reta tangente beleza.... Veja na figura abaixo.

A nova resolução fica assim:

$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad y = e^1$

$m = e^x = e^1 = e$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y - e = e(x-1) \Leftrightarrow y = ex$ que é a equação da reta tangente (azul) no ponto $(1,e)$.

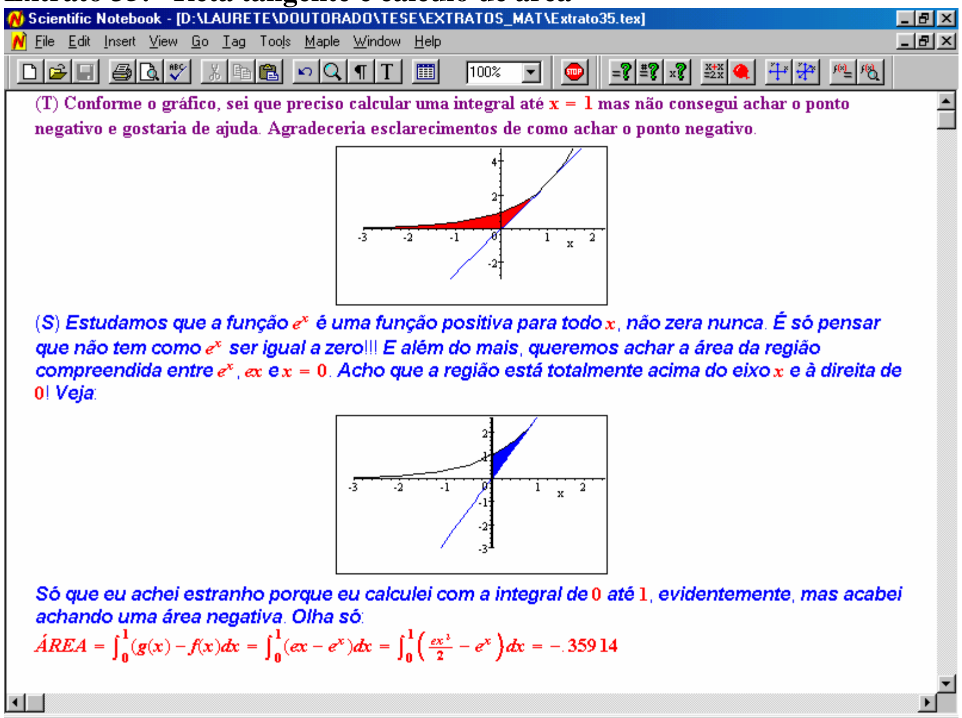
(P) Agora sim! É isso mesmo: uma coisa é a derivada da função dada, outra é o seu "valor numérico" num de seus pontos que representa o coeficiente angular da reta tangente naquele ponto. Por sua vez, um 'ponto' de uma curva é um de seus "pares ordenados de números reais".

(T) Tudo bem, agora vamos ao cálculo da área entre a curva e a reta certo? Só que para encontrar esta área, seria de um valor negativo até $x = 1$? Como faço para encontrar este ponto negativo?

(P) Como assim? Ponto negativo?? O que é isto? Um ponto com abscissa negativa? Com ordenada negativa? Com ambas as coordenadas negativas?

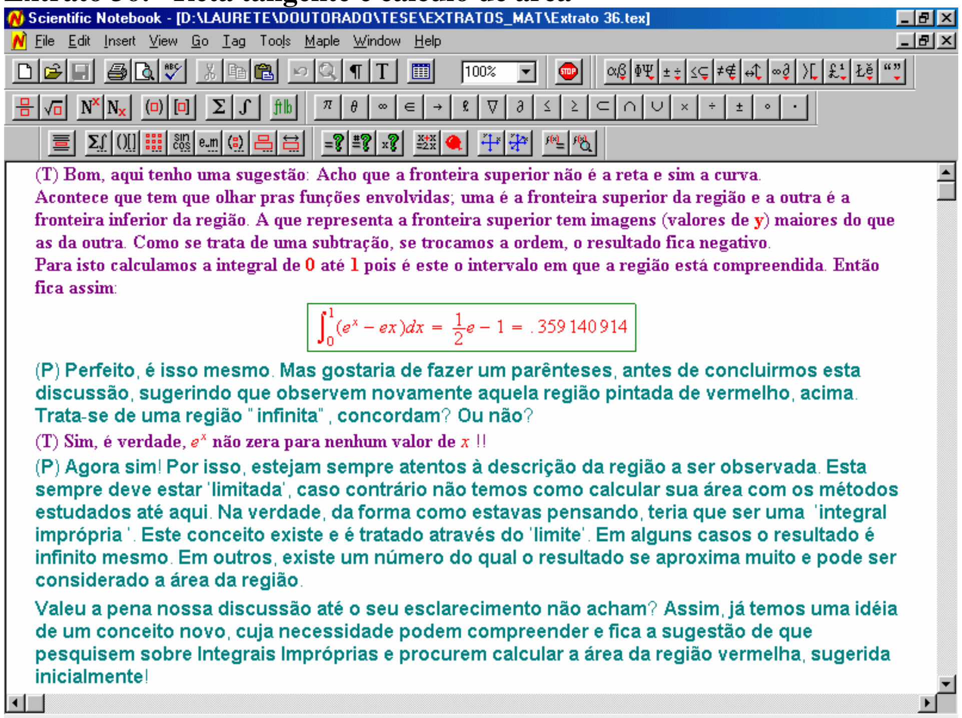
Tendo superado a primeira dificuldade, **T** avança procurando atender à última solicitação do problema, de que se calcule a área da região compreendida entre o gráfico da função dada, a reta $x = 0$ e a reta tangente no ponto (1,e). Porém, aqui, ignora a informação de um dos contornos da região: a reta $x = 0$ (o eixo vertical), e insiste na busca, não percebendo, principalmente, que a função que contorna a região não possui zeros, ou seja, não intercepta o eixo horizontal. É esse o ponto que está procurando quando pergunta sobre *"o ponto negativo"*. Cabe ressaltar que, paralelamente, estávamos estudando a função exponencial, o que nos levou a formular o problema, considerando-a como um dos contornos da região. E continua sua reflexão, na busca pelo tal *"ponto negativo"*, respondendo novamente. Só que dessa vez, outro colega, **S**, prontificou-se a participar do diálogo observando, corretamente, que *"e^x é uma função positiva para todo x, não zera nunca"*.

Extrato 35: "Reta tangente e cálculo de área"



Com isso, **S** identificou corretamente os extremos da região, como sendo os pontos de abscissas 0 e 1, respectivamente, propondo a integral para o cálculo da área, de 0 até 1. Porém nos apresenta outra dificuldade, bem conhecida, relacionada ao problema do cálculo da área de uma região delimitada por curvas. A razão de tal dificuldade está na identificação das fronteiras superior e inferior da região. Ao considerar a reta como a fronteira superior e a curva como a fronteira inferior, propôs o cálculo da área a partir da diferença $g - f$ ao invés de $f - g$, mas **T** estava atento e prontamente concluiu.

Extrato 36: "Reta tangente e cálculo de área"



(T) Bom, aqui tenho uma sugestão: Acho que a fronteira superior não é a reta e sim a curva. Acontece que tem que olhar pras funções envolvidas; uma é a fronteira superior da região e a outra é a fronteira inferior da região. A que representa a fronteira superior tem imagens (valores de y) maiores do que as da outra. Como se trata de uma subtração, se trocamos a ordem, o resultado fica negativo.
Para isto calculamos a integral de 0 até 1 pois é este o intervalo em que a região está compreendida. Então fica assim:

$$\boxed{\int_0^1 (e^x - ex)dx = \frac{1}{2}e - 1 = .359\,140\,914}$$

(P) Perfeito, é isso mesmo. Mas gostaria de fazer um parênteses, antes de concluirmos esta discussão, sugerindo que observem novamente aquela região pintada de vermelho, acima. Trata-se de uma região " infinita" , concordam? Ou não?

(T) Sim, é verdade, e^x não zera para nenhum valor de x !!

(P) Agora sim! Por isso, estejam sempre atentos à descrição da região a ser observada. Esta sempre deve estar 'limitada', caso contrário não temos como calcular sua área com os métodos estudados até aqui. Na verdade, da forma como estavas pensando, teria que ser uma 'integral imprópria'. Este conceito existe e é tratado através do 'limite'. Em alguns casos o resultado é infinito mesmo. Em outros, existe um número do qual o resultado se aproxima muito e pode ser considerado a área da região.

Valeu a pena nossa discussão até o seu esclarecimento não acham? Assim, já temos uma idéia de um conceito novo, cuja necessidade podem compreender e fica a sugestão de que pesquisem sobre Integrais Impróprias e procurem calcular a área da região vermelha, sugerida inicialmente!

Observa-se que esse diálogo, como em geral ocorre, permite ao professor tomar o rumo que os alunos escolherem para discutir. Nesse caso em particular, a dúvida inicial do aluno **T** permite comentar sobre a utilidade das integrais impróprias, a serem estudadas. Isso sugere, inclusive, a possibilidade de orientar os estudos da disciplina conforme o interesse manifestado, na medida do possível, sem perder de vista a relação da disciplina com o curso. De qualquer forma, essa seria, sem dúvida, uma boa oportunidade para a introdução ao estudo das integrais impróprias, e foi isso que se teve em mente ao sugerir que o problema relacionado à dúvida do aluno **T** fosse resolvido. Porém isso não ocorreu naquela oportunidade.

Em outra situação, entretanto, obteve-se êxito, pois, apesar de o problema ter sido proposto sem que o conceito necessário para o seu desenvolvimento (aplicação da integral definida no cálculo do comprimento de um arco) tivesse sido abordado em sala de aula, o mesmo foi bem-interpretado e desenvolvido pelos alunos. Foi sugerido como uma atividade de estudo em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, enquanto o tema que estava sendo abordado era relacionado às funções hiperbólicas, tendo sido enviado para o fórum de discussões, conforme relato no Extrato 37.

Extrato 37: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"

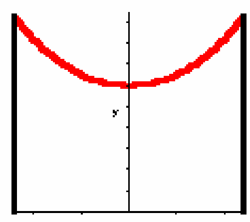
[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Mensagem Anterior: Funções Hiperbólicas
Próxima Mensagem: Métodos de integração

Catenária
Autor: **Laurete**
Data: Apr 23, 2002 9:00 am

Pessoal
Gostaria de convidar a todos os que tiverem interesse, para resolver um problema de aplicação da integral definida, envolvendo uma função hiperbólica, conforme Anton, 2000, p. 502:
"As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios, dentro de sólidos elásticos e, mais genericamente, em muitos problemas nos quais a energia mecânica é gradualmente absorvida pelo meio ambiente. Elas também ocorrem quando um cabo flexível e homogêneo é suspenso entre dois pontos, como as linhas telefônicas entre dois postes. Tais cabos formam uma curva camada de **catenária** (em latim, *catena* significa "cadeia"). Se, como na figura em anexo[54], foi introduzido um sistema de coordenadas tal que o ponto mais baixo do cabo está no eixo *y*, pode ser mostrado, usando princípios da Física, que o cabo tem uma equação da forma

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{b}\right).''$$



Calcule o comprimento da catenária $y = 12\cosh\left(\frac{x}{12}\right)$ de x = -12 a x = 12.

O principal destaque dos diálogos gerados por essa atividade, relacionado ao presente estudo, reside na variedade de propostas sugeridas para sua resolução, que, de forma alguma, estavam previstas no início do processo e cujas relações tornaram-se o principal tema dos diálogos. A identificação de tais relações proporcionou a diferenciação de certos conceitos que, conforme foi possível constatar, não estavam claros até então, o que, para Piaget é indispensável para a tomada de consciência e conseqüentemente para a aprendizagem. Nos Extratos 43 a 46 justifica-se essa constatação, analisando os diálogos gerados, nesse caso, entre os grupos, já que a turma estava organizada desta forma, desde o início do semestre, quando foi sugerido que as atividades propostas fossem resolvidas em grupos, o que não deveria impedir que participações individuais também ocorressem nos

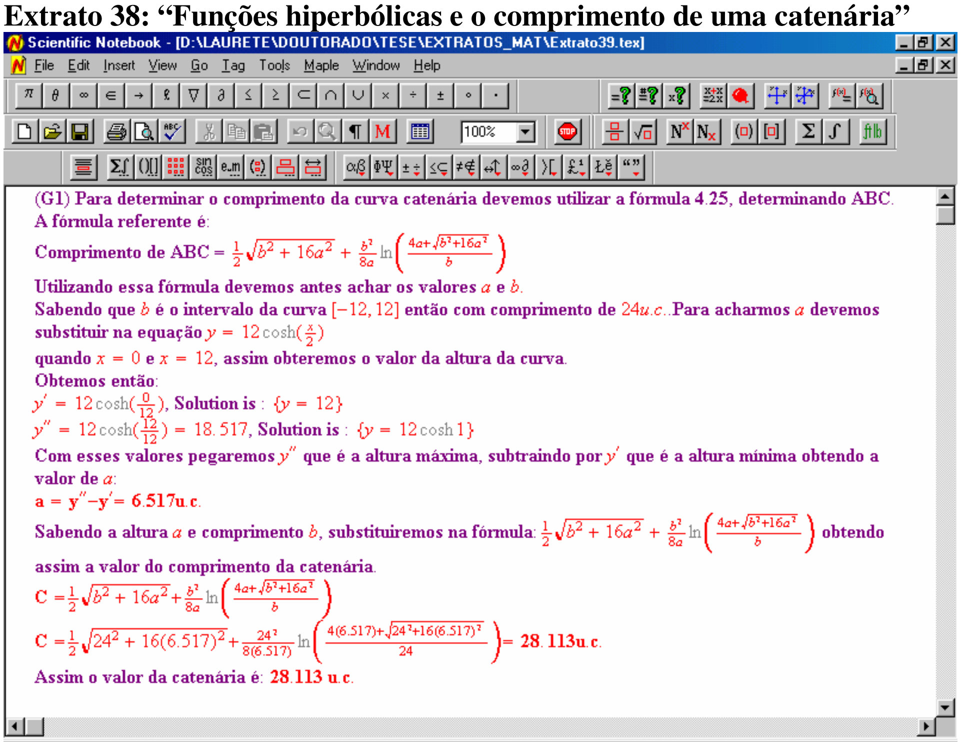
---

[54] A figura foi, originalmente, enviada em arquivo anexo do *Scientific Notebook*, pois a ferramenta do fórum não permite a edição de figuras.

diálogos, conforme seu interesse. Observou-se que a sugestão de resolução do problema foi prontamente aceita pelos grupos que, na verdade, passaram a enviar *contribuições independentes*, para o fórum, à medida que concluíam estudos e pesquisas. Assim, passa-se a comentar tais contribuições, nos Extratos 38 a 42, para melhor compreender os diálogos ocorridos a partir de então, que versaram sobre as comparações entre os resultados obtidos, já que diferiam entre si. De fato o interesse na análise dos diálogos gerados reside nas respostas apresentadas pelos grupos, como justificativa para tais diferenças e é nisso que se constituiu a principal fonte de aprendizagem nesse contexto, conforme se procurou mostrar na análise dos diálogos.

O Extrato 38 refere-se à proposta de resolução do problema enviada pelo grupo **G1**, em arquivo anexo do *Scientific Notebook*, conforme segue.

Extrato 38: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"



Scientific Notebook - [D:\LAURETE\DOUTORADO\TESE\EXTRATOS_MAT\Extrato39.tex]

File Edit Insert View Go Tag Tools Maple Window Help

(G1) Para determinar o comprimento da curva catenária devemos utilizar a fórmula 4.25, determinando ABC. A fórmula referente é:

Comprimento de ABC $= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a+\sqrt{b^2+16a^2}}{b}\right)$

Utilizando essa fórmula devemos antes achar os valores a e b.

Sabendo que b é o intervalo da curva $[-12, 12]$ então com comprimento de $24u.c.$.Para acharmos a devemos substituir na equação $y = 12\cosh(\frac{x}{2})$

quando $x = 0$ e $x = 12$, assim obteremos o valor da altura da curva.

Obtemos então:

$y' = 12\cosh(\frac{0}{12})$, Solution is : $\{y = 12\}$

$y'' = 12\cosh(\frac{12}{12}) = 18.517$, Solution is : $\{y = 12\cosh 1\}$

Com esses valores pegaremos y'' que é a altura máxima, subtraindo por y' que é a altura mínima obtendo a valor de a:

a = y″−y′= 6.517u.c.

Sabendo a altura a e comprimento b, substituiremos na fórmula: $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a+\sqrt{b^2+16a^2}}{b}\right)$ obtendo assim a valor do comprimento da catenária.

$C = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a+\sqrt{b^2+16a^2}}{b}\right)$

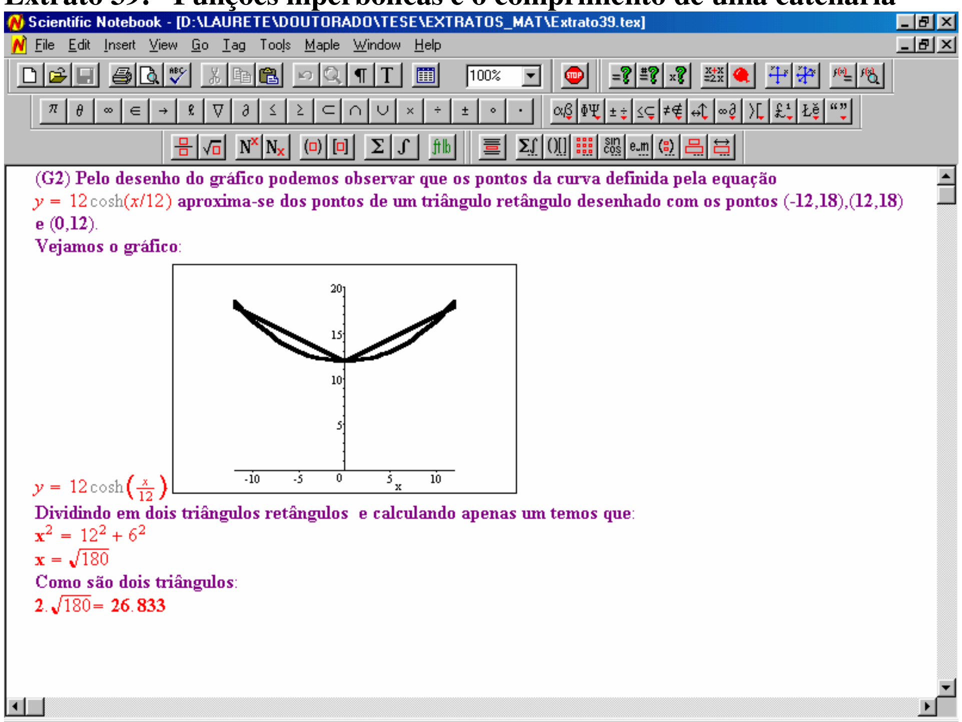
$C = \frac{1}{2}\sqrt{24^2 + 16(6.517)^2} + \frac{24^2}{8(6.517)}\ln\left(\frac{4(6.517)+\sqrt{24^2+16(6.517)^2}}{24}\right) = \mathbf{28.113u.c.}$

Assim o valor da catenária é: **28.113 u.c.**

Do ponto de vista da Matemática ali contida, todas as fórmulas foram aplicadas corretamente, com a devida identificação da relação entre coeficientes da curva fornecida e os da curva utilizada como aproximação. Ocorre que a fórmula 4.25,[55] aqui citada pelo grupo **G1** é, conforme o próprio texto, utilizada para um *segmento de parábola*. Sendo assim, embora o grupo a tenha utilizado corretamente, ignorou o fato de que, no problema em questão, a curva não é uma parábola mas uma catenária, o que poderia ter sido observado, levando em consideração seu conhecimento sobre *parábolas* e, conseqüentemente, compreendendo o resultado obtido, como uma aproximação do verdadeiro valor. Ou seria uma *catenária* o mesmo que uma *parábola*?[56]

O grupo **G2**, por sua vez, calculou o comprimento da catenária, com o auxílio do teorema de Pitágoras,[57] conforme mostra o Extrato 39.

Extrato 39: “Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária”



---

[55] Conforme SPIEGEL, S. **Manual de fórmulas, métodos e tabelas de Matemática**. São Paulo: McGraw-Hill, 1992.

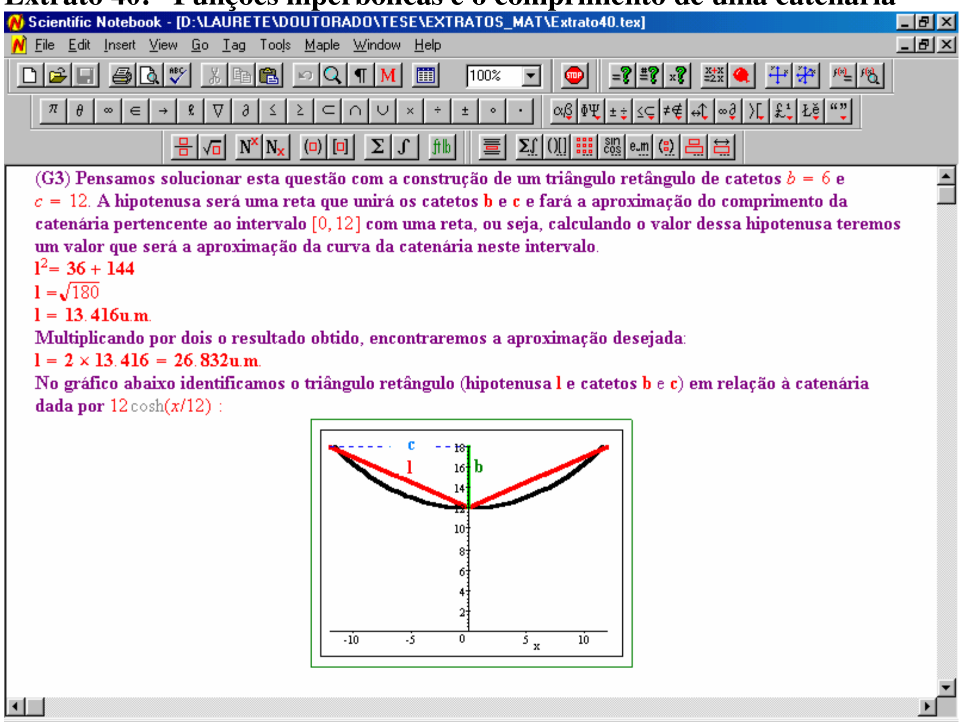
[56] De acordo com Boyer (1996, p. 224), “no século XVII, Galileu erradamente supôs ter encontrado uma aplicação da parábola, na curva de suspensão de uma corda ou cadeia (catena) flexível; mais tarde, ainda no mesmo século, provou-se que essa curva, a catenária, não só não é uma parábola como nem sequer é algébrica”.

[57] Conforme Boyer (1996, p. 260), “em 1659, John Wallis observou que um arco pequeno é praticamente a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos lados são os incrementos da abscissa e ordenada – isto é, o equivalente à fórmula aqui utilizada”.

Porém, aqui também não houve sequer uma referência ao teorema de Pitágoras nem ao fato de que o valor obtido é uma aproximação do valor real. É verdade que uma representação gráfica foi apresentada, onde se pode observar a diferença entre as formas geométricas em questão. Mas nenhum comentário a respeito do valor encontrado foi acrescentado. Seria, então, 26,833 unidades de medida, o comprimento da *catenária*?

Já o grupo **G3** apresenta, conforme o Extrato 40, uma versão do problema utilizando, como o grupo **G2**, uma abordagem através do teorema de Pitágoras, porém salientando que se trata de uma *"aproximação do comprimento da catenária"*, conforme argumentação apresentada.

Extrato 40: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"



Scientific Notebook - [D:\LAURETE\DOUTORADO\TESE\EXTRATOS_MAT\Extrato40.tex]

(G3) Pensamos solucionar esta questão com a construção de um triângulo retângulo de catetos $b = 6$ e $c = 12$. A hipotenusa será uma reta que unirá os catetos b e c e fará a aproximação do comprimento da catenária pertencente ao intervalo $[0, 12]$ com uma reta, ou seja, calculando o valor dessa hipotenusa teremos um valor que será a aproximação da curva da catenária neste intervalo.

$l^2 = 36 + 144$

$l = \sqrt{180}$

$l = 13.416$u.m.

Multiplicando por dois o resultado obtido, encontraremos a aproximação desejada:

$l = 2 \times 13.416 = 26.832$u.m.

No gráfico abaixo identificamos o triângulo retângulo (hipotenusa l e catetos b e c) em relação à catenária dada por $12\cosh(x/12)$:

Ainda que o mesmo símbolo *"l"* tenha sido utilizado, tanto para referir-se ao valor da hipotenusa (*l = 13,416*), quanto ao seu dobro, o comprimento aproximado da catenária (*l = 26,832*), observa-se aqui a identificação do método utilizado, bem como o reconhecimento de que se trata de uma *"aproximação da curva da catenária"*. Isso já sinaliza o início do processo de tomada de consciência que pode ser continuado por sucessivas superações, realizadas na interação sujeito-objeto (Piaget) ou sujeito-sujeito (Freire), a partir de experiências lógico-matemáticas que consistem em agir sobre os objetos e extrair dessas ações suas propriedades (BECKER, 1997).

Quanto ao valor exato do comprimento da catenária, este foi calculado por dois grupos, **G4** e **G5**, que pesquisaram sobre a fórmula utilizada para calcular o comprimento de um arco, um tema geralmente presente em programas de Cálculo Diferencial e Integral, dada sua relevância como uma das aplicações da integral definida, historicamente[58] considerados nos estudos relacionados ao tema.

Apresenta-se no Extrato 41 as contribuições dos grupos **G4** e **G5**, entre os quais já houve um diálogo: os grupos cooperam visando esclarecer dúvidas.

Extrato 41: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"

Scientific Notebook - [D:\LAURETE\DOUTORADO\TESE\EXTRATOS_MAT\Extrato41.tex]

File Edit Insert View Go Tag Tools Maple Window Help

(G4) *Sobre as funções hiperbólicas, tivemos uma dúvida: para calcularmos o comprimento da catenária procuramos e achamos uma fórmula, a qual é:* $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.
Como a função dada é $y = 12\cosh\frac{x}{12}$, *no intervalo de* $x=-12$ *a* $x=12$, *nós fizemos:*
$\int_0^{12}\sqrt{1+\left(\sinh\frac{1}{12}x\right)^2}\,dx$, *e após multiplicamos por 2.*
Não sabemos como fazer a integral de: $\int_0^{12}\sqrt{1+\left(\sinh\frac{1}{12}x\right)^2}\,dx$, *tentamos resolver da seguinte maneira, mas o valor é muito baixo, ou seja, não está de acordo com o esperado, veja:*

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^{12}\sqrt{1+\left(\sinh\frac{1}{12}x\right)^2}\,dx = \int_0^{12}\left(1+\left(\sinh\frac{1}{12}x\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx = \left(\frac{2}{3}\left(1+\sinh\left(\frac{x}{12}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1+\sinh\left(\frac{12}{12}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+\sinh(0))^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(1+\sinh(1)^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+(1.175)^2\right)^3} - \frac{2}{3}$$

$$= 1.7821 \times 2 = 3.5642$$

(G5) Achamos que o que está mal, aí, é a antiderivada da função $\sqrt{1+senh^2\frac{x}{12}}$.
Para calcularmos o comprimento da catenária, também usamos a fórmula para calcular o comprimento do arco da curva através da integral $\int_b^a \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, então calculamos o comprimento de $y = 12\cosh(\frac{x}{12})$, no intervalo de $x=-12$ a $x=12$. Para isso calculamos a derivada da função $y = 12\cosh(\frac{x}{12})$:

$$f'(x) = 12\sinh\left(\frac{x}{12}\right) * \frac{12*1-x*0}{12^2} = 12\sinh\left(\frac{x}{12}\right) * \frac{12}{144} = \sinh\frac{x}{12}\,dx$$

Logo, a derivada da função é igual a $f'(x) = \sinh\frac{x}{12}dx$. Com o resultado obtido podemos calcular a integral no intervalo citado de $[-12, 12]$:

$$\int_b^a \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_{-12}^{12}\sqrt{1+\left(\sinh\frac{x}{12}\right)^2}\,dx = \int_{-12}^{12}\sqrt{\cosh^2\frac{x}{12}}\,dx = \int_{-12}^{12}\cosh\frac{x}{12}dx = 12(e^2-1)e^{-1} = 28.205$$

Portanto, o comprimento da catenária no intervalo $[-12, 12]$ é igual à $28.205 u.c.$

(G4) *Mas como a gente explica a segunda igualdade:* $\int_{-12}^{12}\sqrt{1+\left(\sinh\frac{x}{12}\right)^2}\,dx = \int_{-12}^{12}\sqrt{\cosh^2\frac{x}{12}}\,dx$??
(G5) É que $1+\sinh^2 x = \cosh^2 x$.

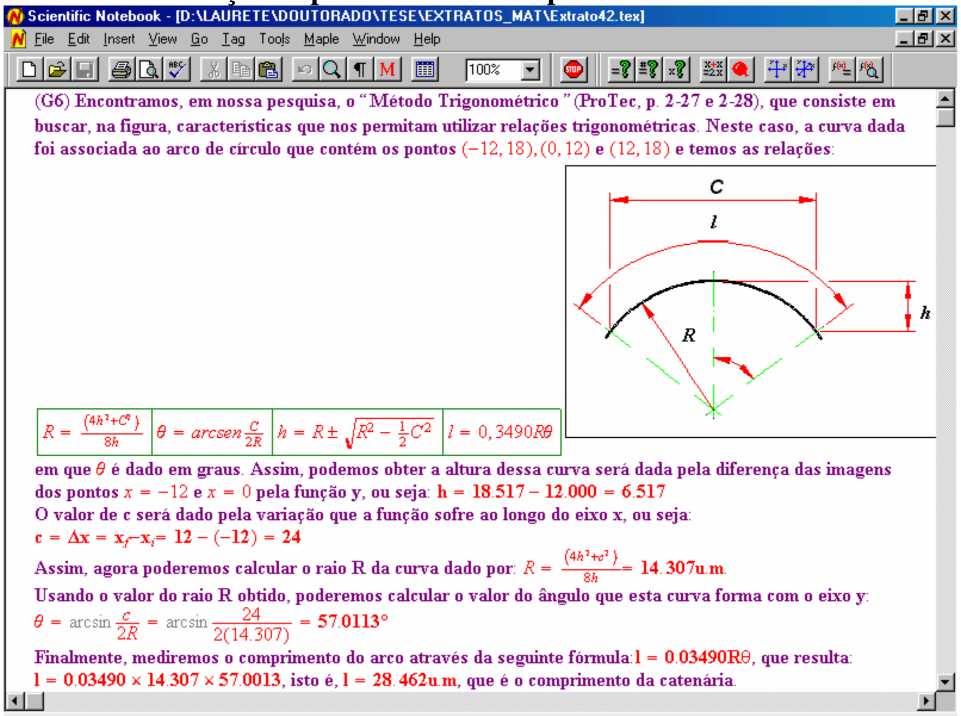
---

[58] Embora, desde a Antiguidade, já fosse conhecida a medida do comprimento de um arco de circunferência, por muito tempo pensou-se que o problema de se retificar certas curvas, isto é, de construir um segmento de reta de mesmo comprimento de uma dada curva, tal como um arco de parábola, era impossível de ser resolvido para curvas algébricas. Foi por volta de 1650, usando técnicas do Cálculo Infinitesimal que William Neil resolveu pela primeira vez o problema de calcular o comprimento de um arco da parábola semicúbica $y^2 = x^3$. Em 1658, Christopher Wren, famoso arquiteto, encontrou o comprimento de um arco da ciclóide. Em 1659, Hendrick van Heuraet generalizou esse processo somando tangentes infinitesimais a uma curva, desenvolvendo, portanto, a essência de nosso método moderno de *retificação*, usando uma integral para encontrar o comprimento de um arco (BOYER, 1996).

O que se pode constatar, nas propostas apresentadas pelos grupos **G4** e **G5**, é que ambos concluíram corretamente sobre uma possibilidade de se calcular o comprimento de um arco de curva qualquer, desde que se conheça sua equação, como é o caso aqui. A diferença entre as duas contribuições apresentadas é relacionada à problematização trazida pelo grupo **G4** e esclarecida pelo grupo **G5**, quanto ao método necessário para calcular a integral envolvida na fórmula utilizada. Na verdade, não estavam compreendendo como encontrar a antiderivada da função dada por $y = \sqrt{1 + senh^2\left(\frac{x}{12}\right)}$. De fato, essa antiderivação não é imediata e é resolvida, aqui, com o uso de uma relação entre as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, corretamente identificada pelo grupo **G5**. O modo como o grupo **G4** procurou calcular a antiderivada em questão poderia ser um tema de análise e discussão. Entretanto este não representou um empecilho para a compreensão do contexto. Ao contrário, o grupo percebeu que algo não estava bem, mas não procurou outra abordagem, provavelmente pelo fato de entender estar de acordo com o que procurava. Por isso a problematização: *“* [...] *não sabemos como fazer a integral* [...] *o valor é muito baixo, ou seja, não está de acordo com o esperado* [...]*”*.

Finalmente, uma abordagem denominada *método trigonométrico* foi trazida pelo grupo **G6** e é apresentada no Extrato 42.

Extrato 42: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"



Scientific Notebook - [D:\LAURETE\DOUTORADO\TESE\EXTRATOS_MAT\Extrato42.tex]

File Edit Insert View Go Tag Tools Maple Window Help

(G6) Encontramos, em nossa pesquisa, o "Método Trigonométrico" (ProTec, p. 2-27 e 2-28), que consiste em buscar, na figura, características que nos permitam utilizar relações trigonométricas. Neste caso, a curva dada foi associada ao arco de círculo que contém os pontos $(-12, 18), (0, 12)$ e $(12, 18)$ e temos as relações:

$R = \frac{(4h^2+C^2)}{8h}$	$\theta = arcsen\frac{C}{2R}$	$h = R \pm \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}C^2}$	$l = 0,3490R\theta$

em que θ é dado em graus. Assim, podemos obter a altura dessa curva será dada pela diferença das imagens dos pontos $x = -12$ e $x = 0$ pela função y, ou seja: $h = 18.517 - 12.000 = 6.517$

O valor de c será dado pela variação que a função sofre ao longo do eixo x, ou seja:

$c = \Delta x = x_f - x_i = 12 - (-12) = 24$

Assim, agora poderemos calcular o raio R da curva dado por: $R = \frac{(4h^2+c^2)}{8h} = 14.307$u.m.

Usando o valor do raio R obtido, poderemos calcular o valor do ângulo que esta curva forma com o eixo y:

$\theta = \arcsin\frac{c}{2R} = \arcsin\frac{24}{2(14.307)} = 57.0113°$

Finalmente, mediremos o comprimento do arco através da seguinte fórmula: $l = 0.03490R\theta$, que resulta:

$l = 0.03490 \times 14.307 \times 57.0013$, isto é, $l = 28.462$u.m, que é o comprimento da catenária.

A riqueza da contribuição apresentada pelo grupo **G6** consiste na abordagem prática trazida pelo grupo, considerando métodos disponíveis na literatura, cujas referências foram trazidas pelo próprio grupo, por meio de manuais utilizados em algumas áreas de Engenharia.[59] Tais métodos permitem que a forma de determinada *peça* possa ser aproximada à de uma forma geométrica conhecida, no caso o círculo, de modo que possam ser utilizadas as fórmulas estabelecidas. Em particular, tal contribuição pode motivar a discussão sobre a validade de *regras práticas* utilizadas pelos engenheiros ou projetistas que, como esta, forneceu uma ótima aproximação do valor exato.

Mas, como se afirmou ao selecionar para esse estudo a discussão originada pelo problema das "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária", os diálogos promovidos entre os grupos, a partir dos *achados* de suas pesquisas, constituem o maior interesse nesse estudo e se passa a analisá-los. Percebeu-se que cada uma das abordagens utilizadas pelos grupos poderia ser analisada individualmente e, sem dúvida, mereceria atenção, tanto de matemáticos quanto de educadores matemáticos. Entretanto, optou-se pela

---

[59] CASILLAS, A.L. **Formulário técnico**. 3. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1981.
GIECK, K. **Manual de fórmulas técnicas**. 4. ed. São Paulo: Hemus, 1998.
PROVENZA, F. **Desenhista de máquinas**. 4. ed. São Paulo: Pro-Tec, 1978.

análise das possibilidades de progresso, a partir da comparação dos métodos utilizados. Observando que as contribuições eram *independentes*, a não ser pelo diálogo ocorrido entre os grupos **G4** e **G5**, relatado no Extrato 41, por estarem trabalhando com o mesmo método, procurou-se promover o diálogo através de um convite no qual se chamava a atenção sobre a diversidade de abordagens trazidas pelos grupos para o problema em questão. E uma primeira constatação surge antes mesmo da análise dos diálogos: as contribuições apresentadas foram muito mais ricas, justamente por não ter sido sugerido o cálculo por meio da fórmula utilizada para determinar o comprimento de um arco, como é de praxe, quando se trabalha com aplicações da integral definida. Isso também não impediu que o mesmo *aparecesse* tornando-se, assim, do conhecimento de todos os interessados. Porém, os outros três procedimentos também merecem atenção, visto consistirem de *aproximações*, conforme se procurou esclarecer na reflexão promovida pelos diálogos. Para isso solicitou-se que justificassem a diferença entre os resultados obtidos nas diferentes abordagens, salientando que a integral utilizada pelos grupos **G4** e **G5** é a que fornece o comprimento exato da catenária, por se tratar de um método para o cálculo do *comprimento de um arco de curva qualquer*, a partir de sua equação. Acredita-se que essa problematização foi fonte de desequilíbrios, cuja superação ocorreu por progressivas tomadas de consciência das ações. A constatação da semelhança entre os resultados encontrados com métodos diferentes desafiou-os a buscarem argumentos mediante abstração lógico-matemática: refletindo sobre o significado das operações realizadas e confrontando-as com as demais, o que pode implicar compreensão, ou seja, tomada de consciência de terceiro nível.

No Extrato 43, a seguir, é apresentado o diálogo iniciado pelo grupo **G1**, com a resposta ao convite feito.

Extrato 43: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"

[Tópico Inicial | Nova Mensagem | Responder | Procurar]

Mensagem Anterior: Funções Hiperbólicas
Próxima Mensagem: Métodos de integração

Re: Catenária
Autor: **G1**
Data: Apr 29, 2002 10:11 am

Comparamos o resultado encontrado com a fórmula 4.25 [60] com o obtido com a fórmula utilizada pelos grupos **G4** e **G5** [61] e observamos que a diferença encontrada deve-se ao arredondamento dos valores nos cálculos ou o modo de cálculo pelo *software*.

Re: Catenária
Autor: **Laurete**
Data: Apr 29, 2002 1:45 pm

Mas são fórmulas diferentes e, além disto, a fórmula 4.25 é utilizada para arcos de parábolas. A catenária é uma parábola?

Re: Catenária
Autor: **G1**
Data: Apr 29, 2002 4:56 pm

Não, é uma catenária.

Re: Catenária
Autor: **Laurete**
Data: Apr 29, 2002 7:15 pm

Justamente! E como podemos justificar a diferença, então?

Re: Catenária
Autor: **G1**
Data: Apr 29, 2002 9:41 pm

A catenária não é uma parábola pois não segue a equação $ax^2 + bx + c = 0$, por isso obtivemos um valor aproximado.

Re: Catenária
Autor: **Laurete**
Data: Apr 29, 2002 9:55 pm

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ não representa uma parábola e, sim, no máximo, dois pontos da reta retal! Verifiquem! Qual é a forma geral de uma função quadrática?

Re: Catenária
Autor: **G1**
Data: Apr 30, 2002 8:15 am

Sim, é verdade. A equação de uma parábola é dada por $y = ax^2 + bx + c$, que é uma função (conjunto de pontos). A equação que citamos acima é uma equação do segundo grau que tem, no máximo, duas raízes reais, x' e x".

Re: Catenária
Autor: **Laurete**
Data: Apr 30, 2002 9:50 am

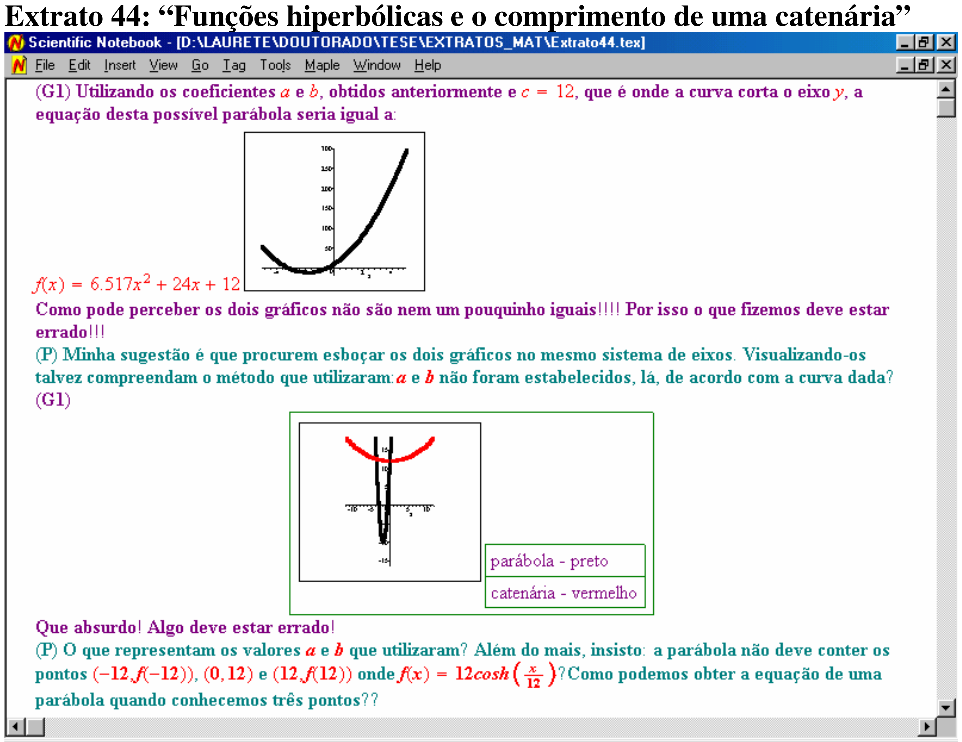
É isto mesmo! E que equação tem a parábola cujo comprimento encontraram?

---

[60] Ver Extrato 38.
[61] Ver Extrato 41.

As respostas dadas pelo grupo **G1** demonstram, aqui também, a falta de compreensão dos significados dos termos envolvidos na fórmula utilizada, bem como de sua própria utilidade, contentando-se com resultados satisfatórios e demonstrando dificuldade em dar significado às ações (manipulação correta das fórmulas) realizadas. No caso específico dos significados, conforme mostra o Extrato 44, observa-se que a, b e c foram considerados pelo grupo **G1** como sendo os próprios coeficientes de uma função quadrática ($y = ax^2 + bx + c$), independentemente de estarem sendo utilizados de forma diferente, no caso do comprimento de arco de parábola.

Extrato 44: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"



O texto citado pelo grupo **G1** como fonte de pesquisa para este estudo deixa claro, em uma figura ilustrativa, o significado atribuído aos coeficientes a e b considerados naquele caso. Era de se esperar que não os utilizassem em lugar dos coeficientes a, b e c, da forma algébrica de uma parábola. Entretanto, presos às fórmulas que utilizam desde o Ensino Fundamental e Médio, pois esse é o caso da função quadrática, apresentam dificuldade quando, em situações diferentes, fórmulas que utilizam os mesmos símbolos, lhes são apresentadas. Mas parece que o diálogo ocorreu em um bom momento, tal que o desafio motivou-os a prosseguir na busca desse esclarecimento. Observa-se ainda, que, num primeiro momento, apenas o grupo **G1** responsabilizou-se pela continuação do diálogo, talvez por estar relacionado à abordagem utilizada por este. Porém os demais grupos estavam acompanhando e, de certa forma, interagindo, como é possível observar no Extrato 45 em que fica evidente como foi que o grupo **G2**, em cooperação com o grupo **G1**, continuou o percurso em direção à melhor compreensão do que estava em discussão: a causa da diferença entre os vários resultados obtidos para o *"comprimento da catenária"*. Convém lembrar, aqui, que o grupo **G1**, com seu método, encontrou um comprimento aproximado de 28,113 unidades e que o grupo **G2** foi o que utilizou o teorema de Pitágoras, obtendo um valor de 26,833 unidades para o comprimento da curva, não chegando a mencionar o fato de tratar-se de uma *aproximação* do valor exato.

Extrato 45: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"

Scientific Notebook - [D:\LAURETE\DOUTORADO\TESE\EXTRATOS_MAT\Extrato45.tex]

File Edit Insert View Go Tag Tools Maple Window Help

(G2) Claro, o valor que encontramos para o comprimento, com o teorema de Pitágoras, é uma aproximação do comprimento da curva dada. E achamos que se a parábola do grupo G1 deve passar pelos pontos em que a catenária passa, então deve ser:

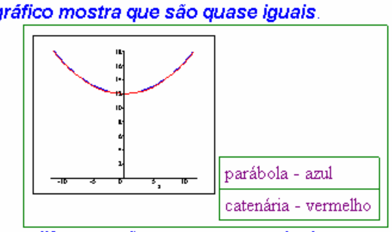
$f(x) = 12\cosh\left(\frac{x}{12}\right) \Rightarrow f(-12) = 18.517; f(0) = 12.0$ e $f(12) = 18.517$

Ou seja, a parábola passa pelos pontos $(-12, 18, 52)$, $(0, 12)$ e $(12, 18, 52)$. Aí dá prá achar a função da parábola, é isso?

(G1) *Quer dizer que* $f(x) = ax^2+bx+c$ *então é só resolver o sistema? Não pensamos nisso antes*:

$$\left\{\begin{array}{l} a(-12)^2 + b(-12) + c = 18.52 \\ a(0)^2 + b(0) + c = 12 \\ a(12)^2 + b(12) + c = 18.52 \end{array}\right., \text{ Solution is: } \{b = 0, c = 12.0, a = 4.5278 \times 10^{-2}\}$$

Então a parábola que tem o comprimento que encontramos com o nosso método tem a equação: $y = 4,53 \times 10^{-2}x^2+12$ *e o gráfico mostra que são quase iguais.*



Podemos perceber por que a diferença tão pequena ao calcular o comprimento da catenária utilizando as duas fórmulas, isto é, $\Delta C = 28,205 - 28,113 = 0,092$. *Esta diferença pode ser explicada porque o valor exato do comprimento da catenária é aquele obtido através da fórmula* $\int_{-12}^{12} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$. *Elas não tem os mesmos pontos! Mas a aproximação foi muito boa!!!*

(P) Sim, é muito boa! Será que isto se mantém em todos os respectivos domínios?

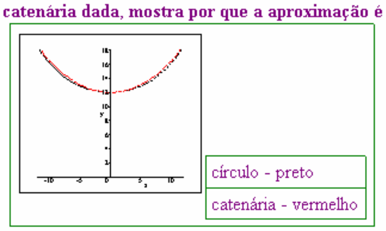
É evidente que a aproximação é muito boa. Porém é imprescindível que reconheçam a diferença entre as duas formas geométricas. Nesse caso, em particular, como partiram da forma geométrica para escolher o método, o que foi feito de acordo com as características da curva, era de se esperar que a aproximação fosse boa no intervalo considerado. Mas nem sempre se pode contar com tantas possibilidades. O mais importante foi terem tomado conhecimento de várias possibilidades, mas que as tenham diferenciado também. Percebe-se que a disposição demonstrada pelo grupo **G1** foi o que desencadeou o interesse dos demais grupos em esclarecer os métodos empregados, além de promover a melhor compreensão das formas geométricas que surgiram. E, realmente, foi o que aconteceu, pois o argumento apresentado para confirmar que *'a catenária não é uma parábola'* serviu, também, para o grupo **G6** observar, logo a seguir, que *"a catenária não é um arco de círculo"*, conforme mostrado no Extrato 46.

Extrato 46: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"

(G6) Nossa justificativa para a aproximação que obtivemos com o método trigonométrico é a seguinte: considerando o que os colegas constataram, que a catenária passa pelos pontos $(-12; 18,52)$, $(0, 12)$ e $(12; 18,52)$ e sabendo que um círculo tem equação da forma $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, podemos, também encontrá-la, com o auxílio do Scientific Notebook:

$$\left\{\begin{array}{l} (-12-a)^2+(18.52-b)^2=r^2 \\ (0-a)^2+(12-b)^2=r^2 \\ (12-a)^2+(18.52-b)^2=r^2 \end{array}\right., \text{ Solution is : } \{a=0, b=26.303, r=\pm 14.303\}$$

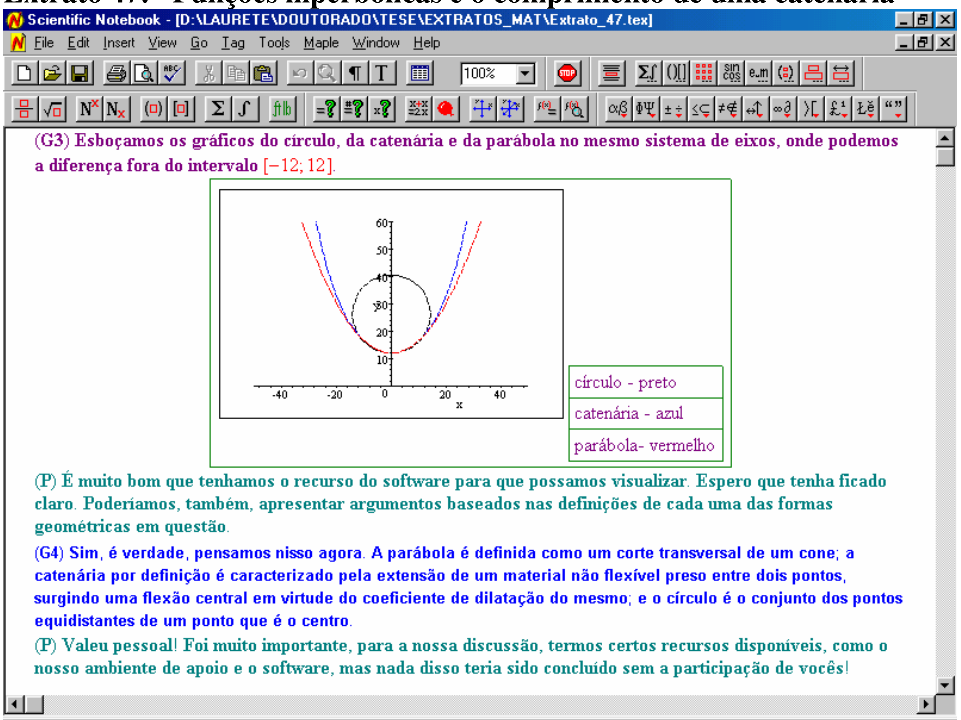
Então o arco de círculo que tem o comprimento que encontramos tem equação: $x^2+(y-26,3)^2=14,3^2$.
E o seu gráfico, junto com o da catenária dada, mostra por que a aproximação é boa:



(P) É isso aí pessoal! De fato, todos os resultados obtidos pelos grupos são aproximações excelentes do valor exato, que é calculado através da integral. Porém não podemos deixar de refletir sobre a questão que sugeri anteriormente: Como é que fica se olhamos estas funções em outro intervalo?

No Extrato 46 o grupo **G6** demonstra como determinou a equação do círculo que tem pontos em comum com a catenária. Porém, assim como os demais, ainda não comentou sobre a qualidade da aproximação obtida, caso as duas curvas sejam comparadas em outro intervalo. Essa tarefa foi realizada com sucesso pelo grupo **G3** que apresentou uma comparação das três curvas, ampliando o intervalo [-12;12] para [-50;50] no eixo horizontal, evidenciando, assim, que no intervalo considerado, de fato, todas as abordagens podem ser consideradas dependendo, porém, da precisão desejada, já que o valor exato é fornecido pela integral.

Extrato 47: "Funções hiperbólicas e o comprimento de uma catenária"



É importante salientar que a aprendizagem, de acordo com o que se está valorizando neste estudo, ocorreu a partir das discussões geradas em torno da comparação dos resultados obtidos, muito embora se deva reconhecer que cada um dos achados das pesquisas dos grupos já se constituiu, sem dúvida, em aprendizagem. Porém, ao confrontarem as diversas possibilidades foi possível perceber, na fragilidade de seus argumentos iniciais, a necessidade de reflexões sobre as reflexões, o que permitiu, àqueles que se envolveram, a tomada de consciência com conceituação (terceiro nível). A análise das discussões geradas por esse problema revela um caso típico de tomada de consciência por regulação ativa, não por inadaptação. Percebe-se aqui como o erro não é condição necessária para a aprendizagem. Com efeito, a inadaptação não foi a condição para o progresso, conforme se constatou ao analisar os resultados das pesquisas de todos os grupos. Ou seja, em todos os casos foi determinada uma aproximação aceitável ou o próprio comprimento da catenária, que era o objetivo inicial da atividade proposta. Entretanto houve uma progressiva tomada de consciência, a partir das reflexões promovidas com a solicitação da comparação entre os resultados obtidos. As tomadas de consciência ocorreram como uma transição do fazer (primeiro nível) ao compreender (terceiro nível). No nível intermediário, as coordenações das ações buscaram apoiá-las em teorias, assimilando-as pela própria consciência e procurando explicá-las.

Vale comentar a semelhança das soluções apresentadas pelos grupos **G2** e **G3** que, intuitivamente, propuseram, para o cálculo do comprimento da catenária, a aplicação do teorema de Pitágoras, com a retificação de uma curva. Estariam percorrendo o mesmo caminho que foi percorrido na evolução histórica desse processo? Surge uma nova questão de pesquisa: diálogos possibilitarão reflexões que repetem o processo histórico?

É inegável, também, o papel do ambiente de discussões, possibilitando os registros das intervenções, de modo que todos possam acompanhar a qualquer momento. Outro fator importante é a possibilidade de utilização do *software* matemático, imprescindível para a comunicação em diálogos matemáticos, com destaque para os gráficos apresentados que, nesta situação, não poderiam faltar. O trabalho requerido para os cálculos manuais necessários para o esboço dos gráficos das curvas foi, aqui, substituído, com qualidade, pelas observações e análises das mesmas, bem como de suas formas algébricas. Cabe ressaltar que, também neste caso, o conteúdo dos diálogos foi registrado em uma *produção coletiva* que, conforme seu papel como um *texto dialógico*, continua disponível no ambiente e aberto às novas intervenções possíveis.

5.2.3 A relação de co-implicação entre *concepções dos alunos* e *diálogos matemáticos*

Atividades de auto-avaliação constituem a fonte dos dados para análise da relação que aqui se quer evidenciar, por promoverem a reflexão sobre o **próprio** processo desencadeado pela crítica epistemológica do aluno, promovida no primeiro dia de aula, e desenvolvido com a realização de diálogos matemáticos.

São propostas visando promover a avaliação do processo de desenvolvimento de cada aluno. Ao analisar o respectivo desempenho procurando identificar e justificar, explicitando o assunto relacionado, as dificuldades encontradas, e apontando possíveis ações que possam auxiliar a superá-las, o aluno pode avaliar seu grau de envolvimento e assumir sua responsabilidade, se assim o desejar. São solicitadas também avaliações individuais sobre o grau de cooperação na interação com os colegas, visando melhorar a qualidade dos diálogos, bem como sobre a aprendizagem relacionada a cada atividade realizada. Além disso, são levantadas questões relacionadas à assiduidade; ao interesse; tempo dedicado ao estudo; cumprimento e à crítica construtiva de tarefas propostas, utilização da bibliografia sugerida, dos recursos disponibilizados pela Universidade, tais como biblioteca, laboratórios e monitorias, procurando incentivar que apresente sugestões ou comentários relevantes, que possam colaborar para melhorar as condições de aprendizagem.

Essas atividades são sugeridas de acordo com a intenção de *escutar o aluno* e, em cada etapa, levar em consideração o ponto de vista manifestado na programação de estratégias que auxiliem a atingir os objetivos propostos, revendo sempre quais são esses objetivos. Assim, as concepções manifestadas são consideradas, não somente na análise da qualidade das propostas de trabalho e estudo, como também, na programação das atividades seguintes.

Para esta análise foram selecionados os extratos que melhor explicitam as relações entre concepções iniciais e tomadas de consciência observadas nos diálogos matemáticos. Tais extratos originaram-se de uma atividade de auto-avaliação realizada por duas turmas, no final de uma etapa, durante o desenvolvimento de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. A mesma foi proposta por meio de uma mensagem postada no fórum de discussões, nos seguintes termos:

Atividade de Auto-Avaliação

Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Mensagem Anterior: Área – Problema 4
Próxima Mensagem: Atividade 1 – segunda parte

Primeira Auto-Avaliação
Autor: **Laurete**
Data: May 3, 2002 8:44 am

Caros alunos

Ao encerrarmos uma etapa de nosso semestre, quero convidá-los a refletirem comigo sobre as atividades que estamos realizando e suas conseqüências em termos de aprendizagem.
No primeiro dia de aula, quando apresentei o programa da disciplina, procurei promover uma reflexão sobre a importância de que cada um assumisse sua parcela de responsabilidade na construção de seu conhecimento, através do envolvimento e da participação nas atividades propostas para o seu desenvolvimento com qualidade. Assim sendo, a própria proposta metodológica apresentada enfatiza e foi planejada de acordo com tais pressupostos. Não tenho dúvidas quanto à qualidade do aproveitamento de todos os que se "envolveram" desde o início, estudando e procurando aperfeiçoar e esclarecer as dúvidas existentes, para que pudéssemos concluir todas as discussões com boa qualidade.
Com o objetivo de incentivar, mais uma vez, suas participações nesse processo para podermos analisar, juntos, suas condições em relação aos estudos realizados, sugiro que avaliem suas **participações** até aqui, relacionando-as aos nossos **objetivos** e acrescentando todas as **sugestões** ou **comentários** que julgarem relevantes e que possam contribuir com a melhoria de suas condições de **aprendizagem**.
Conto com a participação de todos!
Abraços,
Laurete

Para que os alunos assumam a responsabilidade por suas manifestações, o que também é uma forma de desenvolver autonomia, essas auto-avaliações não são anônimas. É preciso que se assumam como sujeitos no processo. Entretanto, como forma de incentivar que apresentem todas as suas opiniões, expressando-as com liberdade e responsabilidade, sugere-se que fiquem à vontade quanto a postá-las no fórum de discussões ou nas pastas individuais, disponíveis no ambiente virtual de aprendizagem, se assim lhes convier.

A partir da análise dos depoimentos, foi possível identificar três níveis tendo em vista a relação entre as categorias *concepções dos alunos* e *diálogos matemáticos*, respectivamente analisadas anteriormente. Tais níveis estão associados à *ausência*, *presença em processo* e *presença marcante* da superação de obstáculos pedagógicos evidenciados nas primeiras reflexões, conforme as análises dos Extratos 4 a 20.

Os Extratos 48 a 58 foram selecionados de auto-avaliações postadas nas pastas individuais dos ambientes de apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Nos Extratos 48 a 51, identifica-se a total *ausência* de reflexão sobre possibilidades de mudança de suas concepções iniciais. Continuam deixando claro que acreditam que a aprendizagem deve ocorrer na sala de aula e que ao aluno compete realizar exercícios procurando encontrar as respostas. Às vezes não sabem o que sugerir para melhorar suas condições de aprendizagem, o que revela a concepção de que isso compete ao professor, ou seja, o aluno cumpriu seu papel, que é o de fazer e refazer exercícios, estudar e se esforçar, porém não está satisfeito com seus resultados até aqui. O problema é o professor, que deve se adaptar ao método do aluno, conforme se pode observar no Extrato 48 (grifos nossos).

Extrato 48

[...] Acho que os assuntos são pouco abordados em aula. Devíamos ter feito mais exemplos desse assunto. Procurei estudar o máximo possível, fiz todos os exercícios. **Sei que fazer os exercícios encontrando as respostas esperadas não significa que aprendemos o conteúdo**, mas acho também que teorizar não compete à matemática, que é uma ciência exata. Não sei o que sugerir, como já disse fiz exercícios, estudei, me esforcei e o resultado não foi dos melhores. Estudei, fiz e refiz os exercícios, apesar da senhora achar que os exercícios não são importantes. Mas eu continuarei dizendo que para mim os exercícios são muito importantes, eles é que permitem ver os meus erros. [...]

Extrato 49

[...] Meu objetivo era dominar com alguma segurança o conteúdo, e creio que o atingi porque não necessitei muito da ajuda dos colegas e só não consegui uma nota melhor porque não tive acesso e tempo para fazer os trabalhos no scientific com a ajuda extra-classe.
Com certeza, rever a matéria em uma questão diferente é produtivo.
Sabemos que aprendemos quando conseguimos por meios racionais a obtenção de um resultado que pode ser coerente, com provas e/ou trabalhos mas não tive tempo suficiente para fazer as tarefas extra-classe e como não tive oportunidade de discutir como foi feito pelo restante da turma, me sinto bastante prejudicado nesse ponto.
Sugiro que não seja necessário usar o scientific fora do horário de aula. [...]

No Extrato 49 (grifos nossos), observa-se que o aluno acredita que aprendeu uma parte por não ter interagido com os colegas. O insucesso observado numa segunda parte é atribuído à falta de interação. Aqui se depara com uma contradição. Ao atribuir o insucesso à impossibilidade de utilização do *"scientific com a ajuda extra-classe"* entende-se que está se referindo à falta de participação nos diálogos matemáticos realizados a distância. Por um lado, aprendeu sozinho e, por outro, sentiu-se prejudicado por não ter recebido a ajuda que, na realidade, não buscou. Não há, aqui, o comprometimento com o estudo. Além disso acredita que sabe que aprendeu quando consegue boas notas em exercícios e provas. Finaliza sugerindo que não sejam promovidos diálogos fora do horário de aula. Consideram-se essas afirmações uma conseqüência de sucesso anterior (notas boas no Ensino Fundamental e

Médio), a partir de métodos tradicionais, quando para aprender bastava assistir às aulas e repetir os procedimentos demonstrados pelo professor. Pode-se inferir que a metodologia escolar pode potencializar-se como um obstáculo pedagógico do aprender.

Porém, sinaliza num breve comentário o reconhecimento da importância de *"rever a matéria"*, o que quer dizer que está levando em consideração a importância de conceitos adquiridos anteriormente na construção de seu conhecimento.

Extrato 50

> [...] O meu objetivo, com relação ao tema de estudos para esta etapa era de captar o máximo de informações possíveis, entender a matéria para poder ir bem nas provas e conseqüentemente não ter que repetir tudo de novo.
> **Procurei ajudar nas dúvidas dos outros colegas**, sendo claro e objetivo para não confundi-los. Mas às vezes uma situação de constrangimento pode atrapalhar.
> Eu acho, particularmente, que as minhas notas nas provas foram resultados de muito esforço extra classe, pois sacrifiquei vários finais de semanas e noite livres para ficar estudando. Consegui aprender em média 60% dos assuntos abordados em sala de aula.
> Eu acho que deve-se aproveitar ao máximo o tempo de cada aula, expondo para os alunos vários exemplos ou exercícios parecidos com os que estarão nas provas para que os que não têm muito tempo extra para estudar não se assustem com o que vão ver na prova, pois as questões apresentadas nas provas eram de um grau de dificuldade superior aos exercícios propostos para estudo e aos exemplos citados em sala de aula.
> **Foi válida esta reflexão**, espero ter atendido o que esperava. [...]

No Extrato 50 (grifos nossos), as mesmas concepções anteriores estão presentes, porém acrescidas da demonstração de insatisfação por ter sido necessário muito estudo. Um fator que se destaca nesse extrato, em relação aos anteriores, é quanto ao reconhecimento de um obstáculo à participação nos diálogos matemáticos, qual seja o *constrangimento*. Isso é reconhecido como uma reflexão que pode trazer resultados positivos, uma vez que a identificação de um obstáculo pode ser o início do processo em direção à sua superação.[62] Quando se refere à comparação entre graus de dificuldade dos exercícios de prova e de aula, revela não ter se envolvido nas reflexões promovidas pelos diálogos matemáticos. Um fator positivo é, também, o reconhecimento de que foi válida a reflexão, porém parece que a mesma foi feita para atender à solicitação da professora, revelando uma posição de subordinação: *"Foi válida esta reflexão, espero ter atendido o que esperava."*

---

[62] "Superar, no sentido de Bachelard, é formar um novo conhecimento que incorpora o velho como negação dialética, ou seja, forma-se um novo conhecimento que é sempre novo, de um antigo que não se separa dele. Reconhece-se no novo, o antigo conhecimento. Vai-se além, conservando o velho. O conhecimento novo só é assim porque foi conhecido contra um velho conhecimento" (MILANI, 2002).

Extrato 51

> [...] Meu objetivo com relação ao que estudei até agora era de aprender, porém sem a pressão de ter que decorar tudo e, depois de uma semana, esquecer. No meu caso, **essa metodologia é positiva**, aprendi o necessário. Mas **tenho conhecimento para melhorar**. Tenho algumas sugestões quanto ao método de aula: A explicação da matéria está ok, o problema é na hora de fazer os exercícios. Por exemplo: É dado um exercício básico sobre a matéria e depois temos que resolver os mais difíceis e os que envolvem outros ítens como tg, sen, taxas de crescimento, etc. O ideal seria a prof. fazer TODOS os exercícios do material de apoio (que são bem diversificados) e depois pedir para nós fazermos os do livro. Isso seria de grande valia. Que fique claro que essa sugestão é apenas para melhorar o rendimento da turma, pois sei que também **temos que nos virar e não ganhar tudo pronto**.
> Espero ter me expressado claramente. [...]

No Extrato 51 (grifos nossos) são ressaltadas as concepções observadas nos extratos anteriores, com a sugestão de que, para melhorar a aprendizagem dos alunos, a professora resolva *"TODOS os exercícios* [...] *diversificados"* para que o aluno aprenda como deve resolver os do livro. Entretanto, aqui também aparecem indícios de superação de concepções baseadas no ensino tradicional, quando o aluno afirma que a *"metodologia é positiva"*. O depoimento parece ser uma mescla de concepções mais abertas ao diálogo e a outras já sedimentadas pelo próprio processo tradicional, percorrido até aqui.

Em síntese, os alunos, nesses extratos 48 a 51, revelam a total "*ausência de superação de obstáculos pedagógicos e do reconhecimento da necessidade de mudança"*. A não ser por algumas expressões, **grifadas** nos extratos, seus depoimentos demonstram que não refletiram sobre novas possibilidades de aprendizagem de Matemática, conforme se procurou promover. Quanto às expressões **grifadas**, mesmo estas, numa análise atenta, parecem estar ali deslocadas no texto, como se estivessem repetindo algo que ouviram, mas que não lhes diz respeito e, conseqüentemente, não os modificou. Talvez as incluam para agradar a professora, como parte de sua intenção de fazer tudo o que for solicitado. São demonstrações de contradições, mas não ainda de contradições que anunciam o início de um processo, em que os conflitos podem dar origem à tomada de consciência das ações necessárias para o bom êxito no processo. Isto é, parecem permanecer indiferentes ou resistentes a toda e qualquer proposta de mudança.

A tendência observada nos Extratos 48 a 51 pode ser caracterizada, de acordo com Piaget apud Montangero (1998), por uma confusão entre o ponto de vista pessoal e o de outrem, provavelmente causada por um sentimento de submissão. Pode-se definir essa tendência pela existência de uma centração exercida tanto sobre suas ações e seus resultados (os exercícios) quanto sobre tudo o que se apresenta a seu conhecimento, sem crítica nem relativização (concepções da professora).

O segundo nível é o mais difícil de observar. Conforme os Extratos 52 a 54, nesse nível situam-se depoimentos bastante contraditórios, ora revelando o reconhecimento de benefícios de atividades de interação, de que o conhecimento pode ser construído (não imposto), ora revelando a necessidade de receber as respostas dos exercícios ou de que todas as questões sejam resolvidas em sala de aula para que possam aprender.

Extrato 52

> [...] Os problemas resolvidos no livro eram de nível intermediário entre médio e alto, porem as questões extras que foram discutidas no fórum são de nível altíssimo, na minha opinião. Posso melhorar o nível de aprendizado, pois comecei a analisar as questões de outro ângulo.
> Acho que quando depois de acabado o trabalho, no caso a matéria, temos certeza que daqui a 2,3 anos saberemos o que aprendemos.
> No meu caso, levei 2 anos para tomar coragem e fazer Calculo II, pois achava que era o "bicho papão", que não conseguiria vencer a matéria. Hoje vejo que estava errado. Muitas pessoas ainda entram em Calculo II tremendo de medo.
> Apesar de não ter participado muito das discussões, estou a par de todo assunto.
> Acho que dominando a parte de derivadas e integrais, o cálculo de áreas de gráficos ficou muito facilitado. Minhas maiores dificuldades são de aplicar esses conhecimentos em problemas mais práticos.
> Uma sugestão que eu tenho, conversando com colegas, muitos gostariam de obter as respostas para os problemas que resolvem. Acho que viria a somar devido à complexidade da matéria. [...]

No Extrato 52, o aluno reconhece que os diálogos no fórum elevam o nível das discussões. Com isso torna-se possível *"analisar as questões de outro ângulo"*. Interpreta-se esse parecer como uma confirmação de que apenas *assistiu* às discussões, ou seja, quanto menos se participa mais distante se está do conhecimento produzido, o que pode ser o que o leva a afirmar que as *"questões extras que foram discutidas no fórum são de nível altíssimo"*. Além disso, deixa transparecer uma convicção de que o conhecimento é algo construído e pode ser observado com o passar do tempo, quando afirma que *"daqui a 2, 3 anos saberemos o que aprendemos"*. Teria sido uma boa oportunidade para perguntar-lhe o que aprendeu há 2 ou 3 anos. Na verdade, essa é uma das reflexões que se costuma promover, também, presencialmente, quando surge uma oportunidade. Ainda, no Extrato 52, o aluno afirma não ter participado muito das discussões, embora esteja a par do que foi discutido. Identifica-se, nessa última afirmação, a causa da dificuldade, ainda reconhecida por ele, de *"aplicar conhecimentos em problemas práticos"*. Ou seja, sabe-se que não basta *assistir* às discussões, mas é necessário envolver-se procurando cooperar. Talvez aí, ainda resida a concepção de *ver* *para aprender*. Quando se refere aos temas abordados (derivadas, integrais, cálculo de áreas), interpreta-se como um indício de tomada de consciência de primeiro nível das ações realizadas, ao considerar sua afirmação de que *"o cálculo de áreas* [...] *ficou facilitado"*. Entende-se que sabe aplicar fórmulas. Porém sua sugestão de receber as respostas dos problemas, de acordo com essa análise, é contraditória com a primeira afirmação, quando se refere à participação no fórum para *"analisar as questões de outro ângulo"*. Ora, uma análise é sempre um processo, não apenas o seu resultado. Também nesse nível o que aparece pode ser conseqüência de um conflito entre o que é tradicionalmente feito e as novas possibilidades que se apresentam.

Extrato 53

> [...] Minha maior dificuldade é a leitura e compreensão dos problemas e não sei como expressar as respostas teóricas corretamente. Acho que preciso ler com mais calma, tentando encontrar mais tempo no meu dia-a-dia, para me dedicar um pouco mais nas cadeiras em si. E gostaria também de ter aulas de exercícios, que melhorariam a interpretação das questões. Tentei ajudar meus colegas mas teve alguns casos que não tive condições de ajudar. Mas aprendi que posso auxiliar e ser auxiliado pelos meus colegas. Acho bem interessante esse modo de interação. [...]

No Extrato 53, o aluno aponta dificuldades e propõe solução para sua superação, por meio da *"leitura com mais calma"* e de maior dedicação revelando, assim, assumir alguma responsabilidade por sua aprendizagem. Em seguida, manifesta a dependência de exercícios (treinamento) para aprender a interpretar as questões. Além disso, parece que interagiu ajudando os colegas, mas não cooperando com eles. Quando afirma: *"tentei ajudar meus colegas mas teve alguns casos que não tive condições de ajudar"*, deixa clara sua concepção de interação como relação unidirecional e não pela troca que pode ser conseqüência do verdadeiro diálogo que leva em consideração o ponto de vista do outro. Porém, acha interessante *"esse modo de interação"*. Ainda que revele a necessidade de refletir sobre seu conceito de interação, parece estar levando em consideração o convite à participação nos diálogos. Espera-se que sim!

Extrato 54

> [...] Meu objetivo era conseguir ter um bom conhecimento sobre a matéria em questão para conseguir uma boa nota, que me desse tranqüilidade. Não atingi o objetivo, mas a minha nota não foi tão ruim. Acredito que não tive o desempenho que esperava devido à forma como é realizada a matéria. Estava acostumado a resolver exercícios apenas calculando e achando resultados, como nas outras duas vezes que fiz a matéria.
> A participação também demonstra o conhecimento, porém algumas pessoas são muito tímidas e não gostam de falar em público, eu sou um exemplo. Penso que se não fosse a ajuda dos colegas eu não teria conseguido resolver muitas questões. Mas acho até que consegui compreender pois quando se sabe falar do assunto, sabe interpretar e resolver. [...]

No Extrato 54, o aluno deixa claro que, para ele, o conhecimento da matéria está diretamente relacionado à nota. Parece apontar para a identificação de problemas relacionados à metodologia anterior, através da qual, *"estava acostumado a resolver exercícios apenas calculando e achando resultados"*. Além disso, reconhece sua dificuldade em participar, devido à timidez, quando afirma que *"algumas pessoas são muito tímidas e não gostam de falar em público, eu sou um exemplo"*, o que parece já estar sendo superado, pois conseguiu resolver questões com a ajuda de colegas. Ocorre que, segundo o depoimento, o fato de ter recebido ajuda parece desmerecer sua aprendizagem: *"se não fosse a ajuda dos colegas eu não teria conseguido resolver muitas questões"*. Aqui se questiona, como ocorreu ao analisar o Extrato 53,: que tipo de interação aconteceu? Os colegas resolveram os exercícios para ele? Por outro lado, revela ter conseguido compreender, pois sabe falar do assunto, sabe interpretar e resolver. Ou seja, há alguns indícios de superação de obstáculos a partir da reflexão sobre a importância de participar e do significado que atribui ao *compreender*.

Resumindo, interpretam-se os depoimentos encontrados nos Extratos 52 a 54, como reveladores da *presença em processo* de reflexões sobre influência de atividades de interação sobre a aprendizagem. As contradições evidenciadas podem estar apontando para o reconhecimento de possibilidades de superação de obstáculos, a partir de atividades de interação e de novas possibilidades de aprendizagem.

Quanto ao terceiro nível, conforme se pode observar nos Extratos 55 a 58, nele ficam evidentes concepções de aprendizagem nas quais o aluno assume-se como sujeito, que valoriza atividades de pesquisa demonstrando, com isso, uma nova concepção sobre a construção do conhecimento matemático, que é para a vida e é construído na interação. Todos esses depoimentos têm em comum o fato de evidenciarem o papel do diálogo como favorecedor de condições de aprendizagem.

Extrato 55

[...] Estou atingindo meu objetivo. Nunca havia me interessado tanto em resolver questões. Com certeza houve ganho de aprendizagem, pois podemos interagir com nossos conhecimentos, que juntamente com a consulta, tornaram o exercício da aprendizagem mais eficientes. Fomos atrás de pesquisar mais a fundo para dominar melhor o assunto. Nada impediu de voltar a procurar os conceitos de derivadas visto semestre passado, para compreensão melhor do assunto. Uma observação: "No método convencional, poucos se habilitariam a voltar na matéria". Por outro lado, com essa nova forma de estudar, houve interesse em rever conceitos antes estudados, e até entender certos aspectos que tinham ficado obscuros naquela época.
Quando fazemos algo sem tanta pressão, as idéias fluem melhor. Às vezes por detalhes, desperdiçamos conhecimentos adquiridos e até nos sentimos fracassados por aquilo. Mas a verdade não é essa. Mesmo depois de formados, em algum trabalho que estaremos desenvolvendo, a pesquisa sempre estará junto. Com certeza não estaremos fazendo provas sob pressão, mas sim pesquisando com gosto e expondo nosso ponto de vista com mais pessoas na realização de um projeto. Isso é aprender, crescer. E isso é exatamente o que enfrentamos com essa nova metodologia. Nos apegamos a pesquisa e a troca de conhecimento para a realização de trabalhos que revertem em conhecimento e aprendizagem.
Com interação, na medida que as coisas vão sendo esclarecidas, a vontade de ir mais longe toma conta. Nos sentimos encorajados a resolver problemas e não a fugir deles.
Claro que eu poderia melhorar. Esse novo conceito de aprendizagem é muito mais proveitoso no sentindo de somar conhecimentos. Cada um ajudando com um pouco, mais a pesquisa no somatório do conhecimento, podemos alcançar um resultado muito mais proveitoso, no sentido de estar resolvendo os exercícios propostos, e também, no sentido da avaliação. Não entenda mal o que vou dizer agora. Tornou-se uma "brincadeira agradável de conhecimento". Brincadeira no sentido de algo gostoso, sem aquela neurose dos métodos convencionais de resolver exercícios sem saber porque [...]

Valoriza a pesquisa e o diálogo, ao afirmar, demonstrando entusiasmo, que *"mesmo depois de formados, em algum trabalho que estaremos desenvolvendo, a pesquisa sempre estará junto. Com certeza não estaremos fazendo provas sob pressão, mas sim pesquisando com gosto e expondo nosso ponto de vista com mais pessoas na realização de um projeto"*. De fato, conforme D'Ambrosio (1986, p. 23), "o quanto um indivíduo aprende na escola é de menor importância. De muito menor importância do que a capacidade que ele adquiriu de aprender coisas novas quando devidamente motivado".

Extrato 56

[...] OI, profe? Tudo bem?
Estamos chegando ao final de uma etapa e posso afirmar que a cadeira de Cálculo 2 é a mais proveitosa de todas já feitas. Na verdade, gosto muito da maneira que a Sra. expõe os trabalhos e, principalmente, pelo método utilizado. Essa metodologia trouxe enormes benefícios, pois não me preocupei unicamente em obter uma nota favorável para conseguir a aprovação na cadeira (com certeza, isso tb faz parte) mas, o que mais me deixa satisfeito é o fato de que temos oportunidades de pesquisar sobre os assuntos além do que foi abordado em aula, bem como de corrigir os erros cometidos.
De minha parte, adquiri um conhecimento maior, pois precisei pesquisar em livros, até mesmo de 2o. grau, assuntos já esquecidos e que mereciam ser abordados nas questões que me foram propostas.
Parabéns pelo seu método de ensino. Tenho a Sra. como uma das melhores professoras que já tive (fato já observado desde a cadeira de Cálculo 1, qdo fiz com a Sra. há dois anos atrás).
Confesso estar receoso qto a esse conteúdo de logaritmos e exponenciais, que estamos estudando agora. Eu achava serem "fáceis" (através do ensino de 2o. grau), está me mostrando um outro lado da dificuldade de aprendizagem e entendimento, mas isso tem ajudado no meu processo de estudo, pois dessa forma consigo ir além do que já sabia.
Um abraço, [...]

O aluno está consciente de dificuldades a serem enfrentadas na construção de seu conhecimento, para aquisição de novas aprendizagens, porém reconhece como pode enfrentá-las.

Extrato 57

[...] O objetivo geral do tema era usar integrais definidas para determinar a área entre funções conhecidas, tendo como objetivo maior um completo entendimento dos temas integral e derivada. Do meu ponto de vista foi atingido, pois além de praticar o uso desses recursos matemáticos, também tornou-se possível um conhecimento maior em outras questões relacionadas ao tema.
Tivemos chance de estudar e formar uma solução para os problemas propostos, discutindo com os colegas.
No meu ponto de vista, podemos definir a palavra aprender como algo mais do que saber calcular. Devemos romper as barreiras dos números, sendo capaz de ver claramente os conceitos e raciocinar com os princípios. Devemos saber todos os "porques" envolvidos. Acredito que a forma mais fácil de mostrar ou medir conhecimento é através de um "debate" do assunto, pois trocando informações podemos observar até aonde vai o conhecimento de uma pessoa, se dominarmos o assunto.
Penso que aprendi, pois realmente sei os conceitos das integrais e derivadas, consigo entender de onde sai o valor da área por exemplo, como também ainda tenho algumas dificuldades em alguns detalhes.
Não tenho mais comentários relevantes, já comentei alguns anteriormente, de modo geral considero a metodologia utilizada muito boa, mesmo que trabalhosa para ambas as partes, alunos e professor. [...]

No Extrato 57 se observa que o aluno reconhece que essa metodologia é trabalhosa para ambas as partes, com o que concordo. O modelo utilizado de ambientes virtuais e interação com cooperação demanda mais envolvimento em termos de tempo e dedicação de professor e alunos, do que em ambientes tradicionais. De fato, é preciso aprender a lidar com essas novas possibilidades, de acordo com nossas concepções epistemológicas e se acredita que, à medida que isso ocorre, quando nos apropriamos desses novos saberes, as dificuldades são minimizadas. A própria tecnologia está ao nosso lado, nesse sentido, uma vez que sem isso, não seria possível o registro dos diálogos, a sua continuação sem duração pré-determinada, local ou hora para concluir permitindo-nos, dessa forma, respeitar os diferentes *tempos* dos sujeitos envolvidos.

Extrato 58

[...] Meu objetivo era entender melhor a matéria, e não simplesmente atingir a média. Felizmente atingi a média também.
Estive (e continuo) aprendendo cada vez mais (e tb gostando mais) do cálculo. Estou conseguindo resolver as questões com mais facilidade.
Complica um pouco quando tenho que explicar, principalmente para mim, eu geralmente entendo as coisas mas não consigo explicar muito bem...
Acho que de modo geral, aprendi, a única coisa que tive dificuldade, foi a análise das funções em relação aos pontos extremos e de inflexão, eu não lembrava como encontrar estas informações porque era matéria do calculo I que eu estudei a bastante tempo atrás. Claro que eu revisei a matéria de calculo I e relembrei perfeitamente como se calcula.
Como eu já havia comentado na outra vez, gosto desta metodologia porque permite aos alunos não simplesmente resolver exercícios, mas aprofundar o conhecimento na matéria, com a ajuda de todos.
De nada servirá se o aluno não sabe como aplicar o que está nos livros e cadernos. Acredito também que na vida nós sempre teremos fontes de consulta para nos ajudar a esclarecer nossas dúvidas. [...]

Para esse aluno o bom êxito na disciplina é uma decorrência da aprendizagem e não do cumprimento das tarefas, como forma de livrar-se das mesmas. Identifica dúvidas relacionadas aos conceitos aprendidos anteriormente, reconhecendo sua importância na construção do conhecimento matemático. Porém valoriza essa forma de aprender, que é para a vida.

Em síntese: valorizam a pesquisa (*condições de aprendizagem*), reconhecem que o *diálogo* promove a co-operação, que o *conhecimento matemático* é construído e é para a vida, assumem-se como sujeitos de sua aprendizagem (*papel do aluno*) e contam com o professor na coordenação das atividades (*papel do professor*).

Há o reconhecimento dos benefícios de atividades co-operativas promovidas pelos *"diálogos matemáticos"* para a aprendizagem. Com isso evidencia-se uma evolução no sentido de maior autonomia, levando em consideração o ponto de vista do outro, assumindo-se como sujeito de sua aprendizagem.

Com relação aos depoimentos de alunos do curso Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I, do projeto Mecam, embora não seja objeto deste estudo uma análise comparativa, cabe salientar que uma constatação é imediata: o fato de participar de um curso a distância não garante o reconhecimento dos benefícios e do envolvimento em atividades de co-operação promovidas por diálogos, ainda que estes constituam o único canal para esclarecimento de dúvidas. Ou seja, encontram-se também, dentre alunos do Mecam, os mesmos níveis evidenciados por alunos de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, no que se refere à relação entre as *concepções iniciais* e os *diálogos matemáticos*. Entretanto apresentam um indicador que corrobora as análises realizadas, no que diz respeito ao reconhecimento de possibilidades de utilização dessa metodologia também para cursos a distância. Talvez a possibilidade diferenciada de refazer a disciplina seja um fator que propicie a motivação para o envolvimento necessário para a aprendizagem, o que garante a satisfação da superação dos obstáculos encontrados durante a sua realização, na forma tradicional.

Para justificar essa constatação, nos Extratos 59 e 60 são apresentadas respostas dadas por alunos das duas edições já realizadas do Mecam à seguinte pergunta, feita durante uma das auto-avaliações promovidas:

Uma das perguntas de Auto-Avaliação

Se lhe fosse dada a opção de cursar a disciplina de Cálculo II, durante o semestre, nesta modalidade de estudos, você optaria por ela ou pela tradicional em sala de aula? Por quê?

No Extrato 59 seleciona-se um conjunto de respostas apresentadas por alguns dos que optariam pela modalidade a distância. Cabe salientar que estes representam 62% dos alunos entrevistados.

Extrato 59

[...] eu optaria por esta modalidade porque iria aprender mais [...] [...] porque acredito ser mais eficiente [...] [...] pois a metodologia é fantástica, pois o aluno aprende o conceito, aplica ele nas atividades e aperfeiçoa muito este conceito, expandindo muito mais o seu significado [...] muitas vezes o ambiente tradicional (sala de aula) além de cansativo, inibe o aluno de fazer questionamentos [...] [...] pois com isso você aprende e conhece mais [...] [...] pois adorei e aprendi eu mesma a me avaliar e não um professor falando e eu sentada em uma classe escutando sem perguntar nada a ele e depois esperar a prova e não conseguir fazer. Aqui eu preciso estudar para adquirir conhecimento e tenho como perguntar para os professores em relação às minhas dúvidas que eles vão me responder e não dizer que o tempo acabou para explicar aquele conteúdo [...] [...] porque eu realmente aprendi mais no programa do que em sala de aula. No programa existe, por parte dos professores, a preocupação com o aprendizado do aluno e na sala de aula temos a preocupação com uma turma que nem está interessada no que ali acontece. E o professor da sala de aula tem que cumprir o cronograma [...] [...] porque aprendi muito e achei fantástico a forma de estudar onde aprendemos não só responder as perguntas mas também dizer o porque das respostas com as devidas argumentações [...] [...] pois sei que aprenderia muito mais [...] [...] porque esse é um jeito de mostrar ao aluno que tem dificuldades em cálculo, como eu, a ver que é uma matéria que precisa ser lembrada todos os dias [...]

O objetivo, ao selecionar essas respostas, é compartilhar também, neste estudo, a constatação de que os argumentos apresentados pelos alunos do Mecam, para justificar sua preferência pela modalidade a distância, baseiam-se na metodologia do curso, não ao seu caráter não presencial. Confirma-se, assim, a importância da metodologia empregada e que pode ter efeitos de aprendizagem também a distância. Isso corrobora, como afirmado acima, a análise realizada anteriormente, apontando para a relação de co-implicação entre a concepção do aluno e sua participação em diálogos sobre seu fazer, para que seja possível compreender. Nas respostas selecionadas, os alunos demonstram uma concepção de aprendizagem baseada na atividade do aluno, em cooperação com o grupo, com a ajuda do professor. Revelam preocupação em compreender o significado dos conceitos, demonstrando autonomia e valorizando as aprendizagens anteriores. De acordo com a análise feita, respostas como: *"o aluno aprende o conceito, aplica ele nas atividades e aperfeiçoa muito este conceito, expandindo muito mais o seu significado"* ou *"é uma matéria que precisa ser lembrada todos os dias"*, por exemplo, referem-se à importância da compreensão dos conceitos anteriores, como condição para construir conhecimento novo. Para Piaget, apud Becker (1997, p. 121):

> Trata-se da experiência lógico-matemática que consiste também em agir sobre os objetos; só que ela extrai sua informação, não destes objetos como tais, mas, o que é diferente, das ações que se exercem sobre eles e que os modificam, ou, o que dá no mesmo, das propriedades que as ações introduzem nos objetos.

Por sua vez, aqueles que preferem a modalidade presencial (38% dos participantes das duas primeiras edições do Mecam) justificam sua preferência como se pode observar no Extrato 60.

Extrato 60

[...] prefiro a modalidade tradicional devido ao meu tempo [...]

[...] pois acho melhor tendo a professora no seu lado podendo te explicar [...]

[...] pois eu acho que estando na sala de aula o aluno tem um contato maior com o professor e pode questionar na hora em que a dúvida surgir, podendo assim, sanar aquela dúvida e prosseguir com o conteúdo [...]

[...] pois eu preciso de um professor do meu lado dizendo isso tá errado se faz assim, tenho muita dificuldade em aprender [...]

[...] com livros e tudo ao vivo [...]

[...] poderia ser qualquer uma das duas mas acho que prevaleceria a sala de aula, afinal é um costume muito antigo e somos acostumados a ele [...]

[...] pelo simples motivo de que tenho uma série de dificuldades de entendimento em alguns conceitos e acho que em sala de aula poderia tirar essas dúvidas mais rapidamente do que no caso de uma monitoria on-line questionando o professor [...]

Como se pode observar, nenhuma das respostas está relacionada à aprendizagem, tal como é concebida neste estudo. Ou seja, aqueles que preferem a modalidade presencial apresentam justificativas baseadas na concepção de aprendizagem passiva, que depende do professor. Um exemplo claro é o argumento de que *"em sala de aula poderia tirar essas dúvidas mais rapidamente"*, como se isso fosse possível. Melhor dizendo, a única possibilidade de tirar uma dúvida rapidamente é apresentar uma resposta que satisfaça a curiosidade do aluno naquele momento. Porém, se ele não refletir sobre suas ações reorganizando-as num patamar superior, o que exige tempo, é muito difícil que seja possível *"sanar aquela dúvida e prosseguir com o conteúdo"*, apoiando-o em estruturas.

Em síntese, os argumentos apresentados nos Extrato 59 e 60 confirmam a hipótese inicial de que os diálogos matemáticos promovem aprendizagem, desde que apoiados em concepções baseadas em aprendizagem ativa e, portanto, independentemente de serem realizados presencialmente ou a distância. Particularmente, os do Extrato 60, em nada contrariam tal hipótese por estarem apoiados em concepções de aprendizagem passiva. Com efeito, se se entende a aprendizagem, no sentido dado por Piaget, como resultado da ação do sujeito, ação que pode ser observada como interação (assimilação-acomodação) entre sujeito e objeto, não se pode deixar de reconhecer a importância de nos envolvermos em diálogos, como a situação concreta, sugerida por Freire, das interações sujeito-sujeito, ação-reflexão, educador-educando (BECKER, 1997).

Como se afirmou no início desta seção, todos os extratos analisados até aqui foram selecionados dentre mensagens postadas nas pastas individuais. De fato, no caso de auto-avaliações, esta foi a opção mais utilizada tanto pelos alunos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, como do Mecam. Entretanto ocorrem, ainda que com pouca freqüência, algumas manifestações através de mensagens postadas no fórum de discussões, que possibilitam diálogos envolvendo as reflexões consideradas nesta seção.

Selecionou-se um destes diálogos para análise, que é apresentado no Extrato 61 a seguir. A discussão envolveu alguns alunos (os nomes estão representados pela inicial, em negrito) e a professora.

Extrato 61

Tópico Inicial |Nova Mensagem |Responder |Procurar]

Mensagem Anterior: Tarefa 2
Próxima Mensagem: Cálculo do volume

Exercício número 10
Date: Wed, 18 Sep 2002 11:14:04 -0300
From: **R**

[...] não entendi como resolver a questão nº 10 do Anton, depois também não tenho resposta para conferir. Se tiveres a resposta ou alguma sugestão da questão, peço retorno. Desde já agradeço. [...]

Re: Exercício número 10
Date: Wed, 18 Sep 2002 14:10
From: Laurete Sauer@terra.com.br

[...] Gostaria de, em primeiro lugar, recomendar novamente a leitura atenta, do texto do Anton, ou do material de apoio, referente a este assunto. Caso não esteja claro, procurem um outro autor, da bibliografia sugerida para o estudo da disciplina. Lembrem-se, todos, de que a maior importância deve ser dada à compreensão do conceito envolvido, não ao exercício propriamente dito. A possibilidade de resolução de um determinado problema ou exercício, ocorre como conseqüência da boa compreensão das idéias discutidas. Pela pergunta feita, pode-se perceber como objetivo principal, a resolução de um exercício, quando, na verdade, isso só pode ocorrer após a compreensão dos conceitos. Aguardo contribuições neste sentido, por parte daqueles que possam auxiliar a responder estas questões e, desta forma, contribuir com a aprendizagem que queremos.

Re: Exercício número 10
Date: Wed, 18 Sep 2002 16:21
From: **J**

[...] A resposta encontrada por mim foi a seguinte: A porcentagem aproximada da quantidade adicional de tinta foi de 14%. [...]

Re: Exercício número 10
Date: Wed, 18 Sep 2002 17:15
From: Laurete Sauer@terra.com.br

[...] Insisto mais um pouquinho, sugerindo que nossos comentários sejam sempre em relação a propostas de resolução de nossas questões e não necessariamente em relação às respostas. O que posso dizer, aqui, é que o resultado não pode ser este (até porque 1 cm representa mais do que isto, num total de 3cm), mas seria muito bom que tivéssemos uma proposta de resolução para pensarmos juntos e comentarmos sobre ela. Quem ajuda?

Re: Exercício número 10
Date: Wed, 18 Sep 2002 18:22
From: **G**

[...] Professora! Gostaria de saber se há possibilidade de ser deixado no xerox o gabarito dos exercícios, pois lendo o livro e o material de apoio, parece que compreendi o conteúdo, mais na hora de resolver os exercícios também não consegui compreender. [...]

Re: Exercício número 10
Date: Wed, 18 Sep 2002 20:21
From: Laurete Sauer@terra.com.br

[...] Oi Pessoal, gostaria de compartilhar com todos, algumas idéias com o objetivo de refletirmos sobre o que já aprendemos e o que queremos aprender (se é que queremos): quando já fizemos algo para aprender, como por exemplo ler, e ao tentar aplicar este conhecimento na resolução de um determinado tipo de problema, verificamos que ainda não aprendemos o suficiente, o melhor que temos a fazer é **questionar**, voltar para aquela leitura, ou outra que nos seja mais clara, tentar dar os primeiros passos e, ao tropeçar, voltar novamente. Quanto me refiro a **questionar** volto a sugerir que procurem explicar como estão pensando, o que é que compreenderam do conteúdo, como foi dito acima, para podermos identificar, juntos, o que não está claro. Isto é construir conhecimento de valor, ou seja, partindo do que já compreendemos. De nada adiantaria um gabarito de exercícios, se nossa intenção é esta. Até porque o nosso objetivo não é o treinamento de exercícios. Isto não vai nos servir para nada. Reflitam sobre isto, procurem a monitoria, enviem suas percepções para este fórum, para que possamos construir juntos. Creiam: isto, no mínimo, vai ser um ótimo exercício para quem quer se preparar para um futuro muito próximo, em que teremos que mostrar nossas competências, para conquistar um lugar ao sol, sem ninguém que nos diga qual vai ser o resultado!!! Abraços e bom estudo.

Re: Exercício número 10
Date: Wed, 18 Sep 2002 20:54
From: **R**

[...] Professora! Não deixo de concordar com a senhora, só que cada um tem um método de aprendizagem uma maneira que consegue entender melhor o conteúdo abordado, para mim a melhor maneira de compreensão é com a prática dos exercícios, afinal se os alunos tivessem condições de se virarem sozinhos não precisaríamos dos professores, pegaríamos o conteúdo estudaríamos e só iríamos a universidade ou qualquer outro centro de ensino para fazer as provas. Desculpe se a senhora não pensa assim, mais cada um tem um jeito de pensar o meu é esse, afinal se todos pensassem igual o mundo tem teria a menor graça.
[...]

Re: Exercício número 10
Date: Wed, 18 Sep 2002 20:21
From: Laurete Sauer@terra.com.br

[...] Oi e amigos interessados nesta discussão gostaria de justificar minhas propostas: a "prática dos exercícios" deve ser algo que exija uma ação reflexiva, que realmente nos envolva, não apenas no sentido de verificar se a resposta está certa, mas de procurarmos utilizar nossa "consciência" (até a intuição, talvez) com relação ao que aprendemos ou não. Muitas vezes um resultado final errado pode não significar a falta de conhecimento relacionado a um determinado problema. Outras vezes, e muito mais freqüentemente até, encontramos resultados corretos, porém com o desenvolvimento desprovido de qualquer significação e realizado mecanicamente, sem nenhuma compreensão. Tanto que quando somos questionados sobre o que realizamos, não conseguimos sequer lembrar por que realizamos certas operações e menos ainda, explicar como pensamos.
Em resumo, o que tenho proposto é a discussão, o envolvimento, a análise das nossas propostas de
resolução de problemas, mas não com o objetivo de verificarmos as respostas e, sim, de verificarmos como estamos construindo os conceitos de interesse. Além disto, minhas sugestões não
são opções que faço por preferência ou gosto pessoal, mas por que é assim que o ser humano
constrói conhecimento: quando quer, procura auxílio e recebe, discute sobre o que aprendeu ou não aprendeu, etc. O professor tem esta função e sempre vamos precisar dele; não para que ele nos dê as respostas dos problemas, mas, sim, para que discuta, 'pense junto' conosco, a partir de nossas dúvidas e conhecimentos que já temos e disposição de nos envolvermos.
Abraços, Laurete
[...]

O diálogo não encerrou aqui e, para a satisfação de todos os envolvidos, a partir desse ponto evoluiu para uma discussão produtiva, em termos matemáticos, com apresentação de sugestões até seu esclarecimento. O que se pretende ao trazê-lo, em parte, para este estudo, é chamar a atenção para a necessidade contínua de intervenções no sentido de promover a crítica epistemológica do aluno, que lhe permita refletir e rever suas concepções relacionadas ao conhecimento e às possibilidades de aprendizagem de Matemática. Diz-se contínua, pois tais oportunidades não têm hora para surgir. Tanto podem surgir no início, quanto durante ou mesmo no final de uma disciplina ou curso. Há estudantes, como **R**, **J** e **G**, envolvidos no diálogo acima, que resistem à participação nos diálogos matemáticos. Isso pode ser ocasionado pelas concepções evidenciadas nas análises referentes aos Extratos 4 a 20. Ao apelar para sua atividade, acreditando que todo aluno normal é capaz de um bom raciocínio matemático (POVE apud BECKER, 1997) e colocando-se à disposição para *pensar junto* com o aluno, a partir do que já sabe, estar-se-á procurando desenvolver sua autonomia intelectual, o que também requer a sua disposição de co-operar. “Se o indivíduo permanecesse entregue a si mesmo, ele não poderia construir nem as normas lógicas, nem as normas morais” (MONTANGERO; NAVILLE, 1998). Além disso, “a observação/narração da própria prática, acompanhada da interlocução/reflexão partilhada com o outro (colegas, professora, teorias), constituem condições cognitivas para uma subjetividade com inserção política mais crítica e eficaz no âmbito educativo” (MARASCHIN; AXT, 1997, p. 57).

No Extrato 61 também fica evidente, de acordo com o que se procurou demonstrar, a influência das concepções epistemológicas do aluno sobre o seu envolvimento em atividades de co-operação e discussão sobre os conceitos matemáticos. Por isso é preciso estar atentos, pois não se pode perder oportunidades de promover reflexões sobre como se aprende, o que se quer aprender, qual é o papel do professor, qual é o papel do aluno e de que forma atividades cooperativas podem contribuir para o desenvolvimento de autonomia intelectual e, conseqüentemente, promover aprendizagem.

Freqüentemente discussões como essa continuam em sala de aula, quando também é possível pensarmos juntos, concluindo ou mesmo deixando novas questões em aberto para que sejam concluídas a partir de pesquisas sugeridas, evitando sempre partir de respostas mas de conceitos envolvidos no problema, em direção à sua compreensão. Isso porque não são raros os problemas que geram novos problemas durante o diálogo, como foi possível observar ao se analisar os *diálogos matemáticos*.

Considerando as análises realizadas, é possível evidenciar a relação de co-implicação entre as concepções epistemológicas dos alunos e a aprendizagem decorrente do envolvimento em diálogos matemáticos. Foi visto que os alunos envolvidos nos Extratos 48 a 51 e 61 (primeiro nível) estão insatisfeitos, acreditam não ter aprendido e não reconhecem o envolvimento nos diálogos como forma de superação de suas dificuldades. Permanecem indiferentes e resistentes. Quanto aos dos Extratos 52 a 54 (segundo nível), estes vislumbram novas possibilidades e reconhecem que é possível obter melhores resultados, já apontando o envolvimento nos diálogos como uma condição para isso. Finalmente, os alunos envolvidos nos Extratos 54 a 59 reconhecem ter aprendido e atribuem o sucesso ao seu envolvimento nos diálogos.

Todos os resultados analisados e apresentados nesta seção, bem como da pesquisa como um todo, estão na dependência das concepções com as quais foram programadas as atividades. Com efeito, de acordo com Valentini (2003), sabe-se que todo fazer pedagógico reflete uma concepção epistemológica. Essa concepção, mesmo que inconsciente, define os papéis do professor e do aluno no processo ensino-aprendizagem. Assim, também um ambiente virtual de aprendizagem deixa transparecer a abordagem epistemológica e psicopedagógica com que foi concebido, mesmo que não estejam explícitos esses pressupostos. É indispensável um posicionamento do docente que envolva posições epistemológicas mas, sobretudo, éticas.

Diante dessas considerações, a análise realizada confirma que a problematização inicial, seguida dos diálogos matemáticos, pode promover uma crítica epistemológica do aluno que lhe permita rever suas concepções manifestadas inicialmente. Assim sendo, a efetiva implicação, por parte daqueles que concordam com os benefícios de sua participação ativa e que estão dispostos a enfrentar o desafio, produz aprendizagem.

Este estudo permitiu verificar que, ao levar em consideração outros pontos de vista, por meio do envolvimento em atividades de co-operação, é possível o desenvolvimento de autonomia e tomada de consciência em termos de aprendizagem de Matemática. Isso requer disposição ou motivação, o que só ocorre a partir da reflexão crítica sobre o conhecimento matemático, condições de aprendizagem, papéis de professor e aluno. Ou seja, é compreender a aprendizagem como possível, a partir de tal envolvimento, cuja qualidade se traduz em níveis de tomada de consciência das ações matemáticas: aplicar fórmulas, traduzir operações ou explicar, argumentar, justificar, respectivamente relacionados ao fazer, descrever ou compreender.

O Quadro 5, a seguir apresentado, ilustra a relação de co-implicação entre as *concepções epistemológicas* dos alunos e sua participação nos *diálogos matemáticos*.

Quadro 5: Relação evidenciada na pesquisa sobre condições de aprendizagem de Matemática

Confirmou-se a influência das concepções epistemológicas do aluno sobre a qualidade de sua participação nos diálogos matemáticos, que se traduz em três níveis de aprendizagem de Matemática. Por sua vez, a reflexão crítica sobre como se dá o aprender influencia o envolvimento nos diálogos matemáticos, o que desenvolve autonomia, descentração, cooperação e tomada de consciência, como efeitos do processo.

6 REFLEXÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS: PÔR-DO-SOL

Sempre me fascina o momento exato em que, da platéia, vemos abrir-se a porta que dá para o palco e um artista sair à luz; ou, de outra perspectiva, o momento em que um artista que aguarda na penumbra vê a mesma porta abrir-se, revelando as luzes, o palco e a platéia.
(DAMÁSIO, 2000, p. 17)

A reconstituição da caminhada é importante, pois permite rever e reconstruir o plano, procurando melhor concluí-lo. Aqui estão reunidas e brevemente descritas as fases que marcaram a evolução e conclusão desta pesquisa. A metáfora do Sol ajuda a traduzir os pensamentos que acompanharam o seu desenvolvimento. Assim, o nascer do Sol simboliza aqui a origem das preocupações que desencadearam a busca por soluções sob sua luz. Como a maior fonte de energia conhecida, encontra-se presente desde o seu nascer, a cada manhã, em todas as ações realizadas. As demais fases estão associadas ao seu movimento, de acordo com sua luminosidade, relacionada com o desenvolvimento das ações que buscaram soluções para os problemas de interesse. Assim, a análise, acompanhada de uma interpretação dos dados obtidos, está associada ao momento de maior clareza, quando foi possível apresentar algumas conclusões, bem como vislumbrar novas possibilidades de pesquisa relacionadas ao presente estudo.

A preocupação com a aprendizagem de Matemática tem acompanhado sua própria evolução, provocando mudanças no sentido de promover o indivíduo numa dimensão diferente, proporcionando-lhe o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas no contexto da vida atual, redimensionando o problema, apresentando soluções, aperfeiçoando-as e utilizando-as em novas situações. O mercado de trabalho pouco tem a oferecer a quem não apresenta capacidade de compreender, criticar, gerar e defender novas idéias. E a velocidade crescente de carências sociais de toda ordem, como trabalho, saúde, segurança, lazer e escola, clama por indivíduos conscientes e comprometidos com a qualidade de seu saber e com valores éticos e morais.

Tais constatações, aliadas aos altos índices de reprovações e desistências em disciplinas de Matemática para a graduação, marcaram o início desta pesquisa. Essa fase de diagnóstico da realidade, de acordo com Thiollent (1988), foi marcada pela busca de alternativas metodológicas que pudessem fazer frente a esse problema, reconhecido mundialmente, conforme foi possível constatar pela participação em congressos e seminários de estudo e na revisão bibliográfica realizada.

Compreendeu-se que possíveis ações que visem solucionar os problemas apontados, requerem uma consideração:

> A que Matemática nos referimos durante a vida acadêmica do aluno do ensino fundamental, médio ou superior? De fato, há matemáticos e mesmo educadores matemáticos que vêem a Matemática como uma forma privilegiada de conhecimento, acessível apenas a alguns especialmente dotados e cujo ensino deve ser estruturado levando em conta que apenas certas mentes, de alguma maneira "especiais" podem assimilar e apreciar a Matemática em sua plenitude. (D'AMBROSIO, 1986, p. 43).

Considerando a necessidade de participar desse processo, com contribuições no sentido de propor soluções para os problemas considerados prioritários, a utilização do computador como recurso didático, seguida do planejamento e da criação do ambiente virtual de aprendizagem para apoio à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral,[63] passou a fazer parte das novas estratégias metodológicas adotadas. Com a inclusão de recursos tecnológicos, como possibilidade de integração de diversas abordagens para problemas de Matemática

[63] Disponível em: <www.ucs.br/deme/disciplinas/calculo>.

aplicada, é possível interferir na melhoria da qualidade da aprendizagem. Com efeito, a realização de estudos, visando encontrar apoio em uma teoria de aprendizagem, que pudesse dar conta desses problemas; a identificação e caracterização de aspectos relevantes em ambientes de aprendizagem, a partir da análise das experiências realizadas, confirmaram a possibilidade de inclusão de tais recursos como benefícios. Tudo isso desde que sejam levados em consideração aspectos relacionados a *como ocorre aprendizagem*, *qual o papel do ambiente no processo ensino-aprendizagem*, *qual o papel do professor*, *qual o papel do aluno*, dentre outros. Isso implicou um novo aprendizado para todos os envolvidos e a necessidade de criação de estratégias coerentes com as respostas a essas questões. Fica reconhecida a importância da análise, discussão e adaptação de tais estratégias no sentido de torná-las viáveis e eficazes.

Visando interferir na melhoria do aproveitamento dos alunos e coletar dados e informações de interesse desta pesquisa, foi programado o projeto de pesquisa Mecam,[64] como uma possibilidade de *complementação de estudos* para alunos reprovados em Cálculo Diferencial e Integral I, sob certas condições: um grau de envolvimento considerável, que não se reduza à presença passiva nas aulas; participação nas atividades propostas; assiduidade, e um grau de aproveitamento mínimo que permita concluir um processo reconhecidamente já iniciado. Assim, a delimitação do grupo e a identificação de condições para viabilização do projeto, bem como o reconhecimento de sua importância como uma estratégia para solucionar os problemas identificados, envolveram os demais professores da disciplina. A construção do ambiente virtual de aprendizagem para o Mecam foi realizada com base na análise das experiências já realizadas na primeira fase desta pesquisa, bem como das que são realizadas pelos pesquisadores do grupo de pesquisa LaVia,[65] ao qual o Mecam está integrado. A programação, seguida da realização de sua primeira edição,[66] com o curso Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I, ocorreu no período acadêmico 2003.1.

A realização da primeira edição do programa Mecam, com o curso Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I, o levantamento dos resultados e a análise das interações sugeriram que os alunos têm grande dificuldade de ler e interpretar, o que gera problemas de expressão clara e objetiva sobre os temas em estudo. Parece haver necessidade de incentivar a cooperação, a partir de estratégias que os levem a leituras e discussões de textos matemáticos, bem como a reflexões sobre seu próprio fazer. A releitura e discussão dos

---

[64] O projeto Mecam está descrito na seção 4.2.
[65] O LaVia está apresentado na seção 4.2.
[66] Disponível em: <www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam>.

resultados, com base na discussão teórica do quadro conceitual fundamentado na Epistemologia Genética, revelaram o *conversar sobre matemática* e o *conversar sobre o agir* como fontes de descentração, na medida em que outros pontos de vista são considerados e hipóteses são confrontadas. A análise de atividades de auto-avaliação, promovidas com o objetivo de levar o aluno a refletir sobre suas ações ou sugerir ações que lhe permitam superar dificuldades, emergiu como outra fonte importante de dados, na medida em que tais atividades revelaram potencial para o desenvolvimento do pensamento crítico e conseqüentemente de autonomia, o que pode produzir tomada de consciência e auxiliar na aprendizagem.

Assim, a programação da segunda edição do Mecam foi feita com base nessas análises, com aperfeiçoamentos em relação à primeira edição. Os aperfeiçoamentos visando ao problema de interesse nesta pesquisa estão relacionados às auto-avaliações que, na segunda edição, privilegiaram questionamentos que levassem o aluno a refletir sobre seu grau de envolvimento no curso, na participação em atividades de cooperação, identificando dificuldades encontradas e apontando possíveis ações que lhe permitam superá-las, a partir de conversas no fórum, inspiradas no método clínico. Tais estratégias passaram a ser utilizadas, também, em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. A realização da segunda edição do Mecam[67] visou, também, coletar dados que permitissem responder ao problema desta pesquisa.

A partir do esclarecimento e da releitura das discussões preliminares, a análise e as discussões complementares foram realizadas visando à sistematização dos resultados obtidos durante a realização das duas edições do Mecam, considerando também o planejamento e a utilização de ambientes de apoio às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, de acordo com as estratégias metodológicas adotadas. Uma avaliação de conseqüências da pesquisa, realizada à luz da teoria que a fundamenta, forneceu indicadores de aspectos que precisam ser considerados na programação de ambientes de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, com vistas ao seu aperfeiçoamento contínuo.

Assim sendo, ao procurar responder às questões de pesquisa desta tese, conforme segue, buscou-se evidenciar a relação de co-implicação entre a reflexão sobre os modos de aprender, a aprendizagem dos conteúdos específicos de Matemática e a metodologia e os ambientes onde esses diálogos se produzem:

[67] Disponível em: <www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam2ed>.

1. O *diálogo sobre os modos de aprender Matemática*, em ambientes virtuais de aprendizagem, gera processos de descentração e de tomada de consciência que possibilitam o reconhecimento da importância da implicação subjetiva na construção do conhecimento?

2. O *diálogo matemático* promove a tomada de consciência e a aprendizagem?

- Muitas das habilidades requeridas para os egressos dos diferentes cursos de graduação[68] podem ser desenvolvidas em atividades de aprendizagem, no sentido dado por Piaget. Com efeito, como um processo de construção de conhecimento que acontece por abstração reflexionante, a aprendizagem requer: interação, co-operação, participação ativa, envolvimento em atividades de estudo, colaboração, solidariedade, socialização de idéias, capacidade de argumentação e síntese, capacidade para expressar idéias próprias, disposição para rever resultados obtidos – comparando-os com outros possíveis – pesquisa, assumir o próprio processo de construção do conhecimento e consciência. O professor, por sua vez, no papel de problematizador, em atividades de discussão, tem a responsabilidade de estar atento ao processo, valorizando todas as participações, incentivando novas intervenções, orientando-se pelas respostas dos alunos ao coordenar ações e reflexões.
- Os diálogos permitem que o aluno refaça o trajeto percorrido para chegar à solução do problema, o que, de acordo com Piaget (1977a), é útil para se julgar a tomada de consciência obtida em cada nível. Em outra obra, Piaget (1974) afirma que os métodos ativos são os únicos capazes de desenvolver a personalidade intelectual e que pressupõem necessariamente a intervenção de um meio coletivo, ao mesmo tempo formador da personalidade moral e fonte de trocas intelectuais organizadas, nesse estudo constituído e confirmado na análise dos diálogos matemáticos.
- Os diferentes *modos* utilizados para refazer o trajeto caracterizam os diferentes níveis de tomada de consciência identificados neste estudo. Assim é que a pesquisa das concepções do aluno revelou-se de grande importância, no sentido de que, a partir de seu reconhecimento, foi possível a criação de estratégias que permitem partir da crítica epistemológica do aluno, de modo a aceitar os desafios e a responsabilizar-se pela sua aprendizagem.
- No processo de *revisão dos papéis*, de inquestionável relevância, é possível constatar que há queixas recíprocas, muita resistência em aceitar novas propostas e dificuldades em promover o encontro. De fato, sabe-se que são obstáculos constituídos a partir da história das interações em instituições educativas, e não foi objetivo da pesquisa

[68] Conforme descrito na seção 2.1.

verificar quais são as queixas legítimas, mas promover diálogos em que ambos: professor e aluno, se encontrem e possam discutir sobre suas concepções na busca do conhecimento. Esse enfoque provocou reações, por vezes de curiosidade ou de insatisfação. Muitas respostas são, inicialmente, ingênuas, revelando a falta de reflexão anterior sobre tais questões, o que é compreensível. Por isso mesmo julgam-se importantes os questionamentos. A reflexão sobre as próprias concepções gerou inseguranças iniciais: primeiro pensar-se a si mesmo, passando para a participação em atividades matemáticas, acompanhadas de reflexão permanente sobre sua participação no processo. Porém, o objetivo da pesquisa não foi tentar fazer com que os alunos mudassem suas concepções tradicionais sobre aprendizagem e conhecimento matemático, mas criar e analisar estratégias pedagógicas que possam contribuir para a promoção de melhores condições de aprendizagem. Com efeito, a superação de concepções tradicionais sobre aprendizagem pode ser uma conseqüência do envolvimento em atividades de discussão promovidas nos ambientes.

- A aprendizagem de conteúdos, da forma como foi concebida neste estudo, deve também promover a reflexão epistemológica do aluno. Esse processo é lento e exige determinação, porém é condição para que seja possível aplicar o conhecimento construído, de forma crítica, com autonomia, envolvendo-se em processos de decisão e tomada de consciência. De acordo com a análise realizada por Basso (2003, p. 328), em sua pesquisa com futuros professores de Matemática, foram encontradas evidências, também nesse estudo, confirmando que "[...] a proposta implementada não exerce efeitos na direção do rompimento de paradigmas de ensino-aprendizagem sobre todos os estudantes (futuros professores). Alguns são refratários a toda e qualquer proposta que represente a possibilidade de romper com suas crenças a respeito do ensino-aprendizagem de Matemática". As evidências disponíveis aqui e que confirmam tais constatações consistem, principalmente, na *ausência* de alguns alunos nos ambientes de aprendizagem, participantes como *ouvintes* ou *expectadores* das disciplinas.

- Não se dispõe de registro de dados comparativos sem a utilização de ambientes telemáticos de apoio às disciplinas. Talvez tudo o que foi desenvolvido, no modo proposto por este estudo, possa ser feito sem o apoio de um ambiente virtual de aprendizagem. De fato, não foi objetivo desta pesquisa comparar ambientes presenciais com ambientes virtuais. Entretanto, cumpre destacar que, neste estudo, o suporte tecnológico foi o que permitiu a realização dos diálogos promovidos e os conseqüentes resultados. Isso porque os alunos e a professora estavam distantes fisicamente, o que não impediu a constituição dos diálogos sobre o aprender e os diálogos matemáticos. Além disso, existem especificidades importantes a destacar: os diálogos construídos de forma escrita possibilitaram ao professor melhores condições para avaliar a aprendizagem dos alunos, já que foi possível retomar os processos de pensamento em vários momentos; a possibilidade de inclusão de recursos, que possibilitem uma co-construção, co-operação, co-autoria e o registro dinâmico do fórum, podendo ser modificado, acrescentado, transformado ao longo do processo em produções coletivas, revelou o texto dialógico que, de acordo com Freire e Freire (2001), constitui-se em fonte de aperfeiçoamento e desenvolvimento contínuos. Este estudo procurou demonstrar como é possível, conforme sugere Freire e Freire (2001, p.75), ampliar o tempo da sala de aula.

> É importante lembrar que não é a partir do que é feito apenas na sala de aula que ele ou ela será capaz de apoiar os alunos e as alunas na reconstrução da posição deles no mundo. É importante que saibamos que o tempo limitado da sala de aula representa apenas um momento da experiência social e individual total do aluno.

Confirmou-se a importância do texto dialógico, o que permite levar em consideração outros pontos de vista e, assim, contemplar uma dimensão solidária da educação.

> O que seria verdadeiramente interessante e importante é se uma sociedade através do ensino, ao atingir o momento gráfico – a forma escrita –, não o transformasse de modo a burocratizá-lo. [...] A oralidade exige solidariedade com o Outro. A oralidade é dialógica por sua própria natureza, à medida que não se pode realizá-la de modo individualista. (FREIRE e FREIRE, 2001, p. 77).

- Outro fator é a possibilidade de socialização das reflexões feitas, já que os percursos de raciocínio ficam disponíveis aos colegas, podendo ser tomados em suas próprias reflexões, o que amplia a rede do diálogo matemático, isto é, a extensão do diálogo para além do tempo em encontros presenciais. A hipertextualidade e o texto dialógico, presentes também fora do contexto da sala de aula, constituem o ambiente ideal para a construção de aprendizagem. Sem dúvida, a tecnologia serve como mediador no processo. As análises das intervenções, disponíveis durante todo o processo em evolução para alunos e professores e a sua leitura em qualquer momento permitem respeitar as condições de cada um, superando distâncias, espaço, tempo. Entretanto, o mais importante é a concepção de aprendizagem, de conhecimento, de novas relações professor-aluno.

- Conforme se procurou evidenciar, através do quadro 5 (p. 179) representativo desta pesquisa, é possível inferir que a concepção epistemológica do aluno influencia sua participação nos diálogos matemáticos. Estes, por sua vez, podem promover a aprendizagem, como conseqüência de *envolvimento*: participação ativa, com demonstração de reflexão crítica sobre outros pontos de vista, defendendo ou modificando os seus, não sem antes considerar os demais, participação com co-operação e tomada de consciência. Esse processo, por sua vez, auxilia a crítica epistemológica do aluno, uma vez que requer o pensar, o conhecer e, à medida que agimos sobre nosso pensar, podemos transformá-lo.
- A aprendizagem com conceituação está relacionada à concepção sobre o aprender. Demonstrou-se que os três níveis de tomada de consciência identificados nos diálogos matemáticos, respectivamente relacionados ao *fazer* (aplicar fórmulas), *descrever* (traduzir operações efetuadas) e *compreender* (explicar, argumentar, justificar) estão diretamente relacionados às concepções do aluno sobre condições de aprendizagem, conhecimento matemático, papel do professor, papel do aluno.

No decurso da atuação como docente de Matemática, sempre se esteve sensível às questões relacionadas com a melhor qualidade possível da aprendizagem, tendo realizado as mais diversas experiências com esse objetivo. Mas não se havia, ainda, compreendido a importância de se conhecer o modo como se aprende. Essa é a grande descoberta, o que permitiu vislumbrar todas as possibilidades aqui identificadas. Não se havia ainda obtido resultados que trouxessem tanta satisfação. As qualidades das pessoas com as quais se conviveu nestes últimos anos, os alunos e colegas professores, com quem se tem compartilhado *certezas provisórias*, durante o desenvolvimento desta pesquisa, despontam como a clareza do Sol ao meio-dia. Aqui há uma referência à seriedade, disposição, alegria e confiança com que acompanharam a pesquisadora, aventurando-se nesses novos caminhos que se apresentam para tantos, acreditando que somente por meio de atividades de interação, cooperação/colaboração é possível percorrê-los, chegando a bom termo. Não se ignora que as estruturas, os esquemas cognitivos da docente, sua história, suas expectativas, seu tempo, e tantos outros, são fatores responsáveis por essa maneira de compreender que, sem dúvida, é própria e que permite que o processo ocorra como está ocorrendo. Conforme referiu Damásio (2000, p. 111), é possível afirmar também que "esta tese é a minha parte do diálogo". E durante o seu desenvolvimento, assim como Freire e Freire (2001), aprendeu-se a fazer melhor. Entretanto não estão sendo feitas afirmações baseadas em conjecturas apenas. Espera-se, pois, que os dados apresentados sejam fruto de novas análises e, quem sabe, de outras interpretações que possam contribuir para uma melhor qualidade na aprendizagem de Matemática na graduação.

A partir da reflexão crítica sobre a própria prática pedagógica, a redação final desta tese considerou todo o percurso, procurando apontar para os benefícios da aprendizagem consciente, com indicadores de como pode ser promovida. Novos caminhos decorrentes deste estudo devem servir como indicadores para novas pesquisas.

Como contribuição pedagógica deste estudo, espera-se ter demonstrado que o aproveitamento escolar depende de vários fatores *internos* ao sujeito, tais como disposição para o envolvimento, conhecimentos anteriores, interesse, motivação, tomada de consciência, em muitos dos quais se demonstrou que é possível interferir. Cabe, pois, ao professor sensível a essas questões encontrar formas de fazê-lo, com a melhor qualidade possível.

Este trabalho pode contribuir para pensar a formação de professores. Uma possibilidade é utilizar a metodologia aqui discutida ou a proposta do projeto Mecam em parceria com a licenciatura em Matemática. Os professores precisam estar cientes de que não basta o conhecimento dos conteúdos para promover a aprendizagem de seus conceitos fundamentais. É preciso estar atentos a como pode ser construído o conhecimento, quais as condições para que a aprendizagem ocorra.

As experiências realizadas durante a evolução desta pesquisa sugerem que os diálogos promovidos, visando aprofundar as discussões, possibilitam aprendizagem de Matemática através da tomada de consciência, esta vista como processo de conceituação, de construção de significados. Confirmou-se, conforme salientam Piaget e Freire, que a tomada de consciência pode ser promovida pelo diálogo, pela interação social (Freire) ou ainda pela coordenação de perspectivas que levem à colaboração (Piaget) (KESSELRING, 1990, p. 20).

Finalmente, cumpre destacar que essa metodologia pode permitir a realização de disciplinas de Matemática em cursos à distância.

Em relação ao desenvolvimento da pesquisa, os *fios do Sol* ajudaram a “tecer a teia” que se buscou transformar num abrigo seguro de onde é possível partir novamente, sempre tendo como guia a luz da consciência.

O pôr-do-sol ilumina outros pensamentos, aquece outras mentes.
Mas certamente voltará, como faz todos os dias. Toda energia, para ser útil, precisa ser acumulada, estocada, administrada, o que é feito, aqui, através da* reflexão *que leva, por conseqüência, à tomada de consciência e ao crescimento.
Assimilamos o que recebemos, adaptamos às nossas estruturas ...
E buscamos mais energia (CONHECIMENTO), o que pode ocorrer todos os dias ...

... COMO O SOL ...

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, G. L. M. O Maple na modernização do cálculo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA, 25., 1997, Salvador. **Anais...** Salvador: Escola Politécnica da UFBA, 1997.

ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte**. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARRUDA, M. C. C.; OLIVEIRA M. I.; PRETI, O. **A aventura de ser estudante**. 3. ed. Cuiabá: IE/UFMT, 2001.

ÁVILA, G. O ensino da matemática. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 23, p. 1-7, 1993.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Tradução de Estela dos Santos Abreu. 3. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2001.

BARBIER, R. **La recherche action**. Tradução de Ludie Didio. Paris: Econômica, 1996.

BARBOSA, G. O.; NETO, H. B. Raciocínio lógico formal e aprendizagem em cálculo diferencial e integral: o caso da Universidade Federal do Ceará. **Temas & Debate**, São Paulo, ano VII, n. 6, p. 60-70, 1995.

BASSO, M. V. **Espaços de aprendizagem em rede**: novas orientações na formação de professores de matemática. 2003, 412f. Tese (Doutorado em Informática em Educação) – PGIE, Ufrgs, Porto Alegre, 2003.

BAZZO, W. A.; PEREIRA, L. T. V. **Introdução à engenharia**. 4. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1996.

BAZZO, W. A. **Ciência, tecnologia e sociedade**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1998.

BECKER, F. **Da ação a operação:** o caminho da aprendizagem em J. Piaget e P. Freire. Rio de Janeiro: Palmarinca, 1997.

BECKER, F. et al. **Revisitando Piaget**. 2. ed. Porto Alegre: Mediação, 1999.

BECKER, F. **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre: ArtMed, 2001.

______. **Epistemologia do professor**: o cotidiano da escola. 10. ed. Porto Alegre: Vozes, 2002.

BOTOMÉ, S. P. **Responsabilidades e competências do professor de ensino superior**. Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 1994. Palestra realizada na segunda semana de Ciências Exatas e Tecnológicas.

BOYER, C. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRINGUIER, J. C. **Conversando com Jean Piaget**. Rio de Janeiro, São Paulo: Difel, 1978.

CORSETTI, M. A.; SARTOR, S. G.; SAUER, L. Z. Utilização do software scientific notebook no ensino do cálculo diferencial e integral. In: ENCONTRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 5., 1999, Itaipava, RJ. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ, 1999. 1 CD-ROM.

CURY, H. N. Cobenge e ensino de disciplinas matemáticas nas engenharias: um retrospecto dos últimos dez anos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 30., 2002, Piracicaba. **Anais...** Piracicaba: Unimep, 2002. 1 CD-ROM.

CURY, H. N.; PINENT, C. E. Análise de atitudes de calouros de engenharia em relação às ciências e à matemática. **Revista de Ensino de Engenharia**, Brasília, v. 19, p. 47-54, agosto 2000.

CURY, H. N. "Professora, eu só errei um sinal!": como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004. cap. 5. No prelo.

D'AGORD, M. R. L. **Processos inconscientes em situações construtivistas de "aprendizagem por projetos" enriquecidas com as novas tecnologias de informação e comunicação (NTICs)**. 2000, 247f. Tese (Doutorado em Psicologia) Ufrgs, Porto Alegre, 2000.

DAMÁSIO, A. **O erro de Descartes**. Tradução de Dora Vicente e Georgina Segurado. São Paulo: Schwarcz, 2000.

______. **O mistério da consciência**. Tradução de Laura Teixeira Motta. São Paulo: Schwarcz, 2002.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. 4. ed. Campinas, SP: Summus, 1986.

DEMO, P. Iniciação científica: razões formativas. In: MORAES, R.; LIMA, V. M. R. **Pesquisa em sala de aula**: tendências para a educação em novos tempos. Porto Alegre: Edipucrs, 2002a. p. 103-126.

______. Pesquisa como princípio educativo na universidade. In: MORAES, R.; LIMA, V.M.R. **Pesquisa em sala de aula**: tendências para a educação em novos tempos. Porto Alegre: Edipucrs, 2002b. p. 51-86.

DILLENBOURG, P. **Virtual learning environments**. Disponível em: <http://tecfa.unige.ch/tecfa/publicat/dil-papers-2/Dil.7.5.18.pdf>. Acesso em: outubro de 2002.

DOLLE, J.M. **Para compreender Jean Piaget**. Tradução de Maria José J. G. de Almeida. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

EDWARDS, C. H. Jr.; PENNEY, D. E. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução de Alfredo Alves de Farias. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1997.

FREIRE, P. **À sombra desta mangueira**. São Paulo: Olho d'Água, 1995.

______. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 18. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2001.

______. **Pedagogia do oprimido**. 35. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2003.

FREIRE, P.; FREIRE, A. M. A. (Org.). **Pedagogia dos sonhos possíveis**. São Paulo: Ed. Unesp, 2001.

FURTH, H. **Conhecimento como desejo**: um ensaio sobre Freud e Piaget. Tradução de Dante Coutinho. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

GIORGETTI, M. Palavra de um especialista. **Engenheiro 2001**, São Paulo, n. 1, p. 16-18, agosto, 1996.

HILGARD, E. **Teorias de aprendizagem**. 4. ed. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1973.

HUGHES-HALLETT et al. **Cálculo**. Tradução de Ricardo Galdo Camelier et al. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos, 1997.

INHELDER, G.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. Tradução de Moreira Leite. São Paulo: Pioneira, 1976.

KAMII, C. **A criança e o número**. Tradução de Regina de Assis. Campinas, SP: Papirus, 1984.

KESSELRING, T. Os quatro níveis de conhecimento em Jean Piaget. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, v. 15(1), p. 3-22, jan./jun., 1990.

LAFORTUNE, L.; SAINT-PIERRE, L. **A afetividade e a metacognição em sala de aula**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

LARSON, R. A.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

LIMA, E. L. Sobre o ensino de matemática. **Revista do Professor de Matemática**, Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, n. 28, p. 1-5, 1995.

LIMA, I. G.; SAUER, L. Z. A criação de ambientes de aprendizagem matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 11., 2000, Alagoas. **Anais...** FAPEAL, 2000. 1 CD-ROM.

______. Programa em educação a distância para a melhoria das condições de aprendizagem de matemática. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 6., 2002, Vigo. **Anais...** Vigo: RIBIE, 2002. 1 CD-ROM.

______. Uma proposta metodológica e sua contribuição para a aprendizagem de matemática na formação de engenheiros. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31., 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** UFRJ, 2003. 1 CD-ROM.

LORENZATO, S.; VILA, M. Século XXI: qual matemática é recomendável ? **Revista Zetetiké**, São Paulo, Ano 1, n. 1, p. 42, 1993.

LUCIANO, N. A.; VALENTINI, C. B.; ANDREOLA, T. Comunidades de aprendizagem: interações em ambientes virtuais. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 6., 2002, Vigo. **Anais...** Vigo: RIBIE, 2002. 1 CD-ROM.

MAÇADA, D. L. **Rede virtual de aprendizagem:** interação em uma ecologia digital. 2001, 158f. Tese (Doutorado em Informática em Educação) – PGIE, UFRGS, Porto Alegre, 2001.

MARASCHIN, C.; AXT, M. Prática pedagógica pensada na indissociabilidade conhecimento-subjetividade. **Revista Educação e Realidade**, Porto Alegre: Ufrgs, 22(1): p. 57-80, 1997.

MASETTO, M. Pós-graduação e formação de professores para o 3º. grau. **Ande. Revista da Associação Nacional de Educação**. São Paulo: Cortez, ano 12, n. 21, p. 56-60, 1995.

MATURANA, Humberto. **Emoções e linguagem na educação e na política**. Belo Horizonte: Ed. da UFMG, 1999.

MILANI, R. **Concepções infinitesimais em um curso de cálculo**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

MONTANGERO, J.; MAURICE-NAVILLE, D. **Piaget ou a inteligência em evolução**. Tradução de Tânia Beatriz Iwazko Marques e Fernando Becker. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

MORAES, M. C. **O paradigma educacional emergente**. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MORIN, E. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. Tradução de Catarina Eleonora F. da Silva e Jeanne Sawaya. São Paulo: Cortez, 2002.

MURPHY, L. D. Computer álgebra systems in calculus reform. Disponível em: <http://www.mste.uiuc.edu/users/Murphy/>. Acesso em: 20 set. 2003.

NASCIMENTO, J. L.; NASSER, L. A reprovação em cálculo I: investigações de causas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 25., 1997, Salvador. **Anais...** Salvador: Escola Politécnica da UFBA, 1997.

OLIVEIRA, J. B. **Freud e Piaget**: afetividade e inteligência. Lisboa: Instituto Piaget, 2001.

PAIS, L. C. Questões epistemológicas. Disponível em: <http://www.ltnet.org/members/CG-CEMTE/lcpais/info/info.htm>. Acesso em: 13 jan. 2004.

PALIS, G. L. R. Computadores em cálculo: uma alternativa que não se justifica por si mesma. **Temas & Debates**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, ano VII, n. 6, p. 22-37, 1995.

PATERLINI, R. R. Modificações no ensino de cálculo em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 25., 1997, Salvador. **Anais...** Salvador: Escola Politécnica da UFBA, 1997.

PIAGET, J. et al. **La enseñanza de las matematicas**. Madrid: Aguilar, 1968.

PIAGET, J. The relation of affectivity to intelligence in the mental development of the child. **Bulletin of the Menninger Clinic**, v. 26, n. 3, 1962.

______. Intellectual evolution from adolescence to adulthood. **Human Development**, 15: 1-12, 1972. Tradução livre: BECKER, F. e IWASZKO, T. B. M. Evolução intelectual da adolescência à vida adulta. Porto Alegre: Ufrgs, 1993.

______. **Para onde vai a educação?** 2. ed. Rio de Janeiro: José Olympio, Unesco, 1974.

______. **A tomada de consciência**. São Paulo: Melhoramentos, 1977a.

______. **O desenvolvimento do pensamento**: equilibração das estruturas cognitivas. Lisboa: Dom Quixote, 1977b.

______. **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

______. **A epistemologia genética**: sabedoria e ilusões da filosofia: problemas de psicologia genética. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

______. **Abstração reflexionante**. Tradução de Fernando Becker e Tânia Beatriz Iwazko Marques. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

POLYA, G. O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 7, p. 11-16, 1985.

______. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1986.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: FIORENTINI, D. (Ed.). **Formação de professores de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/>. Acesso em: janeiro de 2004.

SARTOR, S.G.; SAUER, L. Z. Programação de ensino do cálculo diferencial e integral. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 27., 2000, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: UFOP, Ouro Preto, 2000.

SAUER, L. Z. **Teorias de aprendizagem & práticas pedagógicas**. 2000. 13f. Monografia (Conclusão da disciplina Aprendizagem Humana: Processo de Construção – Curso de Doutorado em Informática na Educação). Ufrgs, Porto Alegre, 2000.

SAUER, L. Z.; SOARES, E. M. Um novo olhar sobre a aprendizagem de matemática para a engenharia. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004. cap. 10. No prelo.

SILVA, M. **Sala de aula interativa**. Rio de Janeiro: Quartet, 2000.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, E. M. S. et al. Laboratório de ambientes virtuais de aprendizagem – LaVia. **ABED**, 2001, Rio de Janeiro, 2001a.

SOARES, E. M. S.; VALENTINI, C. B. O uso das novas tecnologias na qualificação pedagógica. In: RIBEIRO, L. B. M.; CORTELETTI, I. A.; STEDILE, N. L. R. (Org.). **Reflexão sobre a ação**: uma estratégia na formação de professores para o nível superior de ensino. Educs, Caxias do Sul. 2002.

SOARES, E. M. S. et al. Comunidades virtuais de aprendizagem: uma realidade em construção. **Virtual-Educa 2001, Conferência Internacional sobre Educação, Formação e Novas Tecnologias**, Madrid, 2001b.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução de Cyro C. Patarra et al. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. 4. ed. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1988.

THOMAS, G. **Cálculo**. Tradução de Paulo Boschcov. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

VALENTE, J. Criando oportunidades de aprendizagem continuada ao longo da vida. **Pátio**, Porto Alegre, 15, p. 8-12, nov. 2000/jan. 2001.

VALENTE, J. A. **Diferentes usos do computador na educação. Computadores e Conhecimento:** repensando a educação. Campinas, SP, 1993.

VALENTINI, C. B. **Tecendo e aprendendo**: redes sociocognitivas e autopoiéticas em ambientes virtuais de aprendizagem. 2003, 213f. Tese (Doutorado em Informática em Educação) – PGIE, Ufrgs, Porto Alegre, 2003.