Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DERIVAÇÕES DE SHAMSUDDIN SIMPLES DE $K[X_1,...,X_n]$ E IDEAIS MAXIMAIS CÍCLICOS À ESQUERDA DA ÁLGEBRA DE WEYL $A_n(K)$

por

EDSON ANTÔNIO WERLE

Porto Alegre, julho de 2005

Dissertação submetida por Edson Antônio Werle* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dra. Cydara Cavedon Ripoll (PPG-Mat/UFRGS)

Banca Examinadora:
Dra. Ada Maria de Souza Doering
Dra. Cydara Cavedon Ripoll
Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero
Dr. Daniel Levcovitz (USP)

Data de Defesa: 18 de julho de 2005.

* Bolsista da Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Técnológico - CNPq

AGRADECIMENTOS:

Agradeço primeiramente ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura da UFRGS pela oportunidade. Também aos professores do Programa, em especial ao professor Ivan.

À minha orientadora Cydara, pela confiança e orientação.

Aos meus colegas e amigos da Pós-Graduação.

A todos meus amigos, em especial aos companheiros da CEFAV.

À minha família.

À Daiane, pelo apoio e compreensão.

RESUMO:

Seja K um corpo de característica zero e seja $\mathbb{A}_n(K)$ a $n-$ésima Álgebra de Weyl sobre K. Neste trabalho, discutimos a existência de ideais maximais à esquerda de $\mathbb{A}_n(K)$ gerados por operadores de ordem 1. Primeiramente, estabelecemos uma relação entre derivações simples de $K[X_1, ..., X_n]$ e ideais principais maximais à esquerda de $\mathbb{A}_n(K)$. Para $n \geq 2$, caracterizamos as derivações de Shamsuddin de $K[X_1, ..., X_n]$ que são simples. Depois, mostramos que se d é uma derivação de Shamsuddin simples de $K[X_1, ..., X_n]$, então existe $g \in K[X_1, ..., X_n]$ tal que $\mathbb{A}_n \cdot (d+g)$ é um ideal maximal principal à esquerda.

ABSTRACT:

Let K be a field of characteristic zero and let $\mathbb{A}_n(K)$ the $n^{th}-$Weyl Algebra over K. In this work, we examine the existence of maximal left ideals of $\mathbb{A}_n(K)$ generated by operators of order one. First, we establish a relation between simple derivations of $K[X_1, ..., X_n]$ and cyclic maximal left ideals of $\mathbb{A}_n(K)$. For $n \geq 2$, we characterize the simple Shamsuddin derivations of $K[X_1, ..., X_n]$. Next, we show that if d is a simple Shamsuddin derivation of $K[X_1, ..., X_n]$, then there exists $g \in K[X_1, ..., X_n]$ such that $\mathbb{A}_n \cdot (d + g)$ is a cyclic maximal left ideal.

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO

Seja K um corpo de característica zero. Sejam $X_1, ..., X_n$ indeterminadas sobre K e $K[X_1, ..., X_n]$ o anel de polinômios sobre K. Vamos denotar por $End_K(K[X_1, ..., X_n])$ a álgebra dos endomorfismos lineares de $K[X_1, ..., X_n]$. Exemplos de elementos pertencentes a esta álgebra são os operadores $\widehat{X_i}$, cuja ação sobre um polinômio de $K[X_1, ..., X_n]$ é dada pelo produto pela indeterminada X_i. Também são elementos de $End_K(K[X_1, ..., X_n])$ os operadores $\partial_1, ..., \partial_n$, definidos por $\partial_i(f) = \partial f/\partial X_i$, para todo $f \in K[X_1, ..., X_n]$.

A $n-$ésima Álgebra de Weyl sobre K é definida como sendo a subálgebra de $End_K(K[X_1, ..., X_n])$, gerada pelos operadores lineares $\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}$ e $\partial_1, ..., \partial_n$. Denotaremos a mesma por $\mathbb{A}_n = K[\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$.

Dado o importante papel das Álgebras de Weyl, é natural tentar conhecer a sua estrutura. O presente trabalho trata da estrutura de ideais de $\mathbb{A}_n$. Littlewood provou que a Álgebra de Weyl não possui ideais bilaterais não-triviais, ou seja, $\mathbb{A}_n$ é uma álgebra simples. E, com relação à existência de ideais principais unilaterais que são maximais, muita pesquisa está sendo feita focalizada neste aspecto (cabe aqui mencionar que procurar ideais maximais principais à esquerda é equivalente a procurar ideais maximais principais à direita).

O primeiro autor a abordar o problema da existência de ideais maximais foi Stafford [10] que, em 1985, exibiu explicitamente alguns exemplos de ideais à direita maximais de $\mathbb{A}_n(K)$ com K de característica zero tal que $\dim_{\mathbb{Q}} K \geq n$. Alguns destes exemplos foram generalizados por Coutinho [3] em 1999: partindo de uma derivação d de $K[X_1, ..., X_n]$ que torna $K[X_1, ..., X_n]$ $d-$simples (veja Definição 2.43), ele encontrou uma *perturbação* de d, isto é, um polinômio $g \in K[X_1, ..., X_n]$ tal que o ideal à esquerda $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é maximal (aqui, pela primeira vez, encontra-se uma forte relação entre $d-$simplicidade de $K[X_1,...,X_n]$ e a existência de ideais maximais principais de $\mathbb{A}_n(K)$).

Outros exemplos de Stafford foram ampliados por Bratti-Takagi [1] (2002), mas para $n=2$ e $K=\mathbb{C}$ e utilizando métodos analíticos. Estes mesmos resultados foram generalizados por Lequain, Levcovitz, Souza Jr. [7] para n qualquer, K qualquer e sem a utilização de métodos analíticos.

Lequain, Levcovitz e Souza Jr. provaram também que se d é uma derivação que satisfaz certas condições e existe uma perturbação $g \in K[X_1,...,X_n]$ tal que $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é maximal, então $K[X_1,...,X_n]$ é $d-$ simples.

Diante deste último resultado, a questão que naturalmente se impõe é:

Conjectura *Dada uma derivação simples d de $K[X_1,...,X_n]$, podemos encontrar $g \in K[X_1,...,X_n]$ tal que $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal principal maximal à esquerda.*

A resposta é afirmativa para o caso $n=2$ e $d=\partial_1+h\partial_2$, com $h \in K[X_1,X_2]$, e, neste caso, prova-se inclusive que podemos tomar $g=\varepsilon X_2$ para algum $\varepsilon \in \{-1,+1\}$, sendo esta condição ótima. Este resultado encontra-se em Doering, Lequain, Ripoll [6] e em Ferreira [4].

O objetivo deste trabalho é mostrar que a conjectura acima também é verdadeira para n qualquer quando d é uma derivação de $K[X_1,...,X_n]$ do tipo Shamsuddin (veja definição 2.39). Este é um dos resultados de Lequain [5]. Neste caso, demonstra-se que tomando $g=\sum_{i=2}^{n} X_i^{t_i}$, com $t_i \geq 2$ para todo $i=2,...,n$, tem-se que $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_n$.

A seguir, apresentamos uma descrição de cada capítulo que compõe esta dissertação.

No capítulo 2, introduzimos a definição da Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_n(K)$ e expomos os resultados básicos. Definimos o conceito de *comutador* e apresentamos algumas fórmulas importantes envolvendo o comutador de operadores de $\mathbb{A}_n$. Apresentamos a *base canônica do* $K-$ *espaço vetorial* $\mathbb{A}_n$ e definimos o *grau de um operador* de $\mathbb{A}_n$. Também apresentamos a *base canônica de* $\mathbb{A}_n$ *como* $K[X_1,..,X_n]-$ *módulo livre* e definimos a *ordem de um operador*. Finalmente, tratamos de alguns operadores especiais de $\mathbb{A}_n$, no caso, as *derivações* de $K[X_1,...,X_n]$.

No capítulo 3, enfocamos a estrutura de ideais unilaterais de $\mathbb{A}_n$. Apresentamos uma caracterização para certos ideais unilaterais de $\mathbb{A}_n$ que são maximais principais (Teorema 3.13) e aplicamos estes resultados à teoria de $d-$simplicidade do anel de polinômios $K[X_1,...,X_n]$. Em particular, estabeleceremos uma relação entre $d-$simplicidade e ideais maximais principais unilaterais de $\mathbb{A}_n$. Alguns resultados importantes são particularizados para o caso das derivações de Shamsuddin.

No capítulo 4, caracterizamos as derivações de Shamsuddin de $K[X_1,...,X_n]$ que são simples e apresentamos um algoritmo que possibilita verificar efetivamente quando uma derivação de Shamsuddin é ou não simples.

Finalmente, no capítulo 5, mostramos que a conjectura é verdadeira em $\mathbb{A}_n$ para as derivações de Shamsuddin: dada uma derivação de Shamsuddin simples de $K[X_1,...,X_n]$, digamos $d,$ podemos sempre encontrar uma "perturbação" $g \in K[X_1,...,X_n]$, de tal forma que $d+g$ gera um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_n$. Mais até, provamos que tal g pode ser sempre tomado igual a $\sum_{i=2}^{n} X_i^{t_i}$, com $t_i \geq 2$, e que este resultado é ótimo, no sentido que se enfraquecermos a condição "$t_i \geq 2$ para todo $i = 2,...,n$" para a condição "$t_i \geq 2$ para todo $i = 3,...,n$ e $t_2 = 1$", então $\mathbb{A}_n.\left(d+\sum_{i=2}^{n} X_i^{t_i}\right)$ não necessariamente é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_n$, mesmo sendo d simples.

Em relação à notação e convenções utilizadas neste texto, ressaltamos que:

– se A denota um conjunto que contém o zero, então denotamos por A^* o conjunto $A\backslash\{0\}$;

– K denota sempre um corpo de característica zero;

– $K[X]$ denota sempre o anel de polinômios a n indeterminadas $K\left[X_1, ..., X_n\right]$; quando for importante o número de indeterminadas, escreveremos $K[X_1]$, $K[X_1, X_2]$, etc.

Para falarmos de *grau de polinômio*, convém definirmos primeiramente o conceito de *multi-índice*:

Definição *Um multi-índice α é um elemento de $\mathbb{N}^n$, digamos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. O comprimento do multi-índice α é definido por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.*

Daí:

– dados os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, denotamos por X^α o monômio $X_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot X_n^{\alpha_n}$ e por ∂^β o monômio $\partial_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot \partial_n^{\beta_n}$;

– dado $f = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha \in K\left[X\right]$ não-nulo, o grau de f é o maior comprimento dos multi-índices α para os quais X^α apresenta-se como parcela de f com coeficiente não-nulo, e é denotado por $\deg(f)$. Ao polinômio nulo, atribuímos o grau $-\infty$;

– $\deg_{X_n}(f)$ denota o grau de f como elemento de $K[X_1, ..., X_{n-1}][X_n]$;

– dado $f \in K[X_1]$, f' é o polinômio $\frac{\partial f}{\partial X_1}$;

– se $k, j \in \mathbb{N}$, então $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$.

2 ÁLGEBRA DE WEYL $\mathbb{A}_n(K)$

Neste capítulo definimos a Álgebra de Weyl como um anel de operadores lineares sobre $K[X_1, ..., X_n]$. Nas cinco primeiras seções deste capítulo omitimos as demonstrações de muitos resultados, pois estas podem ser encontradas em Ferreira [4] e Coutinho [2].

Sabemos que $K[X]$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre K. Denotamos a álgebra de operadores lineares deste espaço por $(End_K(K[X]), +, \circ)$, onde $+$ e $\circ$ denotam a soma e a composição de operadores lineares, respectivamente. Por questão de simplicidade escreveremos apenas $End_K(K[X])$. Denotamos por 1 o operador identidade e por 0 o operador nulo.

Como exemplos de elementos de $End_K(K[X])$, citamos:

– os operadores que são denotados por $\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}$ e cuja ação sobre um polinômio $f \in K[X]$ é dada simplesmente pela multiplicação por X_i :

$$\widehat{X_i}(f) = X_i.f, \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\};$$

– os operadores $\partial_1, ..., \partial_n$ (derivadas formais) definidos por

$$\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial X_i}, \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\}.$$

– o operador "multiplicação por f", onde $f \in K[X]$, e que denotamos por $\widehat{f}$.

Não é difícil constatar que todos os exemplos mencionados acima são, de fato, operadores lineares sobre $K[X]$.

A Álgebra de Weyl é definida como uma sub-álgebra de $End_K(K[X])$:

Definição 2.1 *A $K-$sub-álgebra de $End_K(K[X])$ gerada pelos operadores $\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}$ e $\partial_1, ..., \partial_n$ é denominada a $n-$* ***ésima Álgebra de Weyl*** *e é denotada por $\mathbb{A}_n(K)$, ou simplesmente $\mathbb{A}_n$:*

$$\mathbb{A}_n(K) = K\left[\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}\right]\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle .$$[1]

Por questão de consistência, consideramos $\mathbb{A}_0 = K$.

Desta forma, os elementos de $\mathbb{A}_n$ são combinações lineares sobre K de monômios nos geradores $\widehat{X_1}, ..., \widehat{X_n}, \partial_1, ..., \partial_n$.

Como seria de se esperar, $\mathbb{A}_n$ não é uma álgebra comutativa. De fato, para cada polinômio $f \in K[X]$, temos, usando a regra de diferenciação de um produto:

$$\begin{aligned}\left(\partial_i \circ \widehat{X_i}\right)(f) &= \partial_i(X_i f) = \frac{\partial}{\partial X_i}(X_i f) \\ &= X_i \frac{\partial f}{\partial X_i} + f \\ &= \left(\widehat{X_i} \circ \partial_i\right)(f) + 1(f)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\partial_i \circ \widehat{X_i} = \widehat{X_i} \circ \partial_i + 1. \tag{1}$$

Concluímos assim que os operadores $\partial_i \circ \widehat{X_i}$ e $\widehat{X_i} \circ \partial_i$ são distintos.

Mais conveniente é reescrevermos a fórmula acima usando comutador, conceito que apresentamos a seguir num contexto mais geral. Em seguida, veremos algumas propriedades do comutador envolvendo geradores de $\mathbb{A}_n$.

2.1 O comutador e suas propriedades

Definição 2.2 *Seja R um anel, e sejam $r_1, r_2 \in R$. O* ***comutador*** *de r_1 e r_2 é denotado por $[r_1, r_2]$ e definido por*

$$[r_1, r_2] = r_1 r_2 - r_2 r_1.$$

[1] A diferença entre [ ] e < > está em separar por [ ] os geradores que ainda tornam a sub-álgebra comutativa.

Proposição 2.3 *(Propriedades do comutador):*

Seja R uma anel, e sejam $r_1, r_2 \in R$. Então:

i) $[r_1, r_2] \in R$;

ii) $[r_1, r_2] = 0 \Leftrightarrow r_1$ *comuta com* r_2;

iii) $[r_1, r_2] = -[r_2, r_1]$;

iv) (Identidade de Jacobi): Dados $a, b, c \in R$,

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0.$$

Se R for uma $K-$ álgebra, valem ainda as seguintes propriedades:

v) o comutador é bilinear em cada uma das entradas;

vi) para todo $\lambda \in K$, $[\lambda r_1, r_2] = \lambda[r_1, r_2] = [r_1, \lambda r_2]$.

Usando a notação de comutador, reescrevemos (1), obtendo

$$\left[\partial_i, \widehat{X_i}\right] = 1.$$

Na verdade, $\mathbb{A}_n$ é uma $K-$álgebra não comutativa onde, de certa forma, a única relação de não-comutatividade é a que foi dada acima, como nos mostra a proposição a seguir

Proposição 2.4 *(Comutadores envolvendo os geradores de $\mathbb{A}_n$). Temos, para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$*

i) $\left[\partial_i, \widehat{X_j}\right] = \delta_{ij} \cdot 1$;

ii) $[\partial_i, \partial_j] = 0$*;*

iii) $\left[\widehat{X_i}, \widehat{X_j}\right] = 0$.

Lembramos que δ_{ij} utilizado em *(i)* é o chamado "delta de Kronecker" e que seu valor é 1, se $i = j$, e zero, se $i \neq j$. Salientamos também que, por *(ii)* da Proposição 2.3, as condições *(ii)* e *(iii)* acima nos dizem que ∂_i comuta sempre com ∂_j e que $\widehat{X_i}$ comuta sempre com $\widehat{X_j}$.

Convenção: A partir de agora, denotaremos $\widehat{X_i}$ "multiplicação por X_i", simplesmente por X_i.

A convenção acima objetiva tornar a notação menos carregada. Assim, por exemplo, o polinômio $f = 2X_1X_2^3 + 6X_2^2X_3^2 - 5X_1X_3 + 4$ pode representar tanto um elemento de $K[X]$, como o operador de $\mathbb{A}_n$ cuja ação sobre os elementos de $K[X]$ é dada pela multiplicação por f. Da mesma forma, dispensaremos o sinal $\circ$ para multiplicação em $\mathbb{A}_n$.

Assim, podemos escrever simplesmente

$$\mathbb{A}_n = K\left[X_1, ..., X_n\right] \langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle .$$

Antes de seguirmos adiante, apresentamos mais alguns cálculos que envolvem o comutador e elementos de $\mathbb{A}_n$ e que nos serão úteis.

Proposição 2.5 *Seja $i \in \{1, ..., n\}$, então*

i) $[\partial_i, f] = \partial_i(f)$, *para cada* $f \in K\left[X\right]$;

ii) $\left[\partial_i, X_i^k\right] = kX_i^{k-1}$, *para cada* $k \in \mathbb{N}^*$;

iii) $\left[\partial_i^k, X_i\right] = k\partial_i^{k-1}$, *para cada* $k \in \mathbb{N}^*$;

iv) Fórmula de Leibiniz:

Para cada $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\partial_i^k X_i^l = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial_i^j (X_i^l) \partial_i^{k-j}.$$

Em particular,

$$[\partial_i^k, X_i^l] = \sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (X_i^l) \partial_i^{k-j}.$$

2.2 A base canônica para o K-espaço vetorial $\mathbb{A}_n$

A base canônica para a Álgebra de Weyl é facilmente descrita fazendo-se uso da notação de multi-índice, já mencionada na introdução e complementada aqui:

Definição 2.6 *Um* ***multi-índice*** α *é um elemento de* $\mathbb{N}^n$. *O* ***comprimento do multi-índice*** $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *é denotado por* $|\alpha|$ *e definido por*

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Definimos ainda o ***fatorial do multi-índice*** α *como sendo o número* $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$.

Notação 2.7 *Dado o multi-índice* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$*, denotaremos por* X^α *o monômio* $X_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot X_n^{\alpha_n}$. *Da mesma forma, se* $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$*,* ∂^β *representará* $\partial_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot \partial_n^{\beta_n}$. *Notemos que o par* (α, β) *de multi-índices em* $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ *pode ser visto como um multi-índice em* $\mathbb{N}^{2n}$*, fazendo sentido, portanto, falarmos em comprimento do multi-índice* (α, β). *Denotaremos por* e_i *o multi-índice em que todas as entradas são zero, com exceção da* $i-$*ésima entrada que é igual a 1. Dados os multi-índices* $\alpha, \sigma \in \mathbb{N}^n$*, denotaremos por* $\alpha + \sigma$ *o multi-índice* $(\alpha_1 + \sigma_1, ..., \alpha_n + \sigma_n)$.

Lema 2.8 *Dados* $\sigma, \beta \in \mathbb{N}^n$*, temos:*

i) *se* $|\sigma| \leq |\beta|$ *com* $\sigma \neq \beta$ *então* $\partial^\beta (X^\sigma) = 0$;

ii) *se* $\sigma = \beta$ *então* $\partial^\beta (X^\sigma) = \beta!$;

iii) *se* $|\sigma| > |\beta|$ *mas existe* $i \in \{1, ..., n\}$ *tal que* $\sigma_i < \beta_i$*, então*

$$\partial^\beta (X^\sigma) = 0;$$

iv) *se* $|\sigma| > |\beta|$ *e* $\sigma_i \geqslant \beta_i$ *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$ *então*

$$\partial^\beta (X^\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i!}{(\sigma_i - \beta_i)!} X_i^{\sigma_i - \beta_i}.$$

Proposição 2.9 *O conjunto* $\mathcal{B} = \left\{ X^\alpha \partial^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}$ *é uma base para o* $K-$ *espaço vetorial* $\mathbb{A}_n$.

Observação 2.10 *A base $\mathcal{B}$ da proposição anterior é a chamada base canônica do $K-$ espaço vetorial $\mathbb{A}_n$.*

Exemplo 2.11 *Fazendo uso da proposição 2.4, temos que a representação na base canônica do operador $\partial_2^3 X_1 \partial_3 X_3 + X_3 \partial_1 X_1$ é dada por $X_3 + X_1 X_3 \partial_1 + X_1 \partial_2^3 + X_1 X_3 \partial_2^3 \partial_3$.*

Usando a notação de multi-índice podemos mostrar que $\mathbb{A}_n \subsetneq End_K\left(K\left[X\right]\right)$:

Proposição 2.12 *O operador linear $D \in End_K\left(K\left[X_1, ..., X_n\right]\right)$, definido por*

$$D\left(\sum_{\eta} a_\eta X^\eta\right) = a_0,$$

para cada $\sum_\eta a_\eta X^\eta \in K[X]$, onde o multi-índice 0 representa a $n-$upla $(0, ..., 0)$, é tal que $D \notin \mathbb{A}_n$, e portanto $\mathbb{A}_n \subsetneq End_K\left(K\left[X\right]\right)$.

Antes de encerrarmos esta seção, vejamos mais algumas fórmulas que nos serão úteis e que envolvem os geradores e operadores de $\mathbb{A}_n$:

Proposição 2.13 *Sendo R um anel associativo, para quaisquer $u, v, w \in R$, temos*

i) $[vw, u] = v\left[w, u\right] + \left[v, u\right] w$;

ii) $[u, vw] = v\left[u, w\right] + \left[u, v\right] w$.

Corolário 2.14 *Sejam $\alpha, \beta, \sigma, \eta \in \mathbb{N}^n$. Então*

$$[X^\alpha \partial^\beta, X^\sigma \partial^\eta] = X^\alpha[\partial^\beta, X^\sigma]\partial^\eta + X^\sigma[X^\alpha, \partial^\eta]\partial^\beta.$$

Proposição 2.15 *Sejam $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$, $p \in K\left[X\right]$ e $c_{\alpha,\beta} \in K$. Então, para cada $i \in \{1, ..., n\}$:*

i) $\left[c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta, X_i\right] = \begin{cases} 0, \text{ se } \beta_i = 0 \\ \beta_i c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^{\beta - e_i}, \text{ se } \beta_i \neq 0; \end{cases}$

ii) $\left[\partial_i, c_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta\right] = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha_i = 0 \\ \alpha_i c_{\alpha\beta}X^{\alpha-e_i}\partial^\beta, \text{ se } \alpha_i \neq 0; \end{cases}$

iii) $\left[\partial^\beta, p\right] = \partial_i\left[\partial^{\beta-e_i}, p\right] + \left[\partial_i, p\right]\partial^{\beta-e_i}$, *desde que tenhamos* $\beta_i \neq 0$.

Observação: Note que a fórmula *(iii)* no enunciado acima não faria sentido se $\beta_i = 0$, pois ∂_i não estaria presente em ∂^β.

Corolário 2.16 *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ *e* $D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}X^\alpha\partial^\beta \in \mathbb{A}_n$. *Temos:*

i) $[D, X_i] = \begin{cases} 0, \text{ se todas as parcelas de } D \text{ têm } \beta_i = 0 \\ \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \beta_i\neq 0}} \beta_i c_{\alpha,\beta}X^\alpha\partial^{\beta-e_i}, \text{ se existe } i \text{ tal que } \beta_i \neq 0; \end{cases}$

ii) $[\partial_i, D] = \begin{cases} 0, \text{ se todas as parcelas de } D \text{ têm } \alpha_i = 0 \\ \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha_i\neq 0}} \alpha_i c_{\alpha,\beta}X^{\alpha-e_i}\partial^\beta, \text{ se existe } i \text{ tal que } \alpha_i \neq 0. \end{cases}$

Lema 2.17 *Sejam* $g \in K[X_1, X_j]$, *para algum* $j \in \{2, ..., n\}$, *e* $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ *tal que* $\beta_1 = \beta_j = 0$. *Então*

$$[\partial^\beta, g] = 0.$$

Prova. Inicialmente observe, pela Proposição 2.15*(i)*, temos $\partial^\beta X_1 = X_1\partial^\beta$ e $\partial^\beta X_j = X_j\partial^\beta$, uma vez que $\beta_1 = \beta_j = 0$. Por uma simples indução pode-se mostrar que, para todo l, m, tem-se

$$\partial^\beta X_1^l = X_1^l\partial^\beta \text{ e } \partial^\beta X_j^m = X_j^m\partial^\beta.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
[\partial^\beta, g] &= \left[\partial^\beta, \textstyle\sum_{l,m} c_{lm}X_1^lX_j^m\right] \overset{\text{Prop. 2.3}}{=} \\
&= \textstyle\sum_{l,m} c_{lm}\left[\partial^\beta, X_1^lX_j^m\right] \\
&= \textstyle\sum_{l,m} c_{lm}\left(\partial^\beta X_1^lX_j^m - X_1^lX_j^m\partial^\beta\right) \\
&= \textstyle\sum_{l,m} c_{lm}\left((\partial^\beta X_1^l)X_j^m - X_1^lX_j^m\partial^\beta\right) \\
&= \textstyle\sum_{l,m} c_{lm}\left(X_1^l\partial^\beta X_j^m - X_1^lX_j^m\partial^\beta\right) \\
&= \textstyle\sum_{l,m} c_{lm}X_1^l\left(\partial^\beta X_j^m - X_j^m\partial^\beta\right) = 0
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.18 *Sejam* $g \in K[X_1, X_j]$*, para algum* $j \in \{2, ..., n\}$*,* $p \in K[X]$ *e* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ *tal que* $\gamma_1 = 0 \neq \gamma_j$*. Então*

$$[g, p\partial^\gamma] = [g, p\partial_j^{\gamma_j}]\partial^{\gamma - \gamma_j e_j}.$$

Prova. Temos

$$\begin{aligned}
[g, p\partial^\gamma] &\overset{\text{Prop. 2.13 } (ii)}{=} p[g, \partial^\gamma] + [g, p]\partial^\gamma \\
&= p[g, \partial_j^{\gamma_j}\partial^{\gamma - \gamma_j e_j}] \overset{\text{Prop. 2.13 } (ii)}{=} \\
&= p(\partial_j^{\gamma_j}[g, \partial^{\gamma - \gamma_j e_j}] + [g, \partial_j^{\gamma_j}]\partial^{\gamma - \gamma_j e_j}) \overset{\text{Lema 2.17}}{=} \\
&= p[g, \partial_j^{\gamma_j}]\partial^{\gamma - \gamma_j e_j} \overset{\text{Prop. 2.13 } (ii)}{=} [g, p\partial_j^{\gamma_j}]\partial^{\gamma - \gamma_j e_j}.
\end{aligned}$$

■

Como conseqüências da fórmula de Leibiniz (Proposição 2.5 (iv)), temos ainda as seguintes propriedades:

Proposição 2.19 *Sejam* α*,* $\beta \in \mathbb{N}^n$*,* $p, q \in K[X]$*. Então temos, para cada* $i \in \{1, ..., n\}$ *e para cada* $k \in \mathbb{N}$*,*

i) (Generalização da fórmula de Leibiniz)

$$\partial_i^k p = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial_i^j (p) \partial_i^{k-j};$$

ii) $\left[\partial_i^k, p\right] = \sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (p) \partial_i^{k-j}$*, ou seja*

$$\partial_i^k p = p\partial_i^k + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (p) \partial_i^{k-j};$$

iii) $\left[p\partial_i, \partial_i^k\right] = -\sum\limits_{j=0}^{k-1} C_k^{j+1} \partial_i^{j+1} (p) \partial_i^{k-j}$;

iv) $\left[q, p\partial_i^k\right] = -p\sum\limits_{j=1}^{k} C_k^j \partial_i^j (q) \partial_i^{k-j}$.

A proposição a seguir generaliza o item *(iii)* da Proposição 2.15.

Proposição 2.20 *Sejam $D \in \mathbb{A}_n$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Então, para cada i tal que $\beta_i \neq 0$ temos:*

$$[D, \partial^\beta] = \partial_i [D, \partial^{\beta - e_i}] + [D, \partial_i] \partial^{\beta - e_i}$$

Prova. Se $\beta_i \neq 0$, podemos escrever

$$[D, \partial^\beta] = [D, \partial_i \partial^{\beta - e_i}] \overset{\text{Prop. 2.13 } (ii)}{=}$$

$$= \partial_i [\partial^{\beta - e_i}, D] + [D, \partial_i] \partial^{\beta - e_i}. \qquad \blacksquare$$

2.3 O grau de um operador de $\mathbb{A}_n$

O grau de um operador de $\mathbb{A}_n$, que será introduzido nesta seção, se comporta, muitas vezes, como o grau de um polinômio. A diferença está na não-comutatividade de $\mathbb{A}_n$.

Definição 2.21 *Seja $D \in \mathbb{A}_n$ e suponhamos que sua expressão na forma canônica é $D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta$. O **grau de** D, denotado por $\deg(D)$, é o maior comprimento dos multi-índices $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ tais que $X^\alpha \partial^\beta$ apresenta-se como parcela de D com coeficiente não-nulo. Como ocorre com o grau de um polinômio, convenciona-se que o grau do operador nulo é $-\infty$.*

Exemplo 2.22 *O grau do operador $2X_1\partial_2 + X_1 X_2^3 \partial_1 \partial_2$ é 6.*

Proposição 2.23 *(Propriedades do grau) Sejam D e $D' \in \mathbb{A}_n$. Então:*

(i) $\deg(D + D') \leq \max\{\deg(D), \deg(D')\}$, *ocorrendo igualdade sempre que* $\deg(D) \neq \deg(D')$;

(ii) $\deg([D, D']) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$;

(iii) $\deg(X^\alpha \partial^\beta X^\sigma \partial^\eta) = |\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta|$. *Mais precisamente,*

$$X^\alpha \partial^\beta X^\sigma \partial^\eta = X^{\alpha+\sigma} \partial^{\beta+\eta} + \{ \text{ parcelas de grau} \leq |\alpha| + |\beta| + |\sigma| + |\eta| - 2 \};$$

(iv) $\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D')$.

Salientamos que pode ocorrer igualdade na fórmula *(ii)* da proposição anterior. Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.24 *Seja* $D = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} X^{\alpha} \partial^{\beta} \in \mathbb{A}_n$ *e seja* (α, β) *um multi-índice de maior comprimento para o qual* $X^{\alpha}\partial^{\beta}$ *apresenta-se como parcela de* D *com coeficiente não-nulo, e suponhamos que* $\alpha_i \neq 0$*. Então, pelo Corolário 2.16, teremos*

$$[\partial_i, D] = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha_i \neq 0}} c_{\alpha,\beta} \alpha_i X^{\alpha - e_i} \partial^{\beta}$$

e, portanto, $\deg([\partial_i, D]) = \deg(\partial_i) + \deg(D) - 2.$

Da proposição 2.23 obtemos os seguintes resultados sobre $\mathbb{A}_n$:

Corolário 2.25 $\mathbb{A}_n$ *não possui divisores de zero.*

Corolário 2.26 *Os únicos elementos de* $\mathbb{A}_n$ *invertíveis são as constantes.*

2.4 A base canônica para o $K[X]-$módulo livre $\mathbb{A}_n$

É fácil ver que $\mathbb{A}_n$ também é um $K[X]-$módulo à esquerda. Além disso,

Proposição 2.27 *A Álgebra de Weyl* $\mathbb{A}_n$ *é um* $K[X]-$*módulo livre à esquerda com base* $\mathcal{B} = \left\{\partial^{\beta} : \beta \in \mathbb{N}^n\right\}.$

Assim, um elemento D de $\mathbb{A}_n$ pode ser escrito de maneira única na forma

$$D = \sum_{\beta} g_{\beta} \partial^{\beta}, \text{ com } g_{\beta} \in K[X].$$

2.5 A ordem de um operador de $\mathbb{A}_n$

Aqui também usaremos as notações de multi-índice e comprimento de um multi-índice que foram estabelecidas na Definição 2.6.

Definição 2.28 *Dado $p \in K[X]$ não-nulo, definimos a **ordem de** $p\partial^\beta$ como sendo $|\beta|$. Para um operador $D \in \mathbb{A}_n$, cuja expressão, em termos da base $\mathcal{B}$ explicitada acima, é da forma*

$$D = \sum_\beta p_\beta \partial^\beta,$$

definimos a ordem de D como sendo a maior ordem dos operadores que compõem as parcelas não-nulas de D. Ao operador nulo será atribuída ordem $-\infty$. Denotaremos a ordem de D por $ord\,(D)$.

Exemplo 2.29 *Se $D = X_1^3\partial_1 + X_1X_3^7\partial_1\partial_2^2 + 5\partial_1^3\partial_2^2 - X_2^2\partial_1\partial_3^4$ então $ord(D) =$* 5.

Proposição 2.30 *(Propriedades da ordem) Sejam $D, D' \in \mathbb{A}_n$. Então valem as seguintes propriedades:*

i) $ord\,(D + D') \leq \max\{ord\,(D)\,, ord\,(D')\}$; valendo a igualdade se $ord\,(D) \neq ord\,(D')$;

ii) $ord\,([D, D']) \leq ord\,(D) + ord\,(D') - 1$;

iii) $ord(X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta) = |\beta| + |\eta|$. Mais precisamente,

$$X^\alpha\partial^\beta X^\sigma\partial^\eta = X^{\alpha+\sigma}\partial^{\beta+\eta} + \{\text{ parcelas de ordem} \leq |\beta| + |\eta| - 1\};$$

iv) $ord\,(DD') = ord\,(D) + ord\,(D')$.

Lema 2.31 *Suponhamos que $n \geq 2$. Sejam $g \in K[X_1, X_j]$, para algum $j \in \{2, ..., n\}$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$[\partial_j^k, g] = k\partial_j(g)\partial_j^{k-1} + \{\text{ termos com ordem} \leq k-2\}.$$

Prova. De fato,

$$[\partial_j^k, g] \overset{\text{Prop. 2.19 }(ii)}{=} \sum_{i=1}^{k} C_k^i \partial_j^i(g)\partial_j^{k-i} = k\partial_j(g)\partial_j^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} C_k^i \partial_j^i(g)\partial_j^{k-i},$$

sendo o somatório um operador de ordem $\leq k-2$. ■

2.6 Derivações de $K[X]$

Introduzimos, nesta seção, os operadores de ordem 1 mais simples, chamados *derivações*, bem como o conceito de *derivação simples*, conceitos essenciais para este trabalho. Por isso, nesta seção apresentamos a prova de todos os resultados.

Definição 2.32 *Seja R uma $K-$álgebra. Um operador linear $d : R \to R$ é dito uma **derivação** (que se anula sobre K) de R se satisfizer a regra de Leibiniz*

$$d(ab) = ad(b) + d(a)b,$$

para todos $a, b \in R$.

Um exemplo de derivação é o operador 0, que chamamos derivação nula.

Proposição 2.33 *Seja R uma $K-$álgebra com unidade 1_R, e seja d uma derivação de R. Então $d(1_R) = 0$.*

Prova. Como d é uma derivação ela satisfaz a regra de Leibiniz da definição 2.32, logo

$$\begin{aligned} d(1_R) &= d(1_R \cdot 1_R) \\ &= 1_R d(1_R) + d(1_R)1_R \\ &= d(1_R) + d(1_R). \end{aligned}$$

Então $d(1_R) = 0$. ■

Denotamos por $Der_K(R)$ o $K-$espaço vetorial de todas as derivações de R. Em particular, $Der_K(K[X]) \subseteq End_K(K\,[X])$, pois toda derivação é um operador linear.

Lema 2.34 *Se d é uma derivação de $K\,[X]$, então, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e todo $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$d(X_i^k) = kX_i^{k-1}d(X_i).$$

Prova. A prova é por indução sobre k : temos, para $k = 1$,

$$d(X_i) = d(X_i^1) = 1X_i^{1-1}d(X_i).$$

Seja $k \geq 1$ e suponhamos que $d(X_i^k) = kX_i^{k-1}d(X_i)$. Então

$$\begin{aligned} d(X_i^{k+1}) &= d(X_iX_i^k) = X_id(X_i^k) + X_i^kd(X_i) \\ &= X_ikX_i^{k-1}d(X_i) + X_i^kd(X_i) \\ &= kX_i^kd(X_i) + X_i^kd(X_i) \\ &= (k+1)X_i^kd(X_i). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 2.35 *Se d é uma derivação de $K\,[X]$, então*

$$d = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i.$$

Prova. Seja $X^\alpha \in K[X]$, com $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Temos fazendo uso da definição 2.32:

$$\begin{aligned}
d(X^{\alpha}) &= d(X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}) \\
&= d(X_1^{\alpha_1}X^{\alpha-\alpha_1 e_1}) = d(X_1^{\alpha_1})X^{\alpha-\alpha_1 e_1} + X_1^{\alpha_1}d(X^{\alpha-\alpha_1 e_1}) \\
&= d(X_1^{\alpha_1})X^{\alpha-\alpha_1 e_1} + X_1^{\alpha_1}d(X_2^{\alpha_2}X^{\alpha-\alpha_1 e_1-\alpha_2 e_2}) \\
&= d(X_1^{\alpha_1})X^{\alpha-\alpha_1 e_1} + X_1^{\alpha_1}(d(X_2^{\alpha_2})X^{\alpha-\alpha_1 e_1-\alpha_2 e_2} + X_2^{\alpha_2}d(X^{\alpha-\alpha_1 e_1-\alpha_2 e_2})) \\
&= d(X_1^{\alpha_1})X^{\alpha-\alpha_1 e_1} + d(X_2^{\alpha_2})X^{\alpha-\alpha_2 e_2} + X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}d(X^{\alpha-\alpha_1 e_1-\alpha_2 e_2}) \\
&= ... = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} d(X_i^{\alpha_i})X^{\alpha-\alpha_i e_i} + X_1^{\alpha_1}...X_{n-1}^{\alpha_{n-1}}d(X_n^{\alpha_n}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d(X_i^{\alpha_i})X^{\alpha-\alpha_i e_i} \qquad (2)
\end{aligned}$$

1^{o}caso: $\alpha_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Temos

$$\begin{aligned}
d(X^{\alpha}) &= \sum_{i=1}^{n} d(X_i^{\alpha_i})X^{\alpha-\alpha_i e_i} \overset{\text{Lema 2.34}}{=} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^{\alpha_i-1}d(X_i)X^{\alpha-\alpha_i e_i} = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)X^{\alpha-\alpha_i e_i}\alpha_i X_i^{\alpha_i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} d(X_i)X^{\alpha-\alpha_i e_i}\partial_i(X_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i(X^{\alpha}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i\right)(X^{\alpha}).
\end{aligned}$$

2^{o}caso: se algum $\alpha_i = 0$, $i \in \{1, ..., n\}$, temos, pela Proposição 2.33,

$$d(X_i^{\alpha_i}) = d(X_i^0) = d(1) = 0,$$

e portanto a $i-$ésima parcela de (2) é nula. Por outro lado, como $\alpha_i = 0 < 1$, pelo Lema 2.8 (iii) temos

$$\partial_i(X^{\alpha}) = 0.$$

Logo

$$d(X_i^{\alpha_i})X_i^{\alpha-\alpha_i e_i} = 0 = d(X_i)\partial_i(X^\alpha)$$

Assim, usando o fato acima para os α_i nulos e o 1^ocaso para os α_i não-nulos, (2) pode ser escrita

$$\begin{aligned} d(X^\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} d(X_i^{\alpha_i})X^{\alpha-\alpha_i e_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i(X^\alpha) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i\right)(X^\alpha). \end{aligned}$$

Conclusão: Como os monômios X^α formam uma base para $K[X]$ e d é linear, concluímos que

$$d = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)\partial_i. \qquad \blacksquare$$

Corolário 2.36 *Toda derivação d de $K[X]$ se escreve, de maneira única, na forma*

$$d = \sum_{i=1}^{n} p_i\partial_i,$$

onde $p_1, ..., p_n \in K[X]$. Ou seja, $Der_K(K[X])$ é um $K[X]-$módulo livre com base $\mathcal{B} = \{\partial_1, ..., \partial_n\}$.

Assim, temos que $Der_K(K[X]) \subseteq \mathbb{A}_n$. Temos ainda, dada a Definição 2.28, que os elementos de ordem 1 são os elementos de

$$(Der_K(K[X]) \setminus \{0\}) + K[X],$$

ou seja: um elemento de ordem 1 é da forma $d + g$, com d uma derivação não-nula e $g \in K[X]$. Por exemplo, o operador

$$\partial_1 + h_2\partial_2 + ... + h_n\partial_n + g,$$

onde $h_2, ..., h_n, g \in K[X]$, é um operador de $\mathbb{A}_n$ de ordem 1.

Sobre estes operadores, temos os seguintes resultados técnicos:

Lema 2.37 *Seja $d \in \mathbb{A}_n$ uma derivação. Então, para cada $f \in K[X]$,*

$$[d, f] = d(f).$$

Prova. Supondo $d = h_1\partial_1 + ... + h_n\partial_n$, temos

$$\begin{aligned}
[d, f] &= \textstyle\sum_{i=1}^n [h_i\partial_i, f] \stackrel{Prop.2.19\,(iv)}{=} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n h_i\partial_i(f) \\
&= \left(\textstyle\sum_{i=1}^n h_i\partial_i\right)(f) = d(f). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolário 2.38 *Seja S um operador de ordem 1, digamos, da forma $S = d + g$, com d uma derivação não-nula e $g \in K[X]$. Então, para qualquer $f \in K[X]$,*

$$[S, f] = d(f) \in K[X].$$

Prova. Basta lembrar que o comutador é bilinear e que $[g, f] = 0$, pois polinômios comutam. $\blacksquare$

Um caso particular de derivações de $K[X]$ que estamos interessados neste trabalho são as chamadas derivações de Shamsuddin:

Definição 2.39 *Uma* ***derivação de Shamsuddin*** *é um elemento d de $Der_K(K[X])$ da forma*

$$d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n} (a_iX_i + b_i)\partial_i,$$

com $a_i, b_i \in K[X_1]$ para todo i.

Exemplo 2.40 $d = \partial_1 + (X_1^2X_2 + X_1 - 5)\partial_2 + (X_1X_3 + 5)\partial_3$ *é uma derivação de Shamsuddin de* $K[X_1, X_2, X_3]$.

Lema 2.41 *Seja* $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_iX_i + b_i)\partial_i$ *uma derivação de Shamsuddin de* $K[X]$. *Então*

(a) $d|_{K[X_1]} = \partial_1$;

(b) para todo $i \in \{2, ..., n\}$, *temos* $d|_{K[X_1,X_i]} = \partial_1 + (a_iX_i + b_i)\partial_i$.

Prova. Imediata. ■

Lema 2.42 *Seja* $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_iX_i + b_i)\partial_i$, *com* $a_i, b_i \in K[X_1]$ *para todo* i, *uma derivação de Shamsuddin de* $K[X_1, X_2, ..., X_n]$. *Então, para todo multi-índice* $\Gamma = (\gamma_2, ..., \gamma_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$, *temos:*

(a) $[d, \partial^\Gamma] = -\left(\sum_{i=2}^{n} \gamma_i a_i\right) \partial^\Gamma$.

(b) Em particular, $\partial_i^t d = d\partial_i^t + ta_i\partial_i^t$, *se* $t \geq 0$ *é um inteiro.*

Prova. Procederemos por indução sobre$\mid \Gamma \mid$.

Se $\mid \Gamma \mid = 1$, temos que $\partial^\Gamma = \partial_j$ para algum $j \in \{2, ..., n\}$; daí,

$$\begin{aligned}
[d, \partial_j] &= \left[\partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_iX_i + b_i)\partial_i, \partial_j\right] \\
&= [\partial_1, \partial_j] + \sum_{i=2}^{n}[a_iX_i\partial_i, \partial_j] + \sum_{i=2}^{n}[b_i\partial_i, \partial_j] \overset{\text{Prop. 2.4}}{=} \\
&= \sum_{i=2}^{n}[a_iX_i\partial_i, \partial_j] + \sum_{i=2}^{n}[b_i\partial_i, \partial_j] \overset{\text{Prop. 2.15 }(v)}{=} \\
&= -a_j\partial_j.
\end{aligned}$$

Suponhamos que $\mid \Gamma \mid \geq 2$ e que o lema é verdadeiro para todo multi-índice Λ tal que $\mid \Lambda \mid < \mid \Gamma \mid$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\gamma_2 \geq 1$. Temos então:

$$[d, \partial^\Gamma] \overset{\text{Prop. 2.20}}{=} \partial_2[d, \partial^{\Gamma - e_2}] + [d, \partial_2]\partial^{\Gamma - e_2}$$

$$= \partial_2 \left(-(\gamma_2 - 1)a_2\partial^{\Gamma - e_2} - \sum_{i=3}^{n} \gamma_i a_i \partial^{\Gamma - e_2} \right) + (-a_2\partial_2)\partial^{\Gamma - e_2}$$
$$= -\gamma_2 a_2 \partial^{\Gamma} + a_2\partial^{\Gamma} - \sum_{i=3}^{n} \gamma_i a_i \partial^{\Gamma} - a_2\partial^{\Gamma} = - \sum_{i=2}^{n} \gamma_i a_i \partial^{\Gamma}. \blacksquare$$

Tratamos agora do conceito de derivação simples que será usado para aprofundarmos a caracterização dos ideais unilaterais maximais de $\mathbb{A}_n$.

Definição 2.43 *Seja d uma derivação de uma $K-$álgebra R. Um ideal I de R é um $d-$**ideal** (ou um **ideal estável por** d) se $d(I) \subseteq I$. Dizemos que R é $d-$**simples** e que d é uma **derivação simples** de R se R não contém $d-$ideais além dos triviais $\{0\}$ e R.*

Antes de darmos exemplos de derivações simples, provamos um resultado que simplifica, em muitos casos, a constatação sobre a estabilidade de um ideal, a saber, que mostra que, para verificarmos a $d-$estabilidade de um ideal I de um anel R, é suficiente verificarmos a $d-$estabilidade nos geradores de I.

Proposição 2.44 *Seja I um ideal de uma $K-$álgebra comutativa R gerado pelo conjunto $\{ y_\sigma\}_{\sigma \in \sum}$, e seja d uma derivação de R. Então I é um $d-$ideal se, e somente se, $d(y_\sigma) \in I$ para todo $\sigma \in \sum$.*

Prova. $(\Rightarrow)$ É óbvia.

$(\Leftarrow)$ Queremos mostrar que, para todo $y \in I$, ocorre $d(y) \in I$.

Escrevendo $y = \sum_{i=1}^{s} r_i y_i$,onde $r_i \in R$ e $y_i \in \{y_\sigma\}_{\sigma \in \sum}$, para todo $i \in \{1, ..., s\}$, temos:

$$\begin{aligned} d(y) &= \sum_{i=1}^{s} d(r_i y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{s} (d(r_i)y_i + r_i d(y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{s} d(r_i)y_i + \sum_{i=1}^{s} r_i d(y_i). \end{aligned}$$

E, como por hipótese $d(y_i) \in I$ para todo i, temos de fato $d(y) \in I$. ■

Exemplo 2.45 *$K[X_1]$ é ∂_1-simples.*

Prova. De fato, seja $I \subseteq K[X_1]$ um ∂_1-ideal não-nulo. Seja $f \in I$ um polinômio gerador de I (lembramos que $K[X_1]$ é anel a ideais principais). Seja n o grau de f.

Pelo fato de I ser um ∂_1-ideal, temos que

$$\partial_1(f) \in I.$$

Daí, se tivermos $n > 0$ então $\partial_1(f)$ tem grau $n-1 \geq 0$ em I. Mas isto contraria a minimalidade do grau de f. Portanto, $n = 0$, ou seja, $f \in K^*$ e, conseqüentemente, $I = K[X_1]$. Assim, $K[X_1]$ não contém ∂_1-ideais próprios não-nulos. ■

Lema 2.46 *Se d é uma derivação de $K[X]$, então, para todo $c \in K^*$, as derivações d e cd têm exatamente os mesmos ideais estáveis.*

Prova. Imediata. ■

Proposição 2.47 *As derivações simples de $K[X_1]$ são precisamente os operadores da forma $c\partial_1$ para algum $c \in K^*$.*

Prova. Pelo Lema 2.46 e pelo Exemplo acima, é claro que, para todo $c \in K^*$, a derivação $c\partial_1$ é simples.

Mostremos agora que se $p \in K[X_1]\backslash K$, então $d = p\partial_1$ não é uma derivação simples de $K[X_1]$. De fato, considerando o ideal $I = pK[X_1]$, temos

$$d(p) = p\partial_1(p) \in pK[X_1].$$

Desta forma, pela Proposição 2.44, $pK[X_1]$ é um $d-$ideal de $K[X_1]$ que é não-trivial se p não for constante, e, portanto, neste caso, $d = p\partial_1$ não é uma derivação simples. ■

3 SOBRE A ESTRUTURA DE IDEAIS DA ÁLGEBRA DE WEYL

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre a estrutura de ideais unilaterais de $\mathbb{A}_n$. Alguns dos resultados deste capítulo novamente serão apresentados sem demonstrações, podendo as mesmas ser encontradas em Ferreira [4] e Souza Jr. [8].

Apesar de muitos anéis não-comutativos admitirem ideais bilaterais, não é o que ocorre com $\mathbb{A}_n$.

3.1 A simplicidade de $\mathbb{A}_n$

Definição 3.1 *Um anel é dito **simples**, se seu único ideal bilateral próprio é o ideal nulo.*

Teorema 3.2 *A álgebra $\mathbb{A}_n$ é simples.*

Sabe-se que todo anel comutativo simples é um corpo. No entanto, isto não necessariamente ocorre com anéis não-comutativos, isto é, nem todo anel não-comutativo simples é um anel de divisão. Um exemplo é $\mathbb{A}_n$: de fato, como vimos no teorema anterior $\mathbb{A}_n$ é simples; mas, como conseqüência direta do corolário 2.26 temos:

Teorema 3.3 *A álgebra $\mathbb{A}_n$ não é um anel de divisão.*

E, como os únicos elementos de $\mathbb{A}_n$ invertíveis são as constantes não-nulas, temos que:

Corolário 3.4 *Todo elemento não-constante de $\mathbb{A}_n$ gera um ideal unilateral não-trivial.*

A Álgebra de Weyl não é, tampouco, um anel a ideais principais à esquerda (ou à direita).

Cabe aqui ressaltar que determinar ideais à esquerda de $\mathbb{A}_n$ é equivalente a determinar ideais à direita de $\mathbb{A}_n$. Isto se deve ao fato de $\mathbb{A}_n$ possuir uma involução (veja [4]), deste modo para cada ideal à esquerda existe um ideal à direita correspondente, e vice-versa. Então, a partir de agora, falaremos exclusivamente de ideais à esquerda de $\mathbb{A}_n$, e tudo vale também para ideais à direita de $\mathbb{A}_n$.

Proposição 3.5 *$\mathbb{A}_n$ não é anel a ideais principais à esquerda.*

De fato, prova-se que, para $n = 1$, o ideal à esquerda $J = \mathbb{A}_1.\partial_1^2 + \mathbb{A}_1.(X_1\partial_1 - 1)$ não é principal (veja [2], página 19, exercícios 4.8 e 4.9). Para o caso $n \geq 2$, demonstra-se que o ideal $\mathbb{A}_n.\partial_1 + ... + \mathbb{A}_n.\partial_n$ não é principal (veja [4], página 53, Proposição 48).

Apesar de $\mathbb{A}_n$ não ser um anel a ideais principais à esquerda, prova-se que todo ideal unilateral de $\mathbb{A}_n$ é gerado por dois elementos. Este é um importante resultado devido a J. T. Stafford (veja [9]).

Exemplo 3.6 *Prova-se que o ideal à esquerda gerado por ∂_1, ∂_2 e ∂_3 também pode ser gerado por ∂_1 e por $\partial_2 + X_1\partial_3$.*

Passemos, agora, a procurar ideais principais maximais (note que, tendo em vista o Corolário 3.4, é uma questão natural perguntarmo-nos quais ideais principais são maximais).

3.2 A procura de ideais maximais principais à esquerda de $\mathbb{A}_n$.

Nesta seção estamos interessados em procurar ideais maximais principais à esquerda. Nos concentramos nos geradores de ordem 1.

Inicialmente vamos olhar para os operadores de ordem 1 mais simples, a saber, as derivações. Nesta direção, o que temos são os seguintes resultados:

Proposição 3.7 *Uma derivação $p\partial_1$, com $p \in K[X_1]$, gera um ideal principal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_1$ se, e somente se, $p \in K^*$.*

Prova. ($\Leftarrow$) Como $K^* \subset \mathbb{A}_1$, não há diferenças entre o ideal gerado por $p\partial_1$, com $p \in K^*$, e o ideal gerado por ∂_1. Basta mostrar, então, que $\mathbb{A}_1.\partial_1$ é um ideal principal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_1$.

Escrevendo os elementos de $\mathbb{A}_1$ em termos da base $\{\partial_1^\beta : \beta \in \mathbb{N}\}$, vemos que os operadores não-nulos de $\mathbb{A}_1.\partial_1$ são todos os operadores de $\mathbb{A}_1$ do tipo

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\partial_1^i, \text{ com } p_i \in K\left[X_1\right],$$

ou seja, que não possuem um "termo independente".

Seja agora J um ideal à esquerda de $\mathbb{A}_1$ tal que $\mathbb{A}_1.\partial_1 \subsetneq J$. Afirmamos que $J = \mathbb{A}_1$. De fato, seja D um operador de J que não pertença a $\mathbb{A}_1.\partial_1$. Então, ele é do tipo

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\partial_1^i + p_0, \text{ com } p_i \in K\left[X_1\right] \text{ e } p_0 \neq 0.$$

Como $-\sum_{i=1}^{k} p_i\partial_1^i \in \mathbb{A}_1.\partial_1 \subsetneq J$, temos $p_0 \in J$. Assim, $\partial_1 p_0 \in J$ (pois J é ideal à esquerda) e $p_0\partial_1 \in J$ (pois $\mathbb{A}_1.\partial_1 \subsetneq J$); portanto

$$[\partial_1, p_0] \in J,$$

ou seja, pela Proposição 2.5, $\partial_1\left(p_0\right) \in J$.

Agora, pondo $p_0' = \partial_1\left(p_0\right) \in J$, temos que p_0' tem grau menor do que p_0; daí, repetindo o raciocínio acima para p_0', vamos concluir que

$$\partial_1\left(p_0'\right) \in J.$$

Prosseguindo com este raciocínio, chegaremos à conclusão que em J existe um polinômio de grau zero:

$$K \cap J \neq \{0\}$$

e, portanto, $J = \mathbb{A}_1$. Assim, $\mathbb{A}_1.\partial_1$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_1$.

($\Rightarrow$) Mostraremos que, se $\deg(p) \geq 1$, então o ideal $\mathbb{A}_1.p\partial_1$ não é maximal.

Primeiramente, observemos que, pela Proposição 2.23, para todo $D \in \mathbb{A}_1 p\partial_1$, temos $\deg(D) \geq \deg(p\partial_1) \geq 2$. Portanto, como $\deg(\partial_1) = 1$, $\partial_1 \notin \mathbb{A}_1.p\partial_1$.

Assim temos que

$$\mathbb{A}_1.p\partial_1 \subsetneq \mathbb{A}_1.\partial_1 \subsetneq \mathbb{A}_1$$

e, portanto, $\mathbb{A}_1.p\partial_1$ não é um ideal maximal. ■

Proposição 3.8 *Para $n \geq 2$, nenhuma derivação de $K[X]$ gera um ideal principal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_n$.*

Prova. Seja $d = \sum_{i=1}^{n} p_i\partial_i$,com $p_i \in K[X]$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, uma derivação de $K[X]$. Afirmamos que $I = \mathbb{A}_n.d$ não é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$.

Inicialmente salientamos que o ideal $J = \mathbb{A}_n.\partial_1 + ... + \mathbb{A}_n.\partial_n$ é um ideal próprio. De fato, se ocorresse $1 \in J$ então existiriam $D_1, ..., D_n \in \mathbb{A}_n$ tais que

$$D_1\partial_1 + ... + D_n\partial_n = 1.$$

Aplicando os dois lados da igualdade em $c \in K^*$, teremos

$$0 = (D_1\partial_1 + ... + D_n\partial_n)(c) = 1(c) = 1c = c,$$

absurdo.

Vamos agora dividir a demonstração em dois casos.

1.º caso: existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $p_i = 0$.

Primeiramente, verifiquemos que

$$I = \mathbb{A}_n.d \subsetneq J = \mathbb{A}_n.\partial_1 + ... + \mathbb{A}_n.\partial_n.$$

Que ocorre a inclusão é trivial; que ela é própria vem do fato de que $\partial_i \in J \diagdown I$. De fato, vejamos: se tivéssemos $\partial_i \in I$, então existiria $D \in \mathbb{A}_n$ tal que $Dd = \partial_i$. Porém, como $p_i = 0$, ∂_i deve estar presente em D. Assim, $ord\,(D) \geq 1$ e, pela Proposição 2.30, $ord\,(Dd) \geq 2$, absurdo, já que $Dd = \partial_1$.

Assim, temos

$$I = \mathbb{A}_n.d \subsetneq J \subsetneq \mathbb{A}_n,$$

e, portanto, I não é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$.

2.º caso: para todo $i \in \{1, ..., n\}$, temos $p_i \neq 0$.

Afirmamos que, também aqui,

$$I = \mathbb{A}_n.d \subsetneq J = \mathbb{A}_n.\partial_1 + ... + \mathbb{A}_n.\partial_n.$$

De fato, temos que $\partial_1 \in J \diagdown I$: por absurdo, suponhamos $\partial_1 \in I$, ou seja, existe $D \in \mathbb{A}_n$ tal que

$$\partial_1 = Dd = D \sum_{i=1}^{n} p_i \partial_i = \sum_{i=1}^{n} D p_i \partial_i.$$

Desta forma, temos

$$(1 - Dp_1)\,\partial_1 = Dp_2\partial_2 + ... + Dp_n\partial_n.$$

Se $ord(D) = m$, então sabemos que $ord(Dp_i) = m$. Pela Proposição 2.19 *(i),* temos que os multi-índices de ordem m que aparecem em Dp_i são os mesmos que aparecem em D. Com isto, no lado esquerdo da igualdade acima, os multi-índices de comprimento $m + 1$ são da forma $\beta + e_1$, com β envolvido em D, enquanto que, do lado direito, os multi-índices de comprimento $m+1$ são da forma $\beta + e_i$, com $i \geq 2$, o que é um absurdo, pela Proposição 2.27.

Assim, novamente teremos

$$I = \mathbb{A}_n.d \subsetneq J \subsetneq \mathbb{A}_n$$

e I não é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$. ■

Passamos agora a examinar se é possível operadores de ordem 1 do tipo $d+g$, onde d é uma derivação de $K[X]$ e $g \in K[X]$, gerarem ideais maximais de $\mathbb{A}_n$.

Definição 3.9 *Sejam d uma derivação de $K[X]$ e $g \in K[X]$. Com relação ao operador $d+g$, denominamos g uma **perturbação** de d.*

Para o caso $n = 1$ nos restringiremos ao seguinte resultado, que generaliza a proposição 3.7.

Proposição 3.10 *Todo ideal da forma $I = \mathbb{A}_1.(c_1\partial_1 + c_2)$, com $c_1, c_2 \in K$ e $c_1 \neq 0$, é um ideal maximal de $\mathbb{A}_1(K)$.*

Prova. Pela Proposição 3.7 já sabemos que $\mathbb{A}_1.\partial_1$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_1$.

A aplicação dada por:

$$\phi : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_1,$$

$$X_1 \longmapsto X_1;\ \partial_1 \longmapsto \partial_1 + c,$$

é um isomorfismo de $\mathbb{A}_1$ (cuja inversa é dada por $X_1 \longmapsto X_1$, $\partial_1 \longmapsto \partial_1 - c$).

Assim, o ideal maximal à esquerda gerado por ∂_1 é levado no ideal à esquerda gerado por $\partial_1 + c$ que, portanto, também será maximal. ■

3.3 Maximalidade x simplicidade

Coutinho [3], que generalizou exemplos de ideais unilaterais maximais apresentados inicialmente por Stafford [10], foi o primeiro a evidenciar a forte relação existente entre $d-$simplicidade de $K[X]$ e ideais unilaterais maximais de $\mathbb{A}_n$: a partir de uma derivação d que torna o anel $K[X]$ $d-$simples, ele exibiu uma perturbação $g \in K[X]$ de d tal que $d+g$ gera um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$.

Mais tarde, Lequain, Levcovitz e Souza Jr. [7] provaram que, com a derivação d submetida a certas condições, se existe $g \in K[X]$ tal que o ideal $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é maximal, então $K[X]$ é $d-$simples (veja Corolário 3.20).

Buscando uma caracterização de certos operadores de ordem 1 que geram ideais unilaterais maximais da Álgebra de Weyl $\mathbb{A}_n$, conseguimos êxito para o caso $n = 2$ (Corolário 3.14) e para certos casos em $n > 2$. Para os demais casos consegue-se apenas resultados parciais (veja Teorema 3.13), numa generalização do resultado de Bratti e Takagi [1] e que foi obtido por Lequain, Levcovitz e Souza Jr. [7].

Antes de apresentarmos os resultados mencionados no parágrafo acima, justificamos nossa restrição ao estudo de operadores de ordem 1 envolvendo apenas derivações da forma

$$d = \mathbf{1}\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + ... + \alpha_n\partial_n. \tag{3}$$

Inicialmente, observemos que, se d é uma derivação de $K[X]$ e $n \geq 2$, então não temos, necessariamente, $d|_{K[X_1]} \subset K[X_1]$. Mas, se ocorrer $d|_{K[X_1]} \subset K[X_1]$, teremos que $d|_{K[X_1]}$ será uma derivação de $K[X_1]$ e, se d for simples, então $d|_{K[X_1]}$ também o será:

Proposição 3.11 *Suponhamos $n \geq 2$ e seja d uma derivação de $K[X]$ tal que $d|_{K[X_1]}$ é uma derivação de $K[X_1]$. Se d é simples, então $d|_{K[X_1]}$ também* *o é.*

Prova. Escrevendo
$$d = \sum_{i=1}^{n} p_i \partial_i,$$
com $p_i \in K[X]$, se $d|_{K[X_1]}$ é uma derivação de $K[X_1]$, então devemos ter $d|_{K[X_1]} = p_1\partial_1$, com $p_1 \in K[X_1]$.

Considerando o ideal $I = K[X]p_1$, como d é simples, devemos ter $p_1 \in K^*$. Do contrário, teríamos

$$d\left(p_1\right) = d|_{K[X_1]}\left(p_1\right) = p_1\partial_1\left(p_1\right) \in K[X]p_1$$

e, neste caso, I seria um $d-$ideal próprio de $K[X]$.

Desta forma, pela Proposição 2.47, $d|_{K[X_1]}$ é uma derivação simples de $K[X_1]$. ■

Ora, como salientamos acima, queremos abordar o estudo de ideais maximais via derivações simples. Então, é um tanto natural considerarmos, inicialmente, o caso de operadores que provêm de derivações que, quando restritas a $K[X_1]$, ainda sejam derivações de $K[X_1]$. Ainda, se queremos que tais derivações sejam simples, então, pelo Lema 2.46 e pelas Proposições 3.7 e 3.11, necessariamente elas devem ser da forma (3).

Convenção: Em todo o restante deste texto, convencionaremos como $\mathbb{A}_{n-1}$ a $K-$sub-álgebra de $\mathbb{A}_n$ gerada por $X_2, ..., X_n$ e ∂_2,...,∂_n (ao invés de $X_1, ..., X_{n-1}$ e ∂_1,...,∂_{n-1}). Assim, teremos

$$\mathbb{A}_{n-1}\left[X_1\right] = K\left[X_1, ..., X_n\right]\left\langle \partial_2, ..., \partial_n\right\rangle = K\left[X\right]\left\langle \partial_2, ..., \partial_n\right\rangle,$$

e, com o que já discutimos até o momento, é fácil convencer-se que $\mathbb{A}_n$ é um $\mathbb{A}_{n-1}[X_1]-$módulo livre:

$$\mathbb{A}_n = \oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{A}_{n-1}[X_1]\partial_1^k. \tag{4}$$

Definição 3.12 *Seja D um operador em $\mathbb{A}_n$. Um elemento*

$$R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1] \backslash K$$

é dito um ***operador de Darboux para*** *D em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1] \backslash K$, se*

$$[D, R] \in K[X]R.$$

Teorema 3.13 *Seja d uma derivação da forma $d = \partial_1 + h_2\partial_2 + ... + h_n\partial_n$, onde $h_2, ..., h_n \in K[X]$, e seja $g \in K[X]$.*

(i) Se $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_n$, então $d+g$ não possui operadores de Darboux em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1] \backslash K$.

(ii) E, quanto à recíproca: se $h_i \in K[X_1, X_i]$ para todo $i \in \{2, ..., n\}$, e além disso, $d+g$ não possui operadores de Darboux em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1] \backslash K$, então $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$.

A prova do Teorema 3.13 pode ser encontrada em [8] e [4].

É interessante notar que para o caso $n = 2$ não existe restrição para a recíproca estabelecida em (ii), e o que obtemos é

Corolário 3.14 *Seja d uma derivação de $K[X_1, X_2]$ da forma $d = \partial_1 + h\partial_2$, onde $h \in K[X_1, X_2]$ e seja $g \in K[X_1, X_2]$. Então $\mathbb{A}_2.(d+g)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_2$ se, e somente se, $d+g$ não possui operadores de Darboux em $\mathbb{A}_1[X_1] \backslash K$.*

Observação 3.15 *O corolário acima é o resultado de Bratti e Takagi (veja [1]) generalizado para um corpo qualquer de característica zero.*

Outro caso particular onde temos a equivalência entre o ideal à esquerda $\mathbb{A}_n.(d+g)$ ser maximal e $d+g$ não possuir operadores de Darboux em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1] \backslash K$, é quando a derivação d é de Shamsuddin (veja Definição 2.39):

Corolário 3.16 *Seja d uma derivação de Shamsuddin de $K[X]$. Seja $g \in K[X]$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$.

(ii) $d+g$ não possui operadores de Darboux em $\mathbb{A}_{n-1}[X_1] \backslash K$.

Voltando a considerar o aspecto simplicidade, mostramos a seguir que o conceito de derivação simples é útil para aprofundarmos a caracterização dos ideais maximais de $\mathbb{A}_n$ gerados por operadores de ordem 1. Mais precisamente, mostramos que simplicidade é uma condição necessária para que certos operadores de ordem 1 gerem ideais maximais. As provas dos dois próximos teoremas podem ser encontradas em [8] e [4].

Teorema 3.17 *Seja d uma derivação de $K[X]$ da forma $d = \partial_1 + h_2\partial_2 + ... + h_n\partial_n$, com $h_2, ..., h_n \in K[X]$, e seja $g \in K[X]$. Se $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$, então nenhum ideal principal não-trivial de $K[X]$ é um $d-$ideal.*

Teorema 3.18 *Seja d uma derivação de $K[X]$ da forma $d = \partial_1 + h_2\partial_2 + ... + h_n\partial_n$, com $h_i \in K[X_1, ..., X_i]$ para $i = 2, ..., n$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $K[X]$ é $d-$simples;

(ii) Nenhum ideal principal não-trivial de $K[X]$ é um $d-$ideal.

Assim, temos como caso particular

Corolário 3.19 *Seja d uma derivação de Shamsuddin de $K[X]$.*

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $K[X]$ é $d-$simples.

(ii) Nenhum ideal principal não-trivial de $K[X]$ é um $d-$ideal.

Dos teoremas 3.17 e 3.18 demonstra-se também:

Corolário 3.20 *Seja d uma derivação de $K[X]$ da forma $d = \partial_1 + h_2\partial_2 + ... + h_n\partial_n$, com $h_i \in K[X_1, ..., X_i]$ para $i = 2, ..., n$, e seja $g \in K[X]$. Se $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$, então $K[X]$ é $d-$simples.*

Assim, como caso particular do Corolário 3.20 temos:

Corolário 3.21 *Seja d uma derivação de Shamsuddin de $K[X]$. Se $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal à esquerda maximal de $\mathbb{A}_n$ para algum $g \in K[X]$, então $K[X]$ é $d-$simples.*

Estamos interessados agora em procurar ideais maximais à esquerda gerados por um elemento de ordem 1 da forma $d+g$, onde d é uma derivação de Shamsuddin e $g \in K[X]$. Como vimos no resultado anterior, devemos partir necessariamente de uma derivação simples de $K[X]$.

Assim, surgem-nos duas questões naturais:

1ª questão: Quais derivações de Shamsuddin de $K[X]$ são simples?

2ª questão: Para toda derivação de Shamsuddin simples de $K[X]$ existirá uma perturbação $g \in K[X]$, tal que $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal maximal principal à esquerda? Ou seja, será que a Conjectura dada na Introdução é verdadeira para o caso das derivações de Shamsuddin?

Estas duas perguntas serão respondidas nos Capítulos 4 e 5, respectivamente.

4 DERIVAÇÕES DE SHAMSUDDIN SIMPLES DE $K[X]$

Tendo em vista o que foi apresentado no capítulo anterior, uma pergunta natural que surge é quais derivações de $K[X]$ são simples. De uma maneira geral esta é uma pergunta difícil de responder. Porém para o caso das derivações de Shamsuddin podemos estabelecer um critério que possibilite verificar isto, respondendo de forma precisa esta questão.

4.1 Derivações simples em anéis de polinômios

Para provarmos alguns resultados preliminares, começamos trabalhando em um contexto mais geral.

Lema 4.1 *Sejam R uma $K-$álgebra, Y uma indeterminada sobre R e $R[Y]$ o anel de polinômios com coeficientes em R. Seja d uma derivação de $R[Y]$ tal que $d(Y) = aY + b$, para a, $b \in R$. Então:*

(a) $d(Y^s) = s(aY^s + bY^{s-1})$, onde $s \in \mathbb{N}$;

(b) se $r \in R$ e $s \in \mathbb{N}^*$, então

$$d(rY^s) = d(r)Y^s + rsaY^s + rsbY^{s-1}.$$

Prova. *(a)* Faremos a prova por indução sobre s. Para $s = 0$ e $s = 1$ o resultado é claro. Seja $k \geq 1$ e suponhamos que $d(Y^s) = s(aY^s + bY^{s-1})$ para todo $s \leq k$.

Então,

$$
\begin{aligned}
d(Y^{k+1}) = d(YY^k) &\overset{\text{Def. 2.32}}{=} \\
&= Yd(Y^k) + d(Y)Y^k \overset{h.i.}{=} \\
&= Y(kaY^k + kbY^{k-1}) + (aY+b)Y^k \\
&= kaY^{k+1} + kbY^k + aY^{k+1} + bY^k \\
&= (k+1)aY^{k+1} + (k+1)bY^k \\
&= (k+1)(aY^{k+1} + bY^k),
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

(b) Dados $r \in R$ e $s \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$
\begin{aligned}
d(rY^s) = d(r)Y^s + rd(Y^s) &\overset{\text{item } (a)}{=} \\
&= d(r)Y^s + r(saY^s + sbY^{s-1}) \\
&= d(r)Y^s + rsaY^s + rsbY^{s-1}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 4.2 *Sejam R uma $K-$álgebra comutativa, Y uma indeterminada sobre R e $R[Y]$ o anel de polinômios com coeficientes em R. Seja d uma derivação de $R[Y]$ que satisfaz*

(1) $d(R) \subseteq R$;

(2) R é $d-$simples;

(3) existem $a, b \in R$ tais que $d(Y) = aY + b$.

Se um $d-$ideal J de $R[Y]$ contém um polinômio f de grau s, então ele contém também um polinômio mônico de grau s.

Prova. Suponhamos que o monômio líder de f é rY^s, com $r \in R^*$ e $s \in \mathbb{N}$.

Notemos inicialmente que $s > 0$. De fato, vamos supor que J contém algum elemento $r \in R^*$. Como J é um $d-$ideal, temos que $d(r) \in J$. Por outro lado $d(R) \subseteq R$ então $d(r) \in R$. Assim, $d(r) \in J \cap R$ que é um ideal de R. Portanto $J \cap R$ é um $d-$ideal de R. Mas como R é $d-$simples, $J \cap R$ é necessariamente o ideal trivial R. Logo $J = R[Y]$.

Afirmamos também que se r é tal que $d(r) = 0$, então J possui um polinômio mônico de grau s. De fato, se $d(r) = 0$ então r gera um $d-$ideal de R. Mas, como R é $d-$simples, então r é um elemento invertível de R. Portanto $r^{-1}f$ é um elemento de J cujo monômio líder é Y^s.

Vamos agora supor que $d(r) \neq 0$. Como $f \in J$ e J é $d-$ideal, temos que $f_1 := d(f) - saf$ é um elemento de J, e, pelo Lema 4.1 *(b)*, $d(f)$ tem termo líder $d(r)Y^s + rsaY^s$, e portanto f_1 tem termo líder $d(r)Y^s$.

Chamando f de f_0, vamos supor que tenhamos construído uma seqüência de polinômios de J, que denotaremos por $f_0, f_1, ..., f_{k-1}$, tal que cada polinômio f_j tem grau s e termo líder $d^j(r)Y^s$. Então, definindo $f_k := d(f_{k-1}) - saf_{k-1}$, temos

$$
\begin{aligned}
f_k &= d(f_{k-1}) - saf_{k-1} \\
&= d(d^{k-1}(r)Y^s + \{\text{ termos com grau } < s\}) - saf_{k-1} \\
&= d(d^{k-1}(r)Y^s) + d(\{\text{ termos com grau } < s\}) - saf_{k-1} \overset{\text{Lema 4.1 } (b)}{=} \\
&= d^k(r)Y^s + d^{k-1}(r)d(Y^s) - saf_{k-1} + \{\text{ termos com grau } < s\} \overset{\text{Lema 4.1 } (a)}{=} \\
&= d^k(r)Y^s + d^{k-1}(r)(saY^s + sbY^{s-1}) - saf_{k-1} + \{\text{ termos com grau } < s\} \\
&= d^k(r)Y^s + sad^{k-1}(r)Y^s - saf_{k-1} + \{\text{ termos com grau } < s\}).
\end{aligned}
$$

E portanto, como por hipótese f_{k-1} tem grau s e termo líder $d^{k-1}(r)Y^s$, concluímos que f_k tem monômio líder $d^k(r)Y^s$, exceto se $d^k(r) = 0$.

Daí:

- se $d^k(r) = 0$ então, como R é $d-$simples, $0 = d^k(r) = d(d^{k-1}(r))$ implica que $d^{k-1}(r)$ é invertível; mas então, neste caso, $\left(d^{k-1}(r)\right)^{-1} f_{k-1} \in J$ e é mônico, como requerido.

- se $d^k(r) \neq 0$ então $f_k \in J$ e seu grau é s. Ou seja, a seqüência de polinômios de J de grau s considerada acima pode ser aumentada. Suponhamos então que J possui uma seqüência infinita $f_0, f_1, ...$ de elementos satisfazendo as hipóteses acima. Isto ocorre se $d^k(r) \neq 0$ para todo k. Como R é $d-$simples, o ideal gerado por $\{r, d(r), d^2(r), ...\}$ deve ser trivial, e portanto existem $q_1, ..., q_t \in R$ tais que $\sum_{j=0}^t q_j d^j(r) = 1$. Então o polinômio $\sum_{j=0}^t q_j f_j \in J$ e tem Y^s como monômio líder, ou seja, é um polinômio mônico de J com grau s. ■

Shamsuddin consegue estender certas derivações simples de uma $K-$álgebra comutativa R a derivações simples sobre o anel de polinômios $R[Y]$:

Teorema 4.3 *(Shamsuddin) Sejam R uma $K-$álgebra comutativa, Y uma indeterminada sobre R e d uma derivação sobre $R[Y]$ que satisfaz*

(1) $d(R) \subseteq R$;

(2) R é $d-$simples;

(3) existem $a, b \in R$ tais que $d(Y) = aY + b$.

Então são equivalentes:

(i) $R[Y]$ é $d-$simples;

(ii) a equação $d(Z) = aZ + b$ não tem solução em R.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$: Por contraposição: suponhamos que $r \in R$ é tal que $d(r) = ar + b$.

Então o ideal $I = (Y - r)R[Y]$ é um $d-$ideal. De fato,

$$\begin{aligned} d(Y - r) &= d(Y) - d(r) \\ &= aY + b - (ar + b) \\ &= aY - ar = a(Y - r) \in I. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.44, $d(I) \subseteq I$, e como I é um ideal próprio, $R[Y]$ não é $d-$simples.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Também por contraposição: suponhamos que $R[Y]$ não é $d-$simples. Seja J um $d-$ideal próprio não-nulo de $R[Y]$, e seja $f \in R[Y]$ um elemento não-nulo com o menor grau possível em Y, digamos s. Pelo Lema 4.2, podemos já supor que f é mônico.

Digamos que $f = \sum_{i=0}^{s} g_i Y^i$, $g_i \in R$, $g_s = 1$.

Pelo Lema 4.1 (b), sabemos que se $d(g_s) \neq 0$ ou se $a \neq 0$ então $d(f)$ tem grau s e termo líder $(d(g_s)+sag_s)Y^s$. Como $d(g_s) = d(1) = 0$, concluímos que $d(f)$ tem coeficiente líder saY^s, se $a \neq 0$. Mas, em qualquer caso, temos que, como J é um $d-$ideal, $d(f) - saf \in J$ e tem grau estritamente menor que s. Pelo caráter minimal de f, concluímos que $d(f) - saf$ é necessariamente nulo.

Seja $c \in R$, o coeficiente do termo de grau $s-1$ de f, ou seja, $g_{s-1} = c$. Então, como

$$
\begin{aligned}
d(f) = d\left(\sum_{i=o}^{s} g_i Y^i\right) &= \sum_{i=o}^{s} d\left(g_i Y^i\right) \\
&= \sum_{i=o}^{s} \left(d(g_i)Y^i + g_i d\left(Y^i\right)\right) \overset{\text{Lema 4.1 } (a)}{=} \\
&= \sum_{i=o}^{s} \left(d(g_i)Y^i + g_i\left(iaY^i + ibY^{i-1}\right)\right),
\end{aligned}
$$

igualando o termo de grau $s-1$ de $d(f) - saf$ a zero, temos:

$$
\begin{aligned}
0 &= sb + d(c) + c(s-1)a - sac \\
&= d(c) + sb - ac,
\end{aligned}
$$

donde

$$\begin{aligned}
d(c) &= ac - sb \\
&\Rightarrow \left(-\frac{1}{s}\right) d(c) = a\left(-\frac{c}{s}\right) + b \\
&\Rightarrow d\left(-\frac{c}{s}\right) = a\left(-\frac{c}{s}\right) + b.
\end{aligned}$$

Como $-c/s \in R$, concluímos que a equação $d(Z) = aZ + b$ admite solução em R. ∎

Lema 4.4 *Sejam $u, v \in K[X_1]$, $u \neq 0$, e $q, r \in K[X_1]$, $\deg r < \deg u$, tal que $v = uq + r$. Então:*

(a) $f \in K[X_1]$ é solução da equação $Z' = uZ + v$ se, e somente se, $f + q$ é uma solução da equação $Z' = uZ + (q' + r)$.

(b) A equação $Z' = uZ + v$ tem no máximo uma solução em $K[X_1]$.

Prova. (a) De fato,

$$\begin{aligned}
&f \in K[X_1] \text{ é solução de } Z' = uZ + v \\
&\Leftrightarrow f' = uf + v = uf + uq + r \\
&\Leftrightarrow f' + q' = uf + uq + r + q' = u(f + q) + q' + r \\
&\Leftrightarrow (f + q)' = u(f + q) + q' + r \\
&\Leftrightarrow f + q \text{ é solução de } Z' = uZ + (q' + r).
\end{aligned}$$

(b) Suponhamos que f e g sejam soluções de $Z' = uZ + v$. Então:

$$f' - g' = (uf + v) - (uf + v) = uf - ug,$$

e portanto

$$(f - g)' = u(f - g),$$

ou seja, $f - g$ é solução de $h' = uh$ em $K[X_1]$.

Como por hipótese $u \neq 0$, a equação $h' = uh$, por questões de grau, só admite para solução em $K[X_1]$ o polinômio nulo.

Assim, $f - g = 0$, ou seja, $f = g$. ■

Lema 4.5 *Sejam $u, v \in K[X_1]$, $u \neq 0$. Se*

$$\begin{aligned} v &= uq_1 + r_1 \\ q_1' &= uq_2 + r_2 \\ &\vdots \\ q_t' &= u0 + r_{t+1}, \end{aligned}$$

onde $q_1, ..., q_t, r_1 ..., r_{t+1} \in K[X_1]$ e $\deg r_i < \deg u$, para todo $i = 1, ..., t+1$, então:

(a) São equivalentes:

(i) A equação $Z' = uZ + v$ tem solução em $K[X_1]$;

(ii) $\sum_{i=1}^{t+1} r_i = 0$.

(b) Se a equação $Z' = uZ + v$ tem solução $f \in K[X_1]$, então $f = -\sum_{i=1}^{t} q_i$.

Prova. *(a)* De fato,

$f \in K[X_1]$ é solução de $Z' = uz + v \overset{\text{Lema4.4; } v = uq_1 + r_1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f + q_1$ é solução de $Z' = uZ + (q_1' + r_1) \overset{\text{Lema4.4; } q_1' + r_1 = uq_2 + r_2 + r_1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f + q_1 + q_2$ é solução de $Z' = uZ + (q_2' + r_1 + r_2) \overset{\text{Lema 4.4; } q_2' + r_1 + r_2 = uq_3 + r_3 + r_2 + r_1}{\Leftrightarrow}$

...

$\Leftrightarrow f + \displaystyle\sum_{i=1}^{t} q_i$ é solução para $Z' = uZ + \displaystyle\sum_{i=1}^{t+1} r_i$

Como $\deg r_i < \deg u$ para todo i, temos:

- se $\deg u = 0$, então $r_i = 0,$ para todo i. Logo $\sum_{i=1}^{t+1} r_i = 0$, e 0 é solução de $Z' = uZ$ em $K[X_1]$;

- se $\deg u \geq 1$, então por razões de grau, a equação $Z' = uZ + \sum_{i=1}^{t+1} r_i$ tem solução em $K[X_1]$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{t+1} r_i = 0$, caso em que a solução é o polinômio nulo.

Concluímos que $f \in K[X_1]$ é solução de $Z' = uZ + v$, se, e somente se, $\sum_{i=1}^{t+1} r_i = 0$.

(b) Seja $f \in K[X_1]$ solução de $Z' = uZ + v$. Então, pela demonstração do ítem (a), $f + \sum_{i=1}^{t} q_i$ é solução para $Z' = uZ + \sum_{i=1}^{t+1} r_i$, e neste caso a solução desta última é o polinômio nulo. Portanto $f + \sum_{i=1}^{t} q_i = 0$, ou seja, $f = -\sum_{i=1}^{t} q_i$. ■

Definição 4.6 *Sejam $u, v \in K[X_1]$, $u \neq 0$, dois polinômios, e $r_1, ..., r_{t+1}$ a seqüência de polinômios obtidos no Lema 4.5. O polinômio $\sum_{i=1}^{t+1} r_i$ será denotado por $Pol(u, v)$.*

Observação 4.7 *Note que, através do lema anterior, se u, $v \in K[X_1]$, $u \neq 0$ então*

- o polinômio $Pol(u, v)$ sempre pode ser calculado;

- a equação $Z' = uZ + v$ tem solução em $K[X_1]$ se, e somente se $Pol(u, v) = 0$;

- quando a equação $Z' = uZ + v$ tem solução então tal solução (única) pode ser calculada.

Lema 4.8 *Sejam $u, v, w \in K[X_1]$, $u \neq 0$ e $k \in K$. Então:*

(a) $Pol(u, v + w) = Pol(u, v) + Pol(u, w)$;

(b) $Pol(u, kv) = kPol(u, v)$;

(c) $Pol(u, v) = v$ *se e só se* $\deg u > \deg v$;

(d) $Pol(u, v) = 0$ *se* $u \in K^*$.

Prova. *(a)* Suponhamos que $Pol(u,v) = \sum_{i=1}^{t+1} r_i$, ou seja

$$
\begin{aligned}
v &= uq_1 + r_1 \\
q_1' &= uq_2 + r_2 \\
&\vdots \\
q_t' &= u0 + r_{t+1},
\end{aligned}
$$

onde $q_1, ..., q_t, r_1, ..., r_{t+1} \in K[X_1]$ e $\deg r_i < \deg u$, para todo i.

Suponhamos também que $Pol(u,w) = \sum_{i=1}^{s+1} \widetilde{r}_i$, ou seja

$$
\begin{aligned}
w &= u\widetilde{q}_1 + \widetilde{r}_1 \\
\widetilde{q}_1' &= u\widetilde{q}_2 + \widetilde{r}_2 \\
&\vdots \\
\widetilde{q}_s' &= u0 + \widetilde{r}_{s+1},
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{q}_1, ..., \widetilde{q}_s, \widetilde{r}_1, ..., \widetilde{r}_{s+1} \in K[X_1]$ e $\deg \widetilde{r}_i < \deg u$, para todo i.

Sem perda de generalidade, podemos supor $s \leq t$.

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
v + w &= uq_1 + r_1 + u\widetilde{q}_1 + \widetilde{r}_1 = u(q_1 + \widetilde{q}_1) + r_1 + \widetilde{r}_1 \\
q_1' + \widetilde{q}_1' &= uq_2 + r_2 + \widetilde{q}_1' = u\widetilde{q}_2 + \widetilde{r}_2 = u(q_2 + \widetilde{q}_2) + r_2 + \widetilde{r}_2 \\
&\vdots \\
q_s' + \widetilde{q}_s' &= uq_{s+1} + u0 + r_{s+1} + \widetilde{r}_{s+1} = uq_{s+1} + r_{s+1} + \widetilde{r}_{s+1} \\
q_{s+1}' &= uq_{s+2} + r_{s+2} \\
&\vdots \\
q_t' &= u0 + r_{t+1},
\end{aligned}
$$

onde $\deg(r_i + \widetilde{r}_i) < \deg u$, para todo i.

Concluímos que $Pol(u, v + w) = \sum_{i=1}^{t+1}(r_i + \widetilde{r}_i) = \sum_{i=1}^{t+1} r_i + \sum_{i=1}^{s+1} \widetilde{r}_i = Pol(u,v) + Pol(u,w)$.

(b) Suponhamos que $Pol(u,v) = \sum_{i=1}^{t+1} r_i$, ou seja

$$\begin{aligned} v &= uq_1 + r_1 \\ q_1' &= uq_2 + r_2 \\ &\vdots \\ q_t' &= u0 + r_{t+1} \end{aligned}$$

onde $q_1, ..., q_t, r_1 ..., r_{t+1} \in K[X_1]$ e $\deg r_i < \deg u$, para todo i.

Logo, para todo $k \in K$,

$$\begin{aligned} kv &= ukq_1 + kr_1 \\ kq_1' &= ukq_2 + kr_2 \\ &\vdots \\ kq_t' &= uk0 + kr_{t+1} \end{aligned}$$

e $\deg kr_i < \deg u$, para todo i.

Assim, $Pol(u,kv) = \sum_{i=1}^{t+1} kr_i = k\sum_{i=1}^{t+1} r_i = kPol(u,v)$.

(c) Suponhamos que $\deg u > \deg v$. Então

$$v = u0 + v.$$

Assim, $Pol(u,v) = v$.

Reciprocamente, se $Pol(u,v) = v$, então $\deg v = \deg(Pol(u,v)) < \deg(u)$, e portanto $\deg u > \deg v$.

(d) Suponhamos que $u \in K^*$. Então u é invertível em $K[X_1]$ e

$$\begin{aligned} v &= u\frac{1}{u}v + 0 \\ \left(\frac{1}{u}v\right)' &= \frac{1}{u}v' = u\frac{1}{u^2}v' + 0 \\ &\vdots \\ 0 &= u0 + 0, \end{aligned}$$

com $\deg 0 < \deg u$. Logo, $Pol(u, v) = 0$. ■

4.2 Caracterização das derivações de Shamsuddin simples de $K[X]$

Com o que foi visto até aqui já podemos enunciar um critério para simplicidade de derivações de Shamsuddin em um anel de polinômios a duas indeterminadas:

Teorema 4.9 *Seja $d = \partial_1 + (aX_2 + b)\partial_2$, com a e $b \in K[X_1]$, uma derivação de Shamsuddin de $K[X_1, X_2]$. Então d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ se, e somente se, $a \neq 0$ e $Pol(a, b) \neq 0$.*

Prova. Observamos inicialmente que, se $a = 0$ então d não é simples. De fato, se $\int b \in K[X_1]$ é tal que $\partial_1 \left(\int b\right) = b$. Então $d\left(X_2 - \int b\right) = aX_2 = 0$, e portanto o ideal $K[X_1, X_2]\left(X_2 - \int b\right)$ é um $d-$ideal próprio de $K[X_1, X_2]$, donde concluímos que $K[X_1, X_2]$ não é $d-$simples. Assim, se d é simples temos necessariamente $a \neq 0$.

Como $d(X_2) = aX_2 + b$, pelo Teorema 4.3 temos que $d = \partial_1 + (aX_2 + b)\partial_2$ é uma derivação simples de $K[X_1, X_2]$ se e somente se a equação $d(Z) = aZ + b$ não tem solução em $K[X_1]$. Mas, pela Observação 4.7, esta última equação tem solução em $K[X_1]$ se, e somente se, $Pol(a, b) = 0$. ■

Uma questão natural que nos surge aqui: se para cada $i \in \{2, ..., n\}$, tivermos que $K[X_1, X_i]$ é $(\partial_1 + (a_iX_i + b_i)\partial_i)-$simples, será que a derivação $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_iX_i + b_i)\partial_i$ é uma derivação simples de $K[X_1, ..., X_n]$? Em outras palavras, será que para uma derivação de Shamsuddin de $K[X_1, ..., X_n]$ ser simples é suficiente que todas as restrições $d|_{K[X_1, X_i]}$, $i \in \{2, ..., n\}$, sejam simples?

A resposta é não, como nos mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 4.10 *Seja* $d = \partial_1 + (X_1X_2 + 5)\partial_2 + (X_1X_3 - 5)\partial_3$ *uma derivação de* $K[X_1, X_2, X_3]$*. Então* d *não é uma derivação simples de* $K[X_1, X_2, X_3]$*, apesar de* $d|_{K[X_1,X_2]}$ *e* $d|_{K[X_1,X_3]}$ *serem derivações simples de* $K[X_1, X_2]$ *e* $K[X_1, X_3]$*, respectivamente.*

Prova. Vamos mostrar que o ideal $K[X_1, X_2, X_3](X_2 + X_3)$ é um $d-$ideal de $K[X_1, X_2, X_3]$. De fato,

$$\begin{aligned} d(X_2 + X_3) &= d(X_2) + d(X_3) \\ &= X_1X_2 + 5 + X_1X_3 - 5 \\ &= X_1(X_2 + X_3) \in K[X_1, X_2, X_3](X_2 + X_3). \end{aligned}$$

Portanto, d não é uma derivação simples de $K[X_1, X_2, X_3]$.

Mas, pelo Teorema 4.9, $d_2 = \partial_1 + (X_1X_2 + 5)\partial_2$ e $d_3 = \partial_1 + (X_1X_3 - 5)\partial_3$ são derivações simples de $K[X_1, X_2]$ e $K[X_1, X_3]$, respectivamente, pois $Pol(X_1, 5) = 5 \neq 0$ e $Pol(X_1, -5) = -5 \neq 0$, já que $\deg 5 = 0 < 1 = \deg X_1$.

■

No entanto, vale a recíproca, até numa situação um pouco mais geral:

Proposição 4.11 *Se* $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n} h_i\partial_i$*, com* $h_i \in K[X_1, X_i]$*, é uma derivação simples de* $K[X_1, ..., X_n]$*, então, para cada* $i \in \{2, ..., n\}$*,* $d_i = \partial_1 + h_i\partial_i$ *é uma derivação simples de* $K[X_1, X_i]$*.*

Prova. Basta notar que $d_i = \partial_1 + h_i\partial_i$ é a restrição de d a $K[X_1, X_i]$. Além disso, se d_i não fosse uma derivação simples de $K[X_1, X_i]$ então d não seria uma derivação simples de $K[X]$. De fato, suponhamos por absurdo que $J \subset K[X_1, X_i]$ é um d_i-ideal próprio de $K[X_1, X_i]$. Então $JK[X]$ é um ideal próprio de $K[X]$, e, para todo $f \in J$,

$$d(f) = d_i(f) \in JK[X_1, X_i] \subset JK[X].$$

Portanto, pela Proposição 2.44, $JK[X]$ é um $d-$ideal não-trivial de $K[X]$. ■

Antes de passarmos para uma melhor caracterização das derivações de Shamsuddin que são simples, apresentamos um lema técnico que será necessário mais adiante.

Lema 4.12 *Sejam* $n \geq 2$ *um inteiro,* $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_i X_i + b_i)\partial_i$*, com* $a_i, b_i \in K[X_1]$*, para todo* i*, uma derivação de Shamsuddin simples de* $K[X_1, ..., X_n]$*. Sejam* $v, g \in K[X_1, ..., X_n]$ *e* $u \in K[X_1, ..., X_{n-1}]$ *tais que*

$$d(g) = ug + v.$$

Se $\deg_{X_n}(v) = t \geq 0$*, então*
(a) $\partial_n^{t+1}(g) \in K$*;*
(b) $\partial_n^{t+1}(g) = 0$ *se* $u \neq (t+1)a_n$*.*

Prova. Aplicando ∂_n^{t+1} na igualdade $d(g) = ug + v$, obtemos, por um lado,

$$\begin{aligned} \partial_n^{t+1}(d(g)) &= \partial_n^{t+1}(ug + v) \\ &= u\partial_n^{t+1}(g) + \partial_n^{t+1}(v) \overset{\deg_{X_n}(v)=t}{=} \\ &= u\partial_n^{t+1}(g). \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 2.42, $\partial_n^{t+1} d = d\partial_n^{t+1} + (t+1)a_n\partial_n^{t+1}$, e portanto

$$u\partial_n^{t+1}(g) = \partial_n^{t+1} d(g) = d\partial_n^{t+1}(g) + (t+1)a_n\partial_n^{t+1}(g),$$

donde obtemos

$$d\partial_n^{t+1}(g) = (u - (t+1)a_n)\partial_n^{t+1}(g). \tag{5}$$

Logo, $\partial_n^{t+1}(g)K[X_1, ..., X_n]$ é um $d-$ideal de $K[X_1, ..., X_n]$. Como $K[X_1, ..., X_n]$ é por hipótese $d-$simples, temos $\partial_n^{t+1}(g) \in K$, o que completa a prova de (a).

Ainda, como $\partial_n^{t+1}(g) \in K$, temos $d(\partial_n^{t+1}(g)) = 0$ e portanto, por (5), concluímos, uma vez que $K[X_1, ..., X_n]$ é um domínio, que $\partial_n^{t+1}(g) = 0$, se $u \neq (t+1)a_n$. ■

Vamos agora enunciar um teorema que nos dá três diferentes maneiras de caracterizar a simplicidade de uma derivação de Shamsuddin e que nos proporciona também um algoritmo para verificar efetivamente se uma dada derivação de Shamsuddin é simples ou não.

Para tanto, vamos separar as n parcelas de uma derivação d de Shamsuddin de $K[X_1, ..., X_n]$ escrita na forma $d = \partial_1 + \sum_{l=2}^{n}(a_l X_l + b_l)\partial_l$ em classes, colocando numa mesma classe as parcelas que têm coeficientes a_l iguais, gerando assim, digamos, s classes, onde s é o número de a_l's distintos.

Teorema 4.13 *Sejam $r_2, ..., r_s \geq 1$ inteiros, $\{X_1\} \cup \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}$ um conjunto de indeterminadas sobre K, ∂_1 a derivação $\partial/\partial X_1$ e $\partial_{i,j}$ a derivação $\partial/\partial X_{i,j}$. Sejam $a_2, ..., a_s \in K[X_1]$, elementos distintos de $K[X_1]$. Para todo $i \in \{2, ..., s\}$, sejam $b_{i,1}, ..., b_{i,r_i} \in K[X_1]$.*

Seja d a derivação de Shamsuddin de $K[X_1; \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}]$ dada por

$$d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{s}\sum_{j=1}^{r_i}(a_i X_{i,j} + b_{i,j})\partial_{i,j}.$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) d é uma derivação simples de $K[X_1; \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}]$.

(ii) Para todo $i \in \{2, ..., s\}$, $a_i \neq 0$ e $\{Pol(a_i, b_{i,j}); j = 1, ..., r_i\}$ é um conjunto $K-$linearmente independente de r_i elementos.

(iii) Para todos $i \in \{2, ..., s\}$ e todos $k_1, ..., k_{r_i} \in K$, não todos nulos, a equação $Z' = a_i Z + \sum_{j=1}^{r_i} k_j b_{i,j}$ não tem solução em $K[X_1]$.

(iv) Para todo $i \in \{2, ..., s\}$, $a_i \neq 0$ e a equação $d(Z) = a_i Z$ não tem solução $g \in K[X_1; X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}]$ com $\deg_{X_{i,j}}(g) = 1$ para algum $j \in \{1, ..., r_i\}$.

Prova. $(i) \Rightarrow (iv)$ Imitando a prova do Teorema 4.9, observamos que, se $a_i = 0$, para algum $i \in \{2, ..., s\}$ e $\int b_{i,1}$ denota um elemento de $K[X_1]$, cuja derivada é igual $b_{i,1}$, temos que $d(X_{i,1} - \int b_{i,1}) = 0$, e portanto o ideal $(X_{i,1} - \int b_{i,1})K[X_1; \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}]$ é um $d-$ideal não-trivial. Assim todos os a_i são diferentes de 0.

Como d é uma derivação simples, é claro que a equação $d(Z) = a_i Z$ não tem solução fora de K.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Por contraposição: seja $i \in \{2, ..., s\}$ e suponhamos que existem $k_1, ..., k_{r_i} \in K$, não todos nulos tais que $\sum_{j=1}^{r_i} k_j Pol(a_i, b_{i,j}) = 0$. Então, pelo Lema 4.8(a) e (b), $Pol\left(a_i, \sum_{j=1}^{r_i} k_j b_{i,j}\right) = 0$.

Assim pela Observação 4.7, existe $f \in K[X_1]$ tal que

$$f' = a_i f + \sum_{j=1}^{r_i} k_j b_{i,j}.$$

Vamos considerar o elemento $g = -f + \sum_{j=1}^{r_i} k_j X_{i,j}$. Como estamos supondo que existe $j \in \{1, ..., r_i\}$ tal que $k_j \neq 0$, concluímos que $\deg_{X_{i,j}}(g) = 1$.

Além disso,

$$\begin{aligned} d(g) = -d(f) + d\left(\sum_{j=1}^{r_i} k_j X_{i,j}\right) &\overset{d(f)=f'}{=} \\ = -\left(a_i f + \sum_{j=1}^{r_i} k_j b_{i,j}\right) &+ \sum_{j=1}^{r_i} k_j (a_i X_{i,j} + b_{i,j}), \end{aligned}$$

donde

$$d(g) = a_i \left(-f + \sum_{j=1}^{r_i} k_j X_{i,j}\right) = a_i g.$$

Assim, encontramos um polinômio de grau 1 em $X_{i,j}$ que é solução da equação $d(Z) = a_i Z$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $i \in \{2, ..., s\}$ e vamos supor que existem $k_1, ..., k_{r_i} \in K$ não todos nulos e $g \in K[X_1]$ tal que $g' = a_i g + \sum_{j=1}^{r_i} k_j b_{i,j}$.

Então pela Observação 4.7 e pelo Lema 4.8, temos

$$0 = Pol\left(a_i, \sum_{j=1}^{r_i} k_j b_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{r_i} k_j Pol(a_i, b_{i,j}).$$

Assim $\{Pol(a_i, b_{i,j}); j = 1, ..., r_i\}$ não é um conjunto $K-$linearmente independente.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Inicialmente salientamos que $d(K[X_1]) \subseteq K[X_1]$, $d|_{K[X_1]} = \partial_1$ é uma derivação simples de $K[X_1]$ e $d(X_{i,j}) = a_i X_{i,j} + b_{i,j}$. Então, como por hipótese, para cada $i \in \{2, ..., s\}$ e cada $j \in \{1, ..., r_i\}$, a equação $Z' = a_i Z + b_{i,j}$ não tem solução em $K[X_1]$, temos, pelo Teorema 4.3, que $K[X_1, X_{i,j}]$ é $d-$simples, para todos (i, j).

Agora, suponhamos que $K[X_1; \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}]$ não é $d-$simples. Então existe uma seqüência $X_{i_1,j_1}, ..., X_{i_t,j_t}$, com $t \geq 2$, tal que

$$K[X_{1;}X_{i_1,j_1}, ..., X_{i_{t-1},j_{t-1}}] \text{ é } d-\text{simples},$$

$$K[X_{1;}X_{i_1,j_1}, ..., X_{i_t,j_t}] \text{ não é } d-\text{simples}.$$

Escolheremos a seqüência com o menor valor inteiro possível para t.

Pelo Teorema 4.3, existe $f \in K[X_{1;}X_{i_1,j_1}, ..., X_{i_{t-1},j_{t-1}}]$ tal que

$$d(f) = a_{i_t} f + b_{i_t,j_t}. \tag{6}$$

Seja $l \in \{1, ..., t-1\}$; como $\deg_{X_{i_l,j_l}}(b_{i_t,j_t}) = 0$, pelo Lema 4.12, $\partial_{i_l,j_l}(f) \in K$, ou seja, $\deg_{X_{i_l,j_l}} f \leq 1$. Isto vale para todo $l = 1, ..., t-1$.

Então, escrevendo

$$f = \sum_{l=1}^{t-1} k_l X_{i_l,j_l} + f_0, \text{ com } k_1, ..., k_{t-1} \in K, \ f_0 \in K[X_1]. \tag{7}$$

Notemos que $k_l \neq 0$ para todo $l = 1, ..., t-1$.

De fato, se não fosse, digamos que $k_{t-1} = 0$. Então $f \in K[X_{1;}X_{i_1,j_1}, ..., X_{i_{t-2},j_{t-2}}]$ e, pela equação (6) e Teorema 4.3, temos que $K[X_{1;}X_{i_1,j_1}, ..., X_{i_{t-2},j_{t-2}}]$ é

$d-$simples e $K[X_{1;}X_{i_1,j_1},...,X_{i_{t-2},j_{t-2}},X_{i_t,j_t}]$ não é $d-$simples, uma contradição com a minimalidade de t.

De (7), temos:

$$d(f)=\sum_{l=1}^{t-1}k_l(a_{i_l}X_{i_l,j_l}+b_{i_l,j_l})+f_0'$$

e

$$a_{i_t}f+b_{i_t,j_t}=\sum_{l=1}^{t-1}k_la_{i_t}X_{i_l,j_l}+a_{i_t}f_0+b_{i_t,j_t}.$$

Então, por (6), obtemos:

$$\sum_{l=1}^{t-1}k_l(a_{i_l}X_{i_l,j_l}+b_{i_l,j_l})+f_0'=\sum_{l=1}^{t-1}k_la_{i_t}X_{i_l,j_l}+a_{i_t}f_0+b_{i_t,j_t}. \tag{8}$$

Logo, para todo $l\in\{1,...,t-1\}$, $k_la_{i_l}=k_la_{i_t}$, donde $a_{i_l}=a_{i_t}$, pois $k_l\neq 0$. Mas, como estamos supondo $a_i\neq a_j$ se $i\neq j$, então necessariamente $i_l=i_t$, para todo $l\in\{1,...,t-1\}$.

Então, na verdade, para todo $j_l\in\{1,...,r_{i_t}\}$, b_{i_l,j_l} é do tipo:

$$b_{i_l,j_l}=b_{i_t,j_l},$$

e portanto (8) se reescreve

$$f_0'=a_{i_t}f_0+\left(b_{i_t,j_t}-\sum_{l=1}^{t-1}k_lb_{i_t,j_l}\right).$$

Ou seja, a equação $Z'=a_{i_t}Z+\left(b_{i_t,j_t}-\sum_{l=1}^{t-1}k_lb_{i_t,j_l}\right)$ tem uma solução em $K[X_1]$, o que é um absurdo já que estamos supondo que a equação $Z'=a_iZ+\sum_{j=1}^{r_i}k_jb_{i,j}$ não tem solução em $K[X_1]$ para todos $i\in\{2,...,s\}$ e todos $k_1,...,k_{r_i}\in K$, não todos nulos. ∎

Observação 4.14 *Pela Observação 4.7, os polinômios $Pol(a_i,b_{i,j})$ sempre podem ser calculados. E, como podemos verificar se um conjunto finito de ele-*

mentos de $K[X_1]$ é $K-$ linearmente independente ou não, segue que sempre podemos determinar efetivamente quando a condição (ii) do Teorema 4.13 é satisfeita ou não. Obtemos assim, um critério efetivo para decidir se uma derivação de Shamsuddin de $K[X_1, ..., X_n]$ é ou não simples.

Com este teorema em mãos, obtemos alguns corolários imediatos.

Antes porém, cabe voltar ao Exemplo 4.10 e notar que a derivação $d = \partial_1 + (X_1X_2 + 5)\partial_2 + (X_1X_3 - 5)\partial_3$ não tinha mesmo chances de ser uma derivação simples de $K[X_1, X_2, X_3]$, pois lá temos o mesmo coeficiente em X_2 e X_3, e $\{Pol(X_1, 5); Pol(X_1, -5)\} = \{5, -5\}$ não é um conjunto $K-$linearmente independente.

Corolário 4.15 *(Princípio Local-Global) Com as mesmas notações do Teorema 4.13, para todo $i \in \{2, ..., s\}$, seja $d_i = \partial_1 + \sum_{j=1}^{r_i} (a_iX_{i,j} + b_{i,j})\, \partial_{i,j}$.*

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) d é uma derivação simples de $K[X_1; \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}]$;

(ii) para todo $i \in \{2, ..., s\}$, d_i é uma derivação simples de $K[X_1; X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}]$.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ É imediato, basta notar que d restrito a $K[X_1; X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}]$ é a derivação d_i, e usar o mesmo argumento da demonstração da Proposição 4.11.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Se $K[X_1; X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}]$ é d_i-simples, para todo $i \in \{2, ..., s\}$, então pelo Teorema 4.13, $a_i \neq 0$ e $\{Pol(a_i, b_{i,j}); j = 1, ..., r_i\}$ é um conjunto $K-$linearmente independente. Mas como isto ocorre para todo i, também pelo Teorema 4.13, d é uma derivação simples de $K[X_1; \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}]$.

■

Corolário 4.16 *Seja $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n} (a_iX_i + b_i)\, \partial_i$, com $a_i, b_i \in K[X_1]$ para todo i, uma derivação simples de $K[X_1, ..., X_n]$. Então, para todo $i = 2, ..., n$,* $\deg(a_i) \geq 1$.

Prova. Como d é simples, então, pelo Teorema 4.13, $a_i \neq 0$ e $Pol(a_i, b_i) \neq 0$ para todo $i = 2, ..., n$. Logo, pelo Lema 4.8 (d), $\deg(a_i) \geq 1$, para todo $i \in \{2, ..., n\}$. ■

Corolário 4.17 *Sejam $r_2, ..., r_s \geq 1$ inteiros e $\{X_1\} \cup \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}$ um conjunto de indeterminadas sobre K. Sejam $a_2, ..., a_s \in K[X_1]$, $a_i \neq a_l$ para todo $i \neq l$. Para todo $i \in \{2, ..., s\}$ sejam $b_{i,1}, ..., b_{i,r_i} \in K[X_1]$ tais que $\deg(a_i) > \deg(b_{i,j})$ para todo $j \in \{1, ..., r_i\}$. Seja d a derivação de Shamsuddin de $K[X_1; \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}]$ dada por*

$$d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{s} \sum_{j=1}^{r_i} (a_i X_{i,j} + b_{i,j}) \partial_{i,j}.$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) d é uma derivação simples de $K[X_1; \cup_{i=2}^{s}\{X_{i,1}, ..., X_{i,r_i}\}]$;

(ii) para todo $i = 2, ..., s$, o elemento a_i não é 0 e $\{b_{i,1}, ..., b_{i,r_i}\}$ é um conjunto $K-$linearmente independente de r_i elementos de $K[X_1]$.

Prova. Pelo Teorema 4.13, sabemos que a afirmação *(i)* é equivalente a:

"Para todo $i \in \{2, ..., s\}$, $a_i \neq 0$ e $\{Pol(a_i, b_{i,j}); j = 1, ..., r_i\}$ é um conjunto $K-$linearmente independente."

Mas como estamos supondo $\deg(a_i) > \deg(b_{i,j})$, para todo $j \in \{1, ..., r_i\}$, temos, pelo Lema 4.8, $Pol(a_i, b_{i,j}) = b_{i,j}$, o que demonstra a equivalência. ■

Corolário 4.18 *Seja $n \geq 2$ um inteiro. Seja $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_i X_i + b_i)\partial_i$, com $a_i, b_i \in K[X_1]$, $a_i \neq a_j$ para todos $i \neq j$, uma derivação de $K[X_1, ..., X_n]$. Então, são equivalentes:*

(i) $K[X_1, ..., X_n]$ é $d-$simples;

(ii) para todo $i = 2, ..., n$, a equação $Z' = a_i Z + b_i$ não tem solução em $K[X_1]$;

(iii) para todo $i \in \{2, ..., n\}$, $d_i = \partial_1 + (a_i X_i + b_i)\partial_i$ é uma derivação simples de $K[X_1, X_i]$.

Prova. Pelo Corolário 4.15, temos a equivalência entre (i) e (iii).

Assim, é suficiente mostrar a equivalência entre (i) e (ii).

Pelo Teorema 4.13, d é uma derivação simples de $K[X_1, ..., X_n]$ se, e somente se, para qualquer $k \in K^*$, a equação $Z' = a_i Z + k b_i$ não tem solução em $K[X_1]$, o que ocorre se, e somente se, $Pol(a_i, kb_i) \neq 0$. Mas, como $k \neq 0$ e $Pol(a_i, kb_i) = kPol(a_i, b_i)$, pelo Lema 4.8, temos $Pol(a_i, kb_i) \neq 0$ se, e somente se, $Pol(a_i, b_i) \neq 0$. Por sua vez, $Pol(a_i, b_i) \neq 0$ ocorre se, e somente se, a equação $Z' = a_i Z + b_i$ não tem solução em $K[X_1]$. ∎

Corolário 4.19 *Seja $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_i X_i + b_i)\partial_i$, com a_i, $b_i \in K[X_1]$ para todo $i = 2, ..., n$, uma derivação simples de $K[X_1, ..., X_n]$. Sejam $k_2, ..., k_n \in K^*$. Então, $\partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_i X_i + k_i b_i)\partial_i$ é uma derivação simples de $K[X_1, ..., X_n]$.*

Prova. Seja $l \geq 1$ um inteiro e sejam $2 \leq i_1 < ... < i_l \leq n$, índices tais que $a_{i_1} = ... = a_{i_l}$. Como $k_{i_1}, ..., k_{i_l}$ são todos elementos não-nulos de K, então pelo Lema 4.8, $\{Pol(a_{i_j}, b_{i_j}); j = 1, ..., l\}$ é um conjunto $K-$linearmente independente se, e somente se, $\{Pol(a_{i_j}, k_{i_j} b_{i_j}); j = 1, ..., l\}$ também é. Assim, pelo Teorema 4.13, d é uma derivação simples se, e somente se, $\partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_i X_i + k_i b_i)\partial_i$ é uma derivação simples também. ∎

Vamos passar agora para alguns exemplos de derivações de Shamsuddin, fazendo uso do Teorema 4.13 para verificar se são simples ou não.

Exemplo 4.20 *Seja $n \geq 3$ um inteiro. Então nenhuma derivação de $K[X]$ da forma $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(aX_i + b_i)\partial_i$ com $a, b_2, ..., b_n \in K[X_1]$, $\deg(a) = 1$ é simples.*

Prova. Todo polinômio $Pol(a, b_i)$ pertence a K, pois seu grau é menor que o grau de a. Como $n > 2$, o conjunto $\{Pol(a, b_i), i = 2, ..., n\}$ tem no mínimo 2 elementos, e portanto nunca é $K-$linearmente independente. ■

Exemplo 4.21 *Seja* $a \in K[X_1]$, *com* $\deg a \geq 2$. *Então,* $d = \partial_1 + (aX_2 + X_1)\partial_2 + (aX_3 + X_1 + 1)\partial_3$ *é uma derivação simples de* $K[X_1, X_2, X_3]$.

Prova. Como o grau de a é estritamente maior que 1, pelo Lema 4.8, $Pol(a, X_1) = X_1$ e $Pol(a, X_1 + 1) = X_1 + 1$; como estes dois polinômios são $K-$linermente independentes, pelo Teorema 4.13, temos que d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2, X_3]$. ■

Exemplo 4.22 *A derivação* $d = \partial_1 + (X_1^2 X_2 + X_1)\partial_2 + (X_1^2 X_3 + X_1^3)\partial_3$ *é uma derivação simples de* $K[X_1, X_2, X_3]$.

Prova. Aqui temos que $Pol(X_1^2, X_1) = X_1$ e $Pol(X_1^2, X_1^3) = 1$. Como o conjunto $\{X_1, 1\}$ é linearmente independente então, pelo Teorema 4.13, d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2, X_3]$. ■

Exemplo 4.23 *Tomando* $a, b_2 \in K[X_1]$ *satisfazendo as condições (necessárias)* $\deg a \geq 2$ *e* $Pol(a, b_2) \neq 0$, *afirmamos que existe* $b_3 \in K[X_1]$ *tal que* $d = \partial_1 + (aX_2 + b_2)\partial_2 + (aX_3 + b_3)\partial_3$ *é uma derivação simples de* $K[X_1, X_2, X_3]$.

Prova. De fato, basta escolhermos $b_3 \in K[X_1]$ tal que $Pol(a, b_3) \notin KPol(a, b_2)$. Para exibir tal polinômio b_3 é fácil. Se $b \in K[X_1]$ é um polinômio tal que $Pol(a, b) \in KPol(a, b_2)$, e se $\deg(Pol(a, b_2)) = 0$, então basta tomar $c \in K[X_1]$ tal que $\deg c = 1$, por exemplo, então $Pol(a, b + c) \notin KPol(a, b_2)$. Agora, se $\deg(Pol(a, b_2)) > 0$, podemos tomar $c \in K^*$, então $Pol(a, b + c) \notin KPol(a, b_2)$. ■

O exemplo anterior nos mostra algo interessante acerca das derivações de Shamsuddin de $K[X_1, X_2, X_3]$: existem muito mais derivações simples do que não-simples. Este resultado pode ser estendido facilmente para as derivações de Shamsuddin de $K[X_1, ..., X_n]$.

5 A CONJECTURA É VERDADEIRA PARA DERIVAÇÕES DE SHAMSUDDIN

Nesta seção mostramos que, dada uma derivação simples de Shamsuddin de $K[X]$, digamos d, podemos encontrar um elemento g de $K[X]$ tal que o ideal à esquerda $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$.

Começamos com alguns resultados preliminares.

Definição 5.1 *Seja $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_iX_i + b_i)\partial_i$, com $a_i, b_i \in K[X_1]$ para todo i, uma derivação de $K[X]$. Para cada multi-índice $\Lambda = (\lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$, denotaremos por $\|\Lambda\|_d$ o polinômio $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i$.*

Lema 5.2 *Seja d uma derivação de $K[X]$ da forma $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_iX_i + b_i)\partial_i$, com $a_i, b_i \in K[X_1]$, para todo i, e seja $\Gamma = (\gamma_2, ..., \gamma_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$ com $|\Gamma| \geq 1$, digamos, $\gamma_j \geq 1$. Então, para cada $g_j \in K[X_1, X_j]$ com $\deg_{X_j}(g_j) \geq 1$ e para cada $P \in K[X]$, temos*

(a) $[d, P\partial^{\Gamma}] = (d(P) - \|\Gamma\|_d P)\,\partial^{\Gamma}$.

(b) $[g_j, P\partial^{\Gamma}] = -\gamma_j\partial_j(g_j)P\partial^{\Gamma - e_j} + \{$*termos com ordem* $\leq (|\Gamma| - 2)\}$.

Prova. (a) De fato,

$$\begin{aligned}
[d, P\partial^{\Gamma}] &= dP\partial^{\Gamma} - P\partial^{\Gamma}d \\
&= dP\partial^{\Gamma} - Pd\partial^{\Gamma} + Pd\partial^{\Gamma} - P\partial^{\Gamma}d \\
&= (dP - Pd)\partial^{\Gamma} + P(d\partial^{\Gamma} - \partial^{\Gamma}d) \\
&= [d, P]\partial^{\Gamma} + P[d, \partial^{\Gamma}] \overset{\text{Lema 2.37}}{=} \\
&= d(P)\partial^{\Gamma} + P[d, \partial^{\Gamma}].
\end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 2.42,

$$[d, \partial^{\Gamma}] = -\left(\sum_{i=2}^{n} \gamma_i a_i\right)\partial^{\Gamma} = -\|\Gamma\|_d\,\partial^{\Gamma}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}[d, P\partial^\Gamma] &= d(P)\partial^\Gamma - P\,\|\Gamma\|_d\,\partial^\Gamma \\ &= (d(P) - \|\Gamma\|_d\,P)\partial^\Gamma.\end{aligned}$$

(b) Como $\gamma_j \geq 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}[g_j, P\partial^\Gamma] &= [g_j, P\partial_j^{\gamma_j}\partial^{\Gamma-\gamma_j e_j}] \overset{\text{Prop. 2.18}}{=} [g_j, P\partial_j^{\gamma_j}]\partial^{\Gamma-\gamma_j e_j} \\ &= (g_j P\partial_j^{\gamma_j} - P\partial_j^{\gamma_j} g_j)\partial^{\Gamma-\gamma_j e_j} = P(g_j\partial_j^{\gamma_j} - \partial_j^{\gamma_j} g_j)\partial^{\Gamma-\gamma_j e_j} \\ &= P[g_j, \partial_j^{\gamma_j}]\partial^{\Gamma-\gamma_j e_j} = -P[\partial_j^{\gamma_j}, g_j]\partial^{\Gamma-\gamma_j e_j}.\end{aligned}$$

Como $g_j \in K[X_1, X_j]$ pelo Lema 2.31

$$[\partial_j^{\gamma_j}, g_j] = \gamma_j\partial_j(g_j)\partial_j^{\gamma_j-1} + \{\text{termos com ordem } \leq \gamma_j - 2\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}[g_j, P\partial^\Gamma] &= -P[\partial_j^{\gamma_j}, g_j]\partial^{\Gamma-\gamma_j e_j} \\ &= -P\left(\gamma_j\partial_j(g_j)\partial_j^{\gamma_j-1} + \{\text{termos com ordem } \leq \gamma_j - 2\}\right)\partial^{\Gamma-\gamma_j e_j} \\ &= -\gamma_j\partial_j(g_j)P\partial_j^{\Gamma-e_j} + \{\text{termos com ordem} \leq |\Gamma| - 2\}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Lema 5.3 *Seja d uma derivação de Shamsuddin simples de $K[X]$. Para cada $i = 2, ..., n$, seja $g_i \in K[X_1, X_i]$ e seja $R = \sum_\Lambda P_\Lambda\partial^\Lambda \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1]$ um operador de Darboux com ordem $r \geq 1$ para $d + \sum_{i=2}^n g_i$, digamos,*

$$\left[d + \sum_{i=2}^n g_i, R\right] = fR, \tag{9}$$

para algum $f \in K[X]$. Então, para todo multi-índice $\Lambda = (\lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$ tal que $|\Lambda| = r$ e $P_\Lambda \neq 0$:

(a) $P_\Lambda \in K$, digamos, $P_\Lambda = k_\Lambda \in K^*$;

(b) $\|\Lambda\|_d = -f$;

(c) Se $d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_iX_i + b_i)\partial_i$, com $a_i, b_i \in K[X_1]$ para todo i, e $\lambda_2 \geq 1$, então $P_{\Lambda - e_2}$ é solução da equação

$$d(Z) = -a_2 Z + \lambda_2 k_\Lambda \partial_2(g_2) + \sum_{i=3}^{n}(\lambda_i + 1)k_{\Lambda - e_2 + e_i}\partial_i(g_i).$$

Prova. (a) De fato,

$$\begin{aligned}
\left[d + \sum_{i=2}^{n} g_i, R\right] &= [d, R] + \left[\sum_{i=2}^{n} g_i, R\right] \\
&= \left[d, \sum_{\Lambda} P_\Lambda \partial^\Lambda\right] + \sum_{i=2}^{n}\left[g_i, \sum_{\Lambda} P_\Lambda \partial^\Lambda\right] \\
&= \sum_{\Lambda}\left[d, P_\Lambda \partial^\Lambda\right] + \sum_{i=2}^{n}\sum_{\Lambda}\left[g_i, P_\Lambda \partial^\Lambda\right].
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 5.2, a componente homogênea de ordem r de $[d + \sum_{i=2}^{n} g_i, R]$ é igual a

$$\sum_{|\Lambda| = r}\left(d(P_\Lambda) - \|\Lambda\|_d P_\Lambda\right)\partial^\Lambda. \tag{10}$$

Claramente os termos de ordem r de fR são dados por

$$\sum_{|\Lambda| = r} f P_\Lambda \partial^\Lambda. \tag{11}$$

Então, por (9), (10) e (11), temos que, para cada multi-índice Λ tal que $|\Lambda| = r$ e $P_\Lambda \neq 0$,

$$d(P_\Lambda) - \|\Lambda\|_d P_\Lambda = f P_\Lambda,$$

ou seja,

$$d(P_\Lambda) = (f + \|\Lambda\|_d)P_\Lambda. \tag{12}$$

Então, $K[X]P_\Lambda$ é um $d-$ideal. Como $K[X]$ é $d-$simples e $P_\Lambda \neq 0$, então $P_\Lambda \in K^*$.

(b) Como $P_\Lambda = k_\Lambda \in K^*$, temos $d(k_\Lambda) = 0$. Então, de (12), obtemos $\|\Lambda\|_d + f = 0$. Ou seja, $\|\Lambda\|_d = -f$.

(c) Sabendo que

$$\left[d+\sum_{i=2}^{n} g_i, R\right] = \sum_{\Lambda}\left[d, P_\Lambda \partial^\Lambda\right] + \sum_{i=2}^{n}\sum_{\Lambda}\left[g_i, P_\Lambda \partial^\Lambda\right]$$

e que $\lambda_2 \geq 1$, vamos calcular o termo em $\partial^{\Lambda-e_2}$ de $[d+\sum_{i=2}^{n} g_i, R]$.

Em vista do Lema 5.2, as contribuições vem exclusivamente de

$\cdot\left[d, P_{\Lambda-e_2}\partial^{\Lambda-e_2}\right]$, o qual resulta em $(d(P_{\Lambda-e_2}) - \|\Lambda - e_2\|_d P_{\Lambda-e_2})\partial^{\Lambda-e_2} = (d(P_{\Lambda-e_2}) - (\|\Lambda\|_d - a_2)P_{\Lambda-e_2})\partial^{\Lambda-e_2}$.

$\cdot[g_2, k_\Lambda \partial^\Lambda]$, o qual resulta em $-\lambda_2\partial_2(g_2)k_\Lambda\partial^{\Lambda-e_2}$.

$\cdot[g_i, k_{\Lambda-e_2+e_i}\partial^{\Lambda-e_2+e_i}]$, o qual resulta em $-(\lambda_i+1)\partial_i(g_i)k_{\Lambda-e_2+e_i}\partial^{\Lambda-e_2+e_i-e_i} = -(\lambda_i+1)\partial_i(g_i)k_{\Lambda-e_2+e_i}\partial^{\Lambda-e_2}$, para $i = 3, ..., n$.

Assim o coeficiente do termo em $\partial^{\Lambda-e_2}$ de $[d+\sum_{i=2}^{n} g_i, R]$ é igual a

$$d(P_{\Lambda-e_2}) - (\|\Lambda\|_d - a_2)P_{\Lambda-e_2} - \lambda_2\partial_2(g_2)k_\Lambda - \sum_{i=3}^{n}(\lambda_i+1)k_{\Lambda-e_2+e_i}\partial_i(g_i). \quad (13)$$

Por outro lado,

$$fR = (-\|\Lambda\|_d)R = -\|\Lambda\|_d \sum_{\Lambda} P_\Lambda\partial^\Lambda = -\sum_{\Lambda}\|\Lambda\|_d P_\Lambda\partial^\Lambda,$$

e portanto o coeficiente do termo em $\partial^{\Lambda-e_2}$ de fR é dado por

$$-\|\Lambda\|_d P_{\Lambda-e_2}. \quad (14)$$

Então, por (9), (13) e (14), obtemos

$$d(P_{\Lambda-e_2}) - \|\Lambda\|_d P_{\Lambda-e_2} + a_2P_{\Lambda-e_2} - \lambda_2\partial_2(g_2)k_\Lambda - \sum_{i=3}^{n}(\lambda_i+1)k_{\Lambda-e_2+e_i}\partial_i(g_i)$$

$$= -\|\Lambda\|_d P_{\Lambda-e_2},$$

ou ainda,

$$d(P_{\Lambda-e_2}) = -a_2P_{\Lambda-e_2} + \lambda_2k_\Lambda\partial_2(g_2) + \sum_{i=3}^{n}(\lambda_i+1)k_{\Lambda-e_2+e_i}\partial_i(g_i). \blacksquare$$

Agora estamos em condições de mostrar o resultado principal deste capítulo:

Teorema 5.4 *Seja d uma derivação de Shamsuddin de $K[X]$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) d é uma derivação simples de $K[X]$.

(ii) Existe $g \in K[X]$ tal que $\mathbb{A}_n.(d+g)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_n$.

(iii) $\mathbb{A}_n.\left(d + \sum_{i=2}^{n} X_i^{t_i}\right)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_n$ se $t_i \geq 2$ para todo $i = 2, ..., n$.

Prova. Escrevamos d na forma

$$d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n} (a_i X_i + b_i)\partial_i,$$

com $a_i, b_i \in K[X_1]$ para todo i.

Nesta demonstração, quando escrevemos $f \in K[X_1, \widehat{X_2}, ..., X_n]$ significa que f não depende da indeterminada X_2.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ É óbvio.

$(ii) \Rightarrow (i)$ É o conteúdo do Corolário 3.21.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Em vista do Corolário 3.16, queremos mostrar que

$$\left[d + \sum_{i=2}^{n} X_i^{t_i}, R\right] \notin K[X]R$$

para todo $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1] \backslash K$.

Como $K[X]$ é $d-$simples, então, pelo Corolário 4.16, $\deg(a_i) \geq 1$.

Se $ord(R) = 0$, ou seja, se $R \in K[X] \backslash K$, então $\left[d + \sum_{i=2}^{n} X_i^{t_i}, R\right] = d(R) \notin K[X]R$, caso contrário teríamos um $d-$ideal não-trivial de $K[X]$. Então para os elementos de ordem zero a propriedade é de fato satisfeita.

Agora, vamos supor, por absurdo, que existe $R \in \mathbb{A}_{n-1}[X_1] \backslash K$ com $ord(R) = r \geq 1$ e tal que

$$\left[d + \sum_{i=2}^{n} X_i^{t_i}, R\right] = fR,$$

para algum $f \in K[X]$. Escrevamos

$$R = \sum_{\Lambda} P_\Lambda \partial^\Lambda,$$

com $P_\Lambda \in K[X]$ para todo $\Lambda \in \mathbb{N}^{n-1}$.

Seja $\Gamma = (\gamma_2, ..., \gamma_n)$ tal que $|\Gamma| = r$ e $P_\Gamma \neq 0$. Como $r \geq 1$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma_2 \geq 1$.

Pelo Lema 5.3, sabemos que $P_\Lambda = k_\Lambda \in K^*$ para todo Λ tal que $|\Lambda| = r$ e $P_\Lambda \neq 0$. Além disso,

$$d(P_{\Gamma-e_2}) = -a_2 P_{\Gamma-e_2} + \gamma_2 k_\Gamma t_2 X_2^{t_2-1} + S \tag{15}$$

com

$$S = \sum_{i=3}^{n} (\gamma_i + 1) k_{\Gamma-e_2+e_i} t_i X_i^{t_i-1}. \tag{16}$$

Note que $P_{\Gamma-e_2} \neq 0$, pois caso contrário, a igualdade (15) se reescreveria

$$\gamma_2 k_\Gamma t_2 X_2^{t_2-1} + S = 0,$$

o que é um absurdo, pois estamos supondo $t_i \geq 2$ para todo $i \geq 2$ e S é um polinômio que não envolve X_2.

Como $\deg_{X_2}\left(\gamma_2 k_\Gamma t_2 X_2^{t_2-1} + S\right) = t_2 - 1 \geq 0$, então, por (15) e pelo Lema 4.12, nós temos $\partial_2^{t_2}(P_{\Gamma-e_2}) = 0$ pois $-a_2 \neq t_2 a_2$. Então podemos escrever

$$P_{\Gamma-e_2} = \sum_{j=0}^{t_2-1} p_{\Gamma-e_2,j} X_2^j, \tag{17}$$

com $p_{\Gamma-e_2,j} \in K[X_1, \widehat{X_2}, ..., X_n]$ para todo j. Daí,

$$\begin{aligned}
d(P_{\Gamma-e_2}) &= d\left(\sum_{j=0}^{t_2-1} p_{\Gamma-e_2,j} X_2^j\right) \\
&= d\left(p_{\Gamma-e_2,t_2-1} X_2^{t_2-1}\right) + d\left(\sum_{j=0}^{t_2-2} p_{\Gamma-e_2,j} X_2^j\right) \\
&= d(p_{\Gamma-e_2,t_2-1}) X_2^{t_2-1} + p_{\Gamma-e_2,t_2-1} d\left(X_2^{t_2-1}\right) + d\left(\sum_{j=0}^{t_2-2} p_{\Gamma-e_2,j} X_2^j\right) \\
&= d(p_{\Gamma-e_2,t_2-1}) X_2^{t_2-1} + p_{\Gamma-e_2,t_2-1}\left(a_2(t_2-1) X_2^{t_2-1}\right) + \\
&+ \ \{\text{termos com } \deg_{X_2} \text{ menor ou igual a } t_2-2\} \\
&= \left(d(p_{\Gamma-e_2,t_2-1}) + (t_2-1) a_2 p_{\Gamma-e_2,t_2-1}\right) X_2^{t_2-1} + \\
&+ \ \{\text{termos com } \deg_{X_2} \text{ menor ou igual a } t_2-2\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-a_2 P_{\Gamma-e_2} + \gamma_2 k_\Gamma t_2 X_2^{t_2-1} + S &= \left(-a_2 p_{\Gamma-e_2,t_2-1} + \gamma_2 k_\Gamma t_2\right) X_2^{t_2-1} + \\
&+ \{\text{termos com } \deg_{X_2} \leq (t_2-2)\}.
\end{aligned}$$

Assim, comparando os coeficientes dos termos em $X_2^{t_2-1}$ em (15), temos:

$$d(p_{\Gamma-e_2,t_2-1}) + (t_2-1) a_2 p_{\Gamma-e_2,t_2-1} = -a_2 p_{\Gamma-e_2,t_2-1} + \gamma_2 k_\Gamma t_2,$$

donde

$$d(p_{\Gamma-e_2,t_2-1}) = -t_2 a_2 p_{\Gamma-e_2,t_2-1} + \gamma_2 k_\Gamma t_2. \tag{18}$$

Agora note que, se $n = 2$, então $p_{\Gamma-e_2,t_2-1} \in K[X_1]$ e (18) se torna

$$p'_{\Gamma-e_2,t_2-1} = -t_2 a_2 p_{\Gamma-e_2,t_2-1} + \gamma_2 k_\Gamma t_2, \tag{19}$$

o que é um absurdo por questões de grau, pois $\deg(-t_2 a_2) = \deg(a_2) \geq 1$ e $\gamma_2 k_\Gamma t_2 \in K^*$.

E, se $n \geq 3$, temos, para cada $i \in \{3, ..., n\}$, $\deg_{X_i}(\gamma_2 k_\Gamma t_2) = 0$ em (18); então, pelo Lema 4.12, temos que $\partial_i(p_{\Gamma - e_2, t_2 - 1}) \in K$. Como isto é válido para todo $i \in \{3, ..., n\}$, podemos escrever

$$p_{\Gamma - e_2, t_2 - 1} = \sum_{i=3}^{n} l_i X_i + q, \text{ com } l_3, ..., l_n \in K, \ q \in K[X_1]. \tag{20}$$

Com este valor de $p_{\Gamma - e_2, t_2 - 1}$, temos

$$\begin{aligned} d(p_{\Gamma - e_2, t_2 - 1}) &= d\left(\sum_{i=3}^{n} l_i X_i + q\right) \\ &= \sum_{i=3}^{n} l_i(a_i X_i + b_i) + q' \end{aligned}$$

e

$$-t_2 a_2 p_{\Gamma - e_2, t_2 - 1} + \gamma_2 k_\Gamma t_2 = -t_2 a_2 \sum_{i=3}^{n} l_i X_i - t_2 a_2 q + \gamma_2 k_\Gamma t_2.$$

Então de (18), temos

$$\sum_{i=3}^{n} l_i(a_i X_i + b_i) + q' = -t_2 a_2 \sum_{i=3}^{n} l_i X_i - t_2 a_2 q + \gamma_2 k_\Gamma t_2,$$

e portanto

$$l_i(a_i + t_2 a_2) = 0, \text{ para todo } i = 3, ..., n \tag{21}$$

e

$$q' = -t_2 a_2 q - \sum_{i=3}^{n} l_i b_i + \gamma_2 k_\Gamma t_2. \tag{22}$$

Suponhamos agora que existe $i \in \{3, ..., n\}$ tal que $l_i \neq 0$, digamos, sem perda de generalidade, $i = n$. Então por (21), temos

$$a_n = -t_2 a_2. \tag{23}$$

Agora, pelo Lema 5.3 *(b)*, sabemos que

$$
\begin{aligned}
f = -\left\|\Gamma\right\|_d &\overset{\text{Def. 5.1}}{=} -\sum_{i=2}^{n}\gamma_i a_i \\
&= -\sum_{i=2}^{n-1}\gamma_i a_i - \gamma_n a_n - a_n + a_n \\
&= -\sum_{i=2}^{n-1}\gamma_i a_i - (\gamma_n+1)a_n - t_2 a_2 \\
&= -(\gamma_2+t_2)a_2 - \sum_{i=3}^{n-1}\gamma_i a_i - (\gamma_n+1)a_n.
\end{aligned}
$$

Portanto $f \neq -(\gamma_2-1)a_2 - \sum_{i=3}^{n-1}\gamma_i a_i - (\gamma_n+1)a_n$, pois $t_2 \neq -1$, ou ainda, $f \neq -\left\|\Gamma - e_2 + e_n\right\|_d$. Afirmamos que $k_{\Gamma-e_2+e_n} = 0$. De fato, se $k_{\Gamma-e_2+e_n} \neq 0$ então, pelo Lema 5.3 *(b)*, $f = -\left\|\Gamma - e_2 + e_n\right\|_d$, já que $|\Gamma - e_2 + e_n| = |\Gamma| = r$, o que não ocorre.

Então (16) vem a ser

$$
S = \sum_{i=3}^{n-1}(\gamma_i+1)k_{\Gamma-e_2+e_i} t_i X_i^{t_i-1}, \tag{24}
$$

e portanto $\deg_{X_n}(\gamma_2 k_\Gamma t_2 X_2^{t_2-1} + S) = 0$. Então, aplicando o Lema 4.12 em (15), nós temos $\partial_n\left(P_{\Gamma-e_2}\right) = 0$, pois $-a_2 \neq a_n$, já que $t_2 \geq 2$ por hipótese. Portanto $P_{\Gamma-e_2} \in K[X_1, ..., X_{n-1}]$. Isto implica (veja (17)) que $p_{\Gamma-e_2,t_2-1} \in K[X_1, \widehat{X_2}, ..., X_{n-1}]$, e assim $l_n = 0$ em (20), uma contradição com nossa suposição.

Logo $l_i = 0$ para todo $i = 3, ..., n$ e $p_{\Gamma-e_2,t_2-1} = q \in K[X_1]$ por (20).

Então (22) é na verdade

$$
q' = -t_2 a_2 q + \gamma_2 k_\Gamma t_2
$$

com $\deg(-t_2 a_2) \geq 1$, pois $\deg(a_2) \geq 1$ e $\gamma_2 k_\Gamma t_2 \in K^*$. E, novamente por razões de grau, temos um absurdo. ∎

A condição (iii) dada no Teorema 5.4 é ótima no seguinte sentido: se enfraquecermos a condição "$t_i \geq 2$ para todo $i = 2, ..., n$" para a condição "$t_i \geq 2$ para todo $i = 3, ..., n$ e $t_2 = 1$", então $\mathbb{A}_n.\left(d + \sum_{i=2}^{n} X_i^{t_i}\right)$ não necessariamente será um ideal maximal de $\mathbb{A}_n$ se d for simples, conforme nos mostra o Exemplo a seguir:

Exemplo 5.5 *Sejam* $a, b_2 \in K[X_1]$ *tais que* $\deg(a) \geq 1$, $Pol(a, b_2) \neq 0$ *(por exemplo,* $b_2 \in K^*$*). Seja* $d = \partial_1 + (aX_2 + b_2)\partial_2 + (-aX_3 + 1)\partial_3$*. Então* d *é uma derivação simples de* $K[X_1, X_2, X_3]$ *mas* $\mathbb{A}_3.(d + X_2 + X_3^2)$ *não é um ideal maximal à esquerda de* $\mathbb{A}_3$*.*

Prova. De fato, pelo Teorema 4.13, d é uma derivação simples de $K[X_1, X_2, X_3]$.

Agora vamos tomar $R = \partial_2 + X_3 \in \mathbb{A}_2[X_1] \backslash K$. Então

$$\begin{aligned}
[d + X_2 + X_3^2, R] &= [d, \partial_2 + X_3] + [X_2 + X_3^2, \partial_2 + X_3] \\
&= [d, \partial_2] + [d, X_3] + [X_2, \partial_2] + [X_2, X_3] + [X_3^2, \partial_2] + [X_3^2, X_3] \\
&= [d, \partial_2] + [d, X_3] + [X_2, \partial_2] \overset{\text{Lema 2.37}}{=} \\
&= [(aX_2 + b_2)\partial_2, \partial_2] + d(X_3) - \partial_2(X_2) \\
&= [aX_2\partial_2, \partial_2] - aX_3 + 1 - 1 \overset{\text{Prop. 2.15 } (ii)}{=} \\
&= -a\partial_2 - aX_3 = -a(\partial_2 + X_3) = -aR.
\end{aligned}$$

Ou seja, $[d + X_2 + X_3^2, R] \in K[X_1, X_2, X_3]R$. E então, pelo Corolário 3.16, $\mathbb{A}_3.(d + X_2 + X_3^2)$ não é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_3$. Contudo, pelo Teorema 5.4, $\mathbb{A}_3.(d + X_2^2 + X_3^2)$ é um ideal maximal à esquerda de $\mathbb{A}_3$. ■

Referências

[1] Bratti, G.- Takagi, M. *Differential equations and maximal ideals on the Weyl algebra* $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, n°. 107, p. 209-223, 2002.

[2] Coutinho, S. C. *A Primer of Algebraic D-modules.* Cambridge: Cambridge University. 207 p. (London Mathematical Society Student Texts, 33), 1995. ISBN 0-521-55908-1.

[3] Coutinho, S. C. d-Simple rings and simple D-modules. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* v.125, p. 405-415, jan. 1999.

[4] Ferreira, J. L. de O. *Ideais maximais cíclicos à esquerda da Álgebra de Weyl* $\mathbb{A}_2(K)$. Dissertação de mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre, 2004.

[5] Lequain, Y. *Simple Shamsuddin derivations of* $K[X_1, ..., X_n]$ *and cyclic maximal left ideals of the Weyl algebra* $\mathbb{A}_n[K]$. preprint.

[6] Lequain, Y.- Doering, A. M.- Ripoll, C. *Cyclic maximal left ideals of the Weyl algebra* $\mathbb{A}_2[K]$*: an effective approach.* preprint.

[7] Lequain, Y.- Levcovitz, D.- Souza Jr., J.C. *d-simple rings and principal maximal ideals of the Weyl algebra.* preprint.

[8] Souza Jr., J. C. de. *Anéis d-simples e ideais maximais da álgebra de Weyl.* Tese de doutorado - Universidade de São Paulo-São Carlos, 2003.

[9] Stafford, J.T. *Module structure of Weyl algebras.* J. London Math. Soc. 18, p. 429-442, 1978.

[10] Stafford, J. T. *Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras.* Inventiones mathematicae, v. 79, p. 619-638, 1985.