

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

BRUNA KASPRZAK BORGES

Avaliação da habilidade preditiva entre modelos GARCH  
multivariados: uma análise baseada no critério Model  
Confidence Set

Porto Alegre  
2012

**BRUNA KASPRZAK BORGES**

**Avaliação da habilidade preditiva entre modelos GARCH  
multivariados: uma análise baseada no critério Model  
Confidence Set.**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Flávio A. Ziegelmann

**Porto Alegre**

**2012**

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

Responsável: Biblioteca Gládis Wiebbelling do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS

B732a Borges, Bruna Kasprzak

Avaliação da habilidade preditiva entre modelos Garch multivariados: uma análise baseada no critério Model Confidence Set / Bruna Kasprzak Borges. – Porto Alegre, 2012.

38 f.: il.

Orientador: Flávio Augusto Ziegelmann.

Ênfase em Economia Aplicada.

Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, 2012.

1. Mercado financeiro. 2. Inferência não-paramétrica. 3. Inferência estatística. 4. Estimação. I. Ziegelmann, Flávio Augusto. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDU 519.234

**BRUNA KASPRZAK BORGES**

**Avaliação da habilidade preditiva entre modelos GARCH  
multivariados: uma análise baseada no critério Model  
Confidence Set.**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Economia da  
Faculdade de Ciências Econômicas  
da UFRGS, como quesito parcial  
para obtenção do título de Mestre em  
Economia, com ênfase em Economia  
Aplicada

**Aprovada em 08 de Novembro de 2012**

**Banca Examinadora**

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann - Orientador  
PPGE/UFRGS

Prof. Dr. João Fróis Caldeira  
PPGE/UFRGS

Prof. Dr. Marcio Valk  
Departamento de Estatística/UFRGS

Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena  
PPGA/UFRGS

## Agradecimentos

Aos meus pais e a minha irmã por estarem sempre presentes. Ao meu orientador, professor Flávio Ziegelmann, pelos valiosos ensinamentos, pela compreensão, apoio e paciência ao longo da elaboração desta dissertação. Aos professores do PPGE, pelos conhecimentos transmitidos. Aos meus queridos amigos que entenderam as ausências, as reclamações e sempre retribuíram com palavras de incentivo. À FEE, pelo apoio à realização desta dissertação, especialmente Dulce e Raul, pelo auxílio desde o primeiro momento de convivência. Ao Walter Pichler, pela cobrança diária de resultados e a preocupação com a conclusão deste trabalho.

## Resumo

Esta dissertação analisa a questão da seleção de modelos GARCH multivariados em termos da performance de previsão da matriz de covariância condicional. A aplicação empírica é realizada com 7 retornos de índices de ações envolvendo um conjunto de 34 especificações de modelos para os quais computamos as previsões da variância condicional um passo a frente para uma amostra com 60 observações para cada especificação dos modelos GARCH multivariados. A comparação entre os modelos é baseada no procedimento *Model Confidence Set* (MCS) avaliado através de duas funções perdas robustas a *proxies* de volatilidade imperfeitas. O MCS é um procedimento que permite comparar vários modelos simultaneamente em termos de sua habilidade preditiva e determinar um conjunto de modelos estatisticamente semelhantes em termos de previsão, dado um nível de confiança.

**Palavras-chave:** GARCH multivariado. Previsão da matriz de variância. Função perda. Model Confidence Set.

## Abstract

This paper considers the question of the selection of multivariate GARCH models in terms of covariance matrix forecasting. In the empirical application we consider 7 series of returns and compare a set of 34 model specifications based on one-step-ahead conditional variance forecasts over a sample with 60 observations. The comparison between models is performed with the *Model Confidence Set* (MCS) procedure evaluated using two loss functions that are robust against imperfect volatility proxies. The MCS is a procedure that allows both a multiple model comparison in terms of forecasting accuracy and the determination of a model set composed of statistically equivalent models, under a confidence level.

**Keywords:** Multivariate GARCH. Variance matrix forecasting. Loss function. Model Confidence Set.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Breve revisão da literatura</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>16</b>
3.1	Modelos GARCH multivariados . . . . .	16
3.1.1	Problema da dimensionalidade . . . . .	21
3.2	Funções perda . . . . .	21
3.3	<i>Model Confidence Set</i> . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Aplicação empírica</b>	<b>26</b>
4.1	Resultados . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>31</b>
	<b>Referências</b>	<b>33</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice - Séries de retorno dos índices</b>	<b>36</b>
<b>B</b>	<b>Apêndice - Bootstrap</b>	<b>37</b>

# 1 Introdução

A alocação de recursos em portfólio ocupa uma parte importante da Teoria em finanças. No que se refere à composição de carteiras e diversificação do risco, a volatilidade é um aspecto crucial para os agentes do mercado financeiro especialmente, pois, a volatilidade é comumente utilizada como parâmetro para medir o risco de um ativo. Quando trabalhamos com vários ativos simultaneamente, um dos interesses reside na obtenção de uma medida da covariância entre eles, a qual é útil para a tomada de decisões de investimento.

O objetivo desta dissertação é comparar empiricamente diferentes modelos GARCH multivariados (MGARCH) em termos de habilidade preditiva da covariância condicional. Dito de outra forma, realizar uma comparação múltipla entre os modelos MGARCH baseado na previsão um passo a frente da covolatilidade entre retornos de índices financeiros. A comparação entre os modelos é baseada no procedimento *Model Confidence Set* (MCS) de Hansen et al. (2011), o qual permite selecionar, dentre um conjunto de modelos, aqueles considerados superiores aos demais.

Uma das questões quando trabalhamos com avaliação envolvendo volatilidade é o fato desta variável ser não observável, o que significa, no caso multivariado, a necessidade de utilização de uma *proxy* para a matriz de covariâncias condicionais. Porém, a substituição da verdadeira matriz de covariâncias condicionais por uma *proxy* pode levar a distorções no ordenamento entre diferentes modelos de previsão. Com o intuito de contornar essa situação, o MCS empregado neste trabalho é avaliado através de duas funções perdas robustas a *proxies* de volatilidade imperfeitas, como apresentado por Patton e Sheppard (2009) e Patton (2011). O método possui a vantagem de permitir avaliar vários modelos simultaneamente em termos de sua habilidade preditiva, sendo que o MCS consiste precisamente dos modelos que possuem igual habilidade preditiva e para os quais não se rejeita que sejam igualmente bons (Hansen et al., 2003). O procedimento MCS permite identificar quais modelos são estatisticamente equivalentes dada uma função perda e um nível de confiança.

A aplicação empírica realizada neste trabalho é realizada com 7 retornos de índices de ações envolvendo um conjunto de 34 especificações de modelos para os quais computamos as previsões da variância condicional um passo a frente para uma amostra com 60 observações. Os índices setoriais utilizados no trabalho representam o comportamento médio dos setores mais relevantes na economia brasileira ao passo que os índices de mercado procuram incluir algum impacto do ambiente geral do mercado. Os resultados da aplicação empírica, gerados a partir da abordagem utilizada no artigo, mostram-se coerentes com os presentes na literatura. Notamos, ainda, que a introdução de assimetrias na especificação da variância condicional melhora a *performance* dos modelos.

A dissertação está organizada da seguinte forma: além desta introdução, na seção 2, apresentamos uma breve revisão da literatura sobre estratégias de diversificação de ativos, bem como sobre a avaliação de previsões de volatilidade. Na seção 3 são descritos os modelos GARCH multivariados comumente utilizados, a classe de funções perdas robustas e o *Model Confidence Set*. A seção 4 discute a aplicação empírica, assim como os resultados obtidos. Por fim, a seção 5 traz as considerações finais.

## 2 Breve revisão da literatura

A relação entre risco e retorno é um aspecto central da chamada Moderna Teoria de Finanças, desenvolvida a partir do trabalho de Harry Markowitz (1952), o qual ressalta a importância da diversificação, em um contexto de análise risco-retorno para um portfólio. Markowitz (1952) definiu o risco e o retorno como, respectivamente, a variância e a média de um ativo. Podemos considerar que o risco inerente à composição de um portfólio depende da estabilidade dos retornos esperados e da variação conjunta dos movimentos entre os mercados financeiros (Rey, 2000). Nesse contexto, a previsão da volatilidade é um aspecto bastante importante para a tomada de decisões de investimento.

A busca por estratégias de investimento que tornem possível diversificar riscos e aumentar o retorno é, então, central na modelagem de carteiras de investimentos. Em um sistema financeiro altamente integrado, espera-se que os choques que afetam a volatilidade em um mercado sejam transmitidos rapidamente para outros mercados. Por esse motivo, Tsay (2005) argumenta que os mercados financeiros são mais dependentes um dos outros e que devemos considerá-los conjuntamente para melhor compreender a dinâmica estrutural das finanças globais. Nessa linha, Bekaert e Harvey (1997) analisaram a influência do que denominaram de fatores globais comuns sobre o comportamento da volatilidade do mercado, especificamente, sobre os mercados emergentes. Para os autores, a covariância com o mercado internacional é positivamente relacionada com o grau de integração do mercado e aumenta em momentos de alta volatilidade. Além disso, o aumento da influência dos fatores globais sobre a volatilidade em alguns países é consistente com o aumento da integração dos mercados. Para Baele e Inghelbrecht (2010), esse aumento da integração econômica e financeira gera uma elevação da correlação entre os mercados. Esperamos, assim, que mercados integrados sejam mais correlacionados e que, nos períodos de maior volatilidade, como as crises de escala global, a inter-relação ou comovimentos entre eles aumente, ficando potencialmente comprometidos os benefícios da diversificação (Bekaert e Harvey, 1997; Bracker e Koch, 1999; Rey, 2000; Bekaert et al., 2005). Poucos trabalhos empíricos sustentam que o processo de abertura não levou a aumentos significativos da correlação entre os países (ver, por exemplo, Bekaert et al., 2009).

É com base nesses aspectos, que uma das questões a ser colocada é a forma como a estratégia de diversificação pode ser conduzida. Em seu artigo seminal, Markowitz (1952, p.89), sintetiza de forma bastante adequada a noção intuitiva de diversificação, argumentando que não é suficiente investir em muitas ações para reduzir a variância, sendo necessário evitar investimentos em ações com altas covariâncias. Seu embasamento parte do princípio de que a diversificação deve ocorrer entre setores, porque firmas em diferentes setores, especialmente com características econômicas diferentes, tem menor covariância do que firmas dentro do mesmo setor.

Quando se discute sobre composição de portfólio e diversificação, a integração entre os mercados deve ter um efeito sobre a importância relativa dos seguintes fatores: o país onde a empresa está sediada e o setor onde estão as atividades principais da firma (Isakov e Sonney, 2004). A este respeito, os fatores que impactam sobre o retorno de ações e, conjuntamente sobre a volatilidade, aparecem como um dos pontos bastante investigados pelos pesquisadores. No período pós 1970, a globalização comercial e financeira passou a ser a característica marcante da economia mundial, bem como a integração entre os mercados sofreu um processo contínuo de aprofundamento e de consolidação. Nesse novo ambiente, incorporaram-se à literatura novas percepções sobre a importância relativa do fator-país propiciando a consolidação de duas abordagens principais sobre a estrutura dos retornos. Para a primeira delas, o fator-país é mantido como principal elemento de impacto sobre os retornos (Heston e Rouwenhorst, 1994; Heston e Rouwenhorst, 1995; Bekaert et al., 2009), enquanto que para a segunda tal impacto é atribuído a um aumento da importância dos fatores setoriais (Cavaglia et al., 2000 e Isakov e Sonney, 2004).

Para a primeira das abordagens, tal como apontam Heston e Rouwenhorst (1994), as diferenças na volatilidade entre os países são, em grande parte, consequência das diferenças da volatilidade do efeito-país, ao invés da especialização industrial. Dessa forma, o efeito-país nos índices setoriais seria, em geral, maior do que os efeitos setoriais nos índices dos países, e a estratégia de investimento realizada com base na diversificação geográfica seria mais efetiva para a redução do risco do que a com base na diversificação setorial (Heston e Rouwenhorst, 1995). Estudos mais recentes tem mostrado evidências de aumento da importância relativa dos fatores setoriais em relação ao fator país. Para Cavaglia et al. (2000), podemos verificar o aumento relativo de importância dos fatores setoriais, tendo como suporte, a globalização crescente de receitas e operações das empresas e a proporção crescente do comércio intra-indústria. Espera-se que quanto mais segmentados os mercados, maior deve ser a influência do fator-país, ao passo que, em mercados de capitais mais integrados, os fatores setoriais devem ser mais importantes (Isakov e Sonney, 2004). Esse incremento da importância dos fatores setoriais, especialmente quando permitidos variar no tempo, têm justificado novos estudos sobre montagem de carteiras de investimentos.

Em nível doméstico, é interessante para os investidores conhecerem como se comporta o mercado acionário em nível setorial. Espera-se que seus investimentos tenham uma parcela considerável de ativos domésticos, de modo que a estratégia de diversificação intersetorial deva estar presente na composição da carteira. Nesse caso, a importância da dinâmica dos mercados financeiros internacionais ocorre devido à transmissão de volatilidade no mercado financeiro mundial, especialmente nos setores mais dependentes da economia estrangeira e, portanto, mais expostos às flutuações dos mercados internacionais.

Dessa forma, quando estamos interessados na volatilidade de várias séries financeiras conjuntamente, a modelagem multivariada da volatilidade mostra-se adequada para as aplicações financeiras. Em muitos casos, a estimação de covariâncias e correlações condi-

cionais é realizada através dos modelos GARCH multivariados (MGARCH). Um *survey* dos modelos MGARCH pode ser encontrado em Bauwens et al. (2006) e Silvennoinen e Teräsvirta (2009). Dentre os primeiros modelos MGARCH, os quais são generalizações diretas do GARCH univariado de Bollerslev (1986), estão o VEC de Bollerslev et al. (1988) e o BEKK de Engle e Kroner (1995). Esses modelos têm a característica de que o número de parâmetros aumenta rapidamente conforme aumentam o número de séries. Nas aplicações mais recentes, onde o foco tem sido sobre problemas de escala maior, eles se tornam inviáveis, levando a construções de abordagens alternativas com o objetivo de encontrar especificações mais parcimoniosas (Laurent et al., 2010). Nessa linha, a ideia dos chamados modelos de correlação condicional é estimar separadamente as variâncias e correlações condicionais, ao invés da matriz de covariância condicional. O primeiro modelo de correlação condicional é o CCC (*Constant Conditional Correlation*) de Bollerslev (1990), que assume a matriz de correlação condicional invariante no tempo. Apesar da modelagem atraente, a suposição de correlação condicional constante não parece ser realista em aplicações empíricas (Bauwens et al., 2006). A generalização para uma matriz de correlação condicional dinâmica foi, então, proposta por Engle (2002) e Tse e Tsui (2002) através do modelo DCC (*Dynamic Conditional Correlation*).

Considerando a variedade de modelos GARCH multivariados e os aspectos que envolvem composição de portfólio e diversificação de risco discutidos anteriormente, a avaliação de diferentes modelos em termos de previsão da volatilidade torna-se atraente. Nessa linha, Poon e Granger (2003) ao fazer uma revisão de 93 artigos sobre previsão de volatilidade, destacam que a comparação da *performance* entre modelos alternativos é um dos aspectos mais importantes de qualquer exercício de previsão. No caso multivariado, podemos dizer que a avaliação de modelos de volatilidade consiste na comparação e ordenamento de sequências de matrizes de variância (Laurent et al., 2009).

Para as aplicações empíricas, a diversidade de modelos disponíveis para a previsão da volatilidade condicional dificulta a escolha da modelagem mais adequada ao conjunto de dados. Colocando o foco sobre a *performance* preditiva, a seleção dos melhores modelos de previsão, dentre um conjunto de modelagens alternativas, é uma questão relevante na estimação econométrica. Na literatura recente, vários trabalhos têm sido desenvolvidos sobre a avaliação do desempenho relativo entre modelos de previsão da volatilidade, assim como, sobre o problema da robustez, também referido como consistência, presente na aplicação de critérios de comparação (ver, por exemplo, Hansen et al., 2003; Clements et al., 2009; Patton e Sheppard, 2009; Laurent et al., 2009; Laurent et al., 2010 e Patton, 2011).

O desenvolvimento de métodos capazes de promover a avaliação entre modelos inclui, por exemplo, o teste *Equal Predictive Ability* (EPA) de Diebold e Mariano (1995) e o *Superior Predictive Ability* (SPA) de Hansen (2005). Porém, tais métodos possuem algumas limitações, como comparação restrita a pares de modelos e avaliação relativamente a um

modelo *benchmark*, respectivamente. Com o intuito de superar as limitações do EPA e do SPA, Hansen et al. (2011) desenvolveram o *Model Confidence Set* (MCS). Uma vantagem de destaque no MCS é a possibilidade de efetuar comparações múltiplas, isto é, para um conjunto grande de modelos, sem a necessidade da definição de um modelo *benchmark*, como ocorre no SPA. No MCS é possível reduzir um conjunto de modelos para um conjunto menor - o *Model Confidence Set* - que contém o(s) melhor(es) modelo(s) dado um nível de significância (Hansen et al., 2011). O MCS é realizado através de uma sequência de testes de significância, onde a rejeição da hipótese nula implica na eliminação do modelo com pior *performance*.

Cabe destacar que a avaliação da previsão da volatilidade pode ser dividida em duas categorias (Patton e Sheppard, 2009). Na categoria dos métodos diretos, como a volatilidade é não observável, a avaliação da previsão requer o uso de uma *proxy* para a volatilidade e uma função perda estatística. Na categoria dos métodos indiretos, a comparação das previsões de volatilidade e covariâncias é realizada em aplicações com motivação econômica definida, por exemplo, otimização de portfólio. O presente trabalho insere-se na primeira categoria, sendo a *performance* da previsão da volatilidade avaliada através de funções perda estatísticas<sup>1</sup>. As questões que envolvem os efeitos do uso de diferentes *proxies* e a escolha da forma funcional da função perda sobre a seleção dos modelos são estudados por Patton (2011), no caso univariado, e por Patton e Sheppard (2009) e Laurent et al. (2009), no caso multivariado. Esses trabalhos têm em comum o fato de que atentam ao desenvolvimento de métodos robustos à presença de *proxies* de volatilidade imperfeitas. Patton (2011) deriva as condições necessárias e suficientes da função perda (univariada), para garantir um ordenamento consistente das previsões. Estendendo o estudo da avaliação e comparação de previsões de volatilidade para matrizes e vetores, Patton e Sheppard (2009), ao realizar uma análise teórica sobre as funções perda, concluem que o uso de funções não robustas pode afetar o *ranking* das previsões, mesmo quando são utilizadas *proxies* mais precisas para a volatilidade. De forma similar, Laurent et al. (2009) também estendem as condições de ordenamento consistente para o espaço matricial, definindo propriedades para a consistência de uma função perda estatística de modo a garantir o mesmo ordenamento, tanto se a avaliação é baseada na verdadeira matriz de covariâncias condicionais ou em uma *proxy* não viesada. Estes autores analisam a consistência das funções perda multivariadas utilizando um exemplo de simulação para o caso bivariado e uma aplicação empírica para três taxas de câmbio. Seguindo na mesma linha, o trabalho de Laurent et al. (2010) tem como foco exatamente a comparação de previsão entre modelos MGARCH de dimensão elevada. Os autores fazem previsões fora da amostra

---

<sup>1</sup> Para uma discussão sobre previsão de volatilidade multivariada utilizando funções perda econômicas ver, por exemplo, Clements et al. (2009), Patton e Sheppard (2009) e Engle e Colacito (2006).

para vários modelos MGARCH e os comparam usando os critérios SPA e MCS. Assim, a avaliação entre modelos alternativos de previsão de volatilidade contínua como um tópico de relevância na literatura econométrica.

### 3 Metodologia

Nesta seção, apresentamos as especificações dos modelos GARCH multivariados utilizados na aplicação empírica, assim como, as características das funções perdas robustas e o procedimento *Model Confidence Set*.

#### 3.1 Modelos GARCH multivariados

Considerando o vetor de retornos  $N$  dimensional,  $r_t$ , condicionado ao conjunto de informação passada  $I_{t-1}$ , podemos escrever

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (3.1)$$

$$\epsilon_t = H_{m,t}^{1/2} e_t, \quad (3.2)$$

onde  $\mu_t \equiv E_{t-1}(r_t)$  é o vetor da expectativa condicional de  $r_t$ ,  $\epsilon_t$  é o processo de erro,  $H_{m,t}^{1/2}$  é uma matriz positiva definida  $N \times N$ ,  $H_{m,t} = E(r_t r_t')$  a matriz de covariância condicional do modelo  $m$ ,  $E(e_t) = 0$  e  $Var(e_t) = I_N$ .

A equação (3.2) representa o modelo GARCH multivariado padrão. A especificação da evolução temporal da matriz  $H_t$  é o objetivo da modelagem multivariada (Tsay, 2005). Podemos dividir os modelos para a matriz de covariância condicional  $H_t$ , seguindo Bauwens et al. (2006), em 3 categorias: generalizações diretas do modelo GARCH univariado de Bollerslev (1986), combinações lineares dos modelos GARCH univariados e combinações não lineares dos modelos GARCH univariados.

Um modelo MGARCH bastante geral é o BEKK proposto por Engle e Kroner (1995), que define  $H_t$  de forma que seja garantida a restrição de positividade, conforme abaixo:

$$H_t = CC' + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K A'_{kj} r_{t-j} r'_{t-j} A_{kj} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K B'_{kj} H_{t-j} B_{kj}, \quad (3.3)$$

onde  $A_{kj}$ ,  $B_{kj}$ , e  $C$  são matrizes de parâmetros  $N \times N$  e  $C$  é triangular inferior. Nesse modelo, os parâmetros  $A_{kj}$  e  $B_{kj}$  não possuem uma interpretação direta e, também, quando  $N$  é grande, o modelo sofre de sobreparametrização. O modelo BEKK é uma versão restrita do modelo VEC.

Assumindo-se distribuição normal, a função de verossimilhança para a estimação dos parâmetros é representada por,

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \ln(2\pi) + \ln|H_t| + \epsilon_t' H_t^{-1} \epsilon_t \right) \quad (3.4)$$

onde  $\theta$  representa os parâmetros a serem estimados.

Já o modelo Scalar-BEKK (SBEKK) impõe a mesma dinâmica para todos os elementos da matriz de covariância condicional, com  $A = aI$  e  $B = bI$ , onde  $a$  e  $b$  são escalares. Podemos escrevê-lo como

$$H_t = CC' + a\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1} + bH_{t-1}. \quad (3.5)$$

Na especificação Diagonal-BEKK (DBEKK), as matrizes de parâmetros  $A$  e  $B$  são assumidas diagonais.

Entre os modelos considerados como combinações lineares dos modelos GARCH univariados, o modelo ortogonal (O-GARCH) de Alexander (2001), assume que a matriz de covariância condicional é gerada por  $m \leq N$  fatores,  $f_t$ , definidos como modelos GARCH univariados e onde  $m$  é o número de fatores<sup>2</sup>. O modelo assume que os dados observados poder ser representados por uma combinação linear de  $m$  fatores ortogonais não correlacionados. A matriz da transformação linear é uma matriz ortogonal de autovetores da matriz de covariâncias não condicionais dos retornos padronizados (Bauwens et al., 2006). A ideia é promover a redução da dimensionalidade do modelo transformando as séries de  $N$  para  $m$  dimensões, onde  $m$  são os fatores comuns capazes de conservar a maior parte da variabilidade das séries. Os fatores comuns ortogonais são escolhidos através da análise de componentes principais (PCA) calculados com base em uma matriz de retornos padronizados pelo desvio padrão não condicional.

O modelo O-GARCH é definido como

$$H_t = V^{1/2}V_tV^{1/2} \quad (3.6)$$

$$V_t = W_m\Sigma_tW'_m \quad (3.7)$$

$$V^{-1/2}\epsilon_t = u_t = W_mf_t \quad (3.8)$$

$$W_m = P_mL_m^{1/2}, \quad (3.9)$$

onde  $V = \text{diag}(v_1, \dots, v_N)$ , tal que  $v_i$  é a variância populacional de  $\epsilon_{i,t}$ ,  $L_m = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_m)$  onde  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$  é uma matriz  $m \times m$  dos  $m$  maiores autovalores da matriz de correlação populacional de  $u_t$ , e  $P_m$  é a matriz  $N \times m$  dos autovetores ortogonais associados. O vetor de fatores  $f_t = (f_{1t}, \dots, f_{mt})$  é um processo aleatório tal que  $E_{t-1}(f_t) = 0$  e  $\Sigma_t = \text{Var}_{t-1}(f_t) = \text{diag}(h_{f_{1,t}}^2, \dots, h_{f_{m,t}}^2)$ , onde  $h_{f_{i,t}}^2$  é a variância condicional do  $i$ -ésimo fator dada pela equação  $h_{f_{i,t}}^2 = (1 - \alpha_i - \beta_i) + \alpha_i f_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{f_{i,t-1}}^2$ , para  $i = 1, \dots, m$ . No

---

<sup>2</sup>Os modelos ortogonais podem ser considerados como modelos fatoriais, onde os fatores são modelos GARCH univariados (Bauwens et al., 2006).

caso em que  $m < N$ , isto é, o número de fatores é menor do que o de ativos, a matriz de covariância condicional é singular.

Na generalização do modelo O-GARCH proposta por Van der Weide (2002) (GO-GARCH), a condição de ortogonalidade é substituída pelo requerimento de que a matriz  $W_m$  é quadrada e inversível e que  $m = N$ . O modelo GO-GARCH é definido como em (3.6) a (3.8), com a especificidade de que  $m = N$  e onde a matriz  $W$  é dada por

$$W = PL^{1/2}U, \quad (3.10)$$

onde  $L = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$  sendo  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N > 0$  e  $\lambda$  os autovalores da matriz de correlação populacional de  $u_t$ ,  $P$  é a matriz  $N \times N$  dos autovetores associados e  $U$  é uma matriz ortogonal com  $\det(U) = 1$ . A matriz  $U$  pode ser representada como o produto de  $N(N-1)/2$  rotações de matrizes:

$$U = \prod_{i < j} R_{ij}(\theta_{ij}), \quad -\pi \leq \theta_{ij} \leq \pi, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (3.11)$$

onde  $R_{ij}(\theta_{ij})$  realiza a rotação do plano e  $\theta_{ij}$  são chamados de ângulos de Engle.

Em termos de estimação, a função de verossimilhança para o modelo GO-GARCH é dada por

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \ln(2\pi) + \ln|WW'| + \ln|\Sigma_t| + f_t' \Sigma_t^{-1} f_t \right). \quad (3.12)$$

O trabalho de Van der Weide (2002) fornece mais detalhes sobre a utilização do procedimento de estimação em dois passos, que tem por objetivo evitar problemas de convergência.

Na classe dos modelos vistos como combinações não lineares dos GARCH univariados, a matriz de covariância condicional é decomposta nas variâncias condicionais univariadas (especificadas como modelos GARCH) e na matriz de correlação condicional. No modelo Constant Conditional Correlation (CCC) de Bollerslev (1990),  $H_t$  é decomposta como

$$H_t = D_t R D_t, \quad (3.13)$$

onde  $D_t$  é a matriz diagonal dos desvios padrões condicionais e  $R$  é uma matriz de correlação constante.

Para o modelo CCC, a função de verossimilhança, assumindo normalidade, é dada por

$$\begin{aligned}
\ln L(\theta) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \ln(2\pi) + \ln|H_t| + \epsilon_t' H_t^{-1} \epsilon_t \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \ln(2\pi) + \ln|D_t R D_t| + \epsilon_t' (D_t R D_t)^{-1} \epsilon_t \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \ln(2\pi) + \ln|R| + 2\ln|D_t| + u_t' R_t^{-1} u_t \right),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde  $u_t = \epsilon_t / \sqrt{h_t}$ .

O modelo *Dynamic Conditional Correlation* (DCC), como proposto por Engle (2002) (DCCE), é dado por

$$H_t = D_t R_t D_t \tag{3.15}$$

$$D_t = \text{diag} \left( h_{11,t}^{1/2} \cdots h_{NN,t}^{1/2} \right) \tag{3.16}$$

$$R_t = \text{diag} \left( q_{11,t}^{-1/2} \cdots q_{NN,t}^{-1/2} \right) Q_t \text{diag} \left( q_{11,t}^{-1/2} \cdots q_{NN,t}^{-1/2} \right) \tag{3.17}$$

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) S + \alpha u_{t-1} u_{t-1}' + \beta Q_{t-1}, \tag{3.18}$$

onde  $h_{i,t}$  pode ser definido como a volatilidade em um modelo GARCH univariado. A matriz  $Q_t = (q_{ij,t})$  positiva definida simétrica  $N \times N$  é dada pela equação (3.18), sendo  $u_t = \epsilon_t / \sqrt{h_t}$  os resíduos padronizados.  $S$  é a matriz de variância não condicional  $N \times N$  de  $u_t$ , e  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros não negativos satisfazendo  $\alpha + \beta < 1$ .

A estimação dos parâmetros no modelo DCC ocorre através de um procedimento em dois passos (Engle, 2002). No primeiro passo são estimadas as variâncias condicionais, enquanto no segundo, são estimados os parâmetros da correlação condicional, utilizando os retornos padronizados obtidos a partir da primeira etapa. Considerando a equação (3.14), a função de verossimilhança para o modelo é

$$\begin{aligned}
\ln L(\theta) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \ln(2\pi) + \ln|R_t| + 2\ln|D_t| + z_t' R_t^{-1} z_t \right) \\
\ln L(\theta, \phi) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \ln(2\pi) + 2\ln|D_t|^2 + \epsilon_t' D_t^{-2} \epsilon_t \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \ln|R_t| + z_t' R_t^{-1} z_t - z_t' z_t \right) \\
\ln L(\theta, \phi) &= L_v(\theta) + L_c(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

sendo os parâmetros em  $D$  denotados por  $\theta$  e os parâmetros adicionais em  $R$  por  $\phi$ . De acordo com (3.19), a log-verossimilhança do modelo DCC pode ser escrita como a soma

do termo da volatilidade ( $L_v$ ) e o termo da correlação ( $L_c$ ).

O modelo *Dynamic Conditional Equi-Correlation* (DECO) de Engle e Kelly (2012) assume que as correlações são variantes no tempo mas iguais entre os  $N$  ativos, ou seja,  $R_{ij,t} = \rho_t \forall i \neq j$ . O procedimento de estimação em dois passos sugerido por Engle (2002) também é aplicado ao modelo DECO.

Na formulação do modelo DCC proposta por Tse e Tsui (2002) (DCCT), definido como em (3.15) e em (3.16), a correlação condicional  $R_t$  é especificada como

$$R_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) R + \theta_1 R_{t-1} + \theta_2 \Psi_{t-1}, \quad (3.20)$$

com  $\Psi_{t-1}$  a matriz de correlação  $N \times N$  de  $\varepsilon_\tau$  para  $\tau = t - M, t - M + 1, \dots, t - 1$  e sendo  $M \geq N$  a condição necessária para  $\Psi_{t-1}$  ser positiva. O  $i, j$ -ésimo elemento dessa matriz é dado por:

$$\Psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^M u_{i,t-m} u_{j,t-m}}{\sqrt{\left( \sum_{m=1}^M u_{i,t-m}^2 \right) \left( \sum_{m=1}^M u_{j,t-m}^2 \right)}}, \quad (3.21)$$

onde  $u_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$ . Neste modelo, a correlação condicional é a soma ponderada das correlações passadas.

A função de verossimilhança deste modelo, ignorando o termo constante, é dada por

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \ln |D_t R_t D_t| - \varepsilon_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} \varepsilon_t \right). \quad (3.22)$$

Dessa forma, os modelos de correlação condicional tem o apelo prático de conseguir lidar com dados multivariados de dimensão elevada, tendo como característica a estimação em dois passos. Primeiro a escolha de um modelo univariado da família GARCH para cada variância condicional e, em segundo lugar, baseado nas variâncias condicionais, a modelagem da matriz de correlação condicional.

Na aplicação empírica deste trabalho utilizamos 34 especificações para a matriz de covariância condicional. Os modelos MGARCH utilizados são o SBEEK, DBEEK, CCC, DCCE, DCCT, DECO e GO-GARCH. Em particular, são utilizadas duas especificações diferentes do GARCH univariado para a modelagem da equação de variância condicional nos modelos CCC e DCC: GARCH (Bollerslev, 1986), GJR (Glosten et al., 1993), IGARCH (Engle e Bollerslev, 1986). As principais características de cada modelo univariado são bem resumidas por Laurent et al. (2009). No modelo GJR, o impacto do quadrado das inovações sobre a variância condicional é diferente quando as inovações são positivas ou negativas. Por fim, o IGARCH impõe a soma dos parâmetros ARCH e GARCH igual a um. Nos modelos DCCE, DCCT e DECO, a variância condicional é estimada para as combinações de defasagens  $p = 1$  e  $2$  e  $q = 1$  e  $2$ . Para os outros modelos, a estima-

ção ocorre com uma defasagem tanto para os retornos passados como para as próprias variâncias condicionais defasadas.

### 3.1.1 Problema da dimensionalidade

Um dos desafios da modelagem multivariada de séries temporais é a estimação dos parâmetros em razão do problema conhecido como “*curse of dimensionality*”, ou seja, o rápido crescimento do número de parâmetros conforme aumentam o número de séries. Particularmente no caso dos modelos GARCH multivariados, ainda é necessário assegurar que a matriz de volatilidade seja positiva semi-definida. Podemos argumentar que o desenvolvimento dessa metodologia ocorre, justamente, com o objetivo de incorporar as características da volatilidade em modelos mais parcimoniosos, bem como, garantir que as restrições de positividade da matriz de volatilidade sejam satisfeitas. A quantidade de parâmetros a ser estimada no primeiro dos modelos MGARCH, o VEC, ilustra o problema do “*curse of dimensionality*”. Para  $p = q = 1$ , o número de parâmetros a ser estimado é  $N(N+1)(N(N+1)+1)/2$ . Por exemplo, para  $N = 2$ ,  $N = 3$  e  $N = 4$ , isso representa, respectivamente, a estimação de 21, 78 e 210 parâmetros, limitando a aplicação empírica à um número reduzido de séries. Em termos de comparação, se as variâncias condicionais são especificadas como GARCH(1,1), então, os modelos DCCE e DCCT terão  $(N+1)(N+4)/2$  parâmetros (Bauwens et al., 2006). Usando o mesmo exemplo anterior obteríamos, respectivamente, 9, 14 e 20 parâmetros, fazendo com que a estimação seja possível mesmo para  $N$  grande.

## 3.2 Funções perda

A análise da *performance* de previsão da volatilidade entre modelos alternativos é comumente realizada através de uma função perda, a qual mede a distância entre a observação prevista e a observada. Em termos de comparação, o modelo de previsão que apresenta o menor valor para a função perda  $L_t$  é escolhido como o melhor.

No caso da avaliação da *performance* preditiva de modelos de volatilidade através de critérios que utilizam funções perda, devemos atentar ao fato de que a variável de interesse, a covariância condicional, é não observável. Assim, é necessária a utilização de uma *proxy*, pois a volatilidade é latente. Como destacado na seção 2, alguns trabalhos recentes, como Patton e Sheppard (2009) e Patton (2011), têm discutido os efeitos das *proxies* de volatilidade sobre a avaliação e comparação de modelos de previsão da volatilidade.

Patton (2011) argumenta que a utilização de uma *proxy* para a volatilidade, bem como, a presença de ruído nessa *proxy* pode conduzir à seleção de um modelo de previsão equivocado ou distorções no ordenamento de modelos alternativos dependendo da escolha da função perda. As *proxies* de volatilidade univariada frequentemente utilizadas são o

retorno ao quadrado e a volatilidade realizada<sup>3</sup>, enquanto para a covariância são o produto cruzado dos retornos,  $r_t r_t'$ , e a covariância realizada (Patton e Sheppard, 2009). Patton (2011) coloca que, na modelagem da previsão de volatilidade, o retorno ao quadrado de um ativo com média zero no período  $t$  é um estimador condicionalmente não viesado da verdadeira variância condicional não observável. Apesar dessa característica, o uso de uma *proxy* condicionalmente não viesada não garante a obtenção do mesmo resultado como se fosse utilizada a verdadeira variável. Analisando nove funções perda<sup>4</sup>, Patton (2011) conclui que somente MSE e QLIKE geram  $h_t^* = E_{t-1}[\hat{\sigma}_t^2] = \sigma_t^2$ , isto é, a condição necessária para a função perda ser robusta à ruídos na *proxy* de volatilidade<sup>5</sup>.

As condições para a qual a função perda produz um *ranking* consistente<sup>6</sup> são analisadas de forma detalhada no trabalho de Laurent et al. (2009). Seguindo estes autores, para  $N$  séries temporais no tempo  $t$ , denotamos por  $R_{++}^{N \times N}$  o espaço  $N \times N$  das matrizes positivas definidas e  $\dot{H} \subset R_{++}^{N \times N}$  um conjunto compacto de  $R_{++}^{N \times N}$ .  $\dot{H}$  representa o conjunto de modelos indexados por  $i$ , tal que  $H_{i,t} \in \dot{H}$ .  $L(\cdot, \cdot)$  é, então, uma função perda integrável, onde  $R_{++}^{N \times N} \times \dot{H} \rightarrow R_+$  tal que a função perda com respeito ao modelo  $i$  avaliada usando  $\hat{\Sigma}_t$  (uma *proxy* para a verdadeira matriz de variância condicional,  $\Sigma_t$ ) é definida como

$$L_t = L(\hat{\Sigma}_t, H_{i,t}). \quad (3.23)$$

De acordo com Laurent et al. (2009), as seguintes suposições garantem que a função perda promove um ordenamento correto em relação à verdadeira matriz de covariâncias.

1.  $L(\cdot, \cdot)$  é contínua em  $\dot{H}$  e é unicamente minimizada em  $H_t^*$  que representa a previsão ótima. Se  $H_t^* \in \text{int}(\dot{H})$ ,  $L(\cdot, \cdot)$  é convexa em  $\dot{H}$ .
2.  $L(\cdot, \cdot)$  é tal que a previsão ótima iguala a verdadeira variância condicional  $\Sigma_t$ ,

$$H_t^* = \arg \min L(\Sigma_t, H_t) \Leftrightarrow H_t^* = \Sigma_t. \quad (3.24)$$

3.  $L(\Sigma_t, H_t) = 0 \Leftrightarrow H_t = \Sigma_t$ , isto é, o valor da função perda é zero quando  $H_t^* = \Sigma_t$ .

---

<sup>3</sup>O *survey* elaborado por McAleer e Medeiros (2008) permite motivar a aplicação da abordagem de volatilidade realizada (RV). Suponha que em um dado dia  $t$ , os logaritmos dos preços são observados *tick-by-tick*. Seja  $p_{t,i}$ ,  $i = 1, \dots, n_t$ , a  $i$ -ésima observação do preço durante o dia  $t$ , onde  $n_t$  é o número total de observações no dia  $t$  e  $r_{t,i} = p_{t,i} - p_{t,i-1}$  é o  $i$ -ésimo retorno intradiário no dia  $t$ , tal que  $r_t = \sum_{i=0}^{n_t} r_{t,i}$ . A variância realizada é, então, definida como a soma de todos os retornos ao quadrado intradiários dados por  $RV_t = \sum_{i=0}^{n_t} r_{t,i}^2$ . Para o caso multivariado e supondo que os retornos intradiários são não correlacionados, podemos definir a covariância realizada (RCov) como  $RCov = \sum_{i=0}^{n_t} r_{t,i} r_{t,i}'$ . Além da especificação em tempo discreto, a literatura propõe outros estimadores com base em tempo contínuo.

<sup>4</sup>MSE, QLIKE, MSE-LOG, MSE-SD, MSE-prop, MAE, MAE-LOG, MAE-SD e MAE-prop.

<sup>5</sup>Utilizamos, neste trabalho, o conceito de robustez e consistência como sinônimos.

<sup>6</sup>Laurent et al. (2009) consideram a consistência com respeito a precisão da *proxy* dada uma função perda, ou seja, consistência entre o *ranking* verdadeiro e o aproximado.

Definição 1 (Laurent et al., 2009, p.6). Sob as suposições 1 a 3, a função perda é bem definida.

Definição 2 (Laurent et al., 2009, p.6). Consistência entre o *ranking* verdadeiro e o ordenamento baseado em uma *proxy* é alcançado se

$$E(L(\Sigma_t, H_{l,t})) \geq E(L(\Sigma_t, H_{i,t})) \Leftrightarrow E(L(\hat{\Sigma}_t, H_{l,t})) \geq E(L(\hat{\Sigma}_t, H_{i,t})) \quad (3.25)$$

é válida para todo  $l \neq i$ , onde  $L(\cdot, \cdot)$  é uma função perda bem definida no sentido da Definição 1 e  $\hat{\Sigma}_t$  é alguma *proxy* condicionalmente não viesada de  $\Sigma_t$ .

Laurent et al. (2009) ressaltam que pela Definição 2, o ordenamento entre dois modelos quaisquer é consistente se permanece inalterado quer seja baseado na verdadeira matriz de covariância quer em uma *proxy* condicionalmente não viesada. A condição da *proxy* ser não viesada é suficiente para garantir consistência do ordenamento (para mais detalhes ver Laurent et al., 2009). Seguindo Patton e Sheppard (2009), Patton (2011) e Laurent et al. (2009) empregamos as funções perda MSE e QLIKE na implementação do MCS.

Podemos especificar o MSE como<sup>7</sup>

$$MSE_t = tr \left[ (\hat{\Sigma}_t - H_t)' (\hat{\Sigma}_t - H_t) \right]. \quad (3.26)$$

Seguindo a especificação apresentada por Doolan (2011) e Caporin e McAleer (2012), a função QLIKE é dada por

$$QLIKE_t = \ln|H_t| + r_t' H_t^{-1} r_t, \quad (3.27)$$

onde  $r_t$  é um vetor  $N \times 1$  de retornos com média zero. De acordo com Doolan (2011), esta especificação difere da apresentada por Patton e Sheppard (2009), pois utilizamos o produto do vetor de retornos,  $r_t r_t'$ , como *proxy* para a matriz de covariância,  $\hat{\Sigma}_t$ . Caporin e McAleer (2012) ressaltam que esta especificação da função perda não depende de uma *proxy* de volatilidade e, então, não está sujeita ao erro de estimação da verdadeira e desconhecida volatilidade, ficando as diferenças nas perdas devidas exclusivamente a diferenças entre os modelos de covariância.

Pelo fato da função MSE ser mais sensível às previsões ruins e QLIKE mais sensível às previsões mais precisas, esperamos que ambas produzam resultados diferentes em relação à qualidade de previsões diferentes (Doolan, 2011).

---

<sup>7</sup>A equação 3.26 é a equivalente matricial da função perda MSE.

### 3.3 Model Confidence Set

O procedimento *Model Confidence Set* (MCS), introduzido por Hansen et al. (2011), permite comparar vários modelos simultaneamente em termos de habilidade preditiva. Diferentemente do *Superior Predictive Ability*, não há a necessidade de especificar um modelo *benchmark* no MCS, pois as alternativas concorrentes são avaliadas para a identificação dos modelos superiores aos demais de forma conjunta. O procedimento MCS é implementado através de métodos de *bootstrap*<sup>8</sup>, onde a estatística de teste é construída a partir da estatística  $t$ . A vantagem do *bootstrap* é que ele contorna a necessidade de um estimador explícito para uma matriz de covariância de dimensão elevada (Hansen et al., 2003).

Os modelos são indexados por  $i = 1, \dots, m$  e denotamos  $M^0 = \{1, \dots, m\}$  como o conjunto dos modelos para os quais fazemos a previsão um passo a frente da covariância condicional. O MCS permite identificar um subconjunto de modelos,  $M^*$ , os quais são superiores, em termos de habilidade preditiva, com respeito a todos os outros modelos em  $M^0$  (Laurent et al., 2010). O objetivo do MCS é, portanto, determinar  $M^*$ , o conjunto que contém o(s) melhor(es) modelo(s) dado um certo nível de confiança (Hansen et al., 2011). Tal procedimento é baseado em um teste de equivalência ( $\delta_M$ ) e em uma regra de eliminação ( $e_M$ ). A cada passo, o teste de equivalência é aplicado, primeiramente, assumindo-se como hipótese nula que todos os modelos em  $M^0$  são iguais em termos de habilidade preditiva. Se essa hipótese é rejeitada, a regra de eliminação remove o modelo com pior *performance*. Esse processo é repetido até que no subconjunto de modelos restante, o teste de equivalência não seja rejeitado. Portanto, o conjunto de modelos “sobreviventes” é o *Model Confidence Set*<sup>9</sup>.

Formalmente, os objetos em  $M^0$  são avaliados através da determinação de uma função perda  $L_{i,t} = L(\hat{\Sigma}_t, H_{i,t})$ , onde  $H_{i,t}$  são as previsões da covariância condicional um passo a frente e  $\bar{L} \equiv n^{-1} \sum_{t=1}^n L_{i,t}$  para  $i = 1, \dots, m$  é a média amostral do vetor de perda das previsões. A *performance* relativa entre os modelos  $i$  e  $j$  é dada por  $d_{i,j,t} = L_{i,t} - L_{j,t}$  para todo  $i \neq j \in M^0$  e o conjunto de modelos superiores é dado por  $M^* \equiv \{i \in M^0 : E(d_{i,j,t}) \leq 0 \quad \forall j \in M^0\}$ .

A hipótese nula de igual habilidade preditiva é dada por:

$$H_{0,M^0} : E(d_{i,j,t}) = 0, \quad \forall i, j \in M^0 \quad (3.28)$$

a qual é testada via  $\delta_M$  a um nível  $\alpha$ . Caso  $H_{0,M^0}$  seja rejeitada,  $e_M$  é usada para eliminar o modelo com função perda maior. Para testar esta hipótese nula, precisamos definir, adicionalmente,  $\bar{d}_{i,j} \equiv n^{-1} \sum_{t=1}^n d_{i,j,t}$ , como a perda amostral relativa entre os modelos  $i$  e  $j$ ,

<sup>8</sup>Para a descrição do bootstrap ver apêndice B.

<sup>9</sup>Para as propriedades do MCS ver Hansen et al. (2011).

e  $\bar{d}_i \equiv m^{-1} \sum_{j \in M^0} \bar{d}_{ij}$  como a perda amostral do modelo  $i$  relativamente a todos os modelos, também, representada por  $\bar{d}_i = \bar{L}_i - \bar{L} = \bar{L}_i - m^{-1} \sum_{j \in M^0} \bar{L}_j = m^{-1} \sum_{j \in M^0} (\bar{L}_i - \bar{L}_j)$ . Estas medidas são necessárias para obter estimativas de  $var(\bar{d}_{ij})$  e  $var(\bar{d}_i)$  através do *bootstrap* (Doolan, 2011).

As estatísticas para o teste da hipótese nula seguem as propostas por Hansen et al. (2003). São elas: *range statistics* ( $T_R$ ) e *semi-quadratic statistics* ( $T_{SQ}$ ), dadas, respectivamente, por  $T_R = \max \frac{|\bar{d}_{ij}|}{\sqrt{\hat{var}(\bar{d}_{ij})}}$  e  $T_{SQ} = \sum \frac{(\bar{d}_{ij})^2}{\hat{var}(\bar{d}_{ij})}$ , onde  $\hat{var}(\bar{d}_{ij})$  é uma estimativa *bootstrap* de  $var(\bar{d}_{ij})$ . A regra de eliminação, por sua vez, elimina o modelo com maior perda amostral em relação a todos os modelos.

No MCS há, também, o chamado p-valor MCS ( $\hat{p}^{MCS}$ ), que possui uma interpretação similar ao p-valor clássico. O p-valor MCS é definido por  $\hat{p}^{MCS} = \max_{i \leq j} p_{H_{0,M_i}}$ , onde  $p_{H_{0,M_i}}$  é p-valor da estatística de teste associada com a hipótese nula  $H_{0,M_i}$ . A interpretação do p-valor MCS é a de que um modelo com um p-valor pequeno é improvável de ser um membro de  $M^*$ , isto é, do conjunto de modelos superiores (Hansen et al., 2011). Se o  $\hat{p}^{MCS} < \alpha$  a hipótese nula de igual habilidade preditiva é rejeitada e o procedimento remove o pior modelo de  $M^0$ . Para identificar este modelo, Hansen et al. (2003) definem a perda padronizada do modelo  $i$  em relação aos outros modelos em  $M^0$  como  $v_{i,M^0} = \bar{d}_i / \sqrt{\hat{var}(\bar{d}_i)}$ . O modelo com pior performance é identificado por  $i^\dagger = \arg \max_{i \in M^0} v_{i,M^0}$  e, então, é removido de  $M^0$ . O procedimento é repetido até que a hipótese nula não seja rejeitada, de forma que os modelos remanescentes constituem o MCS.

A escolha das funções perdas utilizadas neste trabalho para a construção do MCS são apresentadas na seção 3.2.

## 4 Aplicação empírica

A aplicação empírica deste trabalho é baseada em sete retornos de índices, sendo dois índices de mercado, *Standard & Poor's 500* (S&P500) e Ibovespa, e cinco índices setoriais da BM&FBovespa, quais sejam, Índice de Telecomunicações (ITEL), Índice de Energia Elétrica (IEE), Índice Financeiro (IFNC), Índice de Consumo (ICON) e Índice do Setor Industrial (INDX)<sup>10</sup>. Dentre o conjunto de índices de ações do mercado brasileiro disponibilizado pela BM&FBovespa, os índices setoriais refletem o desempenho de um conjunto de ações referentes a um segmento específico da economia ao longo do tempo<sup>11</sup>.

A amostra de dados compreende o período 04/01/2007 a 06/10/2011, com um total de 1152 observações. Foi realizada a equivalência das datas entre as séries, restando apenas as observações comuns entre elas. Como realizado por Laurent et al. (2010), as médias não condicionais foram subtraídas de cada série de retornos<sup>12</sup> antes da estimação dos modelos MGARCH<sup>13</sup>. As estimações foram realizadas para as primeiras 1092 observações, enquanto as 60 observações restantes são usadas para as previsões um passo a frente. Os parâmetros estimados através dos modelos são utilizados para gerar a primeira previsão um passo a frente para fora da amostra. A medida que as observações fora da amostra vão se realizando, os parâmetros são reestimados. Isso significa que a informação até o tempo  $T$  é usada para prever a covariância condicional em  $T + 1$ . Então, a informação em  $T + 1$  é assimilada à amostra e os parâmetros do modelos são reestimados e usados para prever a matriz de covariância para  $T + 2$  e, assim por diante, até o final da amostra de previsão.

Como o objetivo deste trabalho é comparar diferentes especificações de modelos em termos de habilidade preditiva, necessitamos do valor observado da variável, no caso a volatilidade, para proceder a avaliação comparativamente à previsão gerada por cada modelo. Como apontado anteriormente, a volatilidade é uma variável latente, ou seja, não observável e, por isso, necessitamos do uso de uma *proxy*. Neste trabalho, usamos o produto cruzado dos retornos como *proxy* da covolatilidade usada para avaliar os modelos de previsão. Com o intuito de diminuir os efeitos adversos do uso de uma *proxy* imperfeita, realizamos a implementação do MCS com as funções perdas robustas descritas na seção 3.2. O MCS é estimado através de *bootstrap* em bloco com 10.000 replicações, onde a

<sup>10</sup>Os gráficos das séries encontram-se no anexo 1.

<sup>11</sup>Na literatura, a análise setorial está ligada à abordagem de investimento *top-down*. Isso porque, em tal estratégia, a escolha dos investimentos é realizada do plano macro para o microeconômico, de tal forma que são identificados os setores que oferecem as melhores perspectivas e, posteriormente, as ações setoriais mais relevantes.

<sup>12</sup>Definimos o retorno de um índice como  $r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1})$ , onde  $p_t$  é valor do índice no tempo  $t$ .

<sup>13</sup>As estimações foram realizadas com o software OxMetrics 6 e *toolbox* MFE para Matlab disponibilizado por Kevin Sheppard.

estimação para os dados provenientes da aplicação da função perda MSE é realizada com *bootstrap* de tamanho 1 e para as perdas geradas através da função QLIKE com tamanho 5.

Em todos os modelos adotamos a distribuição Normal, isso se faz necessário para a estimação em dois passos dos modelos de correlação condicional, CCC e DCC, pois, ao contrário da distribuição *t* de student, permite a decomposição da verossimilhança em variâncias e correlações condicionais. Além disso, a estimação é realizada por Quasi-Máxima Verossimilhança (QML).

Analisamos os resultados do MCS para diferentes níveis de significância, sendo  $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,10; 0,25\}$ , assim como realizado por Hansen et al. (2003) em exercícios de simulação. O aumento do nível de confiança resulta em intervalos de amplitude cada vez maiores e testes com poderes cada vez menores.

## 4.1 Resultados

Esta seção apresenta os resultados da aplicação empírica do procedimento *Model Confidence Set* para avaliação da previsão de volatilidade multivariada entre diferentes modelos MGARCH, com o uso das funções perda MSE e QLIKE e para as estatísticas *range statistic*(RS) e *semi-quadratic statistic*(SQ). É importante notar que os resultados em termos do MCS são específicos para o período amostral e para o conjunto de modelos analisados (Laurent et al., 2010). Vale salientar, também, que os modelos incluídos no MCS são assumidos como tendo igual habilidade preditiva, ou seja,  $E(d_{ij,t}) = 0, \forall i, j$  em  $M^*$ .

A tabela 1 apresenta os resultados do MCS para a função perda QLIKE (MCS-QLIKE) aplicada à seleção dos modelos. O p-valor é obtido através da implementação do *bootstrap* em bloco e para cada uma das estatística indica o nível de significância para que o modelo seja excluído do MCS. No caso da *range statistic*, a análise do p-valor aos níveis de significância de  $\alpha = 0,01$  e  $\alpha = 0,05$ , mostra que todas as especificações DECO, além do modelo CCC-IGARCH (para  $\alpha = 0,05$ ) não estão incluídas no MCS. Quando aumentamos o nível de significância para  $\alpha = 0,25$ , o intervalo do MCS-QLIKE diminui consideravelmente, contendo 11 modelos e eliminando todas as especificações CCC e DECO. Mesmo para os diferentes níveis de significância, há uma preferência pelas duas especificações de modelos GO-GARCH, particularmente, com a variância condicional definida como o modelo GJR. Os modelos que pertencem a esse intervalo, de forma geral, têm a característica de assumir efeitos assimétricos de notícias positivas e negativas sobre a volatilidade, como o modelo GJR.

Para a *semi-quadratic statistic* os resultados apontam para uma maior dificuldade na diferenciação entre os modelos. Para  $\alpha \leq 0,10$ , o intervalo do MCS elimina todos os modelos DECO. A escolha de um nível de significância entre  $0,10 < \alpha \leq 0,25$ , afeta somente a presença do modelo CCC-IGARCH(1,1) no MCS.

De forma mais geral, podemos concluir que para o o MCS-QLIKE, o subconjunto dado pelos modelos DCCE e DCCT, com especificação GJR para as variâncias, Scalar e Diagonal BEKK e o modelo fatorial GO-GARCH apresentam uma *performance* superior. Independentemente da escolha do modelo de variância condicional, as especificações DECO e CCC são superadas por todos os outros modelos.

Tabela 1: *Model Confidence Set* - QLIKE. Modelos estimados e os respectivos  $\hat{p}^{MCS}$ .

<i>Range Statistic</i>		<i>Semi-Quadratic Statistic</i>	
DECO Igarch (1,1)	0	DECO Igarch (1,1)	0
DECO Garch (2,2)	0	DECO Garch (2,2)	0
DECO Garch (1,1)	0	DECO Garch (1,1)	0
DECO Garch (1,2)	0	DECO Garch (1,2)	0
DECO Garch (2,1)	0	DECO Garch (2,1)	0
DECO Gjr (1,1)	0	DECO Gjr (1,1)	0
DECO Gjr (2,1)	0	DECO Gjr (2,1)	0
DECO Gjr (1,2)	0	DECO Gjr (1,2)	0,01
DECO Gjr (2,2)	0	DECO Gjr (2,2)	0,02
CCC Igarch (1,1)	0,02	CCC Igarch (1,1)	0,20
DCCT Garch (2,2)	0,10	DCCT Garch (2,2)	0,26
CCC Garch (1,1)	0,10	CCC Garch (1,1)	0,29
DCCE Garch (2,2)	0,10	DCCE Garch (2,2)	0,30
DCCT Garch (1,2)	0,16	DCCT Garch (1,2)	0,37
DCCT Garch (2,1)	0,16	DCCT Garch (2,1)	0,37
DCCT Igarch (1,1)	0,16	DCCT Igarch (1,1)	0,37
DCCT Gjr (2,2)	0,16	DCCT Gjr (2,2)	0,37
DCCE Garch (1,2)	0,16	DCCE Garch (1,2)	0,38
CCC Gjr (1,1)	0,16	CCC Gjr (1,1)	0,38
DCCE Garch (2,1)	0,16	DCCE Garch (2,1)	0,47
DCCT Garch (1,1)	0,16	DCCT Garch (1,1)	0,47
DCCE Gjr (2,2)	0,16	DCCE Gjr (2,2)	0,47
DCCE Igarch (1,1)	0,16	DCCE Igarch (1,1)	0,47
DCCT Gjr (1,2)	0,37	DCCT Gjr (1,2)	0,48
DCCT Gjr (1,1)	0,48	DCCT Gjr (1,1)	0,56
DCCE Garch (1,1)	0,48	DCCE Garch (1,1)	0,62
DCCT Gjr (2,1)	0,48	DCCT Gjr (2,1)	0,62
DCCE Gjr (1,2)	0,77	DCCE Gjr (1,2)	0,71
DCCE Gjr (2,1)	0,78	DCCE Gjr (2,1)	0,76
SBEKK Garch (1,1)	0,78	SBEKK Garch (1,1)	0,76
DCCE Gjr (1,1)	0,78	DCCE Gjr (1,1)	0,76
DBEKK Garch (1,1)	0,78	DBEKK Garch (1,1)	0,76
GO-GARCH Garch (1,1)	0,78	GO-GARCH Garch (1,1)	0,76
GO-GARCH Gjr (1,1)	1	GO-GARCH Gjr (1,1)	1

Na tabela 2 determinamos o MCS com o uso da função perda MSE (MCS-MSE). Para

todos os níveis de significância  $\alpha \leq 0,10$ , no contexto da *range statistic*, nenhum modelo foi excluído do MCS-MSE. Isto é, todos são considerados estatisticamente equivalentes, dado o valor de  $\alpha$ . A exceção encontra-se para  $\alpha \geq 0,25$ . Para esse nível de significância, o procedimento MCS resultou na escolha de apenas dois modelos, DCCT-GJR (2,2) e CCC-GJR (1,1). Para um período amostral com algumas turbulências, a inclusão do modelo de correlação constante (CCC) pode causar alguma surpresa. Laurent et al. (2010), ao encontrarem a não rejeição de algumas especificações CCC em sua análise empírica, argumentam que a modelagem adequada da variância condicional dos retornos, por exemplo pelo modelo GJR, pode ter sido capaz de compensar a perda na habilidade preditiva induzida pela suposição de correlação constante. Quando usamos a *semi-quadratic statistic*, para os todos os níveis de significância considerados, não há rejeição da hipótese nula e, portanto, a totalidade dos modelos foi considerada como tendo igual habilidade preditiva ou, dito de outra forma, todos os modelos são estatisticamente equivalentes com respeito à função MSE. Em um resultado semelhante, Caporin e McAleer (2012), encontram que todos os modelos MGARCH estimados para o período de crise (2008-2009) são equivalentes quando utilizada a função MSE e o produto dos retornos como *proxy*.

Quando comparamos as duas funções perda utilizadas, os resultados obtidos são bastante diversos em termos da preferência entre os modelos. Apesar disso, a aplicação do MCS para MSE e QLIKE é consistente com os encontrados por Patton e Sheppard (2009), e tende a corroborar que a função QLIKE é mais efetiva do que o MSE para avaliar e selecionar os modelos de previsão. A função QLIKE, na medida em que é menos sensível a grandes observações por penalizar mais fortemente previsões ruins, mostra-se adequada para se obter ordenamentos de modelos na presença de *proxies* de volatilidade imperfeitas. A precisão da *proxy* da volatilidade tem um papel importante na aplicação do MCS. Como salientado por Laurent et al. (2009), se a precisão da *proxy* deteriora, a função perda se torna menos informativa e torna-se mais difícil identificar modelos superiores. Portanto, dado o nível de confiança, o número de modelos igualmente bons aumenta, pois é mais difícil discriminá-los. De acordo com Audrino e Hu (2011), o p-valor MCS obtido com o uso da *semi-quadratic statistic* é menos conservador do que o obtido pela *range statistic*. Isso nos diz que o conjunto de modelos pertencentes ao MCS usando a *semi-quadratic statistic* é, portanto, maior do que o obtido através da *range statistic*.

Tabela 2: *Model Confidence Set* - MSE. Modelos estimados e os respectivos  $\hat{p}^{MCS}$ .

<i>Range Statistic</i>		<i>Semi-Quadratic Statistic</i>	
DECO Igarch (1,1)	0,13	DECO Igarch (1,1)	0,56
DECO Garch (2,1)	0,13	DECO Garch (2,1)	0,58
DECO Garch (2,2)	0,13	DECO Garch (2,2)	0,58
DECO Garch (1,2)	0,13	DECO Garch (1,2)	0,58
DCCE Igarch (1,1)	0,13	DCCE Igarch (1,1)	0,60
DCCE Garch (2,2)	0,13	DCCE Garch (2,2)	0,62
DCCE Garch (2,1)	0,13	DCCE Garch (2,1)	0,62
DCCE Garch (1,2)	0,13	DCCE Garch (1,2)	0,62
DCCT Garch (2,2)	0,13	DCCT Garch (2,2)	0,62
DCCT Igarch (1,1)	0,13	DCCT Igarch (1,1)	0,62
DECO Garch (1,1)	0,13	DECO Garch (1,1)	0,62
CCC Igarch (1,1)	0,13	CCC Igarch (1,1)	0,62
DCCT Garch (2,1)	0,13	DCCT Garch (2,1)	0,62
DCCT Garch (1,2)	0,13	DCCT Garch (1,2)	0,62
GO-GARCH Garch (1,1)	0,13	GO-GARCH Garch (1,1)	0,62
DCCE Garch (1,1)	0,13	DCCE Garch (1,1)	0,62
SBEKK Garch (1,1)	0,13	SBEKK Garch (1,1)	0,62
DECO Gjr (1,2)	0,13	DECO Gjr (1,2)	0,62
DECO Gjr (2,1)	0,13	DECO Gjr (2,1)	0,62
DCCT Garch (1,1)	0,13	DCCT Garch (1,1)	0,62
DCCE Gjr (1,2)	0,13	DCCE Gjr (1,2)	0,62
GO-GARCH Gjr (1,1)	0,21	GO-GARCH Gjr (1,1)	0,63
DCCE Gjr (2,1)	0,21	DCCE Gjr (2,1)	0,63
DBEKK Garch (1,1)	0,21	DBEKK Garch (1,1)	0,63
DCCT Gjr (2,1)	0,21	DCCT Gjr (2,1)	0,63
DCCT Gjr (1,2)	0,21	DCCT Gjr (1,2)	0,63
DECO Gjr (2,2)	0,21	DECO Gjr (2,2)	0,63
CCC Garch (1,1)	0,21	CCC Garch (1,1)	0,63
DECO Gjr (1,1)	0,21	DECO Gjr (1,1)	0,63
DCCE Gjr (1,1)	0,21	DCCE Gjr (1,1)	0,63
DCCE Gjr (2,2)	0,21	DCCE Gjr (2,2)	0,63
DCCT Gjr (1,1)	0,21	DCCT Gjr (1,1)	0,63
DCCT Gjr (2,2)	0,76	DCCT Gjr (2,2)	0,76
CCC Gjr (1,1)	1	CCC Gjr (1,1)	1

## 5 Considerações finais

A utilização do *Model Confidence Set (MCS)* introduzido por Hansen et al. (2011) para seleção de modelos alternativos em termos de sua habilidade preditiva tem recebido bastante atenção no período recente. A grande variedade de especificações econométricas disponíveis para modelagem dos retornos e da matriz de covariância condicional conduz, inevitavelmente, a pergunta de qual modelo pode ser considerado melhor em relação aos demais. O MCS é capaz de indicar se as *performances* de previsão são significativamente diferentes entre especificações alternativas de modelos. O conjunto de modelos incluídos no MCS apresenta igual habilidade preditiva, dado um nível de confiança. Uma das vantagens do MCS é o abandono da necessidade do uso de um modelo *benchmark* nas avaliações e a possibilidade da comparação múltipla.

Como a literatura de modelos GARCH multivariados é extensa, selecionamos os modelos comumente utilizados para a previsão da matriz de covariância condicional. Utilizamos, ainda, a classe de funções perda robustas como definido em Patton e Sheppard (2009) e Patton (2011). Essa metodologia mostra-se adequada pois a volatilidade é não observável e a utilização de uma *proxy* pode conduzir à seleção equivocada de modelos. Como utilizamos o produto cruzado dos retornos como *proxy* para a volatilidade e, sendo essa uma *proxy* uma medida de volatilidade imperfeita, essa classe de funções mostra-se útil. Com a utilização de uma função perda consistente, procuramos diminuir o viés sobre o ordenamento dos modelos e evitar uma identificação incorreta do conjunto de modelos superiores. Notamos ainda que a escolha de um modelo assumido como sendo o melhor deve ser realizada de acordo com o período analisado, estando condicionada, portanto, à amostra de dados. Nesta dissertação, estimamos os diferentes modelos GARCH multivariados disponíveis e procedemos à previsão da matriz de covariância condicional para fora da amostra. A aplicação empírica ocorre entre cinco séries de retornos setoriais disponibilizados pela Bolsa de Valores de São Paulo, além do próprio índice IBOVESPA e um índice externo (*Standard & Poor's 500*).

Em linha com a literatura apresentada, encontramos que os resultados estão sujeitos a escolha da função perda. Enquanto a função perda MSE produz um MCS relativamente grande, a função assimétrica QLIKE identifica um conjunto menor de modelos. Considerando que o período analisado neste trabalho foi de turbulência nos mercados financeiros, a previsão da covariância pode ter tido sua *performance* deteriorada. Apesar da avaliação direta através da função perda MSE ter mostrado-se pouco informativa, a função QLIKE foi capaz de assinalar a preferência por alguns modelos, entre eles, os de correlação condicional dinâmica (DCC) com especificações de assimetria (GJR), escalar e diagonal BEKK e GO-GARCH. Finalmente, as especificações de correlação condicional dinâmica mostram *performances* superiores tanto sobre os modelos de correlação constante como, também,

sobre os de correlações iguais entre as séries. A presença dos modelos DBEKK e SBEKK para o MCS implementado com a função QLIKE, pode indicar que a estimação conjunta da matriz de covariância condicional é preferida à estimação separada das variâncias e correlações, como nos modelos CCC e DCC. Os resultados sugerem, ainda, que os modelos que lidam com algum tipo de assimetria são capazes de captar as características dos dados, sendo selecionados entre os modelos superiores.

Uma extensão de pesquisa para este trabalho é a utilização dos métodos de covariância realizada com o intuito de obter estimativas mais precisas para a *proxy* da covolatilidade entre as séries e verificar em que sentido tal escolha afeta o conjunto de modelos do MCS.

## Referências

- ALEXANDER, C. Orthogonal garch. *Mastering risk*, 2:21–38, 2001.
- AUDRINO, F., E HU, Y. Volatility forecasting: Downside risk, jumps and leverage effect. Economics Working Paper Series 1138, University of St. Gallen, School of Economics and Political Science, September 2011.
- BAELE, L., E INGHELBRECHT, K. Time-varying integration, interdependence and contagion. *Journal of International Money and Finance*, 29(5):791–818, 2010.
- BAUWENS, L., LAURENT, S., E ROMBOUTS, J. Multivariate garch models: a survey. *Journal of applied econometrics*, 21(1):79–109, 2006.
- BEKAERT, G., E HARVEY, C. Emerging equity market volatility. Technical report, National Bureau of Economic Research, 1997.
- BEKAERT, G., HARVEY, C., E NG, A. Market integration and contagion. *Journal of Business*, 78(1):39–69, 2005.
- BEKAERT, G., HODRICK, R., E ZHANG, X. International stock return comovements. *The Journal of Finance*, 64(6):2591–2626, 2009.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327, 1986.
- BOLLERSLEV, T. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch model. *The Review of Economics and Statistics*, 72(3):498–505, 1990.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R., E WOOLDRIDGE, J. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1):116–31, 1988.
- BRACKER, K., E KOCH, P. Economic determinants of the correlation structure across international equity markets. *Journal of Economics and Business*, 51(6):443–472, 1999.
- CAPORIN, M., E MCALEER, M. Robust ranking multivariate garch models by problem dimension. Working paper, University of Canterbury, 2012.
- CAVAGLIA, S., BRIGHTMAN, C., E AKED, M. The increasing importance of industry factors. *Financial Analysts Journal*, 56:41–54, 2000.
- CLEMENTS, A., DOOLAN, M., HURN, S., E BECKER, R. Evaluating multivariate volatility forecasts. NCER Working Paper Series 41, National Centre for Econometric Research, 2009.

- DIEBOLD, F., E MARIANO, R. Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3):253–63, 1995.
- DOOLAN, M. *Evaluating multivariate volatility forecasts: how effective are statistical and economic loss functions?* PhD, The School of Economics and Finance – Queensland University of Technology (QUT), 2011.
- ENGLE, R. Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business and Economic statistics*, 20(3):339–350, 2002.
- ENGLE, R., E COLACITO, R. Testing and valuing dynamic correlations for asset allocation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 24(2):238–253, 2006.
- ENGLE, R., E BOLLERSLEV, T. Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric reviews*, 5(1):1–50, 1986.
- ENGLE, R., E KRONER, K. Multivariate simultaneous generalized arch. *Econometric theory*, 11(01):122–150, 1995.
- ENGLE, R., E KELLY, B. Dynamic equicorrelation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 30(2):212–228, 2012.
- GLOSTEN, L., JAGANNATHAN, R., E RUNKLE, D. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48(5):1779–1801, 1993.
- HANSEN, P. A test for superior predictive ability. *Journal of Business and Economic Statistics*, 23(4):365–380, 2005.
- HANSEN, P., LUNDE, A., E NASON, J. Choosing the best volatility models: The model confidence set approach. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 65:839–861, 2003.
- HANSEN, P., LUNDE, A., E NASON, J. Model confidence set for forecasting models. Working Paper 7, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper, 2005.
- HANSEN, P., LUNDE, A., E NASON, J. The model confidence set. *Econometrica*, 79(2):453–497, 2011.
- HESTON, S., E ROUWENHORST, K. Does industrial structure explain the benefits of international diversification? *Journal of Financial Economics*, 36(1):3–27, 1994.
- HESTON, S., E ROUWENHORST, K. Industry and country effects in international stock returns. *The Journal of Portfolio Management*, 21(3):53–58, 1995.

- ISAKOV, D., E SONNEY, F. Are practitioners right? on the relative importance of industrial factors in international stock returns. *Swiss Journal of Economics and Statistics (SJES)*, 140(III):355–379, 2004.
- LAURENT, S., ROMBOUTS, J., E VIOLANTE, F. On the forecasting accuracy of multivariate garch models. *Cahier de recherche/Working Paper*, 10:21, 2010.
- LAURENT, S., ROMBOUTS, J. V., E VIOLANTE, F. On loss functions and ranking forecasting performances of multivariate volatility models. Cirano working papers, CIRANO, 2009.
- MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- MCALEER, M., E MEDEIROS, M. Realized volatility: A review. *Econometric Reviews*, 27(1-3):10–45, 2008.
- PATTON, A. Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, 160(1):246–256, 2011.
- PATTON, A., E SHEPPARD, K. *Evaluating volatility and correlation forecasts*. Springer, 2009.
- POON, S., E GRANGER, C. Forecasting volatility in financial markets: A review. *Journal of Economic Literature*, 41(2):478–539, 2003.
- REY, D. Time-varying stock market correlations and correlation breakdown. *Schweizerische Gesellschaft für Finanzmarktforschung*, 4:387–412, 2000.
- SILVENNOINEN, A., E TERÄSVIRTA, T. *Multivariate GARCH models*. Springer, 2009.
- TSAY, R. *Analysis of financial time series*, volume 543. Wiley-Interscience, 2005.
- TSE, Y., E TSUI, A. A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business and economic statistics*, 20(3):351–362, 2002.
- VAN DER WEIDE, R. Go-garch: a multivariate generalized orthogonal garch model. *Journal of Applied Econometrics*, 17(5):549–564, 2002.

## A Apêndice - Séries de retorno dos índices

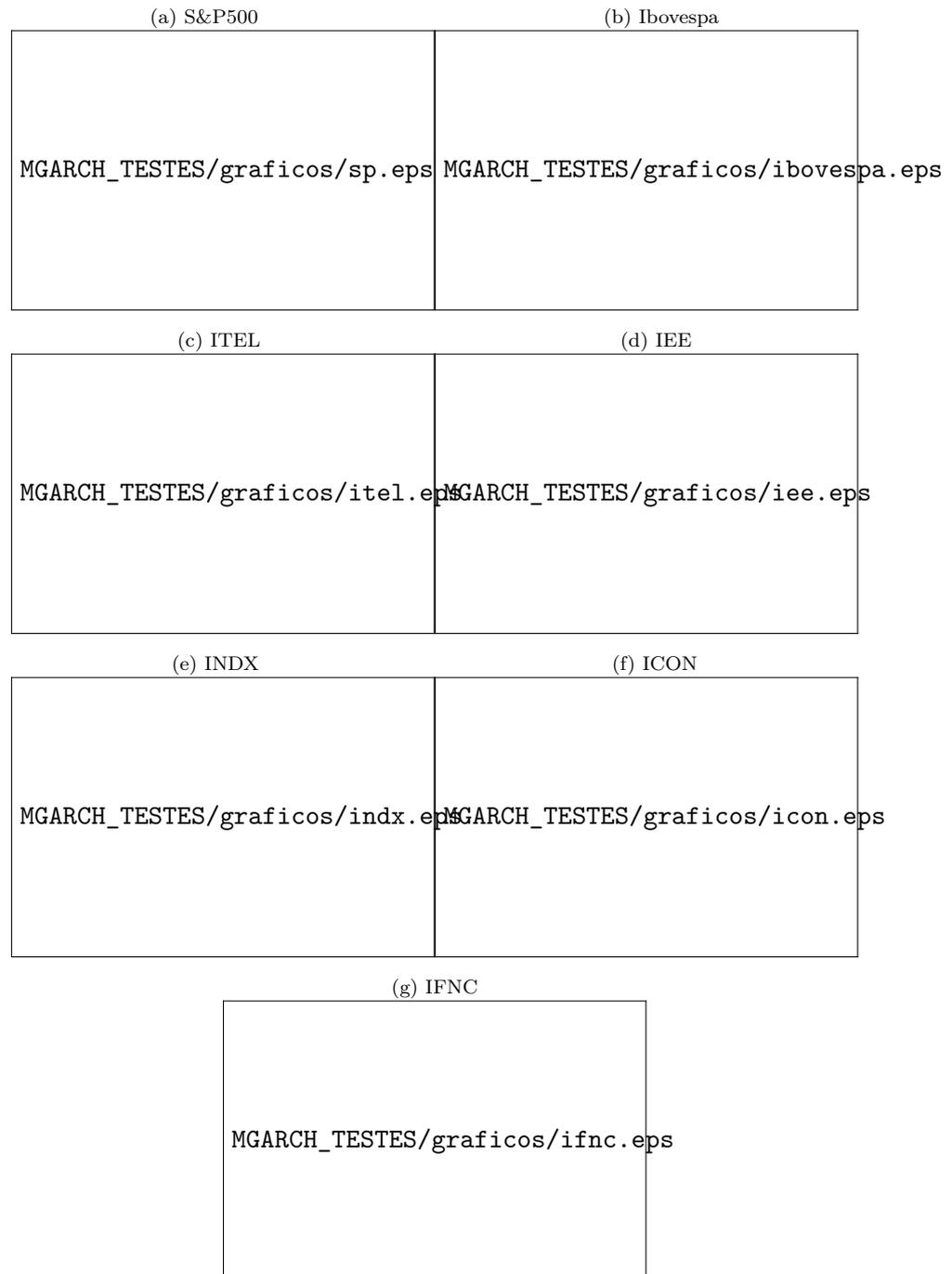


Figura 1: Séries de retornos dos índices.

## B Apêndice - Bootstrap

Esta seção descreve a implementação do bootstrap do MCS, de acordo com Hansen et al. (2005).

1. A primeira etapa do bootstrap consiste na geração das reamostragens e dos índices de bootstrap.

(a) Escolher o tamanho do bloco do bootstrap ( $l$ ), através da persistência presente em  $d_{i,t} = m^{-1} \sum_{j \in M_0} d_{ij,t}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

(b) Gerar  $B$  reamostragens de bootstrap de  $\{1, \dots, n\}$  e para  $b = 1, \dots, B$ .

i. Escolher  $\xi_{b1} \sim U\{1, \dots, n\}$  e formar  $(\tau_{b,1}, \dots, \tau_{b,l}) = (\xi_{b1}, \xi_{b1} + 1, \dots, \xi_{b1} + l - 1)$ , com a convenção  $n + i = i$  para  $i \geq 1$ .

ii. Escolher  $\xi_{b2} \sim U\{1, \dots, n\}$  e formar  $(\tau_{b,l+1}, \dots, \tau_{b,2l}) = (\xi_{b2}, \xi_{b2} + 1, \dots, \xi_{b2} + l - 1)$

iii. Continuar até a construção da amostra de tamanho  $n$ , sendo repetido para  $b = 1, \dots, B$ .

2. Estatísticas amostrais e Bootstrap

(a) Para cada moldeo queremos obter as variáveis  $L_{i,t}$ , para  $i = 1, \dots, m$  e  $t = 1, \dots, n$ . Estas variáveis são usadas para calcular as médias amostrais para cada modelo  $\bar{L}_{i,\cdot} \equiv \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L_{i,t}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

(b) As variáveis do bootstrap são dadas por  $L_{b,i,t}^* = L_{i,\tau_{b,t}}$ , para  $b = 1, \dots, B$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $t = 1, \dots, n$  e as médias amostrais do bootstrap por  $\bar{L}_{b,i}^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n L_{b,i,t}^*$ . As variáveis que precisam ser armazenadas são  $\bar{L}_i$  e  $\xi_{b,i}^* = \bar{L}_{b,i}^* - \bar{L}_i$ , a partir das quais todas as estatísticas podem ser calculadas.

3. Teste sequencial

Sendo  $M = M_0$ , temos:

(a) Seja  $m$  o número de elementos em  $M$  e  $\widehat{var}(\bar{d}_i)$  a estimativa bootstrap de  $var(\bar{d}_i)$ , temos as variáveis

$$\bar{L}_i \equiv \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{L}_i, \quad \xi_{b,\cdot}^* \equiv \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_{b,i}^*, \quad e \quad \widehat{var}(\bar{d}_i) \equiv \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\xi_{b,i}^* - \xi_{b,\cdot}^*)^2.$$

Definimos, ainda,  $t_i \equiv \frac{\bar{d}_i}{\sqrt{\widehat{var}(\bar{d}_i)}}$  e a estatística de teste  $T_{max} = \max_i t_i$ .

(b) A estimativa bootstrap da distribuição de  $T_D$  é dada pela distribuição empírica de

$$T_{b,max}^* = \max_i t_{b,i}^*.$$

para  $b = 1, \dots, B$ , onde  $t_{b,i}^* \equiv \frac{(\xi_{b,i}^* - \xi_{b,\cdot}^*)}{\sqrt{\widehat{var}(\bar{d}_i)}}$ .

(c) O p-valor de  $H_{0,M}$  é dado por  $P_{H_{0,M}} \equiv \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B l_{\{T_{max} > T_{b,max}^*\}}$ , onde  $l_{\{\cdot\}}$  é a função indicadora.

(d) Se  $P_{H_{0,M}} < \alpha$ , onde  $\alpha$  é o nível de significância, então  $H_{0,M}$  é rejeitada e  $i^\dagger \equiv \arg \max_i t_i$  é o modelo eliminado de  $M$ .

(e) Repete-se os passos 3. (a)-(d) até a aceitação da hipótese nula.