

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Sobre o espectro de frequências do modelo  
de Timoshenko para uma viga bi-apoiada**

por

Daniela de Rosso Tolfo

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen  
Orientador

Porto Alegre, 9 de janeiro de 2013.

**CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO**

de Rosso Tolfo, Daniela

Sobre o espectro de frequências do modelo de Timoshenko para uma viga bi-apoiada / Daniela de Rosso Tolfo.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2013.

72 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2013.

Orientador: Ruiz Claeysen, Julio César

Dissertação: Matemática Aplicada

Modelo de Timoshenko, espectros de frequência, autovalores, autofunções, modos de vibração, resposta matricial fundamental, vigas bi-apoiadas.

# Sobre o espectro de frequências do modelo de Timoshenko para uma viga bi-apoiada

por

Daniela de Rosso Tolfo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle, Sistemas e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Banca examinadora:

Profa. Dra. Rosemaira Dalcin Copetti  
Departamento de Matemática/UFSM

Prof. Dr. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky  
PIPCA/Unisinos

Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho  
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em  
9 de janeiro de 2013.

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale  
Coordenadora

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Antônio e Adélia agradeço pelo apoio incondicional durante toda minha vida, pela confiança e pelo respeito as minhas limitações. Obrigada por tudo que me ensinam, os valores que me passaram principalmente de respeito. Ao Marcos pela paciência e incentivo as minhas decisões, e por estar ao meu lado em todos os momentos.

Ao Professor Julio Claeysen pela dedicação, paciência, ensinamentos, e incentivo durante o desenvolvimento desse trabalho, bem como acesso a seus trabalhos de pesquisa.

À Professora Rosemaira Dalcin Copetti por ter me iniciado na área e seus ensinamentos.

À minha colega Leticia Tonetto pelo apoio e auxílio durante os estudos de pós-graduação.

A UFRGS, PPGMap, CAPES e CNPq pela oportunidade e disponibilização de recursos financeiros.

## Sumário

<b>AGRADECIMENTOS</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 MODELO DE TIMOSHENKO</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>2.1 Formulação Algébrica</b> . . . . .	<b>6</b>
2.1.1 Equação característica . . . . .	8
<b>2.2 Formulação adimensional</b> . . . . .	<b>9</b>
2.2.1 Adimensionalização para efeitos assintóticos . . . . .	10
2.2.2 Adimensionalização no estudo das amplitudes espaciais . . . . .	12
<b>3 O PROBLEMA DE AUTOVALOR NO MODELO DE TIMOSHENKO</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>3.1 Base de Euler</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>3.2 Bases matriciais</b> . . . . .	<b>20</b>
3.2.1 Base Fundamental . . . . .	21
3.2.1.1 Base Normalizada . . . . .	23
3.2.1.2 Fórmula analítica para $\mathbf{h}(x)$ . . . . .	24
3.2.1.3 Representação espectral de $\mathbf{h}(x)$ . . . . .	26
<b>3.3 Relação entre base de Euler e base fundamental</b> . . . . .	<b>27</b>

<b>4</b>	<b>EQUAÇÃO MODAL PARA O MODELO DE TIMOSHENKO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO . . . . .</b>	<b>30</b>
4.1	Viga apoiada-apoiada . . . . .	33
4.2	Propriedades das Frequências e Modos . . . . .	35
4.3	Natureza das raízes $\epsilon$ e $\delta$ . . . . .	38
4.3.1	Equação característica em termos da base de Euler . . . . .	40
<b>5</b>	<b>ESPECTROS DE FREQUÊNCIAS DO MODELO DE TIMO- SHENKO . . . . .</b>	<b>41</b>
5.1	Propriedades das frequências $\omega_1^2(n)$ e $\omega_2^2(n)$ . . . . .	42
<b>6</b>	<b>MODOS DE VIBRAÇÃO DA VIGA APOIADA-APOIADA . .</b>	<b>47</b>
6.1	Autovalores Duplos e Simples . . . . .	48
6.2	Modos de vibração associados a autovalores simples . . . . .	54
6.3	Modos de vibração associados a autovalores duplos . . . . .	58
6.3.1	Modos para a frequência crítica dupla . . . . .	61
<b>7</b>	<b>SIMULAÇÕES . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>69</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>70</b>

## Lista de Figuras

Figura 6.1	Plano $\varepsilon - \delta$ . . . . .	51
Figura 6.2	Espectros de frequências . . . . .	54
Figura 7.1	Viga apoiada-apoiada . . . . .	64
Figura 7.2	Componentes de $\mathbf{w}(x)$ , normalizado, para $\omega_1(1)$ e $\omega_2(1)$ . . . . .	66
Figura 7.3	Componentes de $\mathbf{w}(x)$ , normalizado, para $\omega_1(2)$ e $\omega_2(2)$ . . . . .	66
Figura 7.4	Componentes de $\mathbf{w}(x)$ , normalizado, para $\omega_1(17)$ e $\omega_2(17)$ . . . . .	67
Figura 7.5	Componentes dos modos de vibração $\mathbf{w}(x)$ , normalizados, associados às frequências $\omega_1(16)$ e $\omega_2(3)$ . . . . .	68

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Condições de contorno clássicas para a viga de Timoshenko . . .	5
Tabela 7.1	Parâmetros para viga apoiada-apoiada [18] . . . . .	64
Tabela 7.2	Frequências naturais do primeiro e segundo espectros . . . . .	65



## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Parâmetro $\kappa GA$
$A$	Área da seção transversal
$b$	Parâmetro $EI$
$c$	Parâmetro $\rho A$
$d(x)$	Solução fundamental escalar
$e$	Parâmetro $\rho I$
$E$	Módulo de Young
$f(t, x)$	Força transversal distribuída
$g^2(\gamma)$	Parâmetro $-\left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right) \gamma^2$
$g(t, x)$	Momento
$G$	Módulo de cisalhamento
$\mathbf{h}(x)$	Solução matricial fundamental
$I$	Momento de inércia
$L$	Comprimento da viga
$r^4(\gamma)$	Parâmetro $-c\gamma^2 \left(\frac{e\gamma^2+a}{ab}\right)$
$u(t, x)$	Deslocamento transversal
$\mathbf{v}(t, x)$	Vetor deslocamento e giro
$\mathbf{v}_j$	Autovetor
$\mathbf{w}(x)$	Amplitude espacial - modo de vibração

$w$	Vetor constante
$\text{adj}(L)$	Matriz adjugada da matriz $L$
$\gamma$	Autovalor
$\delta$	Raiz da equação característica
$\Delta$	Equação característica
$\epsilon$	Raiz da equação característica
$\kappa$	Coefficiente de cisalhamento
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidade
$\psi(t, x)$	Giro da seção transversal
$\omega$	Frequência natural
$\omega_1(n)$	$n$ -ésima frequência natural do primeiro espectro
$\omega_2(n)$	$n$ -ésima frequência natural do segundo espectro
$\omega_c$	Frequência crítica ( $\omega_c^2 = \frac{a}{e}$ )

## RESUMO

É realizado um estudo sobre o problema do segundo espectro de frequências no modelo de Timoshenko para uma viga bi-apoiada. A equação característica, associada às condições de contorno bi-apoiada, permite determinar dois autovalores que dependem de um inteiro  $n$  não negativo, sendo que o de menor módulo está associado ao valor predito pela teoria de Euler-Bernoulli, e o de maior módulo é usualmente referido como sendo do segundo espectro. Este último espectro foi salientado por Traill-Nash e Collar (1953) e desconsiderado por Timoshenko, que utilizou funções trigonométricas que satisfazem as condições de contorno para obter os modos de vibração. Neste trabalho, o modelo de Timoshenko é formulado matricialmente e permite que o estudo dos autovalores e autofunções seja realizado com o uso de uma base da equação modal matricial de segunda ordem completa, gerada por uma solução matricial fundamental. Devido a uma representação analítica desta solução fundamental, o estudo é realizado com o uso da solução de um problema de valor inicial escalar, cujo comportamento torna-se completamente oscilatório acima de um valor crítico. São obtidos resultados que permitem classificar os autovalores como simples e duplos, em ambos os espectros, e determinar seus correspondentes modos. Observa-se que autovalores que correspondem a dois inteiros diferentes e localizados em espectros distintos, porém relativamente próximos, estão associados a modos de vibração descritos por funções trigonométricas que apresentam número de nós bastante diferente.

## ABSTRACT

A study about the problem of the second spectrum of frequencies that arises in the Timoshenko model for a bi-supported beam is accomplished . The characteristic equation associated with the bi-supported boundary conditions allows to determine two eigenvalues that depend of a non-negative integer  $n$ , being that the eigenvalue with smaller module is associated to the value predicted by theory of Euler-Bernoulli, and the one with greater module is usually referred as belonging to the second spectrum. This latter spectrum was emphasized by Traill-Nash and Collar (1953) but disregarded by Timoshenko who used trigonometric functions that satisfy the boundary conditions in order to obtain the vibration modes. In this work the model of Timoshenko is formulated in matrix terms and allows that the study of the eigenvalues and eigenfunctions be performed using a basis of a complete second order matrix modal equation, generated by a fundamental matrix solution. Due to an analytical representation of this fundamental solution, the study is done with the solution of a scalar initial value problem, whose behavior becomes completely oscillatory above a critical value. Results are obtained in such a way that allow to classify the eigenvalues as simple and double in both spectra and to determine their corresponding modes. It is observed that eigenvalues that correspond to different integers and localized on distinct spectra, but relatively close together, are associated with vibration modes described by trigonometric functions which have quite different number of nodes.

# 1 INTRODUÇÃO

Vibrações transversais de vigas desempenham papel central na elastodinâmica devido a sua importância no estudo de vários problemas em áreas tais como aeronáutica, automobilística, geodinâmica, nanomecânica, ultrassom, microscopia de força atômica, entre outros. Teorias de vigas como as de Euler-Bernoulli (EBT), Rayleigh, Vlasov e Timoshenko (TBT) têm sido utilizadas para modelar as vibrações transversais de vigas, e a derivação de suas equações é apresentada em [14].

A teoria de Euler-Bernoulli assume que as seções transversais, que são perpendiculares ao eixo neutral antes da flexão, permanecem planas e perpendiculares ao eixo neutral deformado, e assim não há tensão de cisalhamento em seus planos, efeitos de inércia rotatória também são desconsiderados. Esta teoria possui restrições quanto a sua eficiência na aproximação da resposta para vigas não delgadas, e para altas frequências. No que se refere ao estudo de propagação de ondas, EBT prevê velocidades de fase irrealis para pequenos comprimentos de onda [11].

A teoria de Timoshenko [24] inclui os efeitos da deformação por cisalhamento e inércia rotatória à teoria de Euler Bernoulli. Considerando que as seções planas permanecem planas, mas não perpendiculares ao eixo neutral.

Traill-Nash e Collar [25] apresentam um estudo detalhado a respeito da teoria de Timoshenko, onde identificam que para altas frequências, acima de uma frequência crítica, existe a possibilidade de um segundo espectro de frequências naturais para vigas bi-apoiadas, sendo este um novo espectro de frequências. Este espectro não foi considerado por Timoshenko, uma vez que seu interesse original era melhorar a teoria de Euler-Bernoulli. Desde então, trabalhos como [1], [17], [22], [23], [2] discutem a existência e validade deste "novo" espectro de frequências.

Segundo Levinson e Cooke [17], de um ponto de vista geral, é apropriado falar de um único espectro de frequências para a viga apoiada-apoiada, uma vez que todas as frequências geram um conjunto completo de autofunções para a expansão modal de um movimento arbitrário. No entanto, os termos "primeiro" e "segundo" espectros são utilizados na literatura, [1], [17], [22], [23], [2].

Deve ser salientado, que existem posições diferentes de autores em relação ao segundo espectro. Stephen [22], [23] diz que o segundo espectro deve ser desconsiderado. Em [23] re-examina um exemplo numérico, dado em [17], utilizando a teoria elastodinâmica de placas, e conclui que as predições do segundo espectro não estão consistentemente de acordo com qualquer modo de vibração simples. Mostra também que a energia de Ostrogradski é positiva para o primeiro espectro e negativa para o segundo, e diz que em alguns ramos da física isto seria suficiente para classificar o segundo espectro como não-físico. Por outro lado, Bhaskar [2] afirma que o segundo espectro não deve ser desconsiderado, por ser o resultado de uma perturbação singular associada com a relação de dispersão da equação de Timoshenko adimensionalizada.

Rensburg e Merwe [26] classificam os autovalores em dois diferentes tipos, tipo 1 e tipo 2, sem mencionar os termos primeiro e segundo espectros, e obtêm resultados quanto à multiplicidade dos autovalores, simples e duplos, substituindo no modelo de Timoshenko o que seria um modo escrito na forma trigonométrica, que já satisfaz as condições de viga bi-apoiada.

Este trabalho tem como propósito apresentar um estudo sobre as frequências e autofunções do primeiro e segundo espectros de uma viga bi-apoiada, obtendo-se critérios para caracterizar a multiplicidade geométrica dos autovalores, e obter todas as possíveis autofunções de maneira explícita, identificando a sua natureza oscilatória. Para isto, o modelo de Timoshenko é formulado matricialmente com o propósito de que o estudo dos autovalores e das autofunções seja realizado com o uso de uma base da equação modal matricial de segunda ordem completa, gerada

por uma solução matricial fundamental. Devido a uma representação analítica desta solução fundamental, o estudo é realizado com o uso da solução de um problema de valor inicial escalar, cujo comportamento torna-se completamente oscilatório acima de um valor crítico. São obtidos resultados que permitem classificar os autovalores como simples e duplos em ambos os espectros e determinar seus correspondentes modos. Observa-se que autovalores que correspondem a dois valores inteiros diferentes e localizados em espectros distintos, porém relativamente próximos, estão associados a modos de vibração descritos por funções trigonométricas que apresentam número de nós bastante diferente.

A dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 2 são apresentadas as equações do modelo de Timoshenko para vigas, formuladas algébrica e adimensionalmente. No capítulo 3, é introduzido o problema de autovalor, escrito na forma de uma equação diferencial matricial, e sua solução é dada em termos da base de Euler e da base matricial fundamental. No capítulo 4, é tratado o problema de autovalor sujeito a condições de contorno, são apresentadas propriedades das frequências para a viga apoiada-apoiada, e discutida a natureza das raízes da equação característica. No capítulo 5, é definido o segundo espectro de frequências e são obtidas propriedades para suas frequências. No capítulo 6, são apresentados resultados para a classificação dos autovalores como simples e duplos e seus modos de vibração tanto no primeiro como no segundo espectro. No capítulo 7, são utilizados parâmetros fornecidos na literatura para obter as frequências de cada um dos espectros e seus respectivos modos de vibração. Finalmente, no capítulo 8 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

## 2 MODELO DE TIMOSHENKO

As equações que governam o movimento de uma viga uniforme segundo a Teoria de Timoshenko, com carga transversal distribuída  $f(t, x)$  e momento  $g(t, x)$ , são [21]

$$\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right) = f(t, x), \quad (2.1)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa G A \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = g(t, x), \quad (2.2)$$

sendo  $u(t, x)$  a deflexão transversal,  $\psi(t, x)$  o giro da seção transversal devido à flexão,  $\rho$  a densidade,  $A$  a área da seção transversal,  $I$  o momento de inércia da seção transversal,  $E$  o módulo de elasticidade,  $G$  o módulo de cisalhamento, e  $\kappa$  o coeficiente de cisalhamento que depende da forma da seção transversal. O módulo de cisalhamento para materiais homogêneos e isotrópicos é dado pela expressão  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ ,  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

No caso de uma viga de comprimento finito, condições de contorno são impostas em suas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ . Na literatura [13], as condições de contorno são referidas como clássicas e não-clássicas. Na Tabela 2.1 são listadas as condições de contorno clássicas para o modelo de Timoshenko.



Extremidade Apoiada	$u = 0, \quad EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$
Extremidade Fixa	$u = 0, \quad \psi = 0$
Extremidade Livre	$EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \kappa GA \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) = 0$
Extremidade Deslizante	$\psi = 0, \quad \kappa GA \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) = 0$

Tabela 2.1: Condições de contorno clássicas para a viga de Timoshenko

O sistema de equações em (2.1) e (2.2) pode ser escrito na forma de um sistema matricial de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (2.3)$$

sendo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & -EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \end{bmatrix} = \mathbb{M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbb{C} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

com

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

## 2.1 Formulação Algébrica

Usualmente o modelo de Timoshenko é apresentado na forma desacoplada [15], [21], como duas equações diferenciais de quarta ordem. Estas equações podem ser obtidas utilizando a identidade de Cramer, como segue.

Escrevendo as equações (2.1) e (2.2) na forma

$$\mathbf{L}\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F} \quad (2.7)$$

sendo

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Dada a matriz  $\mathbf{L}$ , define-se  $\text{adj}(\mathbf{L})$  como sendo a transposta da matriz dos cofatores de  $\mathbf{L}$ , denominada matriz adjugada do operador  $\mathbf{L}$ . A matriz  $\text{adj}(\mathbf{L})$  tem a seguinte propriedade

$$\text{adj}(\mathbf{L})\mathbf{L} = \mathbf{L}\text{adj}(\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L})\mathbf{I} \quad (2.9)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade de ordem  $2 \times 2$ .

Segue de (2.8)

$$\text{adj}(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA & -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

e

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{L}) &= \left( \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \right) \left( \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \left( \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \\ &= \rho^2 AI \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \rho A \left( \kappa GA - (EI + \kappa GI) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \kappa GA EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Utilizando a propriedade (2.9) em (2.7)

$$\begin{aligned}\text{adj}(\mathbf{L}) \mathbf{L} \mathbf{v}(t, x) &= \text{adj}(\mathbf{L}) \mathbf{F}, \\ \det(\mathbf{L}) \mathbf{I} \mathbf{v}(t, x) &= \text{adj}(\mathbf{L}) \mathbf{F},\end{aligned}\tag{2.12}$$

desta igualdade resultam as equações de quarta ordem não homogêneas, desacopladas com respeito a  $u(t, x)$  e  $\psi(t, x)$ ,

$$\begin{aligned}\rho^2 AI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} + \rho A \left( \kappa GA - (EI + \kappa GI) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \\ \kappa GA EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = F_1,\end{aligned}\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\rho^2 AI \frac{\partial^4 \psi(t, x)}{\partial t^4} + \rho A \left( \kappa GA - (EI + \kappa GI) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} + \\ \kappa GA EI \frac{\partial^4 \psi(t, x)}{\partial x^4} = F_2,\end{aligned}\tag{2.14}$$

sendo

$$F_1 = \rho I \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} + \kappa GA f(t, x) - \kappa GA \frac{\partial g(t, x)}{\partial x},\tag{2.15}$$

$$F_2 = \kappa GA \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2}.\tag{2.16}$$

Observa-se que o lado esquerdo das equações (2.13) e (2.14) são da mesma forma. Entretanto, o desacoplamento do modelo traz modificações aos termos não-homogêneos. Os termos  $F_1$  e  $F_2$ , nas equações de Timoshenko para o deslocamento (2.13) e para o giro (2.14), envolvem derivadas da força  $f(t, x)$  e do momento  $g(t, x)$ , enquanto que para o modelo acoplado isto não acontece.

Em [21], as equações (2.13) e (2.14) são obtidas derivando as equações (2.1) e (2.2) em relação a  $x$ , e realizando sobre elas algumas manipulações algébricas, a fim de eliminar  $u(t, x)$  ou  $\psi(t, x)$ .

Assim, o desacoplamento (2.13)–(2.14) tem motivado o estudo da equação de quarta ordem no tempo e no espaço

$$\begin{aligned} \rho^2 AI \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial t^4} + \rho A \left( \kappa GA - (EI + \kappa GI) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} + \\ \kappa GA EI \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial x^4} = r(t, x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $y = u$  ou  $y = \psi$  com  $r = F_1$  ou  $r = F_2$ , respectivamente, referida às vezes como equação de Timoshenko [21].

Para efeito de comparação com o modelo de Euler-Bernoulli, a equação desacoplada para o deslocamento  $u(t, x)$  (2.13), supondo  $g(t, x) = 0$ , é rearranjada na forma

$$\begin{aligned} \underbrace{EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - f(t, x)}_{(I)} - \underbrace{\rho I \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2}}_{(II)} + \underbrace{\frac{EI}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( f(t, x) - \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \right)}_{(III)} \\ - \underbrace{\frac{\rho I}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( f(t, x) - \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \right)}_{(IV)} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

A fim de visualizar os efeitos de inércia rotacional e deformação de cisalhamento, consideradas no modelo de Timoshenko, identificam-se os seguintes termos relacionados:

- (I) Teoria de Euler-Bernoulli,
- (II) Inércia rotacional principal,
- (III) Deformação de cisalhamento principal,
- (IV) Inércia rotacional e deformação de cisalhamento combinados.

### 2.1.1 Equação característica

Seja  $\mathbf{F} = 0$  e supondo uma solução de (2.7) da forma

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\beta x + \gamma t} \mathbf{w}, \quad (2.19)$$

sendo  $w$  vetor  $2 \times 1$ , substituindo em (2.7) resulta

$$\begin{bmatrix} \rho A \gamma^2 - \kappa G A \beta^2 & \kappa G A \beta \\ -\kappa G A \beta & \rho I \gamma^2 - E I \beta^2 + \kappa G A \end{bmatrix} e^{\beta x + \gamma t} \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Para garantir a existência de uma solução  $w$  não nula exige-se que

$$\det \begin{bmatrix} \rho A \gamma^2 - \kappa G A \beta^2 & \kappa G A \beta \\ -\kappa G A \beta & \rho I \gamma^2 - E I \beta^2 + \kappa G A \end{bmatrix} = 0, \quad (2.21)$$

ou seja,

$$\Delta(\beta, \gamma) = \rho^2 A I \gamma^4 + \rho A (\kappa G A - (E I + \kappa G I) \beta^2) \gamma^2 + \kappa G A E I \beta^4 = 0. \quad (2.22)$$

Definindo

$$a = \kappa G A, \quad b = E I, \quad c = \rho A \quad e \quad e = \rho I, \quad (2.23)$$

o  $\Delta(\beta, \gamma)$  é reescrito como

$$\Delta(\beta, \gamma) = c e \gamma^4 - (c b + e a) \beta^2 \gamma^2 + c a \gamma^2 + a b \beta^4 = 0. \quad (2.24)$$

Esta equação é chamada equação característica e será utilizada em diversos outros pontos deste trabalho.

Observa-se que a equação (2.22) é equivalente à equação obtida ao se procurar soluções da forma  $y(t, x) = \lambda e^{\beta x + \gamma t}$  para a equação de quarta ordem

$$\rho^2 A I \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial t^4} + \rho A \left( \kappa G A - (E I + \kappa G I) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} + \kappa G A E I \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.25)$$

## 2.2 Formulação adimensional

Em várias situações, é preferível tratar o modelo de Timoshenko na forma adimensional. Seja para comparar com o modelo de Euler-Bernoulli [2], seja para determinar a parte espacial nas soluções exponenciais [15], [26].

Na sequência, são dadas as adimensionalizações realizadas nas referências [2], [15], [26] para o modelo de Timoshenko, no caso de uma viga homogênea não forçada

$$\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.26)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \psi(t, x) \right) = 0, \quad (2.27)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

sendo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} u(t, x) \\ \psi(t, x) \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & -EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \end{bmatrix} = \mathbb{M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbb{C} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{R}, \quad (2.30)$$

com

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

### 2.2.1 Adimensionalização para efeitos assintóticos

A adimensionalização proposta em [2], introduz as variáveis

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad u^*(\tau, \xi) = \frac{u(t, x)}{R} \quad \text{e} \quad \psi^*(\tau, \xi) = \psi(t, x), \quad (2.32)$$

sendo  $R = \sqrt{\frac{I}{A}}$  o raio de giro da seção transversal,  $T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{ER^2}}$  é o tempo característico e  $L$  é o comprimento característico na direção  $x$ .

Da regra da cadeia tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2.33)$$

assim

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= \frac{1}{L} \frac{\partial R u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi} = \frac{R}{L} \frac{\partial u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= \frac{1}{T} \frac{\partial R u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau} = \frac{R}{T} \frac{\partial u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau},\end{aligned}\quad (2.34)$$

e

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{R}{L^2} \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{R}{T^2} \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2}.\quad (2.35)$$

Resultados similares são obtidos para as derivadas parciais de  $\psi(t, x)$

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \tau},\quad (2.36)$$

e

$$\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} = \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2}.\quad (2.37)$$

Substituindo nas equações (2.26) e (2.27) as derivadas parciais de  $u(t, x)$  e  $\psi(t, x)$ , resulta

$$\frac{\rho}{\kappa G} \frac{RL}{T^2} \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} - \frac{R}{L} \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \xi} = 0,\quad (2.38)$$

$$\frac{\rho I}{\kappa G A} \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} - \frac{EI}{\kappa G A} \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} - \frac{R}{L} \frac{\partial u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi} + \psi^*(\tau, \xi) = 0.\quad (2.39)$$

Considerando as constantes adimensionais

$$\varsigma = \frac{R}{L} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{E}{\kappa G},\quad (2.40)$$

as equações (2.38) e (2.39) são reescritas adimensionalmente como

$$\begin{aligned}\varsigma^3 \sigma \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} - \varsigma \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \xi} &= 0, \\ \varsigma^4 \sigma \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} - \varsigma^2 \sigma \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} - \varsigma \frac{\partial u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi} + \psi^*(\tau, \xi) &= 0.\end{aligned}\quad (2.41)$$

As equações adimensionais em (2.41) podem ser representadas na forma

$$\mathbf{M}_* \ddot{\mathbf{v}}_* + \mathbf{K}_* \mathbf{v}_* = 0\quad (2.42)$$

sendo

$$\mathbf{M}_* = \begin{bmatrix} \varsigma^3 \sigma & 0 \\ 0 & \varsigma^4 \sigma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_* = \begin{bmatrix} -\varsigma \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ -\varsigma \frac{\partial}{\partial \xi} & -\sigma \varsigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_* = \begin{bmatrix} u^*(\tau, \xi) \\ \psi^*(\tau, \xi) \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{v}}_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Considerando  $y = u$  e  $r = 0$  na equação (2.17) e substituindo as variáveis dimensionais (2.32) resulta

$$\rho^2 AI \frac{R}{T^4} \frac{\partial^4 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^4} + \rho \kappa GA^2 \frac{R}{T^2} \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} - \rho A (EI + \kappa GI) \frac{R}{L^2 T^2} \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \kappa GA EI \frac{R}{L^4} \frac{\partial^4 u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^4} = 0. \quad (2.44)$$

Manipulando algebricamente a equação (2.44) e utilizando as constantes definidas em (2.40) segue

$$\varsigma^4 \sigma \frac{\partial^4 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^4} - \varsigma^2 (1 + \sigma) \frac{\partial^4 u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^4} = 0, \quad (2.45)$$

que para  $\varsigma = \sigma = 0$  representa a equação do modelo de Euler-Bernoulli<sup>1</sup> [2].

## 2.2.2 Adimensionalização no estudo das amplitudes espaciais

Huang [15] adimensionaliza a variável espacial na forma

$$\xi = \frac{x}{L},$$

e supõe soluções do tipo

$$u(t, x) = e^{ipt} U(\xi), \quad \psi(t, x) = e^{ipt} \Psi(\xi) \quad (2.46)$$

---

<sup>1</sup>Equação do modelo Euler-Bernoulli adimensionalizada utilizando (2.32).



para o modelo de Timoshenko (2.26) e (2.27), e substituindo, resulta

$$U'' + q^2 s^2 U - L \Psi' = 0 \quad (2.47)$$

$$s^2 \Psi'' - (1 - q^2 k^2 s^2) \Psi + \frac{U'}{L} = 0 \quad (2.48)$$

onde

$$q^2 = \frac{1}{EI} \rho A L^4 p^2, \quad k^2 = \frac{I}{A L^2} \quad \text{e} \quad s^2 = \frac{EI}{\kappa A G L^2} \quad (2.49)$$

e  $U'$ ,  $U''$ ,  $\Psi'$  e  $\Psi''$  representam diferenciação em relação a  $\xi$ , ou ainda substituindo (2.46) nas equações desacopladas de quarta ordem (2.13)-(2.14), para  $f(t, x) = g(t, x) = 0$ , obtém-se

$$U^{(iv)} + q^2(k^2 + s^2)U'' - q^2(1 - q^2 k^2 s^2)U = 0, \quad (2.50)$$

$$\Psi^{(iv)} + q^2(k^2 + s^2)\Psi'' - q^2(1 - q^2 k^2 s^2)\Psi = 0. \quad (2.51)$$

Em [26] são introduzidas as variáveis

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad u^*(\tau, \xi) = \frac{u(x, t)}{L} \quad \text{e} \quad \psi^*(\tau, \xi) = \psi(t, x), \quad (2.52)$$

sendo  $T = L \sqrt{\frac{\rho}{G \kappa}}$ , e são consideradas as variáveis adimensionais

$$\alpha = \frac{A L^2}{I}, \quad \mu = \frac{A G \kappa L^2}{EI} \quad \text{e} \quad \varkappa = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{\kappa G}{E}, \quad (2.53)$$

resultando nas equações adimensionais

$$\frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \xi} = 0, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} - \alpha \frac{\partial u^*(\tau, \xi)}{\partial \xi} + \alpha \psi^*(\tau, \xi) = 0, \quad (2.55)$$

escritas matricialmente na forma

$$\mathbf{M}_\diamond \ddot{\mathbf{v}}_\diamond + \mathbf{K}_\diamond \mathbf{v}_\diamond = \mathbf{0}, \quad (2.56)$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_\diamond &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_\diamond = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ -\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} & -\frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \alpha \end{bmatrix}, \\
\mathbf{v}_\diamond &= \begin{bmatrix} u^*(\tau, \xi) \\ \psi^*(\tau, \xi) \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{v}}_\diamond = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial^2 \psi^*(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

### 3 O PROBLEMA DE AUTOVALOR NO MODELO DE TIMOSHENKO

A procura de soluções exponenciais

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\gamma t} \mathbf{w}(x), \quad \mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} U(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

para o modelo de Timoshenko da equação (2.3) é de interesse no estudo de propagação de ondas planas em vigas infinitas (2.19), bem como no estudo de modos ou autofunções em vigas de comprimento finito, diante da presença de condições de contorno ou de interface. Por esse motivo, será realizado um estudo detalhado da parte espacial  $\mathbf{w}(x)$ .

Substituindo (3.1) em (2.3), com  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

obtém-se o problema quadrático de autovalor

$$(\gamma^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) pode ser escrita na forma diferencial matricial como o sistema de segunda ordem

$$\mathbf{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbf{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}(\gamma)\mathbf{w}(x) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

com os coeficientes matriciais

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma^2 \rho A & 0 \\ 0 & \gamma^2 \rho I + \kappa GA \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

ou ainda

$$\mathbf{K}(\gamma) = \gamma^2 \mathbf{M} + \mathbf{R}, \quad \text{com} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Observe que  $\mathbb{M}$  é matriz real simétrica negativa definida<sup>1</sup> e  $\mathbb{C}$  é uma matriz real anti-simétrica. A matriz  $\mathbb{K}$  é simétrica, porém pode ser uma matriz real ou complexa dependendo da natureza de  $\gamma^2$ .

Tem-se que a matriz  $\mathbb{K}(\gamma)$  é autoadjunta, ou seja  $\mathbb{K}(\gamma) = \mathbb{K}^*(\gamma) = \mathbb{K}^T(\bar{\gamma})$ , se e somente se  $\gamma^2 = \bar{\gamma}^2$ , ou equivalentemente  $\gamma$  é real ou puramente imaginário  $\gamma = \pm i\omega$ ,  $\omega > 0$ . Nestes casos, decorre que a matriz  $\mathbb{K}$  é real simétrica, e somente poderá ser negativa definida quando

$$\gamma^2 < 0, \quad \text{e} \quad \gamma^2 < -\frac{\kappa GA}{\rho I},$$

ou seja, se

$$\gamma = \pm i\omega \quad \text{satisfazendo} \quad \omega^2 > \frac{\kappa GA}{\rho I}.$$

A seguir foca-se o estudo tendo em conta,

- Caso estacionário  $\gamma = 0$ ;
- Caso evolutivo  $\gamma \neq 0$ .

Nas seções seguintes consideram-se diferentes bases de soluções para o sistema (3.4).

### 3.1 Base de Euler

Procurar soluções exponenciais de (3.4) na forma

$$\mathbf{w}(x) = e^{\beta x} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

leva a um novo problema quadrático de autovalor em  $\beta$ . Para sua resolução deve-se determinar  $\beta$  tal que o sistema matricial

$$\Gamma(\beta, \gamma) \mathbf{v} = (\beta^2 \mathbb{M} + \beta \mathbb{C} + \mathbb{K}(\gamma)) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>( $-\mathbb{M}$ ) positiva definida

possua uma solução  $\mathbf{v}$  não nula, de modo que  $\beta$  deve ser raiz do polinômio característico

$$P(\beta, \gamma) = \det(\beta^2 \mathbb{M} + \beta \mathbb{C} + \mathbb{K}(\gamma)), \quad (3.9)$$

ou seja, satisfazer a equação característica

$$\Delta(\beta, \gamma) = \det(\beta^2 \mathbb{M} + \beta \mathbb{C} + \mathbb{K}(\gamma)) = 0. \quad (3.10)$$

Utilizando as constantes definidas em (2.23) decorre

$$\Delta(\beta, \gamma) = ab(\beta^4 + g^2(\gamma)\beta^2 - r^4(\gamma)) = 0 \quad (3.11)$$

sendo

$$g^2(\gamma) = -\left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right)\gamma^2, \quad r^4(\gamma) = -c\gamma^2 \left(\frac{e\gamma^2 + a}{ab}\right). \quad (3.12)$$

As raízes de (3.11) são

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{-2g^2(\gamma) + 2\sqrt{(g^2(\gamma))^2 + 4r^4(\gamma)}}, \\ \beta_{3,4} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{-2g^2(\gamma) - 2\sqrt{(g^2(\gamma))^2 + 4r^4(\gamma)}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para garantir que as raízes em (3.13) sejam simples, exige-se que

$$\Delta(\beta, \gamma) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta(\beta, \gamma) \neq 0 \quad (3.14)$$

resultando  $\beta \neq 0$  e  $\beta^2 \neq \frac{-g^2(\gamma)}{2}$ .

A fim de encontrar os autovetores  $\mathbf{v}_j = [v_{1j} \ v_{2j}]^T$  associados a cada  $\beta_j$ , substitui-se as raízes (3.13) em (3.8), obtendo-se os seguintes sistemas a serem resolvidos

$$\begin{aligned} \Gamma(\beta_1, \gamma)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, & \Gamma(\beta_2, \gamma)\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \\ \Gamma(\beta_3, \gamma)\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0}, & \Gamma(\beta_4, \gamma)\mathbf{v}_4 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

com os coeficientes matriciais  $\Gamma_j = \Gamma(\beta_j, \gamma)$ , em termos das constantes (2.23)

$$\Gamma_j = \begin{bmatrix} -\beta_j^2 a + \gamma^2 c & \beta_j a \\ -\beta_j a & -\beta_j^2 b + e\gamma^2 + a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Supondo que as raízes (3.13) são simples e realizando uma troca de linhas na matriz  $\Gamma_j$ , do sistema homogêneo (3.15), resulta o sistema

$$\begin{bmatrix} -\beta_j a & -\beta_j^2 b + e\gamma^2 + a \\ -\beta_j^2 a + \gamma^2 c & \beta_j a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Utilizando Eliminação Gaussiana decorre

$$\begin{bmatrix} A_j & B_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

ou simplesmente a relação entre as componentes do vetor  $\mathbf{v}_j$

$$A_j v_{1j} + B_j v_{2j} = 0, \quad (3.19)$$

onde

$$\begin{aligned} A_j &= -\beta_j a, \\ B_j &= -\beta_j^2 b + \gamma^2 e + a. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assim  $\mathbf{v}_j$  é dado por

$$\mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} -\frac{B_j}{A_j} v_{2j} \\ v_{2j} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Substituindo  $A_j$  e  $B_j$  dados em (3.20) tem-se

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{-\beta_1^2 b + \gamma^2 e + a}{-\beta_1 a} v_{21} \\ v_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{-\beta_2^2 b + \gamma^2 e + a}{-\beta_2 a} v_{22} \\ v_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{-\beta_3^2 b + \gamma^2 e + a}{-\beta_3 a} v_{23} \\ v_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{-\beta_4^2 b + \gamma^2 e + a}{-\beta_4 a} v_{24} \\ v_{24} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Sendo as quatro raízes de (3.13) distintas, a combinação linear

$$\mathbf{w}(x) = c_1 e^{\beta_1 x} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\beta_2 x} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{\beta_3 x} \mathbf{v}_3 + c_4 e^{\beta_4 x} \mathbf{v}_4 \quad (3.24)$$

é a solução geral da equação (3.4), pois a matriz Wronskiana em  $x = 0$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ \beta_1 \mathbf{v}_1 & \beta_2 \mathbf{v}_2 & \beta_3 \mathbf{v}_3 & \beta_4 \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

é não singular<sup>2</sup>, ou seja, o problema é não defeituoso. Assim,

$$\phi_1(x) = e^{\beta_1 x} \mathbf{v}_1, \phi_2(x) = e^{\beta_2 x} \mathbf{v}_2, \phi_3(x) = e^{\beta_3 x} \mathbf{v}_3, \phi_4(x) = e^{\beta_4 x} \mathbf{v}_4, \quad (3.26)$$

será a base de Euler do sistema (3.4), onde as soluções  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  são completamente definidas por (3.13), (3.22) e (3.23).

No caso de raízes simples, obtém-se as soluções puramente exponenciais por serem combinações lineares de soluções do tipo

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\gamma t + \beta x} \mathbf{v}.$$

De acordo com a natureza dos valores de  $\gamma$  e  $\beta$ , podem-se ter soluções periódicas no tempo quando  $\gamma = i\omega$ , e periódicas no espaço se  $\beta = im$ ,  $\omega$  e  $m$  reais. No caso de periodicidade tempo-espaço tem-se ondas progressivas do tipo harmônico

$$e^{\gamma t + \beta x} \mathbf{v} = e^{im(x-ct)} \mathbf{v},$$

onde  $c = -\frac{\omega}{m}$ .

No caso das raízes repetidas, nem sempre a forma da amplitude  $\mathbf{w}(x)$  será combinação linear de soluções exponenciais (3.24). Daí resulta conveniente procurar soluções modificadas [19], do tipo

$$\mathbf{w}(x) = e^{\beta x} p(x) \quad (3.27)$$

---

<sup>2</sup>cada coluna da matriz é autovetor associado a autovalores distintos,  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , da matriz obtida reduzindo (3.4) a um sistema de equações de primeira ordem.

onde

$$p(x) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1x + \dots + \mathbf{a}_m x^m,$$

é um polinômio a ser determinado, com  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  vetores  $2 \times 1$ .

### 3.2 Bases matriciais

A solução geral de

$$\mathbb{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}(\gamma)\mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{K}(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma^2 \rho A & 0 \\ 0 & \gamma^2 \rho I + \kappa GA \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

dada por

$$\mathbf{w}(x) = c_{11}\phi_1(x) + c_{21}\phi_2(x) + c_{12}\phi_3(x) + c_{22}\phi_4(x), \quad (3.30)$$

sendo  $\phi_j(x)$  de ordem  $2 \times 1$  para  $j = 1, \dots, 4$ , e  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x)\}$  um conjunto de soluções linearmente independentes de (3.4). A solução (3.30) pode ser reescrita de forma compacta como

$$\mathbf{w}(x) = \Phi_1(x)\mathbf{c}_1 + \Phi_2(x)\mathbf{c}_2, \quad (3.31)$$

sendo

$$\Phi_1(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(x) = \begin{bmatrix} \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Isto sugere introduzir o conceito de base matricial como segue.

**Definição 1.** A matriz  $\Phi(x)$  de ordem  $2 \times 2$  é uma solução matricial de (3.4) se cada coluna de  $\Phi(x)$  satisfaz a equação (3.4), ou equivalentemente, se  $\Phi(x)$  satisfaz



a equação

$$\mathbb{M}\Phi''(x) + \mathbb{C}\Phi'(x) + \mathbb{K}(\gamma)\Phi(x) = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

sendo  $\mathbf{0}$  matriz nula de ordem  $2 \times 2$ .

**Definição 2.** *Sejam  $\Phi_1(x)$  e  $\Phi_2(x)$ , de ordem  $2 \times 2$ , soluções matriciais de (3.4) diz-se que  $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$  formam uma base matricial de soluções da equação diferencial se o Wronskiano*

$$W(\Phi_1(x_0), \Phi_2(x_0)) = \det \begin{bmatrix} \Phi_1(x_0) & \Phi_2(x_0) \\ \Phi_1'(x_0) & \Phi_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (3.35)$$

Pelo Lema de Abel estendido para sistemas de equações lineares, novamente é suficiente que o determinante (3.35) seja não nulo em um ponto qualquer  $x = x_0$ , [19].

### 3.2.1 Base Fundamental

Com a base de Euler, observa-se que as soluções encontradas são divididas nos casos de raízes simples e raízes repetidas. Porém, é possível introduzir outras bases de solução que não requerem para sua formulação, em um primeiro momento, a distinção da natureza das raízes do polinômio (3.11). Nas aplicações encontram-se soluções não homogêneas obtidas através de convolução com uma solução fundamental caracterizada por seus valores iniciais impulsivos [20], [4], [5], [3] e [16].

Isto motiva generalizar conceitos do sistema de primeira ordem [19], [3], através da introdução da solução matricial fundamental  $\mathbf{h}(x)$ , como sendo uma matriz  $2 \times 2$  que satisfaz o seguinte problema de valor inicial [7]

$$\mathbb{M}\mathbf{h}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{h}'(x) + \mathbb{K}(\gamma)\mathbf{h}(x) = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}, \quad (3.37)$$

sendo  $\mathbf{0}$  a matriz nula  $2 \times 2$  e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade  $2 \times 2$ . Esta solução, quando utilizada em sistemas no repouso para  $x$  negativo, é também conhecida como resposta impulso ou solução de Green de valor inicial [19].

Derivando (3.36), sendo  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{K}$  coeficientes matriciais com componentes constantes,

$$\mathbb{M}\mathbf{h}'''(x) + \mathbb{C}\mathbf{h}''(x) + \mathbb{K}\mathbf{h}'(x) = \mathbb{M}(\mathbf{h}'(x))'' + \mathbb{C}(\mathbf{h}'(x))' + \mathbb{K}(\mathbf{h}'(x)) = \mathbf{0},$$

assim  $\mathbf{h}'(x)$  satisfaz a equação (3.36).

O Wronskiano de  $\mathbf{h}(x)$  e  $\mathbf{h}'(x)$  em  $x = 0$  é

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{M}^{-1} \\ \mathbb{M}^{-1} & -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2b^2}, \quad (3.38)$$

sendo  $a = \kappa GA$ ,  $b = EI$ , decorre que  $\{\mathbf{h}(x), \mathbf{h}'(x)\}$  é base matricial para as soluções da equação (3.4), sendo sua solução geral dada por

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Tomando em particular

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

resulta que a primeira coluna de  $\mathbf{h}(x)$  é solução de (3.4), e da escolha

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

observa-se que a segunda coluna da matriz  $\mathbf{h}(x)$  também é solução de (3.4). Analogamente, obtém-se que as colunas de  $\mathbf{h}'(x)$  também são soluções da equação em questão.

Observa-se que para qualquer  $x_0$  arbitrário e fixo, a solução geral pode ser escrita como

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x - x_0)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x - x_0)\mathbf{c}_2 \quad (3.43)$$

uma vez que

$$\Phi_1(x) = \mathbf{h}(x - x_0), \quad (3.44)$$

$$\Phi_2(x) = \mathbf{h}'(x - x_0) \quad (3.45)$$

formam uma base matricial, pois o Wronskiano é não nulo em  $x_0$ .

### 3.2.1.1 Base Normalizada

Sendo  $\mathbf{h}(x)$  solução de (3.36), com as condições iniciais dadas em (3.37), define-se

$$\mathbf{h}_0(x) = \mathbf{h}'(x)\mathbb{M} + \mathbf{h}(x)\mathbb{C}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{h}_1(x) = \mathbf{h}(x)\mathbb{M} \quad (3.47)$$

satisfazendo as condições iniciais normalizadas

$$\mathbf{h}_0(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}'_0(0) = \mathbf{0}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{h}_1(0) = \mathbf{0} \quad \mathbf{h}'_1(0) = \mathbf{I}, \quad (3.49)$$

sendo  $\mathbf{I}$  matriz identidade  $2 \times 2$  e  $\mathbf{0}$  matriz nula  $2 \times 2$ .

É possível verificar que  $\mathbf{h}_0(x)$  e  $\mathbf{h}_1(x)$  satisfazem a equação diferencial em (3.36), e além disso

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0(0) & \mathbf{h}_1(0) \\ \mathbf{h}'_0(0) & \mathbf{h}'_1(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = 1. \quad (3.50)$$

Assim, tomando

$$\Phi_1(x) = \mathbf{h}_0(x), \quad (3.51)$$

$$\Phi_2(x) = \mathbf{h}_1(x), \quad (3.52)$$

$\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$  formam uma base matricial normalizada para a equação (3.4).

### 3.2.1.2 Fórmula analítica para $\mathbf{h}(x)$

Uma fórmula fechada para  $\mathbf{h}(x)$  para o modelo de Timoshenko pode ser obtida com a introdução de um polinômio característico, e a resolução de dois problemas de valor inicial, um para uma equação matricial em diferenças e outro para uma equação diferencial, ambos descritos a seguir [8], [6], [7].

Define-se

$$P(\beta, \gamma) = \det(\beta^2 \mathbb{M} + \beta \mathbb{C} + \mathbb{K}(\gamma)) = \sum_{j=0}^4 b_j \beta^{4-j} \quad (3.53)$$

como sendo o polinômio característico. Quando for de interesse observar apenas  $\beta$  escreve-se  $P(\beta, \gamma) = P(\beta)$ .

Utilizando (2.23), tem-se que somente os coeficientes de índice par são diferentes de zero

$$b_0 = ab, \quad b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = -(ae + bc)\gamma^2, \quad b_4 = (e\gamma^2 + a)c\gamma^2. \quad (3.54)$$

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} b_0 d^{(iv)}(x) + b_2 d''(x) + b_4 d(x) &= 0, \\ d(0) = d'(0) = d''(0) = 0, \quad abd'''(0) &= 1, \end{aligned} \quad (3.55)$$

que corresponde à solução fundamental da equação diferencial  $\sum_{j=0}^4 b_j d^{(4-j)}(x) = 0$ , construída com os coeficientes do polinômio característico (3.53)-(3.54), e o problema de valor inicial para a equação em diferenças

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\mathbf{h}_{j+2} + \mathbb{C}\mathbf{h}_{j+1} + \mathbb{K}\mathbf{h}_j &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}_1 &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde  $\mathbf{h}_j = \mathbf{h}^{(j)}(0)$ .

Agora, pode-se determinar  $\mathbf{h}(x)$  dada por [8], [6], [10]

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{4-j}. \quad (3.57)$$

A seguir, serão realizados os cálculos para determinar a solução fundamental matricial  $\mathbf{h}(x)$ , de (3.36)-(3.37), aprimorando os resultados apresentados em [7].

A resolução de (3.55), utilizando a base de Euler, requer o estudo da multiplicidade das raízes da equação característica

$$\Delta(\beta, \gamma) = ab(\beta^4 + g^2(\gamma)\beta^2 - r^4(\gamma)) = 0. \quad (3.58)$$

De (3.13), as raízes podem ser escritas de maneira conveniente

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= \pm\epsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-2g^2(\gamma) + 2\sqrt{(g^2(\gamma))^2 + 4r^4(\gamma)}}, \\ \beta_{3,4} &= \pm i\delta = \pm i\frac{1}{2}\sqrt{2g^2(\gamma) + 2\sqrt{(g^2(\gamma))^2 + 4r^4(\gamma)}}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde

$$\delta^2 = (g^2 + \epsilon^2) \quad \text{e} \quad r^4 = \delta^2\epsilon^2. \quad (3.60)$$

No caso das raízes de (3.58) serem distintas, a solução de (3.55) é dada por

$$d(x) = \sum_{k=1}^4 \frac{e^{\beta_k x}}{P'(\beta_k)}. \quad (3.61)$$

Utilizando as raízes na forma (3.59), obtém-se

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{abe\delta(\delta^2 + \epsilon^2)} \quad (3.62)$$

onde  $\delta = \delta(\gamma)$  e  $\epsilon = \epsilon(\gamma)$  dados por (3.59).

Do problema (3.56) segue

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -1/a & 0 \\ 0 & -1/b \end{bmatrix}, \\ \mathbf{h}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1/b \\ 1/b & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} (-\gamma^2 cb + a^2)/a^2 b & 0 \\ 0 & -\gamma^2 e/b^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Finalmente, utilizando (3.54), (3.55), (3.63) em (3.57) obtém-se

$$\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} -bd''(x) + (e\gamma^2 + a)d(x) & -ad'(x) \\ ad'(x) & -ad''(x) + c\gamma^2 d(x) \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{h}'(x) = \begin{bmatrix} -bd'''(x) + (e\gamma^2 + a)d'(x) & -ad'''(x) \\ ad''(x) & -ad'''(x) + c\gamma^2 d'(x) \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

### 3.2.1.3 Representação espectral de $\mathbf{h}(x)$

A seguir será considerada uma representação espectral para  $\mathbf{h}(x)$  para o caso em que as raízes de (3.58) são todas distintas. Neste caso, a solução de (3.55), por [12], é

$$d(x) = \sum_{k=1}^4 \frac{e^{\beta_k x}}{P'(\beta_k)}. \quad (3.66)$$

Esta representação de  $d(x)$  permite escrever  $\mathbf{h}(x)$ , dada em (3.64), da seguinte maneira

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{k=1}^4 \frac{e^{\beta_k x}}{P'(\beta_k)} A_k, \quad (3.67)$$

sendo

$$A_k = \begin{bmatrix} -b\beta_k^2 + e\gamma^2 + a & -a\beta_k \\ a\beta_k & -a\beta_k^2 + c\gamma^2 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

A matriz  $A_k$  pode ser convenientemente fatorizada em termos dos autovetores

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \frac{-\beta_k a}{-a\beta_k^2 + c\gamma^2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

associados aos autovalores  $\beta_k$  do problema

$$(\beta^2 \mathbf{M} + \beta \mathbf{C} + \mathbb{K}(\gamma)) \mathbf{v} = 0, \quad (3.70)$$

já calculados em (3.22)-(3.23). Segue que

$$A_k = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_k^T \quad (3.71)$$

onde

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} a\beta_k \\ -a\beta_k^2 + c\gamma^2 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Utilizando a relação (3.72) em (3.67) obtém-se a representação espectral da resposta impulso matricial

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{k=1}^4 \frac{e^{\beta_k x}}{P'(\beta_k)} \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{w}_k^T, \quad (3.73)$$

onde  $P'(\beta_k) = 4ab\beta_k^3 - 2(ae + cb)\gamma^2\beta_k$ .

Observação: Para o caso  $\gamma = i\omega$ , com  $\omega^2 > \frac{a}{e}$ , tem-se  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{K}$  auto-adjuntas e  $\mathbb{C}$  anti-simétrica, sendo  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{K}$  reais. Assim, decorre de [9] que  $\mathbf{w}_k$  são autovetores do problema de autovalor adjunto associado com (3.70), dado por

$$(\xi^2\mathbb{M}^* + \xi\mathbb{C}^* + \mathbb{K}^*(\gamma))\mathbf{w} = (\xi^2\mathbb{M} - \xi\mathbb{C} + \mathbb{K}(\gamma))\mathbf{w} = 0,$$

onde  $\xi = \bar{\beta}$ .

### 3.3 Relação entre base de Euler e base fundamental

Sendo  $d(x)$  solução do problema de valor inicial (3.55) dada por

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab\epsilon\delta(\delta^2 + \epsilon^2)}, \quad (3.74)$$

com

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{\cosh(\epsilon x) - \cos(\delta x)}{ab(\delta^2 + \epsilon^2)}, \\ d''(x) &= \frac{\epsilon \sinh(\epsilon x) + \delta \sin(\delta x)}{ab(\delta^2 + \epsilon^2)}, \\ d'''(x) &= \frac{\epsilon^2 \cosh(\epsilon x) + \delta^2 \cos(\delta x)}{ab(\delta^2 + \epsilon^2)}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

e definindo

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cosh(\epsilon x) \\ \sinh(\epsilon x) \\ \text{sen}(\delta x) \\ \cos(\delta x) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d(x) \\ d'(x) \\ d''(x) \\ d'''(x) \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

tem-se

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}_E^D \mathbf{E}, \quad (3.77)$$

sendo

$$\mathbf{M}_E^D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)} & -\frac{1}{ab\delta(\epsilon^2 + \delta^2)} & 0 \\ \frac{1}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)} & 0 & 0 & -\frac{1}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)} \\ 0 & \frac{\epsilon}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)} & \frac{\delta}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)} & 0 \\ \frac{\epsilon^2}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)} & 0 & 0 & \frac{\delta^2}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)} \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

e segue que

$$\mathbf{E} = \mathbf{M}_D^E \mathbf{D} \quad (3.79)$$

sendo

$$\mathbf{M}_D^E = (\mathbf{M}_E^D)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & ba\delta^2 & 0 & ab \\ \epsilon ba\delta^2 & 0 & ab\epsilon & 0 \\ -\epsilon^2 ab\delta & 0 & ab\delta & 0 \\ 0 & -\epsilon^2 ab & 0 & ab \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

de onde decorre a seguinte igualdade

$$\begin{bmatrix} \cosh(\epsilon x) \\ \sinh(\epsilon x) \\ \text{sen}(\delta x) \\ \cos(\delta x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\delta^2 d'(x) + abd'''(x) \\ \epsilon ba\delta^2 d(x) + ab\epsilon d''(x) \\ -\epsilon^2 ab\delta d(x) + ab\delta d''(x) \\ -\epsilon^2 abd'(x) + abd'''(x) \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$



No caso crítico  $\epsilon = 0$  procede-se segundo Liouville. Multiplicando (3.79) pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

e fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \text{sen}(\delta x) \\ \text{cos}(\delta x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba\delta^2 d'(x) + abd'''(x) \\ ba\delta^2 d(x) + abd''(x) \\ ab\delta d''(x) \\ abd'''(x) \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Neste capítulo, a solução de (3.4) foi dada em termos das bases de Euler e matricial fundamental. Na sequência, será considerada a base matricial fundamental, para determinar os modos de vibração na presença de condições de contorno.

## 4 EQUAÇÃO MODAL PARA O MODELO DE TIMOSHENKO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO

Até este momento, considerou-se a obtenção de soluções exponenciais no tempo

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\gamma t} \mathbf{w}(x), \quad (4.1)$$

em uma viga sem condições de contorno, em que as amplitudes espaciais  $\mathbf{w}(x)$  são soluções da equação (3.4)

$$\mathbb{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}(\gamma)\mathbf{w}(x) = 0, \quad (4.2)$$

com os coeficientes matriciais

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix}, \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{K}(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma^2 \rho A & 0 \\ 0 & \gamma^2 \rho I + \kappa GA \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Para a determinação do deslocamento transversal  $u(t, x)$  e giro  $\psi(t, x)$  de uma viga de comprimento  $L$ , descrita pelas equações (2.1) e (2.2), serão consideradas condições de contorno nos extremos  $x = 0$  e  $x = L$  da forma geral

$$A_{11}u(t, 0) + A_{12}\psi(t, 0) + J_{11}\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) + J_{12}\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad (4.4)$$

$$A_{21}u(t, 0) + A_{22}\psi(t, 0) + J_{21}\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) + J_{22}\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 0) = 0;$$

$$F_{11}u(t, L) + F_{12}\psi(t, L) + Q_{11}\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) + Q_{12}\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, L) = 0, \quad (4.5)$$

$$F_{21}u(t, L) + F_{22}\psi(t, L) + Q_{21}\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) + Q_{22}\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, L) = 0.$$

Segue que as amplitudes espaciais  $\mathbf{w}(x)$  em (4.1), na forma matricial, estão sujeitas às condições de contorno

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{J}\mathbf{w}'(0) &= 0, \\ \mathcal{F}\mathbf{w}(L) + \mathcal{Q}\mathbf{w}'(L) &= 0,\end{aligned}\tag{4.6}$$

sendo  $\mathcal{A} = [A_{ij}]$ ,  $\mathcal{J} = [J_{ij}]$ ,  $\mathcal{F} = [F_{ij}]$  e  $\mathcal{Q} = [Q_{ij}]$ .

Substituindo

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2$$

em (4.6) tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\mathbf{h}(0)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(0)\mathbf{c}_2] + \mathcal{J}[\mathbf{h}'(0)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}''(0)\mathbf{c}_2] &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{F}[\mathbf{h}(L)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(L)\mathbf{c}_2] + \mathcal{Q}[\mathbf{h}'(L)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}''(L)\mathbf{c}_2] &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{4.7}$$

ou ainda, utilizando  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{h}'(0) = \mathbb{M}^{-1}$  e  $\mathbf{h}''(0) = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1}$ , decorrentes de (3.36) e (3.37), segue

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\mathbb{M}^{-1}\mathbf{c}_2] + \mathcal{J}[\mathbb{M}^{-1}\mathbf{c}_1 - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1}\mathbf{c}_2] &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{F}[\mathbf{h}(L)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(L)\mathbf{c}_2] + \mathcal{Q}[\mathbf{h}'(L)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}''(L)\mathbf{c}_2] &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

As condições de contorno (4.7) ou (4.8) podem ser escritas como

$$\mathcal{U}(\gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0},\tag{4.9}$$

sendo

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\gamma) &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}\mathbf{h}(0) + \mathcal{J}\mathbf{h}'(0) & \mathcal{A}\mathbf{h}'(0) + \mathcal{J}\mathbf{h}''(0) \\ \mathcal{F}\mathbf{h}(L) + \mathcal{Q}\mathbf{h}'(L) & \mathcal{F}\mathbf{h}'(L) + \mathcal{Q}\mathbf{h}''(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}\mathbb{M}^{-1} & (\mathcal{A} - \mathcal{J}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C})\mathbb{M}^{-1} \\ \mathcal{F}\mathbf{h}(L) + \mathcal{Q}\mathbf{h}'(L) & \mathcal{F}\mathbf{h}'(L) + \mathcal{Q}\mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Simplificando ainda mais, pode-se escrever

$$\mathcal{U}(\gamma) = \mathbb{B}\Phi,\tag{4.11}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F} & \mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{M}^{-1} \\ \mathbb{M}^{-1} & -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Retomando a resposta impulso matricial  $\mathbf{h}(x)$  dada em (3.64) tem-se

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & -\frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & 0 \\ -bd''(L) + (e\gamma^2 + a)d(L) & -ad'(L) & -bd'''(L) + (e\gamma^2 + a)d'(L) & -ad''(L) \\ ad'(L) & -ad''(L) + c\gamma^2 d(L) & ad''(L) & -ad'''(L) + c\gamma^2 d'(L) \\ -bd'''(L) + (e\gamma^2 + a)d'(L) & -ad''(L) & -bd^{(iv)}(L) + (e\gamma^2 + a)d''(L) & -ad''''(L) \\ ad''(L) & -ad'''(L) + c\gamma^2 d'(L) & ad''''(L) & -ad^{(iv)}(L) + c\gamma^2 d''(L) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

e substituindo  $d(x)$  dada em (3.62)

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \operatorname{sen}(\delta x)}{ab\epsilon\delta(\delta^2 + \epsilon^2)}, \quad (4.14)$$

a matriz  $\Phi$  é dada diretamente em termos de  $\sinh(\epsilon L)$ ,  $\operatorname{sen}(\delta L)$ ,  $\cosh(\epsilon L)$  e  $\cos(\delta L)$ , de onde pode-se escrever

$$\Phi = \Phi(\delta, \epsilon). \quad (4.15)$$

Para que exista uma solução não trivial  $\mathbf{c}$  de (4.9) é necessário exigir que

$$\det(\mathcal{U}(\gamma)) = \det \left( \begin{bmatrix} \mathcal{J}\mathbb{M}^{-1} & (\mathcal{A} - \mathcal{J}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C})\mathbb{M}^{-1} \\ \mathcal{F}\mathbf{h}(L) + \mathcal{Q}\mathbf{h}'(L) & \mathcal{F}\mathbf{h}'(L) + \mathcal{F}\mathbf{h}''(L) \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (4.16)$$

A equação resultante dessa igualdade é chamada *equação característica*, e será denotada por

$$\Delta_{\mathcal{U}} = \det(\mathcal{U}(\gamma)) = \det(\mathbb{B}\Phi(\delta, \epsilon)) = 0. \quad (4.17)$$

A equação característica (4.17) determina valores de  $\epsilon = \epsilon(\gamma)$  e  $\delta = \delta(\gamma)$  e conseqüentemente os valores de  $\gamma$ .

Observação: É importante observar que  $d(x) = d(x, \gamma)$ , implicando então que  $\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(x, \gamma)$ .

## 4.1 Viga apoiada-apoiada

Considerando uma viga apoiada-apoiada cujo movimento é descrito pelo modelo de Timoshenko, será estabelecido, no estudo dos modos e frequências, que os autovalores  $\gamma$  são imaginários puros escritos da forma  $\gamma = i\omega$ , com  $\omega \neq 0$ . As condições de contorno são

$$\begin{aligned} u(t, 0) = 0 \quad \psi_x(t, 0) = 0, \\ u(t, L) = 0 \quad \psi_x(t, L) = 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

e para escrevê-las na forma (4.6) tem-se

$$\mathcal{A} = \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J} = \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Utilizando (3.64), (3.65), (4.19) e as condições iniciais dadas em (3.55), a matriz  $\mathcal{U}$  é dada por

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & 0 \\ -bd''(L) + (e\gamma^2 + a)d(L) & -ad'(L) & -bd'''(L) + (e\gamma^2 + a)d'(L) & -ad''(L) \\ ad''(L) & -ad'''(L) + c\gamma^2 d'(L) & ad'''(L) & -ad^{(iv)}(L) + c\gamma^2 d''(L) \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Da primeira equação do sistema (4.9), com a matriz  $\mathcal{U}$  dada em (4.20), decorre

$$0 \cdot c_{11} + 0 \cdot c_{21} - (1/a) \cdot c_{12} + 0 \cdot c_{22} = 0 \rightarrow c_{12} = 0, \tag{4.21}$$

utilizando  $c_{12} = 0$ , da segunda equação segue

$$0 \cdot c_{11} - (1/b) \cdot c_{21} + (1/b) \cdot 0 + 0 \cdot c_{22} = 0 \rightarrow c_{21} = 0. \tag{4.22}$$

Como consequência, o sistema (4.9) reduz-se à

$$\mathbf{D}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

sendo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -bd''(L) + (e\gamma^2 + a)d(L) & -ad''(L) \\ ad''(L) & -ad^{(iv)}(L) + c\gamma^2 d''(L) \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Do PVI (3.55) tem-se que

$$d^{(iv)}(L) = \frac{(ae + cb)\gamma^2 d''(L) - (e\gamma^2 + a)c\gamma^2 d(L)}{ab}, \quad (4.25)$$

e utilizando esta igualdade a matriz (4.24) pode ser reescrita na forma<sup>1</sup>

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -bd''(L) + (e\gamma^2 + a)d(L) & -ad''(L) \\ ad''(L) & \frac{-ae\gamma^2 d''(L) + (e\gamma^2 + a)c\gamma^2 d(L)}{b} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Neste caso, a equação característica (4.17) é dada por

$$\Delta_u = \det(\mathbf{D}) = (e\gamma^2 + a) \left[ a[d''(L)]^2 - \frac{(bc + ea)\gamma^2}{b} d(L)d''(L) + \frac{\gamma^2 c(e\gamma^2 + a)}{b} [d(L)]^2 \right] = 0. \quad (4.27)$$

Observa-se que, colocando em evidência o termo  $d(L)$  e utilizando (4.25) em (4.27), segue que

$$\Delta_u(\gamma) = (e\gamma^2 + a)a \left\{ [d''(L)]^2 - d(L)d^{(iv)}(L) \right\} = 0 \quad (4.28)$$

é a equação característica que seria obtida manipulando o determinante da matriz  $\mathbf{D}$  dada em (4.24).

---

<sup>1</sup>No decorrer do texto será utilizada a matriz  $\mathbf{D}$  na forma (4.26), pois esta envolve apenas  $d(x)$  e sua derivada de ordem dois, tornando-se mais apropriada para a derivação de resultados.

## 4.2 Propriedades das Frequências e Modos

Para funções vetoriais contínuas num intervalo  $[0, L]$

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

será considerado o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f^*(x)g(x)dx, \quad (4.30)$$

com  $f^* = \bar{f}^T = [\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2]$ .

A equação (3.4), modificada pela relação (3.6), é escrita como

$$\mathbf{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbf{C}\mathbf{w}'(x) + (\gamma^2\mathbf{M} + \mathbf{R})\mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \quad (4.31)$$

fazendo o produto interno, por  $\mathbf{w}$ , decorre

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{M}\mathbf{w}'' \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{C}\mathbf{w}' \rangle + \gamma^2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{M}\mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{R}\mathbf{w} \rangle = 0. \quad (4.32)$$

Integrando por partes, tem-se

$$\gamma^2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{M}\mathbf{w} \rangle = B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] + \int_0^L \left( \mathbf{w}^* \mathbf{M}\mathbf{w}' + \mathbf{w}^* \mathbf{C}\mathbf{w} + \mathbf{w}^* (-\mathbf{R})\mathbf{w} \right) dx, \quad (4.33)$$

sendo

$$B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = - [\mathbf{w}^* \mathbf{M}\mathbf{w}' + \mathbf{w}^* \mathbf{C}\mathbf{w}] \Big|_0^L. \quad (4.34)$$

Considerando as matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{R}$  dadas em (3.5) e (3.6), com  $\mathbf{w} = [U \ \Psi]^T$ , e as condições de contorno

$$U(0) = \Psi'(0) = 0 \quad \text{e} \quad U(L) = \Psi'(L) = 0, \quad (4.35)$$

resulta

$$B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = 0 \quad (4.36)$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left( \mathbf{w}^{*'} \mathbb{M} \mathbf{w}' + \mathbf{w}^{*'} \mathbb{C} \mathbf{w} + \mathbf{w}^* (-\mathbb{R}) \mathbf{w} \right) dx \\
&= - \int_0^L \kappa GA \left( |U'|^2 + |\Psi|^2 - \bar{U}' \Psi + U \bar{\Psi}' \right) + EI |\Psi'|^2 dx \\
&= - \int_0^L \kappa GA |U' - \Psi|^2 + EI |\Psi'|^2 + \kappa GA (U \bar{\Psi})' dx \\
&= - \int_0^L \kappa GA |U' - \Psi|^2 + EI |\Psi'|^2 dx, \tag{4.37}
\end{aligned}$$

sendo  $|z|^2 = \bar{z}z$ .

Assim

$$\gamma^2 = - \frac{\int_0^L (\kappa GA |U' - \Psi|^2 + EI |\Psi'|^2) dx}{\int_0^L (\rho A |U|^2 + \rho I |\Psi|^2) dx}, \tag{4.38}$$

decorre então que  $\gamma^2$  é o negativo do quociente de duas grandezas não negativas e portanto  $\gamma = i\omega$ ,  $\omega$  real, ou seja,  $\gamma$  um número puramente imaginário.

A seguir, será estabelecido que o caso estacionário  $\gamma = 0$ , não deve ser considerado para a condição apoiada-apoiada.

De (4.38), segue que para  $\gamma = 0$  deve-se ter

$$U' - \Psi = 0 \quad \text{e} \quad \Psi' = 0, \tag{4.39}$$

e daí

$$\Psi(x) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad U(x) = \alpha_1 x + \alpha_2. \tag{4.40}$$

Para que  $U(x)$  e  $\Psi(x)$ , dadas em (4.40), satisfaçam as condições de contorno apoiada-apoiada em  $x = 0$  e  $x = L$ , resulta  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 0$ . Dessa forma, não existindo modos não nulos, considera-se  $\gamma^2 < 0$ . Quando a equação característica (4.17) tiver soluções do tipo  $\gamma = i\omega$ ,  $\omega$  real, o valor  $\omega$  será referido como frequência natural. Pela discussão anterior, tem-se que para as condições de contorno apoiada-apoiada, todos os autovalores estão associados a frequências naturais.



Para frequências naturais, segue que as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  em (2.29)-(2.30) são reais e da equação (4.2), segue que

$$\mathbf{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbf{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}(\omega)\mathbf{w}(x) = 0, \quad (4.41)$$

com

$$\mathbb{K}(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho A & 0 \\ 0 & -\omega^2 \rho I + \kappa GA \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

é uma equação com coeficientes matriciais reais. Segue que as soluções do tipo exponencial (3.1) tornam-se periódicas no tempo,

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{i\omega t} \mathbf{w}(x), \quad (4.43)$$

onde os modos  $\mathbf{w}(x)$  são reais.

Supondo que  $\mathbf{w}_1(x)$ ,  $\mathbf{w}_2(x)$  modos associados aos autovalores  $\gamma = i\omega_1$  e  $\gamma = i\omega_2$ , respectivamente. De (3.3) decorre

$$(\mathbf{K} - \omega_1^2 \mathbf{M}) \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{K} - \omega_2^2 \mathbf{M}) \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}, \quad (4.44)$$

e por  $U(x)$  e  $\Psi(x)$  serem reais segue

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{K}\mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{K}\mathbf{w}_2 \rangle, \quad (4.45)$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{M}\mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{M}\mathbf{w}_2 \rangle, \quad (4.46)$$

e então

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{M}\mathbf{w}_1 \rangle = 0. \quad (4.47)$$

Conseqüentemente, as autofunções correspondentes a autovalores distintos, que são frequências naturais distintas, são ortogonais com respeito a  $\mathbf{M}$ . Observa-se que também são ortogonais com respeito a matriz  $\mathbf{K}$ , pois de (4.44) tem-se

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{K}\mathbf{w}_1 \rangle - \omega_1^2 \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{M}\mathbf{w}_1 \rangle = 0,$$

e por  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  serem ortogonais em relação a  $\mathbf{M}$  resulta

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{K}\mathbf{w}_1 \rangle = 0.$$

### 4.3 Natureza das raízes $\epsilon$ e $\delta$

Retomando a equação (3.58), considerando  $\gamma = i\omega$ ,  $\omega$  real não nulo, tem-se

$$\Delta(\beta, \omega) = ab(\beta^4 + g^2(\omega)\beta^2 - r^4(\omega)) = 0, \quad (4.48)$$

cujas raízes são

$$\beta_{1,2} = \pm\epsilon \quad \text{e} \quad \beta_{3,4} = \pm i\delta, \quad (4.49)$$

sendo

$$\epsilon = \frac{1}{2}\sqrt{-2g^2(\omega) + 2\sqrt{\Omega}}, \quad (4.50)$$

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{2g^2(\omega) + 2\sqrt{\Omega}} \quad (4.51)$$

com

$$\Omega = (g^2(\omega))^2 + 4r^4(\omega), \quad (4.52)$$

$$g^2(\omega) = \omega^2 \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right), \quad r^4(\omega) = c\omega^2 \left( \frac{a - e\omega^2}{ab} \right), \quad (4.53)$$

e os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $e$  dados em (2.23).

Determina-se, a seguir, a natureza de  $\delta$  e  $\epsilon$ :

1.  $\delta$  é real:

Substituindo os termos  $g^2(\omega)$  e  $r^4(\omega)$  em  $\Omega$  tem-se

$$\Omega = \left( \frac{e}{b} - \frac{c}{a} \right)^2 \omega^4 + 4\omega^2 \frac{c}{b} > 0, \quad (4.54)$$

de onde decorre

$$\delta^2 = \frac{1}{2} \left( g^2(\omega) + \sqrt{\Omega} \right) > 0. \quad (4.55)$$

Assim,  $\delta > 0$  de (4.51).

Observação: Esta análise é realizada com  $\omega^2$ , então a relação (4.54) e as considerações sobre  $\delta$  também são válidas para  $\omega < 0$ .

2. A natureza de  $\epsilon$  é analisada com relação à frequência

$$\omega_c^2 = \frac{a}{e} = \frac{\kappa GA}{\rho I}, \quad (4.56)$$

chamada frequência crítica, como segue:

- (a) Para  $\omega^2 < \omega_c^2$  tem-se  $\epsilon$  real não nulo.
- (b) Para  $\omega^2 = \omega_c^2$  tem-se  $\epsilon = 0$ .
- (c) Para  $\omega^2 > \omega_c^2$  tem-se  $\epsilon$  puramente imaginário.

Verificação de (a):

Partindo de  $\omega^2 < \omega_c^2$  segue

$$\omega^2 < \omega_c^2 \Rightarrow r^4 > 0 \Rightarrow \epsilon^2 = \frac{1}{2} \left( -g^2 + \sqrt{(g^2)^2 + 4r^4} \right) > 0,$$

pois tem-se que  $g^2 > 0$ .

Nesta situação, tem-se  $\epsilon$  real não nulo, sendo as raízes  $\beta_{1,2}$  distintas e reais, e a solução  $d(x)$  é dada em (3.62)

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab\epsilon\delta(\delta^2 + \epsilon^2)}, \quad (4.57)$$

é representada por funções hiperbólicas e trigonométricas.

Verificação de (b):

Considera-se neste caso  $\omega^2 = \omega_c^2$  e assim

$$\omega^2 = \omega_c^2 \Rightarrow r^4(\omega_c) = c\omega_c^2 \left( \frac{a - e\omega_c^2}{ab} \right) = 0 \Rightarrow \epsilon^2 = \frac{1}{2} \left( -g^2 + \sqrt{(g^2)^2} \right) = 0,$$

pois  $g^2 > 0$ . E a solução  $d(x)$  é dada utilizando processo de limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$  como segue

$$d(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab\epsilon\delta(\delta^2 + \epsilon^2)} \right) = \frac{\delta x - \sin(\delta x)}{ab\delta^3}; \quad (4.58)$$

Verificação de (c):

Tem-se que

$$\omega^2 > \omega_c^2 \Rightarrow r^4 < 0 \Rightarrow \epsilon^2 = \frac{1}{2} \left( -g^2 + \sqrt{(g^2)^2 + 4r^4} \right) < 0,$$

pois  $g^2(\omega) > 0$ . Assim, segue que  $\epsilon = i\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  real não nulo.

A substituição da identidade

$$\operatorname{senh}(i\varepsilon x) = i \operatorname{sen}(\varepsilon x)$$

em (3.62) resulta

$$d(x) = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}(\delta x) - \delta \operatorname{sen}(\varepsilon x)}{ab\delta\varepsilon(\varepsilon^2 - \delta^2)}. \quad (4.59)$$

Nesta situação,  $d(x)$  é representada apenas por funções trigonométricas.

### 4.3.1 Equação característica em termos da base de Euler

Como observado anteriormente, a natureza da solução  $d(x)$ , periódica ou não, depende da localização da frequência natural,  $\omega$ , em relação à frequência crítica,  $\omega_c^2 = \frac{a}{e}$ . Utilizando as funções  $d(x)$  definidas em (4.57), (4.58) e (4.59) obtém-se de (4.28), respectivamente

$$\Delta_{\mathcal{U}}(i\omega) = (-e\omega^2 + a)a \frac{\operatorname{senh}(\varepsilon L) \operatorname{sen}(\delta L)}{a^2 b^2 \delta \varepsilon} = 0, \quad \text{para } \omega^2 < \omega_c^2, \quad (4.60)$$

$$\Delta_{\mathcal{U}}(i\omega) = (-e\omega^2 + a)a \frac{\operatorname{sen}(\delta L)L}{a^2 b^2 \delta} = 0, \quad \text{para } \omega^2 = \omega_c^2, \quad (4.61)$$

$$\Delta_{\mathcal{U}}(i\omega) = (-e\omega^2 + a)a \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon L) \operatorname{sen}(\delta L)}{a^2 b^2 \delta \varepsilon} = 0, \quad \text{para } \omega^2 > \omega_c^2. \quad (4.62)$$

Observações:

- Pode-se tomar de forma geral a equação (4.60) e a partir dela obter as equações (4.61) e (4.62), por processo de limite com  $\epsilon \rightarrow 0$  e substituindo  $\epsilon = i\varepsilon$  respectivamente.
- $\gamma = i\omega_c$  sempre satisfaz a equação (4.27), pois neste caso  $a - e\omega_c^2 = 0$ .

## 5 ESPECTROS DE FREQUÊNCIAS DO MODELO DE TIMOSHENKO

Neste capítulo é caracterizado o segundo espectro de frequências para o modelo de Timoshenko com condições de contorno apoiada-apoiada.

Sabe-se que para as condições de contorno apoiada-apoiada  $\gamma = i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ , e considerando  $\omega^2 \neq \frac{a}{e}$ , a equação característica (4.60) dada por

$$\Delta_{\mathcal{U}}(i\omega) = (e\omega^2 - a) a \frac{\sinh(\epsilon L) \operatorname{sen}(\delta L)}{b^2 a^2 \delta \epsilon} = 0, \quad (5.1)$$

é satisfeita para

$$\delta = \frac{n\pi}{L} \quad \text{ou} \quad \epsilon = i \frac{n\pi}{L}. \quad (5.2)$$

**Definição 3.** *Os espectros de frequências são definidos como:*

- *O primeiro espectro de frequências é definido pelo fator  $\operatorname{sen}(\delta L) = 0$  de (5.1), ou seja,  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ , com  $\epsilon^2 = \delta^2 - \omega^2 \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)$ .*
- *O segundo espectro de frequências é definido pelo fator  $\sinh(\epsilon L) = 0$  de (5.1), ou seja,  $\epsilon = i\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \frac{n\pi}{L}$  com  $\delta^2 = \omega^2 \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) - \varepsilon^2$ .*

A equação (4.48)

$$\Delta(\beta, i\omega) = ab(\beta^4 + g^2(i\omega)\beta^2 - r^4(i\omega)) = 0, \quad (5.3)$$

com

$$g^2(i\omega) = \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega^2, \quad r^4(i\omega) = c\omega^2 \left( \frac{a - e\omega^2}{ab} \right), \quad (5.4)$$

é reescrita da forma

$$\omega^4 + \left[ \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \beta^2 - \frac{a}{e} \right] \omega^2 + \frac{ab}{ce} \beta^4 = 0. \quad (5.5)$$

Substituindo-se

$$\beta_{1,2} = i\delta = i\frac{n\pi}{L}, \quad (5.6)$$

$$\beta_{3,4} = \epsilon = i\frac{n\pi}{L}, \quad (5.7)$$

em (5.5), resulta a equação

$$\omega^4 - \left[ \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{a}{e} \right] \omega^2 + \frac{ab}{ce} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 = 0, \quad (5.8)$$

referenciada, em [17], como *equação de frequência*, cujas raízes são

$$\begin{aligned} \omega_1^2(n) &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{a}{e} - \sqrt{\left( \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{a}{e} \right)^2 - 4\frac{ab}{ce} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4} \right], \\ \omega_2^2(n) &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{a}{e} + \sqrt{\left( \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{a}{e} \right)^2 - 4\frac{ab}{ce} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Observação: Para a escolha  $n = 0$  a raiz  $\omega_1^2(0) = 0$ , mas como já observado anteriormente, o valor de  $\omega = 0$  não é considerado frequência natural para a viga com condições apoiada-apoiada. Já para  $n = 0$  a raiz  $\omega_2^2(0) = \frac{a}{e} = \omega_c^2$ . No decorrer deste trabalho considera-se  $n \neq 0$ .

## 5.1 Propriedades das frequências $\omega_1^2(n)$ e $\omega_2^2(n)$

Nesta seção são demonstradas propriedades das raízes  $\omega_1^2(n)$  e  $\omega_2^2(n)$  da equação (5.8), relacionando-as com a frequência crítica,  $\omega_c^2 = \frac{a}{e}$ , e com as frequências preditas pela teoria de Euler-Bernoulli.

- As raízes  $\omega_1^2(n)$  e  $\omega_2^2(n)$  são reais e consequentemente  $\omega_1^2(n) < \omega_2^2(n)$ ,  $n \neq 0$ .

De fato, utilizando a desigualdade<sup>1</sup>

$$\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right)^2 - 4\frac{ab}{ce} \geq 0, \quad (5.10)$$

segue que

$$\Lambda = \left(\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{a}{e}\right)^2 - 4\frac{ab}{ce} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 > 0, \quad (5.11)$$

e então

$$\omega_1^2(n) = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{a}{e} - \sqrt{\Lambda} \right], \quad (5.12)$$

$$\omega_2^2(n) = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{a}{e} + \sqrt{\Lambda} \right], \quad (5.13)$$

são reais, e  $\omega_1^2(n) < \omega_2^2(n)$ .

**Observação:** A igualdade em (5.10) só ocorre para o caso  $\frac{b}{e} = \frac{a}{c}$ . Considerando as constantes definidas em (2.23) e o módulo de cisalhamento dado em termos do módulo de Young pela relação  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , tem-se

$$\frac{b}{e} - \frac{a}{c} = \frac{E}{\rho} \left(1 - \frac{\kappa}{2(1+\nu)}\right) = 0, \quad \text{para } \nu = \frac{\kappa}{2} - 1.$$

- $\omega_2^2(n) > \omega_c^2$ ,  $n \neq 0$ .

Novamente utilizando a desigualdade

$$\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right)^2 - 4\frac{ab}{ce} \geq 0, \quad (5.14)$$

tem-se

$$\omega_2^2(n) = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{a}{e} + \sqrt{\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + 2\left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right) \frac{a}{e} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{a^2}{e^2} - 4\frac{ab}{ce} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4} \right] >$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{a}{e} + \sqrt{\frac{a^2}{e^2}} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{e} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{a}{e} > \frac{a}{e} = \omega_c^2$$

assim

$$\omega_2^2(n) > \omega_c^2. \quad (5.15)$$

---

<sup>1</sup> $(A+B)^2 \geq 4AB$

- As frequências  $\omega_1^2(n)$  localizam-se acima ou abaixo da frequência crítica,  $\omega_c^2 = \frac{a}{e}$ , dependendo do valor de  $n$ , como segue:

1.  $\omega_1^2 \leq \omega_c^2$ , para  $0 \leq n \leq N$ ,  $N = \sqrt{\frac{L^2}{\pi^2} \left( \frac{c}{e} + \frac{a}{b} \right)}$ .

2.  $\omega_1^2 > \omega_c^2$ , para  $n > N$ .

Tomando

$$\omega_1^2(n) > \frac{a}{e}$$

segue

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{a}{e} - \sqrt{\left( \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{a}{e} \right)^2 - 4 \frac{ab}{ce} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4} \right] > \frac{a}{e},$$

$$\left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 - \frac{a}{e} > \sqrt{\left( \left( \frac{b}{e} + \frac{a}{c} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{a}{e} \right)^2 - 4 \frac{ab}{ce} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e manipulando algebricamente resulta

$$\left( \frac{c}{e} + \frac{a}{b} \right) \frac{L^2}{\pi^2} < n^2,$$

assim  $\omega_1^2(n) > \frac{a}{e}$  para  $n > N$  e  $n < -N$ , sendo  $N = \sqrt{\left( \frac{c}{e} + \frac{a}{b} \right) \frac{L^2}{\pi^2}}$ . No entanto, para  $\omega_1^2(n)$  tem-se  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ , e como já observado anteriormente  $\delta > 0$ , dessa forma considera-se apenas o caso  $n > N$ . E consequentemente  $\omega_1^2(n) \leq \omega_c^2$  para  $0 \leq n \leq N$ .

- As frequências  $\omega_1^2(n)$  são menores que os valores preditos pela teoria de Euler-Bernoulli, denotadas por  $\omega_{EB}^2(n) = \frac{EI}{\rho A} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4$ .

De fato, pelo produto das raízes da equação (5.8), tem-se

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{ab}{ce} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4,$$



substituindo  $\omega_c^2 = \frac{a}{e}$ , e utilizando as constantes definidas em (2.23) segue

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \omega_c^2 \frac{EI}{\rho A} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4. \quad (5.16)$$

Por [21], as frequências da Teoria de Euler Bernoulli para as condições apoiada-apoiada são  $\omega_{EB}^2 = \frac{EI}{\rho A} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4$  e então

$$\omega_{EB}^2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_c^2} \omega_1^2, \quad (5.17)$$

e pela desigualdade (5.15) em (5.17), decorre

$$\omega_{EB}^2 > \omega_1^2. \quad (5.18)$$

Na literatura [17], para cada valor  $n$ , a menor raiz  $\omega_1^2(n)$  é considerada a que corresponde ao valor de  $\omega^2(n)$  previsto pela teoria de Euler-Bernoulli, ou seja  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ . Esta escolha é justificada pelo fato de que  $\omega_1^2(n)$  é menor que o valor clássico  $\omega_{EB}^2(n)$ .

**Proposição 1.** *As frequências  $\omega^2(n)$ ,  $\omega \neq 0$  não podem gerar os valores  $\delta^2 = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$  e  $\epsilon^2 = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$ , de maneira simultânea.*

Retomando  $\epsilon$  e  $\delta$  dados em (3.59) e reescrevendo-as em termos das constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $e$  tem-se

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega^2 + \sqrt{\Omega} \right], \quad \delta^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega^2 + \sqrt{\Omega} \right], \quad (5.19)$$

com

$$\Omega = \left( \frac{e}{b} - \frac{c}{a} \right)^2 \omega^4 + 4\omega^2 \frac{c}{b} > 0. \quad (5.20)$$

Supondo que  $\omega^2(n)$  satisfaz  $\delta^2 = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$  e  $\epsilon^2 = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$  segue

$$\left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega^2 + \sqrt{\left( \frac{e}{b} - \frac{c}{a} \right)^2 \omega^4 + 4\omega^2 \frac{c}{b}} \right], \quad (5.21)$$

$$- \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega^2 + \sqrt{\left( \frac{e}{b} - \frac{c}{a} \right)^2 \omega^4 + 4\omega^2 \frac{c}{b}} \right], \quad (5.22)$$

decorrendo que

$$\left(\frac{e}{b} - \frac{c}{a}\right)^2 \omega^4 + 4\omega^2 \frac{c}{b} = 0. \quad (5.23)$$

A igualdade acima é um absurdo, pois para  $\omega$  real e não nulo, que é o caso das frequências da viga apoiada-apoiada, tem-se

$$\left(\frac{e}{b} - \frac{c}{a}\right)^2 \omega^4 + 4\omega^2 \frac{c}{b} > 0. \quad (5.24)$$

Logo  $\omega^2(n)$  não satisfaz simultaneamente  $\delta^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  e  $\epsilon^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ .

Tem-se agora condições de fornecer uma definição para os espectros de frequência considerando as frequências que compõem cada um dos espectros [17].

**Definição 4.** *Dadas as raízes  $\omega_1^2(n)$  e  $\omega_2^2(n)$  da equação de frequência (5.8)*

- *As raízes menores  $\omega_1^2(n)$  compõem o primeiro espectro de frequências, e são consideradas correspondentes aos valores  $\omega^2$  preditos pela teoria de Euler-Bernoulli, satisfazendo  $\delta^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ .*
- *As raízes maiores  $\omega_2^2(n)$  constituem o segundo espectro de frequências e satisfazem  $\epsilon^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ .*

Observação:

Em princípio,  $\omega_1^2(n)$  poderia provir da equação da frequência para os valores  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  ou  $\epsilon = i\frac{n\pi}{L}$ . No entanto, foi estabelecido que  $\omega_1^2(n) < \omega_c^2$  para  $0 < n < N$ , onde  $N = \sqrt{\frac{L^2}{\pi^2} \left(\frac{c}{e} + \frac{a}{b}\right)}$ , obtendo-se para estes valores de  $n$  que  $\epsilon^2 > 0$ . Isto exclui que  $\omega_1^2(n)$ , para todo  $n$ , venha a ser obtido de  $\epsilon = i\frac{n\pi}{L}$ .

## 6 MODOS DE VIBRAÇÃO DA VIGA APOIADA-APOIADA

De maneira geral, tem-se os modos de vibração da forma (3.39)

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2, \quad (6.1)$$

com

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

ou ainda substituindo  $\mathbf{h}(x)$  e  $\mathbf{h}'(x)$ , dadas em (3.64)-(3.65), segue

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) = & \begin{bmatrix} (-bd''(x) + (e\gamma^2 + a)d(x))c_{11} - ad'(x)c_{21} \\ ad'(x)c_{11} + (-ad''(x) + c\gamma^2d(x))c_{21} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} (-bd'''(x) + (e\gamma^2 + a)d'(x))c_{12} - ad''(x)c_{22} \\ ad''(x)c_{12} + (-ad'''(x) + c\gamma^2d'(x))c_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Para a viga com condições de contorno apoiada-apoiada determinou-se, em (4.21) e (4.22), as constantes  $c_{21} = c_{12} = 0$ , com  $\gamma = i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ . Assim, o modo de vibração dado em (6.3) reduz-se a

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} [-bd''(x) + (a - e\omega^2)d(x)]c_{11} + [-ad''(x)]c_{22} \\ [ad'(x)]c_{11} - [ad'''(x) + c\omega^2d'(x)]c_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

sendo  $c_{11}$  e  $c_{22}$  determinadas pela solução do sistema (4.23).

Para garantir a existência de uma solução não trivial do sistema homogêneo (4.23), exigiu-se que

$$\det(\mathbf{D}) = 0, \quad (6.5)$$

isso leva a duas possibilidades em relação a nulidade<sup>1</sup>, ou a nulidade de  $\mathbf{D}$  é 1, ou a nulidade de  $\mathbf{D}$  é 2, pois as duas linhas da matriz  $\mathbf{D}$  devem ser linearmente dependentes para garantir que seu determinante seja zero.

---

<sup>1</sup>A nulidade de  $\mathbf{D}$  será denotada por  $nul(\mathbf{D})$ .

- Se  $nul(\mathbf{D}) = 1$ , pelo teorema do posto  $posto(\mathbf{D}) = 1$ . Neste caso, obtém-se um autovetor linearmente independente solução de (4.23), e  $\gamma$  é dito um autovalor simples.
- Se  $nul(\mathbf{D}) = 2$ , também pelo teorema, resulta  $posto(\mathbf{D}) = 0$ , portanto  $\mathbf{D}$  identicamente nula. Para esta situação, obtém-se duas soluções linearmente independentes de (4.23). O autovalor  $\gamma$  é chamado autovalor duplo.

## 6.1 Autovalores Duplos e Simples

De acordo com a definição, um autovalor  $\gamma = i\omega$  será duplo se a matriz  $\mathbf{D}$  (4.26) for identicamente nula. É importante lembrar que, ao tomar  $\gamma$  autovalor, tem-se satisfeita a equação  $\Delta_{\mathcal{U}}(\gamma) = \det(\mathbf{D}) = 0$ .

**Teorema 1.** *Seja  $\gamma = i\omega$  um autovalor. Então  $\gamma$  é autovalor duplo se e somente se  $d''(L) = 0$ .*

*Demonstração:*

( $\Rightarrow$ ) Supondo  $\gamma = i\omega$  duplo, tem-se pela definição que  $\mathbf{D}$  em (4.26) é identicamente nula, logo a coordenada  $\mathbf{D}_{12} = -ad''(L) = 0$  implicando que  $d''(L) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha-se  $d''(L) = 0$ . Por ser  $\gamma = i\omega$  autovalor, segue de (4.27) que

$$0 = \Delta_{\mathcal{U}} = (-e\omega^2 + a) \left[ a[d''(L)]^2 + \frac{(bc+ea)\omega^2}{b} d(L)d'''(L) - \frac{\omega^2 c(-e\omega^2 + a)}{b} [d(L)]^2 \right] = -\frac{c\omega^2}{b} ((-e\omega^2 + a)d(L))^2.$$

Utilizando esta condição, segue que a matriz  $\mathbf{D}$  é identicamente nula.

Para determinar os autovalores duplos, deve-se então determinar os valores de  $\omega$  tais que  $d''(L) = 0$ , onde

$$d''(L) = \begin{cases} \frac{\sinh(\epsilon L)\epsilon + \sin(\delta L)\delta}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)}, \omega^2 < \omega_c^2, \\ \frac{\sin(\delta L)}{\delta ab}, \omega^2 = \omega_c^2, \\ -\frac{\sin(\epsilon L)\epsilon + \sin(\delta L)\delta}{ab(\epsilon^2 - \delta^2)}, \omega^2 > \omega_c^2, \epsilon = i\epsilon. \end{cases} \quad (6.6)$$

Por outro lado, do determinante (4.27) decorre que para estes valores de  $\omega$  deve-se ter  $(-e\omega^2 + a)d(L) = 0$ , onde

$$d(L) = \begin{cases} \frac{\delta \sinh(\epsilon L) - \epsilon \sin(\delta L)}{ab\epsilon\delta(\delta^2 + \epsilon^2)}, \omega^2 < \omega_c^2, \\ \frac{\delta L - \sin(\delta L)}{ab\delta^3}, \omega^2 = \omega_c^2, \\ \frac{\epsilon \sin(\delta L) - \delta \sin(\epsilon L)}{ab\delta\epsilon(\epsilon^2 - \delta^2)}, \omega^2 > \omega_c^2, \epsilon = i\epsilon. \end{cases} \quad (6.7)$$

Considerando  $\omega^2 < \omega_c^2$ , da condição  $d''(L) = 0$  segue de (6.6) que

$$\sinh(\epsilon L)\epsilon + \sin(\delta L)\delta = 0. \quad (6.8)$$

Por outro lado, sendo  $\omega^2 < \omega_c^2$ , do determinante (4.27) segue que  $d(L) = 0$  e por (6.7) tem-se

$$\delta \sinh(\epsilon L) - \epsilon \sin(\delta L) = 0. \quad (6.9)$$

Multiplicando as equações (6.8) e (6.9) respectivamente por  $\epsilon$  e  $\delta$ , e adicionando-as deve-se ter

$$(\epsilon^2 + \delta^2) \sinh(\epsilon L) = 0. \quad (6.10)$$

Sendo  $\epsilon$  real não nulo e  $\delta$  também real, a equação (6.10) não pode ser satisfeita. Assim, conclui-se que para  $\omega^2 < \omega_c^2$ , não existe um  $\omega$  que satisfaça simultaneamente  $d''(L) = 0$  e  $d(L) = 0$ , portanto não existem autovalores duplos para  $\omega^2 < \omega_c^2$ .

Para o caso  $\omega^2 = \omega_c^2$ , de (6.6) segue que  $\sin(\delta L) = 0$ , então  $\delta = n\pi/L$ . Conclui-se que autovalores duplos para  $\omega^2 = \omega_c^2$  ocorrem somente para  $\delta = n\pi/L$  e  $\epsilon = 0$ .

Agora, considerando  $\omega^2 > \omega_c^2$ , da condição  $d''(L) = 0$  segue de (6.6) que

$$-\text{sen}(\varepsilon L)\varepsilon + \text{sen}(\delta L)\delta = 0. \quad (6.11)$$

e do determinante (4.27) segue que  $d(L) = 0$ , assim de (6.7) tem-se

$$\varepsilon \text{sen}(\delta L) - \delta \text{sen}(\varepsilon L) = 0. \quad (6.12)$$

Multiplicando as equações (6.11) e (6.12) respectivamente por  $\delta$  e  $\varepsilon$ , e fazendo a diferença entre as equações resultantes tem-se

$$(\delta^2 - \varepsilon^2) \text{sen}(\delta L) = 0. \quad (6.13)$$

Como  $\omega \neq 0$  e real tem-se  $\delta^2 \neq \varepsilon^2$ , logo, para satisfazer a equação (6.13) exige-se  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ .

Retomando a equação (6.11), com  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  tem-se

$$-\text{sen}(\varepsilon L)\varepsilon = 0. \quad (6.14)$$

de onde decorre  $\varepsilon = \frac{m\pi}{L}$ . Assim, das condições  $d''(L) = 0$  e  $d(L) = 0$  tem-se  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\varepsilon = \frac{m\pi}{L}$ , com  $m \neq n$ .

A partir da análise realizada acima segue o resultado:

**Teorema 2.** *O autovalor  $\gamma = i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ , é duplo  $\Leftrightarrow \delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\varepsilon = i\varepsilon$ , onde  $n \neq 0$  e*

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{m\pi}{L}, & m \neq 0 \text{ com } \omega^2 > \omega_c^2, \\ 0, & \omega^2 = \omega_c^2, \end{cases} \quad (6.15)$$

com  $m \neq n$  pois  $\delta \neq \varepsilon$  para  $\omega \neq 0$ .

Este resultado está representado na Figura 6.1, na qual representa-se o plano  $\varepsilon - \delta$ . Neste plano são graficadas as retas  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\varepsilon = \frac{m\pi}{L}$ . A interpretação é realizada da seguinte forma: caso esteja no primeiro espectro, acima da frequência

crítica,  $\omega_1^2(n) > \omega_c^2$ , pela definição dos espectros tem-se  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ , que está no eixo. O valor de  $\varepsilon$  correspondente é calculado pela relação

$$\varepsilon^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \omega_1^2(n) \left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right). \quad (6.16)$$

Se  $\varepsilon$  calculado por (6.16) for igual à  $\frac{m\pi}{L}$ , tem-se a intersecção das retas  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\varepsilon = \frac{m\pi}{L}$ , e nesta situação, pelo teorema anterior tem-se  $\gamma = i\omega_1(n)$  um autovalor duplo.

Caso esteja no segundo espectro,  $\omega_2^2(n)$ , tem-se novamente pela definição  $\varepsilon = \frac{m\pi}{L}$ , calcula-se então  $\delta$  por

$$\delta^2 = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \omega_2^2(m) \left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right). \quad (6.17)$$

Se  $\delta$  calculado por (6.17) é igual a  $\frac{n\pi}{L}$ , tem-se a intersecção das retas  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\varepsilon = \frac{m\pi}{L}$ , caracterizando novamente pelo teorema anterior  $\gamma = i\omega_2(m)$  como autovalor duplo.

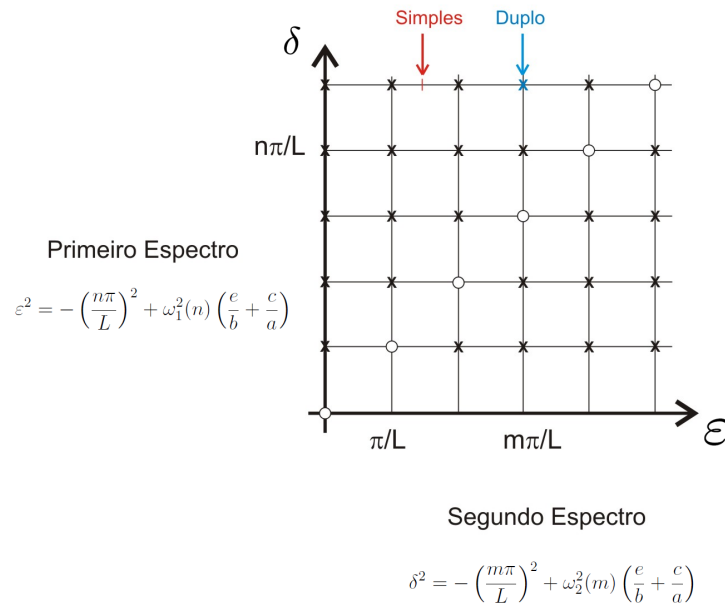


Figura 6.1: Plano  $\varepsilon - \delta$

**Corolário 1.** *O autovalor  $\gamma = i\omega$ ,  $\omega^2 > \omega_c^2$ , é duplo se, e somente se,  $\omega^2 = \omega_1^2(n) = \omega_2^2(m)$ ,  $m \neq n$ .*

*Demonstração:*

( $\Rightarrow$ ) Serão consideradas duas possibilidades separadamente, o caso em que  $\omega^2 = \omega_1^2(n)$  e o caso em que  $\omega^2 = \omega_2^2(m)$ .

*Caso  $\omega^2 = \omega_1^2(n)$ :*

Retomando

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega^2 - \sqrt{\left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)^2 \omega^4 + \frac{4c\omega^2(a - e\omega^2)}{ab}} \right] \quad (6.18)$$

e fazendo  $\omega^2 = x$ , reescreve-se

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) x - \sqrt{\left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)^2 x^2 + \frac{4cx(a - ex)}{ab}} \right]. \quad (6.19)$$

Derivando (6.19) em relação a  $x$  tem-se

$$(\varepsilon^2)' = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)^2 x^2 + \frac{4cx(a - ex)}{ab}}} \left( 2 \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)^2 x + \frac{4c(a - ex)}{ab} - \frac{4cxe}{ab} \right) \right]$$

e

$$(\varepsilon^2)'' = \frac{2c^2a^2}{x((ea - cb)^2x + 4ca^2b)\sqrt{\left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)^2 x^2 + \frac{4cx(a - ex)}{ab}}}, \quad (6.20)$$

como  $\omega$  é real, tem-se  $x = \omega^2 > 0$ , e também

$$\sqrt{\left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)^2 x^2 + \frac{4cx(a - ex)}{ab}} > 0.$$

Assim,  $(\varepsilon^2)'' > 0, \forall x$ , de onde decorre que  $(\varepsilon^2)'$  é uma função crescente de  $x$ . Como

$$(\varepsilon^2)'(\omega_c^2) = \frac{ec}{ea + cb} > 0,$$

tem-se que  $(\varepsilon^2)' > 0$ , para  $\omega^2 > \omega_c^2$ . E então, conclui-se que  $\varepsilon^2(\omega^2)$  é uma função crescente para  $\omega^2 > \omega_c^2$ .



Seendo  $\omega^2 = \omega_1^2(n)$  tem-se  $\delta^2(\omega_1^2(n)) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ . Da hipótese de ser duplo segue que,  $\omega_1^2(n) > \omega_c^2$  e  $\varepsilon^2(\omega_1^2(n)) = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$ .

No entanto, existe uma frequência do segundo espectro  $\omega_2^2(m)$  tal que  $\varepsilon^2(\omega_2^2(m)) = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$ . Assim, tem-se  $\omega_1^2(n) > \omega_c^2$  e  $\omega_2^2(m) > \omega_c^2$  satisfazendo  $\varepsilon^2(\omega_1^2(n)) = \varepsilon^2(\omega_2^2(m))$ , como  $\varepsilon^2$  crescente para  $\omega^2 > \omega_c^2$ , segue  $\omega_1^2(n) = \omega_2^2(m)$ .

*Caso  $\omega^2 = \omega_2^2(m)$ :*

Supondo agora  $\omega^2 = \omega_2^2(m)$ , tem-se da hipótese de ser duplo que  $\delta^2(\omega_2^2(m)) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  e  $\varepsilon^2(\omega_2^2(m)) = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$ . Por outro lado, existe uma frequência do primeiro espectro  $\omega_1^2(n)$  tal que  $\delta^2(\omega_1^2(n)) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ . Tomando

$$\delta^2(\omega_1^2(n)) - \delta^2(\omega_2^2(m)) = 0,$$

e substituindo  $\delta$  dado na equação (4.51) tem-se

$$g^2(\omega_1^2(n)) - g^2(\omega_2^2(m)) + \sqrt{g^2(\omega_1^2(n))^2 + 4r^4(\omega_1^2(n))} - \sqrt{g^2(\omega_2^2(m))^2 + 4r^4(\omega_2^2(m))} = 0.$$

Substituindo os valores de  $g^2$  e  $r^4$  dados em (4.53), tem-se

$$\left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right) (\omega_1^2(n) - \omega_2^2(m)) + \Omega_1 - \Omega_2 = 0,$$

sendo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right)^2 \omega_1^4(n) + \frac{4c\omega_1^2(n)(a - e\omega_1^2(n))}{ab}}, \\ \Omega_2 &= \sqrt{\left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right)^2 \omega_2^4(m) + \frac{4c\omega_2^2(m)(a - e\omega_2^2(m))}{ab}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Supondo que  $\omega_1^2(n) > \omega_2^2(m)$ , resulta  $\Omega_1 > \Omega_2$ , logo

$$\delta^2(\omega_1^2(n)) - \delta^2(\omega_2^2(m)) > 0.$$

E supondo  $\omega_2^2(m) > \omega_1^2(n)$ , resulta  $\Omega_2 > \Omega_1$ , e portanto

$$\delta^2(\omega_1^2(n)) - \delta^2(\omega_2^2(m)) < 0.$$

Assim, a igualdade

$$\delta^2(\omega_1^2(n)) - \delta^2(\omega_2^2(m)) = 0,$$

ocorre apenas para o caso  $\omega_1^2(n) = \omega_2^2(m)$ .

( $\Leftarrow$ ) Supondo  $\omega^2 = \omega_1^2(n) = \omega_2^2(m)$ , pela definição dos espectros tem-se

$$\delta^2 = \frac{n\pi}{L} \quad \text{e} \quad \varepsilon^2 = \frac{m\pi}{L}.$$

Assim, pelo teorema 2 tem-se que  $\gamma = i\omega^2$  é um autovalor duplo. ■

Observa-se então que a existência de autovalores duplos requer a seguinte relação

$$n^2\pi^2 + m^2\pi^2 = L^2 \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega_1^2(n) = L^2 \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega_2^2(m). \quad (6.22)$$

A Figura 6.2 ilustra a existência dos dois espectros de frequência acima da frequência crítica, e a duplicidade do autovalor quando  $\omega_1^2(n) = \omega_2^2(m)$ .

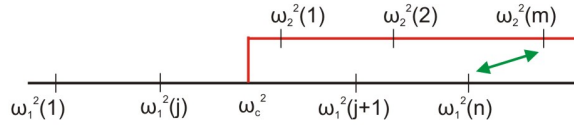


Figura 6.2: Espectros de frequências

## 6.2 Modos de vibração associados a autovalores simples

Da primeira equação do sistema (4.23)

$$\mathbf{D}\mathbf{c} = 0, \quad (6.23)$$

com a matriz  $\mathbf{D}$  dada em (4.26) pode-se escolher

$$c_{22} = \frac{-bd''(L) + (-e\omega^2 + a)d(L)}{ad''(L)} c_{11}, \quad (6.24)$$

pois da hipótese de que  $\gamma = i\omega$  é um autovalor simples tem-se pelo Teorema 1 que  $d''(L) \neq 0$ .

Substituindo  $c_{22}$  (6.24) em (6.4) segue

$$\mathbf{w}(x) = c_{11} \left[ \begin{array}{c} (a - e\omega^2)d(x) - \frac{(a - e\omega^2)d(L)}{d''(L)}d''(x) \\ \frac{(a^2 + c\omega^2b)d''(L) - c\omega^2(a - e\omega^2)d(L)}{ad''(L)}d'(x) + \frac{abd''(L) - a(a - e\omega^2)d(L)}{ad''(L)}d'''(x) \end{array} \right], \quad (6.25)$$

tomando  $c_{11} = \eta ad''(L)$ , com  $\eta \neq 0$

$$\mathbf{w}(x) = \eta \left[ \begin{array}{c} a(a - e\omega^2) [d''(L)d(x) - d''(x)d(L)] \\ [(a^2 + c\omega^2b)d''(L) - c\omega^2(a - e\omega^2)d(L)] d'(x) + [abd''(L) - a(a - e\omega^2)d(L)] d'''(x) \end{array} \right]. \quad (6.26)$$

Dividindo  $\mathbf{w}(x)$  por  $d(L)a(a - e\omega^2)$  tem-se, para  $\omega^2 \neq \frac{a}{e}$

$$\mathbf{w}(x) = \eta \left[ \begin{array}{c} \frac{d''(L)}{d(L)}d(x) - d''(x) \\ \left[ \frac{(a^2 + c\omega^2b)d''(L)}{(a(a - e\omega^2)d(L))} - \frac{c\omega^2}{a} \right] d'(x) + \left[ \frac{bd''(L)}{(a - e\omega^2)d(L)} - 1 \right] d'''(x) \end{array} \right]. \quad (6.27)$$

A partir deste ponto, analisa-se separadamente os modos para a frequência crítica, frequências do primeiro e do segundo espectros:

- *Modo de vibração para o primeiro espectro de frequências:*

Considerando  $\omega^2 = \omega_1^2(n)$ , sendo  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ , tem-se

$$\frac{d''(L)}{d(L)} = \epsilon^2$$

que substituindo em (6.27) e escolhendo  $\eta = -ab\delta$  resulta

$$\mathbf{w}(x) = \left[ \begin{array}{c} -ab\delta d(x)\epsilon^2 + ab\delta d''(x) \\ -ab\delta \left[ \left( \frac{(a^2 + c\omega^2b)}{(a(a - e\omega^2))} \right) \epsilon^2 - \frac{c}{a}\omega^2 \right] d'(x) + \left( \frac{b}{a - e\omega^2} \epsilon^2 - 1 \right) d'''(x) \end{array} \right]. \quad (6.28)$$

Tomando a constante  $K_n = \delta \frac{(-b\epsilon^2 - e\omega^2 + a)}{(a - e\omega^2)}$ , e sabendo que da equação (3.58) e de suas raízes (3.59) decorre

$$\epsilon^2 c\omega^2 b + c\omega^4 e - c\omega^2 a + \epsilon^4 ab + \epsilon^2 a e \omega^2 = 0,$$

o modo (6.28) é reescrito como

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} -\delta abd(x)\epsilon^2 + \delta abd''(x) \\ K_n(-\epsilon^2 abd'(x) + abd'''(x)) \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Finalmente, utilizando as relações dadas em (3.81) segue

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}(\delta x) \\ K_n \cos(\delta x) \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Substituindo em (6.30) os valores  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\epsilon^2 = \delta^2 - \omega^2 \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)$  resulta

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \\ K_n \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

com

$$K_n = n\pi \frac{-bn^2\pi^2 a + \omega^2 L^2 cb + a^2 L^2}{L^3 a(a - e\omega^2)}.$$

• *Modo de vibração para o segundo espectro de frequências:*

Considerando  $\omega^2 = \omega_2^2(n)$ , sendo  $\epsilon = i\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \frac{n\pi}{L}$ , tem-se

$$\frac{d''(L)}{d(L)} = -\delta^2,$$

que substituindo em (6.27) e escolhendo  $\eta = -ab\epsilon$  resulta

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} ab\epsilon\delta^2 d(x) + ab\epsilon d''(x) \\ -ab\epsilon \left[ \left( -\frac{(a^2 + cb\omega^2)}{a(a - e\omega^2)} \delta^2 - \frac{\epsilon}{a} \omega^2 \right) d'(x) + \left( -\frac{b\delta^2}{a - e\omega^2} - 1 \right) d'''(x) \right] \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Tomando a constante  $C_n = \frac{\epsilon(b\delta^2 - e\omega^2 + a)}{(a - e\omega^2)}$  e sabendo que da equação (3.58) e suas raízes (3.59) tem-se

$$ab\delta^4 - \omega^2\delta^2 ea - cb\omega^2\delta^2 - c\omega^2 a + ce\omega^4 = 0,$$

o modo (6.32) é reescrito como

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} ab\epsilon\delta^2 d(x) + ab\epsilon d''(x) \\ C_n(ab\delta^2 d'(x) + bad'''(x)) \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Utilizando as relações dadas em (3.81) segue

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \sinh(\epsilon x) \\ C_n \cosh(\epsilon x) \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Substituindo em (6.34) os valores  $\epsilon = i\frac{n\pi}{L}$  e  $\delta^2 = \epsilon^2 + \omega^2 \left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right)$  resulta

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} i \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \\ i K_n \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

com

$$K_n = n\pi \frac{-abn^2\pi^2 + cb\omega^2 L^2 + a^2 L^2}{L^3 a(a - e\omega^2)},$$

ou ainda multiplicando o modo por  $-i$

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \\ K_n \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

- *Modo de vibração para a frequência crítica*

Considerando  $\omega^2 = \frac{a}{e}$ , com  $\epsilon = 0$ , o modo dado em (6.26) reduz-se a

$$\mathbf{w}(x) = \eta \begin{bmatrix} 0 \\ \left( a^2 + \frac{cab}{e} \right) d''(L)d'(x) + abd''(L)d'''(x) \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Considerando  $d(x)$  dada em (4.58) que resulta  $d''(L) = \frac{\operatorname{sen}(\delta L)}{\delta ab}$  e escolhendo  $\eta = \frac{ab\delta}{\operatorname{sen}(\delta L)}$  decorre de (6.37) o seguinte modo

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a(ae+cb)}{e} d'(x) + abd'''(x) \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Observando que para  $\omega_c^2 = \frac{a}{e}$ ,  $\delta^2 = \omega_c^2 \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right)$ , tem-se  $\frac{a(ae + cb)}{e} = ab\delta^2$ , o modo (6.38) é da forma

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ ba\delta^2 d'(x) + abd'''(x) \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

da relação dada em (3.83) resulta

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

Como consequência dos modos obtidos para a frequência crítica e frequências do primeiro e segundo espectro, segue o seguinte teorema:

**Teorema 3.** *Todos os modos associados a autovalores simples  $\gamma = i\omega$ ,  $\omega^2 \neq \omega_c^2$ , são da forma*

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \\ K_n \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \end{bmatrix},$$

com

$$K_n = n\pi \frac{-abn^2\pi^2 + cb\omega^2 L^2 + a^2 L^2}{L^3 a(a - e\omega^2)}.$$

No caso de autovalor simples crítico,  $\omega^2 = \omega_c^2$ , o modo associado é

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### 6.3 Modos de vibração associados a autovalores duplos

Seja  $\gamma = i\omega$  um autovalor duplo. O sistema (4.23) é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

permitindo escolhas arbitrárias de  $c_{11}$  e  $c_{22}$ . No entanto, para evitar modos nulos, a escolha deve satisfazer  $c_{11}^2 + c_{22}^2 > 0$ .

O modo de vibração de maneira geral dado em (6.4), com  $\gamma = i\omega$ , é

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} [-bd'''(x) + (a - e\omega^2)d(x)]c_{11} + [-ad'''(x)]c_{22} \\ [ad'(x)]c_{11} - [ad'''(x) + c\omega^2d'(x)]c_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Sabe-se que, no caso de autovalores duplos, para uma frequência  $\omega$  tem-se  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\epsilon = i\frac{m\pi}{L}$ ,  $m \neq n$  e  $\omega^2 = \omega_1^2(n) = \omega_2^2(m)$ .

Substituindo  $\delta$ ,  $\epsilon$  em  $d(x)$  e suas derivadas em (6.42) e realizando algumas operações algébricas, decorre que o modo é da forma

$$\mathbf{w}(x) = c_1 \mathbf{w}_n + c_2 \mathbf{w}_m \quad (6.43)$$

onde

$$\mathbf{w}_k(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ A_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias. Uma vez que  $m \neq n$ , segue que existem dois modos linearmente independentes. Os detalhes são descritos a seguir.

Em (6.42), serão consideradas duas escolhas particulares para as constantes  $c_{11}$  e  $c_{22}$ .

1. Escolhendo  $c_{11} = \frac{a\epsilon^2 + c\omega^2}{a}c_{22}$ .

Substituindo  $c_{11} = \frac{a\epsilon^2 + c\omega^2}{a}c_{22}$  em (6.42) tem-se

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} c_{22} \frac{(-ba\epsilon^2 - bc\omega^2 - a^2)}{a} d'''(x) + c_{22} \frac{(a^2\epsilon^2 + ac\omega^2 - e\omega^2 a\epsilon^2 - e\omega^4 c)}{a} d(x) \\ c_{22} a\epsilon^2 d'(x) - ac_{22} d'''(x) \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Escolhe-se convenientemente  $c_{22} = -\frac{a^2 b \delta}{ba\epsilon^2 + bc\omega^2 + a^2}$  resulta

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} -\epsilon^2 ab\delta d(x) + ab\delta d''(x) \\ A_n (-ba\epsilon^2 d'(x) + abd'''(x)) \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

com

$$A_n = \frac{a^2 \delta}{ba\epsilon^2 + bc\omega^2 + a^2}. \quad (6.47)$$

Utilizando novamente as relações obtidas de (3.81) decorre

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}(\delta x) \\ A_n \cos(\delta x) \end{bmatrix}, \quad (6.48)$$

e finalmente substituindo  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\epsilon = i\frac{m\pi}{L}$  segue

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

$$A_n = \frac{a^2 n \pi L}{-bam^2 \pi^2 + bc\omega^2 L^2 + a^2 L^2}, \quad (6.50)$$

ou ainda utilizando  $\epsilon^2 = \delta^2 - \omega^2 \left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right)$

$$A_n = \frac{an\pi L}{n^2 \pi^2 b - \omega^2 L^2 e + aL^2}. \quad (6.51)$$

2. Escolhendo  $c_{11} = -\frac{a\delta^2 - c\omega^2}{a}c_{22}$ .

Substituindo  $c_{11} = -\frac{a\delta^2 - c\omega^2}{a}c_{22}$  em (6.42) tem-se

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{c_{22}(-ba\delta^2 + bc\omega^2 + a^2)}{a}d'''(x) - \frac{c_{22}(a^2\delta^2 - ac\omega^2 - e\omega^2 a\delta^2 + e\omega^4 c)}{a}d(x) \\ -c_{22}a\delta^2 d'(x) - ac_{22}d'''(x) \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$



Convenientemente<sup>2</sup> escolhendo  $c_{22} = -\frac{a^2 b \epsilon}{-ba\delta^2 + bc\omega^2 + a^2}$ , resulta

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \epsilon ab\delta^2 d(x) + ab\epsilon d''(x) \\ B_m(ab\delta^2 d'(x) + abd'''(x)) \end{bmatrix}, \quad (6.53)$$

com

$$B_m = \frac{a^2 \epsilon}{-ba\delta^2 + bc\omega^2 + a^2}. \quad (6.54)$$

Utilizando novamente as relações obtidas de (3.81) decorre

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \sinh(\epsilon x) \\ B_n \cosh(\epsilon x) \end{bmatrix}, \quad (6.55)$$

e finalmente substituindo  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\epsilon = i\frac{m\pi}{L}$  segue, multiplicando por  $-i$ ,

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ A_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

sendo

$$B_m = iA_m, \quad \text{com} \quad A_m = \frac{a^2 m \pi L}{-ban^2 \pi^2 + bc\omega^2 L^2 + a^2 L^2}, \quad (6.57)$$

ou ainda utilizando  $\delta^2 = \epsilon^2 + \omega^2 \left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a}\right)$  tem-se

$$A_m = \frac{am\pi L}{bm^2\pi^2 - \omega^2 L^2 e + aL^2}. \quad (6.58)$$

### 6.3.1 Modos para a frequência crítica dupla

Sabe-se do teorema 2 que para classificar a frequência crítica,  $\omega_c^2$ , com  $\epsilon = 0$ , deve-se ter  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ . Analogamente ao desenvolvimento realizado acima, procura-se dois modos linearmente independentes associados a  $\omega_c$ , desta forma serão tomadas as mesmas escolhas particulares da relação entre  $c_{11}$  e  $c_{22}$ .

---

<sup>2</sup>Esta escolha de  $c_{22}$  não é válida para a frequência  $\omega_c$ , já que neste caso  $\epsilon = 0$ .

1. Escolhendo  $c_{11} = \frac{a\epsilon^2 + c\omega^2}{a}c_{22}$ ,

Tomando  $\epsilon = 0$  e  $\omega^2 = \frac{a}{e}$  em (6.46)

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} abd''(x) \\ A_n(abd'''(x)) \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

e utilizando as relações dadas em (3.83) resulta

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}(\delta x) \\ A_n \cos(\delta x) \end{bmatrix}, \quad (6.60)$$

ou ainda, substituindo  $\delta = \frac{n\pi}{L}$

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{bmatrix}, \quad (6.61)$$

onde

$$A_n = \frac{an\pi e}{L(bc + ae)}.$$

2. Escolhendo  $c_{11} = -\frac{a\delta^2 - c\omega^2}{a}c_{22}$ .

Partindo do modo dado em (6.52)

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{c_{22}(-ba\delta^2 + bc\omega^2 + a^2)}{a}d'''(x) - \frac{c_{22}(a^2\delta^2 - ac\omega^2 - e\omega^2a\delta^2 + e\omega^4c)}{a}d(x) \\ -c_{22}a\delta^2d'(x) - ac_{22}d'''(x) \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

substituindo  $\omega^2 = \omega_c^2$ ,  $\delta^2 = \omega_c^2\left(\frac{e}{b} + \frac{c}{a}\right)$ , e escolhendo  $c_{22} = -b$  tem-se

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ ba\delta^2d'(x) + abd'''(x) \end{bmatrix}, \quad (6.63)$$

e novamente das relação dadas em (3.83), segue o modo

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.64)$$

Assim, os dois modos linearmente independentes associados a frequência crítica, com  $\delta = \frac{n\pi}{L}$  e  $\epsilon = i\frac{m\pi}{L}$ ,  $m = 0$ , são

$$\mathbf{w}_n(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_m(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

De maneira geral, reunindo os resultados obtidos, segue:

**Teorema 4.** *Todos os modos associados a autovalores duplos  $\gamma = i\omega$  são da forma*

$$\mathbf{w}(x) = c_1 \mathbf{w}_n(x) + c_2 \mathbf{w}_m(x)$$

onde

- Para  $\omega_1^2(n) = \omega_2^2(m)$ ,  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ ,  $\epsilon = i\frac{m\pi}{L}$ ,  $m \neq n$

$$\mathbf{w}_n(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_m(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ A_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \end{bmatrix},$$

com

$$A_n = \frac{an\pi L}{b^2n^2\pi^2 - \omega^2L^2e + aL^2} \quad \text{e} \quad A_m = \frac{am\pi L}{bm^2\pi^2 - \omega^2L^2e + aL^2}.$$

- Para  $\omega^2 = \omega_c^2$ ,  $\delta = \frac{n\pi}{L}$ ,  $\epsilon = 0$

$$\mathbf{w}_m(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_n(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{bmatrix},$$

com

$$A_n = \frac{an\pi e}{L(bc + ae)}.$$

## 7 SIMULAÇÕES

Considere a viga apoiada-apoiada, ilustrada na Figura 7.1, com coe-

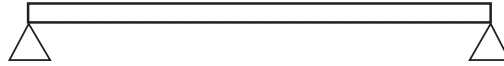


Figura 7.1: Viga apoiada-apoiada

ficiente de cisalhamento  $\kappa = 0,85$ , coeficiente de poisson  $\nu = 0,33$ , e os demais parâmetros fornecidos em [18] transcritos na Tabela 7.1.

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Módulo de Young - $E$	210	$GPa$
Densidade - $\rho$	7850	$kg/m^3$
Momento de inércia - $I$	0,025	$m^4$
Área da seção transversal - $A$	0,3	$m^2$
Comprimento - $L$	11,547	$m$
Módulo de cisalhamento - $G$	78,94736842	$GPa$

Tabela 7.1: Parâmetros para viga apoiada-apoiada [18]

A partir dos valores fornecidos para as constantes físicas, Tabela 7.1, serão obtidas, na sequência, as frequências do primeiro e segundo espectros, Tabela 7.2. Também serão apresentados os gráficos de  $U(x)$  e  $\Psi(x)$ , componentes do modo de vibração  $\mathbf{w}(x)$ , para determinados valores de  $n$ .

Substituindo os parâmetros, da Tabela 7.1, na equação de frequência (5.8) obtém-se

$$\omega^4 - (2,647504984 \cdot 10^5 n^2 \pi^2 + 1,025812940 \cdot 10^8) \omega^2 + 1,286352225 \cdot 10^{10} n^4 \pi^4 = 0 \quad (7.1)$$

cujas raízes  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , referentes ao primeiro e segundo espectros respectivamente, são apresentadas na Tabela 7.2.

$n$	Freq. 1ºespectro $\delta = \frac{n\pi}{L}$		Freq. 2ºespectro $\epsilon = i\frac{m\pi}{L}$	$m$
1	109,1460948			
2	421,4811740			
3	900,0515596			
4	1502,289133			
5	2191,224482			
13	8747,955424			
14	9597,155850			
Freq.crítica		10128,24239		
15	10445,43295		10255,84535	1
16	11292,23807		10623,35062	2
17	12137,23286		11193,21426	3
18	12980,22482		11921,91865	4
19	13821,12217		12771,23316	5

Tabela 7.2: Frequências naturais do primeiro e segundo espectros

Nas Figuras 7.2, 7.3, 7.4 estão graficadas as componentes de  $\mathbf{w}(x)$  normalizado, que são  $U(x)$  e  $\Psi(x)$ , para as frequências do primeiro e segundo espectros com  $n = 1, 2,$  e  $17$  respectivamente. É possível observar, que componentes dos modos de vibração para as frequências  $\omega_1(n)$  e  $\omega_2(n)$  diferem pela amplitude, como era de se esperar pelas observações e resultados do capítulo anterior.

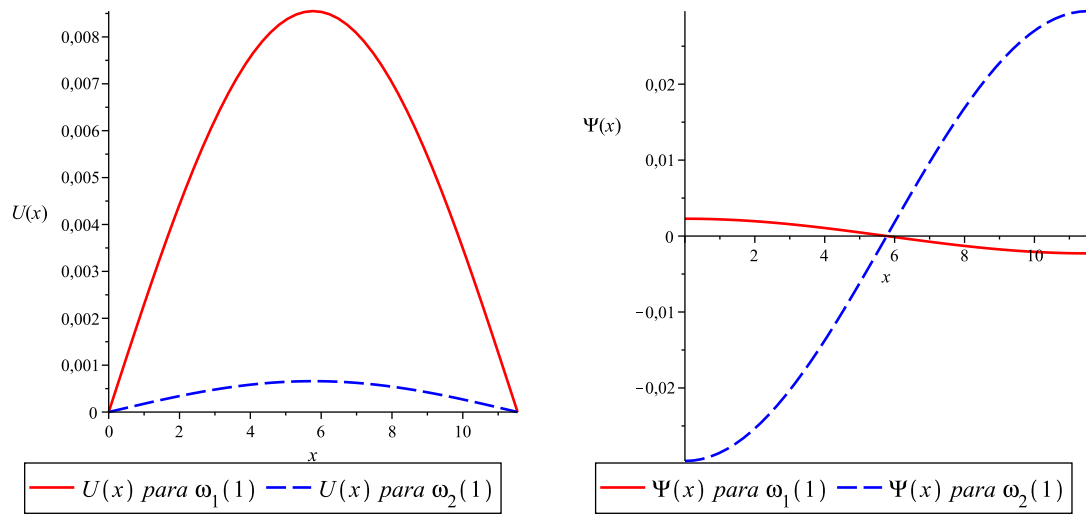


Figura 7.2: Componentes de  $\mathbf{w}(x)$ , normalizado, para  $\omega_1(1)$  e  $\omega_2(1)$

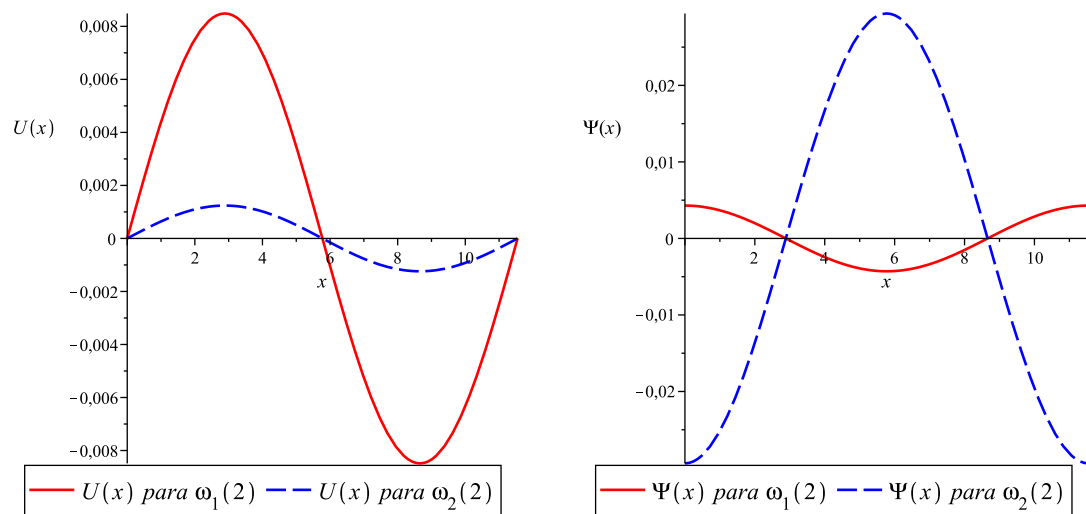


Figura 7.3: Componentes de  $\mathbf{w}(x)$ , normalizado, para  $\omega_1(2)$  e  $\omega_2(2)$

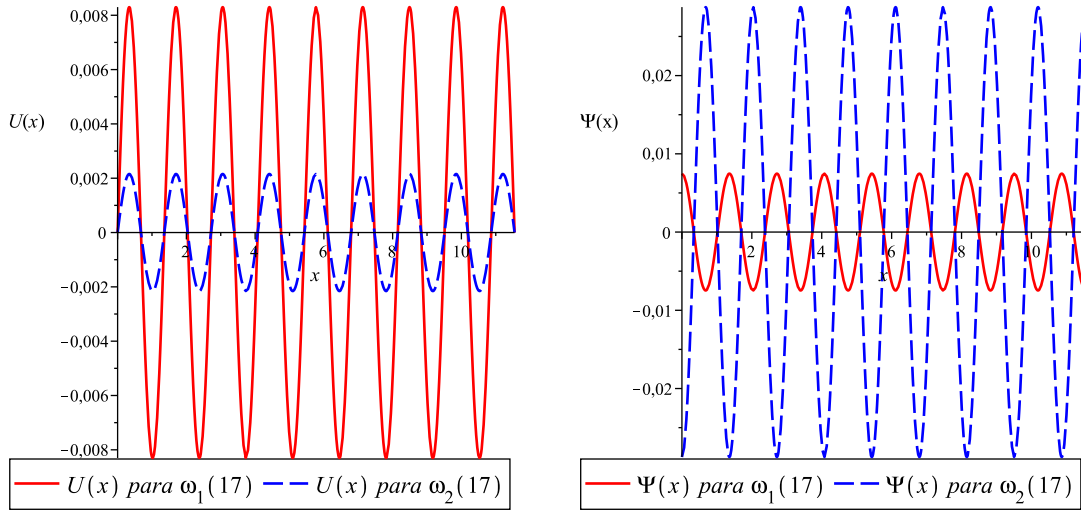


Figura 7.4: Componentes de  $\mathbf{w}(x)$ , normalizado, para  $\omega_1(17)$  e  $\omega_2(17)$

No que se refere à existência de autovalores duplos, Rensburg e Merwe [26] afirmam que sua existência prática é improvável, mas apresentam um exemplo e analisam o comportamento dos modos associados a autovalores relativamente próximos. A seguir é realizada esta análise para frequências da Tabela 7.2.

A diferença relativa entre as frequências  $\omega_1(16) = 11292, 23807$  e  $\omega_2(3) = 11193, 21426$  é

$$\frac{\omega_1(16) - \omega_2(3)}{\omega_1(16)} = 0,008769192554.$$

Assim, considera-se que  $\omega_1(16)$  e  $\omega_2(3)$  estão relativamente próximas. No entanto, a componente  $U(x)$  de seus modos são determinadas respectivamente por  $\sin\left(\frac{16\pi}{L}x\right)$  e por  $\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$ , possuindo número de nós bastante diferente. Esta diferença deve-se ao fato de que a frequência no primeiro espectro foi calculada para  $n$  maior que  $m$  da frequência no segundo espectro, a observação estende-se também à componente  $\Psi(x)$ . Na Figura 7.5, estão graficadas as componentes do modo de vibração para ambas as frequências.

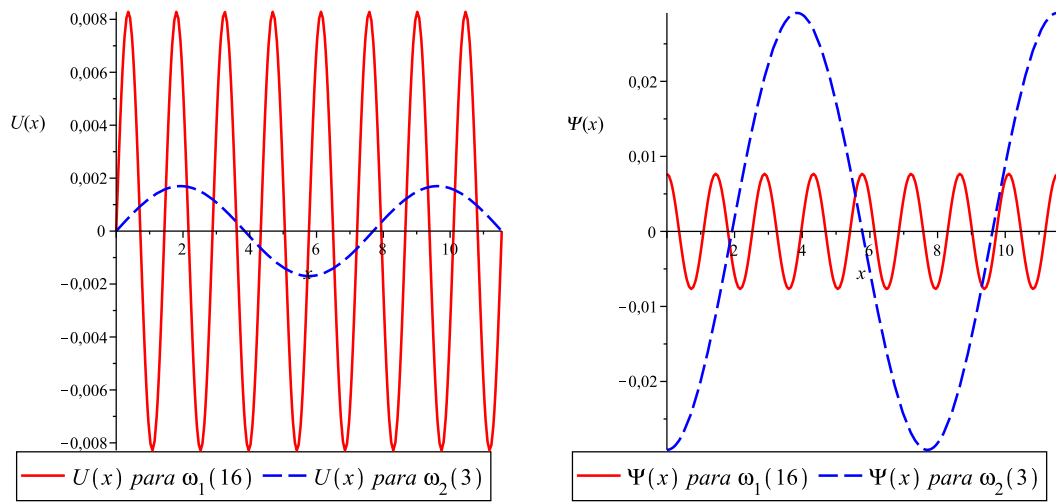


Figura 7.5: Componentes dos modos de vibração  $\mathbf{w}(x)$ , normalizados, associados às frequências  $\omega_1(16)$  e  $\omega_2(3)$



## 8 CONCLUSÕES

Em [25] é identificada a possibilidade de existência de uma "nova" família de frequências da viga de Timoshenko bi-apoiada, denominada segundo espectro de frequências. Esta "nova" família de frequências não foi considerada em trabalhos como [24], [15]. A existência e validade do segundo espectro tem sido discutida na literatura [17], [1], [22], [23], [2].

Neste trabalho, a partir da formulação matricial do modelo de Timoshenko, foi caracterizada analiticamente e evidenciada computacionalmente a existência do segundo espectro de frequências para as condições de contorno da viga apoiada-apoiada. Com a utilização da base matricial fundamental, dada analiticamente em termos da solução fundamental de uma equação diferencial escalar de quarta ordem, obteve-se resultados para classificar autovalores como simples e duplos. E posteriormente, o segundo espectro foi utilizado como ferramenta para esta classificação.

Os modos de vibração foram caracterizados para todas as frequências do modelo de Timoshenko, e foi observado que frequências relativamente próximas, mas localizadas em espectros diferentes, podem apresentar modos de vibração com número de nós bastante diferente.

Em continuação a este trabalho, pretende-se investigar a existência do segundo espectro de frequências para o modelo de Timoshenko não-local para uma viga bi-apoiada.

## Referências Bibliográficas

- [1] G. R. Bhashyam and G. Prathap. The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 76(3):407–420, 1981.
- [2] A. Bhaskar. Elastic waves in Timoshenko beams: the 'lost and found' of an eigenmode. *Proceedings the Royal of Society A- Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, 465:239–255, 2009.
- [3] G. Birkhoff and G. Rota. *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 1989.
- [4] A. G. Butkovskiy. *Structural theory of distributed systems*. John Wiley, New York, 1983.
- [5] J. Claeysen, E. Gallicchio, and A. Tamagna. *Sistemas Vibratórios Amortecidos*. Editora UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- [6] J. R. Claeysen, G. Canahualpa, and C. Jung. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics*, 30:65–78, 1999.
- [7] J. R. Claeysen and S. N. J. Costa. Modes for the coupled Timoshenko model with a restrained end. *Journal of Sound and Vibration*, 296:1053–1058, 2006.
- [8] J. R. Claeysen and T. Tsukazan. Dynamic solutions of linear matrix differential equations. *Quarterly of Applied Mathematics XLVIII*, 48(1):169–179, 1990.
- [9] R. D. Copetti. *Sistemas concentrados e distribuídos através da análise modal adjunta*. PhD thesis, Porto Alegre, 2002.

- [10] J. R. Claeysen e I. F. Ferreira. *A Resposta Impulso em Modelos Evolutivos e Estacionários*. Editora UFSM, Santa Maria, 2009.
- [11] Y. C. Fung. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall, INC., 1965.
- [12] E. D. Gallicchio. *Sistemas vibratórios: um enfoque através da solução dinâmica e da matriz de transferência*. PhD thesis, Porto Alegre, 1999.
- [13] J. Ginsberg. *Mechanical and Structural Vibrations: Theory and applications*. John Wiley, New York, 2001.
- [14] S. M. Han, H. Benaroya, and T. Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5):935–988, 1999.
- [15] T. C. Huang. The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams With Simple end Conditions. *Journal of Applied Mechanics*, pages 579–584, 1961.
- [16] W. Kaplan. *Ordinary differential equations*. Addison-Wesley, 1958.
- [17] M. Levinson and D. W. Cooke. On the two frequency spectra of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 84(3):319–326, 1982.
- [18] J. F. Martins and J. E. Laier. O segundo espectro de frequências da teoria de viga de Timoshenko. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, 7(25):33–49, São Carlos 2005.
- [19] K. S. Miller. *Linear differential equations in the real domain*. Norton, New York, 1963.
- [20] A. V. Oppenheim, A. S. Wilsky, and S. H. Nawab. *Signal and systems*. Prentice Hall, Inc., 1997.

- [21] S. Rao. *Mechanical vibrations*. Prentice Hall, 2011.
- [22] N. G. Stephen. The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 80(4):578–582, 1982.
- [23] N. G. Stephen. The second spectrum of Timoshenko beam theory - further assessment. *Journal of Sound and Vibration*, 292:372–389, 2006.
- [24] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41:744–746, 1921.
- [25] R. W. Traill-Nash and A.R. Collar. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 6:186–222, 1953.
- [26] N. F. J. van Rensburg and A. J. van der Merwe. Natural frequencies and modes of a Timoshenko beam. *Wave Motion*, 44:58–69, 2006.