

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Efeitos da Topologia de Rede num modelo de Jogo de Bem Público Opcional*

Pablo Valverde

Dissertação realizada sob orientação dos Profs. Sebastián Gonçalves e José Roberto Iglesias e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre

Agosto, 2012

*Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Agradecimientos

Agradeço primeiramente ao Prof. *Sebastián Gonçalves*, pela confiança depositada no meu trabalho, e pela orientação e conselhos sempre necessários. Ao Prof. *José Roberto Iglesias* pela sua ajuda e conselhos.

Agradezco de manera especial al Dr. *Juan Carlos Gonzáles-Avella*, por su confianza, interés y aporte de ideas en el desarrollo de este trabajo, sus profundos conocimientos impartidos a mi persona en programación, Dinámica Social e Física Estadística son invaluable, pero mucho mas es lo es su amistad, muchas Gracias Juan Carlos!

Mis agradecimientos para la Dra. *Karen Fiuza* por su inestimable ayuda con el idioma portugues, como tambien por su amistad. Muchas gracias Karen!.

Aos professores do Instituto de Física da UFRGS, pelos conhecimentos adquiridos e sua dedicação para entender de melhor forma nosso mundo e universo.

Aos colegas e ex-colegas da UFRGS, a meus amigos de Equador, Perú, Venezuela, Argentina, Brasil e Colombia. Obrigado!

Agradezco a mi padre que me dio una gran ayuda en la distancia. Para mis hermanos por su invaluable ayuda en todo sentido, especial agradecimiento a mi tia Susi y a toda mi familia de dar apoyo y soporte en momentos que mas lo necesitaba. Gracias a todos!

Finalmente mi grande agradecimiento para mi madre, su cariño, amor, ayuda de toda una vida..mi deuda es infinita contigo!!

Pablo Valverde

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Agosto 2012

Resumo

O entendimento dos comportamentos coletivos em termos de uma descrição microscópica baseada nas regras de interações locais entre as partículas do sistema é um propósito bem estabelecido da Física Estatística. Parcialmente inspirados no sucesso da ligação entre os comportamentos micro e macroscópicos, os fenômenos coletivos sociais são atualmente estudados em termos de modelos microscópicos de agentes interagentes.

Os dilemas sociais e o enigma evolutivo da cooperação são modelados como jogos. Neste contexto, dois modelos tem atraído mais a atenção: *O Dilema do Prisioneiro* para interações entre pares de indivíduos e os *Jogos de Bem Público* para interações em grupos.

Nesta dissertação estudamos sob que condições a cooperação pode emergir em um tipo de dinâmica de dilema social, conhecido como *Jogo de Bem Público Opcional (JBPO)*. Em particular, analisamos o efeito da topologia na emergência e permanência da cooperação neste tipo de dinâmica. Estudamos as propriedades globais dos *JBPO* numa rede regular bidimensional, sobre uma rede *small-world* e uma rede aleatória. Aqui, os jogadores são colocados nos vértices da rede e cada um deles adota um dos três estados possíveis (ou estratégias): cooperador (C), desertor (D) ou *loner* (L). Com o propósito de estudar o efeito da interação em rede, usamos redes de tipo *small-world* (pequeno mundo) onde a probabilidade p de reconexão define o grau de desordem. Esta probabilidade p de religação determina o grau de desordem da rede desde uma rede regular até uma rede aleatória. Em combinação com o estudo sistemático do parâmetro p , também é analisado o efeito da variação do parâmetro r , fator de multiplicação do *JBPO*, no comportamento global do sistema. Através do estudo sistemático de ambos parâmetros, p e r , encontramos que o sistema apresenta duas dinâmicas diferentes: (i) convergência a um estado absorvente, em que todos os agentes terminam no estado de *loner* e (ii) evolução a um estado de coexistência, no qual as três estratégias estão presentes. No estado de coexistência, para alguns valores dos parâmetros p e r , a dinâmica do sistema exhibe um comportamento oscilatório cíclico entre as três estratégias. Finalmente e como principal contribuição deste trabalho, construímos o diagrama de fases no espaço dos parâmetros (p,r) para caracterizar as diferentes fases e o comportamento coletivo que o sistema mostra.

Abstract

Understanding the collective behavior in terms of a microscopic description based on the interaction rules among the particles is a well established purpose of the Statistical Physics. Partly inspired by the success in linking micro and macro behavior, collective social phenomena are being currently studied in terms of interacting agents.

Social dilemmas and the evolutionary conundrum of cooperation are modeled as games. In this context, two models have attracted most attention: *The Prisoner's Dilemma* for pairwise interactions and *The Public Goods Games* for group interactions.

In this dissertation, we study under which conditions cooperation can emerge in a type of social dilemma dynamics known as *Optional Public Good Game (OPGG)*. In particular, we analyze the role of topology in the emergence and maintenance of cooperation in this kind of dynamics. We have studied the global properties of the *OPGG* on a two-dimensional regular network, on small world networks and random networks. Here, the players are placed at the nodes of the network and each can adopt one of three possible states (or strategies): cooperator (C), defector (D) or loner (L). In order to study the effect of network interactions, we have used small-world type networks where the probability p of reconnection defines the disorder degree. This probability p of rewiring determines the disorder degree of the network from a regular lattice to a random network. In combination with the systematic study of the p parameter, we also analyzed the effect of variation of the r parameter, the multiplication factor of *OPGG*, on the global behavior of the system. Through the systematic study of both parameters p and r , we have found that the system displays two different dynamics: i) convergence to an absorbing state, in which the all agents of the system reach the loner state and ii) evolution to a state of coexistence in which the three strategies are present in the system. In the coexistence state and for some values of the p and r parameters, the dynamics of the system exhibits a cyclic behavior among the three states. Finally, and as main contribution in this work, we have constructed a phase diagram in the parameter space (p, r) in order to characterize the different phases and collective behavior displayed by the system.

Sumário

Agradecimentos	i
Sumário	iv
Lista de Tabelas	v
Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
1.1 Sistemas Complexos e sua relação com a Física e Ciências Sociais	1
1.2 A Emergência da Cooperação	2
1.3 Dilemas Sociais e Bens Públicos	5
1.4 Evolução da Cooperação nos Jogos de Bem Público	6
1.5 O Jogo de Pedra-Papel-Tesoura	9
1.6 Introdução ao Jogo de Bem Público Opcional	11
1.6.1 Jogos de Bem Público Espacial	15
2 Modelo e Resultados	16
2.1 Modelo de Jogo de Bem Público Opcional Espacial	16
2.2 Simulações Numéricas	17
2.2.1 Rede Regular Quadrada Bidimensional	18
2.3 Redes de <i>Small-World</i>	20
3 Conclusões	28
3.1 Trabalhos futuros	30
Apêndice A Redes Complexas	31
A.1 Breve Introdução	31
A.2 Conceitos Básicos	32
A.3 Modelos Padrão de Redes Complexas:	33
A.3.1 Redes Aleatórias	34
A.3.2 Redes de <i>Small-World</i>	36
Referências	39

Lista de Tabelas

1.1	Matriz do lucros (<i>payoffs</i>) do jogo Dilema do Prisoneiro.	4
-----	---	---

Lista de Figuras

1.1	Jogo Público com Punição	7
1.2	Ilustração da dominância cíclica das três espécies A,B, e C	10
1.3	O experimento de Jogo de Bem Público Opcional	14
2.1	Vizinhança de Von Neumann numa rede regular quadrada bidimensional	18
2.2	Evolução no tempo das densidades das frequências das estratégias para diferentes valores do fator r	19
2.3	Média das frequências das estratégias em função do fator de multiplicação do Jogo de Bem Público Opcional	20
2.4	Representação da uma rede de $W - S$ bidimensional	21
2.5	Média das frequências das estratégias em função do fator de multiplicação do Bem Público r na rede complexa bidimensional	22
2.6	Evolução no tempo das densidades das frequências das estratégias para diversos valores do fator r na rede pequeno mundo com $\langle k \rangle=4$ e $p = 0.05$	23
2.7	A média da densidade das frequências das estratégias em função de r para alguns valores de p	24
2.8	Dinâmica de Pedra-Papel-Tesoura para o Jogo de Bem Público Opcional para $p=0.05$	25
2.9	Medida do parâmetro γ no Jogo de Bem Público Opcional para vários valores de p .	26
2.10	Diagrama do estado das fases da dinâmica global do sistema.	27
A.1	Ilustração esquemática de arquitetura das redes regular e randômica	35
A.2	O modelo de pequeno mundo de Watts-Strogatz	37
A.3	O comprimento característico e coeficiente de agrupamento no modelo do Watts-Strogatz	38

Capítulo 1

Introdução

'There can be no doubt that a tribe including members who [...] are always ready to give aid to each other and sacrifice themselves for the common good, would be victorious over the other tribes; and this would be natural selection'

Charles Darwin, The Descent of Man, 1871.

1.1 Sistemas Complexos e sua relação com a Física e Ciências Sociais

O comportamento coletivo de um sistema, ou conjunto de indivíduos (colônia de formigas ou abelhas) que resulta das interações locais entre seus membros, sem a existência de um controle ou coordenação central, é referido como *comportamento emergente*. As propriedades emergentes são definidas como efeitos de longo alcance dos agentes localmente interagentes, isto é agentes que interagem localmente entre si. Geralmente estas propriedades são difíceis de prever, salvo quando as interações são simples de modelar (Bar-Yam, 2003).

Os sistemas coletivos que consistem de uma grande população de agentes conectados são chamados sistemas complexos, caso a dinâmica emergente global seja resultado das ações de suas partes, ao invés de possuir uma autoridade central (Bar-Yam, 2003).

Usando regras bem estabelecidas na descrição microscópica da interação entre as partículas, a Física Estatística permite explicar de uma maneira profunda e concisa os sistemas coletivos (nível macro). Este paradigma micro-macro é também usado para explicar os problemas dentro do campo das Ciências Sociais que são baseados nas interações entre agentes (Castellano et al., 2009). Estes problemas são, entre outros, a dinâmica de opinião, dilemas sociais, disseminação cultural e competição de linguagem. Da mesma forma, os conceitos e métodos da Teoria dos Sistemas Complexos e da Física Estatística, tais como a emergência dos fenômenos coletivos, dinâmica de não-equilíbrio ou transições de fase formam uma poderosa estrutura matemática para entender e modelar os sistemas sociais (Castelló, 2010).

Quando há estrutura ou rede, os agentes são colocados nos vértices da mesma e na dinâmica mudam seus estados de acordo com regras específicas de interação social com seus vizinhos da rede. As redes, dependendo da topologia, podem ser simples ou complexas. No final dos anos 90 as redes complexas dominaram a cena com as redes de pequeno mundo (Watts & Strogatz, 1998) e redes sem escala (Barabási & Albert, 1999). A possibilidade de simplificar os modelos de redes é uma das principais vantagens destas topologias. Em particular, aplicar a teoria das redes para modelar sistemas sociais torna possível a análise da dinâmica do comportamento social (Castelló, 2010).

1.2 A Emergência da Cooperação

'Our good fortune is dependent upon the cooperation and contributions of others. Every aspect of our present well-being is due to hard work on the part of others. As we look around us at the buildings we live and work in, the roads we travel, the clothes we wear, or the food we eat, we have to acknowledge that all are provided by others. None of them would exist for us to enjoy and make use of were it not for the kindness of so many people unknown to us.'

Dalai Lama.

A cooperação é um modo de interação, em que diferentes indivíduos ou grupos trabalham juntos para um fim comum (Dias, 2009). No sentido evolucionista, a cooperação significa que os indivíduos com mais sucesso reprodutivo esquecem alguns de seus potenciais reprodutivos da

seleção natural para ajudar aos outros (Nowak, 2006b).

Sendo que as pessoas não são “anjos”, e que eles tendem a cuidar de si mesmos e de seus bens primeiro, sob quais condições a cooperação pode emergir sem uma autoridade central? Ou, em outras palavras, como pode emergir a cooperação entre indivíduos? A resposta que cada um de nós dá a esta questão tem um efeito fundamental em como nós pensamos e como atuamos em nossas relações econômicas, políticas e sociais com os outros.

O objetivo dos pesquisadores nas ciências sociais é desenvolver uma teoria da cooperação que permita partir de indivíduos que perseguem seus próprios interesses e descobrir o que é necessário para que a cooperação possa emergir. Para entender as condições que permitem a emergência da cooperação, deve-se compreender quais são as ações apropriadas que promovem o desenvolvimento ou surgimento da cooperação em uma configuração específica.

Portanto, uma teoria que visa explicar a emergência da cooperação tem que ser baseada na investigação dos indivíduos que perseguem seus próprios interesses, sem ajuda de uma autoridade central que os force a cooperar um com o outro. Por que é importante a emergência da cooperação? Porque a cooperação é necessária para a evolução de novos níveis de organização. O surgimento de genomas, células, organismos multi-celulares, sociedades animais e sociedades humanas são todos baseados na cooperação (Axelrod, 1997, 1981).

Uma ferramenta importante para abordar a evolução da cooperação no contexto evolutivo é a Teoria de Jogos (Hauert & Szabó, 2005), em Teoria de Jogos, o Dilema do Prisioneiro é um paradigma para a cooperação. O Dilema do Prisioneiro descreve interações entre pares de indivíduos com duas opções de comportamento: devem decidir simultaneamente se cooperam ou não (Nowak, 2006a). Uma maneira de representar um jogo de duas pessoas é através de uma matriz de lucros ou *payoffs* (Tabela 1.1), ou como representação em forma normal de um jogo. Cada jogador pode optar entre duas estados disponíveis: Cooperador (C) ou Desertor (D). Este é o último tipo básico de jogo de soma não-nula (Davis et al., 1983), e é de longe o mais interessante: o famoso jogo de dois prisioneiros que são acusados de um mesmo crime (Nowak, 2006a).

		Jogador II	
		C	D
Jogador I	C	(R,R)	(S,T)
	D	(T,S)	(P,P)

Tabela 1.1: Matriz do lucros (*payoffs*) do jogo Dilema do Prisioneiro.

A descrição do jogo é a seguinte: o procurador do Estado oferece a cada um dos suspeitos do crime um acordo caso confessem seu crime. Confessando seu crime o suspeito torna-se uma testemunha de acusação, e assim, evitaria uma pena de prisão. Portanto, se um prisioneiro confessar enquanto o outro não, o primeiro é imediatamente libertado, enquanto o segundo receberá uma pena de dez anos. Se ambos confessarem receberão uma pena de sete anos cada. E se nenhum confessar ambos ganham liberdade após um ano, porque as provas, sem as confissões, não são decisivas. Neste caso cooperação significa permanecer em silêncio, ou seja não confessar o crime (não entregar meu companheiro); deserção significa confessar (entregar meu companheiro). A análise racional sugere que qualquer que seja a atitude do parceiro o melhor comportamento é a deserção, porque desta maneira evitaria a sentença máxima de prisão, que são dez anos, não importando o que o seu parceiro faça (Nowak, 2006a). Se o outro confessa, não confessar significa pegar a pior sentença (10 anos), enquanto que desertando (confessa), recebe 7 anos. Se, por outro lado, o parceiro não confessa (coopera) então o melhor ofício é de novo desertar, pois significa a liberdade.

No Dilema do Prisioneiro (DP) os lucros satisfazem a seguinte ordem (Tabela 1.1) (Nowak, 2006a): $T > R > P > S$. Onde T é a vantagem associada com desertar quando o oponente coopera, R é a recompensa obtida quando ambos jogadores cooperam, P é a punição recebida pelo par de jogadores desertores, e S é a desvantagem do jogador que coopera quando o outro jogador deserta.

O dilema é este: os jogadores racionais com a intenção de maximizar sua vantagem preferem não cooperar e simplesmente optam pela deserção no jogo DP, ou seja, que o jogo nessa situação os dois prisioneiros recebem a segunda pior sentença (7 anos). A cooperação mútua, por outro lado, leva a um maior retorno do que a deserção mútua, mas a cooperação é irracional e um jogador racional atua de modo a maximizar seu retorno.

Não obstante, em experimentos de Jogos de Bem Público (ver a subsecção 1.6), mostra-se que frequentemente os seres humanos se comportam de maneira não-racional, guiados por instintos que evoluíram por meio de diferentes situações. Não raramente, os seres humanos cooperam no Dilema do Prisioneiro. Somente quando descobrem que cooperar não funciona, é que mudam seu comportamento para a deserção.

1.3 Dilemas Sociais e Bens Públicos

O dilema social é uma situação onde as ações que garantem ou melhoram a prosperidade individual estão em conflito com as preferências coletivas (Galan et al., 2007). Os dilemas sociais são encontrados em diversos contextos. Por exemplo, os dilemas econômicos sociais incluem problemas associados com a provisão de bens públicos* tais como a segurança social, a segurança nacional, a saúde pública ou a proteção do meio ambiente, onde os indivíduos podem fazer investimentos em um fundo comum para prover um bem não excludente que beneficia a todos independentemente de quanto eles contribuem para criá-lo. Problemas de ação coletiva não são limitados apenas ao comportamento social humano mas também no certos comportamentos coletivos pesquisados na Biologia (ver por exemplo (Archetti & Scheuring, 2011)). Devido à grande relevância de problemas que envolvem o conceito de dilema social, a comunidade científica investe quantidade significativa de capital para modelar e propor soluções aos mesmos (Galan et al., 2007).

Na formalização mais utilizada, os dilemas sociais são modelados como jogos (Galan et al., 2007) nos quais os jogadores seguem diferentes comportamentos. Existe um custo atrelado ao benefício que os cooperadores proveem ao grupo, enquanto os desertores exploram o grupo aproveitando os benefícios sem afrontar os custos da cooperação. O dilema do prisioneiro pode ser estendido a interações utilizando grupos de N indivíduos, usualmente referidas como jogos de bem

*Um bem público é definido como qualquer bem (benefício) que tem duas características básicas simultâneas: uma é a não-rivalidade que consiste em que o consumo de um bem não diminui a possibilidade de consumo por outro, e a não-exclusividade que diz que uma vez que o bem é produzido é impossível (ou muito difícil) evitar que se tenha acesso a ele. Na prática, em muitos casos, os bens públicos não são nem puramente não-exclusivos (bens privados) e nem puramente não-rivais (bens comuns), mas podem ser considerados como tal. Para citar um exemplo, na ação de respirar se reduz a disponibilidade do oxigênio para outra pessoa, porém ainda assim o ar pode ser aproximado como um bem público puro (Mankiw, 2007).

público, cujos modelos matemáticos são bem estudados na literatura (Kagel, 1995).

1.4 Evolução da Cooperação nos Jogos de Bem Público

Os jogos de bem público são uma metáfora simples, fundamental, mas poderosa para o problema da cooperação, e tem sido utilizada de diversas formas em grande parte da literatura para explicar a emergência da cooperação em interações de N indivíduos (Hauert, 2006a).

O mecanismo básico do jogo de bem público se dá pela escolha entre duas estratégias possíveis: cooperar ou desertar. Em um exemplo típico de Jogo de Bem Público, um experimentador distribui 20 unidades monetárias para cada um dos oito jogadores. Os jogadores tem a opção de contribuir com o máximo que podem, ou não, com parte deste dinheiro para um fundo comum. As contribuições se triplicam no fundo comum e são divididas igualmente entre os oito jogadores, independentemente da contribuição individual. Se todos os jogadores contribuem com o total que possuem, eles vão acabar com 40 unidades monetárias a mais do que tinham antes de jogar. Porém, se um dos 8 jogadores não contribui, mesmo assim ele receberá um lucro do fundo comum, reduzindo o ganho dos cooperadores. Desta forma, cada indivíduo é confrontado com a tentação de explorar os que realmente cooperam. Aquele que explora as contribuições dos outros jogadores é o desertor ou *free-rider*. Percebe-se que o comportamento dominante é o de não-investir (também conhecido como deserção). Entretanto, se todos os jogadores fizerem isto o capital inicial não será aumentado. Neste sentido, a solução de equilíbrio *racional* conduz a um impasse econômico e, a cooperação desce ao nível mais baixo. Este dilema social é conhecido como *tragédia dos comuns*, ou problema de *free-rider*.

Na vida real, se você for um aproveitador do transporte público ou dos impostos do prédio, corre o risco de ser punido. Existem instituições legais e judiciais que atuam como organismos de pressão moral na sociedade. Portanto o problema do *free-rider* tem uma solução óbvia: a cooperação pode ser reinstalada ou reforçada mediante punições e incentivos, ou seja, castigar ou recompensar os jogadores individuais de forma a condicionar o seu comportamento. Em um *experimento econômico real* demonstrou-se que os participantes estão dispostos a correr o risco de

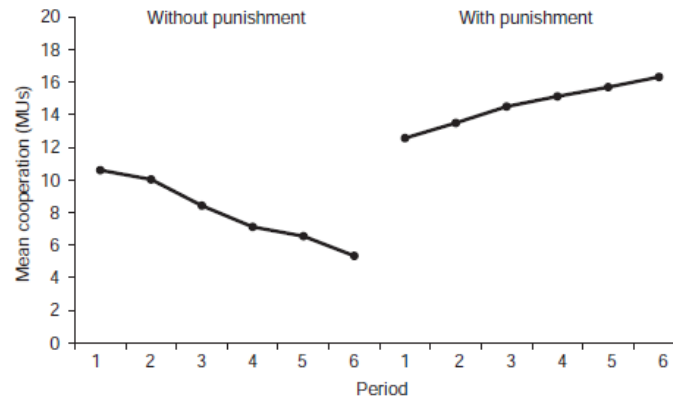


Figura 1.1: **Jogos de Bem Público Compulsórios com e sem castigo.** Em cada uma das 12 (doze) rodadas de jogos de bem público, grupos de 4 (quatro) jogadores são formados (a população total é de 240 jogadores). Os jogadores recebem 20 (vinte) unidades monetárias por rodada, e devem decidir que quantidade vão investir, sabendo que suas contribuições serão multiplicadas por dois e divididas equitativamente entre os quatro participantes. No tratamento ‘com castigo’, os jogadores podem multar uns aos outros, sendo as multas recolhidas pelo experimentador. Impondo uma multa de três unidades monetárias para os desertores, e que custa uma taxa de uma unidade monetária para os castigadores, os jogadores sabem que encontrarão com seus outros colegas apenas uma vez durante o jogo. No gráfico acima é possível visualizar a média da contribuição ao jogo de bem público em cada rodada, com e sem castigo (Fehr & Gächter (2000), Sigmund (2010)).

serem punidos, sem tomar em conta os custos desta punição Sigmund (2010). A pessoa que é punida tem R\$ 3 retirados de sua experiência conta, enquanto que a pessoa que castiga tem que dar R\$ 1 ao experimentador. Logo, o fato de castigar tem um preço, demanda tempo e energia, e também tem um tipo de risco embutido. O nível médio de contribuições é maior com a punição (Fehr & Gächter, 2000) (ver Figura 1.1).

O objetivo da punição se relaciona com a importância de reformar os desertores. Os castigadores esperam recuperar sua comissão através das contribuições dos jogadores castigados, ao longo das rodadas. Não obstante, os castigadores sabem que as futuras contribuições dos jogadores castigados podem beneficiar exclusivamente àqueles que não contribuem para o jogo de bem público. Neste caso a punição aparece como um ato altruísta. Na ausência de instituições que apliquem a punição, alguns jogadores são predispostos a tomar a lei nas próprias mãos, o que também é conhecido como *peer-punishing*. Mas por que os jogadores castigam aos desertores? É provável que a principal causa seja a reciprocidade. Se os jogadores sentem que são explorados, a reciprocidade

é direta: “se você coopera eu coopero, se você não coopera, eu não coopero”. Se são os outros que são explorados, a reciprocidade é indireta: isso é o mesmo que dizer que se A coopera com B e C não coopera com B, é bem provável que A defronte a C em benefício de B (Nowak & Sigmund (2005), Nowak (2006b)).

Em experimentos reais, o sistema de multas certamente incrementa a cooperação, mas pode custar mais do que o lucro médio total no grupo e menos do que o lucro obtido em grupos cooperativos que jogam jogos de bem público sem punição, pelo menos durante as primeiras rodadas (Sigmund, 2010).

O calcanhar de Aquiles da punição é o fato de que custa caro e, além disso, não está claro como ela surge nem como se estabiliza. Aqueles que contribuem ao bem comum mas se privam de punir os malfeitores são considerados como *second-order-free-riders*. Na ausência de incentivos adicionais para sustentar a punição, estes indivíduos persistem, de modo que sua população aumenta com o tempo, eliminando a ameaça de sanção (Szolnoki & Perc, 2010).

Outra alternativa à punição é a recompensa: cooperadores que recompensam outros cooperadores (Szolnoki & Perc, 2010). Não obstante, sua fragilidade é que a recompensa incorpora um custo de manutenção, já que aqueles que contribuem ao bem comum mas não recompensam aos outros cooperadores chegam a ser *second-order-free-riders*. Este tipo de comportamento é um obstáculo à proliferação dos cooperadores gratificadores via reciprocidade indireta: se o jogador A recompensa o jogador B porque ele coopera, é bem provável que B recompense um jogador C que também contribui, e assim por diante. Porém, se A não recompensa B, é possível que B não recompense C, e desta maneira proliferam os cooperadores não-gratificadores, que após várias rodadas tornam-se *free-riders*, e desta maneira o jogo acaba por colapsar (Szolnoki & Perc, 2010, Sigmund, 2010).

Todos esses mecanismos, além de possuírem um alto custo, envolvem outra questão importante: a necessidade de identificar quais indivíduos cooperam e quais não cooperam nos jogos de bem público. Desta maneira, e têm surgido outras alternativas para resolver este dilema social. Em nosso caso, estamos interessados na variante de jogo bem público chamado *jogo de bem público com*

participação voluntária ou *optional public good games* (Hauert et al., 2002a), com os jogadores arranjados em uma rede (?), que será estudada nas seções seguintes. Antes de continuar com a análise do Jogo de Bem Público Opcional, é importante dar um breve repassada no que significa a dinâmica de pedra-papel-tesoura.

1.5 O Jogo de Pedra-Papel-Tesoura

A Natureza utiliza às vezes a ação de três tipos de participantes para manter a diversidade e equilíbrio das espécies mas com diferentes estratégias para sobreviver (Fisher, 2008). Existem dois casos principais de competição entre as espécies, a competição conhecida como hierárquica (onde apenas uma espécie é mais apta para sobreviver entre três tipos de espécies A, B e C), e a competição *transitiva ou cíclica*, onde as três espécies A, B e C coexistem. Em uma competição cíclica as regras são: A ganha de B, B de C e C de A (ver fig 1.2). Assim, todas as estratégias têm a mesma chance de ganhar ou perder na competição como no típico jogo de pedra-papel-tesoura. (Müller, 2012, Fisher, 2008). Existem estudos onde em sistemas compostos da maneira hierárquica com um predador tem mais de uma presa, num curto período de tempo o sistema competitivo hierárquico desaparece e tende a um ciclo não-hierárquico descrito pelo jogo de pedra-papel-tesoura, praticamente todas as espécies constituem um terço da população total quando as interações são do tipo simétrico, ou seja, onde as taxas de interação são igualmente prováveis ou a probabilidade de sobreviver são as mesmas para cada uma das três espécies. O jogo de pedra-papel-tesoura tem sido extensivamente estudado não só em biologia, mas também em dinâmica sociais, tais como na dinâmica de opiniões (Demirel et al., 2011) na emergência de cooperação na teoria dos jogos públicos opcionais (Hauert et al., 2002a, Sasaki & Unemi, 2011) que é tema principal nesta dissertação.

O jogo de pedra-papel-tesoura na versão mais simples é um jogo de tipo soma igual a zero (onde o lucro total dos jogadores é igual a zero (Myerson, 1991)). Quando não temos qualquer informação sobre as intenções do indivíduo o melhor é usar um comportamento misto, escolhendo cada estratégia com igual probabilidade. Quando ambos os jogadores jogam desta forma, eles têm a mesma chance de ganhar, perder ou empatar (Fisher, 2008). Na natureza temos uns bons exemplos da dinâmica de pedra-papel-tesoura para a conservação de determinadas espécies. No ano 1996, um tipo de competição de pedra-papel-tesoura foi observada por Barry Sinervo e Curt Lively

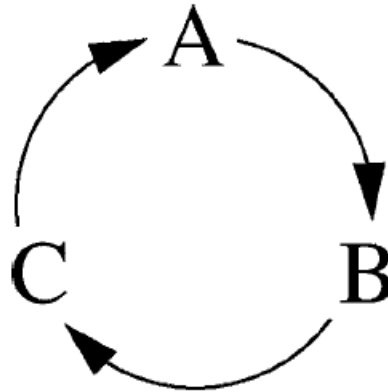


Figura 1.2: Este gráfico pode ser também a representação das três estratégias no jogo de pedra-papel-tesoura (Hofbauer & Sigmund, 1998) ou entre espécies diferentes de bactérias (Kirkup & Riley, 2004) ou lagartos (Sinervo & Lively, 1996). Figura obtida de (Reichenbach et al., 2006).

da Universidade de Indiana (Sinervo & Lively, 1996). Neste trabalho, foram descritos padrões de comportamento sexual de um tipo de lagarto abundante na faixa litoral da Califórnia. Foram observados três padrões de defesa territorial, identificados visualmente a partir de padrões das cores na garganta dos machos: laranja, amarelo e azul. Os de garganta laranja são muito agressivos e defendem grandes territórios com muitas fêmeas. Aqueles com garganta amarela podem usar uma estratégia de cautela que lhes permite reproduzir-se com algumas das fêmeas no harém do lagarto de pescoço laranja quando ele não está atento. Mas a estratégia do lagarto de pescoço amarelo é superada pelo lagarto de garganta azul, que mantém haréns pequenos e guardam as fêmeas zelosamente para manter os estranhos fora. Por outro lado, os lagartos colarinho azul são superados pela agressão daqueles de garganta laranja numa simetria idêntica à do jogo pedra-papel-tesoura. A evolução, em outras palavras, produziu um conjunto ideal e equilibrado de melhores respostas para cada tipo de lagarto, em resposta aos comportamentos dos outros dois tipos, o resultado líquido é que a população de cada tipo de macho varia no tempo, mas permanece com uma média temporal igual a um terço do total, que é o que qualquer um pode fazer. Como o comportamento sexual é hereditário, esta intransitividade gera um ciclo de seis anos nas abundâncias dos três tipos de comportamentos, o que faz que a diversidade seja mantida neste sistema. O equilíbrio natural produzido pela cena do pedra-papel-tesoura não é apenas confinada aos lagartos. (Nowak & Sigmund, 2004)

Outro caso foi a pesquisa realizada por cientistas das Universidades de Yale e Stanford (Kirup & Riley, 2004, Nowak & Sigmund, 2004), que descobriram que o mesmo cenário é responsável pela preservação da biodiversidade em populações de bactérias. A bactéria em questão é a *Escherichia Coli*, encontrada em nosso sistema digestivo. Os pesquisadores misturaram três populações naturais juntas em uma placa de Petri. Uma população produzia um antibiótico natural chamado *colicina*, mas era imune a seus efeitos. A segunda população era sensível à colicina mas podia crescer mais rapidamente do que a terceira população, que por sua vez era resistente à colicina. O resultado total foi de que cada população foi criada em seu próprio território na placa de Petri. As produtoras de colicina podem matar as bactérias que são sensíveis à colicina, as bactérias sensíveis a colicina podem usar sua taxa de crescimento rápido para deslocar as bactérias resistentes à colicina e as bactérias resistentes à colicina podem usar sua imunidade para deslocar as bactérias produtoras de colicina. Este é outro bom exemplo da simetria do jogo pedra-papel-tesoura.

1.6 Introdução ao Jogo de Bem Público Opcional

Os Jogos de Bem Público Compulsórios ou Obrigatórios, com recompensa ou punição, são os melhores modelos para se entender a evolução da cooperação humana. Porém, eles apresentam dois problemas: de um lado, os incentivos para manter atrativa a cooperação no grupo geram um alto custo de energia para os recompensadores e punidores, além de precisar de mecanismos para identificar os participantes no jogo, sejam *free-riders* ou cooperadores. Por outro lado, na sociedade humana a participação nos bens públicos não é necessariamente obrigatória: muitas vezes as pessoas têm a opção de abster-se de recusar-se a participar neles, por exemplo, pode-se visualizar numa cidade onde um ou mais indivíduos podem o ou não fazer uso do transporte público porque contam com transporte individual ou podem ir caminhando até seus destinos.

Assim, neste trabalho vamos nos focar em uma situação diferente, um novo tipo de jogo onde os jogadores tem a opção de participar ou não do bem público. Este *Jogo de Bem Público Opcional* sem punição, tem três tipos de estados: o estado dos cooperadores e o estado dos desertores, os quais estão comprometidos a participar nos jogos de bem público e especular com diferentes intenções para o sucesso da empresa conjunta e o estado dos *loners* ou também conhecidos como os *voluntários* (Fisher, 2008, Hauert et al., 2002b), os quais são os jogadores que optam por não participar

do bem público e que tem um lucro fixo que não depende dos outros participantes. A inclusão do estado dos *loners* pode limitar a dominância dos *free-riders* (que é o estado dominante nos jogos de bem público obrigatórios) e desta forma relaxar o dilema social.

A modelagem deste cenário foi pela primeira vez tratado com as ferramentas matemáticas da teoria dos jogos evolucionista por Christoph Hauert (Hauert et al., 2002a), onde se supõe a existência de grande população misturada (ou seja populações de agentes onde cada indivíduo tem a mesma probabilidade de encontro com quaisquer outros jogadores no jogo de bem público opcional) de N jogadores consistente em cooperadores, desertores e *loners* (Hauert et al., 2002b, Hauert & Szabó, 2005). Em cada passo de tempo, torna-se uma mostra aleatória de n indivíduos, os jogadores se pergunta se desejam participar (onde S é o número de indivíduos que vai participar no jogo) ou não ($n_l = n - S$) no jogo de bem público. Os n_l indivíduos que rejeitam a participação no jogo, adotam o estado *loner*, e recebem um ganho fixo $P_l = \sigma$ onde sigma é uma constante e para fins práticos é igual a um (Hauert et al., 2002b, Szabó & Hauert, 2002). O grupo restante de S jogadores é formado por n_c cooperadores e $n_d = S - n_c$ desertores. Se o grupo consta de um só jogador ($S = 1$), é fácil comprovar que ele vai optar por tornar-se *loner*. As quotas de investimento ou de operação no fundo dos bens públicos são normalizadas a um ($c = 1$). O lucro dos desertores é calculada como $P_d = rn_c/S$, onde r é o fator de multiplicação de bem público, e o lucro dos cooperadores é calculada como $P_c = rn_c/S - c$ (Hauert et al., 2002b,a).

A dinâmica do jogo é a seguinte: Para este modelo se $0 < r \leq \sigma + 1$ é melhor ser *loner* no grupo de cooperadores e desertores, já que o fator de multiplicação de jogo público r é baixo. (Hauert et al., 2002a). Mas se $r > \sigma + 1$, começa a crescer o número de cooperadores porque o incentivo para cooperar aumenta, sob estas condições do jogo se existem muitos jogadores que são cooperadores, é melhor tornar-se desertor; se os desertores são maioria, é melhor não participar no jogo porque não se tem lucro algum e portanto é melhor tornar-se *loner*; por fim, se os *loners* são maioria, é melhor tornar-se cooperador. A dinâmica de jogo de bem público opcional para esses valores do fator r apresentam um ciclo do tipo *pedra-papel-tesoura* (Hauert et al., 2002a, Szabó & Hauert, 2002). É interessante que quando temos muitos jogadores que são *loners*, formam-se pequenos grupos de cooperadores e grandes grupos de desertores, mas a opção de poder sair ou abster-se do jogo preserva o equilíbrio entre as duas opções de uma maneira natural. Desta forma,

esta dinâmica cria uma situação em que nenhum estado pode dominar sobre os outros mantendo assim níveis de cooperação aceitáveis (Hauert et al., 2002b,a, Hauert & Szabó, 2005). Ela já tem sido observada na natureza (ver Seção 1.5) e em experimentos de jogo de bem público opcional com seres humanos como por exemplo um realizado no ano 2002 com 280 alunos do primeiro semestre de biologia numa Universidade da Alemanha (Semmann et al., 2003). Os alunos foram divididos em 20 grupos de 14 alunos cada. Em cada grupo foram realizados jogos de bem público opcional com 57 rodadas consecutivas. Nas primeiras sete rodadas do jogo, aos jogadores são mostrados resultados falsos na tela para convencer-lhes que existe um comportamento dominante. Este procedimento foi necessário para forçar uma condição inicial em que a maioria adote um dos 3 estados possíveis: *loner* (L), cooperador (C) ou desertor (D). Na oitava rodada, o painel passou a mostrar os resultados reais e assim o comportamento cíclico pode ser testado. (ver figura 1.3) .

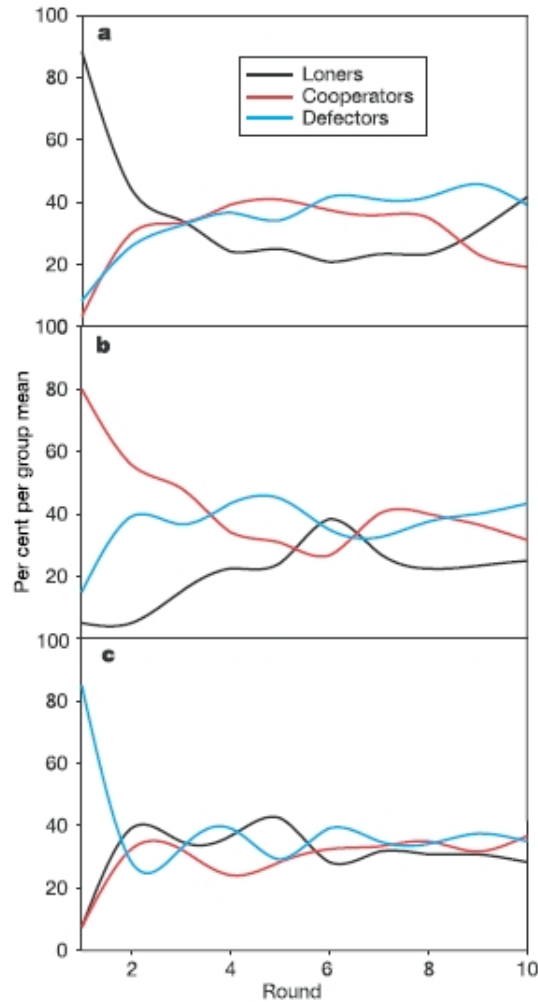


Figura 1.3: No gráfico se apresentam as médias das frequências das três estratégias durante um período de dez rodadas após a sincronização dos 20 grupos. Todas as 20 primeiras rodadas de partida são calculadas como as medias sobre todos os grupos onde uma das estratégias domina sobre as outras dois : na figura (a) se começa com dominância dos *loners* (preto), (b) se começa com dominância dos cooperadores (vermelho) (b) e (c) se começá com dominância dos *defectors* (azul-claro). Depois a sequência das oscilações é a prevista pela dinâmica de pedra-papel-tesoura, isto é, segue a sequência *loners*, cooperadores, *defectors*, *loners*, e assim por diante. Com um fator de multiplicação do bem público r de 3.6 e lucro fixo de *loner* $\sigma = 1.25$, o modelo de sistema tem um ponto fixo, o que significa proporções substanciais de cooperadores, desertores e solitários. A dinâmica prevê que existirão ciclos de todas as 3 estados em torno destas proporções, isto requer uma taxa de interesse maior do que 2. (Hauert et al., 2002b). Figura obtida por (Semmann et al., 2003).

Desta forma a dinâmica de *pedra-papel-tesoura* parte da contribuição à deserção e daí à opção de abster-se de participar no jogo para depois voltar à contribuição e continuar com a sequência (C-D-L-C,etc). Porém, isso não é suficiente para estabelecer a cooperação, porque ao longo prazo as médias dos ganhos dos cooperadores são as mesmas que se os participantes se absterem de participar no jogo (Sigmund, 2010, Hauert, 2006a, Hauert et al., 2002b,a). Quando o jogo evolui desse jeito nestes grupos, os Jogos de Bem Públicos já não são mais um dilema social.

1.6.1 Jogos de Bem Público Espacial

Nesta secção apresentamos uma breve análise da evolução da cooperação em Jogos de Bem Público Opcional em populações estruturadas espacialmente em redes, onde os agentes são localizados nos vértices da rede e sua interação com seus vizinhos mais próximos depende do tipo de rede. O tamanho da vizinhança determina o número de jogadores que interatuam nos Jogos de Bem Público. Os jogadores com um ganho superior tem uma alta probabilidade de ser imitados por seus vizinhos e assim, as estratégias bem sucedidas são espalhadas localmente. Na evolução do jogo na rede, aglomerados de cooperadores funcionam melhor do que aglomerados de desertores, porém desertores isolados florescem se são cercados por cooperadores. Em versões espaciais de Jogos de Bem Público Compulsórios, há coexistência entre cooperadores e desertores para uma gama restrita de parâmetros (Hauert & Szabó, 2003, Bazzan & Argenta, 2012). No entanto, a participação opcional, ou seja, com a participação do *voluntarismo*, a cooperação sobrevive com parâmetros que normalmente favoreceriam a dominância dos desertores, o que conduz a uma dominância cíclica dos cooperadores, desertores e *loners* que origina a dinâmica oscilatória do tipo *pedra-papel-tesoura* e / ou a coexistência das três estratégias (Michor & Nowak, 2002, Hauert & Szabó, 2005). Portanto a participação voluntária é um mecanismo efetivo na promoção da cooperação que evolui de melhor forma quando os jogadores são colocados nos vértices da rede que quando eles interatuam em populações misturadas (aproximação do campo médio) (Szabó & Hauert, 2002, Hauert & Szabó, 2003, Hauert, 2006a, Hauert & Szabó, 2005).

Capítulo 2

Modelo e Resultados

'If you want to be incrementally better: Be competitive. If you want to be exponentially better: Be cooperative.'

Anonymous.

2.1 Modelo de Jogo de Bem Público Opcional Espacial

Para o estudo da evolução da cooperação em Jogos de Bem Público Opcional Espacial (JBPOE), consideramos uma topologia de rede de dimensão $d = 2$ com $N = L \times L$ vértices (onde L é o número de sítios de cada lado na rede quadrada) que possui um número médio de conexões $\langle k \rangle = 4$ (rede quadrada com contato de primeiros vizinhos), k_i indica o número de vizinhos do vértice i (na rede quadrada ordenada $k_i = \langle k \rangle = 4$). Cada elemento $i \in N$ pode estar em um dos três estados $s(x) : \{ C \text{ (cooperador)}, D \text{ (desertor)}, L \text{ (loner)} \}$ para qualquer passo de tempo. Os três estados são distribuídos aleatoriamente na rede em proporções iguais a $1/3$ para cada um.

A estratégia do elemento i consiste no método que ele adota para mudar ao estado que tem melhor sucesso no jogo em cada passo de interação do mesmo. Este método segue os seguintes passos:

1. Seleciona-se aleatoriamente um elemento da rede, a fim de estudar a interação deste elemento com sua vizinhança local. Cada elemento contribui para o fundo comum de acordo a seu estado (L,C,D).

2. Calculam-se os pagamentos de acordo com a seguinte função:

$$P(s(x)) = \begin{cases} \frac{rcN_C}{(N_C+N_D)} - c & : s(x) = C \\ \frac{rcN_C}{(N_C+N_D)} & : s(x) = D \\ \sigma & : s(x) = L \end{cases} \quad (2.1)$$

onde r é o fator de multiplicação no Jogo de Bem Público Opcional, N_c , N_d e N_l são os números de participantes que adotam as estratégias C , D e L respectivamente na vizinhança local, c é o custo do investimento no Bem Público Opcional e finalmente σ é o lucro fixo dos *loners*.

3. Seleciona-se de forma aleatória um elemento j da vizinhança de i . Se o lucro do elemento i satisfaz a condição: $P(s(i)) < P(s(j))$, então a estratégia do elemento j é copiada. Caso contrário o elemento i permanece em seu estado.
4. Depois de N atualizações, incrementa-se unitariamente o tempo.

Como simplificação adicional, mas sem perda de generalidade, podemos normalizar o custo do investimento c e o lucro da estratégia dos *loners*, σ , à unidade.

2.2 Simulações Numéricas

A seguir apresentamos os resultados obtidos em simulações numéricas para nosso modelo de Jogo de Bem Público Opcional Espacial em diferentes topologias: rede regular e redes desordenadas. Para tanto, utilizamos a atualização assíncrona aleatória dos vértices da rede: em cada interação um vértice da rede é aleatoriamente escolhido para jogar e atualiza sua estado $s(x)$: C, D ou L , de acordo com os passos 1 à 3 da Seção anterior. De acordo com o item 4 acima, cada passo de tempo corresponde a N interações (N jogos e N atualizações), de forma que em média cada vértice atualiza uma vez. Em todas nossas simulações, as condições iniciais são aleatórias, ou seja, a distribuição na rede é aleatória de $1/3$ da população que está no estado C , $1/3$ do estado D e $1/3$ do estado L .

As interações locais são reproduzidas por uma vizinhança de Von Neumann $\langle k \rangle = 4$ (ver Figura 2.1, (Hauert & Szabó, 2003, Hauert & Szabó, 2005)), ou seja, o vértice a ser atualizado interage com seus quatro vizinhos mais próximos caracterizando uma vizinhança local. O tamanho da vizinhança determina o número máximo de participantes nos *JBPOE* (Minkel, 2002, Szabó & Hauert, 2002).

2.2.1 Rede Regular Quadrada Bidimensional

Nesta configuração temos 5 elementos participantes em cada passo de interação dos Jogos de Bem Público Espacial (o elemento i e seus quatro primeiros vizinhos, $\langle k \rangle = 4$) como se mostra na Figura abaixo.

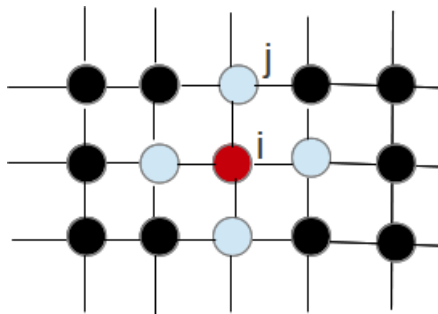


Figura 2.1: Vizinhança de Von Neumann na rede regular: o elemento i (vermelho) e seus vizinhos mais próximos ($k = 4$) (azul-claro). O elemento i interage com o elemento j de acordo com os passos 1 à 4 descritos na Seção 2.1.

As simulações são feitas com $N = 500 \times 500$ elementos, com condições de contorno.

O primeiro objetivo é encontrar qual é o tipo de dinâmica de evolução temporal das frequências das estratégias ρ_c, ρ_d , e ρ_l (cooperador, desertor, e *loner* respectivamente) conforme o fator r é variado. Uma amostra dos resultados é apresentada na Figura 2.2.

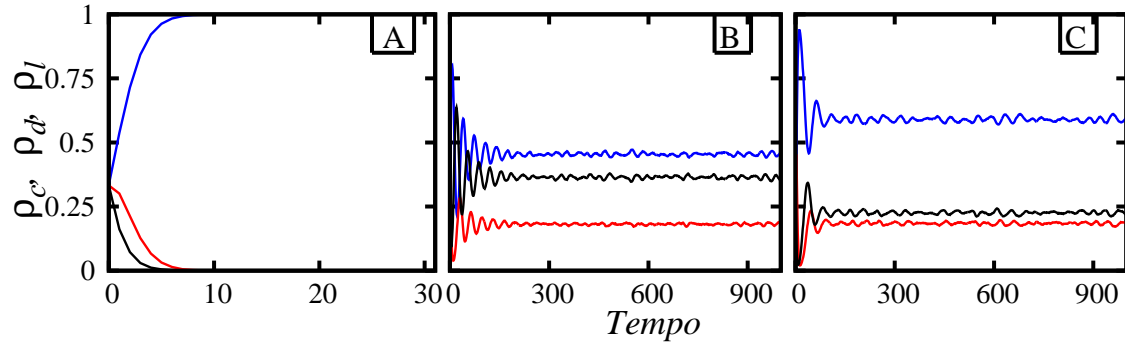


Figura 2.2: Evolução temporal da densidade dos cooperadores ρ_c (linha preta), desertores ρ_d (linha vermelha) e *loners* ρ_l (linha azul) em uma realização típica na rede com $k = 4$. O tamanho do sistema é de $N = 2.5 \times 10^5$, $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 0.333$. **A)** $r = 1.5$, **B)** $r = 2.1$, **C)** $r = 3.5$.

Nas simulações encontramos comportamentos diferentes dependendo de r se é menor ou maior que $r_c = 2$. Para valores de $r \leq r_c$ (Figura 2.2 A), os *loners* são os que dominam porque seu lucro é maior que o lucro dos cooperadores. Este resultado está de acordo com o estudado na Seção 1.6.

Para $r > r_c$ co-existência das estratégias, depois de um transitório de aproximadamente 100 passos se percebem oscilações próximas entre si (Figura 2.2 B) No entanto, as oscilações dos cooperadores e desertores vão se distanciando das oscilações dos *loners* conforme o fator r aumenta (Figura 2.2 C).

A seguir determinamos o comportamento médio das estratégias no jogo para diversos valores de r . O comportamento assintótico das estratégias apresenta duas fases, que são mostradas na Figura 2.3:

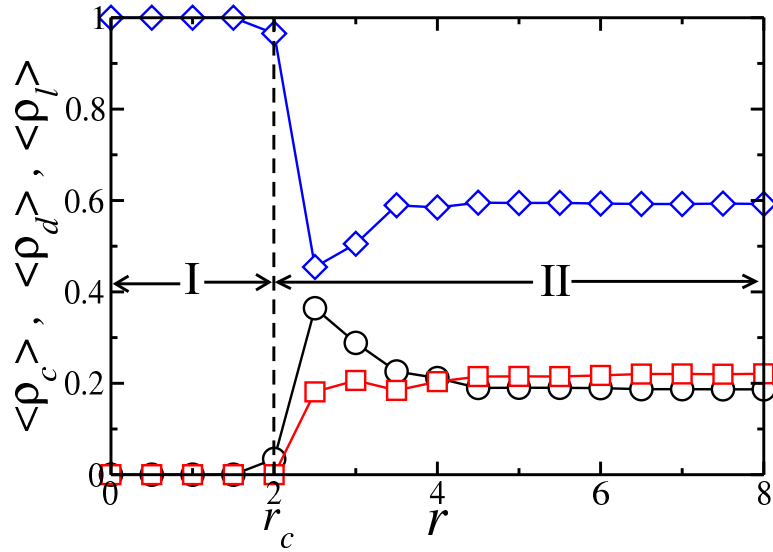


Figura 2.3: A média da densidade de Cooperadores ρ_c (círculo preto), Desertores ρ_d (quadrado vermelho) e Loners ρ_l (losango azul) como função do fator de multiplicação do Jogo de Bem Público r , sobre uma rede regular com $\langle k \rangle = 4$. O tamanho do sistema é $N = 2.5 \times 10^5$ elementos, e $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 0.333$. Para cada valor de r , foram feitas médias sobre 100 realizações para diferentes configurações iniciais sobre os últimos 500 passos depois de um transiente de 10^5 passos de tempo. A linha contínua indica $r = r_c = 2$.

- Fase I: $r \leq r_c$. O sistema alcança um estado absorvente, onde os agentes adotam a estratégia L.
- Fase II: $r > r_c$. O sistema alcança um estado de coexistência com oscilações persistentes, de baixa amplitude.

2.3 Redes de *Small-World*

Uma rede regular é o marco mais simples possível onde as interações locais podem ser estudadas. Em particular, deve-se observar que na rede regular todos os indivíduos encaram as mesmas condições simétricas. Vamos focar agora no possível efeito que um desvio desse marco pode induzir no resultado das estratégias dos jogos na rede. Um estudo do efeito de uma desordem controlada e gradativa pode ser feito através do algoritmo de Watts & Strogatz de construção de uma rede de pequeno mundo (ou *small-world*) que chamaremos rede $W - S$.

Este modelo se diferencia da ordem vista em redes regulares pela contemplação de uma distribuição não degenerada dos graus dos vértices. A rede de $W-S$ é caracterizada pelo parâmetro p , que é a probabilidade de reconectar cada ligação de um vértice a outro da rede. Para valores $p=0$ a rede é dita rede regular (Seção 2.2.1), com um número grande de laços e grandes distâncias para conectar dois vértices quaisquer; em média para $p \rightarrow 1$, a rede chega a ser aleatória com distâncias curtas entre pares de vértices e um número pequeno de laços. Portanto, mudando o parâmetro p , observa-se transições entre uma rede regular e uma aleatória. Entre estes dois extremos existe uma região mensurável para qual o modelo tem caminhos curtos e um coeficiente alto de agrupamento (ver Apêndice A). Para uma fração pequena de reconexões na rede, ou seja, para valores pequenos de p , as redes de pequeno mundo preservam a estrutura local da rede quadrada e adicionam apenas algumas ligações de longo alcance (ver Figura 2.4).

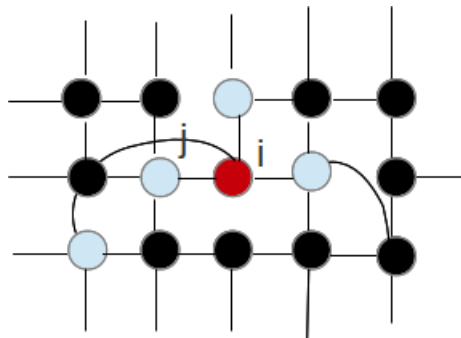


Figura 2.4: A forma de reconexão das arestas para converter uma rede quadrada bidimensional na rede de $W-S$. Em cor azul-claro, os novos vizinhos do agente i (em cor vermelha). Neste exemplo o agente i vai comparar seu lucro com o agente j e seu estado mudará conforme as regras de estratégia propostas na Seção 2.1.

A forma de construir a rede de $W-S$ segue o procedimento descrito no artigo de Watts & Strogatz. Começando com uma rede bidimensional com k vizinhos por vértice, fazendo a reconexão com probabilidade p em cada uma das arestas da rede de forma aleatória, e obtendo deste modo uma rede parcialmente desordenada com interações de longo alcance.

Desta maneira, procedemos a analisar a dinâmica do Jogo de Bem Público Opcional nesta topologia de rede da mesma maneira como fizemos na Seção 2.2.1 com a rede quadrada.

Na Figura 2.5, apresentamos a densidade média das estratégias como função de r para $p=0.05$. Assim como encontramos na rede regular, aqui também observamos a existência de duas fases: I) Absorvente e II) Coexistência com os estados (L,C,D) em equilíbrio. Na fase absorvente o estado *loner* é o estado dominante já que $r \leq \sigma + 1$. Na fase de coexistência temos duas dinâmicas diferentes: a partir de valores maiores que $r_c=2$, a evolução temporal das densidades dos estados apresenta flutuações com amplitudes muito pequenas até um valor de $r = r^*$. A partir de r^* , os estados apresentam oscilações periódicas do tipo pedra-papel-tesoura. Para $p=0.05$, se observa que r^* tem um valor aproximado de $r = 3.00$.

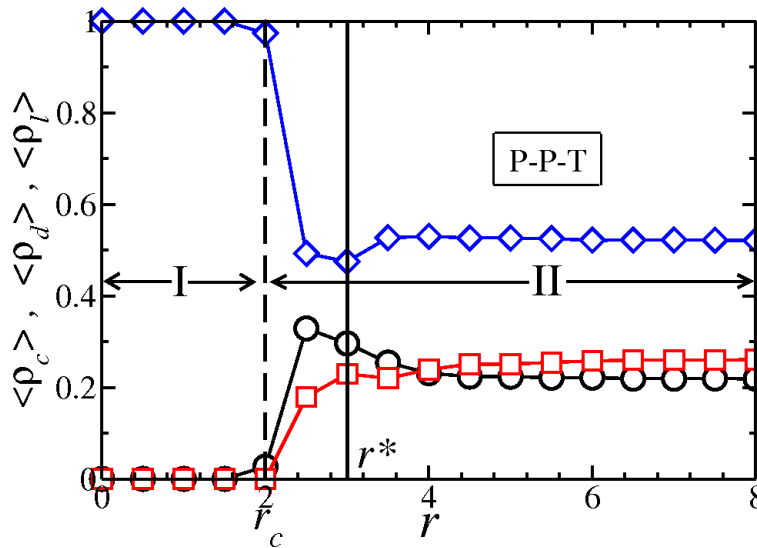


Figura 2.5: A média da densidade de Cooperadores ρ_c (círculos pretos), Desertores ρ_d (quadrados vermelhos) e Loners ρ_l (losangos azuis) como função do fator de multiplicação do Jogo de Bem Público r sobre uma rede de $W-S$ com $\langle k \rangle=4$ e $p=0.05$. O tamanho do sistema é de $N=2.5 \times 10^5$ elementos, e $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 0.333$. Para cada valor de r , foram feitas médias sobre 100 realizações para diferentes configurações iniciais sobre os últimos 500 passos depois de um transiente de 10^5 passos de tempo. A linha pontilhada indica $r=r_c$, a linha contínua indica $r = r^*$.

Na Figura 2.6 podemos ver alguns exemplos do comportamento da dinâmica em cada um das fases do sistema. Portanto, a caracterização das fases da dinâmica das densidades médias das estratégias em função de r é dada por:

- Fase I: $r \leq r_c$. O sistema alcança um estado absorvente, onde os agentes adotam a estratégia *loner* para $r \leq \sigma + 1$ (Figura 2.5).

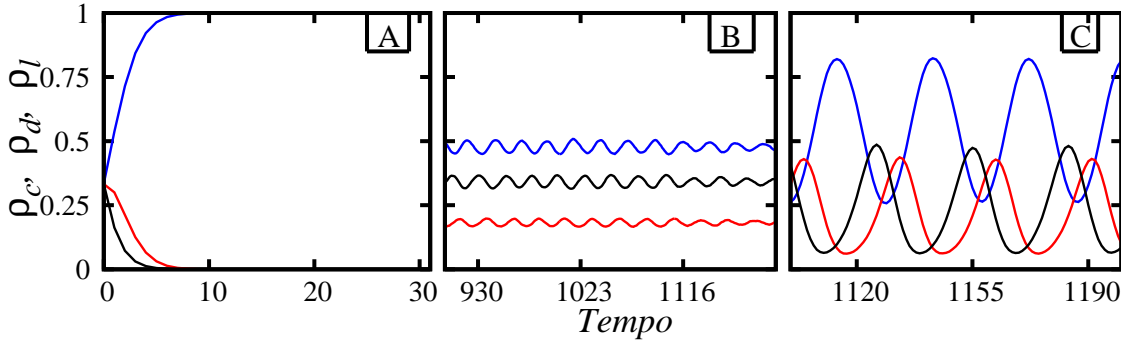


Figura 2.6: Evolução temporal da densidade dos cooperadores ρ_c (linha preta), desertores ρ_d (linha vermelha) e loners ρ_l (linha azul) em uma realização típica na rede de $W-S$ com $\langle k \rangle = 4$ e $p = 0.05$. Tamanho do sistema: $N = 2.5 \times 10^5$, $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 0.333$. **A)** $r = 1.5$, **B)** $r = 2.1$, **C)** $r = 3.5$.

- Fase II: O sistema alcança um estado de coexistência das três estratégias. Quando $r^* > r > r_c$, o estado é de coexistência com flutuações de pequena amplitude e para $r > r^*$, se observam oscilações típicas da dominância cíclica ou do tipo *pedra-papel-tesoura* (Figura 2.5).

Na figura 2.7 esta representada a dinâmica do sistema para diferentes valores da probabilidade de religação da rede p , através da media da evolução dos estados ($s(x):L,C,D$) em função do parâmetro r para $p=0.01$ e $p=0.03$ respectivamente.

Porém, como os valores de r^* são determinados? Como se mencionou na Seção 1.6, a dinâmica de pedra-papel-tesoura para o caso do Jogo de Bem Público Opcional segue a seguinte dinâmica depois de alcançar um estado de equilíbrio no tempo t : quando a população de desertores é alta, e a população de loners e cooperadores é baixa (portanto há pouco investimento depositado no fundo comum de Bem Público) é melhor tornar-se loner do que desertor porque o lucro dos loners em media é maior que o lucro dos desertores. Conforme o tempo passa a quantidade dos loners aumenta e a quantidade de cooperadores e desertores diminui. Neste cenário é melhor tornar-se cooperador, porque os lucros obtidos são maiores que os lucros dos loners (já que estamos na fase do jogo onde $r > \sigma + 1$, que é o incentivo para cooperar no jogo). Desta maneira se consegue que a população de cooperadores seja maioria no sistema, com poucos desertores e loners. A partir do momento que isto ocorre, passa ser melhor tornar-se desertor, pois em média eles aproveitam os ganhos gerados no Bem Público devido às contribuições do grande número de cooperadores e conseguem ter um lucro melhor que os cooperadores. Desta forma, os desertores voltam e predominam e o ciclo recomeça no formato de pedra-papel-tesoura. Porém, este tipo de comportamento foi observado a partir de $p \approx p_c = 0.025$ (onde p_c é o valor da probabilidade de religação crítico), de onde se conclui

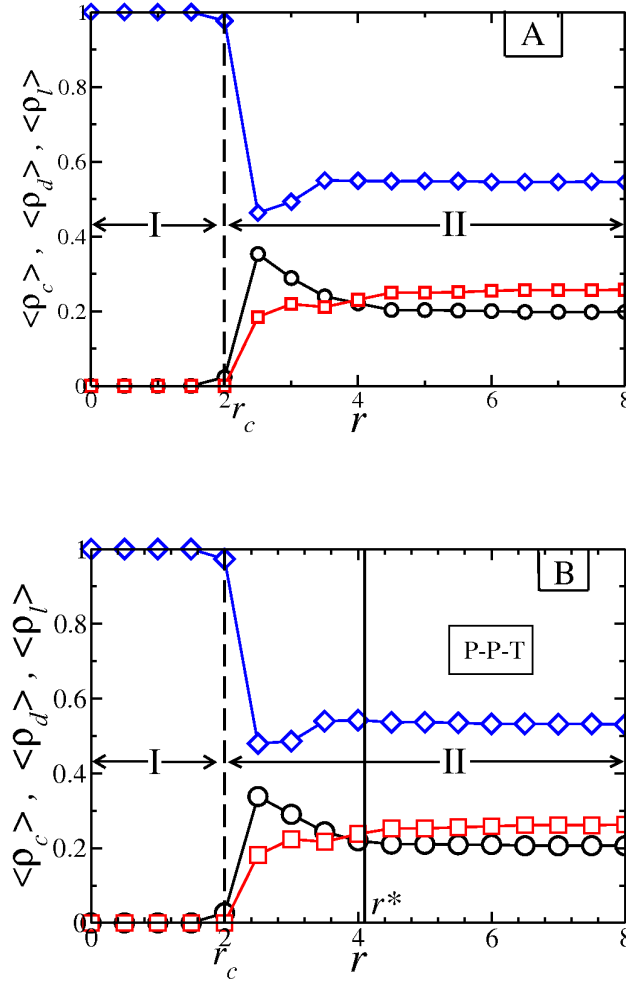


Figura 2.7: A média da densidade de Cooperadores ρ_c (círculos pretos), Desertores ρ_d (quadrados vermelhos) e Loners ρ_l (losangos azuis) como função do fator de multiplicação do Jogo de Bem Público r para $\sigma = 1$ sobre uma rede de $W - S$ com $\langle k \rangle = 4$. O tamanho do sistema é de $N = 2.5 \times 10^5$ elementos, e $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 0.333$. Para cada valor de r , foram feitas médias sobre 100 realizações para diferentes configurações iniciais e sobre os últimos 500 passos depois de um transiente de 10^5 passos de tempo. A linha pontilhada indica $r = r_c$, e a linha contínua indica $r = r^*$, para **A)** $p = 0.01$, e **B)** $p = 0.03$.

É possível observar para que tipo de dinâmica o parâmetro γ é igual a 1. Assim, de forma geral, a definição do parâmetro γ é dada pela condição (ver Figura 2.9) :

$$\gamma = \begin{cases} 1 & : \text{ Existe dinâmica pedra-papel-tesoura, ou seja, a sequência L-C-D-L, etc} \\ 0 & : \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

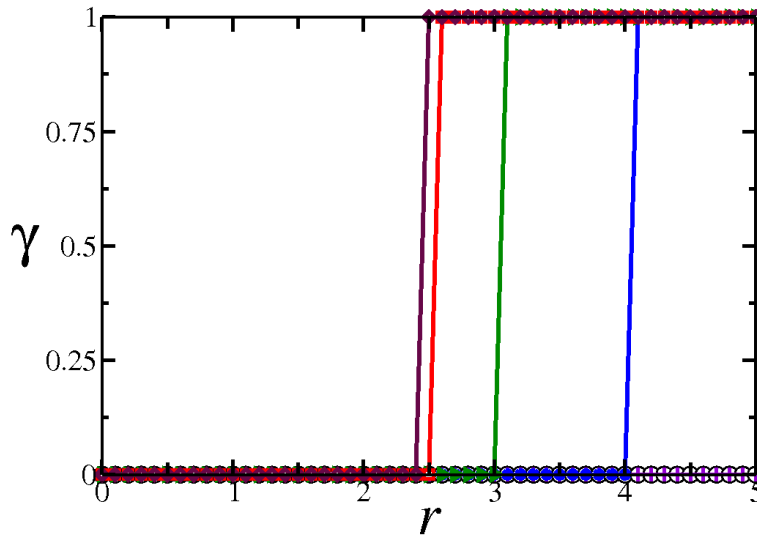


Figura 2.9: Medida do parâmetro γ que caracteriza a dinâmica de pedra-papel-tesoura para o Jogo de Bem Público Opcional, onde se define para que valor de r a dinâmica do sistema começa a ter oscilações do tipo pedra-papel-tesoura dado alguns valores de p na rede de $W-S$: $p=0.01$ (círculo preto), $p=0.02$ (sinal de *mais* violeta), $p=0.03$ (linha azul), $p=0.05$ (linha verde), $p=0.50$ (linha vermelha) e $p=1.0$ (linha marrom), com $\langle k \rangle=4.0$. O tamanho do sistema é de $N=2.5 \times 10^5$ elementos, e $\rho_c^o = \rho_d^o = \rho_l^o = 0.333$.

É importante observar que para uma religação de rede $p \geq p_c$ as oscilações periódicas estão presentes, o que significa que as conexões de longo alcance estão favorecendo a manutenção da cooperação. O estado do sistema varia conforme a mudança nos valores de p e r , podendo-se assim construir o diagrama de fases do sistema no espaço dos parâmetros de controle (p, r) que determinam as fases da dinâmica do jogo de forma global. As fases da dinâmica global presentes no sistema, conforme a dependência de r em função do parâmetro p , podem ser observadas na Figura 2.10.

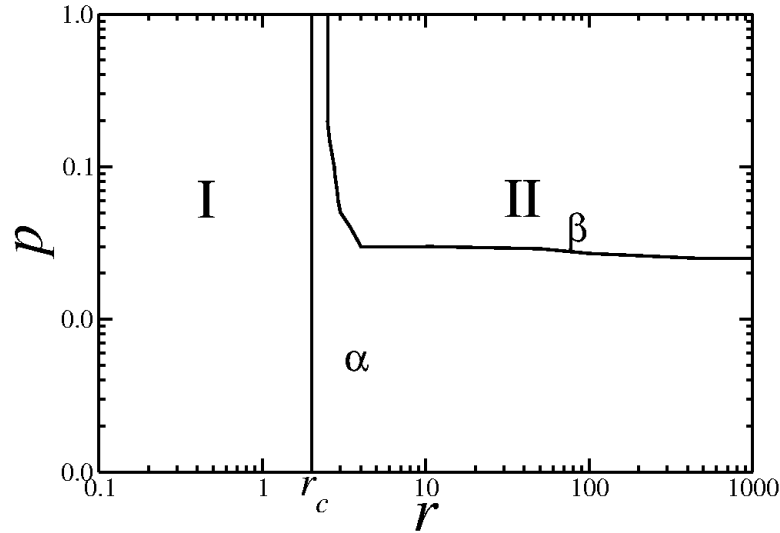


Figura 2.10:

Diagrama do estado do sistema baseado na dependência de r como função do parâmetro da probabilidade de religação da rede p em escala logarítmica, sobre uma rede de $W-S$ com $\langle k \rangle = 4$. O tamanho do sistema é de $N = 2.5 \times 10^5$ elementos, as condições iniciais $\rho_c^o = \rho_d^o = \rho_l^o = 0.333$. Média sobre 100 realizações no sistema. Os estados de cada fase são representados da seguinte forma: **fase I**) Fase Absorvente, **fase II $_{\alpha}$**) Fase de coexistência dos três estados (L,C,D) **fase II $_{\beta}$**) Fase de coexistência com presença das oscilações periódicas da dinâmica de pedra-papel-tesoura.

Baseados nos resultados obtidos na Figura 2.10, independente do tamanho do sistema, os elementos na rede desordenada com condições iniciais arbitrárias e sem acumulação de seus lucros em cada passo nem em cada unidade de interação do jogo, a dinâmica do sistema apresenta o seguinte comportamento:

- Fase I: Fase absorvente, onde domina o estado do *loner* para valores de $r \leq r_c = 2$ e para qualquer valor de p . Este resultado é independente do tamanho do sistema e coincide com trabalhos anteriores (Hauert et al., 2002b, Szabo & Hauert, 2002, Hauert & Szabó, 2003).
- Fase II $_{\alpha}$: Fase de coexistência dos três estados (L,C,D) para o intervalo $r_c < r < r^*$. Para valores de p desde $p = 0$ até um valor de $p \approx p_c = 0.025$ com $r > r_c$ o estado é de coexistência com oscilações de baixa amplitude no tempo.
- Fase II $_{\beta}$: Fase de coexistência com presença das oscilações periódicas da dinâmica pedra-papel-tesoura dos três estados (L,C,D) que surgem a partir de valores de $r > r^*$ e a probabilidade de religação da rede $p \geq p_c$.

Capítulo 3

Conclusões

' If it could be proved that any part of the structure of any one species had been formed for the exclusive good of another species, it would annihilate my theory, for such could not have been produced through natural selection.'

Charles Darwin, The Origin of Species, 1859.

Motivados por estudos anteriores baseados no estudo da evolução da cooperação em um tipo de dilema social como os Jogos de Bem Público, analisamos um modelo para uma variante do Jogo de Bem Público. Esta variante é conhecida como Jogo de Bem Público Opcional, cujo modelo construído sobre uma rede foi nosso objeto de estudo, onde os jogadores estão localizados nos vértices desta rede e assumem três estados possíveis $s(x)$: L,C ou D onde L corresponde ao estado *loner*, C corresponde ao estado *cooperador* e D é o estado *desertor*, que são inicialmente espalhados de forma aleatória e uniforme. Foram consideradas topologias de rede que vão desde uma rede regular bidimensional (com contatos de primeiros vizinhos) até a uma rede aleatória, passando por uma rede *small-world* via um parâmetro p de controle de desordem.

Os parâmetros de controle que caracterizam o comportamento global da dinâmica do modelo na rede de Jogo de Bem Público Opcional são:

- (a) o fator de multiplicação do Jogo de Bem Público Opcional r e
- (b) a probabilidade de reconexão de ligações p .

Baseados no estudo sistemático destes dois parâmetros foi possível construir os diagramas de estado assintótico do sistema (L,C,D) e identificar as distintas fases que o sistema alcança.

Com isto é possível concluir que:

1. Para $r \leq 2$, o único estado dominante é o dos *loners*. Isto ocorre devido ao fato de que o lucro dos *loners* em média é mais atrativo do que o lucro que é recebido por cooperar. Nosso resultado está de acordo com a predição da regra estabelecida do Jogo de Bem Público Opcional, que diz que para que os jogadores sejam motivados a cooperar o fator r deve cumprir a condição $r > \sigma + 1$ (onde σ é o lucro fixo dos *loners*, em nosso caso $\sigma = 1$) (Hauert et al., 2002a).
2. Quando $r > 2$, as três estratégias (L,C,D) começam a coexistir, pois o lucro da cooperação começa a ser atrativo por ser maior do que o lucro do *loner* e, conforme algumas reconexões com elementos mais distantes são introduzidas, surge a dinâmica pedra-papel-tesoura. A informação do jogo transmitida por esta separação espacial dos indivíduos contribui ao aparecimento das oscilações periódicas através da rede. Salientamos, que, mais que um efeito de rede de pequeno mundo, este resultado parece indicar um papel chave da estrutura espacial do surgimento de comportamento cíclico, para citar um exemplo real deste tipo de dinâmica, mencionamos que experimentos com sistemas de três cepas da bactéria *Escherichia Col E2* mostram este tipo de dinâmica pedra-papel-tesoura quando as baterias são colocadas numa placa de Petri (configuração bidimensional). A situação muda completamente as bactérias são colocadas num frasco com agitação adicional, (que coloca ao sistema numa situação aproximada a campo médio), em cujo caso apenas uma cepa de bactéria sobrevive (o sistema chega no estado absorvente), ver (Kerr et al., 2002, Frey & Reichenbach, 2011, Nowak & Sigmund, 2004) e Seção 1.5.
3. Com a vizinhança $\langle k \rangle = 4$ para valores de $p \geq p_c = 0.025$, aparecem as oscilações periódicas com valores de $r \geq r^*$, favorecendo à manutenção da cooperação (Hauert et al., 2002a, Hauert, 2006b, Michor & Nowak, 2002). Isto está de acordo com estudos anteriores (Hauert et al., 2002b,a, Hauert & Szabó, 2003) que mostraram que para grupo pequenos que possuem incentivos altos, a remoção do dilema social é possível na situação dos Bens Públicos (Melis & Semmann, 2010).

4. Desde uma perspectiva evolutiva, não apenas a persistência da cooperação é de imediato interesse, como também são os lucros individuais. Nosso modelo não tem acumulação de lucros, o que é o equivalente a considerar que os jogadores esquecem de seus ganhos anteriores e só participam com o lucro que possuem na rodada atual. Uma das formas de interpretar esta situação é afirmando que os indivíduos que adotam algum estado (L,C ou D) devem deixar de lado seus ganhos anteriores a fim de dar oportunidade aos indivíduos que adotaram uma estratégia que não obteve sucesso na partida anterior, para que todos tentem obter algum lucro na partida atual. Isto é considerado um ato altruísta, não obstante, não necessariamente realista. Desta maneira, este tipo de mecanismo de *esquecimento dos lucros* na rodada anterior, contribui também para o aparecimento das oscilações no estado da coexistência do sistema.

Para finalizar, é importante ressaltar que o objetivo final, e também a base desta dissertação, que era obter o diagrama de fases no espaço de parâmetros (p, r) , que engloba toda a informação sobre a dinâmica do sistema e que nos indica sob que condições a cooperação emerge e se mantém.

3.1 Trabalhos futuros

Como futuras extensões deste trabalho podemos considerar o efeito na dinâmica global do sistema de:

- (i) Acumulação dos lucros a cada n passos de interação do jogo (efeito memória).
- (ii) Tamanho da vizinhança.
- (iii) Outras regras de mudança de estratégia por exemplo *the best-reply dynamics* (Berger, 2002, Hauert et al., 2002b, Hauert et al., 2004), que é baseada na suposição de que em cada passo de tempo, os jogadores mudam para a melhor estratégia do sistema.
- (iv) Efeito de outro tipos de redes como *scale-free* (Barabási & Albert, 1999) ou em redes co-evolutivas (Vazquez et al., 2007).

Apêndice A

Redes Complexas

A.1 Breve Introdução

O estudo das inter-relações sobre elementos interativos tem revelado a existência de redes subjacentes de conexões em muitos sistemas (Newman, 2003). Há alguns anos atrás foi descoberto que sistemas diversos como *the World Wide Web*, *Internet*, redes de telecomunicação, grupos sociais dinâmicos, corporações econômicas, fluxos metabólicos nas células, neurônios no cérebro, etc., apresentam às vezes características de rede comum entre elas si e algumas compartilham propriedades similares de auto-organização. A estrutura topológica das redes de interação podem ser consideradas como um ingrediente essencial dos Sistemas Complexos.

Uma rede é um conjunto de elementos, chamados de vértices ou nós com ligações ou conexões entre eles denominadas *links*. O aparecimento da teoria das redes como estrutura matemática é um território da Teoria dos Grafos (Albert & Barabási, 2002). A teoria dos Grafos começou com o trabalho de Leonhard Euler para resolver o problema das sete pontes de *Königsberg*, cidade localizada na Prússia do século XVIII (atual Kaliningrado, Rússia). Após Euler esta teoria desenvolveu-se bastante com contribuições feitas pelos expoentes da Matemática, como Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchoff e Polya (Barabási, 2009) e nas pesquisas pioneiras em redes aleatórias na metade do século XX por Erdos e Renyi (Erdős & Rényi, 1959), mais recentemente a investigação das redes complexas desde o ponto de vista da Física chegou a ser foco de atenção nestos últimos anos. A introdução dos modelos por Watts-Strogatz (Watts & Strogatz, 1998) e Barabasi-Albert (Barabási & Albert, 1999),

para explicar e estudar as características básicas observadas nas redes reais levou a uma revolução no campo dos Sistemas Complexos com um crescente número de pesquisas neste campo até hoje. Na atualidade, os físicos estão interessados na formação, estrutura e evolução das redes complexas, como também nos efeitos da topologia de rede sobre problemas de interação social tais como a dinâmica de opinião, cooperação, difusão cultural ou competição de linguagem. (Castellano et al., 2009).

A.2 Conceitos Básicos

Uma rede é um par de conjuntos $G = [P, E]$, onde P é um conjunto de N vértices e E é um conjunto de links (ou ligações) em que cada link conecta um par de vértices. As redes podem ser dirigidas ou não dirigidas (Boccaletti et al., 2006). Nas redes de interação dirigida de um vértice i a j não implica necessariamente uma interação de j a i . Caso contrário, se diz que as interações são simétricas ou não dirigidas. Nesta seção fazemos uma breve revisão dos conceitos básicos que caracterizam as redes complexas, sendo eles:

- *Vértice (pl.vértices):*

A unidade fundamental de uma rede, também chamado de *site* em Inglês (Física), um vértice (Informática), ou um agente (Sociologia).

- *Aresta:*

A linha que conecta dois vértices. Também chamado de ligação (Física), um link (Informática), ou uma linha (Sociologia).

- *Com / Sem Direção:*

Uma aresta é dirigida se for executada em uma única direção (como caminho de sentido único entre dois pontos), ou não dirigida, caso funcione em ambas as direções.

- *Grau:*

O número de arestas conectadas a um vértice determina o grau. Note-se que o grau não é necessariamente igual ao número de vértices adjacentes a um vértice, uma vez que pode haver mais de uma aresta entre quaisquer dois vértices.

- *Distribuição de Grau:*

O distribuição de grau $P(k)$, dá a probabilidade que um vértice selecionado aleatoriamente

tenha exatamente k ligações. A distribuição de grau caracteriza a rede, dando uma medida de sua heterogeneidade em termos de conexões por vértice. Um gráfico de $P(k)$ para qualquer rede pode ser construído utilizando um histograma dos graus dos vértices. Este histograma é a distribuição de grau para a rede. Algumas redes possuem grau homogêneo, com igual número de conexões (reticulados regular). Outras podem ter certo grau de heterogeneidade, em que o grau médio $\langle k \rangle = 2n/N$ caracteriza a rede (redes aleatórias), enquanto outras podem não ter escala típica, ou seja, $P(k) \sim k^{-\gamma}$ (redes de escala livre) (onde $2 \leq \gamma \leq 3$).

- *Coefficiente de agrupamento:*

O coeficiente de agrupamento para um vértice i , C_i , quantifica a conectividade da vizinhança imediata (mais próxima), e é definida como $C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)}$, onde k_i é o grau e E_i é o número de ligações entre seus vizinhos k_i . É, portanto, um escalar normalizado entre 0 e 1. Em outras palavras, o coeficiente de agrupamento é o número de conexões existentes entre os vizinhos k_i de i em relação ao número máximo de conexões que poderiam existir entre eles. O coeficiente de aglomeração de toda a rede é, naturalmente, definido como a média de todos os C_i individuais, $C \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i$. No aspecto social o coeficiente de agrupamento nos informa o grau de coesão de nosso círculo de amigos. Um número próximo de 1 significa que todos os nossos amigos são amigos uns dos outros. Por outro lado, se o coeficiente de agrupamento for zero, significa que somos os únicos que agregamos nossos amigos.

- *Comprimento do caminho médio:*

A distância entre dois vértices é definida como o número de ligações ao longo do caminho mais curto que os conecta. Uma medida importante caracterizando uma rede é o comprimento do caminho médio, l , definido como a distância média entre quaisquer dois vértices escolhidos aleatoriamente. Redes regulares d -dimensionais mostram um caminho médio de escala com o tamanho do sistema como $l \sim N^{1/d}$. No entanto, redes complexas são caracterizadas por comprimentos de trajeto muito mais curtos e, como veremos, tipicamente escalam com $l \sim \ln(N)$.

A.3 Modelos Padrão de Redes Complexas:

Provavelmente o modelo mais simples e útil é de rede aleatória, foi estudado primeiro por Rapoport (Rapoport, 1957) e depois por Erdos e Renyi (Erdős & Rényi, 1959). Neste modelo, as arestas sem

direção são colocadas de forma aleatória a partir de um número fixo de vértices n , de forma a criar uma rede onde $1 / (2n(n + 1))$ arestas possíveis estejam presentes de forma independente, com alguma probabilidade, e que o número de arestas conectadas a cada vértice seja distribuído de acordo com a distribuição binomial ou de Poisson, no limite de grandes dimensões. A pesquisa sugere que o comportamento das redes reais não são tão aleatórios, ou ainda melhor, de fato as redes reais são não aleatórias por duas razões:

- Pelos mecanismos que possam orientar a formação de redes;
- Maneiras possíveis em que estas redes exploram a estrutura da rede para atingir determinados objetivos.

Uma das redes cujas propriedades foram mais estudadas é a rede de pequeno mundo, que é parte importante da presente dissertação.

A.3.1 Redes Aleatórias

Somos parte de um grande aglomerado, a rede social mundial, da qual ninguém é excluído. Não conhecemos todas as pessoas deste planeta, mas existe provavelmente um caminho entre quaisquer dois vértices nesta rede de indivíduos. Da mesma forma, existe um caminho entre dois neurônios quaisquer em nosso cérebro ou entre duas companhias econômicas. Paul Erdős e Alfred Rényi nos explicaram o porquê: se requer apenas um link por vértice para ficar conectado a um conhecido por pessoa (Barabási, 2009).

Existe uma diferença importante entre gráficos regulares e redes aleatórias, que se torna mais evidente quando olhamos para a quantidade de links que cada um possui. Os gráficos regulares são únicos no sentido de que cada vértice possui exatamente o mesmo número de links. De fato, em uma rede bidimensional de linhas perpendiculares formando uma simples rede quadrada, cada vértice possui exatamente quatro links, ou em uma rede hexagonal de uma colmeia, cada vértice se conecta com exatamente outros três.

Essa regularidade está nitidamente ausente nos gráficos aleatórios (Figura A.1). A rede é aleatória é profundamente igualitária: os links são estabelecidos de maneira absolutamente aleatória. Desta forma, todos os vértices possuem a mesma chance de obter um link (Barabási, 2009).

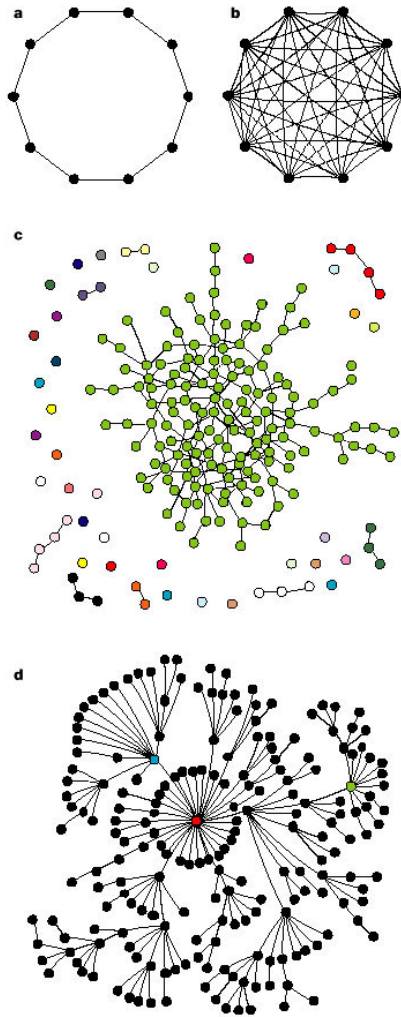


Figura A.1: Ilustração esquemática de arquitetura de rede regular e aleatória. **a)** um anel, com dez vértices conectados a seus vizinhos mais próximos; **b)** rede de dez vértices, totalmente conectada; **c)** gráfico aleatório construído colocando n vértices em um plano. Em seguida, juntando pares aleatoriamente até que os vínculos m são usados, os vértices podem ser escolhidos mais de uma vez ou não. O grau ou número de vizinhos é dado pela distribuição de Poisson entre os vértices. A maioria dos vértices têm entre um e quatro vizinhos, e todos têm entre zero e seis; **d)** gráfico *scale-free*, crescimento da rede anexando novos vértices de forma aleatória em vértices já existentes. A probabilidade de ligação é proporcional ao grau do vértice de destino, portanto os vértices abundantemente conectados tendem a ficar ainda mais conectados, levando à formação dos *hubs*. Figura obtida por (Strogatz, 2001).

Em quase todos os estudos citados anteriormente, foi feita a suposição de que a presença ou ausência de uma aresta entre dois vértices é independente da presença ou ausência de qualquer outra borda, com probabilidade p . Se houver N vértices em uma rede, e cada um está ligado a uma média de z arestas, então é trivial mostrar que para N grande a equação $p = z/(N - 1)$ tende ao valor de $p \sim z/N$. O número de arestas conectadas a qualquer vértice específico será chamado de grau k desse vértice, e tem uma distribuição de probabilidade dada por p_k (Newman et al., 2001).

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \simeq \frac{z^k e^{-z}}{k!} \quad (\text{A.1})$$

Onde a segunda igualdade da equação A.1 torna-se exata no limite de N grande. Reconhecemos esta distribuição como sendo a distribuição de Poisson. A rede aleatória tem os graus de seus vértices dados por uma distribuição de Poisson.

Redes aleatórias não são apenas um jogo matemático, pois elas têm sido utilizados extensivamente como modelos de redes de vários tipos, do mundo real, particularmente na epidemiologia. A passagem de uma doença através de uma comunidade depende fortemente do padrão de contatos entre as pessoas infectadas com a doença e quantos são sensíveis a ela. Esse padrão pode ser descrito como uma rede, com os indivíduos representados por vértices, e as arestas são os contatos capazes de transmitir a doença. A grande classe de modelos epidemiológicos recentemente utilizados, supõem que os contatos são aleatórios e não correlacionados, ou seja, eles formam uma rede aleatória (Newman et al., 2001).

A.3.2 Redes de *Small-World*

As redes de pequeno mundo que usamos no nosso modelo foram identificadas como uma classe de gráficos aleatórios por Watts e Strogatz (Watts & Strogatz, 1998).

Para construir uma rede de pequeno mundo se começa com uma rede regular de N vértices, e cada vértice está conectado aos k vizinhos mais próximos em cada direção, onde $N \gg k \gg \log(N) \gg 1$. No passo seguinte, cada link é aleatoriamente religada com a probabilidade p . Se $p = 0$ se tem uma rede regular com um número elevado de laços mas com grandes distancias, mas quando $p \rightarrow 1$, a rede é aleatória com curtas distâncias mas poucos laços entre os elementos da rede. Assim, mudando o parâmetro p , se observa uma transição entre a rede regular e uma rede aleatória mostradas na Figura A.2. Portanto, existe uma região considerável entre estes dois extremos, uma

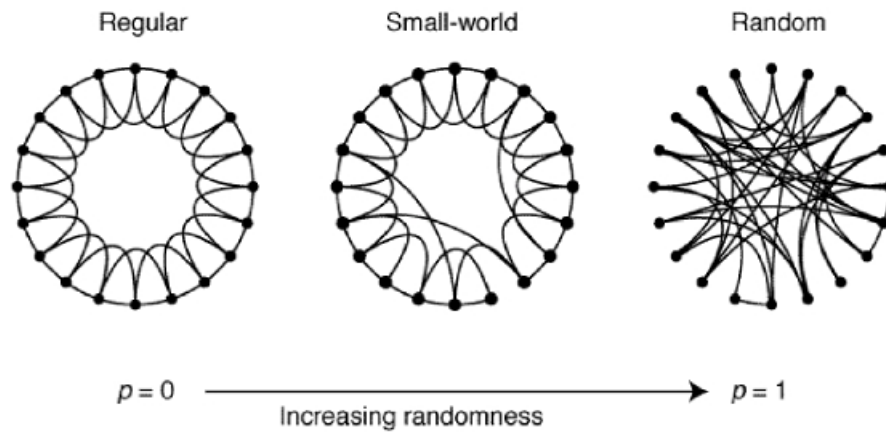


Figura A.2: O procedimento de Watts-Strogatz de religação aleatória, que interpola entre um anel de rede regular e uma rede aleatória mantendo o número de vértices e links constante. Aqui, $N = 20$, inicialmente com quatro vizinhos mais próximos. Para $p = 0$, o anel original permanece inalterado, e conforme p aumenta o anel torna-se cada vez mais desordenado, até para $p = 1$, onde uma rede aleatória é recuperada. Figura obtida por (Watts & Strogatz, 1998).

região chamada *small-world*. O *small-world* está a meio caminho entre a rede ordenada e a rede aleatória para os quais o modelo tem as duas características: comprimentos de caminho curtos e um alto coeficiente de agrupamento (ver Figura A.3).

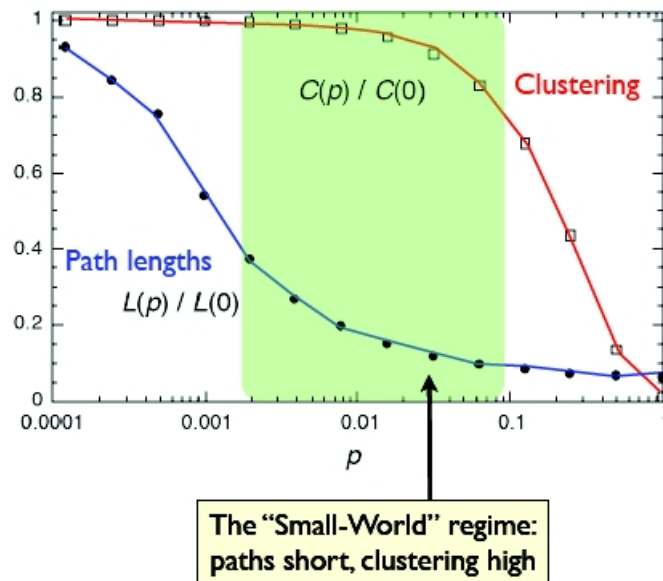


Figura A.3: O comprimento característico $l(p)$, e o coeficiente de agrupamento $C(p)$ para o modelo de Watts-Strogatz. Os dados são normalizados pelos valores de $l(0)$ e $C(0)$ para uma rede regular. Foram realizadas médias sobre mais de 20 realizações aleatórias do processo de religação; $N = 1000$, e um grau médio de $\bar{k} = 10$. Figura obtida por (Watts & Strogatz, 1998).

Referências

- [1] ALBERT, R.; BARABÁSI, A. L. Statistical mechanics of complex networks. **Rev. Mod. Phys.**, v. 74, p. 47–97, Jan 2002.
- [2] ARCHETTI, M.; SCHEURING, I. Review: Game theory of public goods in one-shot social dilemmas without assortment. **Journal of Theoretical Biology**, v. In Press,, 2011.
- [3] AXELROD, R. **The Evolution of Co-operation**: Penguin Books, 1981.
- [4] AXELROD, R. **The Complexity of Cooperation**: Princeton University Press, 1997.
- [5] BAR-YAM, Y. **Dynamics of complex systems**, Addison-Wesley studies in nonlinearity: Westview Press, 2003.
- [6] BARABÁSI, A.-L. **Linked [Conectado]: A nova ciência dos Networks**. 1.ed. Leopardo: Editora Leopardo, 2009.
- [7] BARABÁSI, A. L.; ALBERT, R. Emergence of Scaling in Random Networks. **Science**, v. 286, n. 5439, p. 509–512, Oct. 1999.
- [8] BAZZAN, A. L. C.; ARGENTA, V. F. EVOLVING NETWORKS PROMOTES COOPERATION IN PUBLIC GOODS GAMES. **Advances in Complex Systems (ACS)**, v. 15, n. 05, 2012.
- [9] BERGER, U. Best response dynamics for role games. **International Journal of Game Theory**, v. 30, n. 4, p. 527–538, 2002.
- [10] BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D-U. Complex networks : Structure and dynamics. **Phys. Rep.**, v. 424, n. 4-5, p. 175–308, Fervier 2006.
- [11] CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 81, p. 591–646, May 2009.
- [12] CASTELLÓ, X. **Collective phenomena in social dynamics: consensus problem, ordering dynamics and language competition**: PhD Thesis. Universitat de les Illes Balears, 2010.
- [13] DAVIS, M. M.; BJÖRNSSON, G.; PRINGLE, J. E. **Game Theory: A Non-Technical Introduction**: Basic Books Inc., 1983.
- [14] DEMIREL, GÜVEN; PRIZAK, ROSHAN; REDDY, P. N.; GROSS, THILO. Cyclic dominance in adaptive networks. **Eur. Phys. J. B**, p. 1–8, 2011.

- [15] DIAS, R. **INTRODUÇÃO A SOCIOLOGIA**: PRENTICE HALL BRASIL, 2009.
- [16] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On Random Graphs. **Publicationes Mathematicae**, v. 6, p. 290–297, 1959.
- [17] FEHR, E.; GÄCHTER, S. Cooperation and punishment in public goods experiments. **American Economic Review**, v. 90, p. 980–994, Sep. 2000.
- [18] FISHER, L. **Rock, paper, scissors: game theory in everyday life**. 1.ed. Basic: Basic Books, 2008.
- [19] FREY, E.; REICHENBACH, T. Bacterial Games. In: **PRINCIPLES OF EVOLUTION**, Meyer-Ortmanns, H.; Thurner, S., editores, The Frontiers Collection, p. 297–329. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [20] GALAN, J.M.; LATEK, M.; TSVETOVAT, M.; RIZI, S. Axelrod's Metanorm Games on Complex Networks, 2007.
- [21] HAUERT, C. COOPERATION, COLLECTIVES FORMATION AND SPECIALIZATION. **Advances in complex systems**, v. 9, n. 4, 2006a.
- [22] HAUERT, C. Spatial effects in social dilemmas. **Journal of Theoretical Biology**, v. 240, n. 4, p. 627–636, 2006b.
- [23] HAUERT, C.; DE MONTE, S.; HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. Replicator dynamics for optional public goods games. **J. Theor. Biol.**, v. 218, p. 187–194, Apr. 2002a.
- [24] HAUERT, C.; DE MONTE, S.; HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. Volunteering as red queen mechanism for cooperation in public good games. **Science**, v. 296, p. 1129–1132, May 2002b.
- [25] HAUERT, C.; HAIDEN, N.; SIGMUND, K. The Dynamics of Public Goods. **Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B**, v. 4, n. 3, p. 575–587, 2004.
- [26] HAUERT, C.; SZABÓ, G. Prisoner's dilemma and public goods games in different geometries: Compulsory versus voluntary interactions. **Complexity**, v. 8, n. 4, p. 31–38, 2003.
- [27] HAUERT, C.; SZABÓ, G. Game Theory and Physics. **Am. J. Phys.**, v. 73, p. 405–414, May 2005.
- [28] HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. **Evolutionary games and population dynamics**: Cambridge University Press, 1998.
- [29] Kagel, J.H., editor. **The handbook of experimental economics**. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1995.
- [30] KERR, B.; RILEY, M. A.; FELDMAN, M. W.; BOHANNAN, B.J. Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors. **Nature**, v. 418, p. 171–174, 2002.
- [31] KIRKUP, BENJAMIN C.; RILEY, MARGARET A. Antibiotic-mediated antagonism leads to a bacterial game of rock-paper-scissors in vivo. **Nature**, v. 428, n. 6981, p. 412–414, Mar. 2004.

- [32] MANKIWI, N.G. **Macroeconomics**: Worth Publishers, 2007.
- [33] MELIS, A. P.; SEMMANN, D. How is human cooperation different? **Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences**, v. 365, n. 1553, p. 2663–2674, Sep. 2010.
- [34] MICHOR, F.; NOWAK, M. A. The good, the bad and the lonely. **Nature**, v. 419, p. 677–679, 2002.
- [35] MINKEL, J. R. The Physics of Loners. **Phys. Rev. Focus**, v. 10, p. 10, Sep 2002.
- [36] MÜLLER, A. P. **Importância do tamanho da comunidade na competição cíclica de microorganismos**. May 2012. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física.
- [37] MYERSON, R. B. **Game Theory: Analysis of Conflict**: Harvard University Press, 1991.
- [38] NEWMAN, M. E. The structure and function of complex networks. **SIAM Review**, v. 45, p. 167–256, Jun. 2003.
- [39] NEWMAN, M. E.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. **Phys.Rev.E**, v. 64, p. 026118, Jul. 2001.
- [40] NOWAK, M. A. **Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life**. 1.ed. Harvard: Harvard University Press, 2006a.
- [41] NOWAK, M. A. Five Rules for the Evolution of Cooperation. **Science**, v. 314, p. 1560–1563, Dec. 2006b.
- [42] NOWAK, M. A.; SIGMUND, K. Evolutionary Dynamics of Biological Games. **Science**, v. 303, n. 5659, p. 793–799, Feb. 2004.
- [43] NOWAK, M. A.; SIGMUND, K. Evolution of Indirect Reciprocity. **Nature**, v. 437, p. 1291–1298, 2005.
- [44] RAPOPORT, A. Contribution to the theory of random and biased nets. **Bulletin of Mathematical Biology**, v. 19, n. 4, p. 257–277, dec 1957.
- [45] REICHENBACH, T.; MOBILIA, M.; FREY, E. Coexistence versus extinction in the stochastic cyclic Lotka-Volterra model. **Phys. Rev. E**, v. 74, p. 051907, Nov 2006.
- [46] SASAKI, T.; UNEMI, T. Replicator dynamics in public goods games with reward funds. **Journal of Theoretical Biology**, v. 287, n. 0, p. 109 – 114, 2011.
- [47] SEMMANN, D.; KRAMBECK, H.J.; MILINSKI, M. Volunteering leads to rock-paper-scissors dynamics in a public goods game. **Nature**, v. 425, n. 6956, p. 390–393, 2003.
- [48] SIGMUND, K. **The Calculus of Selfishness**: Princeton University Press, 2010.
- [49] SINERVO, B.; LIVELY, C. M. The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies. **Nature**, v. 380, p. 240–243, 1996.

- [50] STROGATZ, S. H. Exploring complex networks. **Nature**, v. 410, p. 268–276, Mar. 2001.
- [51] SZABO, G.; HAUERT, C. Evolutionary prisoner’s dilemma games with optional participation. **PHYS.REV.E**, v. 66, p. 062903, 2002.
- [52] SZABÓ, G.; HAUERT, C. Phase Transitions and Volunteering in Spatial Public Goods Games. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, p. 118101, Aug 2002.
- [53] SZOLNOKI, A.; PERC, M. Reward and cooperation in the spatial public goods game. **CoRR**, v. abs/1010.5771, 2010.
- [54] VAZQUEZ, F.; GONZÁLEZ-AVELLA, J. C.; EGUÍLUZ, V. M.; SAN MIGUEL, M. Time-scale competition leading to fragmentation and recombination transitions in the coevolution of network and states. **Phys. Rev. E**, v. 76, p. 046120, Oct 2007.
- [55] WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Colective dynamics of “small world” networks. **Nature**, v. 393, p. 440–442, Jun. 1998.