Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

SOBRE CONVEXIDADE DE CONJUNTOS DE NÍVEL DE SOLUÇÕES DE CERTAS EQUAÇÕES ELÍPTICAS

por

RICARDO BORGES RUTZ

Porto Alegre, junho de 2005

Dissertação submetida por Ricardo Borges Rutz* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPG-Mat/UFRGS)

Banca Examinadora:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPG-Mat/UFRGS)
Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPG-Mat/UFRGS)
Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPG-Mat/UFRGS)
Dr. José Afonso Barrionuevo (PPG-Map/UFRGS)

Data de Defesa: 13 de junho de 2005.

* Bolsista da Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Técnológico - CNPq

Para Zezinha,
com carinho.

Agradecimentos

Obrigado DEUS, por estar sempre comigo, por colocar sempre pessoas maravilhosas no meu caminho e tornar meu caminho maravilhoso.

Quero expressar aqui minha gratidão especial aos meus pais, Romeu e Reni, e as minhas tias (mães) Tereza, Ceny e Ereni. De vocês recebi sempre muito apoio, carinho e amor. A vocês o meu mais sincero OBRIGADO.

Quero agradecer também:

- À UFRGS, que com seu ensino público, gratuito e de qualidade me proporcionou ótimas condições de aprendizado.

- Aos professores do Instituto de Matemática, que sempre procuraram passar o máximo de seu conhecimento, em especial ao professor Leonardo Bonorino e ao meu orientador, professor Eduardo Brietzke.

- Aos meu amigos da UFRGS, que são muitos, em especial ao Elismar e à Lisiane, ao Alexandre Baravieira e ao Adriano.

- Aos meus amigos da escalada, que foram e são meus companheiros nesta grande paixão, em especial a Alessander Kols e família, Marcos Pâncaro, Janaina, Barbara e Alexandre, Joyce, Glauco, Naoki.

E finalmente, aos meus irmãos SCREAM, família que escolhi e que tanto amo e admiro, obrigado pela amizade e pelo companherismo, pois mesmo distante a tantos anos, continuamos os irmãos de sempre.

MUITO OBRIGADO a todos!

Resumo

Neste trabalho é estudada a convexidade dos conjuntos de nível das soluções de dois problemas envolvendo equações elípticas.

O primeiro desses problemas se refere a uma equação da forma $\triangle u = \gamma(u)$ em um anel convexo, com condições de fronteira $u = 0$ na fronteira externa e $u = 1$ na fronteira interna. Para provar a existência de solução do problema utiliza-se o método variacional. O problema de mostrar a convexidade dos conjuntos de nível é transformado em um problema de maximizar uma certa função.

O segundo problema considerado é o de mostrar que é log-côncava a primeira autofunção do laplaciano, que tenha como peso uma função côncava.

Abstract

In this work we study the convexity of the level sets of the solutions of two problems involving elliptic equations.

The first problem involves an equation of the form $\triangle u = \gamma(u)$ on a convex ring, with boundary conditions $u = 0$ on the outer boundary and $u = 1$ on the inner boundary. The existence of a solution is proven by a variational method. The problem of showing the convexity of level sets is reduced to the problem of maximizing a suitable function.

The second problem considered is to show the log-concavity of the first eigenfunction of the Laplacian, with a concave weight-function.

Conteúdo

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a convexidade dos conjuntos de nível de soluções de dois problemas envolvendo equações elípticas: O potencial capacitário e a primeira autofunção do laplaciano.

A convexidade dos conjuntos de nível de soluções de problemas elípticos tem sido objeto de pesquisa de vários autores desde 1950. Para a primeira autofunção do laplaciano num conjunto convexo, a convexidade dos conjuntos de nível da solução foi estabelecida por Brascamp e Lieb [2] em 1976. Para o potencial Capacitário, a convexidade dos conjuntos de nível num anel convexo foi estabelecida por Gabriel [9], [10], [11] e Lewis [12] em 1955-57 e em 1977, respectivamente.

A referência principal para este trabalho é o artigo *Convexity Properties of Solutions to Some Classical Variational Problems*, de Luis A. Caffarelli e Joel Spruck [1].

No capítulo 1, são revisadas certas definições e resultados úteis para o restante do trabalho.

No capítulo 2, estudamos a convexidade dos conjuntos de nível do potencial capacitário de um anel convexo. Na verdade estudamos um problema bem mais geral, para uma equação da forma $\triangle u = \gamma(u)$. Começamos estudando a existência da solução. Para isto é utilizado o método variacional, seguindo um argumento freqüentemente utilizado no livro [13]. O problema de mostrar a convexidade dos conjuntos de nível é transformado em um problema de maximizar uma certa função num determinado conjunto.

No capítulo 3, estabelecemos a convexidade dos conjuntos de nível da primeira autofunção do laplaciano como conseqüência do fato que o logaritmo da primeira autofunção é uma função côncava. São usadas as idéias de Korevaar.

Capítulo 1

Preliminares

Nosso objetivo neste capí tulo é introduzir algumas definições, notações e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho.

1.1 Definições e Notações

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto limitado, k e N inteiros tais que $k \geq 0$ e $N \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$ e $1 \leq p < +\infty$.

Definição 1.1. Sejam a, b pontos distintos do $\mathbb{R}^N$.
$\underline{ab}$ - representa a reta que contém os pontos a e b;
$\overline{ab}$ - representa o segmento de reta que une os pontos a e b.

Definição 1.2. $m(\Omega)$ representa a medida do conjunto Ω.

Definição 1.3. $\overline{\Omega}$ representa o fecho do conjunto Ω.

Definição 1.4. $B_r(x)$ é a bola aberta de centro x e raio $r > 0$.

Definição 1.5. $\mathrm{C}^k(\Omega)$ é o espaço das funções k vezes diferenciáveis, onde a k-ésima derivada é contínua.

Definição 1.6. $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis.

Definição 1.7. $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.

Definição 1.8. $\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$ é o espaço das funções $f \in \mathrm{C}^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas de ordem menor ou igual a k se estendem continuamente a $\overline{\Omega}$.

Definição 1.9. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita Hölder contínua se existem constantes $K > 0$ e $0 < \beta \leq 1$ tais que

$$|u(x) - u(y)| \leq K|x - y|^{\beta}$$

para quaisquer $x, y \in \Omega$.

Definição 1.10. $\mathrm{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é o espaço das funções $f \in \mathrm{C}^{k}(\Omega)$ tais que todas as derivadas de ordem menor ou igual a k são uniformemente Hölder contínuas com expoente α.

Definição 1.11. Definimos a norma em $\mathrm{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ por

$$\|f\|_{\mathrm{C}^{k,\alpha}} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\beta|\leq k}} |D^{\beta} f(x)| + \sup_{\substack{x\neq y \\ |\beta|=k}} \frac{|D^{\beta} f(x) - D^{\beta} f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \ ,$$

onde β é um multi-índice e $|\beta|$ indica a soma de todas as coordenadas de β.

Definição 1.12. $\mathrm{L}^{p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_{\Omega} |f|^{p} \, dx < \infty \ .$$

Definição 1.13. Definimos a norma em $\mathrm{L}^{p}(\Omega)$ por

$$\|f\|_{\mathrm{L}^{p}} = \left(\int_{\Omega} |f|^{p} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Definição 1.14. Sejam $f \in \mathrm{L}^{1}_{loc}(\Omega)$ e β um multi-índice. Então uma função $g \in \mathrm{L}^{1}_{loc}(\Omega)$ é chamada de β-ésima derivada fraca de f se satisfaz

$$\int_{\Omega} \varphi g \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} f D^{\beta} \varphi \, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{C}^{|\beta|}_{0}(\Omega) \ .$$

Definição 1.15. $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ é o Espaço de Sobolev, que consiste de todas as funções em $\mathrm{L}^{p}(\Omega)$ tais que as derivadas parciais de primeira ordem no sentido fraco também pertencem a $\mathrm{L}^{p}(\Omega)$. Se $p = 2$ denotamos $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ por $\mathrm{H}^{1}(\Omega)$.

Definição 1.16. Definimos a norma em $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{p} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} u^{p} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Definição 1.17. $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ é o fecho de $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ na norma de $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$. Intuitivamente, as funções deste espaço se anulam na fronteira. Para $p = 2$ denotamos $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ por $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Definição 1.18. Consideremos o operador diferencial parcial

$$L(u) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i}^{n} b_i(x) D_i u + c(x) u$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$ e todos os coeficientes $a_{ij}(x), b_i(x), c(x)$ são funções mensuráveis.

Dizemos que L é uniformemente elíptico se

$$\exists \lambda > 0 \text{ tal que } \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda \|\xi\|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \ .$$

Definição 1.19. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de funções é uniformemente equicontínua se dado $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \ \text{ tal que } \ \forall x, y \in \Omega, \forall f \in \mathcal{F}, \ \text{se } |x - y| < \delta, \ \text{ então } \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

Definição 1.20. Seja E um espaço compacto, $C(E;\mathbb{R})$ é o espaço das funções $f : E \to \mathbb{R}$ contínuas munido da norma

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)| \ .$$

Definição 1.21. Dizemos que $\mathcal{F} \subseteq C(E;\mathbb{R})$ é relativamente compacto se qualquer seqüência (f_n) em $\mathcal{F}$ tem subseqüência convergente.

1.2 Observações

Observação 1.22. Seja $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analítica, onde X é um intervalo aberto.

Se f é constante em um intervalo $I \subseteq X$, então f é constante em todo X.

De fato, mostraremos que o conjunto em que f é constante é aberto e fechado em X.

Suponhamos que $f(x) = c, \ \forall x \in I$.

Seja

$$
\begin{aligned}
C &= \{x \in X \mid f(x) = c \ \text{ e } \ f^{(n)}(x) = 0, \ \forall n \geq 1\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f(x) = c \ \text{ e } \ f^{(n)}(x) = 0\} \ .
\end{aligned}
$$

Como $f^{-1}(c) \bigcap \left(f^{(n)}\right)^{-1}(0) = \{x \in X \mid f(x) = c \ \text{ e } \ f^{(n)}(x) = 0\}$, temos que C é a interseção de conjuntos fechados em X, ou seja, C é fechado em X.

Por outro lado, dado $x_0 \in C$, como f é analítica, $\exists r > 0$ tal que se $|x - x_0| < r$, então

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = f(x_0) = c \ ,
$$

o que mostra que C é aberto e conclui a observação.

Observação 1.23. Seja $f : B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

Para $|r| < R$, define-se o valor médio

$$
M(r) = \frac{1}{\omega} \int_{|h|=1} f(rh) d\sigma(h),
$$

onde ω é a área da superfície esférica $\mathbb{S}^{N-1} = \{h \in \mathbb{R}^N \big| \ |h| = 1\}$.

Notemos que M é uma função par de classe C^2.

Temos

$$
M'(r) = \frac{1}{\omega} \int_{|h|=1} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(rh) h_i \ d\sigma(h)
$$

e

$$M''(r) = \frac{1}{\omega}\int_{|h|=1}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(rh)h_i h_j \; d\sigma(h) \; .$$

Lema 1.24.

$$\int_{|h|=1} h_i \; d\sigma(h) = 0, \qquad \int_{|h|=1} h_i h_j \; d\sigma(h) = 0 \;\text{ se } \quad i \neq j$$

e

$$\int_{|h|=1} h_i^2 \; d\sigma(h) = \frac{\omega}{n} \; .$$

Demonstração:

De fato, pela simetria da região $|h| = 1$, as duas primeiras igualdades são verdadeiras.

Também por simetria, as integrais $\int_{|h|=1} h_i^2 \; d\sigma(h)$ são todas iguais.

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}\omega = \int_{|h|=1} d\sigma(h) &= \int_{|h|=1} |h|^2 \; d\sigma(h) = \int_{|h|=1}\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \; d\sigma(h) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{|h|=1} h_i^2 \; d\sigma(h) = n\int_{|h|=1} h_i^2 \; d\sigma(h)\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{|h|=1} h_i^2 \; d\sigma(h) = \frac{\omega}{n} \; .$$

■

Segue do lema acima que

$$M(0) = f(0), \quad M'(0) = 0, \quad M''(0) = \frac{1}{n}\triangle f(0) \; .$$

Utilisando a fórmula de Taylor temos que

$$M(r) = M(0) + M^{'}(0)r + \frac{M^{''}(\theta r)}{2}r^2, \quad \text{com} \quad 0 < \theta < 1 \ .$$

Suponhamos que $M^{''}(0) = \frac{1}{n}\triangle f(0) = \varepsilon > 0$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que $M^{''}(|x|) > \frac{\varepsilon}{2}$ se $|x| < \delta$.

Então

$$M(r) - f(0) = M^{'}(0)r + \frac{M^{''}(\theta r)}{2}r^2 > 0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{r^2}{2} \quad \text{se} \quad |r| < \delta \ .$$

Em particular, supondo que $f(0) = 0$ temos

$$\sup_{B_r(0)} f \geq M(r) > \frac{\varepsilon}{4}r^2, \quad \text{se} \quad 0 < r < \delta \ . \tag{1.1}$$

1.3 Teoremas

Teorema 1.25. *Suponhamos que u satisfaz a inequação diferencial*

$$(L + h)[u] \geq 0 \ ,$$

onde

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \ ,$$

$h \leq 0$, L é uniformemente elíptico em D, domínio convexo, e os coeficientes de L e h são limitados.

Se u assume um máximo não negativo M em um ponto no interior de D, então $u \equiv M$.

Demonstração: Ver [4], pág. 64.

Teorema 1.26. *Suponhamos que u satisfaz a inequação*

$$L(u) \geq 0$$

em um domínio D, onde L é o operador uniformemente elíptico do Teorema 1.25. Suponhamos que $u \leq M$ em D e que $u = M$ em um ponto P na fronteira de D. Suponhamos que P pertence à fronteira de uma bola K_1 contida em D. Se u é contínua em $D \cup P$ e existe a derivada direcional $\frac{\partial u}{\partial v}$ exterior em P, então

$$\frac{\partial u(P)}{\partial v} > 0 \ ,$$

a menos que $u \equiv M$.

Demonstração: Ver [4], pág. 65.

Teorema 1.27. *Suponhamos que u satisfaz a inequação*

$$(L + h)[u] \geq 0 \ ,$$

onde L é o operador do Teorema (1.26), e $h \leq 0$ em D. Suponhamos que $u \leq M$ em D, que $u = M$ em um ponto P na fronteira de D e que $M \geq 0$. Suponhamos que P pertence à fronteira de uma bola contida em D. Se u é contínua em $D \cup P$, qualquer derivada direcional exterior de u em P é positiva, a menos que $u \equiv M$ em D.

Demonstração: Ver [4], pág. 67.

Teorema 1.28. *Seja L estritamente elíptico, Ω domínio limitado com fronteira $C^{2,\alpha}$ e $h \leq 0$. Suponhamos que f e os coeficientes de L pertencem a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Então o problema de Dirichlet

$$L(u) = f \text{ em } \ \Omega, \qquad u = \varphi \text{ em } \ \partial\Omega$$

tem solução única, que pertence a $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [5], pág. 107.

Teorema 1.29. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ dominio com fronteira $\mathrm{C}^{1,\alpha}$, onde $0 < \alpha < 1$ e $u \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ solução fraca de*

$$Lu = g \quad \text{em} \quad \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega$$

onde $g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *e*

$$L(u) = \sum_{i,j} D_i(a^{ij}(x)D_j u) + \sum_i c^i(x)D_i u + d(x)u \ .$$

Então $u \in \mathrm{C}^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ *e existe uma constante* C *que depende de* N, λ, K *e* δ*, onde* $\lambda > 0$ *satisfaz*

$$\sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda\|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

e $K = \max\{\|a^{ij}\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}(\Omega)}, \|c^i\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}, \|d\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\}$*, tal que para qualquer compacto* $Q \subseteq \Omega$ *com* $dist(Q, \partial\Omega) < \delta$*, tem-se*

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{1,\alpha}(Q)} \leq C(\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}) \ .$$

Demonstração: Ver Corolário 8.36 em [5], pág. 212.

Teorema 1.30. *Seja* H *um espaço de Hilbert e* f_n *seqüência limitada em* H.

Então $\exists\ f_{n_k}$ *subseqüência fracamente convergente em* H.

Demonstração: Ver [8], pág. 85.

Teorema 1.31. (Teorema de Rellich-Kondrachov) *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *aberto limitado tal que* $\partial\Omega$ *é de Classe* C^1*. Então, dada uma seqüência* $f_n \in \mathrm{W}^{1,p}$ *limitada, existe uma subseqüência* f_{n_k} *tal que* f_{n_k} *é convergente em qualquer* $\mathrm{L}^q(\Omega)$*, onde* $q < p^* = \frac{np}{n-p}$*.*

Demonstração: Ver [5], pág. 167.

Teorema 1.32. (Teorema de Mazur) *Seja* E *um espaço de Banach e seja* $A \subseteq E$ *um subconjunto convexo de* E*. Então* A *é fechado em relação à topologia fraca se e somente se* A *é fechado em relação à topologia da norma.*

Demonstração: Ver [7], pág. 422.

Corolário 1.33. *Seja E um espaço de Banach e seja $x_n \rightharpoonup x$ uma seqüência fracamente convergente em E. Então existe uma seqüência (y_n) em E tal que:*
(i) $\forall n, y_n$ é uma combinação convexa (finita) dos (x_i).
(ii) $y_n \rightarrow x$ em relação à norma de E.

Demonstração: Ver [7], pág. 422.

Teorema 1.34. *Seja f uma função $\mathrm{C}^1(\Omega)$ por partes em $\mathbb{R}$ com $f^{'} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Então se $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, nos temos que $f \circ u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Além disso*

$$D_j f(u) = f^{'}(u) D_j u \ .$$

Demonstração: Ver [5], pág. 153.

Teorema 1.35. (Teorema de Arzelá-Ascoli) *Seja E um espaço compacto. Um conjunto $\mathcal{F} \subset C(E, \mathbb{R})$ é relativamente compacto se, e somente se, ele satisfaz as condições:*
(i) $\mathcal{F}$ é equicontínuo;
(ii) para todo $x \in E$, o conjunto

$$\mathcal{F}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

é limitado.

Demonstração: Ver [6], pág. 143.

Proposição 1.36. *Seja f_n uma seqüência de funções tais que*

$$f_n \rightarrow g \quad \text{em} \ \ \mathrm{L}^2$$

$$f_n \rightharpoonup h \quad \text{em} \ \ \mathrm{H}^1 \ .$$

Então $g \equiv h$.

Demonstração:

De fato, como $f_n \to g$ em L^2 temos

$$\langle f_n, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} \to \langle g, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}, \quad \forall \varphi \in \mathrm{L}^2$$

pois

$$|\langle f_n, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} - \langle g, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}| = |\langle f_n - g, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}| \leq \|f_n - g\|_{\mathrm{L}^2}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2} \to 0\ .$$

Em particular

$$\langle f_n, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} \to \langle g, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}^1 \subseteq \mathrm{L}^2\ .$$

Além disso, como

$$f_n \rightharpoonup h, \quad \text{em } \mathrm{H}^1$$

temos que

$$\langle f_n, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} \to \langle h, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}^1$$

pois $l(\cdot) = \langle \cdot, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}$ é um elemento de $\left(\mathrm{H}^1\right)'$, ja que é linear e

$$|l(\nu)| = |\langle \nu, \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2}| = \Big|\int \nu\varphi\ dx\Big| \leq \|\nu\|_{\mathrm{L}^2}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}$$

$$\leq (\|\nu\|_{\mathrm{L}^2} + \|\nabla\nu\|_{\mathrm{L}^2})\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2} = \|\nu\|_{\mathrm{H}^1}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}\ .$$

Segue da unicidade do limite fraco que $g \equiv h$.

■

Capítulo 2

O POTENCIAL CAPACITÁRIO

Sejam $\Omega, \Omega^{'}$ conjuntos abertos convexos limitados em $\mathbb{R}^n$ com $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$. Neste capítulo estaremos interessados no potencial capacitário de $\overline{\Omega'}$ em relação a Ω, isto é, a solução u de

$$\begin{aligned} \triangle u = 0 \quad & \text{em } \ \Omega \setminus \overline{\Omega'} \\ u = 0 \quad & \text{na } \partial\, \Omega \\ u = 1 \quad & \text{na } \partial\, \Omega^{'}. \end{aligned}$$

Nesta seção mostraremos que as curvas de nível de u são convexas. De fato, provaremos o seguinte resultado mais geral:

Teorema 2.1. *Seja u uma solução de*

$$\begin{aligned} \triangle u = \gamma(u) \quad & \text{em } \Omega \setminus \overline{\Omega'} \\ u = 0 \quad & \text{na } \partial\Omega \\ u = 1 \quad & \text{na } \partial\Omega^{'} \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\gamma(u)$ é uma função contínua e não decrescente com $\gamma(0) = 0$.

Então os conjuntos de nível de u são hipersuperfícies convexas de classe $C^{1,\alpha}$.

Necessitamos o seguinte lema.

Lema 2.2. *Seja u uma solução de (2.1), onde γ além de satisfazer as hipóteses do Teorema 2.1, é derivável. Então*

$$0 < u < 1 \quad \text{em} \quad \Omega \setminus \overline{\Omega'} \ .$$

Além sisso, se $0 \in \overline{\Omega'}$ *vale que*

$$x \cdot \nabla u(x) < 0 \quad \text{em} \quad \Omega \setminus \overline{\Omega'}.$$

Observemos que se, em lugar de supor que $0 \in \overline{\Omega'}$, supusermos que $t_0 \in \overline{\Omega'}$, a nossa conlusão será que

$$(x - t_0) \cdot \nabla u(x) < 0 \quad \text{em} \quad \Omega \setminus \overline{\Omega'}.$$

Demonstração:

Seja u uma solução de (2.1). Como $\gamma(0) = 0$, aplicando o Teorema do Valor Médio temos

$$\triangle(-u) = -\triangle u = -\gamma(u) = -\big(\gamma(u) - \gamma(0)\big)$$

$$= -\gamma^{'}\Big(\theta(x)(u-0)\Big)(u-0) = -\gamma^{'}(\theta(x)u)u \,,$$

onde $0 < \theta(x) < 1$. Daí

$$\Big(\triangle - \gamma^{'}(\theta(x)u)\Big)(-u) = 0 \ .$$

Como γ é crescente, $\gamma^{'} \geq 0$. Levando em conta que $u = 0$ em $\partial\Omega$, estamos em condições de aplicar o Teorema 1.25, que nos diz que $-u$ não pode assumir um máximo não negativo, ou seja, $-u < 0$, o que implica que $u > 0$.

Além disso, considerando $v = u - 1$ temos

$$\triangle v = \triangle u = \gamma(u) = \gamma(u) - \gamma(0) = \gamma^{'}\Big(\theta(x)(u-0)\Big)(u-0)$$

$$= \gamma^{'}(\theta(x)u)u \geq \gamma^{'}(\theta(x)u)u - \gamma^{'}(\theta(x)u)$$

$$= \gamma^{'}(\theta(x)u)(u-1) = \gamma^{'}(\theta(x)u)v\,,$$

ou seja,

$$\Big(\triangle - \gamma^{'}(\theta(x)u)\Big)v \geq 0.$$

Novamente, pelo Teorema 1.25, vemos que v não pode ter um máximo não negativo, ou seja, $u-1<0$, o que implica que $u<1$ e conclui a primeira parte do lema.

Para mostrarmos a segunda parte, calculemos $\triangle(x\cdot\nabla u)$.

Temos que $x\cdot\nabla u = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}u$. Então, para $j = 1, 2...n$, vale

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x\cdot\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}\Big) = \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}\ .$$

Usando isto, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(x\cdot\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_i}\Big)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}\Big)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i} + x_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i})\Big)$$

$$= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\partial x_i}\ .$$

Daí

$$\triangle(x\cdot\nabla u)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(x\cdot\nabla u)=\sum_{j=1}^{n}\Big(2\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\partial x_i}\Big)$$

$$=2\triangle u+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\Big)=2\gamma(u)+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\triangle u$$

$$=2\gamma(u)+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma(u)=2\gamma(u)+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\gamma^{'}(u)$$

$$=2\gamma(u)+\gamma^{'}(u)\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\,,$$

ou seja,

$$\triangle(x\cdot\nabla u)=2\gamma(u)+\gamma^{'}(u)(x\cdot\nabla u)\ .$$

Como γ é crescente, $\gamma(0)=0$ e pela parte anterior $u>0$, temos que $\gamma(u)>0$.

Logo

$$\triangle(x\cdot\nabla u)=2\gamma(u)+\gamma^{'}(u)(x\cdot\nabla u)>\gamma^{'}(u)(x\cdot\nabla u)\,,$$

ou seja,

$$\big(\triangle-\gamma^{'}(u)\big)(x\cdot\nabla u)>0\ .$$

Como $0\in\Omega^{'}$, se $x\in\partial\Omega^{'}$, o vetor x aponta para dentro da região $\Omega\setminus\overline{\Omega'}$ e, então $u_x(x)\le 0$, pois $u(x)=1$ e $u<1$ em $\Omega\setminus\overline{\Omega'}$. Se $x\in\partial\Omega$, pelo mesmo raciocínio $u_x(x)\le 0$, ou seja,

$$x\cdot\nabla u(x)\le 0,\quad \text{quando}\quad x\in\partial(\Omega\setminus\overline{\Omega'})\ .$$

Daí, se existir um ponto $x\in\Omega\setminus\overline{\Omega'}$ tal que $x\cdot\nabla u(x)\ge 0$, então a função $h(x)=x\cdot\nabla u(x)$ terá um máximo positivo em $\Omega\setminus\overline{\Omega'}$.

Entretanto, como $x \cdot \nabla u(x)$ não é constante, aplicando o Teorema 1.25 novamente, segue que $x \cdot \nabla u$ não pode ter um máximo não negativo, ou seja $x \cdot \nabla u < 0$. Assim, concluímos a demonstração do lema.

■

Antes de demonstrar o Teorema 2.1, observemos que o problema (2.1) sempre tem solução fraca de classe $C^{1,\alpha}_{loc}$.

Para mostrar que existe u que satisfaz

$$\begin{aligned} \triangle u = \gamma(u) \quad & \text{em } \Omega \setminus \overline{\Omega'} \\ u = 0 \quad & \text{em } \partial\Omega \\ u = 1 \quad & \text{em } \partial\Omega' \end{aligned}$$

consideremos funções γ_n reais analíticas, crescentes com $\gamma_n(0) = 0$ tais que $\gamma_n \to \gamma$ uniformemente em um compacto previamente escolhido. Estas funções são construídas no Apêndice A.

Observemos aqui que para mostrar a existência de solução bastaria que γ fosse contínua, entretanto, como necessitamos aproximar $\Omega \setminus \overline{\Omega'}$ por conjuntos com fronteira suave e, para mostrar a convexidade será necessário aproximar γ por funções analíticas, desde já consideraremos as funções γ_n reais analíticas, crescentes com $\gamma_n(0) = 0$.

Seja (Ω_n) uma seqüência decrescente de domínios convexos suaves tais que $\bigcap \Omega_n = \Omega$, e seja (Ω'_n) uma seqüência crescente de domínios convexos suaves tais que $\bigcup \Omega'_n = \Omega'$.

Mostremos primeiramente que o problema

$$\begin{aligned} \triangle u = \gamma_n(u) \quad & \text{em } \Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n} \\ u = 0 \quad & \text{na } \partial\Omega_n \\ u = 1 \quad & \text{na } \partial\Omega'_n \end{aligned} \tag{2.2}$$

tem solução. Utilizaremos a técnica de pontos críticos.

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in H^1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}) \;\middle|\; u = 0 \text{ em } \partial\Omega_n \;\text{ e }\; u = 1 \text{ em } \partial\Omega'_n \right\} .$$

No conjunto acima, as igualdades $u = 0$ em $\partial\Omega_n$ e $u = 1$ em $\partial\Omega_n^{'}$ têm o seguinte sentido: seja $h \in C^1(\overline{\Omega_n} \setminus \Omega_n^{'})$ tal que $h = 0$ em $\partial\Omega_n$ e $h = 1$ em $\partial\Omega_n^{'}$. Se $u \in H^1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'})$, dizemos que $u \in \mathcal{K}$ se $u - h \in H_0^1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'})$.

Consideraremos um funcional cujos pontos críticos sejam soluções fracas do problema (2.2). Depois disso, mostraremos que o funcional tem um mínimo em $\mathcal{K}$, e completaremos o raciocínio mostrando que estas soluções são de fato, soluções clássicas.

Finalmente, mostraremos que estas soluções convergem para um solução fraca $C^{1,\alpha}$ do problema (2.1).

Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Raciocinemos formalmente.

Notemos que, como

$$\triangle u = \gamma_n(u) \quad \text{em} \quad \Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}\ ,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'})$ vale que

$$\triangle u\ \varphi = \gamma_n(u)\varphi$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \triangle u\ \varphi\ dx = \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \gamma_n(u)\varphi\ dx\ .$$

Utilizando o teorema da divergência, vemos que

$$0 = \int_{\partial(\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'})} \varphi \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \nabla\varphi \cdot \nabla u\ dx + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \varphi \triangle u\ dx$$

e, então,

$$-\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \nabla u \cdot \nabla\varphi\ dx = \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \gamma_n(u)\varphi\ dx\ .$$

Assim, dizemos que u é solução fraca do problema (2.2) se $u \in \mathcal{K}$ e

$$\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \gamma_n(u)\varphi \, dx = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}) \ .$$

Consideremos o funcional

$$J_n(v) = \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} + \Gamma_n(v) \right) dx \ ,$$

onde $\Gamma_n(s) = \int_0^s \gamma_n(t)dt$.

Observemos primeiro que, como Γ_n é contínua, a composta $\Gamma_n(v)$ é mensurável para qualquer $v \in \mathrm{H}^1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$. De fato, se $O \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, $\Gamma_n^{-1}(O)$ é aberto e, portanto, $(\Gamma_n \circ v)^{-1}(O) = v^{-1}(\Gamma_n^{-1}(O))$ é mensurável.

A seguir, notemos que, como $\gamma_n(s) > 0$, $\forall s \in (0, +\infty)$ e $\gamma_n(s) < 0$, $\forall s \in (-\infty, 0)$, segue que

$$\Gamma_n(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \ .$$

Portanto, para qualquer $v \in \mathrm{H}^1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$ o funcional $J_n(v)$ está bem definido, podendo eventualmente valer $+\infty$.

Além disso, J_n é limitado inferiormente em $\mathcal{K}$, pois como $\Gamma_n \geq 0$ e $|\nabla v|^2 \geq 0$, temos que

$$J_n(v) = \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} + \Gamma_n(v) \right) dx \geq 0 \ .$$

Consideremos

$$I_n = \inf_{v \in \mathcal{K}} J_n(v) < \infty \ ,$$

pois se $v \in \mathcal{K}$ e $|v| < 1$, então $J_n(v) < \infty$.

Seja $\{u_n^m\}_{m=1}^\infty$ seqüência em $\mathcal{K}$ tal que $J_n(u_n^m) \downarrow I_n$.

Definindo

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; x < 0 \\ x & \text{se } \; 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se } \; x > 1 \end{cases}$$

vemos que h é de Lipschitz, e então, pelo Teorema 1.34, segue que $h(u_n^m) \in \mathrm{H}^1$, com

$$\nabla h(u_n^m) = \mathcal{X}_{\{x|0 \le u_n^m \le 1\}} \nabla u_n^m \; .$$

Pela própria definição de h vemos que $h(u_n^m) \in \mathcal{K}$. Temos também que $|\nabla h(u_n^m)| \le |\nabla u_n^m|$ e $0 \le \Gamma_n(h(u_n^m)) \le \Gamma_n(u_n^m)$. Portanto,

$$J_n(h(u_n^m)) \le J_n(u_n^m) \; .$$

Daí $J_n(h(u_n^m)) \to I_n$ e $0 \le h(u_n^m) \le 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Denotemos $h(u_n^m)$ novamente por u_n^m.

Como $\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\frac{|\nabla u_n^m|^2}{2} + \Gamma_n(u_n^m) \right) dx \to I_n$, para $\varepsilon = 1$, temos que existe m_0 tal que $\forall m \ge m_0$, vale

$$\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\frac{|\nabla u_n^m|^2}{2} + \Gamma_n(u_n^m) \right) dx - I_n < 1$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |\nabla u_n^m|^2 dx < 2\Big(1 + I_n - \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Gamma_n(u_n^m)\Big) dx < 2(1 + I_n) \, ,$$

donde segue que $\int |\nabla u_n^m|^2 dx$ é limitada.

Então, temos

$$\|u_n^m\|_{\mathrm{H}^1}^2 = \|u_n^m\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|\nabla u_n^m\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |u_n^m|^2 \; dx + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |\nabla u_n^m|^2 \; dx$$

$$\le \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} dx + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |\nabla u_n^m|^2 dx = m(\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}) + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |\nabla u_n^m|^2 \; dx$$

isto é, u_n^m é limitada em H^1.

Como H^1 é um espaço de Hilbert, pelo Teorema 1.30, u_n^m tem subseqüência fracamente convergente, ou seja,

$$\exists u_n^{m_k} \in \mathcal{K} \text{ tal que } u_n^{m_k} \rightharpoonup v_n, \quad \text{onde } v_n \in \mathrm{H}^1 \ .$$

Observemos que $v_n \in \mathcal{K}$.

De fato, pelo Teorema 1.33, como $u_n^{m_k} \rightharpoonup v_n$, existe $w_n^{m_k}$ combinação convexa de $\{u_n^{m_k}\}$ tal que $w_n^{m_k} \to v_n$ em H^1.

Como $\mathcal{K}$ é convexo, $w_n^{m_k} \in \mathcal{K}$. Logo $w_n^{m_k} - h \in \mathrm{H}_0^1$. Daí, fazendo $m_k \to \infty$, temos que

$$w_n^{m_k} - h \to v_n - h \quad \text{em } \mathrm{H}_0^1 \ ,$$

ou seja, $v_n \in \mathcal{K}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$u_n^m \rightharpoonup v_n \quad \text{em } \mathrm{H}^1 \ .$$

Mais precisamente, temos

$$\langle u_n^m, \varphi \rangle_{\mathrm{H}^1} \to \langle v_n, \varphi \rangle_{\mathrm{H}^1}, \quad \forall \varphi \in (\mathrm{H}^1)' = \mathrm{H}^1$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_n \backslash \overline{\Omega_n'}} (\nabla u_n^m \cdot \nabla \varphi + u_n^m \varphi) \, dx \to \int_{\Omega_n \backslash \overline{\Omega_n'}} (\nabla v_n \cdot \nabla \varphi + v_n \varphi) \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}^1 \ . \tag{2.3}$$

Além disso, pelo Teorema 1.31 temos que, $\exists \ u_n^{m_l}$ convergente a w_n em L^2, já que $\frac{2n}{n-2} = 2(\frac{n}{n-2}) > 2$.

Pela proposição 1.36 segue que $v_n = w_n$.

Chamando $u_n^{m_l} = u_n^l$, temos que

$$u_n^l \to v_n \ \text{ em } \mathrm{L}^2$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} u_n^l \varphi \; dx \to \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} v_n \varphi \; dx, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}^1 \; .$$

Juntando isto com (2.3), temos que

$$\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \nabla u_n^l \nabla \varphi \; dx \to \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \nabla v_n \nabla \varphi \; dx, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}^1 \tag{2.4}$$

quando $l \to +\infty$.

Por outro lado, como γ_n é de Lipschitz em $[0,1]$, segue que

$$\|\gamma_n(u_n^l) - \gamma_n(v_n)\|_{\mathrm{L}^2} = \Big(\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} |\gamma_n(u_n^l) - \gamma_n(v_n)|^2 dx \Big)^{1/2}$$

$$\leq \Big(\int K^2 |u_n^l - v_n|^2 dx \Big)^{1/2} = K \Big(\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} |u_n^l - v_n|^2 dx \Big)^{1/2}$$

$$= K \|u_n^l - v_n\|_{\mathrm{L}^2} \to 0 \; .$$

Então

$$\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \gamma_n(u_n^l) \varphi \; dx \to \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \gamma_n(v_n) \varphi \; dx, \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty \; . \tag{2.5}$$

De fato, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o anterior, temos

$$\Big| \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \gamma_n(u_n^l) \varphi \; dx - \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \gamma_n(v_n) \varphi \; dx \Big| = \Big| \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \Big(\gamma_n(u_n^l) - \gamma_n(v_n) \Big) \varphi \; dx \Big|$$

$$\leq \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} |\gamma_n(u_n^l) - \gamma_n(v_n)||\varphi| \; dx$$

$$\leq \Big(\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} |\gamma_n(u_n^l) - \gamma_n(v_n)|^2 dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} |\varphi|^2 dx \Big)^{1/2}$$

$$= \|\gamma_n(u_n^l) - \gamma_n(v_n)\|_{\mathrm{L}^2} \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2} \to 0$$

quando $l \to +\infty$.

Além disso, vale

$$\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \Gamma_n(u_n^l)\ dx \to \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \Gamma_n(v_n)\ dx\,. \tag{2.6}$$

De fato, para $x \in \Omega_n$ fixo temos

$$\big|\Gamma_n(u_n^l(x)) - \Gamma_n(v_n(x))\big| = \Big|\int_0^{u_n^l(x)} \gamma_n(t)\ dt - \int_0^{v_n(x)} \gamma_n(t)\ dt\Big|$$

$$= \Big|\int_{v_n(x)}^{u_n^l(x)} \gamma_n(t)\ dt\Big| \leq |u_n^l(x) - v_n(x)| \max_{t\in[0,1]} \gamma_n(t)$$

$$\leq |u_n^l(x) - v_n(x)|\gamma_n(1)\ .$$

Logo

$$\Big|\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \Gamma_n(u_n^l)\ dx - \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \Gamma_n(v_n)\ dx\Big| \leq \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \big|\Gamma_n(u_n^l) - \Gamma_n(v_n)\big| dx$$

$$\leq \gamma_n(1)\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} |u_n^l - v_n|\ dx \leq \gamma_n(1)\Big(\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} |u_n^l - v_n|^2\ dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} dx\Big)^{1/2}$$

$$\leq \gamma_n(1)(m(\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}))^{1/2}\|u_n^l - v_n\|_{\mathrm{L}^2} \to 0\ .$$

Como $v_n \in \mathrm{H}^1$, por (2.4) segue que

$$\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \nabla u_n^l \cdot \nabla v_n\ dx \to \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \nabla v_n \cdot \nabla v_n\ dx\ . \tag{2.7}$$

Observemos que

$$0 \leq \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} |\nabla u_n^l - \nabla v_n|^2\ dx$$

$$= \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \Big(\nabla u_n^l\cdot\nabla u_n^l - 2\nabla u_n^l\cdot\nabla v_n + \nabla v_n\cdot\nabla v_n\Big)\ dx\ .$$

Então, aplicando o limite inferior no anterior e juntando com (2.7), temos

$$0 \leq \underline{\lim} \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Big(\nabla u_n^l \cdot \nabla u_n^l - 2\nabla u_n^l \cdot \nabla v_n + \nabla v_n \cdot \nabla v_n \Big) \, dx$$

$$= \underline{\lim} \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |\nabla u_n^l|^2 \, dx - \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \nabla v_n \cdot \nabla v_n \, dx \; .$$

Daí, por (2.6) temos

$$0 \leq \underline{\lim} \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \frac{|\nabla u_n^l|^2}{2} \, dx - \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \frac{|\nabla v_n|^2}{2} \, dx$$

$$= \underline{\lim} \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \frac{|\nabla u_n^l|^2}{2} \, dx + \Big(\lim \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Gamma_n(u_n^l) \, dx - \int \Gamma_n(v_n) \, dx \Big) - \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \frac{|\nabla v_n|^2}{2} \, dx$$

$$= \underline{\lim} \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Big(\frac{|\nabla u_n^l|^2}{2} + \Gamma_n(u_n^l) \Big) dx - \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Big(\frac{|\nabla v_n|^2}{2} + \Gamma_n(v_n) \Big) dx$$

$$= I_n - J_n(v_n) \leq 0 \; .$$

Disto segue que $I_n = J_n(v_n)$, mostrando que v_n minimiza J_n.

Sabemos que $0 \leq v_n \leq 1$. Como v_n é o mínimo de J_n em $\mathcal{K}$, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'})$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que $v_n + t\varphi \in \mathcal{K}$ e então

$$J_n(v_n) \leq J_n(v_n + t\varphi) \quad \forall t \in \mathbb{R} \; .$$

Portanto, se existir a derivada direcional $\frac{dJ}{dt}\big(v_n + t\varphi\big)\Big|_{t=0}$, então ela deve ser nula.

Como os valores do funcional J_n na linha acima são sempre finitos, temos

$$J_n(v_n + t\varphi) - J_n(v_n)$$

$$= \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\frac{|\nabla(v_n + t\varphi)|^2}{2} + \Gamma_n(v_n + t\varphi) \right) dx - \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\frac{|\nabla v_n|^2}{2} + \Gamma_n(v_n) \right) dx$$

$$= \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\frac{|\nabla v_n|^2 + 2t\nabla v_n \cdot \nabla\varphi + t^2|\nabla\varphi|^2}{2} + \Gamma_n(v_n + t\varphi) \right) dx$$

$$- \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\frac{|\nabla v_n|^2}{2} + \Gamma_n(v_n) \right) dx$$

$$= \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(t\ \nabla v_n \cdot \nabla\varphi + \frac{t^2|\nabla\varphi|^2}{2} \right) dx + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Big(\Gamma_n(v_n + t\varphi) - \Gamma_n(v_n) \Big) dx\ .$$

Assim,

$$\frac{J_n(v_n + t\varphi) - J_n(v_n)}{t}$$

$$= \frac{\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(t\ \nabla v_n \cdot \nabla\varphi + \frac{t^2|\nabla\varphi|^2}{2} \right) dx}{t} + \frac{\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Big(\Gamma_n(v_n + t\varphi) - \Gamma_n(v_n) \Big) dx}{t}$$

$$= \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\nabla v_n \cdot \nabla\varphi + \frac{t|\nabla\varphi|^2}{2} \right) dx + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\frac{\Gamma_n(v_n + t\varphi) - \Gamma_n(v_n)}{t} \right) dx\ . \tag{2.8}$$

Além disso, como γ_n é Lipschitz com constante K, temos

$$\left| \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\frac{\Gamma_n(v_n + t\varphi) - \Gamma_n(v_n)}{t} \right) dx - \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \varphi\gamma_n(v_n)\ dx \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \left(\left(\frac{\Gamma_n(v_n + t\varphi) - \Gamma_n(v_n)}{t} \right) - \varphi\gamma_n(v_n) \right)\ dx \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Bigg(\Big(\frac{\int_0^{v_n(x)+t\varphi(x)} \gamma_n(s)ds - \int_0^{v_n(x)} \gamma_n(s)ds}{t} \Big) \right.$$

$$\left. - \Big(\frac{\gamma_n(v_n(x))}{t} \int_{v_n(x)}^{v_n(x)+t\varphi(x)} ds \Big) \Bigg) \, dx \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Bigg(\Big(\int_{v_n(x)}^{v_n(x)+t\varphi(x)} \frac{\gamma_n(s)}{t} \, ds \Big) - \Big(\int_{v_n(x)}^{v_n(x)+t\varphi(x)} \frac{\gamma_n(v_n(x))}{t} \, ds \Big) \Bigg) \, dx \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \Bigg(\int_{v_n(x)}^{v_n(x)+t\varphi(x)} \frac{\gamma_n(s) - \gamma_n(v_n(x))}{t\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}} \, ds \Bigg) \, dx \right|$$

$$\leq \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \int_{v_n(x)}^{v_n(x)+t\varphi(x)} \Big| \frac{\gamma_n(s) - \gamma_n(v_n(x))}{t} \Big| ds \, dx$$

$$\leq \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \frac{1}{t} t|\varphi(x)| \sup_{|s-v_n(x)|\leq t|\varphi(x)|} |\gamma_n(s) - \gamma_n(v_n(x))| \, dx$$

$$\leq \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |\varphi(x)| \sup_{|s-v_n(x)|\leq t|\varphi(x)|} K|s - v_n(x)| \, dx$$

$$\leq \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |\varphi(x)|Kt|\varphi(x)| \, dx \leq tK \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} |\varphi(x)|^2 \, dx = tK\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2 \to 0$$

quando $t \to 0$.

Então, fazendo t tender a zero em (2.8), temos que

$$0 = \frac{d}{dt}\big[J_n(v_n + t\varphi)\big]\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{J_n(v_n + t\varphi) - J_n(v_n)}{t\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}}$$

$$= \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \frac{\nabla v_n \cdot \nabla \varphi}{\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}} dx + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega_n'}} \frac{\varphi \gamma_n(v_n)}{\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}} dx \ .$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi \; dx + \int_{\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}} \varphi \; \gamma_n(v_n) \; dx = 0$$

o que implica que v_n é solução fraca de (2.2) .

Fixemos $h \in \mathrm{C}^2(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$ com $h = 0$ em $\partial\Omega_n$ e $h = 1$ em $\partial\Omega'_n$.

Como

$$\triangle v_n = \gamma_n(v_n) \quad \text{em } \Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}$$

e

$$v_n - h \in \mathrm{H}^1_0(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}) \; .$$

temos que,

$$\triangle(v_n - h) = \gamma_n(v_n) - \triangle h \in \mathrm{L}^\infty \; ,$$

e então, aplicando o Teorema 1.29 com $g = \gamma_n(v_n) - \triangle h \in \mathrm{L}^\infty$, vemos que $v_n - h \in \mathrm{C}^{1,\alpha}_{loc}(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$, $\forall \alpha < 1$.

Portanto $v_n \in \mathrm{C}^{1,\alpha}_{loc}(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$.

Agora, como $v_n \in \mathrm{C}^1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$ e $\gamma_n \in \mathrm{C}^1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$, temos que $\gamma_n(v_n) \in \mathrm{C}^1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$. Então $\triangle v_n = \gamma_n(v_n) \in \mathrm{C}^\alpha(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$. Aplicando o Teorema 1.28, obtemos que $v_n \in \mathrm{C}^{2,\alpha}(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$, $\forall \alpha < 1$.

Logo

$$\triangle v_n = \gamma_n(v_n) \;\; \text{em } \Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n}$$

no sentido clássico.

Como n foi escolhido arbitráriamente, o resultado vale $\forall n \in \mathbb{N}$. Com isso construímos uma seqüência $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de soluções clássicas.

Observemos que, também pelo Teorema 1.29, existe um constante $C > 0$ tal que

$$\|v_n - h\|_{\mathrm{C}^{1,\alpha}(Q)} \leq C\big(\|v_n - h\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|\gamma_n(v_n)\|_{\mathrm{L}^\infty}\big) \, ,$$

onde $Q \subset\subset \Omega \setminus \overline{\Omega'}$, ou seja

$$\|v_n\|_{C^{1,\alpha}(Q)} \leq C(\|v_n - h\|_{L^\infty} + \|\gamma_n(v_n)\|_{L^\infty}) + \|h\|_{C^{1,\alpha}(\Omega\setminus\overline{\Omega'})} \ .$$

Entretanto

$$\|\gamma_n(v_n)\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega\setminus\overline{\Omega'}} \gamma_n(v_n(x)) \leq \gamma_n(1) \to \gamma(1) \ .$$

Logo, $\exists R > 0$ tal que $\|\gamma_n(v_n)\|_{L^\infty} \leq R \ , \quad \forall n.$

Daí, como $v_n \leq 1$, temos que

$$\|v_n\|_{C^{1,\alpha}(Q)} \leq C(\|v_n\|_{L^\infty} + \|h\|_{L^\infty} + \|\gamma_n(v_n)\|_{L^\infty}) + \|h\|_{C^{1,\alpha}}$$

$$\leq C(1 + \|h\|_{L^\infty} + R) + \|h\|_{C^{1,\alpha}} = K \ , \quad \forall n \ ,$$

ou seja, $\{v_n\}$ e $\{\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\}$, para $i = 1, 2, \ldots, N$, são famílias uniformemente limitadas por K.

Mas

$$\|v_n\|_{C^{1,\alpha}} = \sup_{\substack{x\in Q\\ |\beta|\leq 1}} |D^\beta v_n(x)| + \sup_{\substack{x,y\in Q\\ x\neq y \ |\beta|=1}} \frac{|D^\beta v_n(x) - D^\beta v_n(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

e, então,

$$\frac{|v_n(x) - v_n(y)|}{|x-y|} \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall x, y \in Q \ .$$

Daí, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta < \left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$ temos que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \text{se } |x-y| < \delta$$

então

$$|v_n(x) - v_n(y)| \leq K|x-y| \leq K\delta \leq K\left(\frac{\varepsilon}{K}\right) = \varepsilon \ .$$

Disto, segue que as funções $\{v_n\}$ são uma família uniformemente equicontínua.

Pelo mesmo argumento, para $i = 1, 2, ..., N$, $\{\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\}$ também é uma família uniformemente equicontínua.

Então, aplicando o Teorema 1.35 para cada uma das seqüências v_n, $\frac{\partial v_n}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial v_n}{\partial x_N}$ temos que existem subseqüências que convergem uniformemente.

Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$\begin{aligned} v_n &\to v; \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} &\to u_1; \\ &\vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_N} &\to u_N \ . \end{aligned}$$

Como cada uma das das seqüências converge uniformemente, segue que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{para} \ \ i = 1, 2, ..., N.$$

Disto temos

$$v_n \to v \quad \text{em } \mathrm{C}^1 \ ,$$

onde $v \in \mathrm{C}^{1,\alpha}_{loc}(\Omega \setminus \overline{\Omega'})$, já que Q é um compacto arbitrário.

Observemos que v_n é limitada em H^1.

De fato, sejam $A, B \subset \mathbb{R}^N$ abertos tais que $\Omega \supsetneq \overline{A} \supsetneq A \supsetneq \overline{B} \supsetneq B \supsetneq \overline{\Omega'}$. Seja $Q = A \setminus \overline{B} \subset \Omega \setminus \overline{\Omega'}$. Denotaremos por ∂Q_1 a fronteira de A e ∂Q_2 a fronteira de B.

Seja $h \in \mathrm{C}^2$ tal que $h \equiv 1$ em $\overline{B}$ e $h \equiv 0$ em A^c. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $v_n - h \in \mathrm{H}^0_1(\Omega_n \setminus \overline{\Omega'_n})$.

Além disso, temos

$$\triangle\big(v_n - h\big) = \gamma_n(v_n) - \triangle h$$

e então

$$\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} (v_n - h)\triangle(v_n - h)\ dx = \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} (v_n - h)\big(\gamma_n(v_n) - \triangle h\big)\ dx\ .$$

Utilizando o teorema da divergência, temos que

$$-\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \big|\nabla(v_n - h)\big|^2\ dx = \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} (v_n - h)\big(\gamma_n(v_n) - \triangle h\big)\ dx\ ,$$

e então

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \big|\nabla(v_n - h)\big|^2\ dx &= \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} (h - v_n)\big(\gamma_n(v_n) - \triangle h\big)\ dx \\ &= \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \Big[h\gamma_n(v_n) - h\triangle h - v_n\gamma_n(v_n) + v_n\triangle h\Big]\ dx\end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} |h\gamma_n(v_n)|\ dx + \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} |h\triangle h|\ dx + \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} |v_n\gamma_n(v_n)|\ dx$$
$$+ \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} |v_n\triangle h|\ dx \leq C\ ,$$

pois $\|\gamma_n(v_n)\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq R,\ \forall n$ e $h \in C^2$ e $|v_n| \leq 1$.

Agora, estendendo v_n como 1 em Ω_n' e como 0 em Ω_n^c, temos que

$$\|v_n - h\|_{\mathrm{H}_0^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \big|\nabla(v_n - h)\big|^2\ dx = \int_{\Omega_n\setminus\overline{\Omega_n'}} \big|\nabla(v_n - h)\big|^2\ dx \leq C\ .$$

Daí, como $v_n - h$ é limitada em $\mathrm{H}_0^1(\mathbb{R}^N)$ que é de Hilbert, como anteriormente, existe uma subseqüência fracamente convergente, ou seja

$$v_{n_k} - h \rightharpoonup w \ \text{ em } \ \mathrm{H}^1\ .$$

Observemos que $v = w + h$. De fato, como $v_{n_k} - h \rightharpoonup w$ em $\mathrm{H}_0^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema 1.31 (Rellich - Kondrachov), temos que $\exists\ v_{n_{k_l}} - h$ que denotaremos por $v_{n_k} - h$ convergente a η em $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^N)$.

Pelo Lema 1.36 temos que $w = \eta$.

Como $v_{n_k} - h \to w$ em $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^N)$, segue que $v_{n_k} - h$ tem uma subseqüência convergente em quase todo ponto para w. Mas $v_{n_k} - h$ converge uniformemente em compactos de $\Omega \setminus \overline{\Omega'}$ a $v - h$. Logo $w = v - h$ q.t.p.

Assim, temos que $v \in \mathrm{H}_0^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $x \notin \Omega$, então, para n suficientemente grande, $x \notin \Omega_n$, ou seja, $v(x) = 0$. Logo $v \equiv 0 \in \Omega^c$, o que implica que $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Logo $v - h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega \setminus \overline{\Omega'})$). Analogamente, $v \equiv 1$ em Ω'.

Sem perda de generalidade, denotando novamente v_{n_k} por v_n e temos que

$$
\begin{gathered}
v_n \to v \ \text{ em } \ \mathrm{C}^1 \ \text{ em compactos de } \ \Omega \setminus \overline{\Omega'}; \\
\triangle v_n = \gamma_n(v_n) \ ; \\
v_n \to v \ \text{ em } \ \mathrm{L}^2 \ ; \\
v_n \rightharpoonup v \ \text{ em } \ \mathrm{H}^1 \ .
\end{gathered}
$$

Então

$$
-\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \nabla v \nabla \varphi = \lim - \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi = \lim \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \triangle v_n \varphi = \lim \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \gamma_n(v_n) \varphi \ .
$$

Mas

$$
\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \gamma_n(v_n) \varphi \to \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \gamma(v) \varphi
$$

pois

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \gamma_n(v_n) \varphi - \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \gamma(v) \varphi \Big| &= \Big| \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} \varphi [(\gamma_n(v_n) - \gamma(v_n)) + (\gamma(v_n) - \gamma(v))] \Big| \\
&\leq \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} |\varphi| |\gamma_n(v_n) - \gamma(v_n)| + \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega'}} |\varphi| |\gamma(v_n) - \gamma(v)| \to 0
\end{aligned}
$$

pois $\gamma_n \to \gamma$ uniformemente em $[0,1]$ e $v_n \to v$ uniformemente em compactos de $\Omega \setminus \overline{\Omega'}$.

Logo

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega \gamma(v)\varphi = 0 \ .$$

Disto temos que $v \in \mathrm{C}^{1,\alpha}$ é solução fraca para o problema (2.1).

Portanto, a existência esta demonstrada.

Observemos que no caso em que γ for diferenciável, teremos também que a solução de (2.1) é única.

De fato, seja v outra solução do problema (2.1).

Consideremos $w = u - v$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio, temos que

$$\triangle w = \triangle u - \triangle v = \gamma(u) - \gamma(v) = \overbrace{\gamma^{'}\Big(u + \theta(x)(v-u)\Big)}^{c(x)}(u-v) = c(x)w$$

onde $0 \leq \theta(x) \leq 1$.

Como γ é crescente, $c(x) = \gamma^{'}\Big(u + \theta(x)(v-u)\Big) \geq 0$. Daí

$$\Big(\triangle - c(x)\Big)(-w) = 0 \ \text{ em } \ \Omega \setminus \overline{\Omega'} \ .$$

Então $-w$ não pode assumir valores positivos, pois pelo Teorema 1.25, $-w$ não pode ter um máximo não negativo, ou seja, $w \geq 0$.

Com raciocínio análogo, considerando $w^{'} = v - u = -w$, vemos que $w^{'} \geq 0$, ou seja, $u \equiv v$.

Portanto, supondo γ diferenciável, a solução do problema (2.1) é única.

Antes de mostrar que as superfícies de nível de u são convexas, observemos alguns fatos.

Estendamos como 1 a solução u de (2.1) em Ω'. Queremos mostrar que os conjuntos $\{x|u(x) \geq t\}$ são convexos, para todo $t \in (0,1)$.

Suponhamos que para todo $x, y \in \Omega$, tenhamos que

$$u(z) \geq \min\big(u(x), u(y)\big) \tag{2.9}$$

para todo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, com $\lambda \in (0,1)$.

Então, para um $t_0 \in (0,1)$ fixo, consideremos o conjunto

$$M = \{x|u(x) \geq t_0\}.$$

Sejam $x, y \in M$. Então, para um dado $\lambda \in (0,1)$, considerando $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ temos que

$$u(z) \geq \min\big(u(x), u(y)\big) \geq t_0 \ ,$$

ou seja, $z \in M$ e, como λ é arbitrário, segue que M é convexo.

Logo basta mostrarmos que (2.9) é valida.

No lugar disto, consideremos o conjunto

$$A = \{\ (x, y, z) \mid z = \lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in (0,1),\ x, y \in \Omega \ \text{ e } \ u(x) > u(z)\}$$

e a função

$$F(x, y, z) = u(y) - u(z).$$

Suponhamos que

$$\sup_{(x,y,z)\in A} F(x, y, z) \leq 0. \tag{2.10}$$

Então, dados $x, y \in \Omega$ e considerando $z = \lambda x + (1-\lambda)y, \ \ \lambda \in (0,1)$, temos que, sempre que $u(x) > u(z)$ ocorrer, $u(y) - u(z) \leq 0$, ou seja, $u(y) \leq u(z)$.

Daí

$$u(y) \leq u(z) < u(x) \ ,$$

o que implica que

$$u(z) \geq \min\big(u(x), u(y)\big) \ ,$$

ou seja, (2.9) é satisfeita.

Portanto, para concluirmos que os conjuntos $\{x|u(x) \geq t\}$ são convexos, basta mostrarmos que (2.10) é valida.

Suponhamos por absurdo que

$$\sup_{(x,y,z)\in A} F(x,y,z) = K > 0. \tag{2.11}$$

Seja $(x_k, y_k, z_k) \in A$ uma seqüência tal que $F(x_k, y_k, z_k) \to K$. Como $\overline{\Omega}$ é compacto, segue que existe x_{k_l} tal que $x_{k_l} \to x_0$. Analogamente existem $y_{k_{l_m}}$ tal que $y_{k_{l_m}} \to y_0$ e $z_{k_{l_{mn}}}$ tal que $z_{k_{l_{mn}}} \to z_0$. Denotemos $x_{k_{l_{mn}}} = x_k$, $y_{k_{l_{mn}}} = y_k$ e $z_{k_{l_{mn}}} = z_k$. Notemos que $x_0, y_0, z_0 \in \overline{\Omega}$.

Portanto, temos $(x_k, y_k, z_k) \in A$ sequencia tal que $F(x_k, y_k, z_k) \to K$ e $x_k \to x_0, \ y_k \to y_0$ e $z_k \to z_0$, onde $x_0, y_0, z_0 \in \overline{\Omega}$.

Observemos que $x_0 \neq y_0$, pois como $z_k \in \overline{x_k y_k}$, temos que

$$|x_k - z_k| + |z_k - y_k| = |x_k - y_k|, \quad \forall k.$$

Daí

$$|x_0 - z_0| + |z_0 - y_0| = |x_0 - y_0|$$

ou seja, $z_0 \in \overline{x_0 y_0}$. Se $x_0 = y_0$, teriamos que $x_0 = z_0 = y_0$ e daí $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, o que é absurdo, pois $F(x_0, y_0, z_0) = K > 0$.

Para continuar, precisaremos de mais alguns lemas.

Lema 2.3. *Seja* $l = \frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|}$. *Então*
(i) $u_l(z_0) = 0$*;*
(ii) $\overline{x_0 y_0} \subset \Omega \setminus \overline{\Omega'}$*;*
(iii) $u_l(y_0) = 0$*;*
(iv) $x_0 = z_0$ *e*
(v) $u_{ll}(z_0) = 0$.

Demonstração:

(i) Antes de mostrar que $u_l(z_0) = 0$, observemos que $z_0 \in \Omega \setminus \overline{\Omega'}$.

De fato, notemos que $z_0 \notin \overline{\Omega'}$.

Por absurdo, se $z_0 \in \overline{\Omega'}$, então $u(z_0) = 1$, mas por (2.11) temos que

$$u(y_0) - u(z_0) = K > 0$$

e, como consequência disto,

$$u(y_0) = u(z_0) + K = 1 + K > 1 \ ,$$

o que é absurdo, pois pelo Lema 2.2, $0 < u < 1$. Logo $z_0 \notin \overline{\Omega'}$.

Além disso, $y_0 \notin \partial\Omega$.

Por absurdo, se $y_0 \in \partial\Omega$ então $u(y_0) = 0$, mas, novamente por (2.11) temos que

$$u(y_0) - u(z_0) = K > 0$$

e, como consequência disto,

$$u(z_0) = 0 - K < 0 \ ,$$

o que é absurdo, pois pelo Lema 2.2, $0 < u < 1$. Logo $y_0 \notin \partial\Omega$.

Finalmente, $z_0 \notin \partial\Omega$.

Por absurdo, se $z_0 \in \partial\Omega$ então $z_0 = x_0$, pois temos que $z_0 \in \partial\Omega$, $y_0 \notin \partial\Omega$ e Ω é convexo, logo $z_0 = x_0$.

Notemos que, pelo Teorema do Valor Médio vale

$$\triangle u = \gamma(u) = \gamma(u) - \gamma(0) = \gamma^{'}(\theta(x)u)(u-0)$$

ou seja,

$$\Big(\triangle - \gamma^{'}(\theta(x)u)\Big)u = 0.$$

Como γ é crescente, $\gamma^{'} \geq 0$, então $-\gamma^{'}(\theta u) \leq 0$.

Portanto, estamos em condições de aplicar o Teorema 1.26, pois $-u \leq 0$ e $u = 0$ em $z_0 \in \partial\Omega$.

Como l aponta na direção interior a Ω, pelo Teorema 1.26 temos

$$\frac{\partial(-u(z_0))}{\partial(-l)} > 0$$

ou seja, $u_l(z_0) > 0$.

Como

$$l_k = \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} \to l = \frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|} \ ,$$

por continuidade, $\exists k_0$ tal que $\forall k \geq k_0,\ u_{_{l_k}}(z_0) > 0$, ou seja, $u_{_{-l_k}}(z_0) < 0$, o que implica que u é decrescente de y_k para x_k; absurdo, pois daí $u(x_k) < u(x), \forall x \in \overline{x_k y_k}$, o que implicaria que $u(x_k) < u(z_k)$ contradizendo o fato que $(x_k, y_k, z_k) \in A$. Logo $z_0 \notin \partial\Omega$.

Destas observações concluimos que $z_0 \in \Omega \setminus \overline{\Omega'}$.

Para mostrar que $u_l(z_0) = 0$, consideremos 2 casos:

<u>Caso 1</u>: $z_0 \neq x_0$.

Neste caso u tem um mínimo em z_0 sobre o segmento $\overline{x_0 y_0}$, pois caso contrário, existiria $z^{'} \in \overline{x_0 y_0}$ tal que $u(z^{'}) < u(z_0)$ e daí

$$F(x_0, y_0, z^{'}) = u(y_0) - u(z^{'}) > u(y_0) - u(z_0) = F(x_0, y_0, z_0) \ ,$$

contradizendo a hipótese de que $F(x_0, y_0, z_0)$ é o supremo, visto que $(x_k, y_k, z_k) \in A$.

Como z_0 é mínimo na direção l, $u_l(z_0) = 0$, o que demonstra o resultado neste caso.

Caso 2: $z_0 = x_0$.

Neste caso $F(x_0, y_0, z_0) = u(y_0) - u(z_0) = u(y_0) - u(x_0)$, donde segue que $u_l(x_0) \geq 0$, pois se $u_l(x_0) < 0$, tomando $x' \in \overline{x_0 y_0}$ próximo de x_0, teríamos $u(x') < u(x_0)$, o que implicaria que

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, x') &= u(y_0) - u(x') > u(y_0) - u(x_0) \\ &= F(x_0, y_0, x_0) = F(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo $u_l(x_0) \geq 0$. Para concluir que $u_l(x_0) = 0$, mostremos que $u_l(x_0) \leq 0$.

Consideremos $l_k = \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|}$.

Temos que $\exists w_k \in \overline{x_k z_k}$ tal que $u_{l_k}(w_k) < 0$, pois se $\forall w \in \overline{x_k z_k}$ fosse verdade que $u_{l_k}(w) \geq 0$, u seria crescente em $\overline{x_k z_k}$, e daí $u(z_k) \geq u(x_k)$, o que contradiz o fato de que $(x_k, y_k, x_k) \in A$.

Como $u_{l_k}(w_k) < 0$, temos que $l_k \cdot \nabla u(w_k) < 0$. Mas como $z_0 = x_0$, fazendo $k \to +\infty$ segue que $w_k \to x_0 = z_0$.

Logo $l \cdot \nabla u(z_0) \leq 0$, ou seja $u_l(z_0) \leq 0$, o que completa a prova de (i).

(ii)Por absurdo, suponhamos que $\exists t_0 \in \overline{x_0 y_0} \cap \overline{\Omega'}$.

Pelo Lema 2.2, $(x - t_0) \cdot \nabla u(x) < 0$ em $\Omega \setminus \overline{\Omega'}$. Para $x = z_0$ temos que $(z_0 - t_0) \cdot \nabla u(z_0) < 0$.

Notemos que $(y_0 - x_0) = s(z_0 - t_0)$ e que, por (i), $u_l(z_0) = 0$, donde segue que $l \cdot \nabla u(z_0) = 0$, ou seja, $(y_0 - x_0) \cdot \nabla u(z_0) = 0$, absurdo.

Logo $\overline{x_0y_0} \subset \Omega \setminus \overline{\Omega'}$.

(iii) Queremos mostrar que $u_l(y_0) = 0$. Para isso, observemos que como $u(y_0) - u(z_0) = F(x_0, y_0, z_0)$ é o supremo, temos que $u(y_0) > u(x)$, $\forall x \in \overline{x_0y_0}$ próximo de y_0.

Então $u_{-l}(y_0) \leq 0$, ou seja $u_l(y_0) \geq 0$.

Suponhamos que $u_l(y_0) > 0$. Então $\exists y \in x_0y_0 \cap \Omega \setminus \overline{\Omega'}$ tal que $u(y) > u(y_0)$. Mas daí temos que

$$F(x_0, y, z_0) = u(y) - u(z_0) > u(y_0) - u(z_0) = F(x_0, y_0, z_0) \ ,$$

o que é um absurdo. Logo $u_l(y_0) = 0$.

(iv) Por absurdo, suponhamos que $x_0 \neq z_0$.

Então u é constante em $\overline{x_0z_0}$.

De fato, se isto não fosse verdade, existiria

$$x' \in \overline{x_0z_0} \quad \text{tal que} \quad u(x') \neq u(z_0).$$

Daí, se $u(x') < u(z_0)$,

$$F(x_0, y_0, x') = u(y_0) - u(x') > u(y_0) - u(z_0) = F(x_0, y_0, z_0)$$

o que é um absurdo. Logo $u(x') > u(z_0)$. Disto segue que $\exists D_1$ bola contida em $\Omega \setminus \overline{\Omega'}$ e centrada em x' tal que $u(x) > u(z_0)$, $\forall x \in D_1$.

Consideremos D_2 a bola contida em $\Omega \setminus \overline{\Omega'}$ e centrada em y_0 com raio $r = \frac{Raio(D^1)|y_0 - z_0|}{|x' - z_0|}$. Notemos que toda reta que passa por z_0 intersepta D_1 se e somente se intersepta D_2.

Disto concluímos que, $\forall y \in D_2$, $u(y) \leq u(y_0)$.

De fato, se isto não fosse verdade, existiria

$$y' \in D_2 \quad \text{tal que} \quad u(y') > u(y_0)$$

e daí teriamos que, como a reta $z_0 y'$ intercepta D_1 em, digamos, x^*, segue que $(x^*, y', z_0) \in A$ e, portanto,

$$F(x^*, y', z_0) = u(y') - u(z_0) > u(y_0) - u(z_0) = F(x_0, y_0, z_0) \ ,$$

o que é um absurdo. Portanto $\forall y \in D_2$, $u(y) \leq u(y_0)$, ou seja, y_0 é um ponto de máximo local de u.

Com isso conseguimos uma contradição, pois se y_0 fosse um máximo local de u, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(y_0) \leq 0$, para toda direção i, donde seguiria que $\triangle u(y_0) \leq 0$, o que nunca acontece, já que $u > 0$, $\gamma(0) = 0$ e γ é crescente.

Logo não existe $x' \in \overline{x_0 z_0}$ tal que $u(x') \neq u(z_0)$, ou seja, u é constante no segmento $\overline{x_0 z_0}$.

Como u é analítica, considerando u restrita ao segmento $\overline{x_0 y_0}$ e aplicando a Observação 1.22, segue que u é constante em todo segmento $\overline{x_0 y_0}$. Absurdo, pois daí $u(z_0) = u(y_0)$ e, como conseqüência $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Logo $x_0 = z_0$.

(v) Suponhamos que $u_{ll}(z_0) < 0$.

Então, como $u_l(z_0) = 0$, $u(z_0)$ é um máximo local estrito na direção l. Logo $\exists z' \in \overline{z_0 y_0}$ tal que $u(z') < u(z_0)$, mas daí teríamos que $(z_0, y_0, z') \in A$ e

$$F(z_0, y_0, z') = u(y_0) - u(z') > u(y_0) - u(z_0) = F(z_0, y_0, z_0) \ ,$$

o que é um absurdo. Logo $u_{ll}(z_0) \geq 0$.

Suponhamos que $u_{ll}(z_0) > 0$.

Então $\exists x', x'' \in z_0 y_0$ tal que

$$x' \in \overline{x'' z_0}, \ \overline{x'' z_0} \cap \overline{z_0 y_0} = \{z_0\} \ \text{ e } \ u(x'') > u(x') > u(z_0).$$

Com raciocínio análogo ao feito em (iv), concluímos que u é constante em $\overline{x'' z_0}$, absurdo.

Logo $u_{ll}(z_0) = 0$ e o lema esta provado.

∎

Lema 2.4.
$$\frac{\nabla u(z_0)}{|\nabla u(z_0)|} = \frac{\nabla u(y_0)}{|\nabla u(y_0)|} = \xi \ .$$

Demonstração:

Em primeiro lugar, observemos que os vetores $\frac{\nabla u(z_0)}{|\nabla u(z_0)|}$, $\frac{\nabla u(y_0)}{|\nabla u(y_0)|}$ estão bem definidos, já que pelo Lema 2.2 $\nabla u(x) \neq 0, \ \forall x \in \Omega \setminus \overline{\Omega'}$.

Consideremos inicialmente o caso $n = 2$.

Pelo lema anterior, $u_l(z_0) = 0 = u_l(y_0)$.

Então $l \cdot \nabla u(z_0) = 0 = l \cdot \nabla u(y_0)$, ou seja, $\nabla u(z_0) = a\nabla u(y_0)$.

Observemos que $a > 0$, pois pelo Lema 2.2 temos

$$0 > z_0 \cdot \nabla u(z_0) = z_0 \cdot a\nabla u(y_0) = a\big(z_0 \cdot \nabla u(y_0)\big).$$

Mas $z_0 = y_0 + (z_0 - y_0) = y_0 + sl$ onde $s < 0$, daí

$$0 > a\big(z_0 \cdot \nabla u(y_0)\big) = a\big((y_0 + sl) \cdot \nabla u(y_0)\big)$$

$$= a\big(y_0 \cdot \nabla u(y_0) + sl \cdot \nabla u(y_0)\big)$$

$$= a\big(y_0 \cdot \nabla u(y_0)\big) + as\big(l \cdot \nabla u(y_0)\big) = a\big(y_0 \cdot \nabla u(y_0)\big).$$

Como $y_0 \cdot \nabla u(y_0) < 0$, de $a\big(y_0 \cdot \nabla u(y_0)\big) < 0$ segue que $a > 0$, o que completa o caso $n = 2$.

Consideremos agora o caso $n > 2$.

Por absurdo, suponhamos que

$$\frac{\nabla u(z_0)}{|\nabla u(z_0)|} \neq \frac{\nabla u(y_0)}{|\nabla u(y_0)|}.$$

Observemos que $\frac{\nabla u(z_0)}{|\nabla u(z_0)|} = -\frac{\nabla u(y_0)}{|\nabla u(y_0)|}$ não acontece, pois pelo mesmo argumento dado acima, se $\nabla u(z_0)$ for multiplo de $\nabla u(y_0)$, então ambos tem que ter o mesmo sentido.

Logo, podemos escolher um vetor v tal que

$$v \cdot \nabla u(y_0) > 0 \qquad \text{e} \qquad v \cdot \nabla u(z_0) < 0.$$

Utilizaremos o fato acima para construir

$$x^{'}, y^{'}, z^{'} \ \text{ tais que } \ (x^{'}, y^{'}, z^{'}) \in A$$

e

$$F(x^{'}, y^{'}, z^{'}) > F(x_0, y_0, z_0).$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos a direção $r_\varepsilon = (y_0 - z_0) + \varepsilon v$ e a reta

$$x_\varepsilon(t) = z_0 + (1-t)r_\varepsilon.$$

Notemos que $x_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon v$ e $x_\varepsilon(1) = z_0$.

Como $\varepsilon v \cdot \nabla u(y_0) > 0$, u cresce na direção de εv. Daí $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ tal que considerando o ponto $y^{'} = y_0 + \varepsilon_0 v$, temos que $u(y^{'}) > u(y_0)$.

Notemos que $y^{'} = x_{\varepsilon_0}(0)$.

Consideremos a reta $x_{\varepsilon_0}(t)$. Temos

$$(x_{\varepsilon_0}(t) - z_0) \cdot \nabla u(z_0) = (z_0 + (1-t)r_{\varepsilon_0} - z_0) \cdot \nabla u(z_0)$$

$$= (1-t)\Big(r_{\varepsilon_0} \cdot \nabla u(z_0)\Big) = (1-t)\Big(\big(y_0 - z_0 + \varepsilon_0 v\big) \cdot \nabla u(z_0)\Big)$$

$$= (1-t)\Big(\big(y_0 - z_0\big) \cdot \nabla u(z_0)\Big) + (1-t)\Big(\varepsilon_0 v \cdot \nabla u(z_0)\Big)$$

$$= (1-t)\Big(\varepsilon_0 v \cdot \nabla u(z_0)\Big) \begin{cases} > 0, & \text{se } \ t > 1 \\ < 0, & \text{se } \ t < 1\ . \end{cases}$$

Notemos que se $t < 1$, $x_{\varepsilon_0}(t) - z_0$ é um vetor na direção e sentido de r_{ε_0} e portanto temos que $u_{r_{\varepsilon_0}}(z_0) < 0$.

Então existe $t^{'} < 1$ próximo de 1 tal que, fazendo $z^{'} = x_{\varepsilon_0}(t^{'})$, temos

$$u(z^{'}) = u(x_{\varepsilon_0}(t^{'})) < u(z_0).$$

Com raciocínio análogo, se $t > 1$, $x_{\varepsilon_0}(t) - z_0$ é um vetor na direção de r_{ε_0} mas no sentido contrário de r_{ε_0}, e portanto temos que $u_{-r_{\varepsilon_0}}(z_0) > 0$.

Então existe $t^{''} > 1$ próximo de 1 tal que, fazendo $x^{'} = x_{\varepsilon_0}(t^{''})$, temos

$$u(x^{'}) = u(x_{\varepsilon_0}(t^{''})) > u(z_0).$$

Como $z^{'} \in \overline{x^{'}y^{'}}$ e

$$u(x^{'}) = u(x_{\varepsilon_0}(t^{''})) > u(z_0) > u(x_{\varepsilon_0}(t^{'})) > u(z^{'}) \ ,$$

segue que $(x^{'}, y^{'}, z^{'}) \in A$ e

$$F(x^{'}, y^{'}, z^{'}) = u(y^{'}) - u(z^{'}) > u(y_0) - u(z_0) = F(x_0, y_0, z_0) \ ,$$

o que é absurdo. Logo o lema esta demonstrado.

$\blacksquare$

Demonstração do Teorema 2.1:

Já mostramos que o problema (2.1) tem solução. Pelo Lema 2.2, como $\nabla u(x)$ é sempre diferente de zero, segue do Teorema da função Implícita que os conjuntos de nível de u são hipersuperfícies e, além disso, têm a mesma regularidade de u, ou seja, são $\mathrm{C}^{1,\alpha}$.

Assim, falta apenas mostrarmos que tais hipersuperfícies são convexas.

Consideraremos primeiro o caso em que γ é crescente e analítica em u.

Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$\begin{array}{l} |\nabla u(y_0)| = \lambda > 0 \\ |\nabla u(z_0)| = 1 \ , \end{array}$$

já que isto sempre pode ser conseguido através de uma troca de variáveis.

Consideremos

$$u_1(x) = u(x + z_0) \quad \text{e} \quad u_2(x) = u\Big(\frac{x}{\lambda} + y_0\Big)$$

e definamos as funções

$$v(x) = u_2(x) - u_1(x) - \big(u(y_0) - u(z_0)\big)$$

e

$$w(x) = \nabla u_1(x) \cdot \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x\right) .$$

Então

$$v(0) = u_2(0) - u_1(0) - \big(u(y_0) - u(z_0)\big) = 0$$

e, como $z_0 - y_0 = sl$, para algum $s \in \mathbb{R}$ temos

$$w(0) = \nabla u_1(0) \cdot \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)0\right) = \nabla u(z_0) \cdot (z_0 - y_0)$$

$$= \nabla u(z_0) \cdot sl = s\big(\nabla u(z_0) \cdot l\big) = s\big(u_l(z_0)\big) = 0.$$

Observemos que $\nabla v(0) = 0$, pois

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(0) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x_i}(y_0) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(z_0) = \frac{1}{\lambda}\xi_i\lambda - \xi_i = 0 .$$

Além disso, temos que

$$\triangle u_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\overbrace{x + z_0}^{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(y) = \triangle u(y) = \gamma\big(u(y)\big) = \gamma\big(u(x + z_0)\big) = \gamma\big(u_1(x)\big)$$

e também

$$\triangle u_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u\Big(\overbrace{\frac{x}{\lambda} + y_0}^{z}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}(z)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}(z) = \frac{1}{\lambda^2}\triangle u(z) = \frac{1}{\lambda^2}\gamma\big(u(z)\big)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\gamma\Big(u\Big(\frac{x}{\lambda} + y_0\Big)\Big) = \frac{1}{\lambda^2}\gamma\big(u_2(x)\big) \ .$$

Além disso, temos

$$\triangle v(x) = \triangle u_2(x) - \triangle u_1(x) - \triangle\big(u(y_0) - u(z_0)\big) = \frac{1}{\lambda^2}\gamma\big(u_2(x)\big) - \gamma\big(u_1(x)\big) \ ,$$

ou seja,

$$\triangle v(x) = \frac{1}{\lambda^2}\gamma\big(u_2(x)\big) - \gamma\big(u_1(x)\big) \ . \tag{2.12}$$

Por outro lado, para $j = 1, 2...n$ vale

$$\frac{\partial w}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x)\Big)\Big(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x_i\Big)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_i}(x)\Big)\Big(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x_i\Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x)\Big)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x_i\Big)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_i}(x)\Big)\Big(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x_i\Big) + \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_j}(x)\Big)\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \ .$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_i}(x)\Big)\Big(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x_i\Big) + \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_j}(x)\Big)\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_i}(x)\Big)\Big(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x_i\Big)\right) + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_j^2 \partial x_i}(x)\Big)\Big(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x_i\Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_i}(x)\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x_i\Big) + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x) \Big) \right) \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) x_i \right) + 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x) \ .$$

Então

$$\triangle w(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x) \Big) \right) \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) x_i \right) + 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x) \right)$$

$$= 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x) \Big) \right) \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) x_i \right) \right)$$

$$= 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \triangle u_1(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}(x) \Big) \right) \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) x_i \right)$$

$$= 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \gamma\big(u_1(x)\big) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \big(\triangle u_1(x) \big) \right) \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) x_i \right)$$

$$= 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \gamma\big(u_1(x)\big) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\gamma\big(u_1(x)\big) \Big) \right) \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) x_i \right)$$

$$= 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \gamma\big(u_1(x)\big)$$

$$+ \gamma^{'}\big(u_1(x)\big) \left(\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x) \Big) \left(z_0 - y_0 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) x_i \right) \right),$$

ou seja,

$$\triangle w(x) = 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \gamma\big(u_1(x)\big) + \gamma^{'}\big(u_1(x)\big) w(x) \ .$$

Logo

$$\triangle\big(v + \lambda w\big)(x) = \triangle v + \lambda \triangle w$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \gamma\big(u_2(x)\big) - \gamma\big(u_1(x)\big) + 2\lambda\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) \gamma\big(u_1(x)\big) + \lambda \gamma^{'}\big(u_1(x)\big) w(x) \ .$$

Daí, aplicando para $x = 0$, temos

$$\triangle\big(v + \lambda w\big)(0)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\gamma\big(u_2(0)\big) - \gamma\big(u_1(0)\big) + 2\lambda\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\gamma\big(u_1(0)\big) + \lambda\gamma'\big(u_1(0)\big)w(0)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\gamma\big(u(y_0)\big) - \gamma\big(u(z_0)\big) + 2(\lambda - 1)\gamma\big(u(z_0)\big) + 0$$

$$= \overbrace{\Big[\frac{1}{\lambda^2}\Big(\gamma\big(u(y_0)\big) - \gamma\big(u(z_0)\big)\Big)\Big]}^{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda^2}\gamma\big(u(z_0)\big) - \gamma\big(u(z_0)\big) + 2(\lambda - 1)\gamma\big(u(z_0)\big)$$

$$= \varepsilon + \gamma\big(u(z_0)\big)\ \Big(\frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda - 3\Big) = \varepsilon + \gamma\big(u(z_0)\big)\ \frac{(2\lambda + 1)(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} \geq \varepsilon\,,$$

pois $\lambda > 0$ e $\gamma\big(u(z_0)\big) > 0$.

Além disso, temos que $\varepsilon > 0$ pois γ é crescente e $u(y_0) > u(z_0)$. Logo, considerando $f(x) = \big(v + \lambda w\big)(x)$ temos que

$$f(0) = 0$$
$$\triangle f(0) \geq \varepsilon > 0$$

Por (1.1), segue que, para r suficientemente pequeno, vale

$$\sup_{\overline{B}_r(0)} (v + \lambda w)(x) = v(x_r) + \lambda w(x_r) > cr^2\ , \tag{2.13}$$

onde $c > 0$ é uma constante, $|x_r| \leq r$ e x_r indica o ponto onde o máximo é assumido. Como f é de classe C^2 e $\triangle f(0) \geq \varepsilon$, $\triangle f(x) > 0$ numa vizinhana de 0. Logo, pelo Teorema 1.25, o máximo de f ocorre na fronteira, assim $|x_r| = r$.

Se $v(x_r)$ e $w(x_r)$ são positivos, consideremos os pontos

$$y_0^* = y_0 + \frac{x_r}{\lambda} \quad \text{e} \quad z_0^* = z_0 + x_r \quad \text{onde} \quad |x_r| \leq r\ .$$

Daí

$$0 < w(x_r) = \nabla u_1(x_r) \cdot \left(z_0 - y_0 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_r \right)$$

$$= \nabla u(x_r + z_0) \cdot (z_0 + x_r - (y_0 + \frac{x_r}{\lambda})) = \nabla u(z_0^*) \cdot (z_0^* - y_0^*)\,,$$

ou seja, a derivada de u em z_0^* na direção de $z_0^* - y_0^*$ é maior que zero, donde segue que u é crescente na direção de $z_0^* - y_0^*$, e então $\exists x^*$ próximo de z_0^* tal que $u(x^*) > u(z_0^*)$ e $z_0^* \in \overline{x^* y_0^*}$ e daí $(x^*, y_0^*, z_0^*) \in A$.

Com isso chegamos a uma contradição, pois como $v(x_r) > 0$, temos que

$$0 < v(x_r) = u_1(x_r) - u_2(x_r) - \big(u(y_0) - u(z_0)\big)$$

$$= u(y_0^*) - u(z_0^*) - \big(u(y_0) - u(z_0)\big),$$

ou seja,

$$F(x^*, y_0^*, z_0^*) = u(y_0^*) - u(z_0^*) > u(y_0) - u(z_0) = F(x_0, y_0, z_0)\ .$$

Por outro lado, se $v(x_r)$ ou $w(x_r)$ não é positivo, consideremos as seguintes perturbações de v e w:

$$\tilde{v}(x) = u\Big(\frac{x}{\lambda} + y_0 + h\xi + H\xi\Big) - u(x + z_0) - (u(y_0) - u(z_0))$$

e

$$\tilde{w}(x) = \nabla u(x + z_0) \cdot \left(z_0 - y_0 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x - h\xi - H\xi \right)\,,$$

onde $h = \frac{-v(x)}{\lambda}$ e $H = -\frac{1}{\lambda} D^2 u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(h\xi\big)$.

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a Fórmula de Taylor, temos que existem t e s no intervalo $(0,1)$ tais que

$$\tilde{v}(x) - v(x) = u\Big(\frac{x}{\lambda} + y_0 + h\xi + H\xi\Big) - u\Big(\frac{x}{\lambda} + y_0\Big)$$

$$= D(u)\Big(\frac{x}{\lambda} + y_0 + t(h\xi + H\xi)\Big)\big(h\xi + H\xi\big)$$

$$= \Big[Du(y_0) + D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)$$

$$+ D^3u\Bigg(y_0 + s\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)\Bigg)\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)^2\Big]\big(h\xi + H\xi\big)$$

$$= Du(y_0)(h\xi) + Du(y_0)(H\xi) + D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(h\xi + H\xi\big) + tD^2u(y_0)\big(h\xi + H\xi\big)^2$$

$$+ D^3u\Bigg(y_0 + s\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)\Bigg)\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)^2\big(h\xi + H\xi\big)$$

$$= hDu(y_0)\Big(\frac{Du(y_0)}{\lambda}\Big) + HDu(y_0)\Big(\frac{Du(y_0)}{\lambda}\Big) + D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(h\xi\big)$$

$$+ D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(H\xi\big) + tD^2u(y_0)\big(h\xi + H\xi\big)^2$$

$$+ D^3u\Bigg(y_0 + s\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)\Bigg)\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)^2\big(h\xi + H\xi\big)$$

$$= -v(x) - D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(h\xi\big) + D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(h\xi\big)$$

$$+ D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(H\xi\big) + tD^2u(y_0)\big(h\xi + H\xi\big)^2$$

$$+ D^3u\Bigg(y_0 + s\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)\Bigg)\Big(\frac{x}{\lambda} + t(h\xi + H\xi)\Big)^2\big(h\xi + H\xi\big)\ .$$

Note que $H = -\frac{1}{\lambda}D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(h\xi\big) = O(|x|^3)$, pois $h = -\frac{v(x)}{\lambda} = O(|x|^2)$, visto que $v(0) = \nabla v(0) = 0$. Assim temos que $D^2u(y_0)\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\big(H\xi\big) = O(|x|^4)$. Os demais termos tem ordem maior ou igual a 4, então

$$\tilde{v}(x) - v(x) = -v(x) + 0 + O(|x|^4)$$

ou seja, $\tilde{v}(x) = O(|x|^4)$.

Em relação a $\tilde{w}$ temos

$$\tilde{w}(x) = \nabla u(x+z_0) \cdot \left(z_0 - y_0 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x - h\xi - H\xi \right)$$

$$= \nabla u(x+z_0) \cdot \left(z_0 - y_0 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x \right) + \nabla u(x+z_0) \cdot \big(-h\xi\big) + \nabla u(x+z_0) \cdot \big(-H\xi\big)$$

$$= w(x) - \nabla u(x+z_0) \cdot \big(h\xi\big) - \nabla u(x+z_0) \cdot \big(H\xi\big)$$

$$= w(x) - \left[Du(z_0)h\xi + D^2u(z_0+tx)(x)h\xi \right] - \nabla u(x+z_0) \cdot \big(H\xi\big)$$

$$= w(x) - h\xi \cdot \xi - D^2u(z_0+tx)(x)h\xi - \nabla u(x+z_0) \cdot \big(H\xi\big)$$

Temos que $D^2u(z_0+tx)(x)h\xi = O(|x|^3)$ e $\nabla u(x+z_0) \cdot \big(H\xi\big) = O(|x|^3)$. Então

$$\tilde{w}(x) = w(x) + \frac{v(x)}{\lambda} + O(|x|^3) \ .$$

Além disso, para $|x_r| = r$, por (2.13) temos

$$\tilde{w}(x_r) > -\frac{v(x_r)}{\lambda} + cr^2 + \frac{v(x_r)}{\lambda} + O(|x_r|^3) = cr^2 + O(r^3) \ ,$$

ou seja, para r suficientemente pequeno, temos que

$$\tilde{w}(x_r) > cr^2 \ .$$

Observemos agora que $D^2_{\sigma(x)\sigma(x)}u(z_0+x) = O(|x|)$, onde

$$\sigma(x) = \frac{z_0 - y_0 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x - h\xi - H\xi}{\left| z_0 - y_0 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x - h\xi - H\xi \right|} \ .$$

De fato, como $u \in \mathrm{C}^3$, temos que $D^2u \in \mathrm{C}^1$ e então

$$\left| D^2_{ll}u(z_0+x) \right| = \left| D^2_{ll}u(z_0+x) - D^2_{ll}u(z_0) \right| \le c|x| \ .$$

Temos também que $|\sigma(x) - l| = O(|x|)$. Utilizando isto temos que

$$\begin{aligned} \left|D^2_{\sigma(x)\sigma(x)}u(z_0)\right| &= \left|D^2u(z_0)(\sigma(x),\sigma(x))\right| \\ &= \left|D^2u(z_0)(l+(\sigma(x)-l),l+(\sigma(x)-l))\right| \\ &= \left|D^2u(z_0)(l,l)+2D^2u(z_0)(\sigma(x)-l,l)+D^2u(z_0)(\sigma(x)-l)^2\right| \\ &= \left|u_{ll}(z_0)+2D^2u(z_0)(\sigma(x)-l,l)+D^2u(z_0)(\sigma(x)-l)^2\right| \leq 0+c_1|x|+c_2|x|^2 \leq c_3|x|\ , \end{aligned}$$

para x suficientemente pequeno.

Novamente utilizando o fato que $D^2u \in \mathrm{C}^1$ temos

$$\left|D^2_{\sigma(x)\sigma(x)}u(z_0+x) - D^2_{\sigma(x)\sigma(x)}u(z_0)\right| \leq c|x|\ ,$$

e, então,

$$\left|D^2_{\sigma(x)\sigma(x)}u(z_0+x)\right| \leq c|x| + \left|D^2_{\sigma(x)\sigma(x)}u(z_0)\right| \leq c_1|x| + c_2|x| = c_4|x|\ ,$$

para x suficientemente pequeno.

Utilizando isto, para $0 < d \leq |x|$ temos

$$\left|D_{\sigma(x)}u\big(z_0+x-d\sigma(x)\big)-D_{\sigma(x)}u(z_0+x)\right| \leq \int_0^d \left|D^2_{\sigma(x)\sigma(x)}u\big(z_0+x-s\sigma(x)\big)\right| ds \leq dc|x|\ ,$$

portanto,

$$\begin{aligned} D_{\sigma(x_r)}u\big(z_0+x_r-d\sigma(x_r)\big) &\geq D_{\sigma(x_r)}u(z_0+x_r) - dc|x_r| \\ &= \frac{\tilde{w}(x_r)}{\sigma(x_r)} - dc|x_r| \geq c_5|x_r|^2 - dc|x_r| \geq c_6|x_r|^2 \end{aligned}$$

se tomarmos $d \leq |x_r|^{1+\alpha}$, para $\alpha \in (0,1)$.

Então temos

$$u(z_0 + x_r) - u\big(z_0 + x_r - d\sigma(x_r)\big) = \int_0^{|x_r|^{1+\alpha}} Du\big(z_0 + x_r - s\sigma(x_r)\big)\big(\sigma(x_r)\big)\, ds$$

$$= \int_0^{|x_r|^{1+\alpha}} D_{\sigma(x_r)}u\big(z_0+x_r-s\sigma(x_r)\big)\, ds \geq \int_0^{|x_r|^{1+\alpha}} c|x_r|^2\, ds = c|x_r|^2|x_r|^{1+\alpha} = c|x_r|^{3+\alpha}\,.$$

Logo, para um r suficientemente pequeno, temos que

$$u\Big(\frac{x_r}{\lambda} + y_0 + h\xi + H\xi\Big) - u\big(z_0 + x_r - |x_r|^{1+\alpha}\sigma(x_r)\big) - \big(u(y_0) - u(z_0)\big)$$

$$= \bigg(u\Big(\frac{x_r}{\lambda} + y_0 + h\xi + H\xi\Big) - u(z_0 + x_r) - \big(u(y_0) - u(z_0)\big)\bigg)$$

$$+u(z_0 + x_r) - u\big(z_0 + x_r - |x_r|^{1+\alpha}\sigma(x_r)\big)$$

$$= \tilde{v}(x_r)+u(z_0+x_r)-u\big(z_0+x_r-|x_r|^{1+\alpha}\sigma(x_r)\big) \geq c|x_r|^{3+\alpha}+O(|x_r|^4) > c|x_r|^{3+\alpha}.$$

Portanto, tomando

$$x_0^* = z_0 + x_r, \qquad y_0^* = \frac{x_r}{\lambda} + y_0 + h\xi + H\xi, \qquad z_0^* = z_0 + x_r - |x_r|^{1+\alpha}\sigma(x_r),$$

como anteriormente, obtemos uma contradição.

Logo, vale (2.9), o que implica que os conjuntos de nível de u são convexos.

Consideremos o caso geral. Sejam γ_n crescentes e analíticas que convergem uniformemente para γ, e sejam u_n soluções para o problema (2.1) com $\gamma = \gamma_n$, e u a solução do problema geral. Para cada n, por (2.9) vale que

$$u_n(z) \geq \min\big(u_n(x), u_n(y)\big)\,,$$

para todo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, com $\lambda \in (0,1)$.

Então, fazendo $n \to +\infty$ temos que

$$u(z) \geq \min\big(u(x), u(y)\big)$$

para todo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, com $\lambda \in (0,1)$, ou seja os conjuntos de nível de u são convexos, concluindo a demonstração do Teorema 2.1.

Capítulo 3

O PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO

Nesta seção estudaremos as propriedades de convexidade da primeira autofunção do laplaciano, isto é, da solução não trivial do problema

$$\begin{aligned} \triangle v + \lambda_1 q(x) v = 0 &\quad \text{em } \Omega \\ v = 0 &\quad \text{na } \partial\Omega \\ v \geq 0 &\quad \text{em } \Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde Ω é um dominio convexo e limitado de $\mathbb{R}^N$ e $q(x) > 0$ é uma função peso côncava em Ω.

Nosso objetivo é dar uma prova elementar do seguinte Teorema de Brascamp-Lieb [2].

Teorema 3.1. *Seja $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma solução do problema de autovalor (3.1).*

Então $w = \log v$ é côncava em Ω.

É facil ver que se uma função $v > 0$ é côncava, então $\log v$ é côncava. Mais geralmente, se v é côncava e f é côncava e não decrescente, então $f \circ v$ é côncava.

De fato, como v é côncava, para $\lambda \in [0, 1]$, temos que

$$v(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \lambda v(x) + (1 - \lambda) v(y) \ .$$

Agora, como f é côncava e não decrescente, vale que

$$f\big(v(\lambda x+(1-\lambda)y)\big) \geq f\big(\lambda v(x)+(1-\lambda)v(y)\big) \geq \lambda f\big(v(x)\big)+(1-\lambda)f\big(v(y)\big) \ ,$$

ou seja, $f \circ v$ é côncava.

Portanto a condição de $\log v$ ser côncava é mais fraca do que a condição de que v seja côncava.

A primeira autofunção do laplaciano em um domínio convexo Ω nem sempre é uma função côncava. Um exemplo simples, em dimensão 2, é quando o domínio é o quadrado

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < \pi \text{ e } 0 < y < \pi\}$$

e $q(x,y) = 1$. Neste caso, a primeira autofunção é

$$v(x,y) = \sin x \sin y.$$

Para justificar esta afirmação, basta notar que $-\Delta v = 2v$ e $v > 0$ em Ω. É fácil ver que esta função não é côncava, pois sua restrição à diagonal do quadrado não é côncava. De fato, a função

$$x \in (0,\pi) \mapsto v(x,x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

é côncava apenas no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, sendo convexa nos intervalos $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Logo, neste caso a primeira autofunção v não é côncava, satisfazendo apenas que $\log v$ é côncava.

Mais geralmente, sabe-se que em dimensão $n \geq 2$, se $q(x) \equiv 1$, então a primeira autofunção v do laplaciano em um domínio convexo nunca é côncava.

Como conseqüência do Teorema 3.1 temos que os conjuntos de nível de v são convexos.

Observemos também que, pelo Teorema 1.25, temos que se v é solução do problema (3.1), então $v > 0$ em Ω, de modo que $\log v$ está bem definida em Ω.

A prova do Teorema 3.1 será construída com as idéias de Korevaar. O seguinte lema é adaptado de [3].

Lema 3.2. *Seja $w \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma solução da equação elíptica*

$$\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla w) w_{ij} = b(x, w, \nabla w) \qquad \text{em} \quad \Omega\,,$$

onde Ω é convexo, b é não decrescente em w e convexa em (x, w) e

$$a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$$
$$b \in C^{0,\alpha}(\Omega) \times C^{1,\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Então, para cada $\lambda \in (0, 1)$, a função contínua

$$C^\lambda(x, y) = w\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) - \lambda w(x) - (1 - \lambda)w(y)$$

não pode ter um mínimo negativo no interior de $\Omega \times \Omega$.

Demonstração:

Consideremos 2 casos:

Suponhamos primeiro que b é crescente em w.

Por absurdo, se o lema fosse falso, $\exists\ \lambda \in (0, 1), \exists\ x_0, y_0 \in \Omega$ tais que

$$C^\lambda(x_0, y_0) < 0 \ \text{ e } \ C^\lambda(x_0, y_0) \text{ é o mínimo de } C^\lambda(x, y)\ .$$

Consideremos o ponto $z_0 = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0$, que pertence a Ω, já que Ω é convexo.

Então

$$D_x C^\lambda(x, y) = \lambda \nabla w\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) - \lambda \nabla w(x)\ ,$$

e

$$D_y C^\lambda(x, y) = (1 - \lambda)\nabla w\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) - (1 - \lambda)\nabla w(y)\ .$$

Como (x_0, y_0) é mínimo de $C^\lambda(x, y)$, segue que

$$D_x C^\lambda(x_0, y_0) = D_y C^\lambda(x_0, y_0) = 0$$

e, portanto,

$$0 = \lambda \nabla w\big(\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0\big) - \lambda \nabla w(x_0) = \lambda \nabla w(z_0) - \lambda \nabla w(x_0)$$

e

$$0 = (1-\lambda)\nabla w\big(\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0\big) - (1-\lambda)\nabla w(y_0)$$

$$= (1-\lambda)\nabla w(z_0) - (1-\lambda)\nabla w(y_0) \ ,$$

ou seja,

$$\nabla w(x_0) = \nabla w(z_0) = \nabla w(y_0) \ .$$

Definamos a função

$$h(t) = C^\lambda(x_0 + t, y_0 + t) \ .$$

Então h tem um mínimo interior em $t = 0$.

Conseqüentemente, a matriz $h_{ij}(0)$ é positiva semidefinida. Como $\big(a_{ij}(p)\big)$ é positiva definida, $\forall p \in \mathbb{R}^N$, segue que

$$\sum_{i,j} a_{ij}(p) h_{ij}(0) \geq 0, \quad \forall p \in \ \mathbb{R}^N \ .$$

Entretanto,

$$h_{ij}(0) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} C^\lambda(x_0, y_0) = w_{ij}\big(\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0\big) - \lambda w_{ij}(x_0) - (1-\lambda) w_{ij}(y_0)$$

e daí

$$0 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(p) h_{ij}(0)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}(p) \Big(w_{ij}\big(\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0\big) - \lambda w_{ij}(x_0) - (1-\lambda) w_{ij}(y_0) \Big)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}(p) w_{ij}(z_0) - \lambda \sum_{i,j} a_{ij}(p) w_{ij}(x_0) - (1-\lambda) \sum_{i,j} a_{ij}(p) w_{ij}(y_0) \ .$$

Em particular, para $p = \nabla w(z_0)$,

$$0 \leq \sum_{i,j} a_{ij}\big(\nabla w(z_0)\big) h_{ij}(0)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}\big(\nabla w(z_0)\big) w_{ij}(z_0) - \lambda \sum_{i,j} a_{ij}\big(\nabla w(z_0)\big) w_{ij}(x_0) - (1-\lambda) \sum_{i,j} a_{ij}\big(\nabla w(z_0)\big) w_{ij}(y_0)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}\big(\nabla w(z_0)\big) w_{ij}(z_0) - \lambda \sum_{i,j} a_{ij}\big(\nabla w(x_0)\big) w_{ij}(x_0) - (1-\lambda) \sum_{i,j} a_{ij}\big(\nabla w(y_0)\big) w_{ij}(y_0)$$

$$\begin{aligned} &= b\big(z_0, w(z_0), \nabla w(z_0)\big) \\ &\qquad -\lambda b\big(x_0, w(x_0), \nabla w(x_0)\big) - (1-\lambda) b\big(y_0, w(y_0), \nabla w(y_0)\big) , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &b\big(z_0, w(z_0), \nabla w(z_0)\big) \\ &\geq \lambda b\big(x_0, w(x_0), \nabla w(x_0)\big) + (1-\lambda) b\big(y_0, w(y_0), \nabla w(y_0)\big) \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por outro lado, $C^\lambda(x_0, y_0) < 0$, então

$$w(z_0) < \lambda w(x_0) + (1-\lambda) w(y_0) \ .$$

Como b é crescente em w e convexa em (x, w), vale

$$b\big(z_0, w(z_0), p\big) < b\big(z_0, \lambda w(x_0) + (1-\lambda) w(y_0), p\big)$$

$$= b\big(\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0, \lambda w(x_0) + (1-\lambda) w(y_0), p\big)$$

$$\leq \lambda b\big(x_0, w(x_0), p\big) + (1-\lambda) b\big(y_0, w(y_0), p\big) \ .$$

Em particular, no ponto $\nabla w(z_0)$ temos

$$b\big(z_0, w(z_0), \nabla w(z_0)\big)$$

$$< \lambda b\big(x_0, w(x_0), \nabla w(z_0)\big) + (1-\lambda) b\big(y_0, w(y_0), \nabla w(z_0)\big)$$

$$= \lambda b\big(x_0, w(x_0), \nabla w(x_0)\big) + (1-\lambda) b\big(y_0, w(y_0), \nabla w(y_0)\big)\,,$$

o que contradiz a desigualdade (3.2). Portanto, o lema vale no caso em que b é crescente.

Consideremos agora o caso geral.

Seja $\Omega' \subset \Omega$ um conjunto convexo, suave que aproxime Ω.

Consideremos uma perturbação do problema anterior, dada por

$$\begin{aligned} a_{ij}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} &= b(x,\varphi,\nabla\varphi) + \varepsilon\varphi \quad \text{em } \Omega' \\ \varphi &= w \qquad\qquad\qquad\quad \text{na } \partial\Omega'\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Suponhamos que exista $\{w^\varepsilon\}$ família $C^{2,\alpha}$ de soluções do problema acima tais que $w^\varepsilon \to w$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$.

Aplicando o caso anterior para $\{w^\varepsilon\}$ e Ω' segue que

$$C_\varepsilon^\lambda(x,y) = w^\varepsilon(z) - \lambda w^\varepsilon(x) - (1-\lambda) w^\varepsilon(y)$$

não pode ter um mínimo negativo no interior de $\Omega' \times \Omega'$.

Como $w^\varepsilon \to w$ uniformemente, fazendo $\varepsilon \to 0$, vemos que $C^\lambda(x,y)$ não pode ter um mínimo negativo no interior de $\Omega' \times \Omega'$.

Como Ω' é arbitrário, fazendo $\Omega' \to \Omega$, obtemos o resultado do lema.

Para completar a demosntração do lema, basta mostrarmos a existência da família w^ε com a propriedade de que, se $\varepsilon \to 0$, $w^\varepsilon \to w$ uniformemente.

Para isso, definamos o operador

$$F : \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'}) \big| u = w \text{ em } \partial\Omega'\} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega'})\,,$$

dado por

$$F(\varphi, \varepsilon) = \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} - b(x, \varphi, \nabla\varphi) - \varepsilon\varphi \ .$$

Notemos que F é contínua. Além disso

$$F(\varphi + \delta\psi, \varepsilon) = \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi + \delta\nabla\psi)[\varphi_{ij} + \delta\psi_{ij}]$$

$$-b(x, \varphi + \delta\psi, \nabla\varphi + \delta\nabla\psi) - \varepsilon\varphi - \varepsilon\delta\psi \ .$$

Daí

$$\frac{d}{d\delta}[F(\varphi + \delta\psi, \varepsilon)]\bigg|_{\delta=0} =$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\psi_{ij} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\psi_k\varphi_{ij} - \frac{\partial b}{\partial\varphi}(x, \varphi, \nabla\varphi)\psi$$

$$- \sum_{k} \frac{\partial b}{\partial p_k}(x, \varphi, \nabla\varphi)\psi_k - \varepsilon\psi$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\psi_{ij} + \left[\sum_{i,j,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} - \frac{\partial b}{\partial p_k}(x, \varphi, \nabla\varphi)\right]\psi_k$$

$$- \left[\frac{\partial b}{\partial\varphi}(x, \varphi, \nabla\varphi) + \varepsilon\right]\psi \ .$$

Definindo a expressão acima como $T(\psi, \varepsilon)$, temos que

$$\frac{\|F(\varphi + \psi, \varepsilon) - F(\varphi, \varepsilon) - T(\psi, \varepsilon)\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}}}{\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}} \to 0 \, ,$$

que é mostrado no Apêndice B.

Disto segue que T é a derivada de Fréchet de F.

Temos que

$$T : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'}) \times \mathbb{R} \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega'})$$

$$T(\psi, \varepsilon) = \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\psi_{ij} + \sum_{k} c_k(x, \varphi, \nabla\varphi)\psi_k - (h + \varepsilon)\psi$$

$$\text{onde} \quad c_k(x, \varphi, \nabla\varphi) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} - \frac{\partial b}{\partial p_k}(x, \varphi, \nabla\varphi)$$

$$\text{e} \quad h(x) = \frac{\partial b}{\partial \varphi}(x, \varphi, \nabla\varphi) \ .$$

Para $\varepsilon = 0$, aplicando o Teorema 1.28, temos um isomorfismo de

$$C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega'}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega'}) \ .$$

Observemos que, na verdade, o conjunto $\{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'}) \big| u = w \quad \text{em} \quad \partial\Omega'\}$ que aparece na definição de F é apenas um subespaço afim, mas isto não invalida o argumento acima.

Pelo Teorema da função implícita, a equação $F(\varphi, \varepsilon) = 0$ permite expressar φ como função de ε, $\varphi = \varphi(\varepsilon)$, para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, para um certo ε_1, com $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$.

Além disso

$$\varepsilon \mapsto \varphi_\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'}) \quad \text{é} \quad \text{contínua}$$

$$0 \mapsto \varphi_0 = w \ .$$

Então é claro que quando $\varepsilon \to 0$, temos que $\varphi_\varepsilon = w^\varepsilon \to w$ uniformemente.

■

Agora então demonstraremos o teorema.

Demonstração do Teorema 3.1:

Primeiramente suponhamos que Ω é estritamente convexo e tem fronteira suave, e que $q(x)$ é Lipschitz em $\overline{\Omega}$.

Seja $w(x) = \log v(x)$. Então para $i = 1, 2...n$ temos

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \log v(x) = \frac{v_{x_i}(x)}{v(x)} \ .$$

Daí,

$$|\nabla w(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_{x_i}(x)}{v(x)} \right)^2 = \frac{1}{v^2(x)} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x) \ .$$

Além disso,

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v_{x_i}(x)}{v(x)} \right) = \frac{v_{x_i x_i}(x) v(x) - v_{x_i}(x) v_{x_i}(x)}{v^2(x)} \ .$$

Então,

$$\triangle w(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i x_i} w(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_{x_i x_i}(x) v(x) - v_{x_i}(x) v_{x_i}(x)}{v^2(x)} \right)$$

$$= \frac{1}{v(x)} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i}(x) - \frac{1}{v^2(x)} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x) \, ,$$

ou seja,

$$\triangle w(x) = \frac{\triangle v(x)}{v(x)} - |\nabla w(x)|^2 \ .$$

Mas, por 3.1, $\triangle v(x) = -\lambda_1 q(x) v(x)$ e, então,

$$\triangle w(x) = -\lambda_1 q(x) - |\nabla w(x)|^2 \ \text{ em } \ \Omega \ .$$

Como $v = 0$ na $\partial\Omega$, segue que $w(p) \to -\infty$ quando $p \to \partial\Omega$, ou seja, w satisfaz o problema

$$\begin{aligned} \triangle w(x) &= -\lambda_1 q(x) - |\nabla w(x)|^2 && \text{em } \Omega \\ w &= -\infty && \text{em } \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

Estamos em condições de aplicar o Lema 3.2, pois $-\lambda_1 q(x) - |\nabla w(x)|^2$ é não decrescente em w e convexa em (x, w), já que $-q$ é convexa.

Queremos mostrar que w é côncava.

Por absurdo, se w não for côncava, então para algum $\lambda \in (0,1)$ temos que $C^{\lambda}(x,y)$ assume valores negativos.

Aplicando o Lema 3.2 segue que $C^{\lambda}(x,y)$ não pode ter um mínimo negativo no interior de $\Omega \times \Omega$.

Temos 2 subcasos a considerar:

I – Se $C^{\lambda}(x,y)$ não é limitada inferiormente, temos que existem $x_k, y_k \in \Omega$ tal que $C^{\lambda}(x_k, y_k) \leq -k$.

Como $\overline{\Omega}$ é compacto, sem perda de generalidade podemos supor que $x_k \longrightarrow x_0, \quad y_k \longrightarrow y_0$ e $z_k \longrightarrow z_0$ onde $x_0, y_0, z_0 \in \overline{\Omega}$.

Então, para $z_k = \lambda x_k + (1-\lambda) y_k$,

$$w(z_k) - \lambda w(x_k) - (1-\lambda) w(y_k) \leq -k$$

ou seja,

$$w(z_k) \leq -k + \lambda w(x_k) + (1-\lambda) w(y_k)$$

$$\leq -k + \lambda M + (1-\lambda) M = -k + M \,,$$

donde segue que $w(z_k) \to -\infty$, ou seja, $z_0 \in \partial\Omega$. Juntando a isso o fato que Ω é estritamente convexo, temos que $x_0 = y_0 = z_0 \in \partial\Omega$.

II – Se $C^{\lambda}(x,y)$ tem um mínimo negativo $C^{\lambda}(x_0, y_0)$ na $\partial(\Omega \times \Omega)$, temos que existem $x_k, y_k, z_k \in \Omega$ tais que $C^{\lambda}(x_k, y_k) \to C^{\lambda}(x_0, y_0)$.

Como $\overline{\Omega}$ é compacto, sem perda de generalidade, podemos supor que $x_k \longrightarrow x_0, \quad y_k \longrightarrow y_0$ e $z_k \longrightarrow z_0$ onde $x_0, y_0, z_0 \in \overline{\Omega}$, e também que $x_k \neq y_k, \quad \forall k$, já que $C^{\lambda}(x_0, y_0) < 0$.

Além disso, como o mínimo acontece na fronteira, segue que $x_0 \notin \Omega$ ou $y_0 \notin \Omega$.

Então,

$$w(x_0) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad w(y_0) = -\infty \ .$$

Disto segue que $w(z_k) \to -\infty$, pois caso contrário, se existisse $w(z_{k_l}) \geq N$, $\forall k_l$ teriamos que

$$C^\lambda(x_{k_l}, y_{k_l}) = w(z_{k_l}) - \lambda w(x_{k_l}) - (1-\lambda)w(y_{k_l})$$

$$\geq N - (\overbrace{\lambda w(x_{k_l}) + (1-\lambda)w(y_{k_l})}^{\to -\infty}) \to +\infty \,,$$

que é um absurdo, pois como $C^\lambda(x_0, y_0)$ é negativo, para k_0 suficientemente grande, $C^\lambda(x_k, y_k)$ é negativo para todo $k \geq k_0$.

Logo, como $w(z_k) \to -\infty$, vemos que $z_0 \in \partial\Omega$. Juntando a isso o fato que Ω é estritamente convexo, temos que $x_0 = y_0 = z_0 \in \partial\Omega$.

Em qualquer caso, temos $x_k \to x_0$, $\ y_k \to y_0\ $ e $\ z_k \to z_0$, onde $x_k \neq y_k$, $\ \forall k$ e $\ p = x_0 = y_0 = z_0 \in \partial\Omega$.

Como

$$\frac{x_k - y_k}{|x_k - y_k|} \in \partial B_1(0) \ ,$$

podemos supor sem perda de generalidade que

$$\frac{x_k - y_k}{|x_k - y_k|} \to l \ .$$

Seja ν o vetor normal interior a Ω em p, temos que l pode ser ou não ortogonal a ν. Mostraremos que nenhuma das alternativas ocorre, obtendo então a contradição procurada.

I – Suponhamos que $l \cdot \nu \neq 0$.

Temos que

$$(\triangle - \lambda_1 q(x))(-v) = 0$$

e $-v \leq 0$ em Ω, $v = 0$ em $\partial\Omega$.

Pelo Teorema 1.27, temos que

$$\frac{\partial - v(p)}{\partial(-\nu)} > 0 \ ,$$

ou seja, $\nu \cdot \nabla v(p) > 0$.

Observemos que $v = 0$ em $\partial\Omega$, e então, para toda direção tangente t, temos que $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

Segue daí que $\nabla v(p) = a\nu$, onde a é uma constante. Logo $v_l(p) \neq 0$. Assim, por continuidade, para toda direção σ suficientemente próxima de l, temos que $v_\sigma(p) \neq 0$.

Logo, também por continuidade, temos que $v_\sigma(x) \neq 0$, para toda direção σ suficientemente próxima de l e para todo x suficientemente próxima de p.

Com isso temos que

$$|v_\sigma(x)| \geq \theta > 0 \ ,$$

para todo $x \in B_r(p)$ e σ próximo de l.

Como $\lambda_1 q(x)$ é de Lipschitz, em particular $\lambda_1 q(x) \in \mathrm{C}^{0,\alpha}$, e então, pelo Teorema 1.28, seque que $v \in \mathrm{C}^{2,\alpha}$.

Logo $v_{\sigma\sigma}$ é limitada por uma constante.

Além disso, como v é de Lipschitz e $v = 0$ em $\partial\Omega$, temos que

$$v(x) = |v(x) - v(p)| \leq K|x - p| \ .$$

Seque daí que

$$w_{\sigma\sigma}(x) = \big(\log v(x)\big)_{\sigma\sigma} = \left(\frac{v_\sigma(x)}{v(x)}\right)_\sigma$$

$$= \frac{v(x)v_{\sigma\sigma}(x) - v_\sigma^2(x)}{v^2(x)} \leq \frac{C|x-p| - \theta^2}{v^2(x)} \ .$$

Tomando x suficientemente próximo de p, temos que $C|x - p| \leq \theta^2$.

Logo
$$w_{\sigma\sigma}(x) < 0, \quad \forall x \in B_{r_0}(p)$$
e para toda direção σ suficientemente próxima de l.

Agora, para k suficientemente grande, a direção l_k esta próxima de l e então w é estritamente côncava na direção l_k, o que é um absurdo, pois por hipótese, para k suficientemente grande, $C^\lambda(x_k, y_k) < 0$, ou seja, w não é côncava na direção l_k.

II – Suponhamos que $l \cdot \nu = 0$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1}$ uma base do espaço tangente a $\partial\Omega$ em p, com $\alpha_1 = l$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $p = 0$ e que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{N-1}$.

No ponto p, podemos representar $\partial\Omega$ como sendo o gráfico de
$$x_N = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{N-1}) \, ,$$
com x_N na direção do vetor normal ν.

Além disso, φ é tal que
$$\varphi(0) = 0, \; \varphi_i(0) = 0, \quad \text{para } \; i = 1, 2, ..., N-1 \; .$$

Consideremos a parametrização de $\partial\Omega$ dada por
$$\mathbf{x} : (x_1, x_2, ..., x_{N-1}) \mapsto \big(x_1, x_2, ..., x_{N-1}, \varphi(x_1, x_2, ..., x_{N-1})\big) \; .$$

Então
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} = \alpha_i + \alpha_N \varphi_{x_i}$$
é um campo vetorial tangente a $\partial\Omega$.

Como $v = 0$ em $\partial\Omega$, temos que
$$v(x_1, x_2, ..., x_{N-1}, \varphi(x_1, x_2, ..., x_{N-1})) = 0 \; .$$

Então,

$$0 = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big) v = v_{x_i} + \varphi_{x_i} v_{x_N} \ .$$

Logo

$$0 = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big)^2 v = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big)(v_{x_i} + \varphi_{x_i} v_{x_N})$$

$$= \big(v_{x_i} + \varphi_{x_i} v_{x_N}\big)_{x_i} + \varphi_{x_i}\big(v_{x_i} + \varphi_{x_i} v_{x_N}\big)_{x_N}$$

$$= v_{x_i x_i} + \varphi_{x_i x_i} v_{x_N} + \varphi_{x_i} v_{x_N x_i} + \varphi_{x_i} v_{x_N x_i} + \varphi_{x_i}\varphi_{x_i x_N} v_{x_N} + \varphi_{x_i}^2 v_{x_N x_N} \ .$$

Então, como em p temos que $\varphi_{x_i} = 0$, vale que

$$0 = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big)^2 v(p) = v_{x_i x_i} + \varphi_{x_i x_i} v_{x_N} \ ,$$

ou seja, $v_{x_i x_i} = -\varphi_{x_i x_i} v_{x_N}$.

Notemos que como Ω é estritamente convexo, temos que $\varphi_{x_i x_i}(p) > 0$.

Além disso, como

$$\big(\triangle - \lambda_1 q(x)\big)(-v) = 0 \ , \quad -v \le 0 \quad \text{e} \quad v(p) = 0 \ ,$$

pelo Teorema 1.27 temos que

$$\frac{\partial(-v)}{\partial(-\nu)}(p) > 0 \ .$$

Mas como $\alpha_N = \nu$, vale que $v_{x_N}(p) > 0$. Juntando isto com o fato de Ω ser estritamente convexo, temos

$$v_{x_i x_i}(p) = -\varphi_{x_i x_i}(p) v_{x_N}(p) < 0 \ , \quad \text{para } i = 1, 2, ..., N-1.$$

Como $v(p) = 0$, temos que $\triangle v(p) = -\lambda_1 q(p) v(p) = 0$, e então

$$v_{x_N x_N}(p) = -\sum_{i=1}^{N-1} v_{x_i x_i}(p) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_{x_i x_i}(p) v_{x_N}(p) > 0 \ .$$

Observemos que qualquer vetor l_k perto de l pode ser escreito na forma

$$l_k = c_N^k \nu + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^k \alpha_i \ .$$

Como $\alpha_1 = l$, fazendo k tender a ∞, temos que $c_1^l \to 1$ e $c_i^l \to 0$, para $i = 2, ..., N$.

Temos

$$v_{l_k} = l_k \cdot \nabla v = \Big(c_N^k \nu + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^k \alpha_i \Big) \cdot \nabla v$$

$$= c_N^k \nu \cdot \nabla v + \sum_{i=1}^{N-1} \big(c_i^k \alpha_i \cdot \nabla v \big) = c_N^k v_\nu + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^k v_{x_i} \ .$$

Queremos construir a mesma contradição que construimos no caso anterior.

Temos que

$$v_{l_k l_k} = c_N^k \frac{\partial}{\partial \nu} \Big(c_N^k v_\nu + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^k v_{x_i} \Big) + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^k \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(c_N^k v_\nu + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^k v_{x_i} \Big)$$

$$= (c_N^k)^2 v_{\nu\nu} + c_N^k \sum_{i=1}^{N-1} c_i^k v_{x_i \nu} + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^k \Big(c_N^k v_{\nu x_i} + \sum_{j=1}^{N-1} c_j^k v_{x_i x_j} \Big)$$

$$= (c_N^k)^2 v_{\nu\nu} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} c_N^k c_i^k v_{x_i \nu} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} c_i^k c_j^k v_{x_i x_j} \ .$$

Logo, como $v \in \mathrm{C}^{2,\alpha}$, temos que $D^2 v$ é limitado e então, fazendo $x \to p$ em l_k, para k suficientemente grande, temos que

$$v_{l_k l_k}(x) \approx v_{x_1 x_1}(x) < 0 \ .$$

Portanto, para x suficientemente próximo de p, temos que $v_{l_k l_k}(x) < 0$. Daí, como $v(x) > 0$ em Ω, temos que

$$v(x) v_{l_k l_k}(x) < 0 \leq v_{l_k}^2(x)$$

ou seja,

$$w_{l_k l_k}(x) = \frac{v(x)v_{l_k l_k}(x) - v_{l_k}^2(x)}{v^2(x)} < 0 \ ,$$

e pelo mesmo argumento anterior, chegamos a um absurdo.

Consideremos agora o caso geral.

Seja (Ω_n) seqüência crescente de conjuntos estritamente convexos, com fronteira suave tal que $\bigcup \Omega_n = \Omega$.

Aplicando o caso anterior para os conjuntos Ω_n, temos que existe v_n seqüência tal que

$$\begin{aligned} \triangle v_n + \lambda_n q(x) v_n = 0 \quad & \text{em } \Omega_n \\ v_n = 0 \quad & \text{em } \partial\Omega_n \\ v_n \geq 0 \quad & \text{em } \Omega_n \end{aligned}$$

onde $v_n \in \mathrm{H}_0^1(\Omega_n)$ e, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\int_{\Omega_n} v_n^2 q(x) \ dx = 1 \ .$$

Entendendo v_n como 0 em $\Omega \setminus \Omega_n$, temos que $v_n \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Como $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, a função v_n é admissível para o cálculo de

$$\lambda_{n+1} = \inf\{ \int_{\Omega_{n+1}} |u|^2 \ dx \ \Big| \ u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega_{n+1}), \ \int_{\Omega_{n+1}} u^2 q \ dx = 1 \ \}$$

donde segue que $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$. Daí temos que $\lambda_n > 0$, $\forall n$ e (λ_n) é uma seqüência decrescente. Seja $\tilde{\lambda} = \lim \lambda_n$.

Notemos que as v_n estendidas formam uma seqüência limitada em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, pois $\|v_n\|_{\mathrm{H}_0^1}^2 = \lambda_n \downarrow \tilde{\lambda}$. Com raciocínios análogos ao utilizado para mostrar a existência da solução no caso do Potencial Capacitário, temos uma subseqüência que converge para v fracamente em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, fortemente em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ e também em q.t.p. Portanto $v \geq 0$.

Como q é côncava, temos que q é limitada e então

$$\Big| \int (v_n - v)^2 q \ \Big|^{1/2} \leq M \Big(\int (v_n - v)^2 \ \Big)^{1/2} = M \|v_n - v\|_{\mathrm{L}^2} \to 0 \ .$$

Além disso, temos

$$\Big|\int (v_n - v)^2 q\,\Big|^{1/2} \geq \Big|\Big(\int (v_n)^2 q\Big)^{1/2} - \Big(\int (v)^2 q\Big)^{1/2}\Big| \geq 0\ ,$$

ou seja,

$$\Big(\int (v_n)^2 q\Big)^{1/2} \to \Big(\int (v)^2 q\Big)^{1/2}\ .$$

Como $\int (v_n)^2 q = 1, \quad \forall n$, temos que $\int (v)^2 q = 1$.

Por outro lado, como

$$-\triangle v_n = \lambda_n q(x) v_n\ ,$$

temos que

$$\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla \varphi = \lambda_n \int_\Omega v_n q \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\ .$$

Como v_n que converge para v fracamente em $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla \varphi \to \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi\ .$$

Da convergencia em $\mathrm{L}^2(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega v_n q \varphi \to \int_\Omega v q \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\ .$$

Com isso temos que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi = \tilde{\lambda} \int_\Omega v q \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\ ,$$

isto é, v satisfaz o problema

$$\begin{aligned} -\triangle v = \tilde{\lambda} v q(x) = 0 &\quad \text{em } \Omega \\ v = 0 &\quad \text{em } \partial\Omega\ . \end{aligned}$$

Além disso, como $v \geq 0$ e $q > 0$, segue que $-\triangle v \geq 0$. Aplicando novamente o Teorema 1.25, obtemos que $v > 0$ em $\partial\Omega$. Logo v satisfaz o problema

$$\begin{aligned} \triangle v + \tilde{\lambda} q(x) v = 0 &\quad \text{em } \Omega \\ v = 0 &\quad \text{em } \partial\Omega \\ v > 0 &\quad \text{em } \Omega\ . \end{aligned}$$

Mas a primeira autofunção é a única que não troca de sinal. Logo v é a primeira autofunção.

Como $\log v_n$ são côncavas em Ω_n e $\log v_n \to \log v$ pontualmente, temos que $\log v$ é côncava, o que conclui a demonstração do Teorema 3.1.

$\blacksquare$

Apêndice A

Dada uma função contínua não decrescente $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $\gamma(0) = 0$, construiremos aqui funções γ_n reais analíticas, crescentes com $\gamma_n(0) = 0$ e tais que $\gamma_n \to \gamma$ uniformemente em um compacto previamente escolhido. Para o problema em questão, basta que o compacto contenha o intervelo $[0, 1]$.

Construiremos polinômios p_n tais que

$$p_n \to \gamma \quad \text{uniformemente em} \quad [-1, 2]\,,$$

$$p_n(0) = 0\,,$$

$$p_n \;\; \text{estritamente crescente no intervalo} \;\; [-1, 2]\;.$$

Seja $\varepsilon > 0$ fixo.

Consideremos K_n uma seqüência de Dirac com o suporte de K_n contido em $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $K_n \in \mathrm{C}^\infty$, $K_n \geq 0$ e com $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n = 1$.

Fazendo a convolução da seqüência de Dirac com γ, temos

$$K_n * \gamma \in \mathrm{C}^\infty\,,$$

$$K_n * \gamma \to \gamma \quad \text{uniformemente em} \quad [-1, 2]\;.$$

Para n convenientemente grande, obtemos que g definida por

$$g(x) = (K_n * \gamma)(x) - (K_n * \gamma)(0) \;\; \in \mathrm{C}^\infty$$

satisfaz

$$\sup_{[-1,2]} |g - \gamma| < \frac{\varepsilon}{3}\;.$$

Observemos que g é não decrescente, pois como γ é não decrescente, se $x < y$, $\gamma(x-t) \leq \gamma(y-t)$. Juntando isso ao fato de que $K_n \geq 0$, temos

$$(K_n * \gamma)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x-t) K_n \; dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(y-t) K_n \; dt = (K_n * \gamma)(y) \; .$$

Temos agora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não decrescente tal que $g(0) = 0$ e $g \in \mathrm{C}^\infty$.

Consideremos $g^{'} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos que $g^{'}(x) \geq 0, \;\; \forall x$.

Pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, existem q_n polinômios tais que

$$q_n \to g^{'} \quad \text{uniformemente em} \quad [-1, 2] \; .$$

Se $q_n(x) \geq 0, \; \forall x$, definimos

$$T_n(x) = q_n(x) + \frac{1}{n} \, .$$

Se $q_n(x) < 0$ para algum $x \in [-1, 2]$, teremos que $\inf_{[-1,2]} q_n < 0$.

Como $q_n \to g^{'}$ uniformemente em $[-1, 2]$, temos que

$$\inf_{[-1,2]} q_n \to 0, \quad \text{pois} \quad g^{'} \geq 0 \; .$$

Seja

$$T_n(x) = q_n(x) - \inf_{[-1,2]} q_n + \frac{1}{n} \; .$$

Em qualquer um dos casos temos que

$$T_n \to g^{'} \quad \text{uniformemente em} \quad [-1, 2] \, ,$$
$$T_n > 0, \quad \forall x \in [-1, 2]$$

e T_n são polinômios.

Logo, para n suficientemente grande, obtemos um polinômio $T_n = T$ tal que

$$T(x) > 0, \quad \forall x \in [-1, 2] \, ,$$

$$|T(x) - g^{'}(x)| < \frac{\varepsilon}{6} \quad \forall x \in [-1, 2] \ .$$

Finalmente, seja $p(x) = \int_0^x T(s) \ ds$.

Então

(i) $p(x)$ é polinômio;

(ii) $p(x)$ é estritamente crescente em $[-1, 2]$;

(iii) Como $p(0) = 0, \ g(0) = 0$ e $|p^{'}(x) - g^{'}(x)| < \frac{\varepsilon}{6}, \ \ \forall x \in [-1, 2]$, segue que

$$|p(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{6} 3 = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-1, 2] \ .$$

Portanto,

$$|p(x) - \gamma(x)| \leq |p(x) - g(x)| + |g(x) - \gamma(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \quad \forall x \in [-1, 2] \ .$$

Como ε é arbitrário, podemos construir uma seqüência de polinômios com as propriedades desejadas.

Apêndice B

Consideremos o operador

$$F : \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})\big| u = w \quad \text{em} \quad \partial\Omega'\} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega'})$$

dado por

$$F(\varphi, \varepsilon) = \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} - b(x, \varphi, \nabla\varphi) - \varepsilon\varphi \ .$$

Definindo

$$T(\psi) = \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\psi_{ij} + \left[\sum_{i,j,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} - \frac{\partial b}{\partial p_k}(x, \varphi, \nabla\varphi)\right]\psi_k$$

$$- \ [\frac{\partial b}{\partial \varphi}(x, \varphi, \nabla\varphi) + \varepsilon]\psi \ ,$$

mostraremos que

$$\frac{\|F(\varphi + \psi, \varepsilon) - F(\varphi, \varepsilon) - T(\psi)\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}}}{\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}} \to 0$$

ou seja, T é a derivada de Fréchet de F.

De fato, temos

$$|F(\varphi + \psi, \varepsilon) - F(\varphi, \varepsilon) - T(\psi)|$$

$$= \Bigg| \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi + \nabla\psi)[\varphi_{ij} + \psi_{ij}] - b(x, \varphi + \psi, \nabla\varphi + \nabla\psi) - \varepsilon\varphi - \varepsilon\psi$$

$$
-\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} + b(x,\varphi,\nabla\varphi) + \varepsilon\varphi - \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\psi_{ij}
$$

$$
-\Big[\sum_{i,j,k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} - \frac{\partial b}{\partial p_k}(x,\varphi,\nabla\varphi)\Big]\psi_k + \Big[\frac{\partial b}{\partial \varphi}(x,\varphi,\nabla\varphi)+\varepsilon\Big]\psi\Big|
$$

$$
\leq \Big|\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi+\nabla\psi)[\varphi_{ij}+\psi_{ij}] - \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\varphi_{ij} - \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)\psi_{ij} - \sum_{i,j,k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij}\psi_k\Big|
$$

$$
+\Big|b(x,\varphi,\nabla\varphi) - b(x,\varphi+\psi,\nabla\varphi+\nabla\psi) + \sum_k \frac{\partial b}{\partial p_k}(x,\varphi,\nabla\varphi)\psi_k + \frac{\partial b}{\partial\varphi}(x,\varphi,\nabla\varphi)\psi\Big|
$$

$$
\leq \Big|\Big(\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi+\nabla\psi)[\varphi_{ij}+\psi_{ij}] - \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla\varphi)[\varphi_{ij}+\psi_{ij}]\Big) - \sum_{i,j,k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij}\psi_k\Big|
$$

$$
+\Big| - \frac{\partial b}{\partial\varphi}(x,\varphi+\theta\psi,\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)\psi - \sum_k \frac{\partial b}{\partial p_k}(x,\varphi+\theta\psi,\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)\psi_k
$$

$$
+\sum_k \frac{\partial b}{\partial p_k}(x,\varphi,\nabla\varphi)\psi_k + \frac{\partial b}{\partial\varphi}(x,\varphi,\nabla\varphi)\psi\Big|
$$

$$
\leq \Big|\sum_{i,j,k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)[\varphi_{ij}+\psi_{ij}]\psi_k - \sum_{i,j,k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij}\psi_k\Big|
$$

$$
+\Big|\Big(\frac{\partial b}{\partial\varphi}(x,\varphi,\nabla\varphi) - \frac{\partial b}{\partial\varphi}(x,\varphi+\theta\psi,\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)\Big)\psi
$$

$$
+\sum_k\Big(\frac{\partial b}{\partial p_k}(x,\varphi,\nabla\varphi) - \frac{\partial b}{\partial p_k}(x,\varphi+\theta\psi,\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)\Big)\psi_k\Big|
$$

$$
\leq \Big|\Big(\sum_{i,j,k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)\varphi_{ij}\psi_k - \sum_{i,j,k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij}\psi_k\Big) + \sum_{i,j,k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)\psi_{ij}\psi_k\Big|
$$

$$
+M|(x,\varphi,\nabla\varphi) - (x,\varphi+\theta\psi,\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)|^\alpha|\psi|
$$

$$
+\sum_k M|(x,\varphi,\nabla\varphi) - (x,\varphi+\theta\psi,\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)|^\alpha|\psi_k|\Big|
$$

$$\leq \sum_{i,j,k} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)\varphi_{ij}\psi_k - \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi)\varphi_{ij}\psi_k \right| + \sum_{i,j,k} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(\nabla\varphi+\theta\nabla\psi)\psi_{ij}\psi_k \right|$$

$$+M[\left(|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2\right)^{1/2}]^\alpha|\psi| + \sum_k M[\left(|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2\right)^{1/2}]^\alpha|\psi_k|$$

$$\leq \sum_{i,j,k} N|(\nabla\varphi+\theta\nabla\psi) - (\nabla\varphi)|^\alpha|\varphi_{ij}||\psi_k| + \sum_{i,j,k} N|\psi_{ij}||\psi_k|$$

$$+M[\left(|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2\right)^{1/2}]^\alpha(|\psi| + \sum_k |\psi_k|)$$

$$\leq \sum_{i,j,k} N|\theta\nabla\psi|^\alpha|\varphi_{ij}||\psi_k| + \sum_{i,j,k} N|\psi_{ij}||\psi_k|$$

$$+M\|\psi\|^\alpha_{\mathrm{H}^1}(|\psi| + \sum_k |\psi_k|)$$

$$\leq N\Big(|\nabla\psi|^\alpha \sum_{i,j,k} |\varphi_{ij}||\psi_k| + \sum_{i,j,k} |\psi_{ij}||\psi_k|\Big) + M\|\psi\|^\alpha_{\mathrm{H}^1}\Big(|\psi| + \sum_k |\psi_k|\Big)\ .$$

Como $\varphi, \psi \in \mathrm{C}^{2,\alpha}$, temos

$$\sup_x |F(\varphi+\psi,\varepsilon) - F(\varphi,\varepsilon) - T(\psi)|$$

$$\leq \sup_x \left(N\Big(|\nabla\psi|^\alpha \sum_{i,j,k} |\varphi_{ij}||\psi_k| + \sum_{i,j,k} |\psi_{ij}||\psi_k|\Big) + M\|\psi\|^\alpha_{\mathrm{H}^1}\Big(|\psi| + \sum_k |\psi_k|\Big)\right)$$

$$\leq N\Big(|\nabla\psi|^\alpha \sum_{i,j,k} \|\varphi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}} + \sum_{i,j,k} \|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\Big)$$

$$+M\|\psi\|^\alpha_{\mathrm{H}^1}\Big(\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}} + \sum_k \|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\Big)$$

$$\leq N\big(|\nabla\psi|^\alpha\|\varphi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}n^3 + \|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}n^3\big)$$

$$+M\|\psi\|^\alpha_{\mathrm{H}^1}\big(\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}} + n\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\big)\ .$$

Observemos que se $\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}} \to 0$, então $|\nabla\psi|^\alpha \to 0$ e $\|\psi\|^\alpha_{\mathrm{H}^1} \to 0$.

Logo

$$\frac{\sup |F(\varphi+\psi,\varepsilon)-F(\varphi,\varepsilon)-T(\psi)|}{\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}}$$
$$\leq Nn^3|\nabla\psi|^\alpha\|\varphi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}+Nn^3\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}+M(n+1)\|\psi\|^\alpha_{\mathrm{H}^1}\to 0$$

quando $\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\to 0$.

Empregando raciocínios análogos, mostra-se que

$$\sup_{x\neq y}\frac{|F(\varphi(x)+\psi(x),\varepsilon)-F(\varphi(x),\varepsilon)-T(\psi(x))}{\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}|x-y|^\alpha}$$
$$-\frac{(F(\varphi(y)+\psi(y),\varepsilon)-F(\varphi(y),\varepsilon)-T(\psi(y))|}{\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}|x-y|^\alpha}\to 0$$

quando $\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}\to 0$.

Disto segue que

$$\frac{\|F(\varphi+\psi,\varepsilon)-F(\varphi,\varepsilon)-T(\psi)\|_{\mathrm{C}^{0,\alpha}}}{\|\psi\|_{\mathrm{C}^{2,\alpha}}}\to 0\ .$$

Bibliografia

[1] L. A. Caffarelli & J. Spruck, "Convexity properties of solutions to some classical variational problems", *Comm. in Partial Differential Equations*, **7**(**11**), 1337 - 1379 (1982).

[2] H. J. Brascamp & E. Lieb, "On extensions of the Brunn-Minkowski and Prekopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to a diffusion equation",*J. Funct. Anal.* **22** (1976) 366-389.

[3] N. Korevaar, "Capillary surface convexity above convex domains", *Indiana Univ. Math. J.*, **32** (1983), 73-82.

[4] M. H. Protter & H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, *Prentice - Hall, Inc.* 1967.

[5] D. Gilbard & N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second Edition, *Springer - Verlag*, 1998.

[6] C. S. Hönig, Aplicações da Topologia à Análise, *Projeto Euclides, IMPA*, 1976.

[7] N. Dunford & J. Schwartz, Linear Operators, Part I, *John Wiley & Sons*, 1988.

[8] C. R. de Oliveira, Introdução à Análise Funcional, *Publicações Matemáticas, IMPA*, 2001.

[9] R. Gabriel, "An extended principle of the maximum for harmonic functions in 3 dimensions", *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 388-401.

[10] R. Gabriel, "A result concerning convex level surfaces of 3-dimensional harmonic functions", *J. London Math. Soc.*, **32** (1957), 286-294.

[11] R. Gabriel, “Further results concerning the level surfaces of the Green’s function for a 3-dimensional convex domain II”, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957), 303-306.

[12] J. L. Lewis, “Capacitory functions in convex rings”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **66** (1977), 201-224.

[13] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations, *Providence, I. L. : American Math. Soc.*, 1988.