

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

ESTUDO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SOB ALTAS  
TEMPERATURAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS

Paulo Sérgio Baumbach Lemos

Porto Alegre  
dezembro 2011

Paulo Sérgio Baumbach Lemos

**ESTUDO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SOB ALTAS  
TEMPERATURAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA**.

Orientador: Prof. Dr. Américo Campos Filho

Co-orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Mauren Aurich

Porto Alegre  
dezembro 2011

### CIP - Catalogação na Publicação

Lemos, Paulo Sérgio Baumbach

Estudo de estruturas de concreto sob altas temperaturas através do método dos elementos finitos / Paulo Sérgio Baumbach Lemos. -- 2011. 148 f.

Orientador: Américo Campos Filho.  
Coorientadora: Mauren Aurich.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2011.

1. Estruturas de concreto armado. 2. Altas temperaturas. 3. Incêndio. 4. Simulação numérica. 5. Método dos Elementos Finitos. I. Campos Filho, Américo, orient. II. Aurich, Mauren, coorient. III. Título.

**PAULO SÉRGIO BAUMBACH LEMOS**

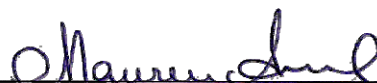
**ESTUDO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SOB ALTAS  
TEMPERATURAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

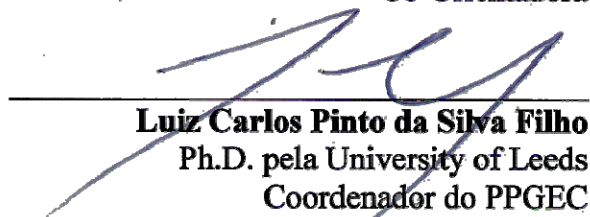
Porto Alegre, 19 de dezembro de 2011



**Américo Campos Filho**  
Dr. pela Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo  
Orientador



**Mauren Aurich (PUCRS)**  
Dr.<sup>a</sup> pela Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo  
Co-Orientadora



**Luiz Carlos Pinto da Silva Filho**  
Ph.D. pela University of Leeds  
Coordenador do PPGEC

**BANCA EXAMINADORA**

**Luiz Carlos Pinto da Silva Filho (UFRGS)**  
Ph.D. pela University of Leeds

**Samir Maghous (UFRGS)**  
Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées

**Valdir Pignatta e Silva (EPUSP)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Dedico este trabalho aos meus pais, João e Mirta, e ao meu irmão, João Marcelo, pelo eterno incentivo.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, agradeço ao professor Américo Campos Filho pelo apoio, amizade, orientação, comprometimento e disponibilidade prestada em todas as etapas deste trabalho. É com entusiasmo que encerro mais uma etapa da minha vida profissional sob sua orientação.

Agradeço à professora Mauren Aurich pelas orientações e disponibilidade que sempre mostrou durante a realização desse trabalho.

Agradeço à minha família, a quem também dedico esse trabalho, pelo constante apoio, incentivo, compreensão e orgulho que demonstram pelas minhas conquistas.

Agradeço aos inesquecíveis colegas de mestrado, Carla Wagner Matzenbacher, Cláudia Mesquita da Rosa, David Anderson Cardoso Dantas, Débora Delai Vanin, Jorge Luis Palomino Tamayo, Paula Manica Lazzari, Reberth Douglas Bandeira Cavalcante e Vitor Cury Perrone pela amizade e companheirismo.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC/UFRGS que auxiliaram, de alguma forma, na execução desse trabalho.

À CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

“Tudo parece impossível até que seja feito.”

*Nelson Mandela*

## RESUMO

LEMOS, P. S. B. **Estudo de Estruturas de Concreto sob Altas Temperaturas Através do Método dos Elementos Finitos**. 2011. 14: f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Tradicionalmente, admite-se que o concreto é um material resistente ao fogo por ser incombustível e apresentar baixa condutividade térmica (elevada capacidade de isolamento térmico). No entanto, quando exposto a altas temperaturas, experimenta vários problemas: a deterioração das propriedades térmicas e mecânicas, o dano causado pela restrição às deformações térmicas e a possibilidade de ocorrência de deslocamentos.

Neste contexto, as modelagens computacionais, especialmente através do método dos elementos finitos, têm adquirido cada vez mais importância. Através da simulação do comportamento das estruturas de concreto sob altas temperaturas um dado problema pode ser estudado em diferentes cenários, geometrias, propriedades dos materiais, carregamentos e condições de vinculação.

Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional para a simulação do comportamento termomecânico não linear de estruturas planas de concreto armado sob a ação de altas temperaturas através do método dos elementos finitos.

O programa realiza, em sequência, para cada incremento de tempo, as análises térmica e mecânica. O campo de temperaturas, determinado na análise térmica, é considerado na determinação das propriedades dos materiais, consideradas na análise mecânica.

Na análise mecânica, utilizou-se o modelo de fissuras discretas para a representação do comportamento frágil do concreto sob a ação dos esforços de tração. O modelo de armadura incorporada foi empregado para a representação mecânica da armadura. Foi desenvolvida uma analogia térmica ao modelo mecânico de armadura incorporada para a consideração da contribuição do aço na transferência de calor.

Os resultados do programa foram comparados com valores experimentais disponíveis na literatura. Primeiramente, realizou-se a análise térmica de seções de concreto de diferentes formas. Após, foi analisado o comportamento termomecânico de uma laje armada em uma só direção. As respostas obtidas tiveram boa aproximação em todas as comparações executadas.

**Palavras-chave:** estruturas de concreto armado; altas temperaturas; incêndio; simulação numérica; Método dos Elementos Finitos.



## ABSTRACT

LEMOS, P. S. B. **Study of Concrete Structures under High Temperature Using the Finite Element Method**. 2011. 14: f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Traditionally, it is admitted that concrete is a fire-resistant material due to its incombustible nature and low thermal conductivity (high insulating capacity). However, when exposed to high temperatures, it experiments a number of problems: deterioration of its thermo-mechanical properties; damage caused by the restricted thermal deformations; and the possibility of spalling.

In this context, computational modelings, especially through the Finite Element Method, have gained increasing importance. Through the simulation of the behavior of concrete structures under high temperatures, a given problem can be studied in different scenarios, geometries, material properties, loadings, and boundary conditions.

In this work a computational program for the simulation of non-linear thermo-mechanical behavior of reinforced concrete plane structures under the action of high temperatures through the Finite Element Method was developed.

The program executes, in a sequence, for each time increment, thermal and mechanical analyses. The temperature field, determined in the thermal analysis, is considered in the determination of the material properties that are considered in the mechanical analysis.

In the mechanical analysis, the smeared cracking model to represent the fragile behavior of concrete under the action of tension stresses was used. The embedded model was used in the mechanical representation of the reinforcement. A thermal analogy of the mechanical embedded model for reinforcement bars to the steel contribution in the heat transfer was developed.

The program results were compared with experimental values available in the literature. Firstly, a thermal analysis of the concrete sections was carried out in different ways. Next, the thermo-mechanical behavior of a one-way reinforced slab was analyzed. The obtained responses had a close agreement in all comparisons conducted.

**Key-words:** reinforced concrete structures, high temperatures, fire, numerical simulation, the Finite Element Method.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	6
LISTA DE TABELAS .....	9
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS .....	10
1 INTRODUÇÃO .....	13
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA .....	13
1.2 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO .....	16
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	16
2 REVISÃO DOS MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR .....	18
2.1 CONCEITOS GERAIS .....	18
2.1.1 Condução .....	18
2.1.2 Convecção .....	20
2.1.3 Radiação .....	23
2.2 CURVA NOMINAL DE INCÊNDIO ISO 834:1975 .....	26
3 PROPRIEDADES TERMOMECÂNICAS DO CONCRETO ARMADO EM ALTAS TEMPERATURAS .....	28
3.1 PROPRIEDADES TÉRMICAS .....	28
3.1.1 Concreto .....	28
3.1.1.1 Condutividade Térmica .....	28
3.1.1.2 Calor Específico .....	30
3.1.1.3 Massa Específica .....	33
3.1.1.4 Deformação Térmica Específica .....	33
3.1.2 Aço .....	34
3.1.2.1 Condutividade Térmica .....	34
3.1.2.2 Calor Específico .....	35
3.1.2.3 Massa Específica .....	36
3.1.2.4 Deformação Térmica Específica .....	36
3.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS .....	38
3.2.1 Concreto .....	38
3.2.1.1 Resistência à Compressão .....	38
3.2.1.2 Resistência à Tração .....	41
3.2.1.3 Módulo de Elasticidade .....	43
3.2.1.4 Relação Tensão-Deformação .....	45

3.2.2	Aço .....	48
3.2.2.1	Resistência Característica .....	48
3.2.2.2	Módulo de Elasticidade .....	50
3.2.2.3	Limite de Elasticidade .....	53
3.2.2.4	Relação Tensão-Deformação.....	55
4	ABORDAGEM NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA TÉRMICO .....	57
4.1	EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O FENÔMENO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	57
4.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	60
4.3	PRINCÍPIO VARIACIONAL .....	61
4.4	EQUAÇÕES INCREMENTAIS .....	63
4.5	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR .....	65
4.6	CONDIÇÃO ESTACIONÁRIA LINEAR .....	66
4.7	CONDIÇÃO ESTACIONÁRIA NÃO LINEAR .....	67
4.8	CONDIÇÃO TRANSIENTE.....	67
5	ABORDAGEM NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA MECÂNICO .....	70
5.1	MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO.....	70
5.2	TEORIA ELASTO-VISCOPLÁSTICA DOS SÓLIDOS .....	71
5.2.1	Formulação básica .....	71
5.2.2	Incremento de deformação viscoplástica.....	74
5.2.3	Incremento de tensão .....	75
5.2.4	Equações de equilíbrio.....	77
5.2.5	Correção do equilíbrio .....	79
5.2.6	Escolha do comprimento do passo de tempo .....	79
5.3	MODELO DE ARMADURA INCORPORADA ( <i>EMBEDDED REINFORCEMENT</i> ).....	80
5.3.1	Formulação geométrica .....	81
5.3.2	Campo de deformações .....	84
5.3.3	Formulação dos Trabalhos Virtuais.....	86
5.3.4	Analogia térmica ao modelo de armadura incorporada.....	87
6	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS .....	89
6.1	CONCRETO .....	89

6.1.1	Concreto sob esforços de compressão .....	89
6.1.2	Concreto sob esforços de tração .....	93
6.1.2.1	Critério de fissuração.....	94
6.1.2.2	Regra para a colaboração do concreto entre fissuras ( <i>tension stiffening</i> ).....	95
6.1.2.3	Modelo para transferência de tensões de corte .....	97
6.2	AÇO .....	98
7	PROGRAMA TERMOMECÂNICO.....	99
7.1	ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS.....	99
7.2	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE GAUSS-LEGENDRE .....	101
7.3	FLUXOGRAMA DE PROGRAMAÇÃO.....	103
7.4	PRÉ E PÓS-PROCESSAMENTO.....	106
8	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	107
8.1	AVALIAÇÃO ENTRE CAMPOS NUMÉRICOS DE TEMPERATURAS.....	107
8.2	AVALIAÇÃO ENTRE CAMPOS NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DE TEMPERATURAS.....	115
8.2.1	Seção transversal de um pilar .....	116
8.2.2	Seção transversal de uma laje.....	122
8.3	ANÁLISE TERMOMECÂNICA DE UMA LAJE .....	128
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	136
9.1	CONCLUSÕES .....	136
9.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	138
	REFERÊNCIAS .....	139

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: seção do Eurotúnel após o incêndio de 2008 (G1, 2008).....	14
Figura 2: seção do túnel Mont Blanc após o incêndio de 1999 (BBCBrasil, 2002).....	14
Figura 3: seção do túnel Tauern após o incêndio de 1999 (LRC, 2001).....	15
Figura 4: exemplo qualitativo da lei de Fourier unidimensional.....	20
Figura 5: exemplo qualitativo das camadas limites hidrodinâmica e térmica.....	21
Figura 6: processos térmicos de radiação num meio semitransparente.....	23
Figura 7: taxa líquida de transferência de calor por radiação.....	25
Figura 8: curva nominal de incêndio ISO 834:1975. ....	27
Figura 9: variação da condutividade térmica do concreto endurecido (CEB Bulletins n° 145, 174, 208).....	30
Figura 10: variação do valor de pico do calor específico em função da umidade relativa do concreto. ....	32
Figura 11: evolução do calor específico em função da temperatura para concretos, para diversos teores de umidade.....	32
Figura 12: evolução da massa específica do concreto em função da temperatura. ....	33
Figura 13: deformação térmica específica do concreto.....	34
Figura 14: condutividade térmica do aço em função da temperatura.....	35
Figura 15: calor específico do aço em função da temperatura.....	36
Figura 16: deformação térmica específica do aço.....	37
Figura 17: deformação térmica específica do concreto e do aço.....	38
Figura 18: evolução de $\kappa_{c,\theta}$ em função da temperatura.....	40
Figura 19: evolução de $\kappa_{t,\theta}$ em função da temperatura.....	42
Figura 20: curvas da resistência média à tração do concreto. ....	43
Figura 21: evolução de $\kappa_{cE,\theta}$ em função da temperatura.....	44
Figura 22: evolução de $\varepsilon_{c1,\theta}$ e $\varepsilon_{c,lim,\theta}$ em função da temperatura.....	47
Figura 23: tensão uniaxial de compressão do concreto à temperatura elevada para concretos com agregados silicosos. ....	48
Figura 24: evoluções de $\kappa_{s,\theta}$ em função da temperatura.....	50
Figura 25: evoluções de $\kappa_{sE,\theta}$ em função da temperatura.....	52
Figura 26: evoluções de $\kappa_{sp,\theta}$ em função da temperatura.....	55

Figura 27: relação tensão-deformação para aço laminado a quente com ductilidade normal.	56
Figura 28: condições de contorno superficiais.	57
Figura 29: modelo reológico elasto-viscoplástico adotado.	70
Figura 30: elementos no sistema global (x,y) e no sistema natural ( $\xi,\eta$ ).	81
Figura 31: sistema de coordenadas ao longo do elemento de barra.	83
Figura 32: relação tensão-deformação para esforços de tração.	96
Figura 33: elementos unidimensionais de 2, 3 e 4 nós.	99
Figura 34: elementos bidimensionais de 4, 9 e 8 nós.	101
Figura 35: fluxograma do programa termomecânico.	103
Figura 36: fluxograma da rotina HEAT2D.	104
Figura 37: fluxograma da rotina MVISCO.	105
Figura 38: dimensões e discretização da placa em estudo [cm].	108
Figura 39: variação da condutividade térmica do concreto.	109
Figura 40: variação da capacitância térmica do concreto (produto da massa específica pelo calor específico).	109
Figura 41: comparação entre as curvas de evolução de temperaturas nos pontos “A”, “B” e “C”, obtidas através do <i>Super Tempcalc</i> e do programa proposto.	110
Figura 42: erros relativos nas evoluções de temperaturas nos pontos “A”, “B” e “C”.	110
Figura 43: erros absolutos nas evoluções de temperaturas nos pontos “A”, “B” e “C”.	111
Figura 44: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=0,0$ horas.	112
Figura 45: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=0,2$ horas.	112
Figura 46: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=0,4$ horas.	113
Figura 47: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=0,6$ horas.	113
Figura 48: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=1,0$ horas.	114
Figura 49: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=2,0$ horas.	114
Figura 50: dimensões da seção transversal do pilar em estudo [cm].	116
Figura 51: discretização e condições de contorno da seção do pilar [cm].	116
Figura 52: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=30$ minutos.	118
Figura 53: campo de erro relativo (em %) para o tempo $t=30$ minutos.	118
Figura 54: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=60$ minutos.	119
Figura 55: campo de erro relativo (em %) para o tempo $t=60$ minutos.	119
Figura 56: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=90$ minutos.	120
Figura 57: campo de erro relativo (em %) para o tempo $t=90$ minutos.	120
Figura 58: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=120$ minutos.	121

Figura 59: campo de erro relativo (em %) para o tempo $t=120$ minutos. ....	121
Figura 60: dimensões da seção transversal da laje em estudo [cm]. ....	122
Figura 61: discretização e condições de contorno da seção da viga [cm]. ....	123
Figura 62: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=30$ minutos. ....	124
Figura 63: campo de erro relativo (em %) para o tempo $t=30$ minutos. ....	124
Figura 64: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=60$ minutos. ....	125
Figura 65: campo de erro relativo (em %) para o tempo $t=60$ minutos. ....	125
Figura 66: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=90$ minutos. ....	126
Figura 67: campo de erro relativo (em %) para o tempo $t=90$ minutos. ....	126
Figura 68: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=120$ minutos. ....	127
Figura 69: campo de erro relativo (em %) para o tempo $t=120$ minutos. ....	127
Figura 70: laje estudada por Anderberg (1978), dimensões em centímetros. ....	128
Figura 71: curva de incêndio utilizada por Anderberg (1978). ....	129
Figura 72: discretização e condições de contorno da laje [cm]. ....	129
Figura 73: evolução das flechas da laje. ....	130
Figura 74: evolução dos perfis de temperatura na seção da laje. ....	132
Figura 75: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=0$ minuto. ....	132
Figura 76: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=10$ minutos. ....	132
Figura 77: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=30$ minutos. ....	133
Figura 78: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=60$ minutos. ....	133
Figura 79: campo de temperatura (em °C) para o tempo $t=87$ minutos, instante da ruptura. ....	133
Figura 80: evolução das temperaturas na seção da laje. ....	133
Figura 81: campo de tensão $\sigma_x$ (em $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo $t=0$ minuto (flecha instantânea). ....	134
Figura 82: campo de tensão $\sigma_x$ (em $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo $t=10$ minutos. ....	134
Figura 83: campo de tensão $\sigma_x$ (em $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo $t=30$ minutos. ....	134
Figura 84: campo de tensão $\sigma_x$ (em $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo $t=60$ minutos. ....	134
Figura 85: campo de tensão $\sigma_x$ (em $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo $t=87$ minutos (instante da ruptura). ....	134
Figura 86: evolução da tensão $\sigma_x$ na seção da laje. ....	135

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: condutividade térmica à temperatura ambiente (KHOURY, 1983 apud FIB, 2007). .....	28
Tabela 2: valores para $\kappa_{c,\theta}$ expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004).....	39
Tabela 3: valores para $\varepsilon_{c1,\theta}$ e $\varepsilon_{c,lim,\theta}$ expostos pelo Eurocode 2 (2004).....	46
Tabela 4: valores para $\kappa_{s,\theta}$ expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004).....	49
Tabela 5: valores para $\kappa_{sE,\theta}$ expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004). ....	51
Tabela 6: valores para $\kappa_{sp,\theta}$ expostos pelo Eurocode 2 (2004). ....	53
Tabela 7: representação matricial do tensor constitutivo elástico .....	72
Tabela 8: expressões para o vetor de fluxo plástico $a$ . ....	74
Tabela 9: expressões para a matriz de relações deformações-deslocamentos.....	76
Tabela 10: coordenadas e pesos para a integração de Gauss-Legendre. ....	102
Tabela 11: propriedades térmicas do concreto. ....	108
Tabela 12: propriedades termomecânicas do concreto a 20°C.....	115
Tabela 13: flechas numéricas e experimental.....	131



## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

$[ ]$	matriz
$\{ \}$	vetor coluna
$\langle \rangle$	vetor linha
$A$	área
$c_{,\theta}$	calor específico por unidade de massa em função da temperatura
$e$	emissividade resultante da superfície
$E$	módulo de elasticidade
$E_{,\theta}$	módulo de elasticidade em função da temperatura
$f$	resistência
$f_{,\theta}$	resistência em função da temperatura
$G$	módulo de deformação por corte
$H$	taxa volumétrica de geração de calor interno
$i, j, k, l, m, n$	contadores
$I_1$	primeiro invariante do tensor de tensões
$J$	Jacobiano da transformação
$J_2$	segundo invariante do tensor desviador de tensões
$J_3$	terceiro invariante do tensor desviador de tensões
$N^{(m)}$	vetor de funções de interpolação do elemento
$N^S(m)$	vetor de funções de interpolação na face do elemento
$q_{,xyz}$	fluxo de calor por metro quadrado nas direções $x$ , $y$ ou $z$
$q^i$	são fluxos de calor pontuais

$t$	tempo, espessura
$T_{\text{inf}}$	temperatura absoluta do fluido
$T_{\text{sup}}$	temperatura absoluta da superfície
$T_{\text{viz}}$	temperatura absoluta da fonte de radiação térmica
$U$	umidade relativa
$x, y, z$	dimensões lineares
$\alpha$	absorvidade da superfície
$\alpha_c$	coeficiente de transferência de calor por convecção
$\beta$	parâmetro que controla o esquema de integração temporal
$\varepsilon$	deformação, emissividade
$\varepsilon, \theta$	deformação em função da temperatura
$\theta$	temperatura
$\theta(x, y, z)$	campo de temperaturas
$\kappa$	parâmetro de endurecimento
$\kappa, \theta$	coeficiente redutor em função da temperatura
$\lambda, \theta$	condutividade térmica em função da temperatura
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\xi$ e $\eta$	coordenadas naturais
$\rho$	massa específica
$\rho, \theta$	massa específica em função da temperatura
$\sigma$	tensão

$\sigma, \theta$	tensão em função da temperatura
$\sigma_0$	constante de Stefan-Boltzmann
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	tensões principais do tensor de tensões
$\sigma_m$	tensão esférica do tensor de tensões

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA

As pesquisas sobre o efeito das altas temperaturas em estruturas de concreto vêm sendo realizadas desde o início do século passado. Até cerca de uma década atrás, os estudos sobre os efeitos do aquecimento durante incêndios tinham por foco o comportamento do concreto de resistência normal submetido às altas temperaturas. As normas adotavam recomendações prescritivas para assegurar a estabilidade estrutural sob incêndio, estabelecendo um período de tempo teoricamente suficiente para permitir que as pessoas escapassem e que os bombeiros extinguissem o fogo. Mais recentemente, os estudos nesta área têm se concentrado em dois tópicos principais: o crescente uso de novos tipos de concreto, tais como os concretos auto-adensáveis e de alta resistência e a tendência crescente das normas em adotar cálculos baseados em desempenho para a análise e o projeto de estruturas em situação de incêndio.

Recentes incêndios ocorridos em túneis reforçaram a importância de um estudo mais aprofundado do concreto sob a ação de altas temperaturas. Em 1996, o Eurotúnel (que liga a Inglaterra à França) foi atingido por um incêndio que causou um grande prejuízo financeiro. O incêndio teve uma duração de dez horas e atingiu temperaturas de até 700°C (G1, 2008). Em 2008, o túnel sofreu outro incêndio que originou novos prejuízos financeiros. Na Figura 1, apresenta-se um trecho do túnel após o incêndio de 2008.



Figura 1: seção do Eurotúnel após o incêndio de 2008 (G1, 2008).

Em 1999, o incêndio no túnel Mont Blanc (que liga a Itália à França) causou quarenta e uma mortes (BBCBrasil, 2002). O incêndio durou quarenta e oito horas e alcançou temperaturas de até 1800°C. Na Figura 2, apresenta-se um trecho do túnel após o incêndio.



Figura 2: seção do túnel Mont Blanc após o incêndio de 1999 (BBCBrasil, 2002).

O túnel Tauern (na Áustria) também foi atingido por um incêndio em 1999, causando doze mortes e deixando cinquenta feridos. O incêndio durou cinquenta horas e alcançou temperaturas de até 1000°C (LRC, 2001). Na Figura 3, apresenta-se um trecho do túnel após o incêndio.



Figura 3: seção do túnel Tauern após o incêndio de 1999 (LRC, 2001).

Em 2001, o incêndio no túnel São Gotardo (que liga a Itália à Áustria) ocasionou onze mortes (UOL, 2001).

Os incêndios em túneis são tomados como referências em pesquisas, pois sua duração e intensidade são elevadas. No entanto, a importância do estudo do concreto sob altas temperaturas se estende a uma vasta gama de estruturas como edificações, reatores nucleares, poços de petróleo, etc. Em nível nacional, citam-se os seguintes incêndios em edificações (COSTA, 2008):

- a) Condomínio Conjunto Nacional, em São Paulo, em 1978;
- b) Sede II da CESP, em 1987;
- c) Depósito têxtil das Lojas Zelo S. A., em 1994;
- d) Condomínio Edifício Cacique, em Porto Alegre, em 1996;
- e) Edifício Hern Stoltz – Eletrobrás, no Rio de Janeiro, em 2004;
- f) *Shopping Total*, em Porto Alegre, em 2007.

O concreto é considerado, tradicionalmente, como um material resistente ao fogo por ser incombustível e apresentar elevada capacidade de isolamento térmico. Entretanto, quando submetido a altas temperaturas, experimenta três problemas principais: a deterioração das propriedades mecânicas, o dano causado pelas deformações térmicas e a possibilidade de ocorrência de deslocamento das camadas de concreto (*spalling*).

Neste contexto, as modelagens computacionais, especialmente através do método dos elementos finitos, têm adquirido cada vez mais importância. Através da simulação do comportamento das estruturas de concreto sob altas temperaturas um dado problema pode ser estudado em diferentes cenários, geometrias, propriedades dos materiais, carregamentos e condições de vinculação. Isto pode ser realizado em um curto período de tempo, permitindo uma perfeita compreensão do funcionamento da estrutura submetida ao fogo até o colapso. Além disso, os programas computacionais podem simular mais aproximadamente as condições estruturais reais, o que é muito difícil (ou praticamente impossível) de estudar em ensaios experimentais.

## 1.2 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho se propõe a desenvolver uma rotina computacional de análise termomecânica não linear para a simulação de estruturas planas de concreto armado sob a ação de altas temperaturas por meio do método dos elementos finitos. Por se tratar de um estudo inicial, esse trabalho tem um caráter exploratório que se caracteriza pela tentativa de identificar as dificuldades envolvidas nesse tipo de desenvolvimento e analisar qual o nível de precisão que pode ser alcançado.

Têm-se como objetivos complementares a implementação de dois modelos para o concreto armado: um para a fissuração (utilizando o modelo de fissuras distribuídas) e outro para a armadura (utilizando o modelo de armadura incorporada).

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 apresentam-se uma revisão sobre os fenômenos de transferência de calor e sobre as curvas nominais de incêndio.

No capítulo 3, apresenta-se uma revisão sobre a variação das propriedades térmicas e mecânicas do concreto e do aço sob condições de elevação de temperaturas. Apresenta-se também, nesse capítulo, a adaptação às altas temperaturas da relação tensão-deformação do concreto à compressão.

No capítulo 4, apresenta-se uma revisão da formulação do problema térmico baseado no método dos elementos finitos. Expõe-se toda a formulação para problemas estacionários e transientes bem como para problemas lineares e não lineares.

No capítulo 5, descreve-se o modelo elasto-viscoplástico utilizado nesse trabalho bem como a sua formulação através do método dos elementos finitos. Ao final do capítulo apresenta-se a formulação do modelo de armadura incorporada (*embedded reinforcement*) para o caso mecânico, bem como a sua adaptação à análise térmica.

O capítulo 6 apresenta os modelos constitutivos do concreto e do aço implementados no programa termomecânico.

No capítulo 7, apresentam-se os fluxogramas de programação, formulação dos elementos finitos utilizados, integração numérica e a entrada e saída de dados do programa termomecânico.

O capítulo 8 contém exemplos de aplicação que demonstram a funcionalidade da rotina computacional desenvolvida.

Por fim, no capítulo 9, apresentam-se as considerações finais sobre o trabalho.



## **2 REVISÃO DOS MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR**

O primeiro passo para a avaliação do desempenho das estruturas de concreto armado sujeitas a altas temperaturas é a determinação do campo de temperaturas atuante. Para tal, os processos de transferência de calor devem ser completamente compreendidos. Com esse objetivo, apresenta-se nesse capítulo uma breve revisão sobre os mecanismos de transferência de calor.

Além disso, ao fim do capítulo apresenta-se uma breve revisão sobre a curva nominal de incêndio ISO 834:1975, referência internacional adotada para a simulação de situação de incêndio.

### **2.1 CONCEITOS GERAIS**

A transferência de calor é o transito de energia estimulado por uma diferença de temperatura. Sempre que existir diferença de temperatura em um meio ou entre meios diferentes, haverá, necessariamente, uma transferência de calor (INCROPERA, 2001).

A transmissão de calor pode ocorrer de três maneiras distintas: por condução, convecção ou radiação, como discutido a seguir.

#### **2.1.1 Condução**

Segundo Incropera (2001), a condução está relacionada à atividade atômica e molecular sob a forma de movimento de translação, rotação e vibração das moléculas de um material. Quanto mais energética uma molécula for, maior a intensidade dessas formas de movimento.

Em meios gasosos e líquidos, a transferência de calor por condução ocorre quando moléculas com mais energia colidem, em função do movimento molecular aleatório, com outras de

menor energia. Na presença de um gradiente de temperatura, a transferência de energia por condução ocorre no sentido da homogeneização da temperatura. A essa forma de transmissão devida ao movimento aleatório se dá o nome de difusão.

Incropera (2001) afirma que, em meios sólidos, a condução pode ser atribuída à atividade atômica na forma de ondas de vibrações dos retículos. Em materiais não condutores, a transferência de energia se dá exclusivamente através dessas ondas. Em materiais condutores, a transferência se dá também na forma de movimentos de translação dos elétrons livres.

O processo de transferência de calor pode ser quantificado em termos de uma equação diferencial. Essa equação é chamada de lei de Fourier para condução de calor. Na equação 1, apresenta-se a lei de Fourier para condução de calor no caso unidimensional estacionário (sem variação do campo de temperaturas com o tempo).

$$q_{cond,x} = -\lambda_x \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (\text{equação 1})$$

Onde:

$q_{cond,x}$  é o fluxo de calor por condução por metro quadrado na direção x [ $\text{W}/\text{m}^2$ ];

$\lambda_x$  é a condutividade térmica na direção x [ $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ];

$\theta(x)$  é o campo de temperaturas [K];

$x$  é a dimensão linear [m].

Na Figura 4, apresenta-se um exemplo qualitativo da lei de Fourier unidimensional sob condição estacionária (sem variação do campo de temperaturas com o tempo) em um corpo tridimensional (de volume  $\Omega$  e superfície  $\Gamma$ ).

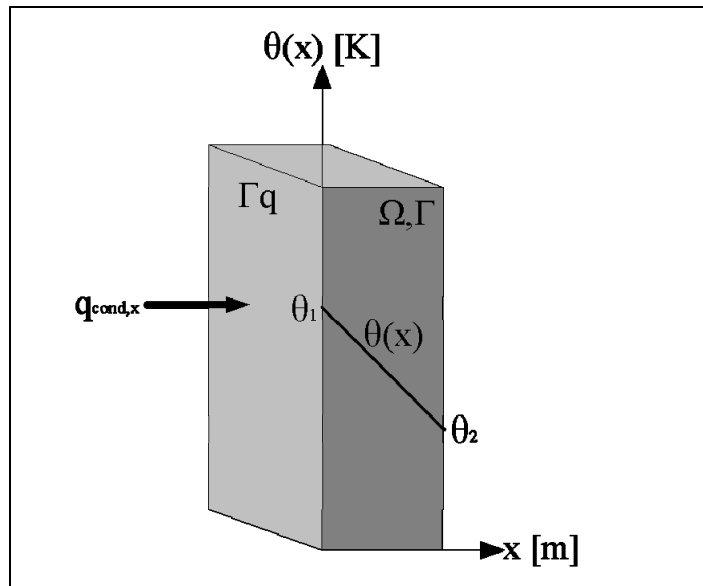


Figura 4: exemplo qualitativo da lei de Fourier unidimensional.

Onde:

$\Gamma q$  é a área superficial onde o fluxo de energia térmica está incidindo [ $m^2$ ].

### 2.1.2 Convecção

A convecção é o mecanismo de transferência de calor devido à diferença de temperatura entre uma superfície e um fluido em movimento. Ela pode ser classificada em quatro formas básicas, relativas à natureza do movimento macroscópico do fluido:

- a) convecção forçada, quando o movimento macroscópico do fluido é causado por meios externos (ventos atmosféricos, ventiladores, bombas, etc.);
- b) convecção livre, quando o movimento macroscópico do fluido é induzido pelas forças de empuxo oriundas da diferença de densidade causada pela variação de temperatura no fluido;
- c) convecção por ebulição;
- d) convecção por condensação.

As convecções por ebulição e condensação não são pertinentes a esse trabalho. A convecção forçada não será considerada nesse trabalho visto que a natureza de seu movimento pouco tem a ver com situações de estruturas sob a ação de incêndios.

Segundo Incropera (2001), a convecção ocorre através da ação de dois mecanismos distintos: o primeiro é a **difusão**, devido ao movimento molecular aleatório do fluido sobre a superfície; o segundo é chamado de **advecção** e se deve ao movimento macroscópico coletivo de um grande número de moléculas do fluido sobre a superfície. Uma vez que as moléculas do fluido mantêm seus movimentos aleatórios, a transferência de calor total por convecção é composta então pela superposição da difusão com a advecção.

Sabe-se, da mecânica dos fluidos, que a interação entre um fluido em movimento e uma superfície gera uma região onde o campo de velocidades desse fluido varia entre zero (na superfície) e um valor finito limite para o perfil de velocidade ( $u_{inf}$ ). Essa região é chamada de **camada limite hidrodinâmica**. O mesmo ocorre para o caso térmico, onde a diferença de temperaturas entre a superfície e o fluido em movimento gera uma camada onde o campo de temperaturas varia da temperatura da superfície ( $T_{sup}$ ) até um valor finito limite para o perfil de temperaturas ( $T_{inf}$ ). Essa região é chamada de **camada limite térmica**. Na Figura 5, apresenta-se um exemplo qualitativo das camadas limites.

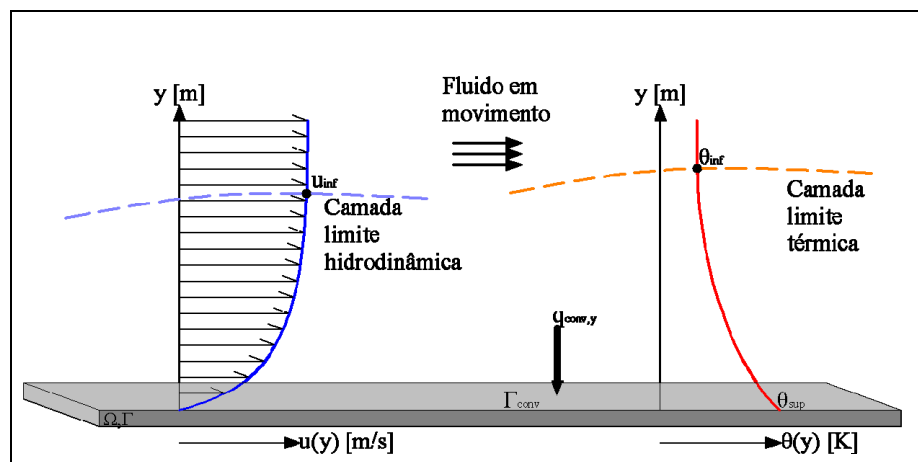


Figura 5: exemplo qualitativo das camadas limites hidrodinâmica e térmica.

Onde:

$q_{conv,y}$  é o fluxo de calor por convecção por metro quadrado na direção  $y$  [ $W/m^2$ ];

$\Gamma_{rad}$  é a área superficial onde o fluxo de energia térmica por convecção está incidindo [ $m^2$ ].

Segundo Incropera (2001), as camadas limites podem apresentar diferentes tamanhos. A contribuição dada pela difusão é dominante próxima à superfície (no início da camada limite hidrodinâmica), onde a velocidade é próxima à zero. A contribuição do movimento global do

fluido (advecção) origina-se no fato de que a espessura da camada limite hidrodinâmica cresce à medida que o escoamento progride na direção do eixo  $x$ . Assim o calor que é conduzido para o interior dessa camada é transportado na direção do escoamento, sendo eventualmente transferido para o fluido que se encontra no exterior da camada limite hidrodinâmica.

O fluxo de calor transferido por convecção pode ser expresso matematicamente através da lei de resfriamento de Newton. Na equação 2, apresenta-se essa lei.

$$q_{conv,y} = \alpha_{c,y} (T_{inf} - T_{sup}) \quad (\text{equação 2})$$

Onde:

$q_{conv,y}$  é o fluxo de calor por convecção por metro quadrado na direção  $y$  [ $W/m^2$ ];

$\alpha_{c,y}$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção [ $W/(m^2 \cdot K)$ ];

$T_{inf}$  é a temperatura absoluta do fluido [K];

$T_{sup}$  é a temperatura absoluta da superfície [K].

O coeficiente de transferência de calor por convecção depende das condições na camada limite hidrodinâmica, as quais são influenciadas pela geometria da superfície, pela natureza do escoamento e por uma série de propriedades termodinâmicas e de transporte do fluido. Assim, pode-se dizer que todo o estudo da convecção se reduz à determinação desse coeficiente.

Como o campo de velocidades do fluido (ar), no tipo de problema analisado nesse trabalho, apresenta módulos pequenos, o fenômeno de advecção será desprezado sem que isso acarrete grandes erros. Isso simplificará muito a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção.

### 2.1.3 Radiação

Segundo Incropera (2001), a radiação térmica é a energia emitida por toda a matéria que se encontra a uma temperatura absoluta não nula. Esse tipo de emissão térmica pode ser atribuído a mudanças nas configurações eletrônicas dos átomos ou moléculas que constituem a matéria. A energia é transportada por meio de ondas eletromagnéticas, ou seja, não necessita de meio material para a propagação.

Na Figura 6 são mostrados os processos térmicos de radiação.

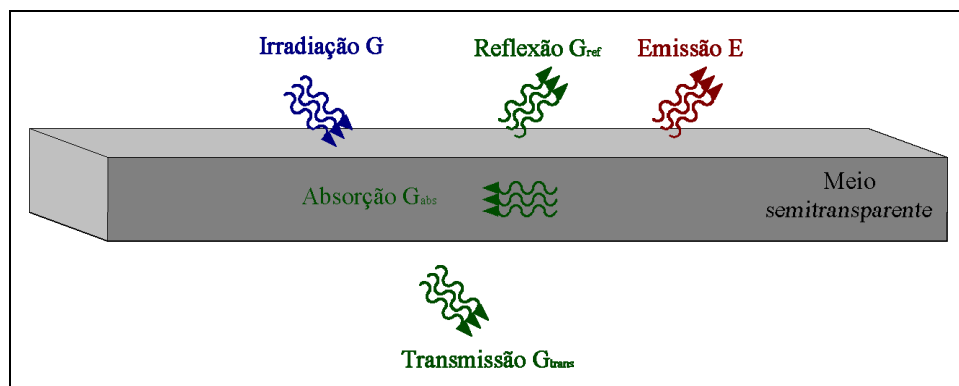


Figura 6: processos térmicos de radiação num meio semitransparente.

Para o caso mais geral, a radiação térmica interage com um meio semitransparente (água, vidro, etc.). Definimos dois mecanismos básicos de transferência de calor por radiação: a **irradiação** ( $G$ ) e a **emissão** ( $E$ ).

A irradiação corresponde a toda energia térmica recebida pela matéria de alguma fonte térmica de radiação. A emissão corresponde a toda energia térmica emitida pela matéria que se encontra a certa temperatura absoluta não nula. Tanto a irradiação quanto a emissão são taxas de energia por unidade de área ( $W/m^2$ ).

A irradiação pode ser decomposta em três parcelas: a reflexão ( $G_{ref}$ ), a absorção ( $G_{abs}$ ) e a transmissão ( $G_{trans}$ ). A reflexão corresponde à radiação térmica que é refletida pela superfície da matéria; já a absorção corresponde à radiação térmica que realmente é absorvida pela matéria; e, por fim, a transmissão corresponde à radiação térmica que atravessa a matéria sem ser absorvida ou refletida. Dessa forma, apresenta-se, na equação 3, o balanço de radiação para o mecanismo de irradiação.

$$G = G_{ref} + G_{abs} + G_{trans} \quad (\text{equação 3})$$

No caso mais simples, considerando que o meio material seja opaco, a parcela de radiação transmitida ( $G_{trans}$ ) é igualada a zero. A radiação absorvida ( $G_{abs}$ ) é determinada através da equação 4.

$$G_{abs} = \alpha \cdot G \quad (\text{equação 4})$$

Onde:

$\alpha$  é a absorvidade da superfície [adimensional].

A absorvidade é uma propriedade radiante da superfície material e seu valor está no intervalo  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

A emissão pode ser quantificada segundo a equação 5.

$$E = \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot T_{sup}^4 \quad (\text{equação 5})$$

Onde:

$\varepsilon$  é a emissividade da superfície [adimensional];

$\sigma_0$  é a constante de Stefan-Boltzmann [ $\sigma_0 = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ ].

A emissividade é uma propriedade radiante da superfície e seu valor varia no intervalo  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Se o corpo apresentar o valor da emissividade igual a um, esse recebe o nome de **corpo negro**.

Segundo Incropera (2001), o corpo negro possui as seguintes propriedades:

- absorve toda a radiação incidente, independente da direção ou comprimento de onda;
- para certo comprimento de onda e temperatura, nenhuma superfície pode emitir mais energia que o corpo negro (comprovado pela lei de Kirchhoff);
- apesar de a radiação emitida ser função do comprimento de onda e temperatura, ela é independente da direção, ou seja, o corpo negro é um emissor difuso.

A taxa líquida de transferência de calor por radiação, expressa por unidade de área, a partir da superfície é apresentada na equação 6.

$$q_{rad} = \alpha \cdot G - \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot T_{sup}^4 \quad (\text{equação 6})$$

Onde:

$q_{rad}$  é a taxa líquida de transferência de calor por radiação [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].

Na Figura 7, apresenta-se a ilustração da equação 6.

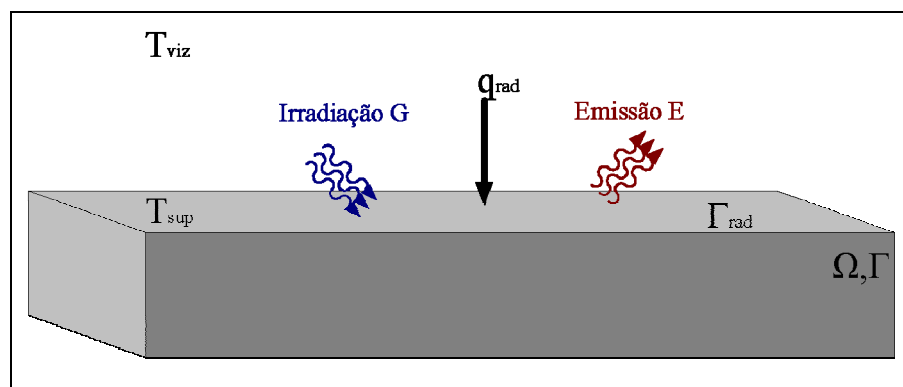


Figura 7: taxa líquida de transferência de calor por radiação.

Onde:

$T_{viz}$  é a temperatura absoluta da fonte de radiação térmica [K];



$\Gamma_{rad}$  é a área superficial onde o fluxo de energia térmica por radiação está incidindo [ $m^2$ ].

Uma superfície que possua o valor da emissividade ( $\epsilon$ ) igual ao da absorvidade ( $\alpha$ ) é chamada de **superfície cinza**. Segundo Incropera (2001), uma superfície cinza é aquela onde a emissividade e absorvidade são independentes do comprimento de onda ao longo das regiões espectrais de irradiação e emissão superficial. A condição para que essa hipótese seja verdadeira é que a irradiação incidente sobre a superfície seja difusa.

Aceitando a hipótese de superfície cinza, a equação 6 pode ser reescrita como:

$$q_{rad} = e \cdot \sigma_0 \cdot (T_{viz}^4 - T_{sup}^4) \quad (\text{equação 7})$$

Onde:

$e$  é a emissividade resultante da superfície [adimensional];

$T_{viz}$  é a temperatura absoluta da fonte de radiação térmica [K].

## 2.2 CURVA NOMINAL DE INCÊNDIO ISO 834:1975

Em um incêndio real, muitos fatores que influenciam a evolução das temperaturas. Segundo Costa (2008) o cenário de incêndio é influenciado por quatro fatores: carga de incêndio (tipo de combustível), geometria do compartimento de incêndio, ventilação do compartimento de incêndio e propriedades térmicas dos materiais.

Devido à complexidade de cada situação (cenário de incêndio), o incêndio foi padronizado em curvas nominais. Segundo Costa (2008), as curvas nominais são termos genéricos utilizados para qualificar incêndios padronizados, representados por uma equação ou tabela, de aplicação direta e generalizada a qualquer compartimento, independente do cenário de incêndio.

Nesse contexto, apresenta-se a curva nominal de incêndio ISO 834:1975. Essa curva, apresentada na Figura 8, representa um incêndio oriundo de materiais celulósicos.

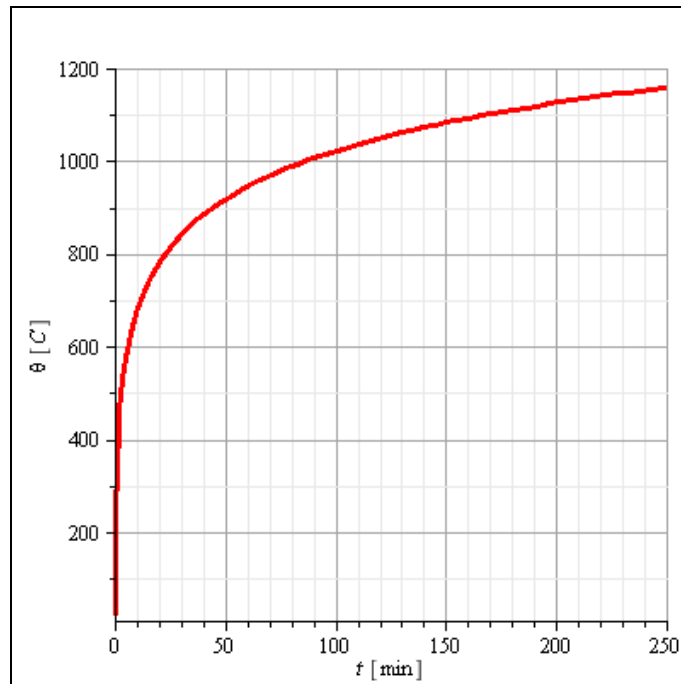


Figura 8: curva nominal de incêndio ISO 834:1975.

Sua formulação é baseada em uma curva logarítmica e é apresentada na equação 8.

$$\theta_g - \theta_{g0} = 345 \cdot \log(8 \cdot t + 1) \quad (\text{equação 8})$$

Onde:

$\theta_g$  é a temperatura dos gases no compartimento em chamas [°C];

$\theta_{g0}$  é a temperatura do compartimento no instante  $t = 0$  [°C], normalmente igual a 20°C;

$t$  é o tempo [min.].

O Eurocode 1 (2002) e as normas NBR 5628 (2001) e NBR 14432 (2001) recomendam o uso da curva-padrão da norma ISO 834:1975 para determinação da resistência de elementos construtivos ao fogo.

Os métodos prescritivos de dimensionamento de estruturas apresentados nas normas NBR 14323 (1999) e NBR 15200 (2004) baseiam-se na curva-padrão da norma ISO 834:1975.

### 3 PROPRIEDADES TERMOMECÂNICAS DO CONCRETO ARMADO EM ALTAS TEMPERATURAS

#### 3.1 PROPRIEDADES TÉRMICAS

##### 3.1.1 Concreto

##### 3.1.1.1 Condutividade Térmica

A condutividade térmica do concreto sofre uma redução com o aumento da temperatura do material. Segundo a FIB (2007), embora a condutividade térmica do concreto dependa de todos os constituintes da massa de concreto, ela é amplamente determinada pelo tipo de agregado utilizado, desde que ele represente 60% a 80% do volume de concreto. Outra influência importante é a umidade do concreto visto que a condutividade térmica da água, apesar de baixa, é muito maior que a do ar. Na Tabela 1, apresenta-se as condutividades dos constituintes do concreto à temperatura ambiente (KHOURY, 1983 apud FIB, 2007).

Tabela 1: condutividade térmica à temperatura ambiente (KHOURY, 1983 apud FIB, 2007).

Material	Condutividade térmica [W/(m·°C)]
Agregados	0,7-4,2
Concretos saturados	1,0-3,6
Pasta de cimento saturada endurecida	1,1-1,6
Água	0,515
Ar	0,0034

A proporção da mistura e, por consequência, o conteúdo de cimento influenciam na condutividade térmica da massa de concreto em razão da disparidade dos valores das condutividades dos constituintes. O aumento da razão água cimento aumenta a porosidade do concreto e conseqüentemente reduz a condutividade térmica, especialmente quando o concreto está com elevado teor de umidade tendo em vista a baixa condutividade tanto da água quanto do ar.

O CEB (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)) apresenta duas equações para a condutividade térmica do concreto endurecido em função da temperatura e do tipo de agregado utilizado na mistura. Na equação 9, apresenta-se a expressão para agregados silicosos.

$$\begin{aligned} \lambda_{c,\theta} &= 2,024 - 0,0012 \cdot \theta, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta < 700^{\circ}\text{C} \\ \lambda_{c,\theta} &= 1,2, & 700^{\circ}\text{C} \leq \theta < 1200^{\circ}\text{C} \end{aligned} \quad (\text{equação 9})$$

Na equação 10, apresenta-se a expressão para agregados calcáreos.

$$\begin{aligned} \lambda_{c,\theta} &= 1,618 - 0,0009 \cdot \theta, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta < 700^{\circ}\text{C} \\ \lambda_{c,\theta} &= 1,0, & 700^{\circ}\text{C} \leq \theta < 1200^{\circ}\text{C} \end{aligned} \quad (\text{equação 10})$$

Onde:

$\lambda_{c,\theta}$  é a condutividade térmica do concreto de densidade normal, em função da temperatura  $\theta$  [W/(m·°C)].

Na Figura 9, apresenta-se a evolução da condutividade térmica do concreto, para agregados silicosos e calcáreos, em função da temperatura.

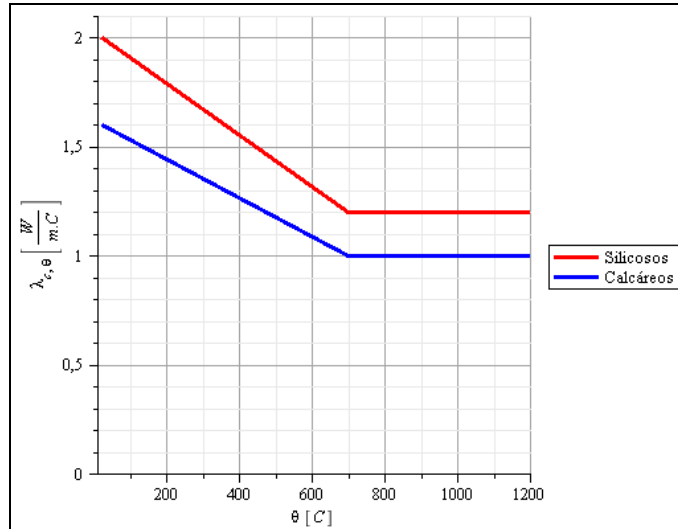


Figura 9: variação da condutividade térmica do concreto endurecido (CEB Bulletins n° 145, 174, 208).

### 3.1.1.2 Calor Específico

Segundo a FIB (2007), o valor do calor específico é sensível a várias transformações em elevadas temperaturas. Estas transformações incluem a vaporização da água livre em torno de  $100^{\circ}C$ , a dissociação do hidróxido de cálcio ( $Ca(OH)_2 \rightarrow CaO + H_2O$ ) por volta de  $400^{\circ}C$  a  $500^{\circ}C$  e as transformações  $\alpha$ - $\beta$  em alguns agregados de quartzo. Essas mudanças, dependentes do tempo, são acompanhadas pela absorção de calor latente e são indicadas pelo aumento transiente do calor específico. O calor específico do concreto aumenta consideravelmente com o aumento da umidade devido ao alto valor do calor específico da água.

Segundo o Eurocode 2 (2004), o calor específico é função do teor de umidade e da temperatura do concreto, sendo independente do tipo de agregado utilizado. Esse código apresenta as seguintes expressões para a determinação do calor específico:

$$\begin{aligned}
c_{p,\theta} &= 900, & 20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 100^\circ\text{C} \\
c_{p,\theta} &= c_{p,pico}, & 100^\circ\text{C} < \theta \leq 115^\circ\text{C} \\
c_{p,\theta} &= c_{p,pico} - \left( \frac{c_{p,pico} - 1000}{200 - 115} \right) \cdot (\theta - 115), & 115^\circ\text{C} < \theta \leq 200^\circ\text{C} \\
c_{p,\theta} &= 900 + \frac{\theta}{2}, & 200^\circ\text{C} < \theta \leq 400^\circ\text{C} \\
c_{p,\theta} &= 1100, & 400^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C}
\end{aligned} \tag{equação 11}$$

Onde:

$c_{p,\theta}$  é o calor específico por unidade de massa do concreto de densidade normal, em função da temperatura  $\theta$  [J/(kg·°C)];

$c_{p,pico}$  é o valor de pico do calor específico por unidade de massa do concreto, em função da umidade relativa do concreto e da temperatura  $\theta$  [J/(kg·°C)].

Costa (2008) apresenta valores de  $c_{p,pico}$  para umidades relativas entre 0% e 10%, afirmando ainda que valores intermediários podem ser interpolados linearmente. Na equação 12, apresentam-se as expressões para o cálculo de  $c_{p,pico}$  em função da umidade relativa do concreto (interpolação linear).

$$\begin{aligned}
c_{p,pico} &= 900 + 380 \cdot U, & 0\% \leq U \leq 1,5\% \\
c_{p,pico} &= 225 + 810 \cdot U, & 1,5\% < U \leq 2\% \\
c_{p,pico} &= 1585 + 145 \cdot U, & 2\% < U \leq 3\% \\
c_{p,pico} &= -170 + 730 \cdot U, & 3\% < U \leq 4\% \\
c_{p,pico} &= 850 + 475 \cdot U, & 4\% < U \leq 10\%
\end{aligned} \tag{equação 12}$$

Onde:

$U$  é a umidade relativa do concreto de densidade normal [%].

Na Figura 10, apresenta-se a curva para o pico do calor específico do concreto em função da umidade relativa do concreto.

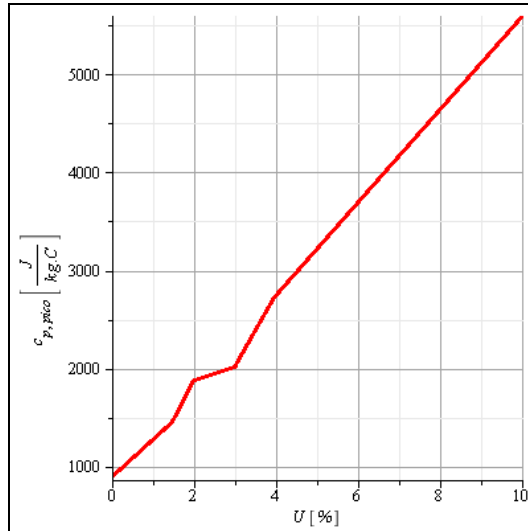


Figura 10: variação do valor de pico do calor específico em função da umidade relativa do concreto.

Na Figura 11, apresenta-se a evolução do calor específico em função da temperatura para concretos com teores de umidade entre 0% e 4%.

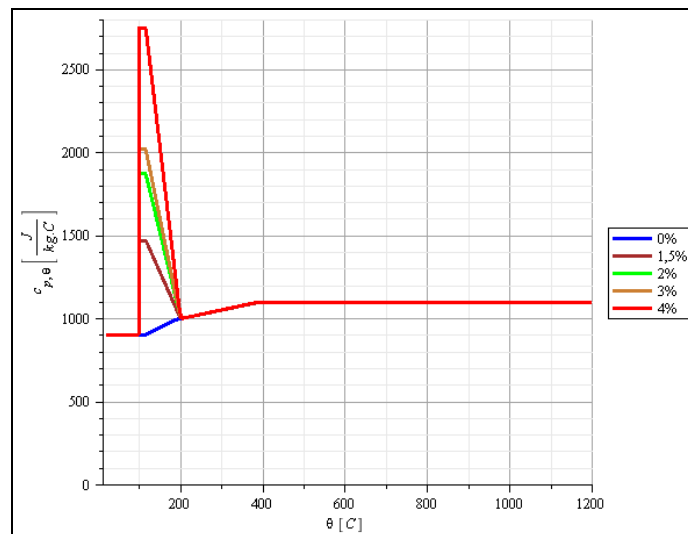


Figura 11: evolução do calor específico em função da temperatura para concretos, para diversos teores de umidade.

Segundo Costa (2008), o valor de pico do calor específico é devido à evaporação da água livre por volta dos 100°C.

### 3.1.1.3 Massa Específica

O CEB (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)) apresenta um gráfico onde é possível verificar uma redução linear da massa específica do concreto ( $0,091\text{kg/m}^3/\text{°C}$ ) a partir dos  $100\text{°C}$ . Na equação 13, apresentam-se as expressões para o cálculo da massa específica em função da temperatura.

$$\begin{aligned} \rho_{c,\theta} &= 2400, & 20\text{°C} \leq \theta \leq 100\text{°C} \\ \rho_{c,\theta} &= \frac{26500 - \theta}{11}, & 100\text{°C} < \theta \leq 1200\text{°C} \end{aligned} \quad (\text{equação 13})$$

Onde:

$\rho_{c,\theta}$  é a massa específica do concreto de densidade normal, em função da temperatura  $\theta$  [ $\text{kg/m}^3$ ].

Na Figura 12, apresenta-se a evolução da massa específica do concreto em função da temperatura.

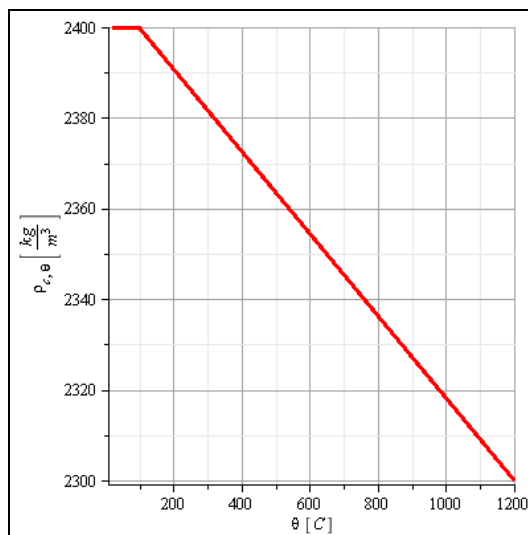


Figura 12: evolução da massa específica do concreto em função da temperatura.

### 3.1.1.4 Deformação Térmica Específica

O Eurocode 2 (2004) apresenta expressões para o cálculo da deformação térmica específica para agregados silicosos (equação 14) e para agregados calcáreos (equação 15) em função da temperatura.



$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,th} &= -1,8 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-6} \cdot \theta + 2,3 \cdot 10^{-11} \cdot \theta^3, & 20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 700^\circ\text{C} \\ \varepsilon_{\theta,th} &= 1,4 \cdot 10^{-2}, & 700^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (\text{equação 14})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,th} &= -1,2 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-6} \cdot \theta + 1,4 \cdot 10^{-11} \cdot \theta^3, & 20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 805^\circ\text{C} \\ \varepsilon_{\theta,th} &= 1,2 \cdot 10^{-2}, & 805^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (\text{equação 15})$$

Onde:

$\varepsilon_{\theta,th}$  é a deformação térmica específica do concreto, em função da temperatura  $\theta$  [adimensional].

Na Figura 13, apresentam-se as curvas de deformação térmica para concretos com agregados silicosos e calcáreos em função da temperatura.

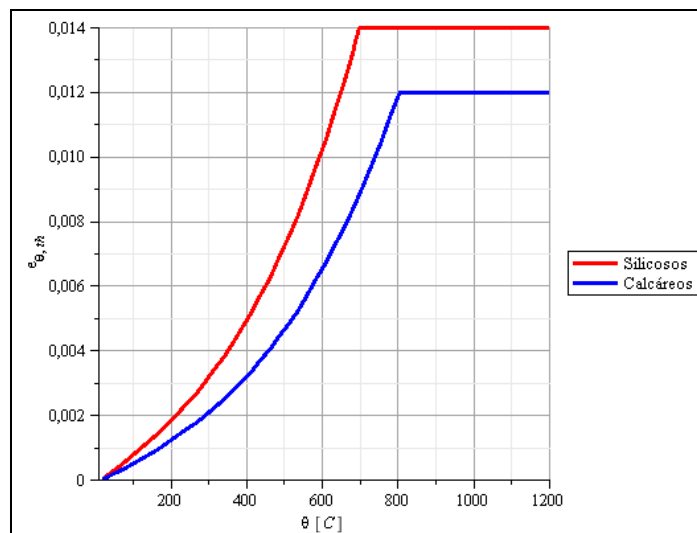


Figura 13: deformação térmica específica do concreto.

## 3.1.2 Aço

### 3.1.2.1 Condutividade Térmica

O Eurocode 4 (2005) apresenta as seguintes expressões para o cálculo da condutividade térmica do aço, independente do tipo de aço (laminado a quente ou trabalhado a frio).

$$\begin{aligned} \lambda_{a,\theta} &= 54 - 3,33 \cdot 10^{-2} \cdot \theta, & 20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 800^\circ\text{C} \\ \lambda_{a,\theta} &= 27,3, & 800^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (\text{equação 16})$$

Onde:

$\lambda_{a,\theta}$  é a condutividade térmica do aço, em função da temperatura  $\theta$  [ $\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ ].

Na Figura 14, apresenta-se a evolução da condutividade térmica do aço em função da temperatura.

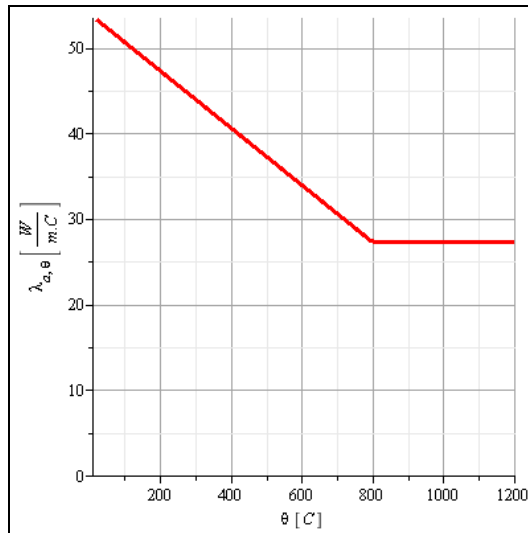


Figura 14: condutividade térmica do aço em função da temperatura.

### 3.1.2.2 Calor Específico

O Eurocode 4 (2005) apresenta uma equação para o calor específico do aço, válida para todos os tipos de aço (laminado a quente ou trabalhado a frio).

Segundo Costa (2008), à temperatura de  $735^\circ\text{C}$  o aço perde suas propriedades magnéticas no aquecimento e as readquire no resfriamento. Tal fenômeno é conhecido como “ponto Curie”. A fase de transição magnética  $\alpha \rightarrow \gamma$  produz uma descontinuidade no calor específico.

Na equação 17, apresentam-se as expressões para o calor específico do aço.

$$\begin{aligned}
 c_{a,\theta} &= 425 + 7,73 \cdot 10^{-1} \cdot \theta - 1,69 \cdot 10^{-3} \cdot \theta^2 + 2,22 \cdot 10^{-6} \cdot \theta^3, & 20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 600^\circ\text{C} \\
 c_{a,\theta} &= 666 - \frac{13002}{\theta - 738}, & 600^\circ\text{C} < \theta \leq 735^\circ\text{C} \\
 c_{a,\theta} &= 545 + \frac{17820}{\theta - 731}, & 735^\circ\text{C} < \theta \leq 900^\circ\text{C} \\
 c_{a,\theta} &= 650, & 900^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C}
 \end{aligned}
 \tag{equação 17}$$

Onde:

$c_{a,\theta}$  é o calor específico por unidade de massa do aço, em função da temperatura  $\theta$  [J/(kg·°C)].

Na Figura 15, apresenta-se a curva para o calor específico do aço em função da temperatura.

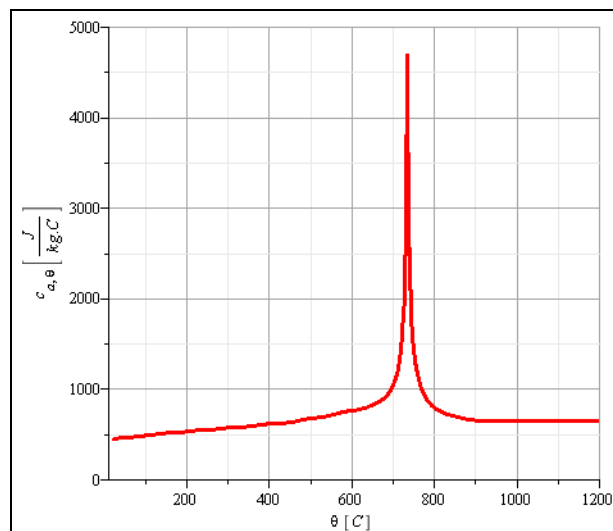


Figura 15: calor específico do aço em função da temperatura.

### 3.1.2.3 Massa Específica

O aço é estável a temperaturas elevadas, assim, a massa específica dele é considerada independente da temperatura, constante e igual a  $\rho_s=7850 \text{ kg/m}^3$ .

### 3.1.2.4 Deformação Térmica Específica

A NBR 14323 (1999), Eurocode 2 (2004) e Eurocode 4 (2005) apresentam as seguintes expressões para a deformação térmica específica do aço:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta,th} &= -2,416 \cdot 10^{-4} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \theta + 0,4 \cdot 10^{-8} \cdot \theta^2, & 20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 750^\circ\text{C} \\
 \varepsilon_{\theta,th} &= 11 \cdot 10^{-3}, & 750^\circ\text{C} < \theta \leq 860^\circ\text{C} \\
 \varepsilon_{\theta,th} &= -6,2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-5} \cdot \theta, & 860^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C}
 \end{aligned}
 \tag{equação 18}$$

Onde:

$\varepsilon_{\theta,th}$  é a deformação térmica específica do aço, em função da temperatura  $\theta$  [adimensional].

Na Figura 16, apresenta-se a evolução da deformação térmica específica do aço em função da temperatura.

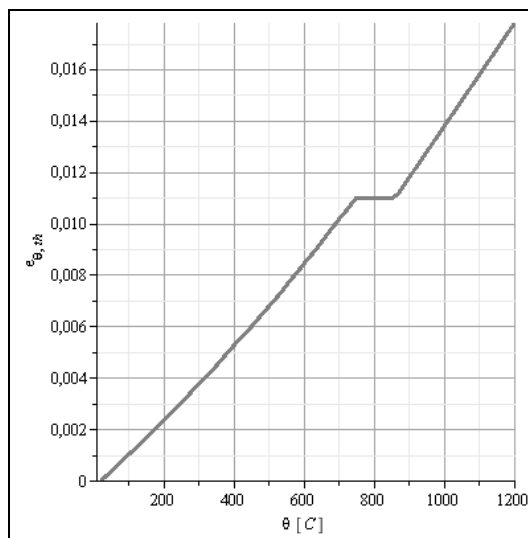


Figura 16: deformação térmica específica do aço.

Segundo Costa (2008), a deformação térmica específica do aço apresenta uma região estacionária (entre 750°C e 860°C na equação 18) correspondente ao ponto Curie.

Na Figura 17, apresenta-se a evolução das deformações térmicas específicas para o concreto e para o aço.

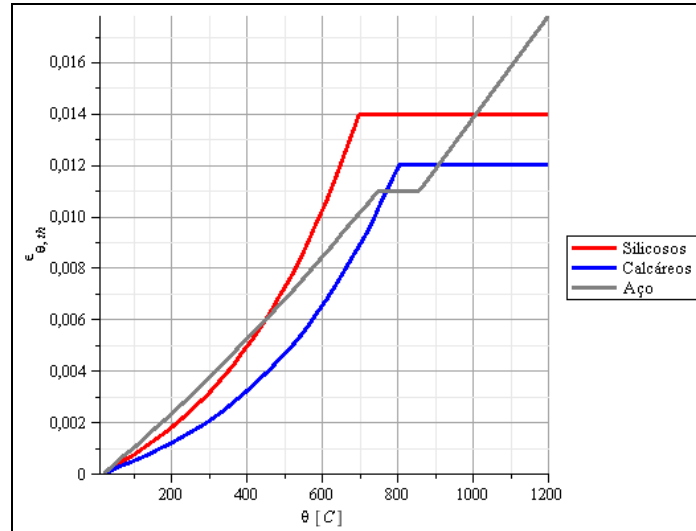


Figura 17: deformação térmica específica do concreto e do aço.

## 3.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS

### 3.2.1 Concreto

#### 3.2.1.1 Resistência à Compressão

A resistência à compressão do concreto sofre uma redução em função do aumento da temperatura. Essa redução é estimada em função de um coeficiente redutor  $\kappa_{c,\theta}$ . Através da equação 19 pode-se calcular a resistência característica à compressão do concreto em função da temperatura ( $f_{ck,\theta}$ ).

$$f_{ck,\theta} = \kappa_{c,\theta} \cdot f_{ck} \quad (\text{equação 19})$$

Onde:

$f_{ck,\theta}$  é a resistência característica à compressão do concreto em função da temperatura [MPa];

$\kappa_{c,\theta}$  é o coeficiente redutor [adimensional];

$f_{ck}$  é a resistência característica à compressão do concreto à temperatura ambiente [MPa].

Na Tabela 2, apresentam-se os valores de  $\kappa_{c,\theta}$  para várias faixas de temperatura, expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004) para concretos com agregados silicosos e calcáreos.

Tabela 2: valores para  $\kappa_{c,\theta}$  expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004).

$\theta$ [°C]	$\kappa_{c,\theta}$	
	Agregados Silicosos	Agregados Calcáreos
20	1,00	1,00
100	1,00	1,00
200	0,95	0,97
300	0,85	0,91
400	0,75	0,85
500	0,60	0,74
600	0,45	0,60
700	0,30	0,43
800	0,15	0,27
900	0,08	0,15
1000	0,04	0,06
1100	0,01	0,02
1200	0,00	0,00

Nas equações 20 e 21, apresentam-se as interpolações lineares dos valores tabelados para o coeficiente redutor  $\kappa_{c,\theta}$  de concretos com agregados silicosos e calcáreos, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \kappa_{c,\theta} &= 1,0, & 20^{\circ}C \leq \theta \leq 100^{\circ}C \\
 \kappa_{c,\theta} &= 1,05 - 0,0005 \cdot \theta, & 100^{\circ}C < \theta \leq 200^{\circ}C \\
 \kappa_{c,\theta} &= 1,15 - 0,0010 \cdot \theta, & 200^{\circ}C < \theta \leq 400^{\circ}C \\
 \kappa_{c,\theta} &= 1,35 - 0,0015 \cdot \theta, & 400^{\circ}C < \theta \leq 800^{\circ}C \\
 \kappa_{c,\theta} &= 0,71 - 0,0007 \cdot \theta, & 800^{\circ}C < \theta \leq 900^{\circ}C \\
 \kappa_{c,\theta} &= 0,44 - 0,0004 \cdot \theta, & 900^{\circ}C < \theta \leq 1000^{\circ}C \\
 \kappa_{c,\theta} &= 0,34 - 0,0003 \cdot \theta, & 1000^{\circ}C < \theta \leq 1100^{\circ}C \\
 \kappa_{c,\theta} &= 0,12 - 0,0001 \cdot \theta, & 1100^{\circ}C < \theta \leq 1200^{\circ}C
 \end{aligned}
 \tag{equação 20}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{c,\theta} &= 1,0, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 100^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 1,03 - 0,0003 \cdot \theta, & 100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 200^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 1,09 - 0,0006 \cdot \theta, & 200^{\circ}\text{C} < \theta \leq 400^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 1,29 - 0,0011 \cdot \theta, & 400^{\circ}\text{C} < \theta \leq 500^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 1,44 - 0,0014 \cdot \theta, & 500^{\circ}\text{C} < \theta \leq 600^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 1,62 - 0,0017 \cdot \theta, & 600^{\circ}\text{C} < \theta \leq 700^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 1,55 - 0,0016 \cdot \theta, & 700^{\circ}\text{C} < \theta \leq 800^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 1,23 - 0,0012 \cdot \theta, & 800^{\circ}\text{C} < \theta \leq 900^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 0,96 - 0,0009 \cdot \theta, & 900^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1000^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 0,46 - 0,0004 \cdot \theta, & 1000^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1100^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{c,\theta} &= 0,24 - 0,0002 \cdot \theta, & 1100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1200^{\circ}\text{C}
\end{aligned}
\tag{equação 21}$$

Na Figura 18, apresenta-se a evolução de  $\kappa_{c,\theta}$ , para concretos com agregados silicosos e calcáreos, em função da temperatura.

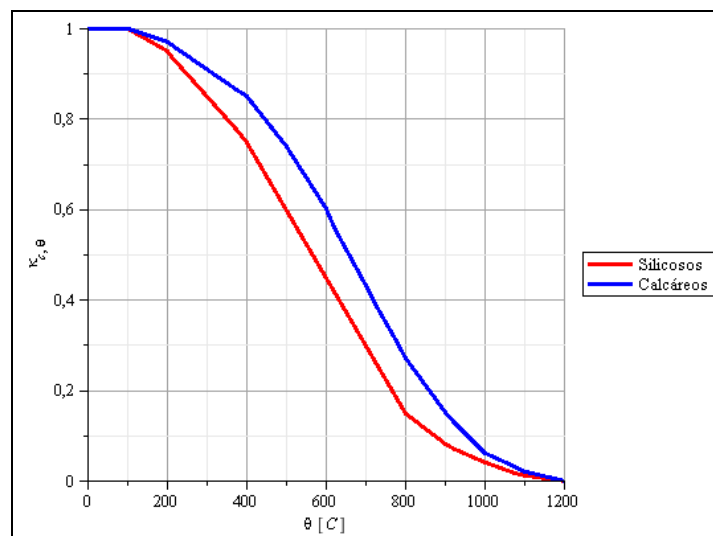


Figura 18: evolução de  $\kappa_{c,\theta}$  em função da temperatura.

Para fins de simulações computacionais mais realistas utiliza-se o valor da resistência média a compressão do concreto ( $f_{cm}$ ). Ela é estimada através equação 22 (FIB, Bulletin 55, 2010).

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \tag{equação 22}$$

Onde:

$f_{cm}$  é a resistência média à compressão do concreto [MPa];

$f_{ck}$  é a resistência característica à compressão do concreto [MPa];

$\Delta f$  é igual à 8MPa.

### 3.2.1.2 Resistência à Tração

A resistência à tração do concreto também sofre uma redução, assim como no caso da resistência à compressão, em função do aumento da temperatura. Essa redução é estimada em função de um coeficiente redutor  $\kappa_{t,\theta}$ . A equação 23 permite calcular a resistência característica à tração do concreto em função da temperatura ( $f_{ctk,\theta}$ ).

$$f_{ctk,\theta} = \kappa_{t,\theta} \cdot f_{ctk} \quad (\text{equação 23})$$

Onde:

$f_{ctk,\theta}$  é a resistência característica à tração do concreto em função da temperatura [MPa];

$\kappa_{t,\theta}$  é o coeficiente redutor [adimensional];

$f_{ctk}$  é a resistência característica à tração do concreto à temperatura ambiente [MPa].

O Eurocode 2 (2004) apresenta as seguintes expressões para o coeficiente redutor do concreto sujeito à tração, em função da temperatura (independente do tipo de agregado constituinte):

$$\begin{aligned} \kappa_{t,\theta} &= 1,0, & 20^\circ C \leq \theta \leq 100^\circ C \\ \kappa_{t,\theta} &= 1 - \frac{(\theta - 100)}{500} & 100^\circ C \leq \theta \leq 600^\circ C \\ \kappa_{t,\theta} &= 0, & 600^\circ C \leq \theta \leq 1200^\circ C \end{aligned} \quad (\text{equação 24})$$

Na Figura 19, apresenta-se a evolução de  $\kappa_{t,\theta}$ , em função da temperatura.



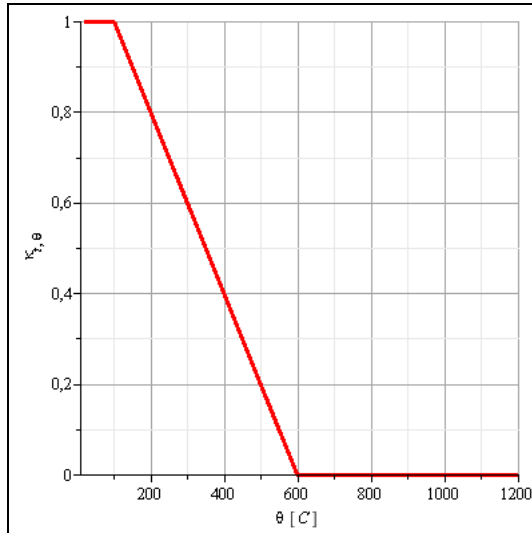


Figura 19: evolução de  $\kappa_{t,\theta}$  em função da temperatura.

Da mesma forma que para a resistência à compressão, utiliza-se, para fins de simulações computacionais mais realistas, o valor da resistência média à tração do concreto ( $f_{ctm}$ ). Ela é estimada através das seguintes expressões (FIB, Bulletin 55, 2010):

$$\begin{aligned} f_{ctm} &= 0,3 \cdot (f_{ck})^{\frac{2}{3}}, & \text{resistência} \leq C50 \\ f_{ctm} &= 2,12 \cdot \ln\left(1 + \frac{(f_{ck} + \Delta f)}{10}\right) & \text{resistência} > C50 \end{aligned} \quad (\text{equação 25})$$

Onde:

$f_{ctm}$  é a resistência média à tração do concreto [MPa];

$f_{ck}$  é a resistência característica à compressão do concreto [MPa];

$\Delta f$  é igual à 8MPa.

Na Figura 20, apresentam-se as curvas da resistência média à tração do concreto.

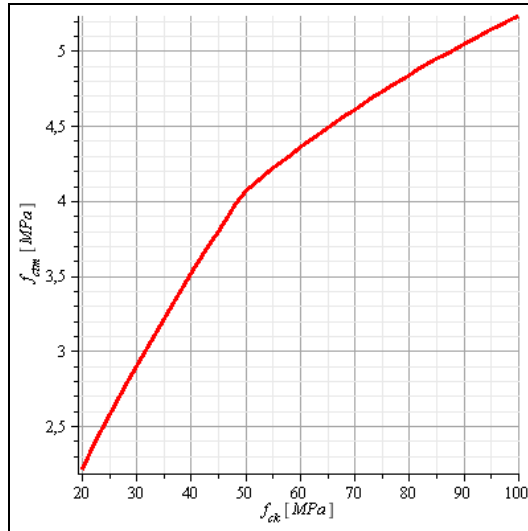


Figura 20: curvas da resistência média à tração do concreto.

### 3.2.1.3 Módulo de Elasticidade

O módulo de elasticidade do concreto, sujeito a altas temperaturas, pode ser obtido através do fator de redução  $\kappa_{cE,\theta}$ .

$$E_{c,\theta} = \kappa_{cE,\theta} \cdot E_c \quad (\text{equação 26})$$

Onde:

$E_{c,\theta}$  é módulo de elasticidade do concreto em função da temperatura [MPa];

$\kappa_{cE,\theta}$  é o coeficiente redutor [adimensional];

$E_c$  é módulo de elasticidade do concreto à temperatura ambiente [MPa].

Costa (2008) cita o método das faixas, exposto no Eurocode 2 (2004), para o cálculo do coeficiente redutor  $\kappa_{cE,\theta}$ .

$$\kappa_{cE,\theta} = \kappa_{c,\theta}^2 \quad (\text{equação 27})$$

Onde:

$\kappa_{c,\theta}$  é o coeficiente redutor da resistência característica à compressão do concreto (equações 20 e 21) [adimensional].

Na Figura 21, apresenta-se a evolução de  $\kappa_{cE,\theta}$  em função da temperatura.

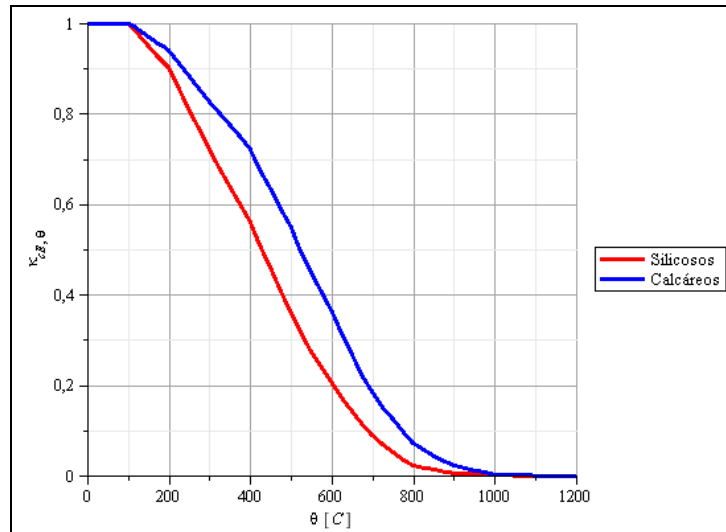


Figura 21: evolução de  $\kappa_{cE,\theta}$  em função da temperatura.

O módulo de elasticidade do concreto à temperatura ambiente é obtido através da equação apresentada pelo FIB (Bulletin 55, 2010):

$$E_{c,i} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_E \cdot \left( \frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{equação 28})$$

Onde:

$E_{c,i}$  é o módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias [MPa];

$\alpha_E$  é um coeficiente que tem o valor 1,0 para concretos com agregados silicosos e 0,9 para concretos com agregados calcários [adimensional];

$f_{ck}$  é a resistência característica à compressão do concreto [MPa].

### 3.2.1.4 Relação Tensão-Deformação

Partindo da relação proposta por FIB (Bulletin 55, 2010), tem-se:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = - \frac{\left( \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \right) \cdot \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \right)}{1 + \left( \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \right) - 2 \right) \cdot \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)}, \quad |\varepsilon_c| \leq |\varepsilon_{c,lim}| \quad (\text{equação 29})$$

Onde:

$\sigma_c$  é a tensão uniaxial de compressão do concreto [MPa];

$f_{cm}$  é a resistência média à compressão do concreto [MPa];

$\varepsilon_c$  é a deformação total do concreto [adimensional];

$\varepsilon_{c1}$  é a deformação total no pico de tensão de compressão [adimensional];

$\varepsilon_{c,lim}$  é a deformação limite do concreto [adimensional];

$E_{c1}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto (que da origem ao pico de tensão de compressão) [MPa];

$E_{ci}$  é o módulo de elasticidade tangente do concreto [MPa].

Adequando-se a equação 29 às altas temperaturas, tem-se:

$$\frac{\sigma_{c,\theta}}{f_{cm}} = - \frac{\left( \left( \frac{E_{ci,\theta}}{E_{c1,\theta}} \right) \cdot \left( \frac{\varepsilon_{c,\theta}}{\varepsilon_{c1,\theta}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_{c,\theta}}{\varepsilon_{c1,\theta}} \right)^2 \right)}{1 + \left( \left( \frac{E_{ci,\theta}}{E_{c1,\theta}} \right) - 2 \right) \cdot \left( \frac{\varepsilon_{c,\theta}}{\varepsilon_{c1,\theta}} \right)}, \quad |\varepsilon_{c,\theta}| \leq |\varepsilon_{c,lim,\theta}| \quad (\text{equação 30})$$

Onde:

$\sigma_{c,\theta}$  é a tensão uniaxial de compressão do concreto à temperatura elevada [MPa];

$\varepsilon_{c,\theta}$  é a deformação total do concreto à temperatura elevada [adimensional];

$\varepsilon_{c1,\theta}$  é a deformação total no pico de tensão de compressão à temperatura elevada [adimensional];

$\varepsilon_{c,lim,\theta}$  é a deformação limite do concreto à temperatura elevada [adimensional];

$E_{c1,\theta}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto à temperatura elevada [MPa];

$E_{ci,\theta}$  é o módulo de elasticidade tangente do concreto à temperatura elevada [MPa].

O valor de  $f_{cm,\theta}$  pode ser calculado através das equações 19, 20, 21 e 22. O valor de  $E_{ci,\theta}$  pode ser calculado através da equação 26 e 27.

Já  $\varepsilon_{c1,\theta}$  e  $\varepsilon_{c,lim,\theta}$  são valores tabelados expostos pelo Eurocode 2 (2004) e apresentados na Tabela 3.

Tabela 3: valores para  $\varepsilon_{c1,\theta}$  e  $\varepsilon_{c,lim,\theta}$  expostos pelo Eurocode 2 (2004).

$\theta$ [°C]	$\varepsilon_{c1,\theta}$	$\varepsilon_{c,lim,\theta}$
20	0,25	2,00
100	0,35	2,25
200	0,45	2,50
300	0,60	2,75
400	0,75	3,00
500	0,95	3,25
600	1,25	3,50
700	1,40	3,75
800	1,45	4,00
900	1,50	4,25
1000	1,50	4,50
1100	1,50	4,75
1200	1,50	5,00

Nas equações 31 e 32, apresentam-se as interpolações lineares dos valores tabelados para  $\varepsilon_{c1,\theta}$  e  $\varepsilon_{c,lim,\theta}$ , respectivamente.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{c1,\theta} &= 0,00225 + 0,0000125 \cdot \theta, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 100^{\circ}\text{C} \\
\varepsilon_{c1,\theta} &= 0,00250 + 0,0000100 \cdot \theta, & 100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 200^{\circ}\text{C} \\
\varepsilon_{c1,\theta} &= 0,00150 + 0,0000150 \cdot \theta, & 200^{\circ}\text{C} < \theta \leq 400^{\circ}\text{C} \\
\varepsilon_{c1,\theta} &= -0,0005 + 0,0000200 \cdot \theta, & 400^{\circ}\text{C} < \theta \leq 500^{\circ}\text{C} \\
\varepsilon_{c1,\theta} &= -0,0055 + 0,0000300 \cdot \theta, & 500^{\circ}\text{C} < \theta \leq 600^{\circ}\text{C} \\
\varepsilon_{c1,\theta} &= 0,00350 + 0,0000150 \cdot \theta, & 600^{\circ}\text{C} < \theta \leq 700^{\circ}\text{C} \\
\varepsilon_{c1,\theta} &= 0,01050 + 0,0000050 \cdot \theta, & 700^{\circ}\text{C} < \theta \leq 900^{\circ}\text{C} \\
\varepsilon_{c1,\theta} &= 0,015, & 900^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1200^{\circ}\text{C}
\end{aligned}
\tag{equação 31}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{c,\text{lim},\theta} &= 0,019375 + 0,00003125 \cdot \theta, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 100^{\circ}\text{C} \\
\varepsilon_{c,\text{lim},\theta} &= 0,020000 + 0,00002500 \cdot \theta, & 100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1200^{\circ}\text{C}
\end{aligned}
\tag{equação 32}$$

Na Figura 22, apresenta-se a evolução de  $\varepsilon_{c1,\theta}$  e  $\varepsilon_{c,\text{lim},\theta}$  em função da temperatura.

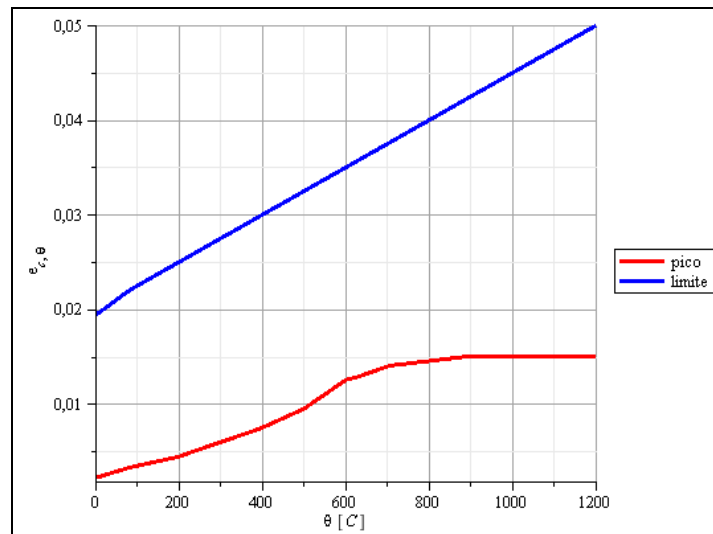


Figura 22: evolução de  $\varepsilon_{c1,\theta}$  e  $\varepsilon_{c,\text{lim},\theta}$  em função da temperatura.

Na Figura 23, apresenta-se a evolução da tensão uniaxial de compressão do concreto à temperatura elevada para concretos com agregados silicosos.

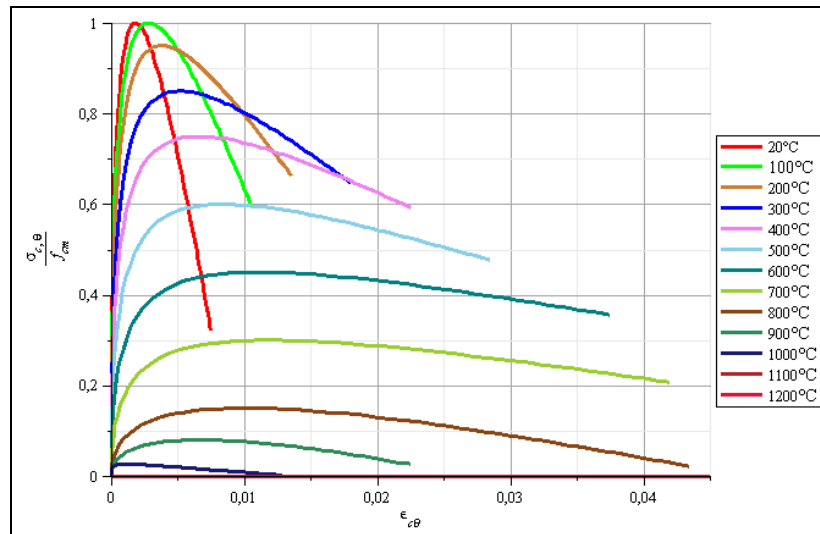


Figura 23: tensão uniaxial de compressão do concreto à temperatura elevada para concretos com agregados silicosos.

## 3.2.2 Aço

### 3.2.2.1 Resistência Característica

A resistência à tração (e compressão) do aço, assim como a resistência do concreto, sofre uma redução em função do aumento da temperatura. Essa redução é estimada em função de um coeficiente redutor  $\kappa_{s,\theta}$ . Na equação 33, apresenta-se o cálculo da resistência característica do aço em função da temperatura ( $f_{yk,\theta}$ ).

$$f_{yk,\theta} = \kappa_{s,\theta} \cdot f_{yk} \quad (\text{equação 33})$$

Onde:

$f_{yk,\theta}$  é a resistência característica do aço em função da temperatura [MPa];

$\kappa_{s,\theta}$  é o coeficiente redutor [adimensional];

$f_{yk}$  é a resistência característica do aço à temperatura ambiente [MPa].

Na Tabela 4, apresentam-se os valores de  $\kappa_{s,\theta}$  para várias faixas de temperatura, expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004) para aços laminados a quente e trabalhados a frio.

Tabela 4: valores para  $\kappa_{s,\theta}$  expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004).

$\theta$ [°C]	$\kappa_{s,\theta}$	
	Laminado a quente	Trabalhado a frio
20	1,00	1,00
100	1,00	1,00
200	1,00	1,00
300	1,00	1,00
400	1,00	0,94
500	0,78	0,67
600	0,47	0,40
700	0,23	0,12
800	0,11	0,11
900	0,06	0,08
1000	0,04	0,05
1100	0,02	0,03
1200	0,00	0,00

Originalmente, o Eurocode 2 (2004) refere-se aos valores da Tabela 4 como valores para o esforço de tração na armadura. Ele fornece outros valores de  $\kappa_{s,\theta}$  para o esforço de compressão. Porém, Costa (2008) afirma que os valores adotados na redução da resistência do aço, quando sujeito à compressão, constituem um artifício para evitar ruptura frágil do concreto. Assim, adotaram-se os valores da Tabela 4 para esforços de tração e compressão.

Nas equações 34 e 35, apresentam-se as interpolações lineares dos valores tabelados de  $\kappa_{s,\theta}$  para aços laminados a quente e trabalhados a frio, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \kappa_{s,\theta} &= 1,0, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 400^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{s,\theta} &= 1,88 - 0,0022 \cdot \theta, & 400^{\circ}\text{C} < \theta \leq 500^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{s,\theta} &= 2,33 - 0,0031 \cdot \theta, & 500^{\circ}\text{C} < \theta \leq 600^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{s,\theta} &= 1,91 - 0,0024 \cdot \theta, & 600^{\circ}\text{C} < \theta \leq 700^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{s,\theta} &= 1,07 - 0,0012 \cdot \theta, & 700^{\circ}\text{C} < \theta \leq 800^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{s,\theta} &= 0,51 - 0,0005 \cdot \theta, & 800^{\circ}\text{C} < \theta \leq 900^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{s,\theta} &= 0,24 - 0,0002 \cdot \theta, & 900^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1200^{\circ}\text{C}
 \end{aligned}
 \tag{equação 34}$$



$$\begin{aligned}
\kappa_{s,\theta} &= 1,0, & 20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 300^\circ\text{C} \\
\kappa_{s,\theta} &= 1,18 - 0,0006 \cdot \theta, & 300^\circ\text{C} < \theta \leq 400^\circ\text{C} \\
\kappa_{s,\theta} &= 2,02 - 0,0027 \cdot \theta, & 400^\circ\text{C} < \theta \leq 600^\circ\text{C} \\
\kappa_{s,\theta} &= 2,08 - 0,0028 \cdot \theta, & 600^\circ\text{C} < \theta \leq 700^\circ\text{C} \\
\kappa_{s,\theta} &= 0,19 - 0,0001 \cdot \theta, & 700^\circ\text{C} < \theta \leq 800^\circ\text{C} \\
\kappa_{s,\theta} &= 0,35 - 0,0003 \cdot \theta, & 800^\circ\text{C} < \theta \leq 1000^\circ\text{C} \\
\kappa_{s,\theta} &= 0,25 - 0,0002 \cdot \theta, & 1000^\circ\text{C} < \theta \leq 1100^\circ\text{C} \\
\kappa_{s,\theta} &= 0,36 - 0,0003 \cdot \theta, & 1100^\circ\text{C} < \theta \leq 1200^\circ\text{C}
\end{aligned}
\tag{equação 35}$$

Na Figura 24, apresentam-se as evoluções de  $\kappa_{s,\theta}$ , para aços laminados a quente e trabalhados a frio, em função da temperatura.

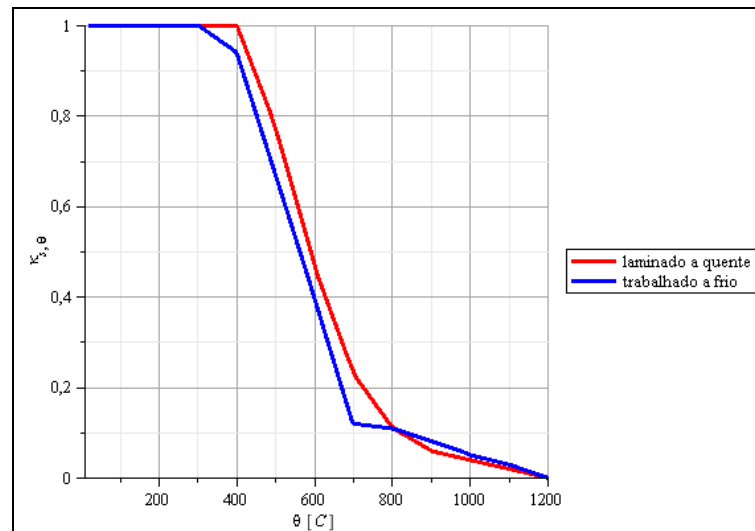


Figura 24: evoluções de  $\kappa_{s,\theta}$  em função da temperatura.

### 3.2.2.2 Módulo de Elasticidade

O módulo de elasticidade do aço também sofre uma redução em função do aumento da temperatura. Essa redução é estimada em função de um coeficiente reductor  $\kappa_{sE,\theta}$ . Na equação 36 apresenta-se o cálculo do módulo de elasticidade do aço em função da temperatura ( $E_{s,\theta}$ ).

$$E_{s,\theta} = \kappa_{sE,\theta} \cdot E_s \tag{equação 36}$$

Onde:

$E_{s,\theta}$  é módulo de elasticidade do aço em função da temperatura [MPa];

$\kappa_{sE,\theta}$  é o coeficiente redutor [adimensional];

$E_s$  é o módulo de elasticidade do aço à temperatura ambiente [MPa].

Na Tabela 5, apresentam-se os valores de  $\kappa_{sE,\theta}$  para várias faixas de temperatura, expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004) para aços laminados a quente e trabalhados a frio.

Tabela 5: valores para  $\kappa_{sE,\theta}$  expostos pelo Eurocode 2 (2004) e a NBR 15200 (2004).

$\theta$ [°C]	$\kappa_{sE,\theta}$	
	Laminado a quente	Trabalhado a frio
20	1,00	1,00
100	1,00	1,00
200	0,90	0,87
300	0,80	0,72
400	0,70	0,56
500	0,60	0,40
600	0,31	0,24
700	0,13	0,08
800	0,09	0,06
900	0,07	0,05
1000	0,04	0,03
1100	0,02	0,02
1200	0,00	0,00

Nas equações 37 e 38, apresentam-se as interpolações lineares dos valores tabelados de  $\kappa_{sE,\theta}$  para aços laminados a quente e trabalhados a frio, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\kappa_{sE,\theta} &= 1,0, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 100^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 1,10 - 0,0010 \cdot \theta, & 100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 500^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 2,05 - 0,0029 \cdot \theta, & 500^{\circ}\text{C} < \theta \leq 600^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 1,39 - 0,0018 \cdot \theta, & 600^{\circ}\text{C} < \theta \leq 700^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,41 - 0,0004 \cdot \theta, & 700^{\circ}\text{C} < \theta \leq 800^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,25 - 0,0002 \cdot \theta, & 800^{\circ}\text{C} < \theta \leq 900^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,34 - 0,0003 \cdot \theta, & 900^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1000^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,24 - 0,0002 \cdot \theta, & 1000^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1200^{\circ}\text{C}
\end{aligned}
\tag{equação 37}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{sE,\theta} &= 1,0, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 100^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 1,13 - 0,0013 \cdot \theta, & 100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 200^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 1,17 - 0,0015 \cdot \theta, & 200^{\circ}\text{C} < \theta \leq 300^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 1,20 - 0,0016 \cdot \theta, & 300^{\circ}\text{C} < \theta \leq 700^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,22 - 0,0002 \cdot \theta, & 700^{\circ}\text{C} < \theta \leq 800^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,14 - 0,0001 \cdot \theta, & 800^{\circ}\text{C} < \theta \leq 900^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,23 - 0,0002 \cdot \theta, & 900^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1000^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,13 - 0,0001 \cdot \theta, & 1000^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1100^{\circ}\text{C} \\
\kappa_{sE,\theta} &= 0,24 - 0,0002 \cdot \theta, & 1100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1200^{\circ}\text{C}
\end{aligned}
\tag{equação 38}$$

Na Figura 25, apresentam-se as evoluções de  $\kappa_{sE,\theta}$ , para aços laminados a quente e trabalhados a frio, em função da temperatura.

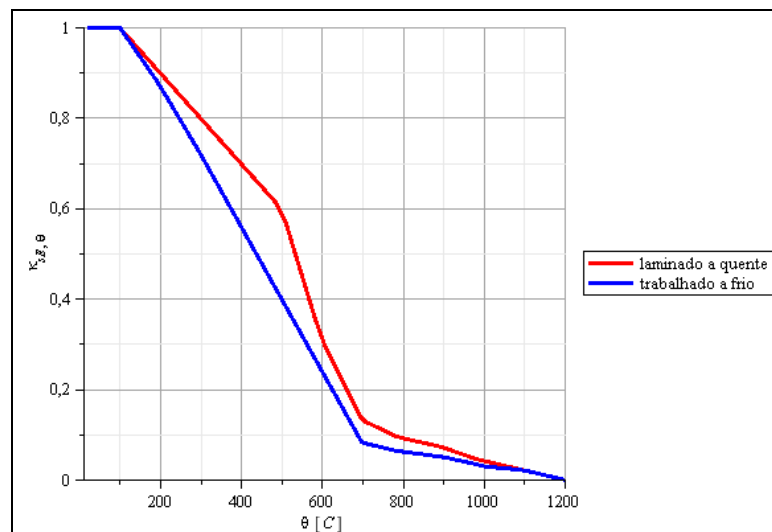


Figura 25: evoluções de  $\kappa_{sE,\theta}$  em função da temperatura.

### 3.2.2.3 Limite de Elasticidade

A deformação específica do aço correspondente ao limite de elasticidade ( $\varepsilon_{sp}$ ) também sofre uma redução em função do aumento da temperatura. Essa redução é estimada em função de um coeficiente redutor  $\kappa_{sp,\theta}$ . Na equação 39, apresenta-se o cálculo da deformação limite de elasticidade do aço em função da temperatura ( $\varepsilon_{sp,\theta}$ ).

$$\varepsilon_{sp,\theta} = \kappa_{sp,\theta} \cdot \varepsilon_{sp} \quad (\text{equação 39})$$

Onde:

$\varepsilon_{sp,\theta}$  é a deformação limite de elasticidade do aço em função da temperatura [adimensional];

$\kappa_{sp,\theta}$  é o coeficiente redutor [adimensional];

$\varepsilon_{sp}$  é a deformação limite de elasticidade do aço à temperatura ambiente [adimensional].

Na Tabela 6, apresentam-se os valores de  $\kappa_{sp,\theta}$  para várias faixas de temperatura, expostos pelo Eurocode 2 (2004) para aços laminados a quente e trabalhados a frio.

Tabela 6: valores para  $\kappa_{sp,\theta}$  expostos pelo Eurocode 2 (2004).

$\theta$ [°C]	$\kappa_{sp,\theta}$	
	Laminado a quente	Trabalhado a frio
20	1,00	1,00
100	1,00	0,96
200	0,81	0,90
300	0,61	0,81
400	0,42	0,63
500	0,36	0,44
600	0,18	0,26
700	0,07	0,08
800	0,05	0,06
900	0,04	0,05
1000	0,02	0,04
1100	0,01	0,02
1200	0,00	0,00

Nas equações 40 e 41 apresentam-se as interpolações lineares dos valores tabelados de  $\kappa_{sp,\theta}$  para aços laminados a quente e trabalhados a frio, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,0, & 20^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 100^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,19 - 0,0019 \cdot \theta, & 100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 200^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,21 - 0,0020 \cdot \theta, & 200^{\circ}\text{C} < \theta \leq 300^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,18 - 0,0019 \cdot \theta, & 300^{\circ}\text{C} < \theta \leq 400^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,66 - 0,0006 \cdot \theta, & 400^{\circ}\text{C} < \theta \leq 500^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,26 - 0,0018 \cdot \theta, & 500^{\circ}\text{C} < \theta \leq 600^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,84 - 0,0011 \cdot \theta, & 600^{\circ}\text{C} < \theta \leq 700^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,21 - 0,0002 \cdot \theta, & 700^{\circ}\text{C} < \theta \leq 800^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,13 - 0,0001 \cdot \theta, & 800^{\circ}\text{C} < \theta \leq 900^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,22 - 0,0002 \cdot \theta, & 900^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1000^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,12 - 0,0001 \cdot \theta, & 1000^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1200^{\circ}\text{C}
 \end{aligned}
 \tag{equação 40}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,01 - 0,0005 \cdot \theta, & 20^{\circ}\text{C} < \theta \leq 100^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,02 - 0,0006 \cdot \theta, & 100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 200^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,08 - 0,0009 \cdot \theta, & 200^{\circ}\text{C} < \theta \leq 300^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,35 - 0,0018 \cdot \theta, & 300^{\circ}\text{C} < \theta \leq 400^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,39 - 0,0019 \cdot \theta, & 400^{\circ}\text{C} < \theta \leq 500^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 1,34 - 0,0018 \cdot \theta, & 500^{\circ}\text{C} < \theta \leq 700^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,22 - 0,0002 \cdot \theta, & 700^{\circ}\text{C} < \theta \leq 800^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,14 - 0,0001 \cdot \theta, & 800^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1100^{\circ}\text{C} \\
 \kappa_{sp,\theta} &= 0,24 - 0,0002 \cdot \theta, & 1100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 1200^{\circ}\text{C}
 \end{aligned}
 \tag{equação 41}$$

Na Figura 26, apresentam-se as evoluções de  $\kappa_{sp,\theta}$ , para aços laminados a quente e trabalhados a frio, em função da temperatura.

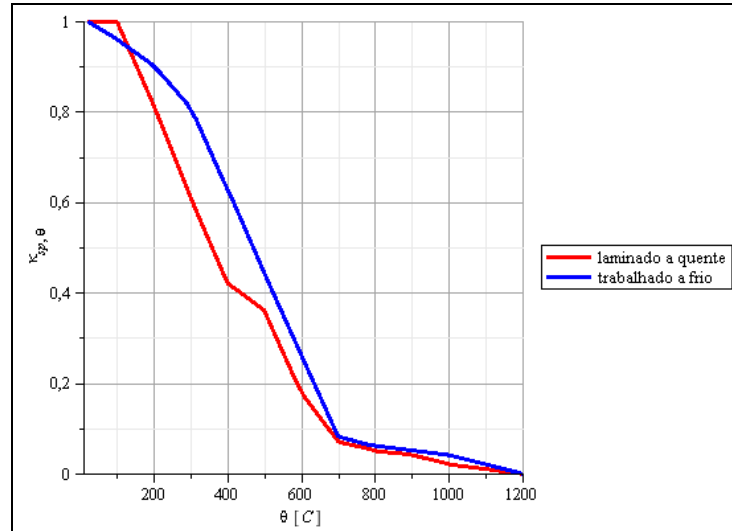


Figura 26: evoluções de  $\kappa_{sp,\theta}$  em função da temperatura.

### 3.2.2.4 Relação Tensão-Deformação

O aço possui um comportamento elastoplástico à temperatura ambiente, sendo representado por um diagrama tensão-deformação bilinear. Quando sujeito a altas temperaturas, o diagrama bilinear não representa mais o comportamento real do aço, pois acima de 100°C a região elastoplástica que sucede o limite elástico é muito extensa (ANDERBERG, 1988; COOKE, 1998; TWILT, 1988; GILLIE, 2000 apud COSTA, 2008).

O Eurocode 2 (2004) apresenta expressões para a relação tensão-deformação do aço sob altas temperaturas. As expressões são dadas na equação 42.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{s,\theta} &= \varepsilon_{s,\theta} \cdot E_{s,\theta}, & 0 \leq \varepsilon_{s,\theta} \leq \varepsilon_{sp,\theta} \\
 \sigma_{s,\theta} &= f_{sp,\theta} - c + \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - (\varepsilon_{sy,\theta} - \varepsilon_{s,\theta})^2}, & \varepsilon_{sp,\theta} \leq \varepsilon_{s,\theta} \leq \varepsilon_{sy,\theta} \\
 \sigma_{s,\theta} &= f_{sy,\theta}, & \varepsilon_{sy,\theta} \leq \varepsilon_{s,\theta} \leq \varepsilon_{st,\theta} \\
 \sigma_{s,\theta} &= f_{sy,\theta} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_{s,\theta} - \varepsilon_{st,\theta}}{\varepsilon_{su,\theta} - \varepsilon_{st,\theta}} \right) \right], & \varepsilon_{st,\theta} \leq \varepsilon_{s,\theta} \leq \varepsilon_{su,\theta} \\
 \sigma_{s,\theta} &= 0, & \varepsilon_{s,\theta} \geq \varepsilon_{su,\theta}
 \end{aligned} \tag{equação 42}$$

Na Figura 27, apresenta-se a relação tensão-deformação para aços laminados a quente com ductilidade normal.

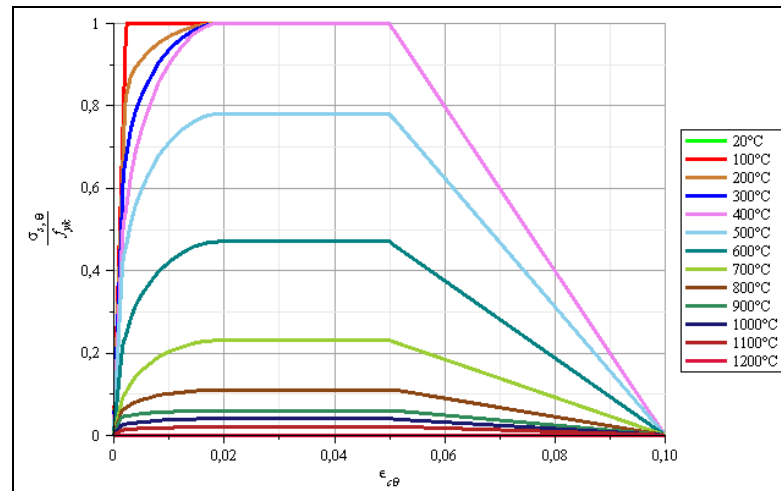


Figura 27: relação tensão-deformação para aço laminado a quente com ductilidade normal.

## 4 ABORDAGEM NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA TÉRMICO

Em situações reais, uma solução analítica fechada do problema térmico é praticamente impossível de ser obtida devido à complexidade das geometrias e das condições de contorno das estruturas em análise. O método dos elementos finitos possibilita a solução das equações que regem o fenômeno. Essas equações podem ser ou diferenciais (forma forte) ou integrais derivadas de algum princípio variacional (forma fraca). Essa distinção entre forma forte e fraca serve para ressaltar que a forma forte fornece uma solução contínua do fenômeno enquanto na forma fraca a solução é discreta (ASSAN, 2003).

A seguir será apresentado o equacionamento do problema.

### 4.1 EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O FENÔMENO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Considere-se o caso mais geral, onde a transferência de calor ocorre em um meio tridimensional, sob condições estacionárias do campo de temperaturas, conforme a Figura 28.

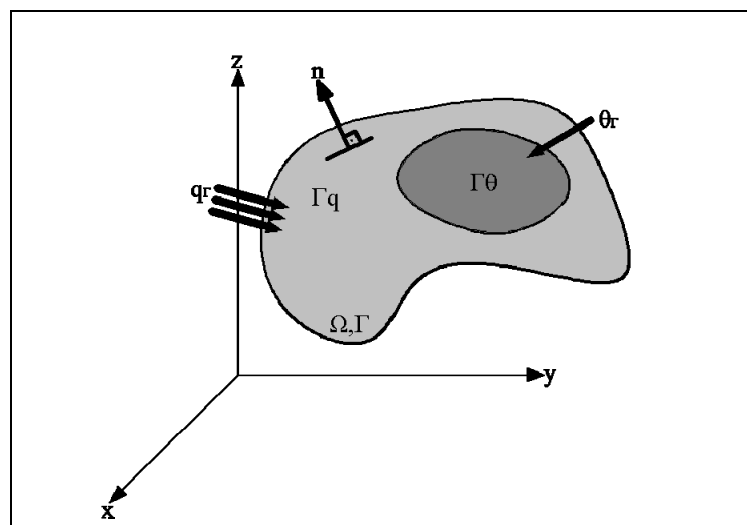


Figura 28: condições de contorno superficiais.



Onde:

$\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície que recebe o fluxo de calor;

$\Gamma\theta$  é a área superficial sujeita ao campo de temperaturas prescrito [ $\text{m}^2$ ];

$\theta_\Gamma$  é o campo de temperatura prescrito atuante sobre a área  $\Gamma\theta$  [K];

$\Gamma q$  é a área superficial sujeita ao fluxo de calor prescrito [ $\text{m}^2$ ];

$q_\Gamma$  é o fluxo de temperatura prescrito atuante sobre a área  $\Gamma q$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].

Admitindo que o material obedeça à lei de Fourier para transferência de calor por condução, tem-se (BATHE, 1996):

$$q_{cond,x} = -\lambda_x \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial x}; \quad q_{cond,y} = -\lambda_y \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial y}; \quad q_{cond,z} = -\lambda_z \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial z} \quad (\text{equação 43})$$

Onde:

$x, y$  ou  $z$  são as dimensões lineares [m];

$q_{cond,xyz}$  é o fluxo de calor por condução por metro quadrado nas direções  $x, y$  ou  $z$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ];

$\lambda_{xyz}$  é a condutividade térmica nas direções  $x, y$  ou  $z$  [ $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ];

$\theta(x,y,z)$  é o campo de temperaturas [K].

Equacionando o equilíbrio térmico no interior do corpo, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial z} \right) + H = 0 \quad (\text{equação 44})$$

Ou de forma mais simplificada:

$$\operatorname{div}(\lambda \cdot \nabla \theta(x, y, z)) + H = 0 \quad (\text{equação 45})$$

Onde:

$H$  é a taxa volumétrica de geração de calor interno [ $\text{W}/\text{m}^3$ ].

Na superfície do corpo, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\theta(x, y, z)|_{\Gamma_\theta} = \theta_\Gamma \quad (\text{equação 46})$$

$$\lambda_n \cdot \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_q} = q_\Gamma \quad (\text{equação 47})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\theta \cup \Gamma_q &= \Gamma \\ \Gamma_\theta \cap \Gamma_q &= 0 \end{aligned} \quad (\text{equação 48})$$

Onde:

$n$  é o eixo coordenado na direção do vetor unitário normal  $\mathbf{n}$ .

Bathe (1996) afirma que algumas hipóteses devem ser admitidas para que as equações 44, 45, 46 e 47 sejam utilizadas. A primeira hipótese é que as partículas do corpo estão em repouso. Portanto, consideram-se as expressões descritas somente para condução de calor em sólidos. Se a transferência de calor a ser analisada é em um fluido em movimento, deve-se acrescentar, na equação 45 (e 44), um termo que permita a transferência de calor por convecção através do meio.

A segunda hipótese é que a análise de transferência de calor pode ser desacoplada da análise de tensões. Essa hipótese é válida para muitos problemas de engenharia, porém ela não é válida quando as deformações possam gerar calor e mudanças no campo de temperaturas.

A terceira hipótese a ser considerada é de que não há mudanças de fase nem efeitos de calor latente na análise térmica.

Para o caso transiente, o efeito de armazenamento de calor (capacitância térmica do material) deve ser incluído na equação de equilíbrio térmico no interior do corpo (da mesma forma que os efeitos inerciais na análise de tensões). Para tal efeito, a equação 45 assume a forma:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial t} = \text{div}(\lambda \cdot \nabla \theta(x, y, z)) + H \quad (\text{equação 49})$$

Onde:

$\rho$  é a densidade do material [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ];

$c_p$  é o calor específico do material [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ];

$t$  é o tempo [s]

$\text{div}$  é a divergência do campo;

$\nabla$  é o gradiente do campo.

## 4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A equação de equilíbrio térmico no interior do corpo (caso geral, equação 49) é uma equação diferencial de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais e de primeira ordem em relação ao tempo. Assim, duas condições de contorno devem ser fornecidas em relação às coordenadas espaciais. Da mesma forma, uma condição de contorno deve ser fornecida em relação ao tempo (INCROPERA, 2001).

Existem cinco tipos de condições de contorno na análise de transferência de calor:

- a) **condições de temperatura:** a temperatura pode ser prescrita em pontos ou superfícies do corpo, indicadas por  $\Gamma_\theta$  na equação 46. Normalmente esse tipo de condição de contorno é referido como **condição de Dirichlet**;

- b) **condições de fluxo de calor**: o fluxo de calor pode ser prescrito em pontos ou superfícies do corpo. Esse tipo de condição foi exposta na equação 47, e normalmente é referido como **condição de Neumann**;
- c) **condições de convecção**: quando há a presença do fenômeno de convecção, a equação 2 é somada ao fluxo de calor na equação 47. Esse tipo de condição normalmente é referido como **condição de Robin**;
- d) **condições de radiação**: quando há a presença do fenômeno de radiação, a equação 7 é somada ao fluxo de calor na equação 47;
- e) **condição inicial de temperatura**: para o caso transiente, o campo de temperaturas deve ser fornecido em algum instante de tempo.

### 4.3 PRINCÍPIO VARIACIONAL

O funcional que expressa a energia potencial no caso térmico tem a seguinte forma para o caso estacionário (BATHE, 1996):

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \left( \lambda_x \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 - H \cdot \theta \right) d\Omega \\ - \int_{\Gamma_q} (\theta \cdot q_{\Gamma}) d\Gamma - \sum_i (\theta^i \cdot q^i) \end{aligned} \quad \text{(equação 50)}$$

Onde:

$\theta$  é o campo de temperaturas [K];

$q^i$  são fluxos de calor pontuais [W/m<sup>2</sup>].

Minimizando esse funcional, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\theta \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) - H \right) d\Omega \\ - \int_{\Gamma_q} (\delta\theta \cdot q_{\Gamma}) d\Gamma - \sum_i (\delta\theta^i \cdot q^i) = 0 \end{aligned} \quad \text{(equação 51)}$$

Se, na equação 51, se tomar  $\delta\theta \equiv \bar{\theta}$ , onde a barra sobre  $\theta$  significa uma distribuição virtual de temperaturas, ter-se-á, então, o princípio das temperaturas virtuais. Se, na equação 51, se fizer a integração por partes, chegar-se-á às equações de Euler-Lagrange para o volume  $\Omega$  e superfície  $\Gamma_q$ , que correspondem às equações 44, 45 e 46.

Simplificando a equação 51, em termos de distribuição virtual de temperaturas, tem-se:

$$\int_{\Omega} \bar{\theta}'^T \cdot \underline{\lambda} \cdot \theta' d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\theta} \cdot H d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\theta}^{\Gamma_q} \cdot q_{\Gamma} d\Gamma + \sum_i \bar{\theta}^i \cdot q^i \quad (\text{equação 52})$$

Onde os tensores admitem as seguintes formas:

$$\theta'^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 53})$$

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \quad (\text{equação 54})$$

O princípio das temperaturas virtuais consiste em uma equação de equilíbrio de fluxos de calor: para que o campo de temperaturas ( $\theta$ ) seja a solução, a equação 52 deve assegurar que a distribuição de temperatura virtual (contínua), que pode ser arbitrada, seja igual à zero em  $\Gamma\theta$ .

Bathe (1996) afirma que o princípio das temperaturas virtuais é semelhante ao princípio dos deslocamentos virtuais utilizado na análise de tensões. Utiliza-se o princípio das temperaturas virtuais do mesmo modo que o princípio dos deslocamentos virtuais, exceto que agora se tem somente o valor escalar da temperatura como incógnita.

Para o caso transiente, o princípio das temperaturas virtuais tem a forma:

$$\int_{\Omega} \bar{\theta}'^T \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\theta} \cdot \underline{\lambda} \cdot \theta' d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\theta} \cdot H d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\theta}^{\Gamma_q} \cdot q_{\Gamma} d\Gamma + \sum_i \bar{\theta}^i \cdot q^i \quad (\text{equação 55})$$

#### 4.4 EQUAÇÕES INCREMENTAIS

O princípio das temperaturas virtuais expressa o equilíbrio do fluxo de calor em qualquer instante. Para um esquema geral de solução (aplicável ao problema estacionário e transiente), devem-se desenvolver equações de equilíbrio incrementais. Admite-se que a solução do problema para o tempo  $t$  já foi calculada e que as temperaturas serão determinadas para o tempo  $t+\Delta t$ , onde  $\Delta t$  é o incremento de tempo.

Considerando-se primeiramente o caso estacionário, onde o passo de tempo é usado apenas para descrever o carregamento de fluxo de calor e adicionando os termos relativos à transmissão de calor por convecção e radiação, o princípio das temperaturas virtuais no tempo  $t+\Delta t$  torna-se:

$$\int_{\Omega} \bar{\theta}^T \cdot \lambda \cdot \theta d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\theta} \cdot H d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\theta}^q \cdot q_r d\Gamma + \sum_i \bar{\theta}^i \cdot q^i$$

$$+ \int_{\Gamma_{conv}} \bar{\theta}^{\Gamma_{conv}} \cdot \alpha_c \cdot (\theta_{inf}^{t+\Delta t} - \theta_{sup}^{t+\Delta t}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{rad}} \bar{\theta}^{\Gamma_{rad}} \cdot (e \cdot \sigma_0) \cdot (\theta_{viz}^{t+\Delta t} - \theta_{sup}^{t+\Delta t}) d\Gamma$$

(equação 56)

Onde:

$\theta_{inf}^{t+\Delta t}$  é a temperatura absoluta do fluido [K] (equivalente à  $T_{inf}$  na equação 2);

$\theta_{sup}^{t+\Delta t}$  é a temperatura absoluta da superfície do elemento [K] (equivalente à  $T_{sup}$  na equação 2);

$\theta_{viz}^{t+\Delta t}$  é a temperatura absoluta da fonte de radiação térmica [K] (equivalente à  $T_{viz}$  na equação 7);

$\Gamma_{conv}$  é a superfície sujeita à convecção de calor [m<sup>2</sup>];

$\Gamma_{rad}$  é a superfície sujeita à radiação de calor [m<sup>2</sup>].

Considerando a equação 56, nota-se que em uma análise linear os termos  $\lambda$  e  $\alpha_c$  são constantes e as condições de contorno de radiação não são incluídas. Assim, os termos podem ser rearranjados:

$$\int_{\Omega} \bar{\theta}^T \cdot \lambda^{t+\Delta t} \theta' d\Omega + \int_{\Gamma_{conv}} \bar{\theta}^{\Gamma_{conv}} \cdot \alpha_c \cdot \theta_{sup}^{t+\Delta t} d\Gamma = \int_{\Omega} \bar{\theta}^{t+\Delta t} H d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma_q} \bar{\theta}^{\Gamma_q} \cdot q_{\Gamma}^{t+\Delta t} d\Gamma + \sum_i \bar{\theta}^i \cdot q^i + \int_{\Gamma_{conv}} \bar{\theta}^{\Gamma_{conv}} \cdot \alpha_c \cdot \theta_{inf}^{t+\Delta t} d\Gamma$$
(equação 57)

Assim, é possível resolver a equação diretamente para a variável desconhecida  $^{t+\Delta t}\theta$ .

Numa análise mais geral, onde a transferência de calor é um fenômeno não linear, a equação 55 é não linear, onde a incógnita é o campo de temperatura no tempo  $t+\Delta t$ . Uma solução aproximada para esse campo de temperatura pode ser obtida decompondo incrementalmente a equação 56, tendo-se:

$$^{t+\Delta t}\theta^{(i)} = ^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} + \Delta\theta^{(i)}$$
(equação 58)

Onde:

$^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)}$  é o campo de temperaturas no final da iteração (i-1) [K];

$\Delta\theta^{(i)}$  é o incremento de temperatura na iteração (i) [K];

$^{t+\Delta t}\theta^{(0)} = ^t\theta$ .

A solução da equação 56, utilizando-se o método iterativo completo de Newton-Raphson, pode ser obtida utilizando-se a equação 58, recalculando todas as variáveis em cada iteração.

Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} \bar{\theta}^T \cdot \lambda^{t+\Delta t} \cdot (^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} + \Delta\theta^{(i)}) d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\theta}^{t+\Delta t} H^{(i-1)} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{\theta}^{\Gamma_q} \cdot q_{\Gamma}^{(i-1)} d\Gamma$$

$$+ \sum_j \bar{\theta}^j \cdot q^j + \int_{\Gamma_{conv}} \bar{\theta}^{\Gamma_{conv}} \cdot \alpha_c \cdot \left( ^{t+\Delta t}\theta_{inf} - \left( ^{t+\Delta t}\theta_{sup}^{(i-1)} + \Delta\theta_{sup}^{(i)} \right) \right) d\Gamma$$
(equação 59)

$$+ \int_{\Gamma_{rad}} \bar{\theta}^{\Gamma_{rad}} \cdot (e \cdot \sigma_0)^{(i-1)} \cdot \left( ^{t+\Delta t}\theta_{viz}^4 - \left( ^{t+\Delta t}\theta_{sup}^{(i-1)} + \Delta\theta_{sup}^{(i)} \right)^4 \right) d\Gamma$$

Para o problema transiente, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\theta}^T \cdot {}^{t+\Delta t} (\rho \cdot c_p) \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\theta} \cdot {}^{t+\Delta t} \lambda \cdot \theta' d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\theta} \cdot {}^{t+\Delta t} H d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_q} \bar{\theta}^{\Gamma_q} \cdot {}^{t+\Delta t} q_{\Gamma} d\Gamma + \sum_i \bar{\theta}^i \cdot {}^{t+\Delta t} q^i + \int_{\Gamma_{conv}} \bar{\theta}^{\Gamma_{conv}} \cdot {}^{t+\Delta t} \alpha_c \cdot ({}^{t+\Delta t} \theta_{inf} - {}^{t+\Delta t} \theta_{sup}) d\Gamma \quad (\text{equação 60}) \\
& + \int_{\Gamma_{rad}} \bar{\theta}^{\Gamma_{rad}} \cdot {}^{t+\Delta t} (e \cdot \sigma_0) \cdot ({}^{t+\Delta t} \theta_{viz}^4 - {}^{t+\Delta t} \theta_{sup}^4) d\Gamma
\end{aligned}$$

A equação 60 é usada para calcular o campo de temperaturas no tempo  $t+\Delta t$  quando um método implícito de integração temporal é empregado.

#### 4.5 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Segundo Bathe (1996), a solução de elementos finitos para as equações que governam a transferência de calor é obtida utilizando procedimentos análogos aos empregados na análise de tensões. Considera-se, primeiramente, o caso estacionário. Admite-se que o corpo em estudo está inteiramente dividido em elementos finitos, e, tem-se para o elemento  $m$  no tempo  $t+\Delta t$ :

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t} \theta^{(m)} &= N^{(m)} {}^{t+\Delta t} \theta \\
{}^{t+\Delta t} \theta^{S(m)} &= N^{S(m)} {}^{t+\Delta t} \theta \\
{}^{t+\Delta t} \theta^{(m)} &= B^{(m)} {}^{t+\Delta t} \theta
\end{aligned} \quad (\text{equação 61})$$

Onde:

$m$  é o número do elemento finito;

${}^{t+\Delta t} \theta$  é o vetor de temperaturas nodais, no tempo  $t+\Delta t$ ;

$N^{(m)}$  é o vetor de funções de interpolação do elemento;

$N^{S(m)}$  é o vetor de funções de interpolação na face do elemento;

$B^{(m)}$  é o vetor de interpolação dos gradientes de temperatura do elemento.



## 4.6 CONDIÇÃO ESTACIONÁRIA LINEAR

Substituindo-se a equação 61 na equação 57, obtém-se a equação que governa o fenômeno de transferência de calor para o caso estacionário linear:

$$(K^k + K^c)^{t+\Delta t} \theta = {}^{t+\Delta t} Q + {}^{t+\Delta t} Q^e \quad (\text{equação 62})$$

Onde:

$K^k$  é a matriz de condutividade térmica [W/K], dada por:

$$K^k = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} B^{(m)T} \underline{\lambda}^{(m)} B^{(m)} d\Omega^{(m)} \quad (\text{equação 63})$$

$K^c$  é a matriz de convecção térmica [W/K], dada por:

$$K^c = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} \alpha_c^{(m)} N^{S(m)T} N^{S(m)} d\Omega^{(m)} \quad (\text{equação 64})$$

${}^{t+\Delta t} Q$  é vetor de fluxo de calor nodal (*nodal point heat flow vector*) [W], dado por:

$${}^{t+\Delta t} Q = {}^{t+\Delta t} Q_B + {}^{t+\Delta t} Q_S + {}^{t+\Delta t} Q_c \quad (\text{equação 65})$$

Sendo:

$${}^{t+\Delta t} Q_B = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} N^{(m)T} {}^{t+\Delta t} H d\Omega^{(m)} \quad (\text{equação 66})$$

$${}^{t+\Delta t} Q_s = \sum_m \int_{\Gamma_q^{(m)}} N^{S(m)T} {}^{t+\Delta t} q_{\Gamma_q} d\Gamma^{(m)} \quad (\text{equação 67})$$

Ainda:

${}^{t+\Delta t} Q_c$  é vetor de fluxo de calor nodal concentrado [W];

${}^{t+\Delta t} Q^e$  é contribuição do fluxo de calor nodal devido à convecção no contorno do elemento [W], dado por:

$${}^{t+\Delta t} Q^e = \sum_m \int_{\Gamma_c^{(m)}} \alpha_c^{(m)} N^{S(m)T} N^{S(m)} {}^{t+\Delta t} \theta_e d\Gamma^{(m)} \quad (\text{equação 68})$$

#### 4.7 CONDIÇÃO ESTACIONÁRIA NÃO LINEAR

Para a análise geral não linear, a equação 61 é substituída na equação 59. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left( {}^{t+\Delta t} K^{k(i-1)} + {}^{t+\Delta t} K^{c(i-1)} + {}^{t+\Delta t} K^{r(i-1)} \right) \Delta \theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t} Q + {}^{t+\Delta t} Q^{c(i-1)} \\ & + {}^{t+\Delta t} Q^{r(i-1)} - {}^{t+\Delta t} Q^{k(i-1)} \end{aligned} \quad (\text{equação 69})$$

Onde as temperaturas nodais, ao fim de cada iteração, são dadas pela equação 58.

As matrizes e vetores usados na equação 69 são obtidos diretamente dos termos individuais usados na equação 59. O vetor de fluxo de calor nodal,  ${}^{t+\Delta t} Q$ , já foi definido na equação 65.

#### 4.8 CONDIÇÃO TRANSIENTE

Para a análise transiente, os efeitos da capacitância térmica são incluídos como parte da taxa de geração interna de calor. As equações a serem utilizadas na solução do problema dependem se o método de integração utilizado é implícito ou explícito.

Se o método implícito de integração temporal de Euler for empregado, as equações de equilíbrio do fluxo de calor que são utilizadas são obtidas diretamente pelas equações que governam a condição transiente (equação 60). Utilizando para o elemento  $m$ :

$$\frac{\partial \theta^{(m)}(x, y, z, t)}{\partial t} = N^{(m)}(x, y, z) \cdot \frac{\partial \theta^{(m)}(t)}{\partial t} \quad (\text{equação 70})$$

E utilizando o termo inercial térmico na equação 69, tem-se:

$${}^{t+\Delta t} Q_B = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} N^{(m)T} \left( {}^{t+\Delta t} H^{(m)} - {}^{t+\Delta t} (\rho c_p)^{(m)} N^{(m)} \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} \right) d\Omega^{(m)} \quad (\text{equação 71})$$

Onde:

${}^{t+\Delta t} H^{(m)}$  não inclui mais a taxa com que o calor é armazenado.

As equações de equilíbrio para o fluxo de calor, considerando a solução transiente, em uma análise linear, são:

$$C \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} + (K^k + K^c) {}^{t+\Delta t} \theta = {}^{t+\Delta t} Q + {}^{t+\Delta t} Q^e \quad (\text{equação 72})$$

E, em uma análise não linear, utilizando Newton-Raphson, tem-se:

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t} C^{(i)} \frac{\partial \theta(t)^{(i)}}{\partial t} + \left( {}^{t+\Delta t} K^{k(i-1)} + {}^{t+\Delta t} K^{c(i-1)} + {}^{t+\Delta t} K^{r(i-1)} \right) \Delta \theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t} Q \\ & + {}^{t+\Delta t} Q^{c(i-1)} + {}^{t+\Delta t} Q^{r(i-1)} - {}^{t+\Delta t} Q^{k(i-1)} \end{aligned} \quad (\text{equação 73})$$

Onde:

$C$  e  ${}^{t+\Delta t} C^{(i)}$  são as matrizes de capacitância térmica [J/K], dadas por:

$$C = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} N^{(m)T} (\rho c_p)^{(m)} N^{(m)} d\Omega^{(m)}$$

$${}^{t+\Delta t} C^{(i)} = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} N^{(m)T} {}^{t+\Delta t} (\rho c_p)^{(m)(i)} N^{(m)} d\Omega^{(m)}$$
(equação 74)

As matrizes definidas na equação 74 são matrizes consistentes de capacitância térmica porque as mesmas funções de interpolação do elemento são empregadas para o campo de temperaturas e para as derivadas temporais do campo de temperatura.

Se na equação 73, utilizar-se a linearização completa do termo temporal, tem-se:

$$\left( \frac{{}^{t+\Delta t} C^{(i-1)}}{\Delta t} + {}^{t+\Delta t} K^k(i-1) + {}^{t+\Delta t} K^c(i-1) + {}^{t+\Delta t} K^r(i-1) \right) \Delta \theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t} Q$$

$$+ {}^{t+\Delta t} Q^c(i-1) + {}^{t+\Delta t} Q^r(i-1) - {}^{t+\Delta t} Q^k(i-1) - {}^{t+\Delta t} C^{(i-1)} \frac{{}^{t+\Delta t} \theta^{(i-1)} - {}^t \theta}{\Delta t}$$
(equação 75)

Se, por outro lado, o método explícito de integração temporal de Euler for utilizado, a solução para o campo de temperaturas desconhecido no tempo  $t+\Delta t$  é obtido considerando o equilíbrio do fluxo de calor no tempo  $t$ . Aplicando o princípio das temperaturas virtuais no tempo  $t$ , e substituindo as funções de interpolações do elemento finito para temperaturas, gradientes de temperatura e derivadas da temperatura em relação ao tempo, obtêm-se as seguintes equações para análise linear e não linear, respectivamente:

$$C \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = {}^t Q + {}^t Q^c - {}^t Q^k$$
(equação 76)

$${}^t C \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = {}^t Q + {}^t Q^c - {}^t Q^k$$
(equação 77)

## 5 ABORDAGEM NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA MECÂNICO

Será apresentada, nos próximos itens, a teoria elasto-viscoplástica, que permite a modelagem dos efeitos da taxa temporal no processo de deformação da estrutura.

Da mesma forma que o fenômeno de transporte de calor, uma solução analítica para o fenômeno mecânico elasto-viscoplástico é quase impossível de ser encontrada dada a complexidade das condições geométricas e de contorno dos problemas. Assim, toda a formulação objetivará a aplicação do método dos elementos finitos.

### 5.1 MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO

Owen e Hinton (1980) apresentam um programa para análise de um material elasto-viscoplástico. Nesse programa, o modelo reológico adotado é apresentado na Figura 29.

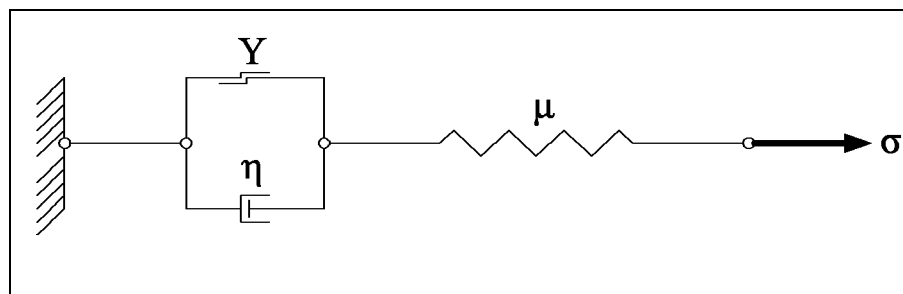


Figura 29: modelo reológico elasto-viscoplástico adotado.

A resposta elástica instantânea é proporcionada pela mola linear (componente elástica). Tendo em vista que o amortecedor (componente viscosa) não sofre deformação instantânea, o elemento de atrito (componente plástica) também apresentará deformação nula, pois ambos estão conectados em paralelo. O elemento de atrito torna-se ativo somente se a tensão corrente  $\sigma$  for maior que a tensão de plastificação  $\sigma_0$ . Este excesso de tensão ( $\sigma - \sigma_0$ ) é absorvido

gradativamente pelo amortecedor, caracterizando desta maneira, o comportamento elasto-viscoplástico do material.

## 5.2 TEORIA ELASTO-VISCOPLÁSTICA DOS SÓLIDOS

Neste item, são apresentados os fundamentos para a formulação matemática de elementos finitos segundo Owen e Hinton (1980), considerando análise tridimensional não linear e admitindo um material isotrópico, homogêneo, de comportamento elasto-viscoplástico, conforme o modelo reológico da Figura 29. O programa básico para solução deste problema é apresentado por Owen e Hinton (1980).

### 5.2.1 Formulação básica

De um modo geral, na formulação usual para problemas contínuos não lineares, admite-se que as componentes de deformação total, em um dado ponto, são compostas por uma parcela elástica  $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ , e outra viscoplástica  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}$ :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_e + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{vp} \quad (\text{equação 78})$$

Onde o ponto sobre os tensores representa a diferenciação em relação ao tempo.

As tensões são produzidas unicamente pelas deformações elásticas são:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_e \quad (\text{equação 79})$$

Onde:

$\underline{\underline{D}}$  é o tensor constitutivo elástico do material;

$:$  é o produto de dupla contração tensorial.

A representação matricial do tensor constitutivo elástico pode assumir as seguintes formas:

Tabela 7: representação matricial do tensor constitutivo elástico

Estado Plano de Tensão	$\frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$
Estado Plano de Deformação	$\frac{E}{(1-\nu).(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$
Axissimétrica	$\frac{E}{(1-\nu).(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ 0 & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$

Onde:

$E$  é o módulo de elasticidade do material [MPa];

$\nu$  é o coeficiente de Poisson [adimensional].

No espaço das tensões, tem-se uma superfície de plastificação expressa genericamente por:

$$F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}) - F_0(\kappa) = 0 \quad (\text{equação 80})$$

Onde:

$F_0(\kappa)$  é a tensão de escoamento uniaxial do material;

$\kappa$  é o parâmetro de endurecimento.

Considera-se que o fluxo viscoplástico ocorre se  $F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}) > F_0(\kappa)$ .

É necessário estabelecer uma lei específica para determinar as deformações viscoplásticas a partir do estado de tensões. Uma forma explícita para essa lei é (ZIENKIEWICS; CORMEAU, 1974 apud OWEN; HINTON, 1980):

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial Q(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}, \kappa)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{equação 81})$$

Onde:

$\gamma = \frac{1}{\eta}$  é o coeficiente de fluidez que controla a taxa de fluxo plástico;

$Q(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}, \kappa)$  é o potencial plástico;

$\Phi(F)$  é uma função monotônica crescente positiva;

$\langle \rangle$  é uma notação que implica em:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(F) \rangle &= \Phi(F), \quad \text{para } F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}) > F_0(\kappa) \\ \langle \Phi(F) \rangle &= 0, \quad \text{para } F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}) \leq F_0(\kappa) \end{aligned} \quad (\text{equação 82})$$

Limitando-se ao caso de plasticidade associada, na qual  $F \equiv Q$ , a equação 82 torna-se:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \underline{\underline{a}} \quad (\text{equação 83})$$

Onde:

$\underline{\underline{a}}$  é o vetor de fluxo plástico que define a direção do escoamento viscoplástico, cujas expressões, dependendo do problema a ser estudado, podem ser observadas na Tabela 8.



Tabela 8: expressões para o vetor de fluxo plástico  $\underline{a}$ .

Estado Plano de Tensão e Deformação	$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right\}$
Axissimétrica	$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_r}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{rz}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} \right\}$

Segundo Owen e Hinton (1980), as duas formas mais utilizadas para a função  $\Phi(F)$  são:

$$\Phi(F) = e^{M \left( \frac{F-F_0}{F_0} \right)} - 1 \quad \text{(equação 84)}$$

$$\Phi(F) = \left( \frac{F - F_0}{F_0} \right)^N$$

Onde:

M e N são constantes arbitrárias prescritas.

### 5.2.2 Incremento de deformação viscoplástica

Através da regra de escoamento viscoplástico, expressa na equação 83, pode-se definir o incremento de deformação  $\underline{\underline{\Delta \varepsilon_{vp}^n}}$  que ocorre no intervalo de tempo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , através de um esquema implícito de integração temporal (KANCHI et al., apud OWEN; HINTON, 1980).

$$\underline{\underline{\Delta \varepsilon_{vp}^n}} = \Delta t_n \left( (1 - \beta) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}_{vp}^n}} + \beta \underline{\underline{\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1}}} \right) \quad \text{(equação 85)}$$

Onde:

$\beta$  é o parâmetro que controla o esquema de integração temporal;

$n$  é o número da iteração corrente.

Para  $\beta$  igual a zero, obtém-se um esquema de integração temporal totalmente explícito (esquema progressivo de Euler), uma vez que o incremento de deformação é completamente determinado a partir de condições existentes no tempo  $t_n$ . Para  $\beta$  igual a um, tem-se um esquema de integração temporal totalmente implícito (esquema regressivo de Euler), com o incremento da tensão a ser determinada a partir da taxa de deformação correspondente ao final do intervalo de tempo. O parâmetro  $\beta$  ainda pode assumir os valores 1/2 (esquema de Crank Nicolson) e 2/3 (esquema de Galerkin).

Para definir  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{vp}^{n+1}$  na equação 85, expande-se o termo em séries de Taylor (com truncamento dos termos de maior ordem):

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{vp}^{n+1} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{vp}^n + \underline{\underline{H}}^n : \underline{\underline{\Delta\sigma}}^n \quad (\text{equação 86})$$

Onde:

$\underline{\underline{\Delta\sigma}}^n$  é o incremento de tensão ocorrido no intervalo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ ;

$\underline{\underline{H}}^n$  é dado pela seguinte equação:

$$\underline{\underline{H}}^n = \left( \frac{\partial \left( \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{vp} \right)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)^n = \underline{\underline{H}}^n(\underline{\underline{\sigma}}^n) \quad (\text{equação 87})$$

Assim, pode-se reescrever a equação 85 como:

$$\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_{vp}^n = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{vp}^n \Delta t_n + \beta \Delta t_n \underline{\underline{H}}^n : \underline{\underline{\Delta\sigma}}^n \quad (\text{equação 88})$$

### 5.2.3 Incremento de tensão

Utilizando a forma incremental da equação 79, obtém-se:

$$\underline{\underline{\Delta\sigma}}^n = \underline{\underline{D}} : \Delta\varepsilon_e^n = \underline{\underline{D}} : \left( \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^n - \underline{\underline{\Delta\varepsilon_{vp}}}^n \right) \quad (\text{equação 89})$$

Expressando o incremento de deformação total em termos do incremento de deslocamentos, tem-se:

$$\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^n = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\Delta d}}^n \quad (\text{equação 90})$$

Onde:

$\underline{\underline{B}}$  é o tensor de relações deformações-deslocamentos;

$\underline{\underline{\Delta d}}^n$  é o tensor de primeira ordem (vetor) de deslocamentos nodais na iteração  $n$ .

O tensor  $\underline{\underline{B}}$  pode ser representado matricialmente pelas expressões apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9: expressões para a matriz de relações deformações-deslocamentos

Estado Plano de Tensão e Deformação	$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^{(e)} & 0 \\ 0 & \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^{(e)} \\ \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^{(e)} & \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^{(e)} \end{bmatrix}$
Axissimétrica	$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \right)^{(e)} & 0 \\ \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \right)^{(e)} & 0 \\ 0 & \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \right)^{(e)} \\ \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \right)^{(e)} & \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \right)^{(e)} \end{bmatrix}$

Substituindo as equações 88 e 90 na equação 89, tem-se:

$$\underline{\underline{\Delta\sigma}}^n = \underline{\underline{\hat{D}}}^n : \left( \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\Delta d}}^n - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{vp}^n \Delta t_n \right) \quad (\text{equação 91})$$

Onde:

$$\underline{\underline{\hat{D}}}^n = \left( \underline{\underline{D}}^{-1} + \beta \Delta t_n \underline{\underline{H}}^n \right)^{-1} \quad (\text{equação 92})$$

Para a solução de problemas elásticos lineares, utilizando um esquema explícito de integração ( $\beta=0$ ), a equação 91 é simplificada:

$$\underline{\underline{\Delta\sigma}}^n = \underline{\underline{D}} : \left( \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\Delta d}}^n - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{vp}^n \Delta t_n \right) \quad (\text{equação 93})$$

#### 5.2.4 Equações de equilíbrio

A equação de equilíbrio a ser satisfeita em qualquer instante de tempo é:

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{B}}^T)^n : \underline{\underline{\sigma}}^n d\Omega + \underline{\underline{f}}^n = \underline{\underline{0}} \quad (\text{equação 94})$$

Onde:

$\underline{\underline{f}}^n$  é o tensor de primeira ordem (vetor) com os carregamentos nodais equivalentes.

Durante cada incremento de tempo, a equação 94 deve ser satisfeita de forma incremental:

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{B}}^T)^n : \underline{\underline{\Delta\sigma}}^n d\Omega + \underline{\underline{\Delta f}}^n = \underline{\underline{0}} \quad (\text{equação 95})$$

Onde:

$\underline{\Delta f}^n$  é o tensor de primeira ordem (vetor) com os carregamentos nodais incrementais equivalentes.

Substituindo a equação 93 na equação 88, o vetor de incremento de deslocamentos nodais pode ser calculado:

$$\underline{\Delta d}^n = \left( \underline{K}_T^n \right)^{-1} \cdot \underline{\Delta V}^n \quad (\text{equação 96})$$

Onde:

$$\underline{\Delta V}^n = \int_{\Omega} \left( \underline{B}^T \right)^n : \underline{\hat{D}}^n : \underline{\dot{\varepsilon}}_{vp}^n \Delta t_n d\Omega + \underline{\Delta f}^n \quad (\text{equação 97})$$

$$\underline{K}_T^n = \int_{\Omega} \left( \underline{B}^T \right)^n : \underline{\hat{D}}^n : \underline{B}^T d\Omega \quad (\text{equação 98})$$

Onde:

$\underline{\Delta V}^n$  é o tensor de primeira ordem (vetor) de pseudo-carregamento incremental;

$\underline{K}_T^n$  é o tensor de rigidez tangencial (matriz de rigidez tangencial).

Quando, substituindo a equação 96 em 93, tem-se o incremento de tensões  $\underline{\Delta \sigma}^n$ , e assim:

$$\underline{\sigma}^{n+1} = \underline{\sigma}^n + \underline{\Delta \sigma}^n \quad (\text{equação 99})$$

$$\underline{d}^{n+1} = \underline{d}^n + \underline{\Delta d}^n \quad (\text{equação 100})$$

Utilizando as equações 89 e 90, tem-se:

$$\underline{\underline{\Delta \varepsilon_{vp}}}^n = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\Delta d}}^n - \underline{\underline{D}}^{-1} : \underline{\underline{\Delta \sigma}}^n \quad (\text{equação 101})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_{vp}}}^{n+1} = \underline{\underline{\varepsilon_{vp}}}^n + \underline{\underline{\Delta \varepsilon_{vp}}}^n \quad (\text{equação 102})$$

A chegada às condições estacionárias pode ser monitorada pela taxa de deformação, em particular quando  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}_{vp}}}$  se torna tão pequeno quanto se queira.

### 5.2.5 Correção do equilíbrio

O cálculo do incremento de tensão é baseado na forma linearizada da equação de equilíbrio incremental (equação 95). Dessa forma, a tensão total ( $\sigma^{n+1}$ ), obtida pela soma dos incrementos de tensão, não está necessariamente correta e pode não satisfazer a equação de equilíbrio (equação 94). Uma forma simples para corrigir tal problema é calculando  $\sigma^{n+1}$  através das equações 93 e 99, e então calculando as forças residuais  $\psi$ :

$$\psi^{n+1} = \int_{\Omega} (\underline{\underline{B}}^T)^{n+1} : \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} d\Omega + \underline{\underline{f}}^{n+1} \neq \underline{\underline{0}} \quad (\text{equação 103})$$

Essas forças são então adicionadas ao incremento de forças no próximo incremento ( $\underline{\underline{\Delta f}}^{n+1}$ ). Essa técnica diminui o número de iterações necessárias bem como o erro obtido.

### 5.2.6 Escolha do comprimento do passo de tempo

O esquema de integração temporal adotado, mostrado na equação 85, é incondicionalmente estável para valores  $\beta \geq 1/2$ . Isso implica em estabilidade numérica ao longo do processo iterativo, mas não implica em acurácia da solução em qualquer estágio do processo. Dessa

forma, mesmo para valores  $\beta \geq 1/2$ , o valor do comprimento do passo de tempo deve ser submetido a um valor limite.

Para  $\beta < 1/2$ , o esquema de integração é condicionalmente estável e o processo de integração temporal só pode prosseguir para valores do comprimento do passo de tempo inferiores a um valor crítico.

Owen e Hinton (1980) apresentam uma equação para o cálculo do comprimento do passo de tempo máximo:

$$\Delta t_{n+1} \leq \tau \cdot \left( \frac{\varepsilon^{-n+1}}{\dot{\varepsilon}_{vp}^{-n+1}} \right)_{\min}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{equação 104})$$

Onde:

$\Delta t_{n+1}$  é o comprimento do passo de tempo da próxima iteração;

$\tau$  é um parâmetro com valor pré-definido;

$\varepsilon^{-n+1}$  é o valor efetivo da deformação viscoplástica;

$\dot{\varepsilon}_{vp}^{-n+1}$  é o valor da deformação efetiva total.

Esses valores são calculados para todos os pontos de Gauss da estrutura e o valor de  $\Delta t_{n+1}$  corresponde ao menor valor calculado.

### 5.3 MODELO DE ARMADURA INCORPORADA (*EMBEDDED REINFORCEMENT*)

A armadura de aço desempenha um papel crucial no comportamento das estruturas de concreto armado devido ao comportamento frágil do concreto sob esforços de tração. Considerando a aderência perfeita entre concreto e aço, utiliza-se o modelo de armadura incorporada (*embedded reinforcement*) proposto por Elwi e Hrudey (1989) para a simulação

do efeito da armadura de aço no concreto. Nesse modelo, a contribuição dos esforços da armadura é contabilizada através da soma de sua rigidez à do concreto.

A armadura de aço também contribui na transmissão de calor na estrutura. Para tal, fez-se uma analogia térmica ao modelo de armadura incorporada, onde as contribuições de capacitância e condutividade são somadas às do concreto.

### 5.3.1 Formulação geométrica

Partindo da formulação geométrica apresentada por Elwi e Hrudey (1989), tem-se um elemento principal (em azul) e um elemento de barra curvo (em vermelho) descrito em coordenadas globais  $(x,y)$ , conforme exposto na Figura 30.

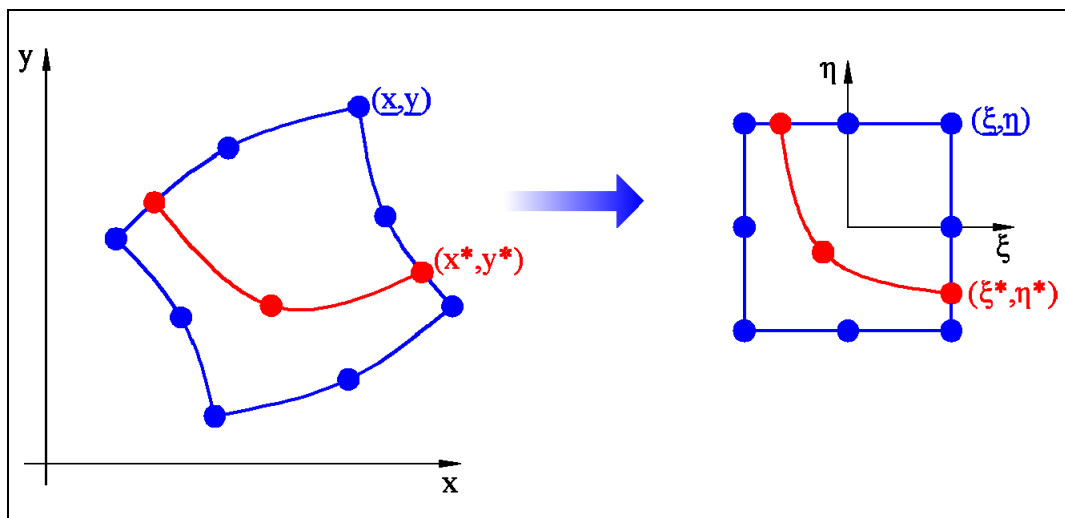


Figura 30: elementos no sistema global  $(x,y)$  e no sistema natural  $(\xi,\eta)$ .

Seguindo o procedimento usual de mapeamento isoparamétrico, tem-se que as coordenadas globais de qualquer ponto no interior do elemento principal podem ser determinadas através das coordenadas globais dos nós do elemento principal de concreto.

$$\begin{aligned} x &= \langle \phi \rangle \{ \underline{x} \} \\ y &= \langle \phi \rangle \{ \underline{y} \} \end{aligned} \quad (\text{equação 105})$$

Onde:

$x$  e  $y$  são as coordenadas globais de um ponto no interior do elemento principal de concreto;



$\langle \phi \rangle$  é um vetor linha com as funções de forma do elemento principal de concreto;

$\{x\}$  e  $\{y\}$  são vetores coluna com as coordenadas globais dos nós do elemento principal de concreto.

Os respectivos diferenciais são dados por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} &= [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \\ [J] &= \begin{Bmatrix} \langle x \rangle \\ \langle y \rangle \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \xi} & \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{equação 106})$$

Onde:

$\xi$  e  $\eta$  são as coordenadas naturais.

Elwi e Hruday (1989) afirmam que uma vantagem importante dessa formulação é que a localização e geometria das barras da armadura independem da malha de elementos finitos de concreto. Como a armadura é especificada por um conjunto de pontos independentes, se faz necessária a colocação de pontos adicionais nos elementos de barra, para garantir a continuidade adequada entre elementos. Esses pontos devem estar localizados onde a armadura cruza o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos pontos das barras de aço, entre os pontos de definição da mesma, são obtidas por interpolação. Assim, se as barras são curvas, pontos adicionais são criados dentro dos elementos finitos de concreto onde há a presença de armadura.

As coordenadas globais de qualquer ponto da barra no interior do elemento principal podem ser determinadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \psi \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle \psi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ x^* \} \\ \{ y^* \} \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 107})$$

Onde:

$\langle \psi \rangle$  é um vetor linha com as funções de forma da barra.

$\langle 0 \rangle$  é um vetor linha nulo

$\{ x^* \}$  e  $\{ y^* \}$  são vetores coluna com as coordenadas do nós do elemento de barra.

As funções de forma unidimensionais são expressas em termos da coordenada normalizada  $\zeta$ , conforme a Figura 31.

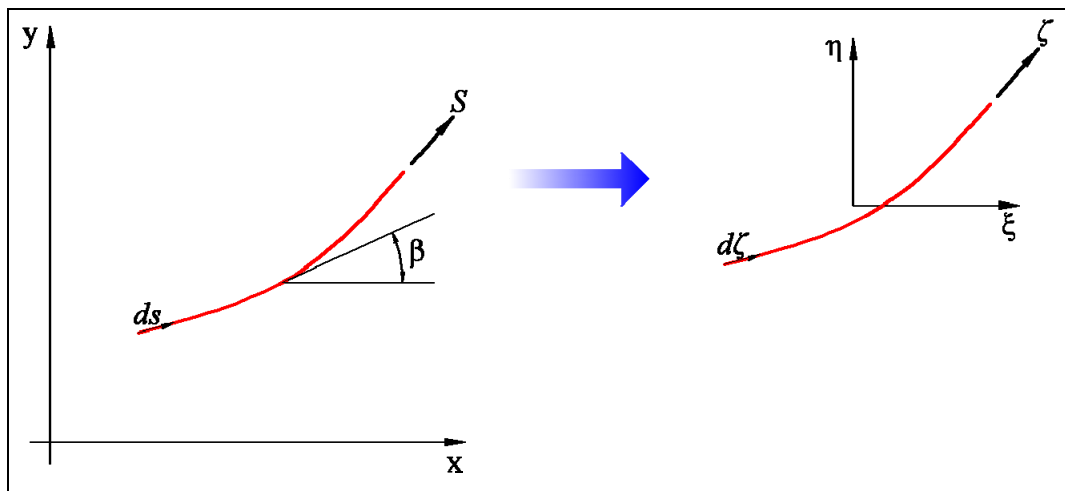


Figura 31: sistema de coordenadas ao longo do elemento de barra.

Segundo Zienkiewicz et al. (2005), as funções de forma unidimensionais dos elementos de barra ( $\psi$ ) são formuladas utilizando polinômios de Lagrange.

Na Figura 31, verifica-se que o elemento infinitesimal  $ds$  é orientado através do ângulo  $\beta$ , para o qual tem-se:

$$\langle \cos(\beta) \quad \text{sen}(\beta) \rangle = \left\langle \frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \right\rangle \quad (\text{equação 108})$$

Desde que  $\cos^2(\beta) + \text{sen}^2(\beta) = 1$ , tem-se:

$$\frac{ds}{d\zeta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} \quad (\text{equação 109})$$

Onde:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\zeta} \\ \frac{dy}{d\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{d\psi}{d\zeta} \right\rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \left\langle \frac{d\psi}{d\zeta} \right\rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x^*\} \\ \{y^*\} \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 110})$$

Um elemento infinitesimal de volume  $dV_s$  pode ser expressos por:

$$dV_s = tA_s ds \quad (\text{equação 111})$$

Onde:

$t$  é a espessura do elemento de concreto;

$A_s$  é a área da seção da barra por unidade de espessura;

Assim, para integrações de volume, tem-se:

$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\zeta} C \cdot t \cdot A_s \cdot \left(\frac{ds}{d\zeta}\right) d\zeta \quad (\text{equação 112})$$

Onde:

$C$  é uma função de posição ao longo do elemento de barra.

### 5.3.2 Campo de deformações

Considerando a aderência perfeita entre concreto e armadura de aço, tem-se (desconsiderando o termo relativo ao escorregamento):

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \cos^2(\beta) + \varepsilon_y \sin^2(\beta) + \gamma_{xy} \sin(\beta) \cos(\beta) \quad (\text{equação 113})$$

De forma incremental, tem-se:

$$\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_x \cos^2(\beta) + \Delta\varepsilon_y \sin^2(\beta) + \Delta\gamma_{xy} \sin(\beta) \cos(\beta) \quad (\text{equação 114})$$

Os incrementos de deformação ( $\Delta\varepsilon_x$ ,  $\Delta\varepsilon_y$  e  $\Delta\gamma_{xy}$ ) são obtidos diretamente do campo de deslocamentos do elemento principal de concreto.

A equação de deformação na barra pode ser reescrita como:

$$\Delta\varepsilon_s = \langle B_s \rangle \{ \Delta q \} \quad (\text{equação 115})$$

Onde:

$$\langle B_s \rangle = \{ B_s \}^T = \left\{ \begin{array}{l} \cos^2(\beta) \cdot \{ \phi_{,x} \} + \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \cdot \{ \phi_{,y} \} \\ \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \cdot \{ \phi_{,x} \} + \sin^2(\beta) \cdot \{ \phi_{,y} \} \end{array} \right\}^T \quad (\text{equação 116})$$

$$\{ \Delta q \} = \left\{ \begin{array}{l} \{ \Delta u \} \\ \{ \Delta v \} \end{array} \right\} \quad (\text{equação 117})$$

Onde:

$\phi_{,x}$  e  $\phi_{,y}$  representam as derivadas das funções de forma do elemento principal de concreto em relação às variáveis  $x$  e  $y$  respectivamente;

$\{ \Delta u \}$  e  $\{ \Delta v \}$  representam os vetores coluna com os deslocamentos nodais nas direções  $x$  e  $y$  dos nós do elemento principal de concreto.

### 5.3.3 Formulação dos Trabalhos Virtuais

A formulação apresentada por Elwi e Hrudey (1989) é baseada na forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais. A hipótese básica assumida é que a tensão ocorre apenas axialmente no elemento de barra. Assim, tem-se:

$$\delta\Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta\sigma_s) \cdot \delta\Delta\varepsilon_s dV \quad (\text{equação 118})$$

Onde:

$$\Delta\sigma_s = E_s \cdot \Delta\varepsilon_s \quad (\text{equação 119})$$

Rearranjando os termos, tem-se:

$$\delta\Delta W = \int_{V_s} (\delta\Delta\varepsilon_s \cdot \sigma_s \cdot A_s + \delta\Delta\varepsilon_s \cdot E_s \cdot \Delta\varepsilon_s \cdot A_s) \cdot t ds \quad (\text{equação 120})$$

Substituindo a equação 115 na equação anterior, tem-se:

$$\delta\Delta W = \langle \delta\Delta q \rangle \{ [K_{ss}] \Delta q \} + \{ Q_s \} \quad (\text{equação 121})$$

Onde:

$[K_{ss}]$  é a matriz de rigidez da barra de armadura, dada por:

$$[K_{ss}] = \int_{\zeta} \{ B_s \} \cdot E_s \cdot \langle B_s \rangle \cdot \frac{ds}{d\zeta} \cdot A_s \cdot t d\zeta \quad (\text{equação 122})$$

E os demais termos da equação 121 são dados por:

$$\{Q_s\} = \int_{\zeta} \{B_s\} \cdot \sigma_s \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\zeta} \cdot d\zeta \quad (\text{equação 123})$$

$$\{\Delta q\} = \begin{Bmatrix} \{\Delta u\} \\ \{\Delta v\} \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 124})$$

### 5.3.4 Analogia térmica ao modelo de armadura incorporada

Reescrevendo a equação do campo de deformações mecânico para a barra de armadura (equação 113) e desprezando-se as deformações transversais, tem-se:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \cos^2(\beta) + \varepsilon_y \sin^2(\beta) \quad (\text{equação 125})$$

Substituindo as grandezas vetoriais de deformação ( $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ ) por grandezas vetoriais de fluxo de calor, tem-se:

$$q_{ts} = q_{tx} \cos^2(\beta) + q_{ty} \sin^2(\beta) \quad (\text{equação 126})$$

Onde:

$$q_{ts} = k_s \frac{d\theta}{dS}; \quad q_{tx} = k_x \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad q_{ty} = k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{equação 127})$$

De forma incremental, tem-se

$$\Delta q_{ts} = \Delta q_{tx} \cos^2(\beta) + \Delta q_{ty} \sin^2(\beta) \quad (\text{equação 128})$$

A equação de fluxo na barra pode ser reescrita como:

$$\Delta q_{ts} = \langle B_{ts} \rangle \{ \Delta \theta \} \quad (\text{equação 129})$$

Onde:

$$\langle B_{ts} \rangle = \langle \cos^2(\beta) \cdot \{ \phi_{,x} \} + \text{sen}^2(\beta) \cdot \{ \phi_{,y} \} \rangle \quad (\text{equação 130})$$

$\{ \Delta \theta \}$  representa o vetor coluna com as temperaturas nodais dos nós do elemento principal de concreto.

Analogamente à formulação dos trabalhos virtuais, pode-se escrever que:

$$\delta \Delta W = \langle \delta \Delta \theta \rangle \{ [K_{tss}] \{ \Delta \theta \} + \{ Q_{ts} \} \} \quad (\text{equação 131})$$

Onde:

$[K_{tss}]$  é a matriz de condutividade térmica da barra da armadura, dada por:

$$[K_{tss}] = \int_{\zeta} \{ B_{ts} \} \cdot k \cdot \langle B_{ts} \rangle \cdot \frac{ds}{d\zeta} \cdot A_s \cdot t d\zeta \quad (\text{equação 132})$$

A matriz de capacitância térmica da barra da armadura é dada por:

$$[C_t] = \int_{\zeta} \rho \cdot c \cdot \{ \phi \} \cdot \langle \phi \rangle \cdot \frac{ds}{d\zeta} \cdot A_s \cdot t d\zeta \quad (\text{equação 133})$$

## 6 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

### 6.1 CONCRETO

A característica mais marcante do concreto é a sua baixa resistência aos esforços de tração comparados aos esforços de compressão. Dessa forma, para uma representação mais realista do material, utilizam-se dois modelos distintos para o concreto em função do tipo de sollicitação atuante.

#### 6.1.1 Concreto sob esforços de compressão

Admite-se que o concreto possui um comportamento elastoplástico com endurecimento. Assim, o modelo utilizado é composto por um critério de ruptura, um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

O critério de ruptura utilizado é o proposto por Ottosen (1977) e adotado por FIB (Bulletin 55, 2010). Esse critério é expresso por:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (\text{equação 134})$$

Onde:

$\alpha$  e  $\beta$  são coeficientes do material;

$\lambda$  é um parâmetro do modelo dependente do estado de tensões;

$I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões;

$J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões.

O primeiro invariante do tensor de tensões é expresso por:



$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (\text{equação 135})$$

Onde:

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais do tensor de tensões.

O segundo invariante do tensor desviador de tensões é expresso por:

$$J_2 = \frac{1}{6} \cdot \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) \quad (\text{equação 136})$$

O valor de  $\lambda$  utilizado na equação 134, é calculado, segundo a FIB (Bulletin 55, 2010), por:

$$\lambda = c_1 \cdot \cos \left( \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1} \left( c_2 \cdot \cos(3 \cdot \theta) \right) \right) \quad (\text{equação 137})$$

Onde:

$c_1$  e  $c_2$  são parâmetros do modelo;

$\cos(3 \cdot \theta)$  é definido por:

$$\cos(3 \cdot \theta) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (\text{equação 138})$$

Onde:

$J_3$  é o terceiro invariante do tensor desviador de tensões, dado por:

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_m) \cdot (\sigma_2 - \sigma_m) \cdot (\sigma_3 - \sigma_m) \quad (\text{equação 139})$$

Onde:

$\sigma_m$  é a tensão esférica do tensor de tensões, dada por:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (\text{equação 140})$$

Segundo a FIB (Bulletin 55, 2010), os coeficientes apresentados nas equações 134 e 137 ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $c_2$ ) são parâmetros do material que dependem da resistência média à compressão do concreto ( $f_{cm}$ ), da resistência média à tração do concreto ( $f_{ctm}$ ), da resistência média biaxial à compressão do concreto ( $f_{c2cm}$ ) e da resistência do concreto em um ponto no meridiano de compressão ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ) descrito por  $\sigma_{com}$  e  $\tau_{com}$ . FIB (Bulletin 55, 2010) afirma também que na ausência de dados experimentais, a resistência média biaxial à compressão e a resistência em um ponto no meridiano de compressão podem ser estimadas a partir da resistência média à compressão do concreto ( $f_{cm}$ ):

$$f_{c2cm} = \left(1,2 - \frac{f_{cm}}{1000}\right) \cdot f_{cm} \quad (\text{equação 141})$$

$$\tau_{com} = \left(185 - 180 \cdot \frac{f_{cm}}{100} + 260 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{100}\right)^2 - 84 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{100}\right)^3\right) \quad (\text{equação 142})$$

para

$$\sigma_{com} = -240 \text{ MPa}$$

Onde:

$f_{cm}$ ,  $f_{c2cm}$  e  $\tau_{com}$  são dados em MPa.

A FIB (Bulletin 55, 2010) define as seguintes equações para o cálculo dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$k = \frac{f_{ctm}}{f_{cm}} \quad (\text{equação 143})$$

$$f_{2c} = \frac{f_{c2cm}}{f_{cm}} \quad (\text{equação 144})$$

$$x = \frac{\sigma_{com}}{f_{cm}} \quad (\text{equação 145})$$

$$y = \frac{\tau_{com}}{f_{cm}} \quad (\text{equação 146})$$

$$h = \frac{\sqrt{2} \cdot x + y}{\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}} \quad (\text{equação 147})$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2} - \frac{3 \cdot y}{k \cdot f_{2c}}}{h - \frac{9 \cdot y}{f_{2c} - k}} \quad (\text{equação 148})$$

$$\alpha = \frac{h \cdot \beta - \sqrt{2}}{y} \quad (\text{equação 149})$$

Para o cálculo dos coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ , a FIB (Bulletin 55, 2010) estabelece as seguintes equações:

$$\lambda_c = \lambda(\theta = 60^\circ) = \left(1 - \frac{h}{3 \cdot y}\right) \cdot \sqrt{3} \cdot \beta + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot y} \quad (\text{equação 150})$$

$$\lambda_y = \lambda(\theta=0^\circ) = \left(2 \cdot \sqrt{3} - \frac{f_{2c} \cdot h}{\sqrt{3} \cdot y}\right) \cdot \beta + \frac{\sqrt{3}}{f_{2c}} + \frac{\sqrt{2} \cdot f_{2c}}{\sqrt{3} \cdot y} \quad (\text{equação 151})$$

$$c_2 = 1 \quad \text{para} \quad \frac{\lambda_c}{\lambda_y} \leq \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \cos \left( 3 \cdot \tan^{-1} \left( \frac{2 \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda_y} - 1}{\sqrt{3}} \right) \right) \quad \text{para} \quad \frac{\lambda_c}{\lambda_y} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{equação 152})$$

$$c_1 = (2 \cdot \cos(\theta) - 1) \cdot \lambda_y + 4 \cdot (1 - \cos(\theta)) \cdot \lambda_c \quad \text{para} \quad \frac{\lambda_c}{\lambda_y} \leq \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{\lambda_c}{\cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1}(c_2) \right)} \quad \text{para} \quad \frac{\lambda_c}{\lambda_y} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{equação 153})$$

A superfície de plastificação adotada tem a mesma forma da superfície de ruptura de Ottosen (1977). Para determinação das superfícies de carregamento, adotou-se o endurecimento isotrópico, ou seja, a superfície de plastificação aumenta o seu tamanho sem sofrer variação na sua forma. Adicionalmente, no modelo implementado, considera-se plasticidade associada, conforme o sugerido por Owen e Hinton (1980).

A regra de endurecimento, adotada neste trabalho, foi obtida com base na relação uniaxial tensão-deformação em compressão, proposta pela FIB (Bulletin 55, 2010), apresentada anteriormente. A partir desta relação obtém-se a tensão efetiva em função de deformação plástica efetiva.

### 6.1.2 Concreto sob esforços de tração

Conforme exposto anteriormente, sabe-se que o concreto apresenta baixa resistência aos esforços de tração, o que resulta em fissuração para baixos níveis de tensão (inclusive em condições de serviço).

Para reproduzir tal comportamento utilizou-se o modelo de fissuras distribuídas (*smearred crack model*) introduzido por Rashid (1968). Esse modelo caracteriza-se pela ausência de alterações na topologia da malha de elementos finitos após o aparecimento da fissura, sendo o dano introduzido através da modificação da relação tensão-deformação em tração.

De acordo com esse modelo, o concreto, que inicialmente apresenta isotropia, torna-se ortotrópico após a fissuração, tendo os eixos materiais principais orientados no sentido das fissuras. As propriedades do material variam dependendo do estado de tensão e deformação, de modo que, após o aparecimento das fissuras (quando a tensão principal de tração exceder um valor pré-determinado), o módulo de elasticidade longitudinal é reduzido perpendicularmente ao plano da fissura e o efeito de Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido.

O modelo é composto por um critério de fissuração, uma regra para a colaboração do concreto entre fissuras (*tension stiffening*) e um modelo para transferência de tensões de cisalhamento.

#### 6.1.2.1 Critério de fissuração

O concreto sob tração é modelado como um material elástico-linear até o momento da fissura. Segundo a formulação proposta por Hinton (1988), verifica-se se o nível de tensão em cada ponto de integração alcançou a superfície de ruptura. Para os esforços de tração, também adotou-se o critério de ruptura de Ottosen, descrito pela equação 134.

Para a avaliação do nível de tensão em um ponto de integração, calcula-se a tensão principal de tração através da seguinte expressão:

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{I_1}{3} \quad (\text{equação 154})$$

Onde:

$\sigma_1$  é a tensão principal de tração.

Para um estado de tensão que atinge a superfície de ruptura, a distinção entre fissuração e esmagamento do concreto é feita através do critério proposto pelo CEB (Bulletin N°156, 1983). Esse critério apresenta a seguinte formulação:

$$\begin{cases} \sigma_1 \geq \frac{f_{ctm}}{2} & \text{concreto fissurado} \\ \sigma_1 < \frac{f_{ctm}}{2} & \text{concreto esmagado} \end{cases} \quad (\text{equação 155})$$

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se que a fissura ocorra em um plano ortogonal à tensão  $\sigma_1$ . A partir deste ponto, o comportamento do concreto deixa de ser isotrópico e passa a ser ortotrópico, com os eixos materiais locais coincidindo com as direções principais de tensões.

No modelo implementado é permitida a ocorrência de duas fissuras em cada ponto de integração. Dessa forma, uma fissura secundária pode ocorrer no ponto de integração para um carregamento posterior.

Utiliza-se o procedimento da fissura fixa, em que a direção da primeira fissura permanece inalterada e a tensão de tração é avaliada perpendicularmente ao seu plano. Se esta tensão satisfizer o critério exposto na equação 155, uma nova fissura, perpendicular a já existente, é formada e todas as componentes de tensão são zeradas no ponto de integração analisado.

#### 6.1.2.2 Regra para a colaboração do concreto entre fissuras (*tension stiffening*)

O comportamento estrutural do concreto armado é altamente dependente da interação entre concreto e aço. A aderência entre os dois materiais é o que viabiliza a transmissão dos esforços e sua qualidade é a chave para a abertura de fissuras.

Quando em um ponto da estrutura a resistência à tração do concreto é atingida forma-se uma fissura. Após a fissuração, os esforços são transmitidos ao concreto por mecanismos de aderência, de modo que o concreto entre as fissuras continua resistindo a esforços de tração. Este fenômeno é conhecido como **efeito de rigidez à tração** (*tension stiffening effect*).

Admitiu-se, nesse trabalho, a aderência perfeita entre aço e concreto. A degradação da aderência é considerada indiretamente pela adoção de um ramo descendente suave na curva tensão-deformação do concreto tracionado.

Adotou-se a curva tensão-deformação para o concreto tracionado utilizada por Prates Júnior (1992). Essa curva é constituída por um ramo ascendente e outro descendente (Figura 32). O ramo ascendente corresponde à resposta elástica linear. O ramo descendente representa a degradação linear da aderência, retratando o comportamento pós-fissuração.

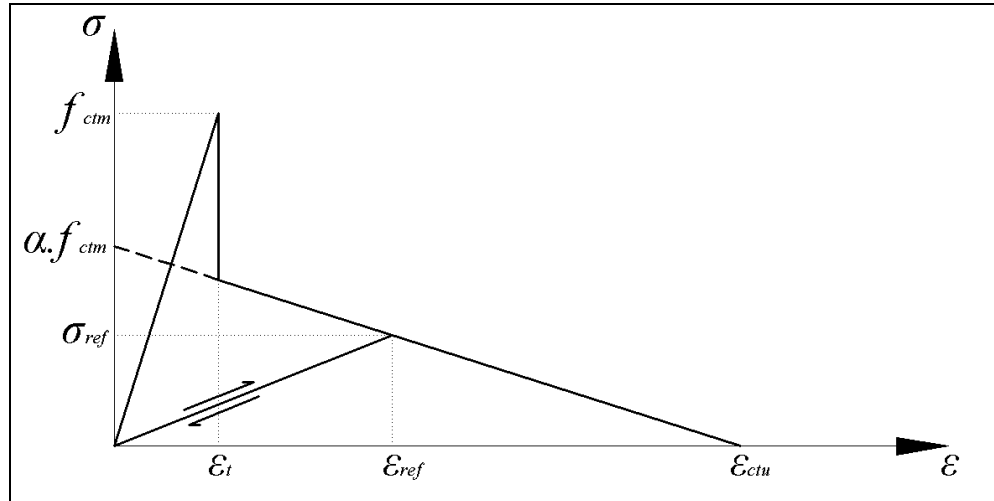


Figura 32: relação tensão-deformação para esforços de tração.

A relação constitutiva é expressa pela seguinte equação:

$$\sigma = \alpha \cdot f_{ctm} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ctu}} \right) \quad (\text{equação 156})$$

Onde:

$\alpha$  é um parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente;

$\varepsilon_{ctu}$  é a deformação limite em tração.

O modelo prevê um ramo relativo à descarga (Figura 32) devido às condições de carregamento ou fissuração da estrutura. Se a deformação  $\varepsilon$  é pequena em comparação à deformação  $\varepsilon_{ref}$ , armazenada como a máxima deformação de tração alcançada através da fissura pelo ponto de integração, a tensão  $\sigma$  é calculada por:

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad (\text{equação 157})$$

Onde:

$\sigma_{ref}$  é a tensão interpolada correspondente à deformação  $\varepsilon_{ref}$ .

As componentes de tensão e deformação calculadas nos pontos de integração têm como orientação o sistema de coordenadas cartesianas. Tendo em vista que a equação 156 é válida para o sistema local de eixos materiais, há a necessidade de determinar as tensões e deformações nas direções principais. Para tal, utiliza-se a matriz de rotação do sistema global para o sistema local, dada por:

$$\sigma^l = R^l \cdot \sigma^g \quad (\text{equação 158})$$

Onde:

$l$  faz referência ao sistema local;

$g$  faz referência ao sistema global.

Utilizam-se as equações 156 e 157, no sistema local, para o cálculo das tensões normais ao plano da fissura. Após retorna-se ao sistema global de coordenadas através de:

$$\sigma^g = R^g \cdot \sigma^l \quad (\text{equação 159})$$

### 6.1.2.3 Modelo para transferência de tensões de corte

Devido às condições de carregamento, não linearidades e fissuração, podem ocorrer mudanças nas direções principais. Tal efeito pode produzir deslocamentos relativos das faces de um ponto fissurado gerando tensões de corte no plano da fissura.

Dentro os mecanismos de transferência de esforços transversais destacam-se o engrenamento de agregados (*aggregate interlock*) e o efeito de pino da armadura (*dowell effect*). Ambos os mecanismos são controlados pela abertura da fissura, e quanto maior é este valor, menor é a capacidade de transferência de tensões de corte.

A modelagem dos efeitos desses mecanismos no modelo de fissuras distribuídas é complexo. Normalmente usam-se aproximações para considerar a capacidade de transferência de tensões de corte no concreto fissurado. Basicamente, essas aproximações utilizam um valor reduzido para o módulo de elasticidade transversal, correspondente ao plano fissurado. Hinton (1988)



propõe o módulo de deformação por corte reduzido, onde o fator de redução é relacionado com a deformação de tração normal ao plano da fissura.

$$G_c = \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_t}{0,005} \right)^{k_1} \right] \cdot G_0 \quad (\text{equação 160})$$

Onde:

$G_c$  é o módulo de elasticidade transversal reduzido;

$G_0$  é o módulo de deformação por corte do concreto não fissurado;

$\varepsilon_t$  é a deformação fictícia de tração, normal ao plano da fissura;

$k_1$  é um parâmetro que varia entre 0,3 e 1,0 (CERVENKA, 1985).

O módulo de deformação por corte do concreto não fissurado é dado por:

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{equação 161})$$

## 6.2 AÇO

A relação constitutiva empregada para simular o comportamento do aço corresponde ao modelo elastoplástico exposto no item 3.2.2.4. Admite-se a relação unidimensional devido ao modelo de armadura incorporada atribuir apenas esforços normais à armadura.

## 7 PROGRAMA TERMOMECÂNICO

Neste capítulo detalha-se o desenvolvimento e a implementação computacional da rotina de análise termomecânica. Esse programa, que contempla análise não linear térmica e mecânica, foi desenvolvido em linguagem FORTRAN.

Através do programa deseja-se acompanhar a evolução do campo deslocamentos, temperaturas, tensões e deformações bem como o desenvolvimento de fissuras ao longo da estrutura de concreto armado submetida à ação de incêndio em situações de estado plano de tensões, estado plano de deformações e problemas axissimétricos.

### 7.1 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

Foram implementados três tipos de elementos unidimensionais para a modelagem das barras de aço da armadura e três tipos de elementos finitos retangulares bidimensionais para a modelagem do concreto.

Os elementos finitos unidimensionais consistem nos elementos de 2, 3 e 4 nós da família de Lagrange. Na Figura 33, apresentam-se os elementos unidimensionais no sistema de coordenadas naturais.

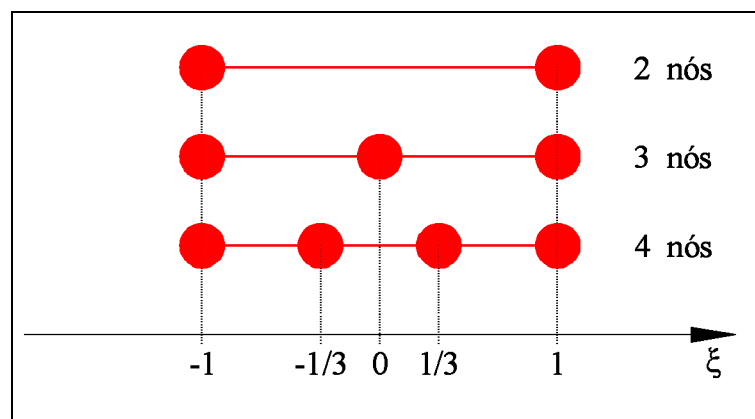


Figura 33: elementos unidimensionais de 2, 3 e 4 nós.

Segundo Zienkiewicz et al. (2005), as funções de forma unidimensionais têm seu termo geral dado pelos polinômios de Lagrange:

$$l_k^n(\xi) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} \quad (\text{equação 162})$$

Onde:

$n$  é o número de subdivisões do elemento na direção do eixo natural  $\xi$ ;

$k$  é o número do nó onde a função de forma tem valor unitário;

$i$  é o contador do número de nós do elemento.

Os elementos bidimensionais de 4 (interpolação linear) e 9 (interpolação quadrática) nós também pertencem à família de Lagrange. Zienkiewicz et al. (2005) fornece a expressão geral para esses elementos:

$$N_{KL} = l_k^n(\xi) \cdot l_l^m(\eta) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^m \frac{\eta - \eta_j}{\eta_l - \eta_j} \quad (\text{equação 163})$$

Onde:

$n$  e  $m$  são os números de subdivisões do elemento nas direções dos eixos naturais  $\xi$  e  $\eta$ ;

$k$  e  $l$  são os números dos nós onde a função de forma tem valor unitário;

$i$  e  $j$  são os contadores dos números de nós do elemento.

Na Figura 34, apresentam-se os elementos finitos bidimensionais utilizados.

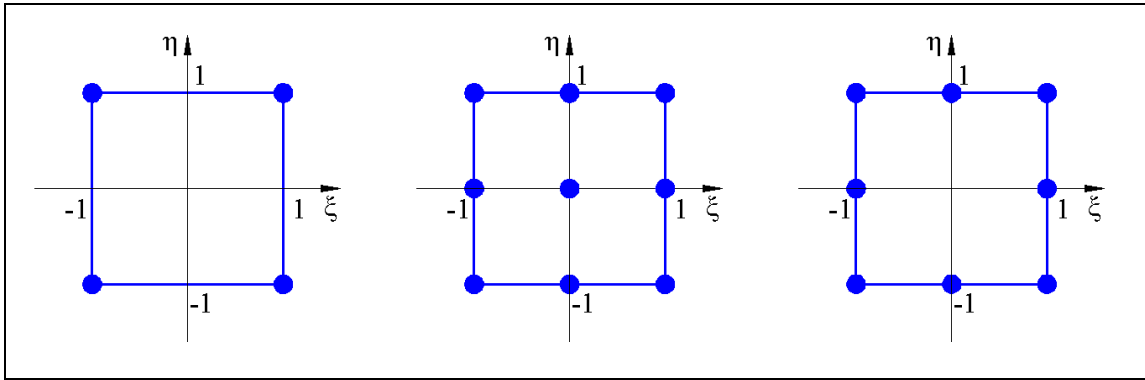


Figura 34: elementos bidimensionais de 4, 9 e 8 nós.

O elemento bidimensional de 8 nós (interpolação quadrática) pertence à família serendipity. Não existe uma equação que descreva o termo geral para todas as funções de forma dessa família de elementos. Assim, apresentam-se as expressões gerais para as funções de forma dos nós dos cantos do elemento e para os nós intermediários respectivamente (ZIENKIEWICZ et al., 2005):

$$\begin{aligned}
 N_a &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi_a \xi) \cdot (1 + \eta_a \eta) \cdot (\xi_a \xi + \eta_a \eta - 1) \\
 N_a &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi^2) \cdot (1 + \eta_a \eta) & \xi_a &= 0 \\
 N_a &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi_a \xi) \cdot (1 + \eta^2) & \eta_a &= 0
 \end{aligned}
 \tag{equação 164}$$

Onde:

$\xi_a$  e  $\eta_a$  são as coordenadas naturais do nó onde a função de forma tem valor unitário.

## 7.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE GAUSS-LEGENDRE

Segundo Assan (2003), para calcular o valor aproximado de uma integral definida utiliza-se uma combinação linear de valores da função  $f(x)$  em certos pontos  $x_i$  tal que:  $a \leq x_i \leq b$  e certos valores  $w_i$ , que são os fatores de peso, de maneira que a integral é calculada somando-se os produtos do peso em cada ponto pelo valor da função no mesmo ponto, resultando em:

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + \dots + w_n \cdot f(x_n) \quad (\text{equação 165})$$

Os pontos  $x_i$  e os pesos  $w_i$  são determinados de modo que a regra seja exata para qualquer polinômio de grau  $2n-1$ , sendo  $n$  o número de pontos tomados no intervalo  $-1 \leq x_i \leq +1$ . Esse intervalo corresponde a uma mudança de variável, de  $x$  para  $\zeta$  (coordenada natural). Utiliza-se o Jacobiano da transformação para executar essa mudança de variável.

Os pontos de integração têm suas posições simétricas em relação ao centro do intervalo de integração. Os pares simétricos têm o mesmo peso. A expressão que representa a integração numérica passa a ser:

$$\int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^{+1} g(\zeta)d\zeta = J \sum_{i=1}^n w_i \cdot g(\zeta_i) \quad (\text{equação 166})$$

Onde:

$J$  representa o Jacobiano da transformação;

$n$  é a ordem do polinômio;

$i$  é o contador de pontos de integração.

O programa desenvolvido possibilita a integração numérica pelo método de Gauss-Legendre de 1º, 2º e 3º ordem.

Na Tabela 10, apresentam-se as coordenadas naturais dos pontos de integração numérica de Gauss-Legendre e seus respectivos pesos.

Tabela 10: coordenadas e pesos para a integração de Gauss-Legendre.

Ordem de integração	$\pm\zeta$	$w_i$
1	0	2
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$

### 7.3 FLUXOGRAMA DE PROGRAMAÇÃO

O programa apresenta duas grandes estruturas de programação. A primeira parte, relativa à análise térmica (rotina principal denominada HEAT2D), é baseada no programa apresentado por Huang e Usmani (1994). A segunda parte, relativa à análise elasto-viscoplástica (rotina principal denominada MVISCO), é baseada no programa apresentado por Owen e Hinton (1980).

Na Figura 35, apresenta-se o fluxograma detalhado do programa termomecânico.

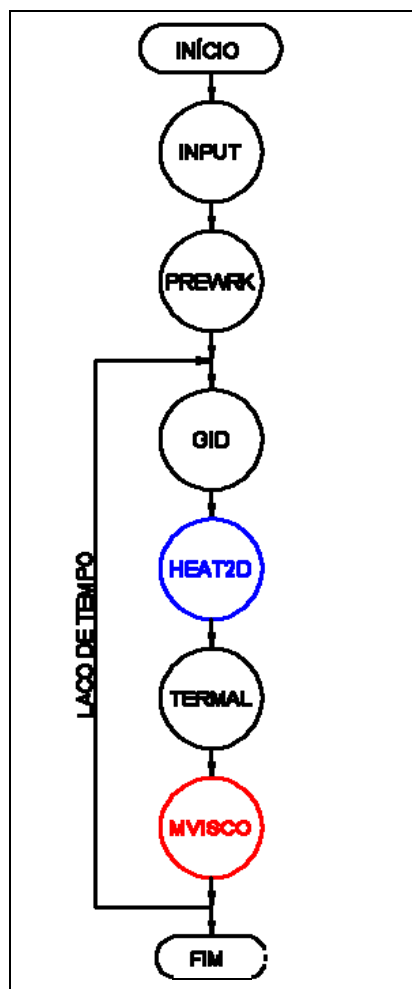


Figura 35: fluxograma do programa termomecânico.

O programa inicia com duas rotinas, INPUT e PREWRK. A rotina INPUT é responsável pela leitura dos dados de entrada do problema. Já a rotina PREWRK é responsável pela preparação dos dados para o programa (condições de contorno, etc.). Após a parte inicial, o programa

inicia a análise temporal. A função GID tem como objetivo a criação dos arquivos para o pós-processamento, bem como a impressão dos dados calculados.

A rotina HEAT2D calcula o campo de temperaturas em um dado instante de tempo. Já a função TERMAL tem como objetivo o cálculo das deformações térmicas. A função MVISCO realiza a análise elasto-viscoplástica da estrutura, utilizando a deformação térmica previamente calculada como deformação inicial. Ao fim do tempo total de ensaio, o programa encerra a análise.

Na Figura 36, apresenta-se o fluxograma detalhado da rotina de análise térmica HEAT2D.

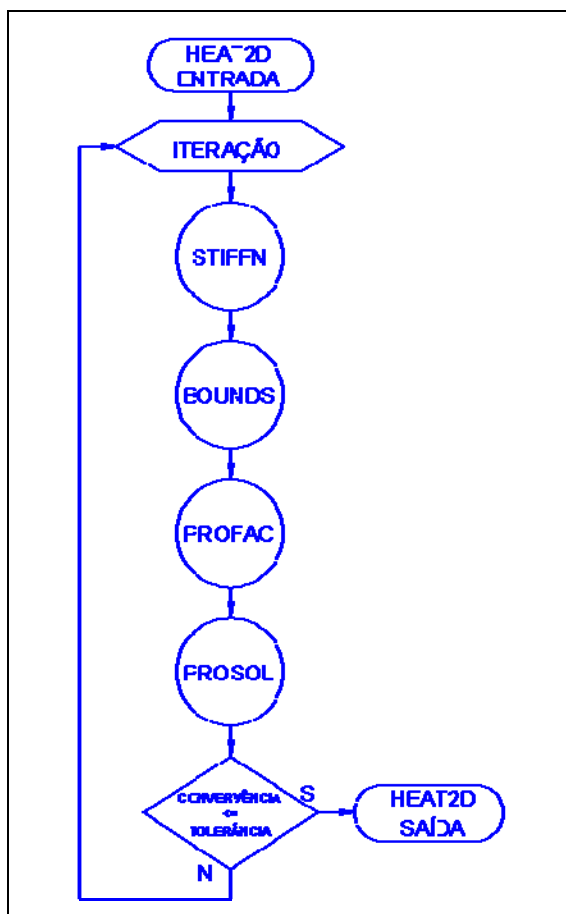


Figura 36: fluxograma da rotina HEAT2D.

Dentro do laço de iterações situam-se quatro rotinas. A primeira, STIFFN, é responsável pela criação das matrizes de condutividade e de capacitância térmica da estrutura (lado esquerdo da equação 75). Nessas matrizes são somadas as contribuições do concreto e da armadura de aço.

A segunda rotina, BOUNDS, aplica as condições de contorno do problema (condições de convecção, radiação, temperaturas prescritas e fluxos de calor prescritos). As rotinas PROFAC e PROSOL resolvem o sistema através da técnica de “perfil”. Ao fim de cada iteração verifica-se a convergência dos resultados.

Na Figura 37, apresenta-se o fluxograma detalhado da rotina de análise mecânica MVISCO.

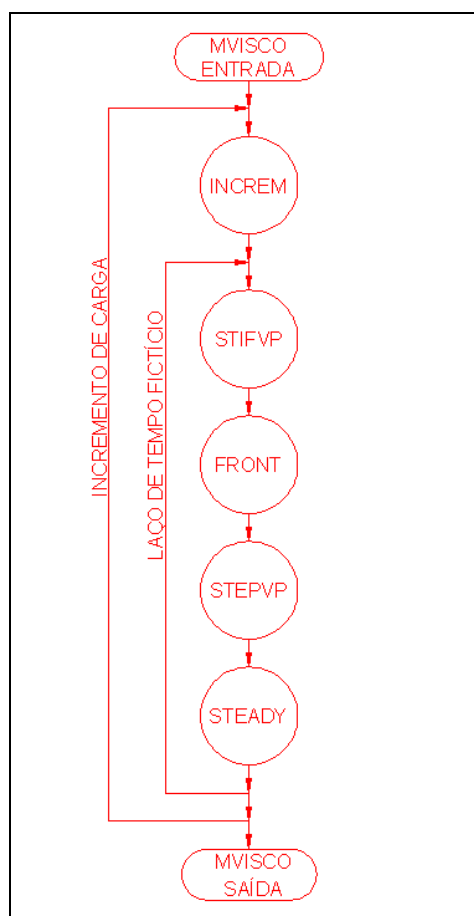


Figura 37: fluxograma da rotina MVISCO.

A rotina é composta por um laço de incrementos de carga e outro laço de tempo fictício, para resolução de problemas elasto-viscoplásticos. A função INCREM calcula os incrementos de carga e deslocamentos prescritos a serem utilizados na resolução do problema. Dentro do laço de tempo fictício apresenta-se a função STIFVP. Ela é responsável pela montagem da matriz de rigidez da estrutura (considerando a contribuição do concreto e da armadura de aço). A rotina FRONT resolve o sistema de equações mecânico, utilizando a técnica “frontal”.

A rotina STEPVP é responsável pelo cálculo das equações 79 e 82, bem como pelo cálculo do equilíbrio da estrutura. Já a rotina STEADY verifica se as condições de equilíbrio foram



obtidas. Como já mencionado, a chegada às condições estacionárias pode ser determinada pela taxa de deformação, em particular quando  $\dot{\underline{\epsilon}}_{vp}$  se torna tão pequeno quanto se queira.

#### 7.4 PRÉ E PÓS-PROCESSAMENTO

O pré e o pós-processamento dos dados são executados por meio do software GID, versão 10.0.

A etapa de pré-processamento é executada rapidamente com a geração de malha no software GID. As condições de contorno termomecânicas são introduzidas através da interface gráfica do programa. A entrada de dados no programa termomecânico é feita por meio de um arquivo de texto (*.txt*) contendo todas as informações necessárias.

O pós-processamento é feito através dos arquivos de saída do programa termomecânico. Esses arquivos foram configurados para servirem diretamente de entrada no pós-processamento.

Os resultados, obtidos através do programa termomecânico, são: o campo de temperaturas nodais, o campo de deslocamentos nodais e o campo de tensões nos pontos de Gauss, tanto para os elementos de concreto quanto para os elementos de barra da armadura de aço. No programa termomecânico não é calculada nenhuma extrapolação nodal das tensões nem suavização de tensões nodais. Esses processos são realizados no próprio pós-processador (GID). A extrapolação nodal das tensões é feita através da matriz de extrapolação.

O programa GID fornece três maneiras distintas de efetuar a suavização nodal: a média aritmética dos valores de tensão concorrentes ao nó, utilização do valor máximo da tensão concorrente ao nó e utilização do valor mínimo da tensão concorrente ao nó.

## 8 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A seguir serão apresentados alguns exemplos do funcionamento do programa termomecânico.

Inicialmente será apresentado um exemplo comparativo entre os resultados térmicos do programa desenvolvido com aqueles obtidos por meio do programa de análise térmica *Super Tempcalc*.

Após, serão apresentados dois exemplos que fazem a comparação dos campos térmicos expostos pelo CEB (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)) e aqueles obtidos pelo programa.

Por fim, é apresentado um exemplo que faz a comparação termomecânica entre resultados numéricos e experimentais.

### 8.1 AVALIAÇÃO ENTRE CAMPOS NUMÉRICOS DE TEMPERATURAS

O primeiro exemplo foi desenvolvido no programa de análise térmica por elementos finitos *Super Tempcalc* (*Super Tempcalc – Temperature Calculation and Design v.5 – software* desenvolvido pela FSD (*Fire Safety Design*, Suécia)) e gentilmente cedido pelo Prof. Dr. Valdir Pignatta e Silva, da Escola Politécnica da USP.

Segundo Costa (2008), o *Super Tempcalc* é um *software* de análise térmica bidimensional, não linear em regime transiente, que incorpora propriedades térmicas dos materiais variáveis com a temperatura.

O software foi validado contra inúmeros resultados experimentais desde 1985, quando a primeira versão do *package “PC Tempcalc”* de análise térmica foi lançada (ANDERBERG, 2004 apud COSTA, 2008). A confiabilidade do módulo de análise térmica do *Super Tempcalc* é reconhecida, sendo usado pelo CEN/TC 250/SC2 (*European Committee for Standardization*) na elaboração da *prestandard* ENV 1992-1-2:1995 e da *standard* EN 1992-1-2:2004.

O exemplo cedido consiste numa placa de concreto retangular submetida à curva ISO 834:1975 em três de suas faces laterais. As dimensões da placa bem como a discretização são mostradas na Figura 38.

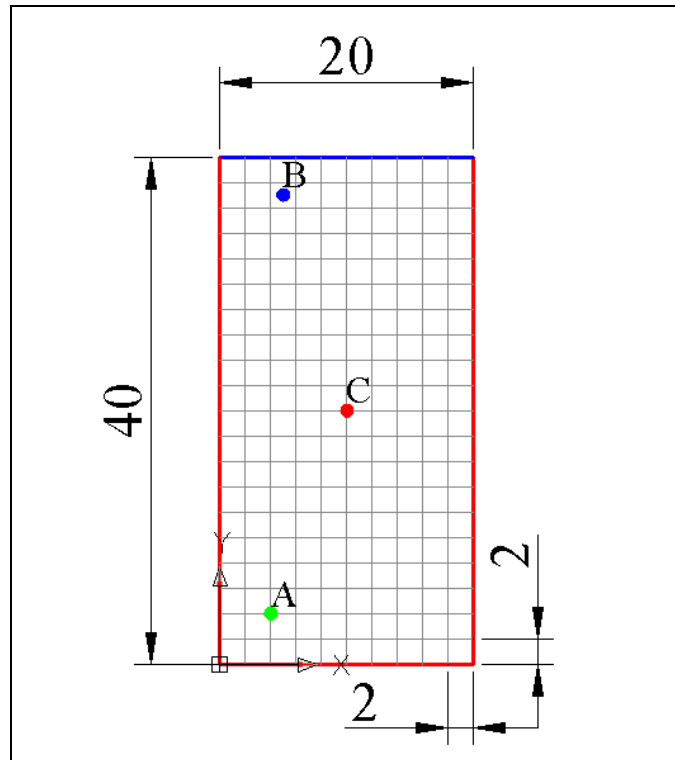


Figura 38: dimensões e discretização da placa em estudo [cm].

Também na Figura 38 apresentam-se as condições de contorno. As linhas na cor vermelha correspondem às superfícies expostas à curva ISO 834:1975. Já a linha na cor azul corresponde à superfície adiabática (sem trocas de calor).

Na análise feita através do *Super Tempcalc*, utilizou-se 3200 elementos de quatro nós. Na análise feita no programa desenvolvido, utilizou-se 200 elementos retangulares de nove nós (família de Lagrange).

As propriedades térmicas utilizadas são:

Tabela 11: propriedades térmicas do concreto.

Emissividade $e$ [adimensional]	0,7
Coefficiente de Transferência de Calor por Convecção $\alpha_c$ [W/(m <sup>2</sup> ·°C)]	25

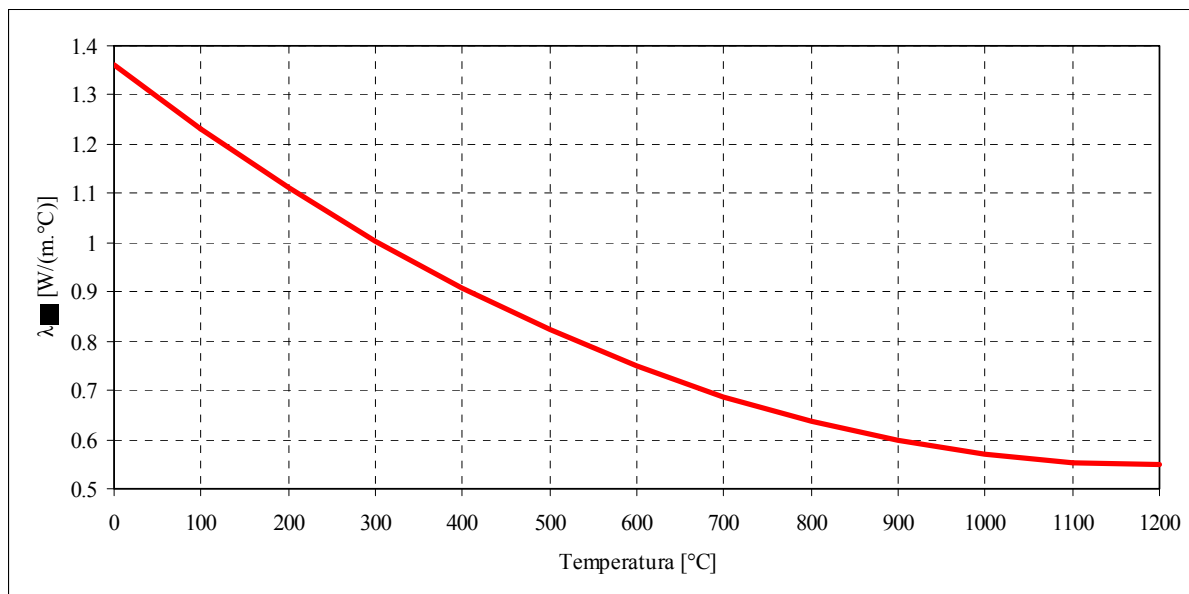


Figura 39: variação da condutividade térmica do concreto.

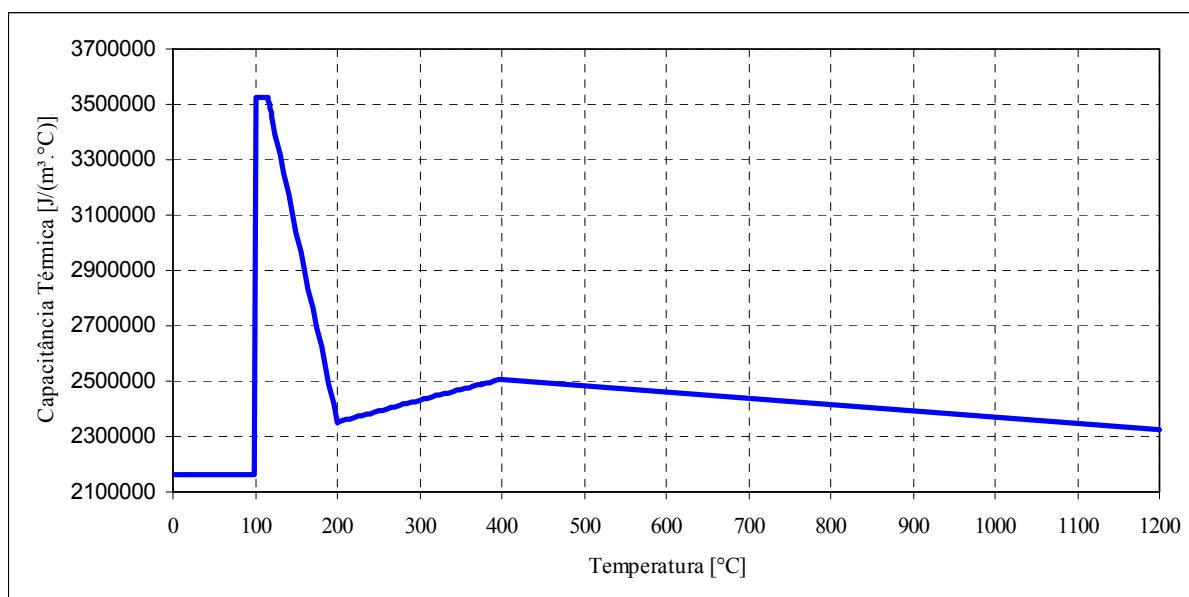


Figura 40: variação da capacitância térmica do concreto (produto da massa específica pelo calor específico).

A comparação entre resultados foi proposta da seguinte maneira. Confrontaram-se as curvas de evolução de temperaturas obtidas pelas duas simulações em três pontos da placa (pontos “A”, “B” e “C”, ver Figura 38). Também foram calculados os erros relativos e absolutos entre as curvas das duas simulações. O ponto “A” é situado nas coordenadas  $x=4\text{cm}$  e  $y=4\text{cm}$ . O ponto “B” é situado nas coordenadas  $x=5\text{cm}$  e  $y=37\text{cm}$ , e o ponto “C” é localizado nas coordenadas  $x=10\text{cm}$  e  $y=20\text{cm}$ .

A seguir apresentam-se as comparações das evoluções de temperaturas, erros relativos e absolutos nos pontos “A”, “B” e “C”.

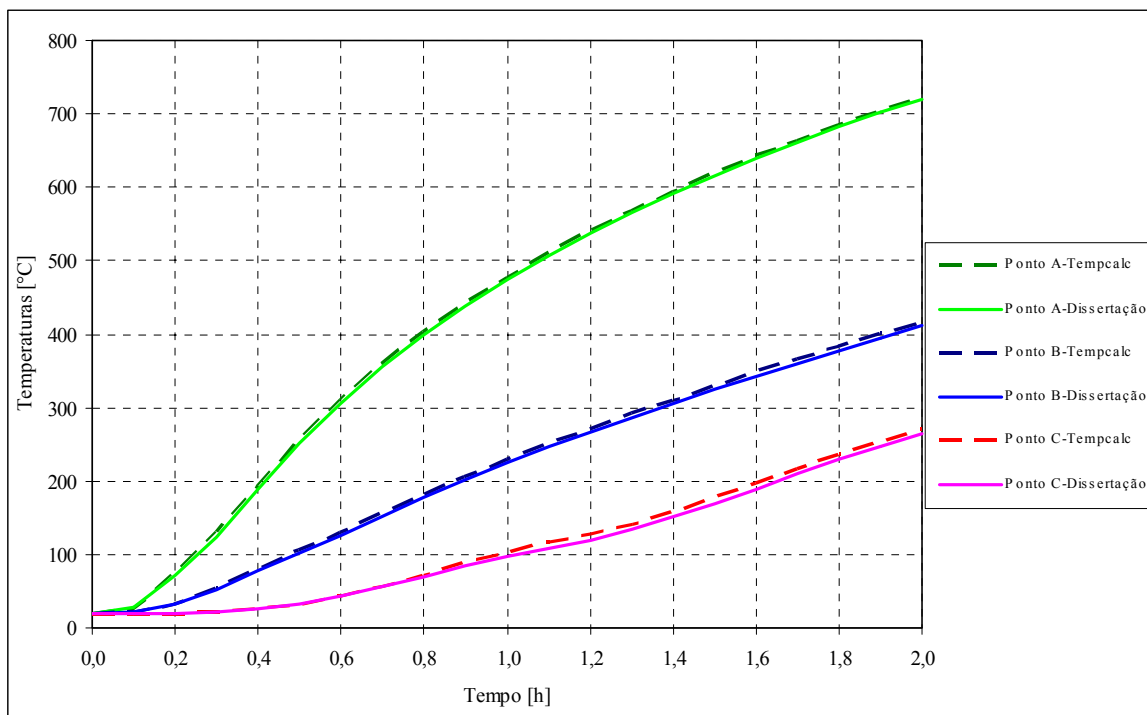


Figura 41: comparação entre as curvas de evolução de temperaturas nos pontos “A”, “B” e “C”, obtidas através do *Super Tempcalc* e do programa proposto.

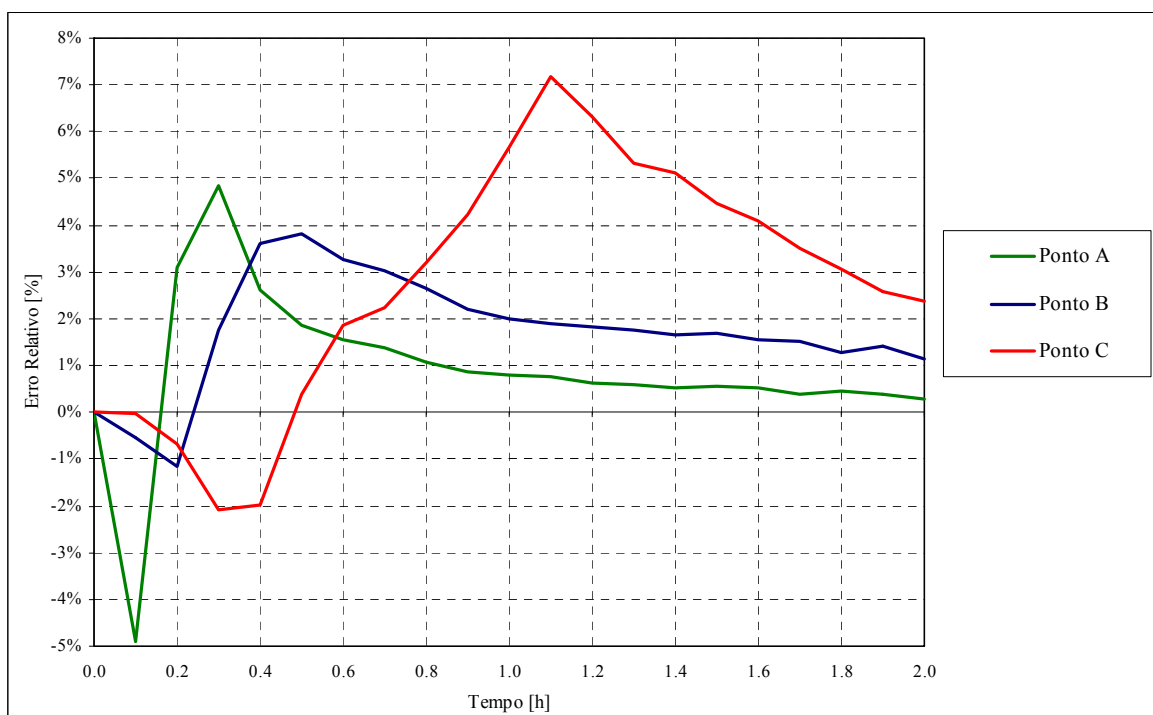


Figura 42: erros relativos nas evoluções de temperaturas nos pontos “A”, “B” e “C”.

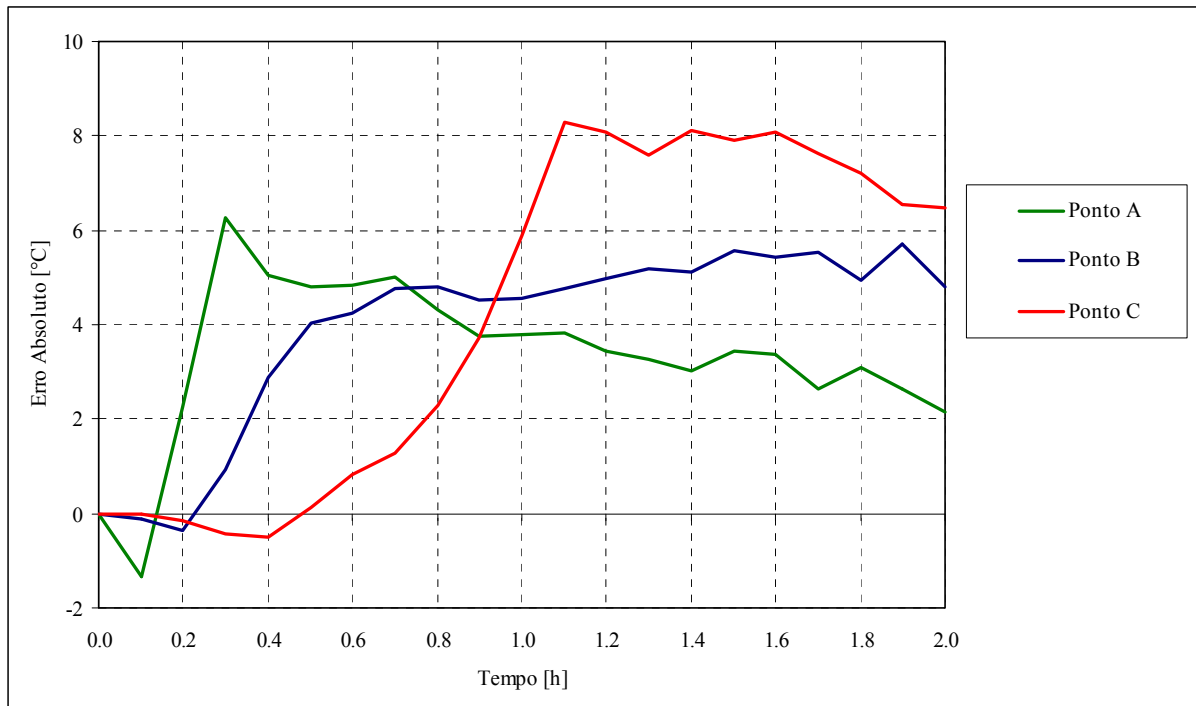


Figura 43: erros absolutos nas evoluções de temperaturas nos pontos “A”, “B” e “C”.

Nota-se a boa aproximação entre os resultados do programa desenvolvido com os obtidos pelo *Super Tempcalc*.

Analisando a Figura 42 verifica-se para o ponto “A” que o erro relativo apresenta dois picos com valores de aproximadamente 5%. Esses dois picos correspondem a um erro absoluto de aproximadamente  $-1^{\circ}\text{C}$  e  $6^{\circ}\text{C}$  respectivamente (Figura 43). Já para o ponto “C” verifica-se um erro relativo máximo aproximado de 7% (Figura 42), que corresponde a um erro absoluto de aproximadamente  $8^{\circ}\text{C}$  (Figura 43).

A seguir apresentam-se os campos de temperatura (em  $^{\circ}\text{C}$ ) para os tempos de  $t=0,0\text{h}$ ,  $t=0,2\text{h}$ ,  $t=0,4\text{h}$ ,  $t=0,6\text{h}$ ,  $t=1,0\text{h}$  e  $t=2,0\text{h}$ , obtidos pelo programa térmico desenvolvido.

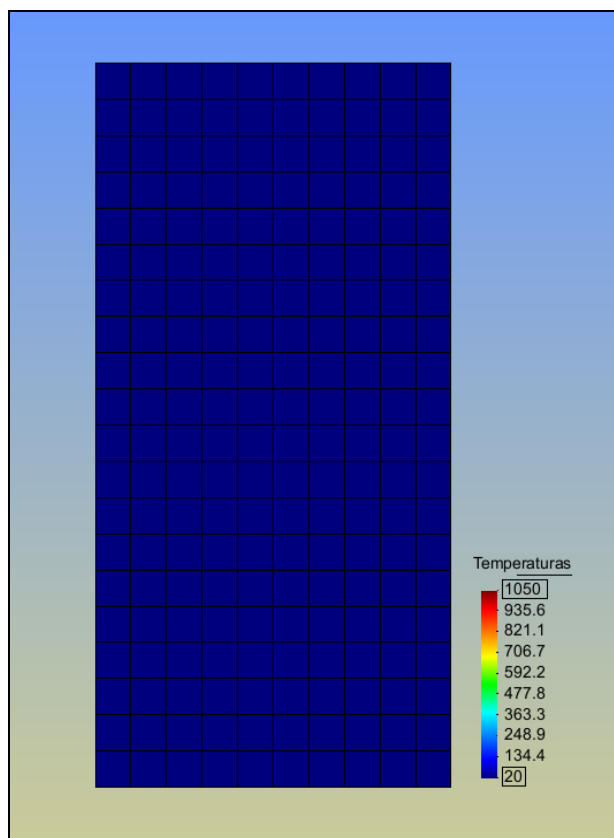


Figura 44: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=0,0$  horas.

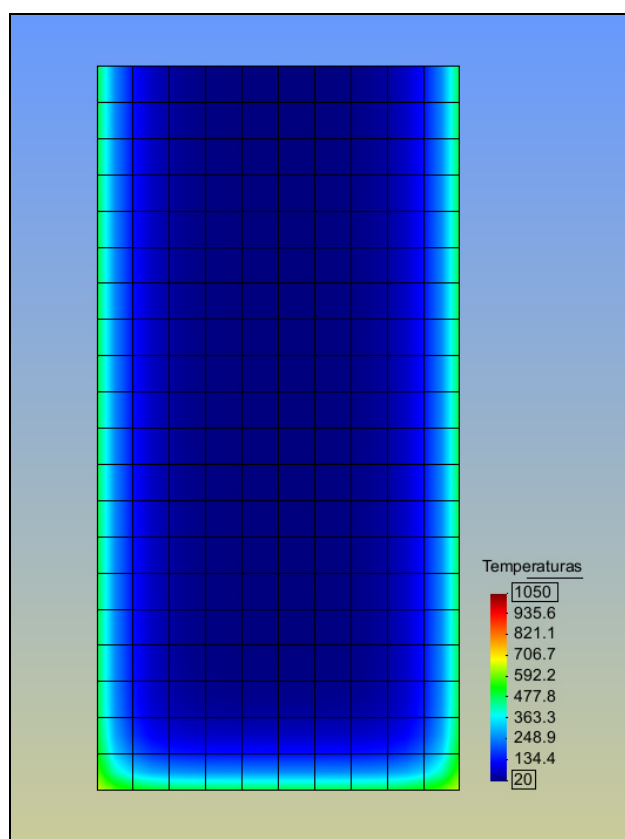


Figura 45: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=0,2$  horas.

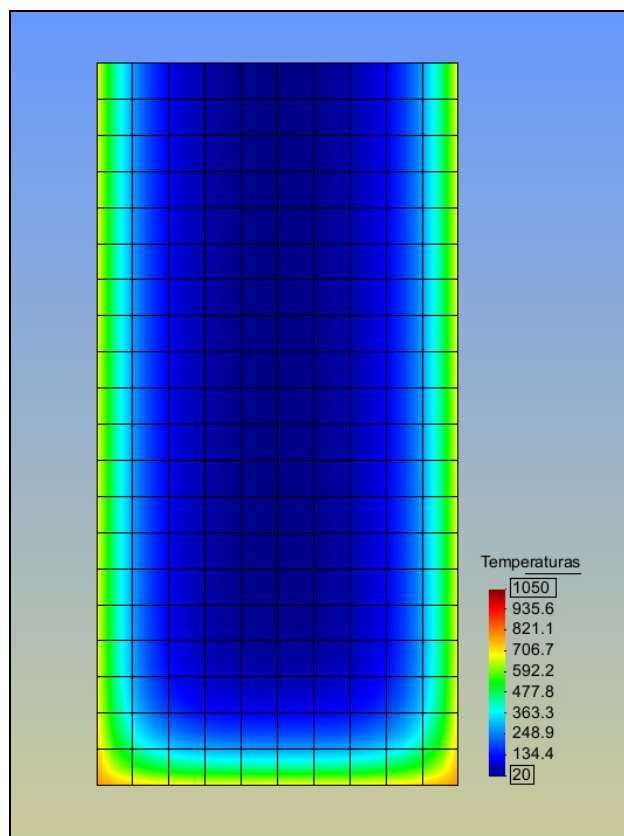


Figura 46: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=0,4$  horas.

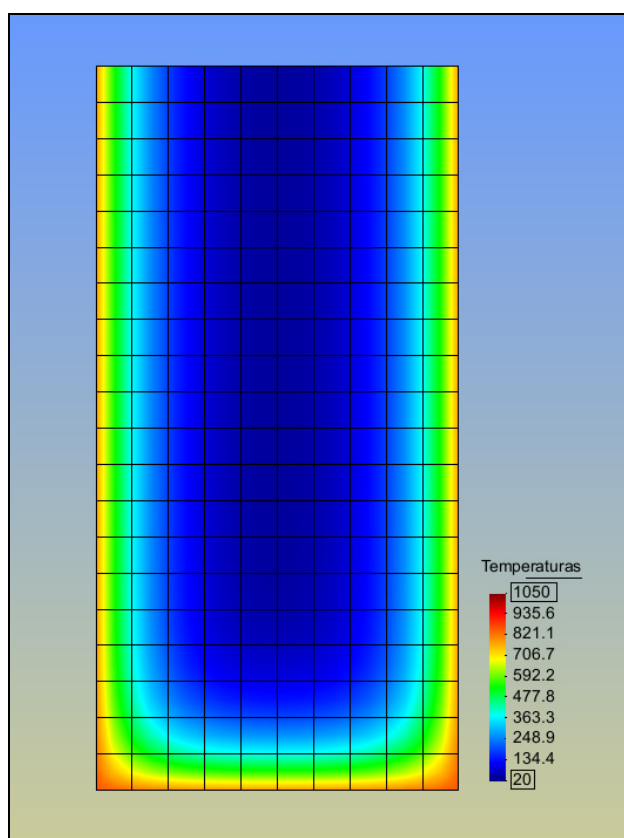


Figura 47: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=0,6$  horas.



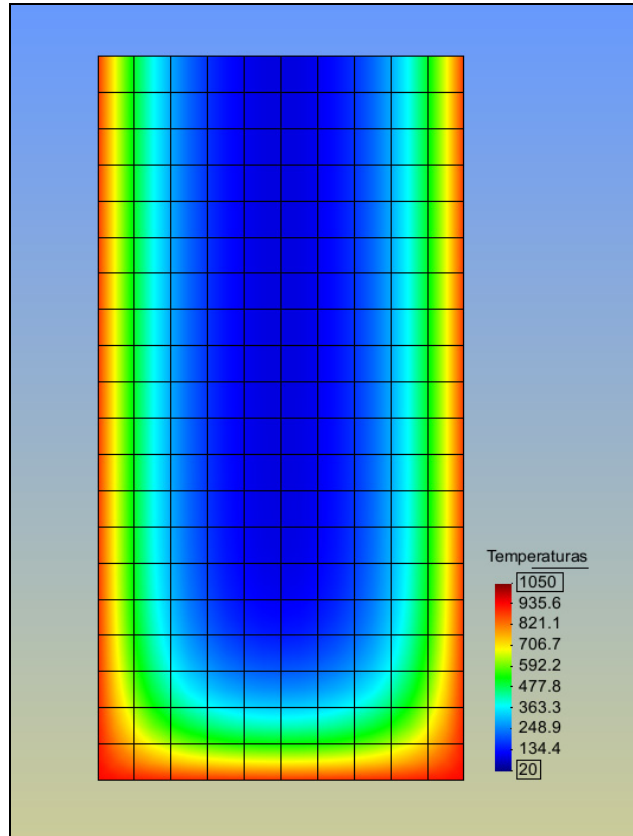


Figura 48: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=1,0$  horas.

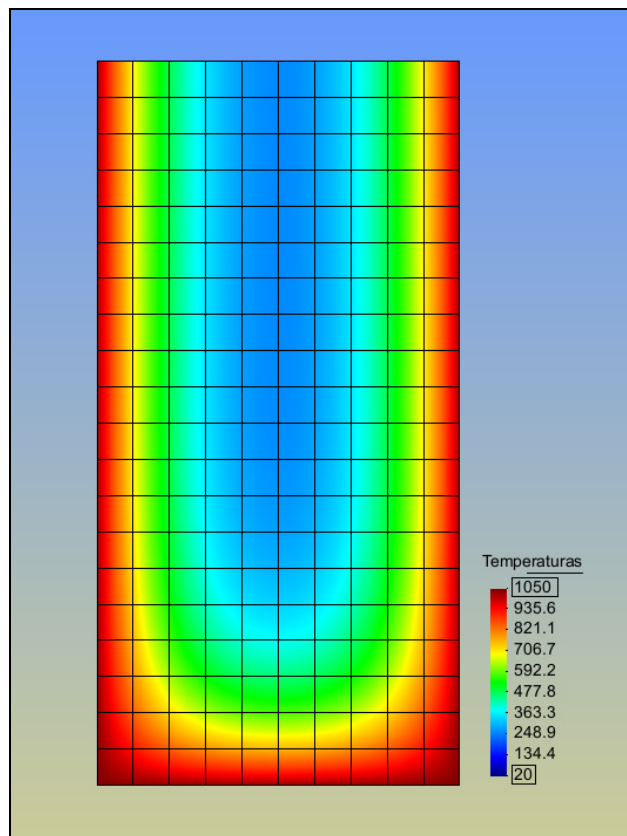


Figura 49: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=2,0$  horas.

## 8.2 AVALIAÇÃO ENTRE CAMPOS NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DE TEMPERATURAS

O CEB (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)) apresenta algumas seções características de elementos estruturais sujeitas à curva de incêndio ISO 834:1975. Os resultados obtidos consideraram a dependência das propriedades termomecânicas em função da temperatura. Nesse trabalho foram utilizadas para comparação as seções de um pilar e de uma laje, todas estas estruturas com um campo de temperatura inicial de 20°C.

As propriedades termomecânicas a 20°C apresentadas por CEB (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)), são:

Tabela 12: propriedades termomecânicas do concreto a 20°C.

Tipo de Agregado do Concreto	Agregado Silicoso
Massa Específica $\rho_{c,20^{\circ}C}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2350
Conteúdo de Umidade por Peso $U$ [%]	4
Difusividade Térmica $a_{20^{\circ}C} = \lambda_{c,20^{\circ}C} / (c_{p,20^{\circ}C} \cdot \rho_{c,20^{\circ}C})$ [m <sup>2</sup> /s]	$1,05 \cdot 10^{-6}$
Emissividade $e$ [adimensional]	0,4
Coefficiente de Transferência de Calor por Convecção $\alpha_c$ [W/(m <sup>2</sup> ·°C)] (superfície exposta)	25
Coefficiente de Transferência de Calor por Convecção $\alpha_c$ [W/(m <sup>2</sup> ·°C)] (superfície não exposta)	4 <sup>1,2</sup>

Nota: 1-Efeito da radiação considerado separadamente; 2-Fonte: Eurocode 2 (2004).

A degradação dessas propriedades em função da temperatura também é apresentada pelo CEB em gráficos resultantes de experimentos (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)).

### 8.2.1 Seção transversal de um pilar

O pilar em estudo apresenta as seguintes dimensões (em centímetros) dadas na Figura 50.

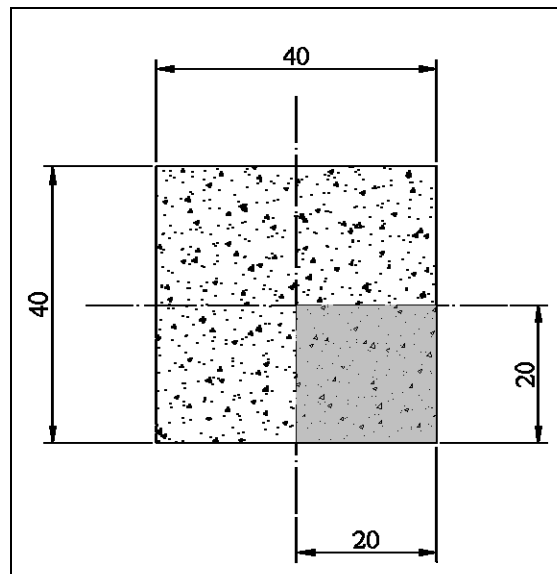


Figura 50: dimensões da seção transversal do pilar em estudo [cm].

O pilar sofre a ação da curva ISO 834:1975 nas quatro faces.

Em virtude da simetria apresentada pela seção, a análise foi realizada em apenas um quarto da seção transversal do pilar (trecho hachurado na Figura 50). Na análise, utilizou-se o elemento retangular de nove nós (família de Lagrange). A discretização da seção é mostrada na Figura 51.

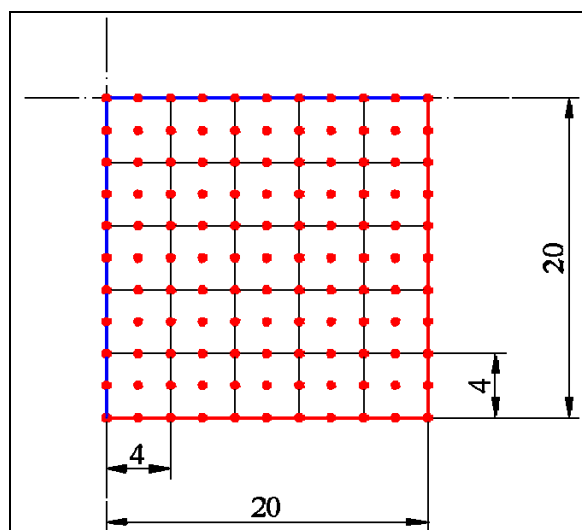


Figura 51: discretização e condições de contorno da seção do pilar [cm].

Também na Figura 51 apresentam-se as condições de contorno. As linhas na cor vermelha (na borda da estrutura) correspondem às superfícies expostas a curva ISO 834:1975. Já as linhas na cor azul correspondem às superfícies adiabáticas (sem trocas de calor).

A seguir são apresentados os campos de temperatura (em °C) obtidos pelo programa térmico e os campos de erro relativo (em %) para os tempos de 30, 60, 90 e 120 minutos. Os campos de erro relativo são referenciados aos campos de temperatura dados pelo CEB (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)).

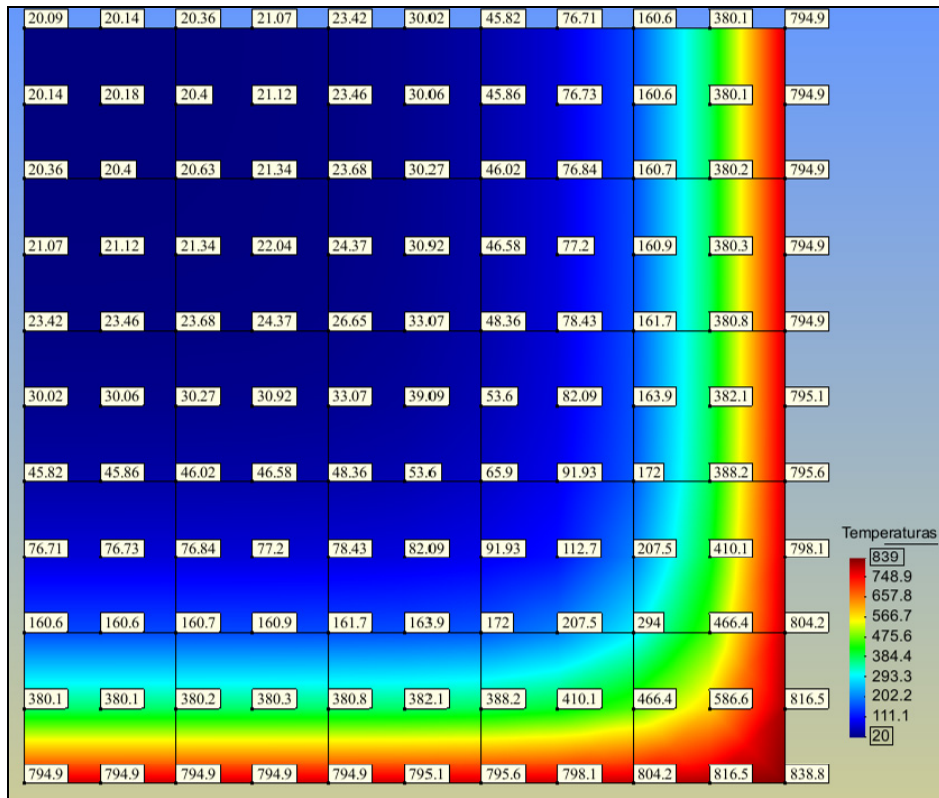


Figura 52: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=30$  minutos.

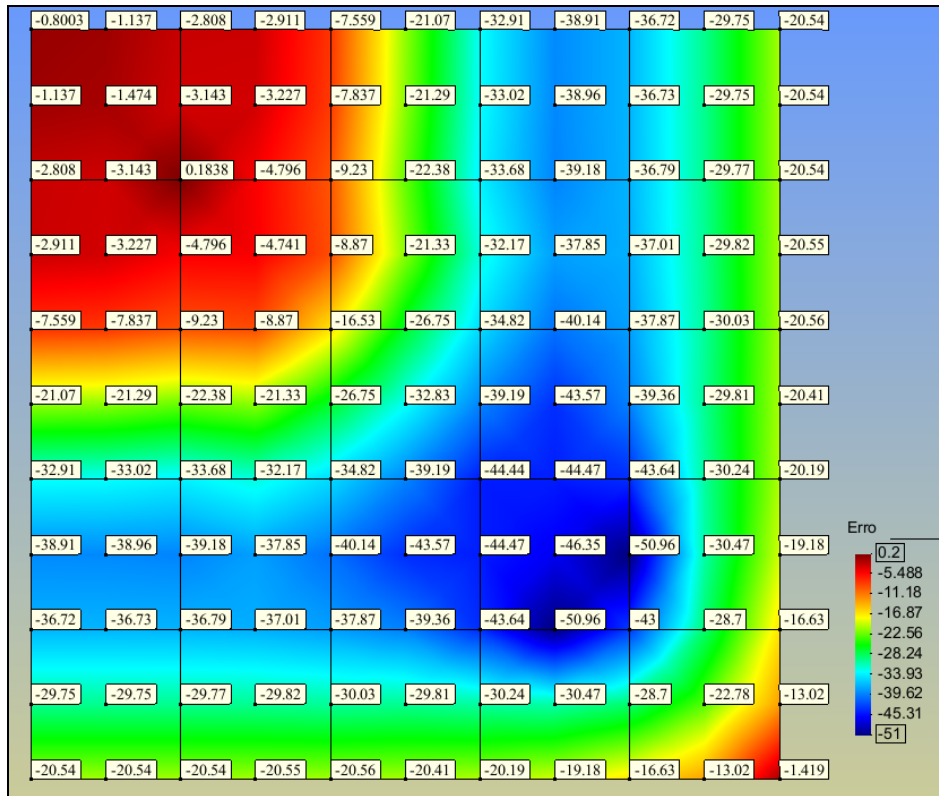


Figura 53: campo de erro relativo (em %) para o tempo  $t=30$  minutos.

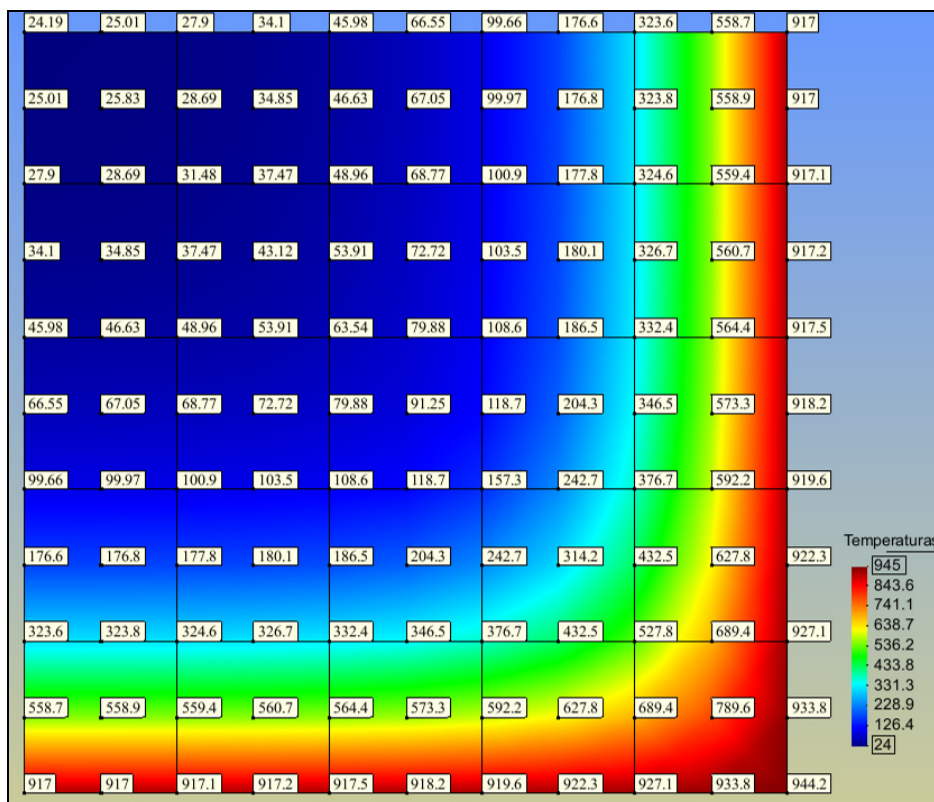


Figura 54: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=60$  minutos.

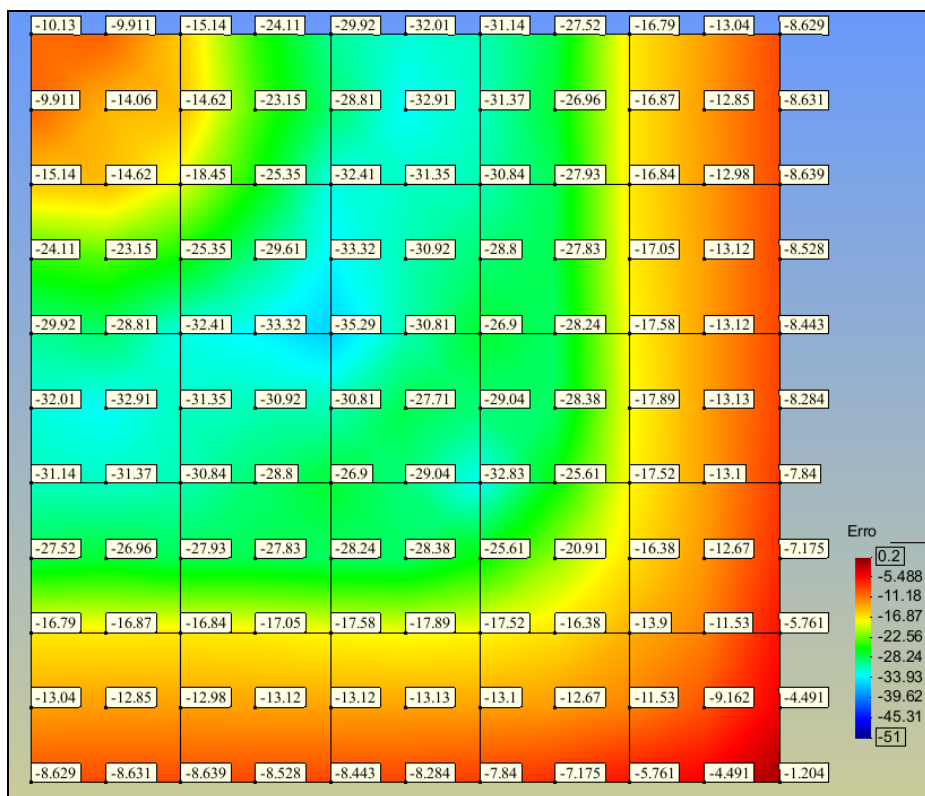


Figura 55: campo de erro relativo (em %) para o tempo  $t=60$  minutos.

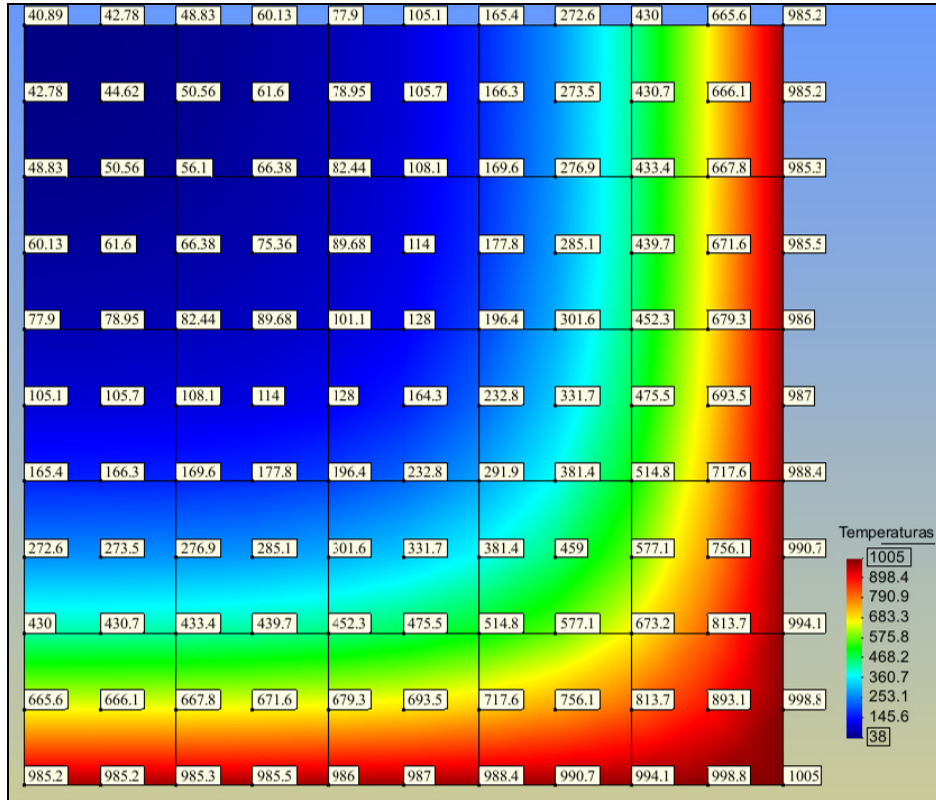


Figura 56: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=90$  minutos.

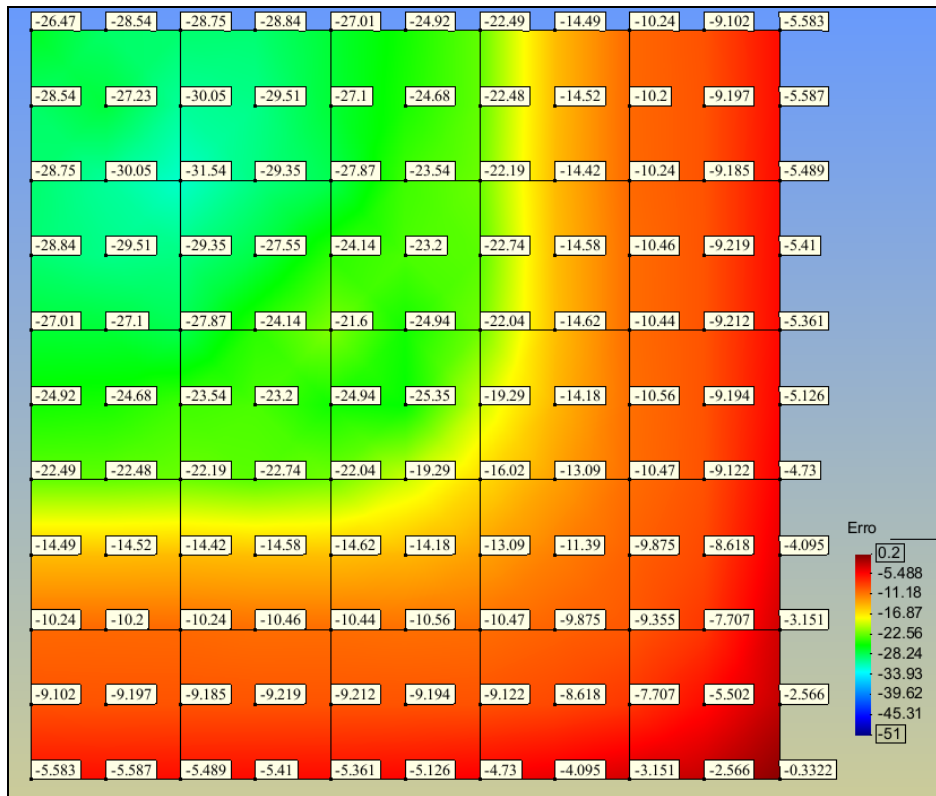


Figura 57: campo de erro relativo (em %) para o tempo  $t=90$  minutos.



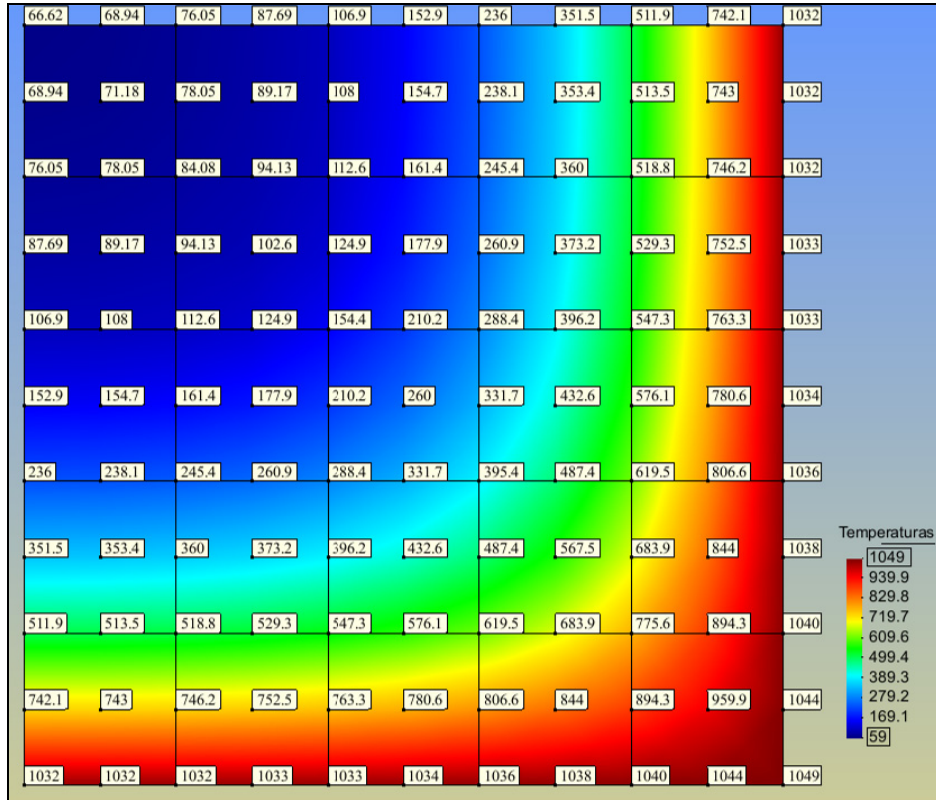


Figura 58: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=120$  minutos.

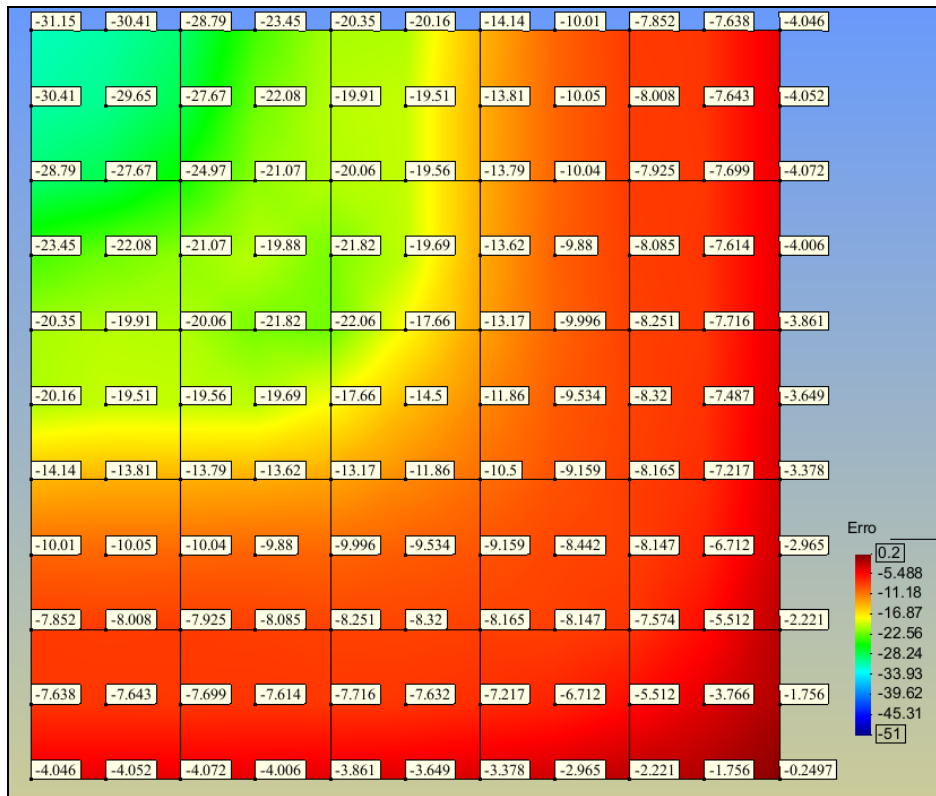


Figura 59: campo de erro relativo (em %) para o tempo  $t=120$  minutos.



Verifica-se, na Figura 53, que o erro relativo apresenta um valor de pico de aproximadamente -51%. Atribui-se tais resultados à falta de dados mais precisos sobre a variação das propriedades térmicas do concreto utilizado no ensaio do CEB.

### 8.2.2 Seção transversal de uma laje

A laje em estudo apresenta as dimensões (em centímetros) apresentadas na Figura 60.

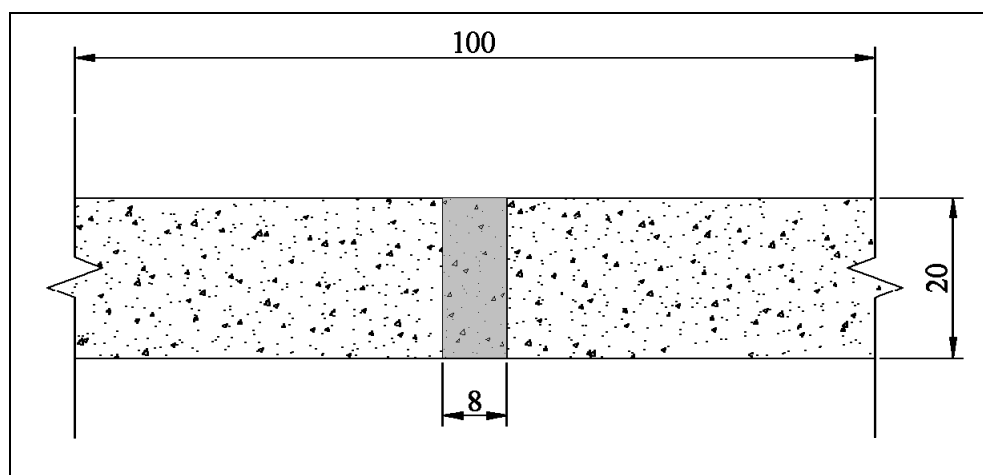


Figura 60: dimensões da seção transversal da laje em estudo [cm].

A laje sofre a ação da curva ISO 834:1975 na face inferior. Devido a essa condição de execução do teste, a condução de calor pode ser caracterizada como unidimensional.

Em virtude da simetria apresentada pela seção, a análise foi realizada em faixa vertical da seção transversal da laje (trecho hachurado na Figura 60). Na análise, utilizou-se o elemento retangular de nove nós (família Lagrangeana). A discretização da estrutura e as condições de contorno são mostradas na Figura 61.

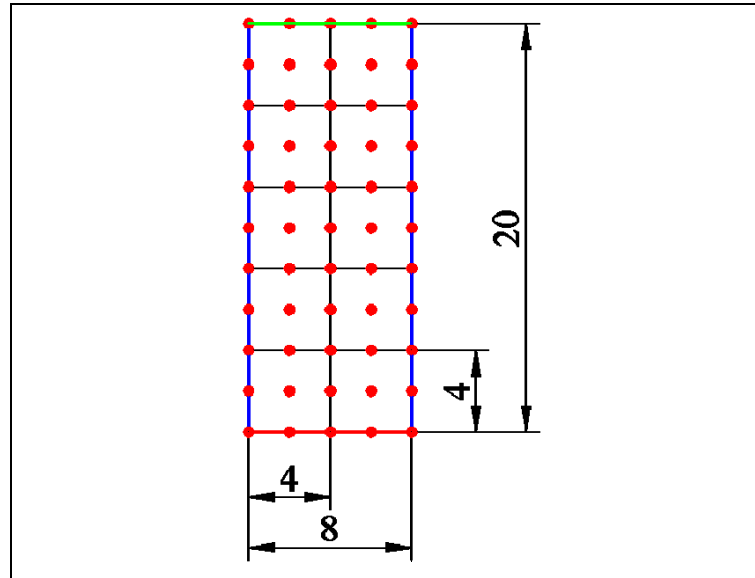


Figura 61: discretização e condições de contorno da seção da viga [cm].

A linha na cor vermelha (na borda inferior da estrutura) corresponde à superfície exposta à curva ISO 834:1975. Já as linhas na cor azul correspondem às superfícies adiabáticas (sem trocas de calor). Por fim, a linha na cor verde corresponde à superfície exposta à temperatura ambiente de 20°C.

A seguir são apresentados os campos de temperatura (em °C) obtidos pelo programa térmico e os campos de erro relativo (em %) para os tempos de 30, 60, 90 e 120 minutos. Os campos de erro relativo são referenciados aos campos de temperatura dados pelo CEB (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)).

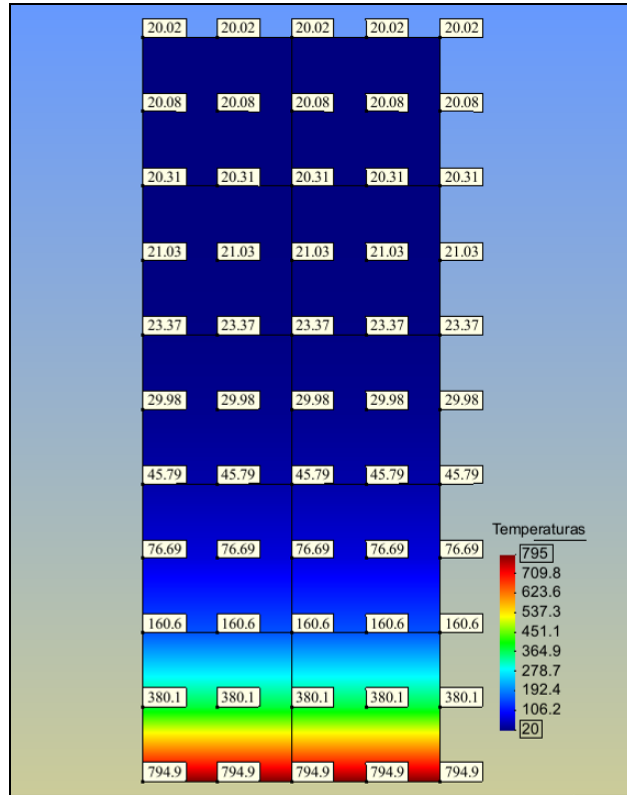


Figura 62: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=30$  minutos.

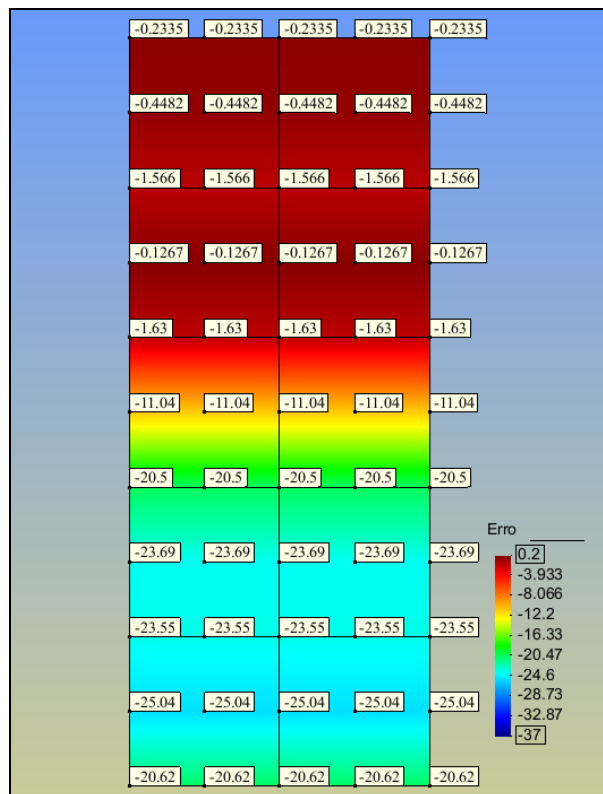


Figura 63: campo de erro relativo (em %) para o tempo  $t=30$  minutos.

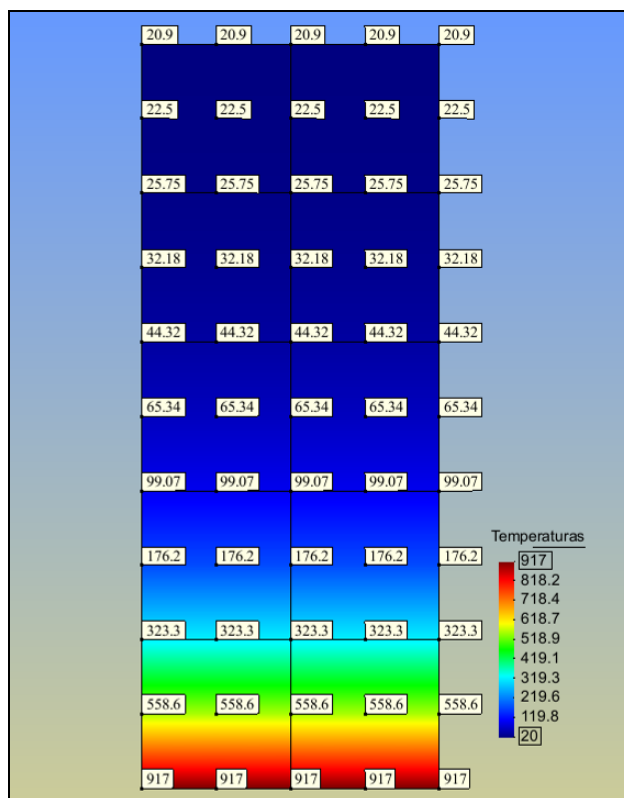


Figura 64: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=60$  minutos.

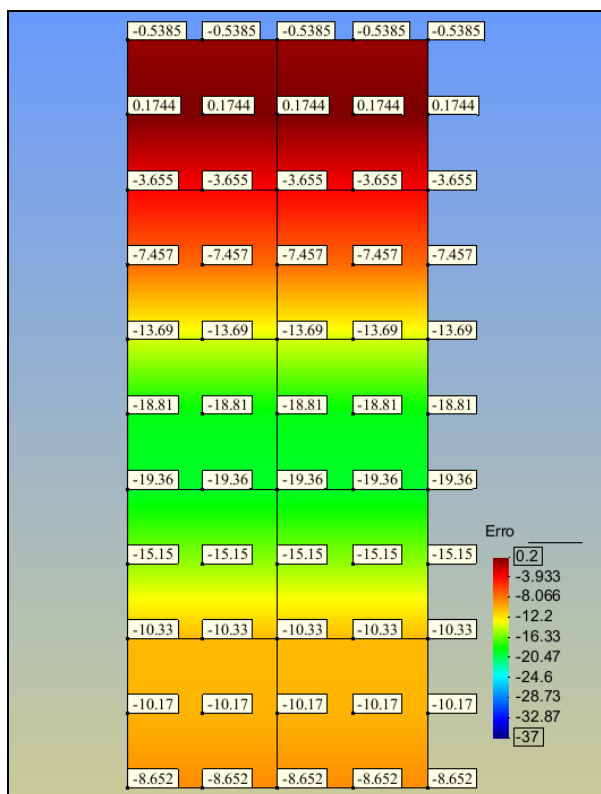


Figura 65: campo de erro relativo (em %) para o tempo  $t=60$  minutos.

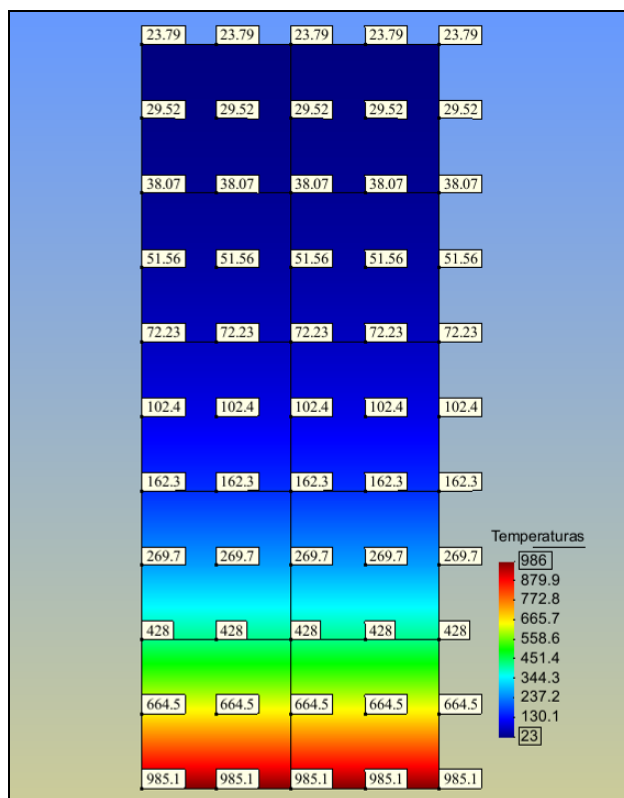


Figura 66: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=90$  minutos.

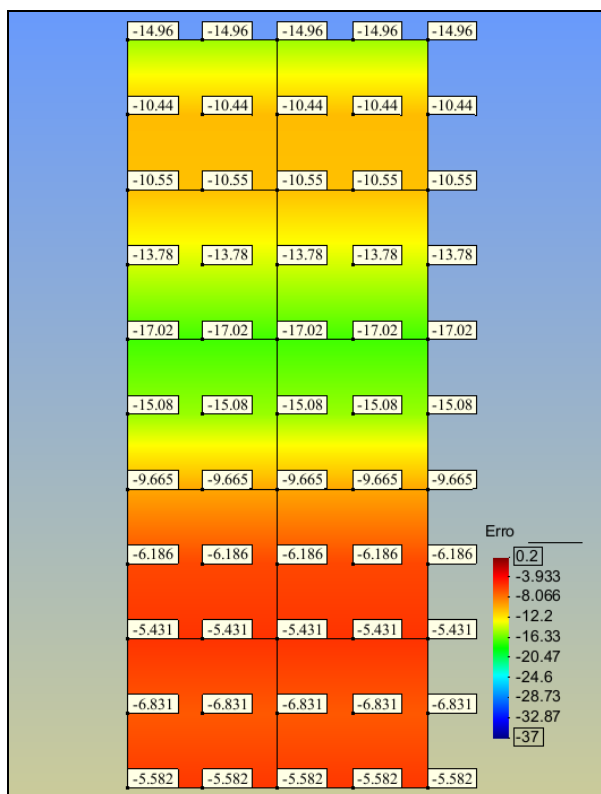


Figura 67: campo de erro relativo (em %) para o tempo  $t=90$  minutos.

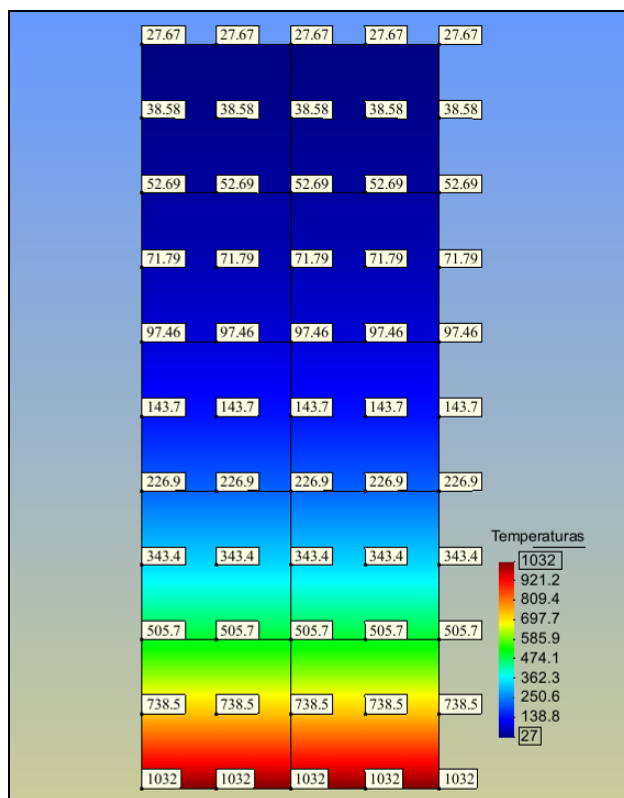


Figura 68: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=120$  minutos

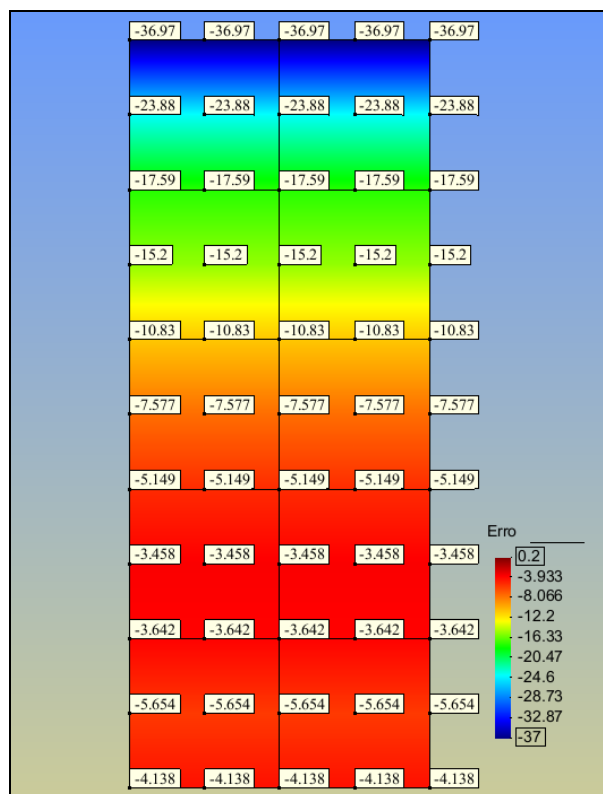


Figura 69: campo de erro relativo (em %) para o tempo  $t=120$  minutos.

Verifica-se, na Figura 69, que o erro relativo apresenta um valor de pico de aproximadamente -37%. Também atribui-se tais resultados à falta de dados mais precisos sobre a variação das propriedades térmicas do concreto utilizado no ensaio do CEB.

### 8.3 ANÁLISE TERMOMECÂNICA DE UMA LAJE

O exemplo seguinte compara os resultados experimentais apresentados no artigo de Anderberg (1978), com a resposta termomecânica obtida através do programa computacional desenvolvido nesta dissertação.

A estrutura analisada consiste em uma laje armada em uma só direção, simplesmente apoiada nas bordas, sujeita ao carregamento de peso próprio (Figura 70).

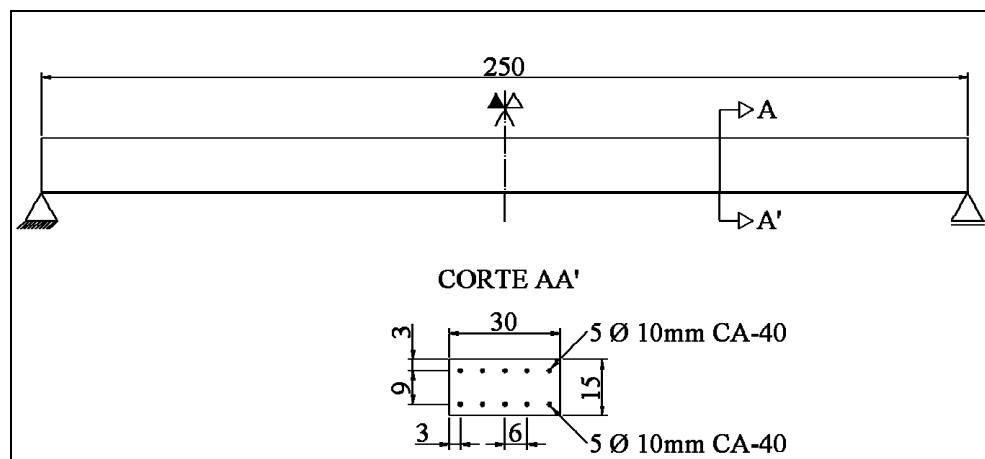


Figura 70: laje estudada por Anderberg (1978), dimensões em centímetros.

O artigo não fornece parâmetros termomecânicos sobre os materiais. Assim, os dados utilizados correspondem àqueles apresentados no capítulo 3 e na Tabela 12.

Anderberg (1978) utiliza uma curva de incêndio própria nos seus ensaios. Analisa o comportamento da estrutura sob condições de aquecimento e resfriamento. O presente trabalho limitou-se a analisar a situação de aquecimento e por isso utilizou apenas a curva de incêndio do ramo ascendente. Esta curva é apresentada na Figura 71.

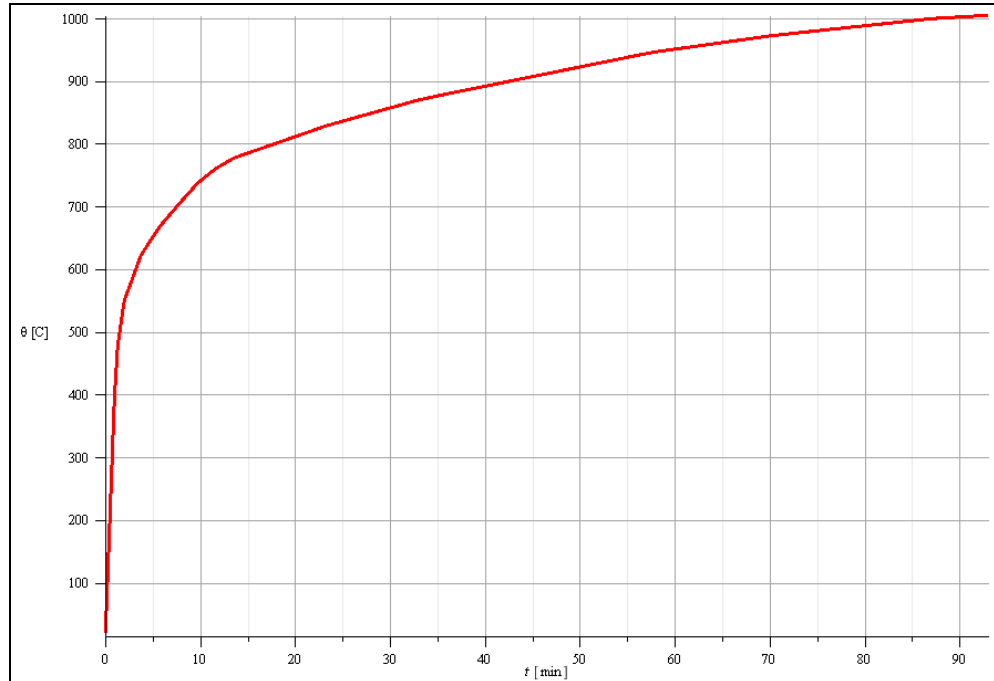


Figura 71: curva de incêndio utilizada por Anderberg (1978).

A laje sofre a ação dessa curva de incêndio na face inferior. O regime de transferência de calor pode ser caracterizado como unidimensional devido a essa condição de execução do experimento (assim como no item 8.2.2).

Em virtude da simetria apresentada pela estrutura, a análise foi realizada em metade da laje. Na análise, utilizaram-se 150 elementos retangulares de nove nós (família de Lagrange) para a representação do concreto. A armadura foi representada pelo modelo incorporado, resultando em 30 segmentos lineares de três nós. A discretização da e condições de contorno da estrutura são mostradas na Figura 72.

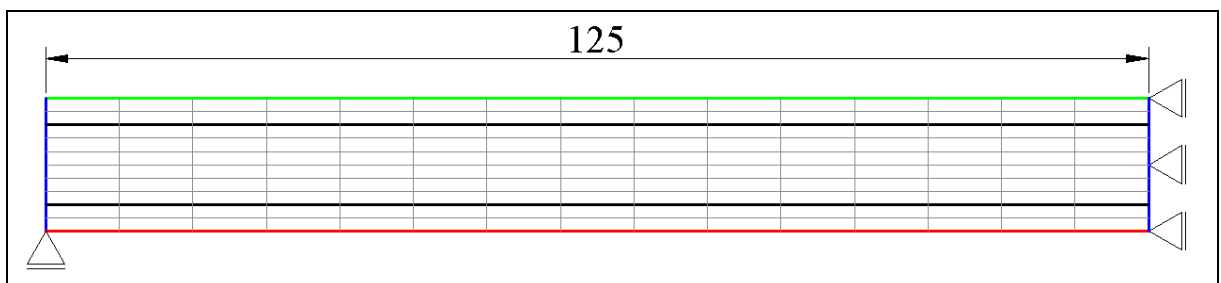


Figura 72: discretização e condições de contorno da laje [cm].

A linha na cor vermelha (na borda inferior da estrutura) corresponde à superfície exposta à curva de incêndio utilizada. Já as linhas na cor azul correspondem às superfícies adiabáticas



(sem trocas de calor). Por fim, a linha na cor verde corresponde à superfície exposta à temperatura ambiente de 20°C.

Na parte esquerda inferior da laje verifica-se a utilização de um apoio simples, que impede o deslocamento vertical. A lateral direita da laje possui vínculos que impedem o deslocamento horizontal da estrutura. As linhas na cor cinza escuro correspondem às armaduras positivas e negativas. Como já foi dito, a laje possui carregamento de peso próprio com o valor de 1,06kN/m.

Os elementos retangulares possuem alturas variáveis com o intuito de melhorar a representação dos gradientes térmicos próximos à superfície inferior da laje.

Na simulação numérica utilizou-se um incremento de tempo de  $\Delta t=0,5s$  durante um tempo total de 95 minutos.

Em virtude da falta de dados termomecânicos no artigo, foram realizadas cinco simulações utilizando valores distintos de  $f_{cm}$  (10MPa, 15MPa, 20MPa, 25MPa e 30MPa).

Na Figura 73 apresenta-se a evolução das flechas (para os cinco valores de  $f_{cm}$  testados) em comparação com a obtida experimentalmente.

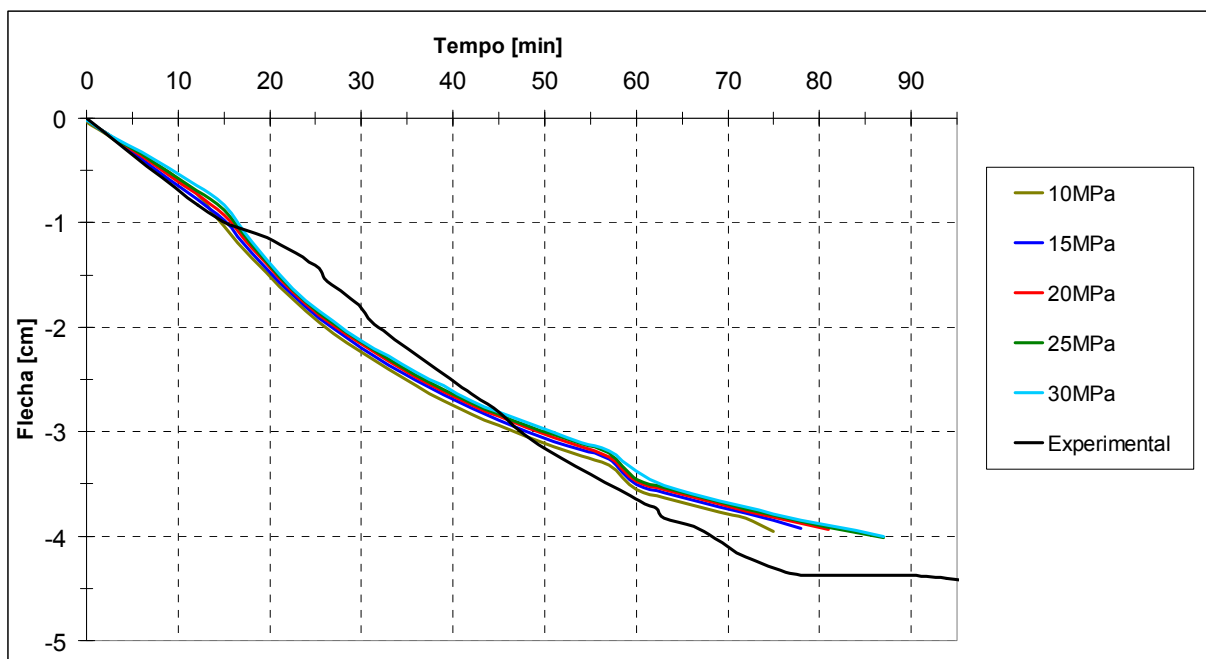


Figura 73: evolução das flechas da laje.

O gráfico de evolução de flechas, apresentado na Figura 73, não apresenta as flechas instantâneas, ou seja, as flechas instantâneas foram subtraídas dos resultados numéricos e experimentais.

Na Tabela 13 apresenta-se um resumo das flechas obtidas:

Tabela 13: flechas numéricas e experimental.

	Flecha Instantânea Numérica [cm]	Flecha Máxima [cm]	Tempo Aproximado Flecha Máxima [min.]
$f_{cm}$ 10MPa	-0,02595	-3,95859	75
$f_{cm}$ 15MPa	-0,02290	-3,93001	78
$f_{cm}$ 20MPa	-0,02098	-3,96834	84
$f_{cm}$ 25MPa	-0,01961	-4,01128	86
$f_{cm}$ 30MPa	-0,01711	-4,00040	87
Experimental	-	-4,40230	94

A segunda coluna da Tabela 13 (Flecha Instantânea Numérica) corresponde aos valores obtidos instantaneamente pelo programa computacional. A terceira coluna (Flecha Máxima) apresenta os máximos valores de flecha obtidos pelo programa computacional e pelo experimento de Anderberg (1978). A quarta coluna (Tempo Aproximado Flecha Máxima) apresenta os tempos de ruptura de cada ensaio e do experimento.

Anderberg (1978) apresenta a evolução das temperaturas em sete pontos da seção transversal da laje. Esses pontos são identificados através da sua distância até a face inferior da laje. Os perfis de temperaturas foram avaliados e comparados, e são apresentados a seguir:

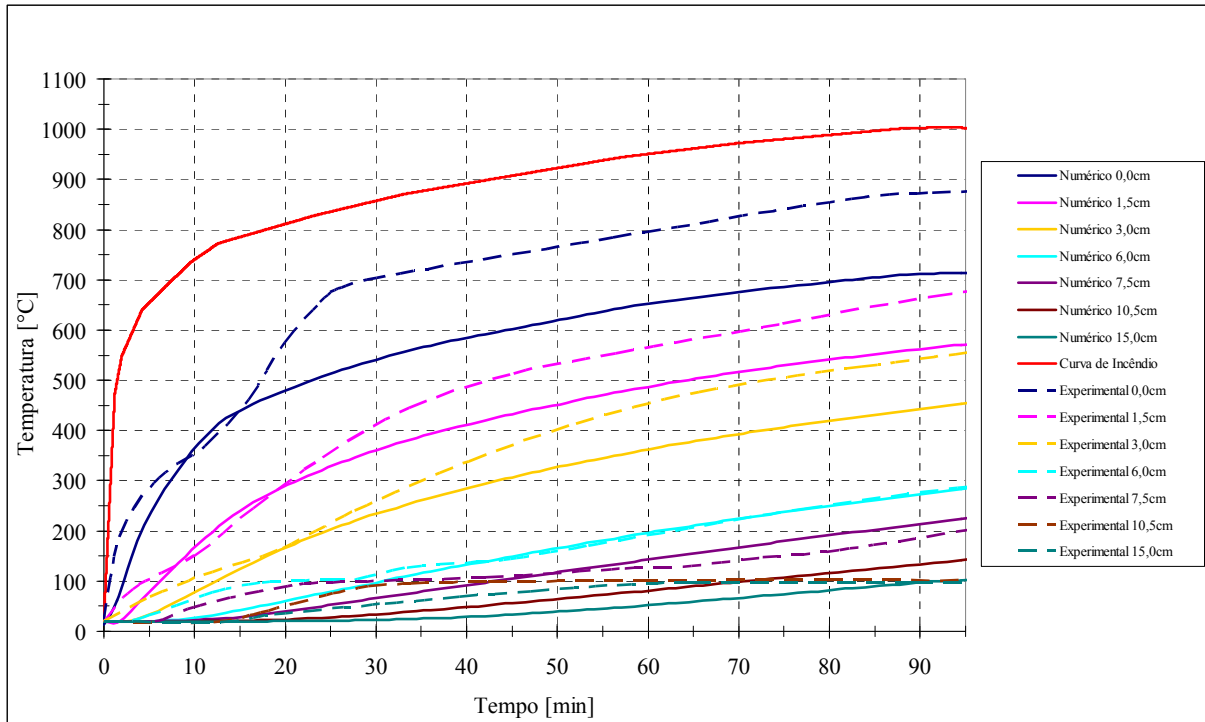


Figura 74: evolução dos perfis de temperatura na seção da laje.

Verifica-se que os resultados apresentam uma considerável diferença para os pontos situados entre 0,0cm e 3,0cm da face inferior da laje. Atribui-se esses resultados à falta de dados térmicos do artigo em questão.

Em seguida, apresentam-se os resultados da simulação para  $f_{cm}=30\text{MPa}$ . Os campos de temperatura, nos instantes  $t=0$ , 10, 30, 60 e 87 minutos, são exposto abaixo:

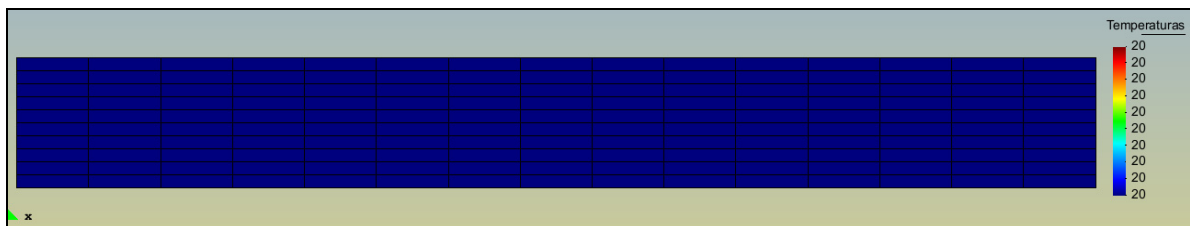


Figura 75: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=0$  minuto.

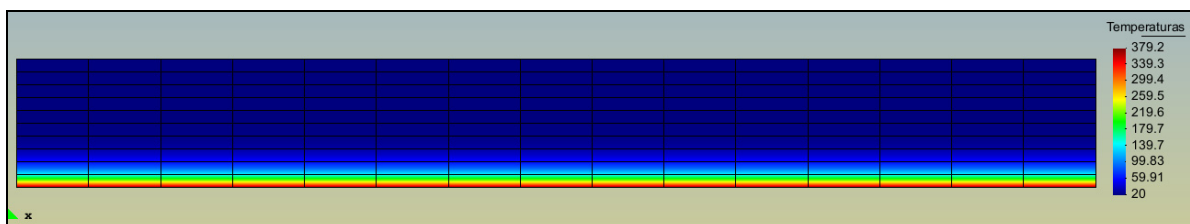


Figura 76: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=10$  minutos.

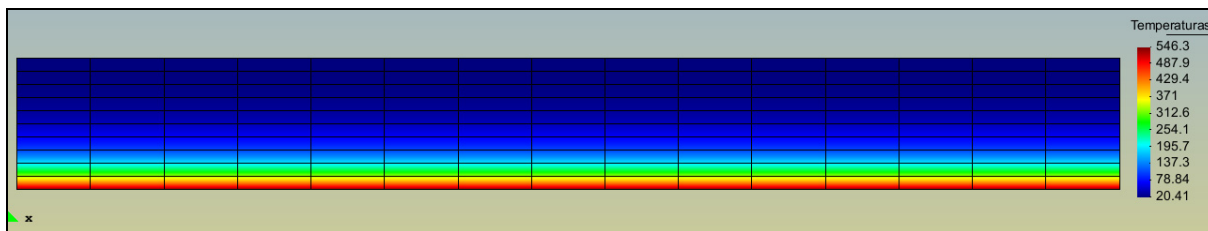


Figura 77: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=30$  minutos.

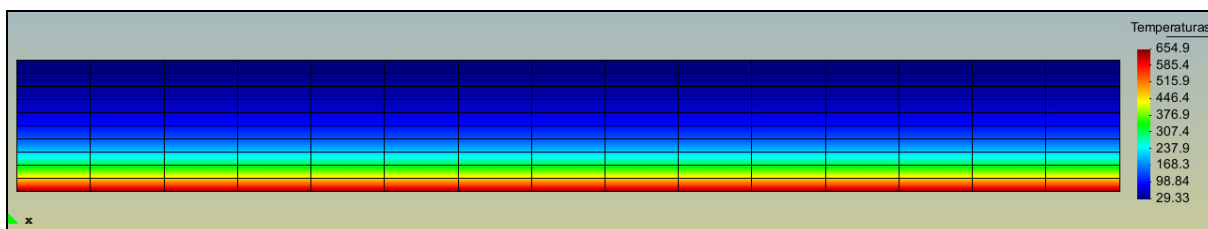


Figura 78: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=60$  minutos.

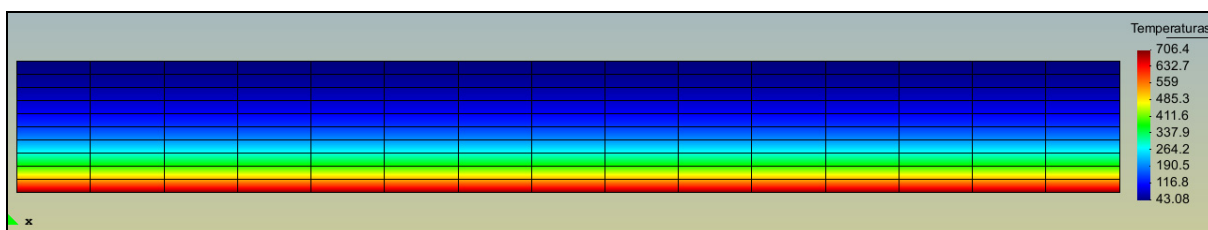


Figura 79: campo de temperatura (em °C) para o tempo  $t=87$  minutos, instante da ruptura.

A seguir, apresentam-se as curvas de evolução de temperaturas na seção transversal da laje, no centro do vão, nos instantes  $t=0$ , 10, 30, 60 e 87 minutos:

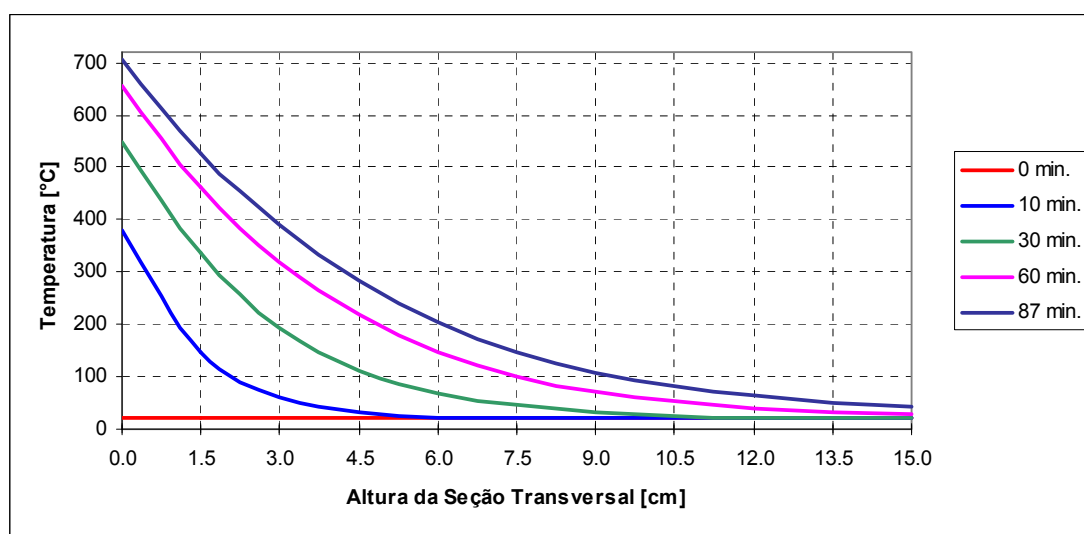


Figura 80: evolução das temperaturas na seção da laje.

A seguir, apresentam-se os campos de tensão  $\sigma_x$ , nos instantes  $t=0, 10, 30, 60$  e  $87$  minutos:

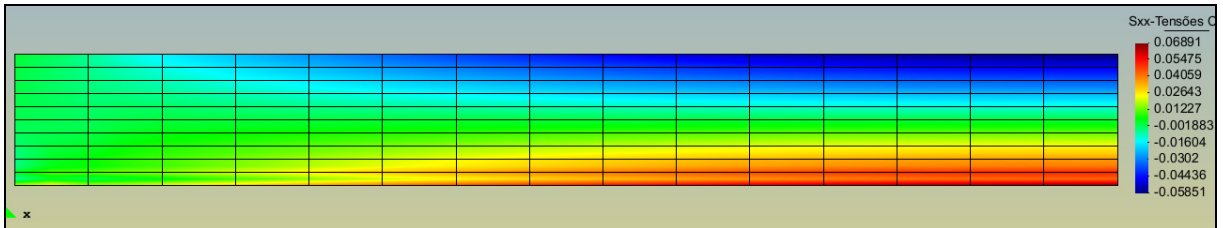


Figura 81: campo de tensão  $\sigma_x$  (em  $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo  $t=0$  minuto (flecha instantânea).

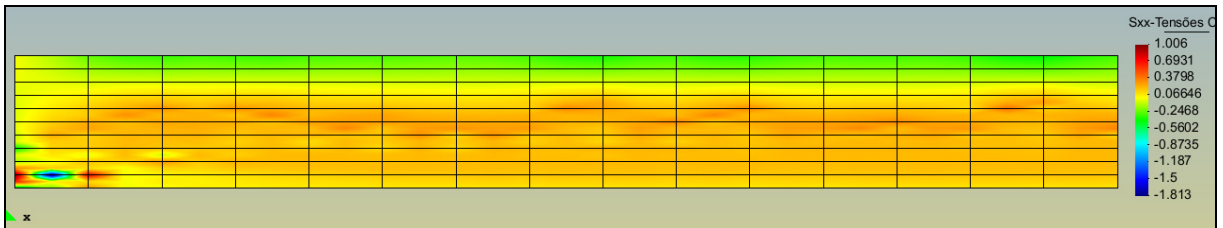


Figura 82: campo de tensão  $\sigma_x$  (em  $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo  $t=10$  minutos.

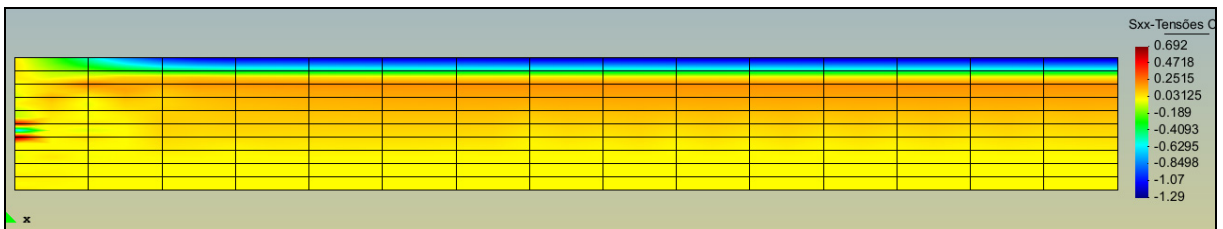


Figura 83: campo de tensão  $\sigma_x$  (em  $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo  $t=30$  minutos.

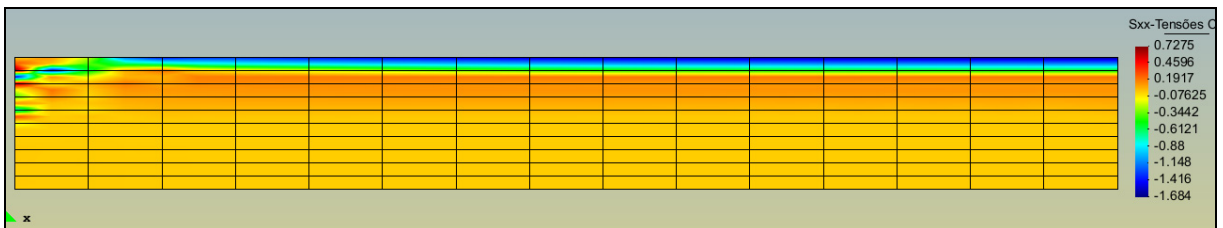


Figura 84: campo de tensão  $\sigma_x$  (em  $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo  $t=60$  minutos.

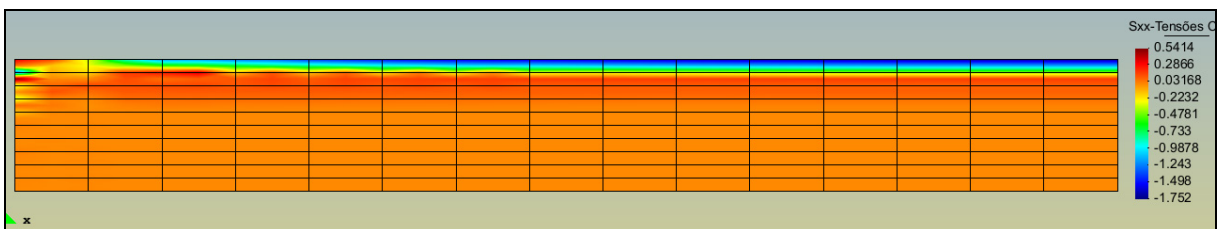


Figura 85: campo de tensão  $\sigma_x$  (em  $\text{kN/cm}^2$ ) no tempo  $t=87$  minutos (instante da ruptura).

A seguir, apresentam-se as curvas de evolução da tensão  $\sigma_x$  na seção transversal da laje, no centro do vão, nos instantes  $t=0$ , 10, 30, 60 e 87 minutos:

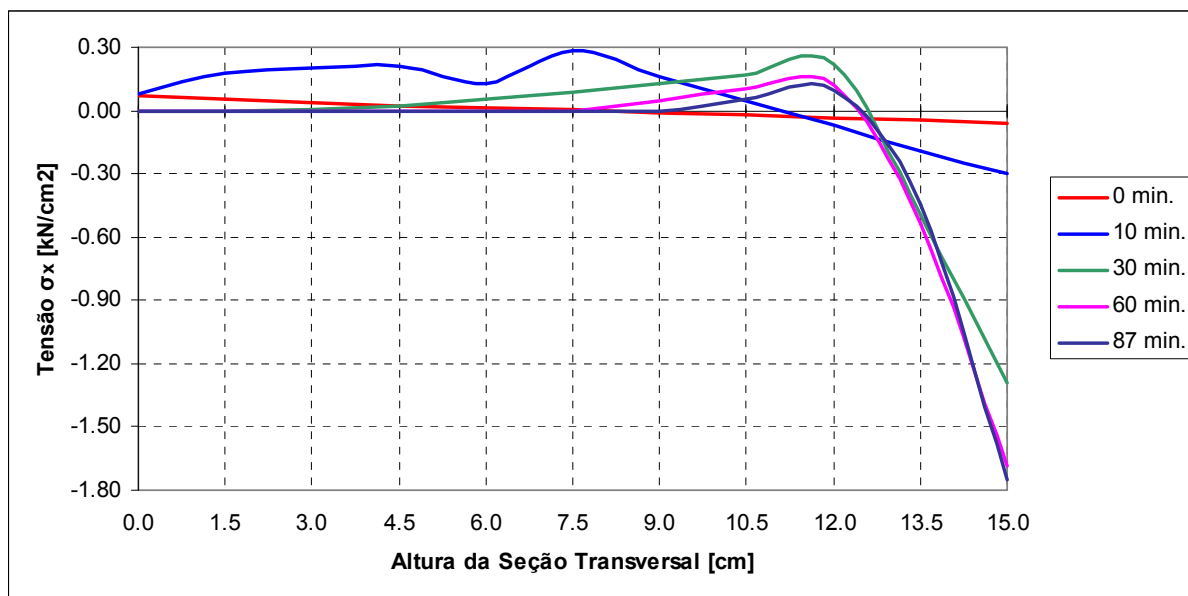


Figura 86: evolução da tensão  $\sigma_x$  na seção da laje.

Verifica-se que, para o tempo  $t=0$  minuto, a laje, que está sujeita apenas ao peso próprio, apresenta um comportamento elástico linear, com a linha neutra posicionado aproximadamente na metade da altura da seção transversal.

Após o tempo  $t=10$  minutos, o efeito da fissuração torna-se predominante na seção transversal, alcançando aproximadamente  $\frac{3}{4}$  da seção transversal, fazendo com que a linha neutra se aproxime da face superior da laje.

No instante  $t=87$  minutos a tensão  $\sigma_x$  atinge valores próximos à  $-1,8$  kN/cm<sup>2</sup> no banzo superior, quando ocorre à ruptura da laje para o ensaio numérico.

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho é proposta a criação de uma rotina computacional para a simulação do comportamento termomecânico não linear de estruturas planas de concreto armado sob a ação de altas temperaturas por meio do método dos elementos finitos.

O programa computacional realiza, para cada incremento de tempo, as análises térmica e mecânica. O campo de temperaturas, calculado na análise térmica, é utilizado na determinação das propriedades dos materiais, consideradas na análise mecânica.

Na análise mecânica, utilizou-se o modelo de fissuras discretas (*smeared crack model*) para a representação do comportamento frágil do concreto sob a ação dos esforços de tração. O modelo de armadura incorporada (*embedded reinforcement*) foi empregado para a representação mecânica da armadura. Foi desenvolvida uma analogia térmica ao modelo mecânico de armadura incorporada para a consideração da contribuição do aço na transferência de calor.

### 9.1 CONCLUSÕES

Os modelos termomecânicos implementados apresentaram boa aproximação na comparação com o resultado numérico de referência, e razoável aproximação com os resultados experimentais obtidos na literatura.

Analisando-se o resultado térmico exposto no item 8.1 (comparação com o resultado térmico numérico), pode-se concluir que:

- a) mesmo com um número muito menor de elementos finitos utilizados na simulação, o programa forneceu bons resultados comparados àqueles obtidos pelo *software Super Tempcalc*;
- b) o erro relativo máximo obtido na simulação foi de aproximadamente 7% (Figura 42);

- c) a esse erro relativo máximo, corresponde um erro absoluto de 8°C (Figura 43);
- d) no intervalo de tempo mais crítico do ensaio, ou seja, na primeira meia hora (onde situam-se os maiores gradientes de temperatura), o programa apresentou um erro relativo de 5%, que corresponde, aproximadamente, a um erro absoluto de 6°C (Figura 42 e Figura 43).

Analisando-se os resultados térmicos expostos no item 8.2 (comparação com os resultados térmicos experimentais), pode-se concluir que:

- e) a falta de dados mais precisos sobre a evolução das propriedades térmicas do concreto utilizado nos ensaios experimentais conduziu as simulações numéricas a erros relativos, em determinados pontos, de até 51%;
- f) os campos de temperatura obtidos pela simulação numérica apresentam resultados qualitativos (forma dos campos de temperaturas) muito semelhantes àqueles expostos pelo CEB (Bulletins N°145 (1982), N° 174 (1987) e N° 208 (1991)).

Em relação aos resultados termomecânicos expostos no item 8.3, pode-se concluir que:

- g) a falta de dados da evolução das propriedades térmicas do concreto utilizado no ensaios experimental impossibilitou a obtenção de melhores resultados para o campo de temperatura nos pontos situados entre 0cm e 3cm da face inferior da laje;
- h) as curvas de evolução das flechas obtiveram boa aproximação aos resultados experimentais (Figura 73);
- i) o aumento da temperatura na seção transversal reduz rapidamente a resistência à tração do concreto, agravando o efeito da fissuração, tornando-o preponderante no comportamento da estrutura (ver Figura 86);
- j) após cerca de 10 minutos de ensaio, a fissuração alcançou aproximadamente  $\frac{3}{4}$  da altura da seção transversal, fazendo com que a linha neutra subisse rapidamente na seção (ver Figura 86);
- k) a condição de fissuração faz com que a influência da resistência do concreto (e do módulo de elasticidade) deixe de ser predominante, o que explica a proximidade nas curvas flecha-tempo.



Considerando a insuficiência de dados dos ensaios experimentais e o fato dos modelos termomecânicos implementados serem relativamente simples, acredita-se que os resultados alcançados obtiveram boa aproximação para os testes. Com certeza, um nível de precisão mais elevado só será alcançado com o emprego de modelos mais elaborados, que considerem, por exemplo, o fluxo de vapor de água nos poros do concreto.

## 9.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros têm-se:

- a) consolidação dos modelos propostos nesse trabalho, através de simulações de mais exemplos experimentais e numéricos;
- b) extensão dos modelos utilizados para análises de problemas tridimensionais;
- c) desenvolvimento de um modelo termo-hidro-mecânico, onde o concreto seja tratado como um meio poroso e onde a presença da água, essencial na previsão do fenômeno de deslocamento (*spalling*), seja considerada através de três fases: vapor de água presente no ar, água capilar e água fisicamente adsorvida;

## REFERÊNCIAS

- ANDERBERG, Y.. **Fire-Exposed Hyperstatic Concrete Structures: An Experimental and Theoretical Study**. ACI: Special Publication. Vol. 55, pages 439-460. 1978.
- ASSAN, A. E. **Métodos Energéticos e Análise Estrutural**. Campinas: UNICAMP, 1996.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14323**: dimensionamento de estruturas de aço de edifícios em situação de incêndio – procedimento. Rio de Janeiro, 1999. 46 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14432**: exigências de resistência ao fogo de elementos construtivos das edificações. Rio de Janeiro, 2001. 14 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15200**: projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio: procedimento. Rio de Janeiro, 2004. 17 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5628**: componentes construtivos estruturais: determinação da resistência ao fogo. Rio de Janeiro, 2001. 6 p.
- BATHE, K. J.. **Finite Element Procedures**. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall. (Edição revisada de Finite Element procedures in Engineering Analysis, 1982). 1996.
- BULLETIN D'INFORMATION [du] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Design of Concrete Structures for Fire Resistance - Preliminary draft of an Appendix to the CEB-FIP Model Code for Concrete Structures**. Lausanne: CEB/FIP, n. 145, 1982.
- BULLETIN D'INFORMATION [du] COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Fire design of concrete structures in accordance with CEB-FIP Model Code 90**. Lausanne: CEB/FIP, n. 208, 1991.
- BULLETIN D'INFORMATION [du] COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Model Code for Fire Design of Concrete Structures**. Lausanne: CEB/FIP, n. 174, 1987.
- CERVENKA, V. **Constitutive model for cracked reinforced concrete**. Journal of the American Concrete Institute. v. 82. n. 6. p. 877-882. 1985.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Concrete under Multiaxial States of Stress - Constitutive Equations for Practical Design**. Lausanne: Bulletin d'Information, n. 156, 1983.
- COSTA, C., N.. **Dimensionamento de elementos de concreto armado em situação de incêndio**. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. São Paulo, 2008.

ELWI, A., E.; HRUDEY, T., M.. **Finite Element Model For Curved Finite Element Model For Curved**. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, No. 4, April, 1989.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1991-1-2**: Eurocode 1: actions on structures - part 1.2: general actions – actions on structures exposed to fire. Brussels: CEN, 2002. 59 p.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1992-1-1**: Eurocode 2: design of concrete structures – part 1-1: general rules for buildings. Brussels: CEN, 2004. 225 p.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1992-1-2**: Eurocode 2: design of concrete structures – part 1.2: general rules - structural fire design. Brussels: CEN, 2004. 97 p.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1994-1-2**: Eurocode 4: design of composite steel and concrete structures – part 1.2: general rules – structural fire design. Brussels: CEN, 2005. 109 p.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE [du] BÉTON (FIB). **Fire design of concrete structures: materials, structures and modeling**. Lausanne: International Federation for Structural Concrete, 2007. 97 p. (Bulletin. FIB; 38).

FEDERATION INTERNATIONALE [du] BETON (FIB). **Model Code 2010 - First complete draft, Volume 1**. Lausanne: International Federation for Structural Concrete, 2007. 318 p. (Bulletin. FIB; 55).

Fogo faz túnel entre Inglaterra e França ser fechado. **G1**. 11 setembro 2008. Disponível em: <<http://g1.globo.com/Noticias/Mundo/0,,MUL756286-5602,00-FOGO+FAZ+TUNEL+ENTRE+INGLATERRA+E+FRANCA+SER+FECHADO.html>>. Acesso em: 23 setembro 2011.

HINTON, E.. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press, 550p., 1988.

HINTON, E.; OWEN, D. R. J.. **Finite element programming**. London: Academic Press, 1977. 305p.

HUANG, H.-C.; USMANI, A. S.. **Finite Element Analysis for Heat Transfer – Theory and Software**. London, Springer-Verlag, 1994.

Incêndio sob controle no túnel de São Gotardo. **UOL**. 26 de outubro de 2001. <<http://noticias.uol.com.br/inter/afp/2001/10/26/ult34u27205.shl>>. Acesso em 23 setembro 2011.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. Wiley, New York. 6 th, 1985.

OTTOSEN, N. S.. **A failure criterion for concrete**. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n. 4, p. 527-535, Aug. 1977.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E.. **Finite elements in plasticity – Theory and Practice**. Swansea: Pineridge Press, 1980. 594p.

RASHID, Y.. **Analysis of prestressed concrete pressure vessels**. Nuclear Engineering and Design, Vol.7, p. 334-344, 1968.

The Tauern Tunnel. LRC. 20 de fevereiro de 2011.

<[http://www.landroverclub.net/Club/HTML/Travel\\_TauerTunnel.htm](http://www.landroverclub.net/Club/HTML/Travel_TauerTunnel.htm)>. Acesso em 23 setembro 2011.

Túnel Mont Blanc é reaberto. **BBC**. 9 março 2002. Disponível em:

<[http://www.bbc.co.uk/portuguese/noticias/2002/020309\\_montblanctp.shtml](http://www.bbc.co.uk/portuguese/noticias/2002/020309_montblanctp.shtml)>. Acesso em 23 setembro 2011.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z.. **The finite element method: its basis & fundamentals**. Oxford: Elsevier Butterworth Heinemann. 6° ed., 2005.