

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS

# Transição à Turbulência na Camada de Mistura Estavelmente Estratificada utilizando Simulação Numérica Direta e Simulação de Grandes Escalas

**Denise Maria Varella Martinez**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Doutor em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental.

Orientadores: Profa. Dra. Edith Beatriz Camaño Schettini  
Prof. Dr. Jorge Hugo Silvestrini

## **Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Márcio Teixeira de Mendonça - IAE - CTA

Prof. Dr. Carlos Frederico B. da Silva - LASEF - IST

Prof. Dr. Gervásio Annes Degrazia - Dpto. Física - UFSM

Profa. Dra. Nara Maria Luzzi Rosauro - IPH - UFRGS

Porto Alegre, 27 janeiro 2006.

*À Marta, Cláudio, Zaira e Carlos (in memoriam)  
pela confiança, paciência e amor.*

# Resumo

A transição à turbulência em uma camada de mistura estavelmente estratificada é de grande interesse para uma variedade de problemas geofísicos e de engenharia. Esta transição é controlada pela competição entre o cisalhamento do escoamento de base e as forças de empuxo, devido à estratificação em densidade do ambiente. Os efeitos do empuxo atuam no escoamento reduzindo a taxa de crescimento das perturbações e retardando a transição à turbulência, enquanto o cisalhamento fornece energia cinética ao escoamento.

O presente trabalho investiga a natureza da transição à turbulência em uma camada de mistura temporal estavelmente estratificada através de Simulação Numérica Direta (DNS) e Simulação de Grandes Escalas (LES). O propósito da investigação é analisar o efeito da estratificação estável no desenvolvimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz (K-H) e na formação dos vórtices longitudinais, que se formam após a saturação dos turbilhões primários de K-H. Além deste propósito, é examinado, utilizando de DNS e LES, o desenvolvimento das instabilidades secundárias de K-H na camada baroclínica.

Os testes numéricos tridimensionais são realizados com diferentes tipos de condições iniciais para a flutuação de velocidade transversal, enquanto uma condição forçada é usada para as outras duas componentes de flutuação de velocidade. Em particular, o efeito do comprimento transversal do domínio de cálculo é testado empregando diferentes comprimentos, enquanto são usadas as mesmas dimensões para a direção longitudinal e vertical.

As simulações bidimensionais mostram que o aumento da estratificação inibe o processo de emparelhamento, reduz a troca de energia entre os turbilhões de K-H e o escoamento, atenua a instabilidade de K-H e diminui o fluxo vertical de massa. A instabilidade secundária do tipo K-H é identificada na camada baroclínica para  $Re \geq 500$  quando há o processo de emparelhamento dos vórtices simulados. Na simulação a  $Re = 500$ , a instabilidade secundária de K-H aparece tanto para  $Ri = 0.07$  (fraca estratificação) como para  $Ri = 0.167$  (forte estratificação).

Os resultados tridimensionais demonstram que os vórtices longitudinais são claramente formados na camada a  $Ri = 0$ . Por outro lado, nos casos estratificados os vórtices são enfraquecidos, devido ao gradiente longitudinal de densidade, que diminui a vorticidade nos turbilhões de K-H enquanto aumenta na região entre eles.

# Abstract

The transition to turbulence in a stably stratified flow is a matter of great interest in the field of fluid dynamics with applications in both geophysical sciences and engineering. This transition is controlled by competition between the shear of the base flow and buoyancy forces due to ambient density stratification. The buoyancy effects act reducing the growth rate perturbation and delaying the transition to turbulence, while the shear supplies kinetic energy to the flow.

The present work investigates the nature of the transition to turbulence in a stable stratified temporal mixing layer through Direct Numerical Simulation (DNS) and Large-Eddy Simulation (LES). The purpose of the investigation is to analyze the effect of stable stratification on the development of the Kelvin-Helmholtz (K-H) instability and in the formation of the streamwise vortices, which are developed after the saturation of the primary billows of K-H. The development of two-dimensional secondary instabilities in the baroclinic layer of a stably stratified temporal mixing layer is also investigated numerically through DNS and LES.

The three-dimensional numerical tests were done with different kinds of initial conditions for the spanwise velocity fluctuation, while a forced condition is considered for the other two components of speed fluctuation. In particular, the effects of the spanwise length of the domain are tested using different spanwise length configurations while keeping the same streamwise and vertical dimensions.

The 2D simulations show that higher stratification increasingly inhibits the pairing process, reduces the energy exchange between the KH vortices and the flow, limits the maximum K-H wave amplitude and reduces the buoyancy flux. The secondary instability of Kelvin-Helmholtz type is identified for  $Re \geq 500$  when there is pairing process of the simulated vortices. In the simulation for  $Re = 500$ , the secondary K-H instability appears for both  $Ri = 0.07$  (weak stratification) and  $Ri = 0.167$  (strong stratification).

The 3D results demonstrate that the streamwise vortices are clearly formed in unstratified cases. In the stratified cases, on the other hand, the streamwise vortices are weakened, due to the streamwise density gradient, which decrease the levels of vorticity in the billows of K-H and increases them in the braid zone.

# Agradecimentos

Um agradecimento especial a Profa. Edith Beatriz e ao Prof. Jorge pela orientação, pelos conhecimentos transmitidos e por acreditarem em mim. À Beatriz agradeço pela amizade, pelo constante incentivo e por não me deixar abater pelas dificuldades. Ao Jorge a "Moça" agradece a paciência, as discussões, os ensinamentos e a amizade.

Ao meu amigo de jornada e de todas as horas, Marcelo Vitola, agradeço pelo apoio, discussões, ensinamentos e socorros computacionais e, principalmente, pela valiosa amizade, que tanto me ajudou a amenizar a saudade da família. Ao Diogo Buarque, "meu filho", obrigada pela amizade, ajuda e apoio nos momentos difíceis que passei.

Agradeço a Monica, Ivan, Elias, Jaime, Daniel e a todos os colegas do IPH pelo alegre convívio e a oportunidade de tê-los como amigos.

Não poderia me esquecer de agradecer aos amigos e colegas da FURG que me incentivaram a fazer este doutorado: Sebastião, Osmar, Mário, Adriana, Schiavon, Sônia, Celiane, Cátia, Elaine, Leandro, Scott, Nanci, Tales, Vitor e Nelson.

Agradeço à FURG pela liberação de minhas atividades acadêmicas, à CAPES-PICDT pelo apoio financeiro e à Pós-graduação de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental pela acolhida.

Obrigada às minhas irmãs, Vera e Célia, pelo exemplo, confiança, apoio, amizade e pela presença constante em minha vida. Aos meus irmãos, Nando, Beto e Paulo (*in memoriam*), agradeço pelo apoio incondicional.

Aos meus pais, Zaira e Carlos (*in memoriam*), agradeço por minha formação e por me ensinarem a lutar para alcançar os meus objetivos.

A todos que fazem parte de minha grande família: cunhados (as), sogro (a), sobrinhos (as), tios (as) do coração, obrigada pela torcida e por acreditarem em mim.

Agradeço à minha filha por entender a minha ausência e também pelas inúmeras alegrias que me dá. Ao meu marido agradeço a paciência, o companheirismo, a amizade e amor. Marta e Cláudio, vocês que sentiram na "pele" o que é conviver com uma pessoa fazendo uma Tese, aturaram meus altos e baixos, as minhas irritações, obrigada pelo constante incentivo, pela confiança e amor para que mais uma etapa de nossas vidas fosse concluída. A vocês, dedico este trabalho.

Denise

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Instabilidades e transição na camada de mistura. Mecanismos físicos</b>	<b>5</b>
2.1	Configuração do escoamento . . . . .	5
2.1.1	Camada de mistura - Aproximação espacial e temporal . . . . .	5
2.1.2	Estratificação estável . . . . .	8
2.2	Instabilidades na camada de mistura . . . . .	9
2.2.1	Instabilidades primárias . . . . .	9
2.2.2	Instabilidades secundárias . . . . .	14
2.2.3	Instabilidades tridimensionais . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Modelo matemático e método numérico</b>	<b>25</b>
3.1	Modelo matemático . . . . .	25
3.1.1	Configuração do domínio de cálculo . . . . .	25
3.1.2	Equações do movimento . . . . .	25
3.1.3	Condições de contorno . . . . .	27
3.1.4	Condições iniciais . . . . .	27
3.1.5	Generalidades . . . . .	29
3.1.6	Esquema de discretização temporal . . . . .	30
3.1.7	Condição de incompressibilidade . . . . .	31
3.1.8	Esquema de discretização espacial . . . . .	32
3.1.9	Equivalência entre espaço físico e espectral . . . . .	33
3.2	Critérios de identificação das estruturas . . . . .	34
3.2.1	Critério da vorticidade . . . . .	34
3.2.2	Critério $Q$ . . . . .	35

3.3	Verificação do código de cálculo . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Camada de mistura bidimensional</b>	<b>41</b>
4.1	Efeitos da estratificação estável . . . . .	41
4.1.1	Parâmetros físicos e numéricos das simulações . . . . .	42
4.1.2	Camada de mistura não estratificada . . . . .	42
4.1.3	Camada de mistura estavelmente estratificada: Formação da camada baroclínica . . . . .	43
4.2	Análise das estatísticas . . . . .	51
4.2.1	Energia cinética . . . . .	51
4.2.2	Tensões de Reynolds . . . . .	52
4.2.3	Fluxos turbulentos de massa e perfis médios . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica</b>	<b>58</b>
5.1	Instabilidades secundárias na camada baroclínica . . . . .	58
5.2	Parâmetros físicos e numéricos das simulações . . . . .	60
5.3	Instabilidades secundárias na camada baroclínica: domínio com um turbilhão de Kelvin-Helmholtz . . . . .	61
5.4	Instabilidades secundárias na camada baroclínica: domínio com dois turbilhões de Kelvin-Helmholtz . . . . .	63
5.4.1	Influência do número de Richardson - $Re = 500$ . . . . .	64
5.4.2	Influência do número de Reynolds . . . . .	73
5.4.3	Influência da tridimensionalidade - $Re = 500 - Ri = 0.167$ . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Camada de mistura tridimensional. Formação dos vórtices longitudinais</b>	<b>85</b>
6.1	Parâmetros físicos e numéricos das simulações 3D - $Re = 200$ . . . . .	87
6.2	Influência do número de Richardson . . . . .	88
6.3	Influência da condição inicial . . . . .	97
6.4	Influência do tamanho transversal do domínio . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Simulação de Grandes Escalas</b>	<b>112</b>
7.1	Equações governantes na aproximação de Boussinesq para LES . . . . .	112
7.2	Modelo sub-malha no espaço físico . . . . .	115
7.2.1	Modelo Função Estrutura . . . . .	115

---

7.2.2	Modelo Função Estrutura Filtrada . . . . .	116
7.3	Resultados . . . . .	117
7.3.1	Parâmetros físicos e numéricos das simulações LES - $Re = 2000$ . . . . .	118
7.3.2	Influência da resolução da grade computacional . . . . .	119
7.3.3	Aproximação de um regime de auto-similaridade . . . . .	123
7.3.4	Influência do número de Richardson . . . . .	127
7.3.5	Fluxo turbulento vertical de massa e perfil médio de densidade . . . . .	133
7.3.6	Evidências da instabilidade secundária de K-H . . . . .	135
7.3.7	A mistura em função do $Ri$ . . . . .	138
<b>8</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>140</b>
8.1	Conclusões . . . . .	140
8.2	Perspectivas para trabalhos futuros . . . . .	145



# Lista de Figuras

1.1	Exemplos de escoamentos estratificados; (a) Estuário da Lagoa dos Patos - estratificação vertical; (b) Encontro das águas dos rios Negro e Solimões - estratificação vertical e horizontal. . . . .	2
2.1	Desenvolvimento da camada de mistura espacial (Brown & Roshko, 1974 [7]).	6
2.2	Camada de mistura em desenvolvimento temporal, $Re = 300$ e $Ri = 0$ . . . . .	6
2.3	Desenvolvimento da Instabilidade de Kelvin-Helmholtz. . . . .	9
2.4	Exemplos de camada de mistura temporal na atmosfera, NOAA. . . . .	11
2.5	Diagrama de estabilidade neutra para uma camada cisalhante estratificada (Hazel, 1972 [30]). . . . .	12
2.6	Perfis de velocidade e densidade para a camada de mistura temporal. . . . .	13
2.7	Curvas de estabilidade neutra para diferentes valores de $R$ (Hazel, 1972 [30]). . . . .	13
2.8	Representação da instabilidade de Holmboe. . . . .	14
2.9	Processo de entranhamento. Visualização da instabilidade convectiva gravitacional. . . . .	16
2.10	Visualização da camada baroclínica entre os vórtices de Kelvin-Helmholtz. . . . .	16
2.11	Instabilidade elíptica. Etapas inicial e final da transição (Laporte & Corjon, 2000 [43]). . . . .	17
2.12	Instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica, $Re = 2000$ e $Ri = 0.167$ . . . . .	18
2.13	Representação esquemática do modelo de Corcos & Sherman, 1976 [15]. . . . .	19
2.14	Caracterização dos vórtices longitudinais na camada de mistura (Bernal & Roshko, 1986 [5]). . . . .	20
2.15	Esquema representativo da instabilidade hiperbólica (Caulfield & Peltier, 2000 [10]). . . . .	21

2.16	Emparelhamento helicoidal (Silvestrini, 1996 [75]). . . . .	23
2.17	Resultados experimentais de Schowalter <i>et al.</i> (1994) [73]. . . . .	24
3.1	Representação do domínio de cálculo. . . . .	26
3.2	Número de onda modificado $k_m$ (vertical) em função do número de onda $k$ (horizontal): (a) primeira derivada; (b) segunda derivada; — derivação exata; - · - esquema explícito de $2a$ ordem; - - - esquema explícito de $6a$ ordem; —esquema compacto de $4a$ ordem; · · · esquema compacto de $6a$ ordem [42]. . . . .	34
3.3	Comparação entre os critérios de identificação das estruturas coerentes. (a) Isosuperfícies de $\ \omega\  = 2.5$ ; (b) isosuperfície de $Q = 0.5$ ; (c) isosuperfície de $Q = 1$ . . . . .	36
3.4	Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade $u'$ . Simulação (a) $N1$ ( $64 \times 65$ ); (b) $N2$ ( $64 \times 129$ ). . . . .	39
3.5	Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade $u'$ . Simulação (a) $N3$ ( $128 \times 129$ ); (b) $N4$ ( $128 \times 257$ ); (c) $N5$ ( $256 \times 257$ ). . . . .	40
4.1	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulação $2DFI_A$ , $Re = 300$ e $Ri = 0$ . . . . .	43
4.2	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulações $2DFI_B$ , $2DFI_C$ e $2DFI_D$ , $Re = 300$ . . . . .	45
4.3	Campo de densidade para o tempo $t = 19.03$ . Simulação $2DFI$ , $Re = 300$ e (a) $Ri = 0$ ; (b) $Ri = 0.05$ ; (c) $Ri = 0.1$ e (d) $Ri = 0.2$ . Escalas de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho) . . . . .	45
4.4	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulações $2DFII$ , $Re = 300$ . . . . .	46
4.5	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulações $2DFII$ , $Re = 300$ . . . . .	47
4.6	Evolução temporal da espessura de vorticidade. Simulações $2DFII$ , $Re = 300$ . Fases: (a) até o primeiro emparelhamento; (b) do tempo $t = 0$ até final das simulações. . . . .	49
4.7	Evolução temporal da espessura de vorticidade. Simulações $2DFII$ , $Re = 300$ ; Fases: (a) linear; (b) até o enrolamento; (c) até início do processo de emparelhamento para $Ri = 0$ . . . . .	50
4.8	Efeito da estratificação na evolução da energia cinética ( $K$ ). Simulações $2DFI$ , $Re = 300$ . . . . .	51

4.9	Efeito da estratificação na evolução da energia cinética ( $K$ ). Simulações $2DFII$ , $Re = 300$ . . . . .	52
4.10	Tensões de Reynolds, $\langle u'u' \rangle$ , $\langle u'w' \rangle$ e $\langle w'w' \rangle$ (de cima para baixo). Simulações $2DFI$ , $Re = 300$ . . . . .	53
4.11	(a - d) Perfil de densidade média $\langle \rho \rangle$ ; (e - h) Fluxo turbulento vertical de massa $\langle \rho'w' \rangle$ ; Simulações $2DFI$ , $Re = 300$ . . . . .	56
4.12	(a - d) Perfil de velocidade média $\langle u \rangle$ ; (e - h) Fluxo turbulento horizontal de massa $\langle \rho'u' \rangle$ ; Simulações $2DFI$ , $Re = 300$ . . . . .	57
5.1	Representação esquemática da instabilidade próxima ao núcleo. . . . .	59
5.2	Representação da instabilidade secundária de K-H. . . . .	60
5.3	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulação $2DFIII_B$ , $Re = 400$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	62
5.4	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulação $2DFIV$ , $Re = 2000$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	63
5.5	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação $2DFV_A$ , $Re = 500$ , $Ri = 0$ . . . . .	64
5.6	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação $2DFV_B$ , $Re = 500$ , $Ri = 0.05$ . . . . .	65
5.7	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação $2DFV_C$ , $Re = 500$ , $Ri = 0.07$ . . . . .	66
5.8	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação $2DFV_D$ , $Re = 500$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	67
5.9	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para os tempos $t = 8; 12; 20; 28; 32; 40; 44; 48; 54; 56; 58; 60; 64; 68$ ; e $76$ (da esquerda para direita). Simulação $2DFVI$ , $Re = 500$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	68
5.10	Evolução temporal: (a) da energia cinética; (b) do alargamento da espessura de vorticidade. Simulações $2DFV$ , $Re = 500$ . . . . .	69
5.11	(a - b) Fluxo turbulento vertical de massa $\langle \rho'w' \rangle$ , $Ri = 0.07$ ; (c - d) Fluxo turbulento vertical de massa $\langle \rho'w' \rangle$ , $Ri = 0.167$ ; Simulação $2DFV_C$ e $2DFV_D$ , $Re = 500$ . . . . .	70
5.12	Evolução no tempo da vorticidade máxima e mínima ( $\omega_y$ ). Simulação $2DFV$ e diferentes $Ri$ , $Re = 500$ . . . . .	71

5.13	Perfis de vorticidade transversal, $\omega_y$ . Simulação <i>2DFV</i> , $Re = 500$ e $Ri = 0.167$ . . . . .	72
5.14	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação <i>2DFVII</i> , $Re = 1000$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	73
5.15	Evolução no tempo da vorticidade máxima e mínima ( $\omega_y$ ). Simulação <i>2DFVII</i> , $Re = 500$ e simulação <i>2DFV</i> , $Re = 1000$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	74
5.16	Espectro longitudinal de energia para diferentes tempos; $Ri = 0.167$ ; (a) Simu- lação <i>2DFV</i> , $Re = 500$ ; (b) Simulação <i>2DFVII</i> , $Re = 1000$ . . . . .	75
5.17	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação <i>2DFVIII<sub>B</sub></i> , $Re = 2000$ , $Ri = 0.07$ . . . . .	76
5.18	Evolução no tempo do campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação <i>2DVI</i> , $Re = 2000$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	77
5.19	Campo de densidade. Valores variando de $-1$ (azul) a $+1$ (vermelho). Simula- ção <i>2DFVIII<sub>C</sub></i> ; $Re = 2000$ e $Ri = 0.167$ . . . . .	78
5.20	Evolução no tempo da vorticidade máxima e mínima ( $\omega_y$ ), $Re = 2000$ . Simula- ção <i>2DFVIII</i> . . . . .	78
5.21	Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) e planos longitudinais a $y = 1.5$ . Simu- lação <i>3DF</i> , $Re = 500$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	81
5.22	Planos longitudinais a $y = 1.5$ de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulação <i>3DF</i> , $Re = 500$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	82
5.23	Isosuperfícies de $Q = 0.2$ . Simulação <i>3DF</i> , $Re = 500$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	83
5.24	Isosuperfícies de $Q = 0.2$ . Simulação <i>3DF</i> , $Re = 500$ , $Ri = 0.167$ . . . . .	84
6.1	Representação esquemática da instabilidade translativa (Lasheras e Choi, 1988 [47]). . . . .	86
6.2	Vórtices contra-rotativos, corte transversal dos vórtices longitudinais. . . . .	89
6.3	Isosuperfícies do módulo da vorticidade, $\ \omega\  = 0.5$ , para os tempos 9.52, 19.04, 28.57 e 38.09 (da direita para a esquerda). Simulação <i>3DFI</i> , $Re = 200$ . . . . .	90
6.4	Isosuperfícies do módulo da vorticidade, $\ \omega\  = 0.5$ , para os tempos $t = 47.62$ , 57.14, 66.67 e 76.19 (da direita para a esquerda). Simulação <i>3DFI</i> , $Re = 200$ . . . . .	91
6.5	Fluxo turbulento vertical de massa, $\langle \rho' w' \rangle$ , e fluxo horizontal de massa, $\langle \rho' u' \rangle$ , para $Ri = 0, 0.1$ e $0.2$ . Simulação <i>3DFI</i> , $Re = 200$ . (a) $t = 38.09$ ; (b) 76.19 . . . . .	92
6.6	Isosuperfícies do módulo da vorticidade, $\ \omega\  = 0.7$ , para $t = 104.77$ e 114.29. Simulação <i>3DFI</i> , $Re = 200$ . . . . .	93

6.7	(a) Isosuperfícies de $\ \omega\  = 2.5$ ; (b) Isosuperfícies de $Q = 1$ ; (c) Isosuperfícies de $\ \omega\  = 0.7$ ; (d) Isosuperfícies de $Q = 0.2$ ; (e) Isosuperfícies de $\ \omega\  = 0.7$ ; (f) Isosuperfícies de $Q = 0.08$ . . . . .	94
6.8	Isosuperfícies do critério Q. Simulação $3DFI$ , $Re = 200$ . . . . .	95
6.9	Cortes transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade referentes as simulações $3DFI_A$ , $3DFI_B$ e $3DFI_C$ , para os tempos $t = 76.17$ e $t = 104.77$ , $Re = 200$ . . . . .	96
6.10	Cortes transversais ( $x = 6$ ) de isosuperfícies de vorticidade para $\ \omega\  = 0.5$ , e isosuperfícies de $Q = 0.1$ . Simulação: $3DFRI_A$ (à direita) e $3DFIII_A$ (à esquerda), $Ri = 0$ , $Re = 200$ . . . . .	98
6.11	Cortes transversais ( $x = 6$ ) de isosuperfície de vorticidade para $\ \omega\  = 0.5$ , e isosuperfícies de $Q = 0.1$ . Simulação: $3DFRI_B$ (à direita) e $3DFIII_B$ (à esquerda), $Ri = 0.1$ , $Re = 200$ . . . . .	100
6.12	Cortes transversais ( $x = 6$ ) de isosuperfície de vorticidade para $\ \omega\  = 0.5$ , e isosuperfícies de $Q = 0.1$ . Simulação: $3DFRI_C$ (à direita) e $3DFIII_C$ (à esquerda), $Ri = 0.2$ , $Re = 200$ . . . . .	101
6.13	Cortes longitudinais para $y = 4$ (primeira linha) e $y = 10$ (segunda linha). Simulações $3DFRII$ ; $Re = 200$ . . . . .	102
6.14	Cortes transversais ( $x = 6$ e $10$ ) de isosuperfícies de vorticidade para $\ \omega\  = 0.5$ . Simulação: $3DFRI_A$ ( $Ri = 0$ ), $3DFRI_B$ ( $Ri = 0.1$ ), $3DFIII_A$ ( $Ri = 0$ ), $3DFIII_B$ ( $Ri = 0.1$ ); $Re = 200$ . . . . .	102
6.15	Fluxo turbulento vertical de massa, $\langle \rho'w' \rangle$ . Simulações: (a - b) $3DFRI_B$ ; (c - d) $3DFIII_B$ , $Ri = 0.1$ e $Re = 200$ . . . . .	103
6.16	Fluxo turbulento vertical de massa, $\langle \rho'w' \rangle$ . Simulações: (a - b) $3DFRI_C$ ; (c - d) $3DFIII_C$ , $Ri = 0.2$ e $Re = 200$ . . . . .	104
6.17	Isosuperfícies de $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação $3DFRIII_A$ , $Ri = 0$ , $Re = 200$ . . . . .	106
6.18	(a) Resultado obtido por Schowalter <i>et al.</i> [73], $Ri = 0$ ; (b) Simulação $3DFRI_A$ , $Ri = 0$ . . . . .	107
6.19	Isosuperfícies de $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação $3DFRIII_B$ , $Ri = 0.05$ , $Re = 200$ . . . . .	107
6.20	Resultado obtido por Schowalter <i>et al.</i> [73], $Ri = 0.06$ . . . . .	108

6.21	Isosuperfícies de $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação $3DFR_{III_C}$ , $Ri = 0.1$ , $Re = 200$ . . . . .	110
6.22	Resultado obtido por Schowalter <i>et al.</i> [73], $Ri = 0.09$ . . . . .	110
6.23	Isosuperfícies de $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação $3DFR_{II}$ , $Ri = 0.1$ , $Re = 200$ . . . . .	111
6.24	Isosuperfícies de $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação $3DFR_{III_D}$ , $Ri = 0.15$ , $Re = 200$ . . . . .	111
6.25	Planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação $3DFR_{III_E}$ , $Ri = 0.2$ , $Re = 200$ . . . . .	111
7.1	Espectro longitudinal de energia cinética, $t = 39$ , para DNS, a $Re = 200$ ; 500; 1000 e 2000, e LES, a $Re = 2000$ . . . . .	117
7.2	Isosuperfícies do critério Q. Simulação $FSF192Ri0$ , para $Ri = 0$ e $Re = 2000$ . . . . .	120
7.3	Isosuperfícies do critério Q. Simulação $FSF192Ri005$ para $Ri = 0.05$ e $Re = 2000$ . . . . .	120
7.4	Isosuperfícies do critério Q. Simulação $FSF192Ri01$ para $Ri = 0.1$ e $Re = 2000$ . . . . .	121
7.5	Espectro longitudinal de energia cinética para diferentes tempos. (a) Simulação $FSF192Ri0$ , $Ri = 0$ ; (b) Simulação $FSF192Ri005$ , $Ri = 0.05$ . $Re = 2000$ . . . . .	121
7.6	Espectro longitudinal de energia cinética para diferentes tempos. (c) Simulação $FSF192Ri01$ , $Ri = 0.1$ . $Re = 2000$ . . . . .	122
7.7	Influência da grade de cálculo no espectro longitudinal de energia cinética. (a) Comparação entre a simulação $FSF192Ri0$ e $FSF128Ri0$ , $Ri = 0$ ; (b) Comparação entre a simulação $FSF192Ri005$ e $FSF128Ri005$ , $Ri = 0.05$ ; para $t = 44.4$ , $Re = 2000$ . . . . .	122
7.8	Isosuperfícies do critério Q. Simulação: $FSF4VRi0$ , $Re = 2000$ . . . . .	123
7.9	Espectro longitudinal de energia cinética para diferentes tempos. Simulação $FSF4VRi0$ . $Re = 2000$ . . . . .	124
7.10	Evolução temporal das tensões de Reynolds. Simulação $FSF4VRi0$ , $Re = 2000$ ; (a) $\langle u'u' \rangle$ ; (b) $\langle v'v' \rangle$ ; (c) $\langle w'w' \rangle$ ; (d) $\langle u'w' \rangle$ ; . . . . .	125
7.11	Evolução temporal do perfil médio de velocidade. Simulação $FSF4VRi0$ , $Re = 2000$ . . . . .	125

7.12	Comparação das tensões de Reynolds calculadas com as medidas experimentais ( $\times$ , em azul) em regime de auto-similaridade de Bell & Mehta, 1990 [4]. Simulação <i>FSF4VRi0</i> . (a) $\langle u'u' \rangle$ ; (b) $\langle v'v' \rangle$ ; (c) $\langle w'w' \rangle$ ; (d) $\langle u'w' \rangle$ ; . . . . .	126
7.13	Isosuperfícies do critério Q. Simulação <i>FSF128Ri0</i> para $Ri = 0$ e $Re = 2000$ . . . . .	129
7.14	Isosuperfícies do critério Q. Simulação: <i>FSF128Ri005</i> ( $Ri = 0.05$ ); <i>FSF128Ri01</i> ( $Ri = 0.1$ ) e <i>FSF128Ri02</i> ( $Ri = 0.2$ ); $Re = 2000$ . . . . .	130
7.15	Isosuperfícies do critério Q. Simulação: <i>FSF128Ri005</i> ( $Ri = 0.05$ ); <i>FSF128Ri01</i> ( $Ri = 0.1$ ) e <i>FSF128Ri02</i> ( $Ri = 0.2$ ); $Re = 2000$ . . . . .	131
7.16	(a) Espectro longitudinal de energia cinética para diferentes $Ri$ . (b) Espectro de densidade para diferentes $Ri$ . Simulações <i>FSF128Ri0</i> , <i>FSF128Ri005</i> , <i>FSF128Ri01</i> e <i>FSF128Ri02</i> ; para $t = 42.1$ e $Re = 2000$ . . . . .	131
7.17	Variação temporal do espectro longitudinal de energia cinética. Para as simulações : (a) <i>FSF128Ri0</i> ( $Ri = 0$ ); (b) <i>FSF128Ri005</i> ( $Ri = 0.05$ ); (c) <i>FSF128Ri01</i> ( $Ri = 0.1$ ); (d) <i>FSF128Ri02</i> ( $Ri = 0.2$ ). . . . .	132
7.18	Fluxo turbulento médio vertical de massa, $\langle \rho'w' \rangle$ , para diferentes tempos da simulação: (a) <i>FSF128Ri005</i> ; (b) <i>FSF128Ri01</i> ; (c) <i>FSF128Ri02</i> . . . . .	133
7.19	Perfil de densidade média $\langle \rho \rangle$ , para diferentes tempos da simulação: (a) <i>FSF128Ri005</i> ; (b) <i>FSF128Ri01</i> ; (c) <i>FSF128Ri02</i> . . . . .	134
7.20	Evidência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Simulação <i>FSF128Ri005</i> , $Ri = 0.05$ , $Re = 2000$ , cortes longitudinais no plano a $y = 4.4$ ; (a) vorticidade transversal, $\omega_y$ ; (b) módulo da vorticidade, $\ \omega\ $ . . . . .	136
7.21	Evidência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Simulação <i>FSF128Ri01</i> , $Ri = 0.1$ , $Re = 2000$ , cortes longitudinais no plano a $y = 4.4$ ; (a) vorticidade transversal, $\omega_y$ ; (b) módulo da vorticidade, $\ \omega\ $ . . . . .	137
7.22	Evidência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Simulação <i>FSF192Ri005</i> , $Ri = 0.05$ , $Re = 2000$ , cortes longitudinais no plano a $y = 6.5$ ; (a) vorticidade transversal, $\omega_y$ ; (b) módulo da vorticidade, $\ \omega\ $ . . . . .	137
7.23	Evidência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Simulação <i>FSF192Ri01</i> , $Ri = 0.1$ , $Re = 2000$ , cortes longitudinais no plano a $y = 6.5$ ; (a) vorticidade transversal, $\omega_y$ ; (b) módulo da vorticidade, $\ \omega\ $ . . . . .	138

---

7.24 (a) Campos de densidade. (b) Cortes transversais do campo de densidade, plano $x = 4.4$ . Simulação <i>FSF128Ri005</i> , <i>FSF128Ri01</i> e <i>FSF128Ri02</i> , $t = 66.6$ , $Re = 2000$ . . . . .	139
--	-----



# Lista de Tabelas

2.1	Instabilidades primárias em função da relação entre $\delta_i$ e $\delta_d$ . . . . .	14
3.1	Comparação da taxa de amplificação com o valor de referência (Hazel, 1972 [30]). . . . .	38
4.1	Parâmetros físicos e numéricos das simulações bidimensionais - $Re = 300$ . . . .	42
5.1	Parâmetros físicos e numéricos das simulações bidimensionais - $400 \leq Re \leq 2000$	61
5.2	Instabilidades secundárias - Comparação com os dados da literatura . . . . .	79
6.1	Parâmetros físicos e numéricos das simulações tridimensionais - $Re = 200$ . . .	88
6.2	Comprimento de onda transversal, $\lambda_y$ - $Re = 200$ . . . . .	109
7.1	Parâmetros físicos e numéricos das simulações LES - $Re = 2000$ . . . . .	119

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas estratificados são frequentemente encontrados na natureza e na indústria. O movimento de corpos de água ou de ar, sob a ação da força gravitacional, é caracterizado pela variação em densidade do escoamento. Tais escoamentos são observados:

- na atmosfera: na troposfera (onde a temperatura diminui com a altura), acima da tropopausa e na camada limite atmosférica noturna;
- nos oceanos, ao nível da termoclina;
- em estuários, quando ocorre o encontro de águas doces e salgadas ou em lagos profundos estratificados;
- em rios, reservatórios e lagos quando há, por exemplo, emissão de poluentes;
- em problemas industriais como em reatores nucleares;
- em correntes de densidade.

Saber como ocorre a transição à turbulência nos escoamentos estratificados em densidade é importante para entender de que forma a turbulência afeta o clima, a dispersão de poluentes, o transporte de nutrientes e substâncias químicas, a mistura de substâncias passivas além de como interfere na navegação aérea.

A estratificação em densidade, originada das variações de temperatura e salinidade em lagos, estuários e oceanos, ou das variações de temperatura e umidade na atmosfera, pode influenciar profundamente o desenvolvimento das instabilidades e os processos de mistura no escoamento. A forte estratificação estável inibe os movimentos verticais, devido ao efeito da força de empuxo, enquanto que a energia do escoamento, fornecida pelo cisalhamento, é reduzida através do trabalho realizado pelo escoamento contra a gravidade. A competição entre as forças de empuxo e inerciais altera a dinâmica do escoamento. Tal alteração pode ser observada quando um poluente é introduzido na atmosfera ou em um corpo d'água, pois é importante que se entenda como este poluente se propaga, dilui e mistura. As instabilidades que surgem durante este processo irão determinar como o escoamento se comportará do regime laminar até o turbulento.

Assim, a identificação dos mecanismos que levam um corpo d'água ou de ar à turbulência é de vital importância para o controle de fenômenos nocivos ao meio ambiente, bem como para entender de que maneira acelerar os processos que trazem benefícios a ele. A dinâmica dos escoamentos estratificados, o modo como eles transicionam do regime laminar ao turbulento e a análise das instabilidades que neles ocorrem é complexa e ainda precisa ser explorada.

A Figura 1.1a mostra o encontro das águas da Lagoa dos Patos com as águas do Oceano Atlântico, caracterizando uma estratificação vertical, onde as águas mais densas do Oceano ficam abaixo das águas menos densas da Lagoa. A Figura 1.1b mostra a junção dos rios Negro e Solimões, um exemplo de estratificação horizontal e vertical. As águas do rio Solimões (mais densas e com maior velocidade) correm ao lado e por baixo das águas do rio Negro.

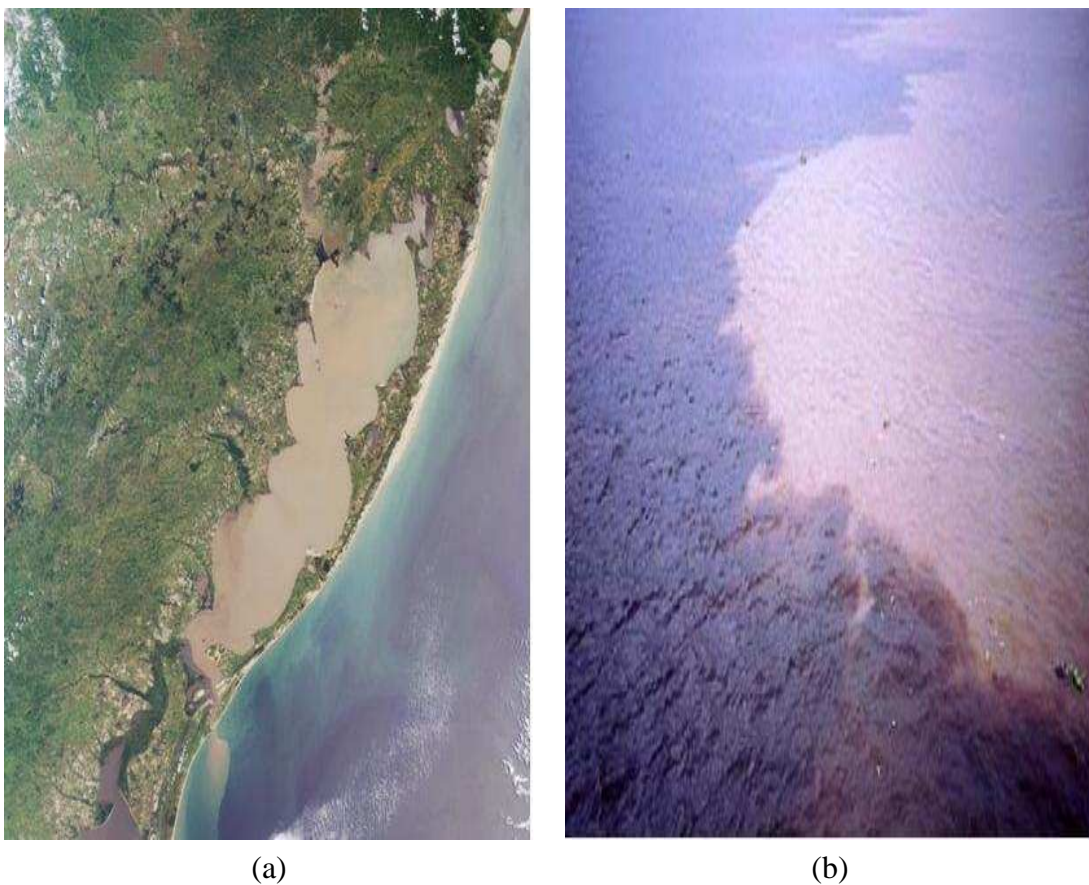


Figura 1.1: Exemplos de escoamentos estratificados; (a) Estuário da Lagoa dos Patos - estratificação vertical; (b) Encontro das águas dos rios Negro e Solimões - estratificação vertical e horizontal.

O presente trabalho analisa os efeitos da estratificação estável no desenvolvimento da instabilidade primária de Kelvin-Helmholtz, das instabilidades secundárias na camada baroclínica e das instabilidades secundárias geradoras dos movimentos tridimensionais, verificando de que modo se processa a transição à turbulência, utilizando um problema modelo: a camada de mistura temporal em um fluido cuja densidade varia na vertical.

A motivação para estudar o mecanismo de instabilidade bidimensional e tridimensional da camada de mistura estavelmente estratificada fundamenta-se no fato de que este problema modelo representa um escoamento de base bem definido, sendo útil para investigar a formação de processos que levam a complexas estruturas tridimensionais em escoamentos geofísicos.

Uma maneira de reproduzir estes escoamentos é utilizando a Simulação Numérica Direta (DNS - *Direct Numerical Simulation*) das equações de Navier-Stokes na aproximação de Boussinesq. A DNS é uma ferramenta poderosa para a análise quantitativa e qualitativa da transição do escoamento à turbulência, já que simula todas as escalas espaciais e temporais do mesmo.

Entretanto, como a capacidade de memória dos computadores a que se tem acesso ainda é limitada, somente é possível simular via DNS escoamentos a números de Reynolds ( $Re$ ) moderados. A referida limitação é consequência do fato de que cada grau de liberdade que caracteriza o sistema dinâmico, corresponde a uma equação linear discretizada. Uma investigação numérica a números de  $Re$  altos pode ser realizada utilizando a técnica de Simulação Numérica de Grandes Escalas (LES - *Large Eddy Simulation*). Esta técnica separa as maiores das menores escalas utilizando um processo de filtragem. As maiores escalas são resolvidas diretamente pelas equações de Navier-Stokes filtradas, enquanto que as menores escalas são modeladas usando um modelo sub-malha. No caso de escoamentos estratificados, o modelo sub-malha tem que ser escolhido visando a não amplificar o efeito da estratificação (que por si só amortece os movimentos).

No presente trabalho, como objetivo principal, investiga-se o quanto a estratificação estável afeta o desenvolvimento da instabilidade primária de Kelvin-Helmholtz, da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada de mistura bidimensional e das instabilidades geradoras dos movimentos tridimensionais. Analisa-se qualitativamente a natureza da transição por meio da qual a turbulência pode se desenvolver na camada de mistura tridimensional estratificada e homogênea, verificando-se como são formados os vórtices longitudinais após a saturação dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz.

O desenvolvimento das instabilidades de Kelvin-Helmholtz e secundárias dentro do escoamento estratificado ainda não são bem entendidas. Muitas são as dúvidas de como ocorre a transição, como por exemplo:

- Como os parâmetros adimensionais  $Re$  e  $Ri$  interferem no desenvolvimento das instabilidades no escoamento bidimensional estratificado?
- As instabilidades induzidas por efeitos baroclínicos modificam a dinâmica do escoamento?
- Os vórtices longitudinais, no escoamento estratificado, são formados da mesma maneira que no escoamento homogêneo?
- A estratificação afeta a formação destes vórtices? Como? Quais os fatores que contribuem para esta alteração?

- O comprimento de onda transversal mais amplificado, para a camada de mistura estratificada, é o mesmo comprimento de onda transversal previsto para a camada de mistura homogênea?
- A instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz, na camada baroclínica, é um fenômeno estritamente bidimensional? Qual a influência do número de Reynolds e do número de Richardson no desenvolvimento desta instabilidade?

Este trabalho se propõe responder as dúvidas acima descritas. Ele está dividido da seguinte forma:

- No capítulo 2 apresenta-se a configuração do escoamento escolhido e uma revisão sobre: as instabilidades primárias que podem surgir no escoamento estratificado, segundo a teoria de estabilidade linear, as instabilidades secundárias e as instabilidades que ocorrem na camada tridimensional.
- No capítulo 3 apresenta-se o modelo matemático e o método numérico adotado. Verifica-se como o código de cálculo se comporta em relação aos efeitos da estratificação, através da taxa de amplificação, e compara-se os resultados obtidos com dados fornecidos pela teoria de estabilidade linear.
- No capítulo 4 analisam-se os efeitos que a estratificação estável tem sobre o desenvolvimento das instabilidades de Kelvin-Helmholtz em uma camada de mistura bidimensional a  $Re = 300$ , e mostra-se a formação da camada baroclínica.
- No capítulo 5 apresentam-se várias simulações bidimensionais, para diferentes números de Reynolds ( $400 \leq Re \leq 2000$ ) e de Richardson ( $0 \leq Ri \leq 0.167$ ), com a finalidade de investigar a instabilidade secundária do tipo Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica.
- No capítulo 6 investiga-se a transição à turbulência na camada de mistura tridimensional estratificada a  $Re = 200$ , através de DNS. Verifica-se como são formados os vórtices longitudinais na camada de mistura estratificada e na homogênea. Analisa-se os efeitos da condição inicial, do tamanho do domínio e do número de Richardson.
- No capítulo 7 analisa-se a dinâmica de uma camada de mistura tridimensional, a  $Re = 2000$ , através de Simulação Numérica de Grandes Escalas (LES), utilizando como modelo sub-malha o modelo de função estrutura filtrada.
- No capítulo 8 são apresentadas as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Instabilidades e transição na camada de mistura. Mecanismos físicos

### 2.1 Configuração do escoamento

A transição à turbulência em escoamentos estratificados é um processo de fundamental importância em escoamentos geofísicos e de engenharia. A evolução de tais escoamentos é estudada através de um problema modelo: a camada de mistura estavelmente estratificada. A camada de mistura estavelmente estratificada desenvolve-se na interface de duas correntes paralelas de fluido que se movem horizontalmente com velocidades e densidades diferentes. A camada abaixo da interface tem maior densidade que a de cima, de forma que o sistema é dito estável.

O estágio inicial do mecanismo de transição do escoamento laminar para o turbulento, na camada de mistura, é caracterizado pela formação de vórtices bidimensionais resultantes da instabilidade primária de Helvin-Helmholtz (K-H).

#### 2.1.1 Camada de mistura - Aproximação espacial e temporal

A camada de mistura é útil para verificar como o fenômeno de transição à turbulência se processa nos escoamentos cisalhantes homogêneos e nos estratificados, através do estudo das instabilidades que nela ocorrem.

As condições auxiliares impostas ao modelo determinam se o desenvolvimento da camada de mistura é espacial ou temporal.

A camada em desenvolvimento espacial, onde as perturbações crescem na direção do escoamento, é gerada entre dois escoamentos paralelos de velocidades longitudinais  $U_1$  e  $U_2$  ( $U_1 > U_2$ ). Esta camada se desenvolve ao longo da direção longitudinal ( $x$ ) e requer condições de contorno apropriadas na entrada e saída do domínio de cálculo (Fig. 2.1). A imposição de uma condição de contorno não periódica dificulta o cálculo numérico e o emprego de métodos espectrais e pseudo-espectrais.

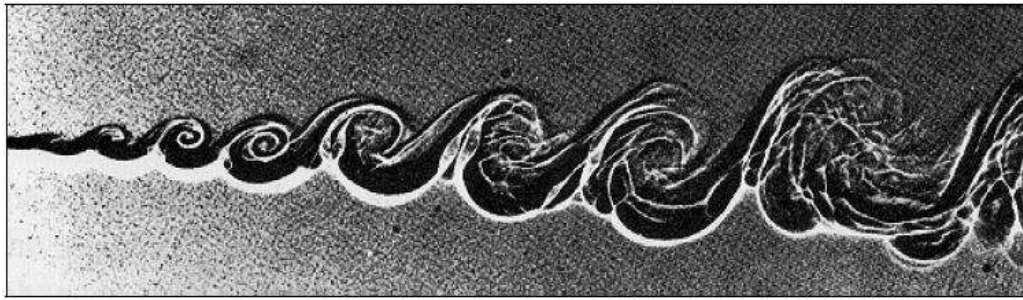


Figura 2.1: Desenvolvimento da camada de mistura espacial (Brown & Roshko, 1974 [7]).

Por outro lado, uma camada de mistura temporal requer condições iniciais e condições de contorno periódicas, o que permite usar métodos pseudo-espectrais [8] em simulações numéricas diretas. Uma camada de mistura temporal precisa de um domínio computacional com tamanho longitudinal de um a dois comprimentos de onda fundamental para representar o fenômeno físico. Esta é uma outra vantagem em relação a camada de mistura em desenvolvimento espacial, que necessita de dez a quinze comprimentos de onda para representar o mesmo fenômeno.

A camada de mistura temporal, que é periódica na direção do escoamento e se desenvolve no tempo, é uma aproximação da camada de mistura espacial, onde observa-se o escoamento em um sistema galileano de referência movendo-se a uma velocidade  $(U_1 + U_2)/2$ . A transformação galileana empregada para relacionar o problema espacial com o temporal é dada por

$$x = \frac{(U_1 + U_2)}{2}t. \quad (2.1)$$

Esta transformação faz com que as velocidades superior e inferior da camada de mistura temporal sejam, respectivamente, iguais a

$$U = U_1 - \frac{(U_1 + U_2)}{2} = \frac{U_1 - U_2}{2}, \quad (2.2)$$

e

$$-U = U_2 - \frac{(U_1 + U_2)}{2} = \frac{U_2 - U_1}{2}. \quad (2.3)$$

A Figura 2.2 mostra o desenvolvimento de uma camada de mistura temporal.

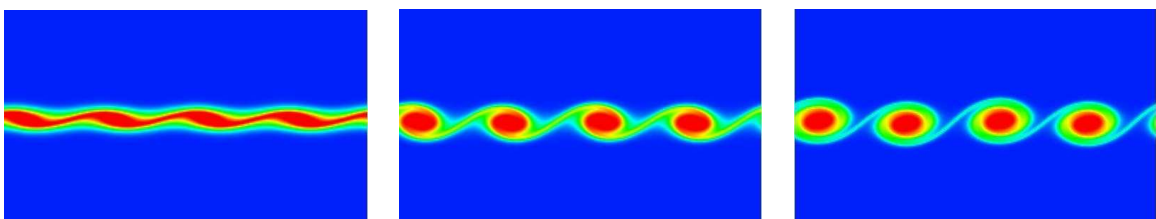


Figura 2.2: Camada de mistura em desenvolvimento temporal,  $Re = 300$  e  $Ri = 0$ .

Sendo o perfil de velocidade de base uma função apenas da coordenada vertical  $U(z)$ , o escoamento pode ser considerado localmente paralelo e a análise de modos normais pode ser empregada, utilizando a teoria de estabilidade linear (detalhes de tal análise pode ser encontrado em Mendonça, 2003 [58] e Criminale, 2003 [19]).

A teoria de estabilidade linear investiga se as perturbações infinitesimais superpostas ao escoamento de base são amplificadas ou amortecidas e, de que maneira a evolução dessas perturbações determina a transição do escoamento para a turbulência. Três casos são possíveis

- se a perturbação é amortecida, o escoamento será estável;
- se a perturbação é amplificada, o escoamento será instável;
- se a perturbação não varia, o escoamento será marginalmente estável.

Quando a perturbação real superposta ao escoamento de base tem a forma

$$\vec{u}'(x, z, t) = \vec{u}(z) \exp^{i(\alpha x - \varpi t)} \quad (2.4)$$

onde  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  e  $\varpi = \varpi_r + i\varpi_i$  e os sub-índices  $r$  e  $i$  indicam as componentes real e imaginária, pode-se ter:

• **Uma aproximação espacial:** quando o número de onda  $\alpha \in C$  e a frequência  $\varpi \in \mathfrak{R}$ . Na análise espacial, a amplitude da perturbação cresce na direção do escoamento ( $\varpi_i = 0$ ) e a frequência da onda é dada por  $\varpi = \varpi_r$ , o número de onda por  $\alpha_r$  e  $\alpha_i$  representa a taxa de crescimento das perturbações. Assim se:

$$\alpha_i < 0 \quad \text{o escoamento é instável;} \quad (2.5)$$

$$\alpha_i = 0 \quad \text{o escoamento é neutramente estável;} \quad (2.6)$$

$$\alpha_i > 0 \quad \text{o escoamento é estável.} \quad (2.7)$$

• **Uma aproximação temporal:** quando o número de onda  $\alpha$  é um número real e a frequência  $\varpi$  um número complexo. Nesta análise a amplitude da perturbação cresce no tempo ( $\alpha_i = 0$ ) e  $\varpi = \varpi_r$  corresponde à frequência da onda,  $\alpha_r$  ao número de onda e  $\varpi_i$  a taxa de crescimento das perturbações. Então se:

$$\varpi_i < 0 \quad \text{o escoamento é estável;} \quad (2.8)$$

$$\varpi_i = 0 \quad \text{o escoamento é neutramente estável;} \quad (2.9)$$

$$\varpi_i > 0 \quad \text{o escoamento é instável.} \quad (2.10)$$

No presente estudo o escoamento de base é paralelo,  $\alpha \in \mathfrak{R}$  e  $\varpi \in C$  tendo-se, assim, uma condição de periodicidade na direção longitudinal  $x$ , o que permite simular uma camada de mistura temporal para estudar a dinâmica de um escoamento estavelmente estratificado.



### 2.1.2 Estratificação estável

A maioria dos escoamentos geofísicos e de engenharia são estavelmente estratificados em densidade, ou seja, o escoamento menos denso encontra-se acima do mais denso. A dinâmica deste tipo de escoamento é controlada pela competição entre as forças de inércia do escoamento de base e as forças de empuxo devido à estratificação em densidade do ambiente. O cisalhamento fornece energia cinética ao escoamento, enquanto que os efeitos do empuxo atuam reduzindo a taxa de crescimento das perturbações e retardando a transição à turbulência. O parâmetro tradicionalmente usado para caracterizar a importância relativa da estratificação é o número de Richardson,  $Ri$ , que relaciona as forças de empuxo às forças inerciais.

No escoamento cisalhante estratificado, o gradiente vertical de velocidade longitudinal tem dimensões de frequência e a razão adimensional dada por

$$Ri_g = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \frac{-g \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \quad (2.11)$$

é chamada de número de Richardson gradiente ou local [72, 92]. Na Eq. (2.11)  $N = \left(\frac{-g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^{1/2}$  é uma frequência associada com os nomes de Brunt (em meteorologia) e Väisälä (em oceanografia), conhecida como frequência de empuxo (ou de flutuabilidade) ou de Brunt-Väisälä. Tal frequência está associada ao deslocamento vertical de um elemento de fluido em relação a sua posição de equilíbrio. Se  $N^2 < 0$  a estratificação é instável, e se  $N^2 > 0$  a estratificação é estável. Quando  $N^2 = 0$  o elemento de fluido está em equilíbrio e o escoamento é homogêneo ou não estratificado [92]. Os períodos correspondentes a  $2\pi/N$  são da ordem de poucos minutos na atmosfera e na termoclina oceânica, a muitas horas no oceano profundo.

A única força de campo atuante na camada de mistura estavelmente estratificada é a força da gravidade. Desta forma, uma componente da força de campo na direção vertical pode ser incorporada à dinâmica do escoamento e, ele ainda continuar sendo tratado como incompressível. Tal consideração corresponde ao movimento do fluido onde a densidade não varia devido às forças de pressão, senão somente devido às forças de empuxo. As equações governantes dentro desta estrutura são resultantes da aproximação de Boussinesq.

A aproximação de Boussinesq, basicamente, leva em consideração que:

- o campo de velocidade é solenoidal ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ );
- as variações de densidade são muito pequenas ( $\Delta\rho \ll \rho_0$ );
- despreza as variações de densidade nos termos inerciais das equações governantes e somente as leva em consideração no termo de empuxo [3, 19].

No presente estudo, a camada de mistura é dita homogênea, ou não estratificada, quando o número de Richardson é considerado nulo ( $Ri = 0$ ). O campo de densidade inicial é, então, transportado pelo campo de velocidade como se fosse um corante. Assim, o campo de densidade se comporta como um escalar passivo, já que não há força de campo atuando sobre ele. Para os

diferentes números de Richardson empregados no trabalho, a camada de mistura é chamada de estavelmente estratificada.

## 2.2 Instabilidades na camada de mistura

### 2.2.1 Instabilidades primárias

Os primeiros estudos em camada de mistura plana datam de aproximadamente 1868 com estudos teóricos de von Helmholtz sobre a instabilidade de escoamentos cisalhantes homogêneos. Posteriormente, Kelvin estendeu o trabalho de Helmholtz para escoamentos cisalhantes com camadas de diferentes densidades. Destes trabalhos surgiu o nome das instabilidades de Kelvin-Helmholtz (K-H) [22]. A evolução da instabilidade de Kelvin-Helmholtz até a formação dos turbilhões K-H pode ser visualizada na Fig.(2.3).

As pesquisas relacionadas a transição à turbulência na camada de mistura estratificada e homogênea somente tiveram um significativo avanço na segunda metade do século XX, com os trabalhos de Miles (1961) [62], Howard (1961) [31], Michalke (1964) [61], Thorpe (1968) [90], Hazel (1972) [30], Browand & Widnant (1973) [6], Brown & Roshko (1974) [7], Winant & Browand (1974) [95], Patnaik *et al.* (1976) [66], Corcos & Sherman (1976) [15] e Koop & Browand (1979) [40] entre outros. Desde então, vários estudos da dinâmica do escoamento têm revolucionado o entendimento físico quanto ao papel dos turbilhões de K-H na transição à turbulência.

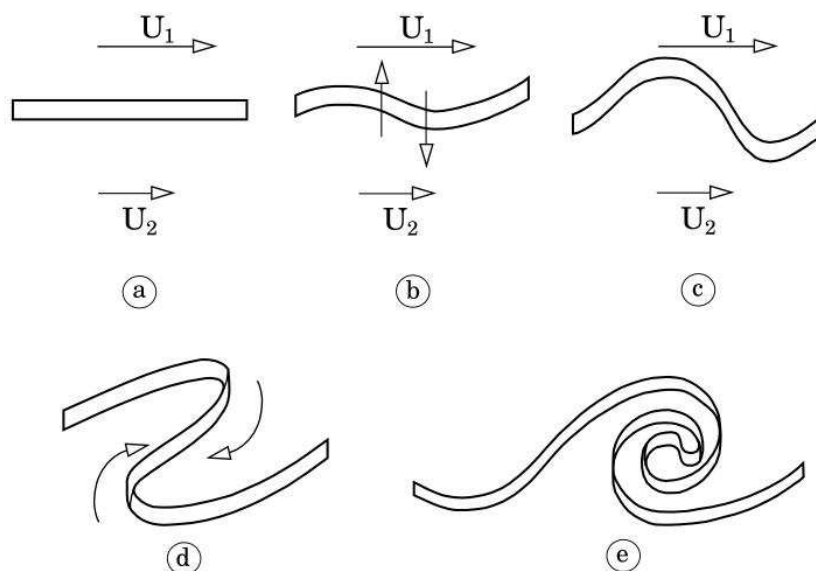


Figura 2.3: Desenvolvimento da Instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

Na década de 70, as estruturas coerentes bidimensionais e tridimensionais na camada de mistura foram estudadas com algum detalhe, com o reconhecimento de que elas são funda-

mentais para o processo de transição à turbulência. O trabalho de Brown & Roshko (1974) [7] atestou esta importância, revelando a existência de estruturas coerentes bidimensionais, os turbilhões de K-H, em uma camada de mistura espacial a alto número de Reynolds ( $Re$ ) (parâmetro adimensional que relaciona as forças inerciais e viscosas). Os turbilhões de Kelvin-Helmholtz são formados a partir do desenvolvimento da instabilidade bidimensional de K-H no escoamento.

Na mesma época, Winant & Browand (1974) [95] identificaram experimentalmente o processo de emparelhamento em uma camada de mistura homogênea como um mecanismo que acelera o crescimento da camada cisalhante, sendo um processo importante para a determinação da taxa de mistura no escoamento. Em estudos em uma camada de mistura estavelmente estratificada, Browand & Winant (1973) [6] constataram que a presença da estratificação estável pode reduzir o número de ocorrências de sucessivos emparelhamentos dos turbilhões bidimensionais de K-H.

Os primeiros estudos relacionados com as instabilidades em escoamentos cisalhantes livres, não viscosos e incompressíveis foram realizados por Taylor e Goldstein em 1931. Três décadas depois, Howard (1961) [31] e Miles (1961) [62], por meio de estudos analíticos, investigaram as condições em que as pequenas perturbações podem crescer no escoamento estratificado. Eles mostraram que a camada de mistura estratificada é instável a pequenas perturbações, quando o número de Richardson global (ver Eq.3.5) é inferior a 0.25 em todo o campo do escoamento. Este estudo foi posteriormente comprovado por Thorpe (1968) [90], que analisou o fenômeno de transição à turbulência, através de experimentos em laboratório com um tubo inclinado contendo um fluido estratificado, e mostrou que a primeira instabilidade a aparecer, quando  $Ri \leq 0.25$ , é a instabilidade de Kelvin-Helmholtz (K-H).

A instabilidade K-H ocorre quando é perturbada a interface entre dois fluidos ou duas camadas de velocidades diferentes (Fig. 2.3(a)), devido à natureza inflexional do perfil de velocidade, cuja análise de estabilidade linear foi bem documentada por Michalke (1964) [61]. Ela pode ser interpretada como a ação conjunta da flutuação da pressão e a elevação da interface, ambas em fase, para superar a rigidez da superfície devido à força restauradora da gravidade. É uma instabilidade simétrica a interface e não-dispersiva, de natureza essencialmente bidimensional e tem sido experimental e numericamente observada por muitos autores [7, 16, 60, 66, 71, 73].

A instabilidade de K-H é classificada como sendo uma instabilidade convectiva, ou seja, as perturbações são produzidas na interface e crescem ou decrescem ao se propagarem na direção do escoamento [58].

A instabilidade de Kelvin-Helmholtz (K-H) desenvolve-se no escoamento e gera uma camada de vorticidade (Fig. 2.3 (a -c)), de comprimento de onda  $\lambda_a$ , que se enrola (Fig. 2.3 (d)) formando as estruturas coerentes de Kelvin-Helmholtz com vorticidade perpendicular ao escoamento médio (Fig. 2.3(e)). Este tipo de instabilidade ocorre com frequência na natureza e em aplicações industriais.

Os turbilhões de K-H, resultantes da instabilidade de K-H em um fluido estavelmente es-

tratificado, podem ser observados na termoclina oceânica e na atmosfera. Os turbilhões na termoclina resultam do aumento local do cisalhamento, causado por ondas internas gravitacionais. Na atmosfera eles são causados por ondas internas ou pelo aceleração do escoamento sobre o topo de uma corrente de ar quente ascendente.

A turbulência associada à instabilidade de K-H é encontrada frequentemente acima da troposfera e abaixo da estratosfera (na tropopausa), na turbulência de céu limpo (Fig. 2.4).

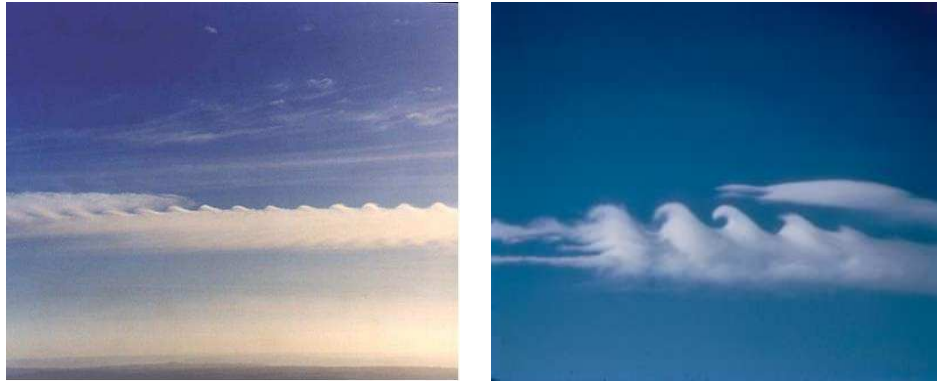


Figura 2.4: Exemplos de camada de mistura temporal na atmosfera, NOAA.

Os turbilhões de K-H contribuem para a mistura de substâncias, para o transporte vertical de quantidade de movimento, calor e poluentes, tanto no oceano como na atmosfera. Maiores detalhes sobre a instabilidade K-H podem ser obtidas em Criminale *et al.* (2003) [19], Drazin & Reid (1989) [22], Lesieur (1997) [50] e Mendonça & Medeiros (2002) [59].

A estabilidade linear de um escoamento, paralelo, cisalhante, estratificado, bidimensional e não-viscoso é governada por uma equação diferencial ordinária, conhecida como equação de Taylor-Goldstein [30], a qual foi derivada de equação de Rayleigh, adicionando a ela o termo de empuxo [30]. A equação de Taylor-Goldstein descreve o comportamento de uma perturbação infinitesimal bidimensional em um escoamento estratificado, onde a variação de densidade é ignorada, exceto no termo de empuxo (aproximação de Boussinesq), e tem a seguinte forma

$$\phi'' - \alpha^2 \phi - \frac{U''}{(U - c)} \phi + \frac{N^2}{(U - c)^2} \phi = 0 \quad (2.12)$$

onde  $\alpha$  é o número de onda,  $\phi$  é a amplitude da perturbação linear para o modo temporal  $\phi(z) \exp^{i\alpha(x-ct)}$ ,  $c$  é a velocidade da onda dada por  $c_r + ic_i$ , onde  $c_r$  é a parte real e  $c_i$  é a parte imaginária.

Os cálculos numéricos de Hazel (1972) [30] para resolver a Eq. (2.12), usando perfis do tipo tangente hiperbólico de igual espessura (interface) para a velocidade e densidade, verificaram os resultados de Thorpe (1968) [90] e geraram um diagrama de estabilidade, destacando a máxima taxa de crescimento para cada número de Richardson,  $Ri$ .

A Figura 2.5 mostra o diagrama de estabilidade e a curva de máxima taxa de crescimento para um perfil do tipo tangente hiperbólico, segundo Hazel [30]. Cabe salientar que o número

de Richardson dos cálculos de Hazel [30] corresponde a metade do número de Richardson empregado no presente trabalho.

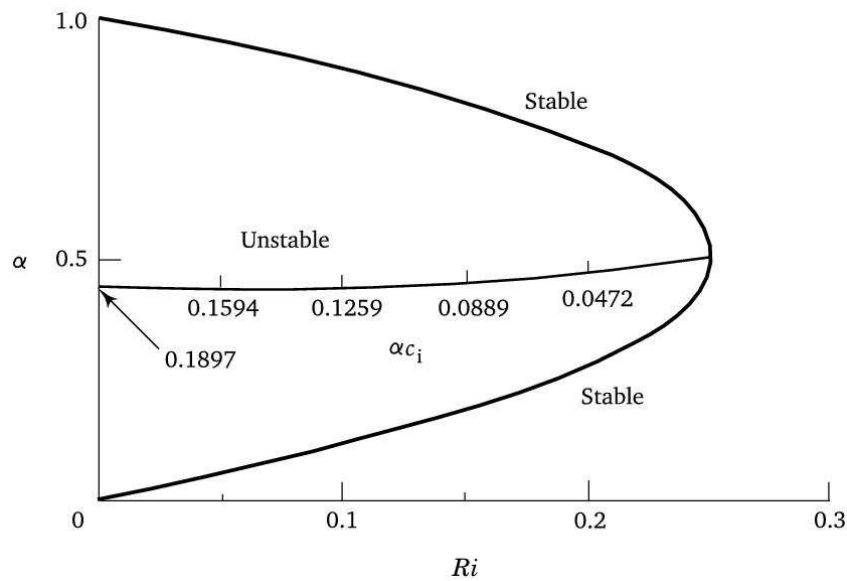


Figura 2.5: Diagrama de estabilidade neutra para uma camada cisalhante estratificada (Hazel, 1972 [30]).

A estabilidade também varia quando os perfis de velocidade e densidade têm a mesma forma, mas diferentes espessuras na região de transição. Hazel (1972) [30] analisou o efeito da variação da escala de densidade em relação a de velocidade, usando as configurações  $u(z) = \tanh(z/\delta_0)$  e  $\rho(z) = (1/R) \tanh(Rz/\delta_0)$ , onde  $\delta_i = 2\delta_0$  é a espessura inicial de vorticidade, definida por  $\delta_i = 2U (du/dz)_{max}$ ,  $\delta_d$  é a espessura do perfil de densidade de base e  $R = \delta_i/\delta_d$ .

A Figura 2.6 mostra um esquema referente aos perfis de velocidade e densidade empregados e o tipo de instabilidade primária que surge na camada de mistura estratificada de acordo com a relação entre os valores de  $\delta_i$  e  $\delta_d$ . Neste esquema,  $d$  é a distância entre o ponto de inflexão do perfil de densidade e o ponto de inflexão do perfil de velocidade,  $z$  é a coordenada vertical e  $\rho$  é a densidade.

A análise de Hazel (1972) [30] mostrou que a estabilidade depende da relação  $R$ . Quando a relação  $R = \delta_i/\delta_d$  cresce, o número de onda mais instável desloca-se para a esquerda no diagrama de estabilidade (Fig. 2.7). Este deslocamento implica em um maior comprimento de onda da perturbação (menor número de onda). O crescimento da relação  $R$  corresponde ao aumento do número de Prandtl ( $Pr$ ) se a densidade depende da temperatura, ou de Schmidt ( $Sc$ ) se a densidade é função da concentração. Por outro lado, se  $\delta_i \sim \delta_d$  o máximo desvio do número de onda mais instável é desprezível em relação ao caso não estratificado, para cada estratificação imposta, e assim o comprimento de onda fundamental longitudinal não varia com o aumento da estratificação.

Então, se  $\delta_i \sim \delta_d$  o número de onda mais amplificado para o escoamento estratificado é

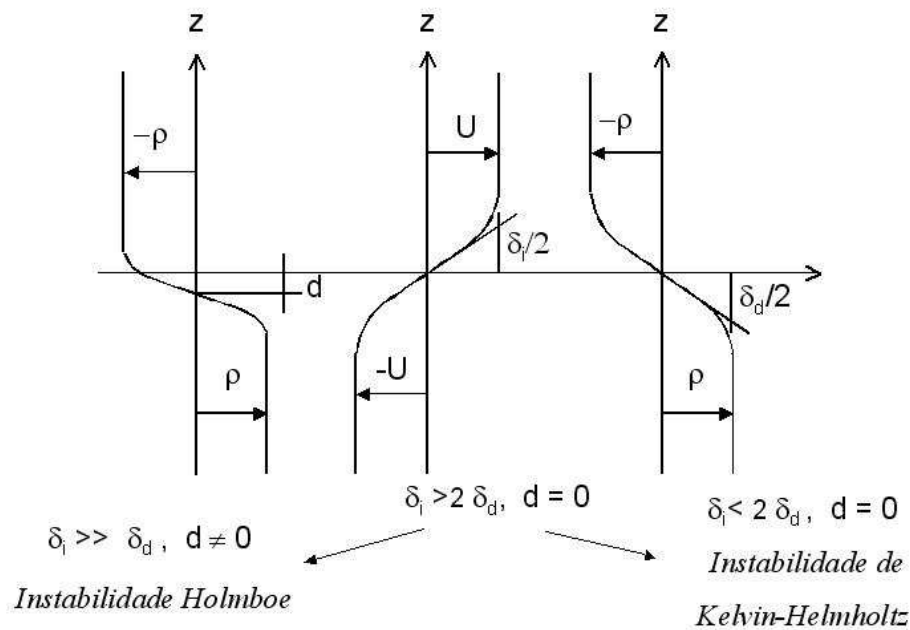


Figura 2.6: Perfis de velocidade e densidade para a camada de mistura temporal.

$\alpha_a = 0.444\delta_o^{-1}$  ( $\delta_i = 2\delta_o$ ), correspondendo a um comprimento de onda  $\lambda_a = 7\delta_i$ , o mesmo previsto pela teoria linear para uma camada de mistura não estratificada [61].

Dependendo da relação entre os valores de  $\delta_i$  e  $\delta_d$  dois tipos de instabilidades primárias podem se desenvolver na camada de mistura estratificada: a instabilidade de Kelvin-Helmholtz e a instabilidade de Holmboe. Se  $\delta_i < 2\delta_d$ ,  $d = 0$  e  $Ri < 0.25$ , a camada de mistura torna-se instável para todos os comprimentos de onda e a instabilidade de Kelvin-Helmholtz pode se desenvolver. Esta instabilidade consiste de ondas não-dispersivas cuja taxa de crescimento é fracamente dependente do número de onda.

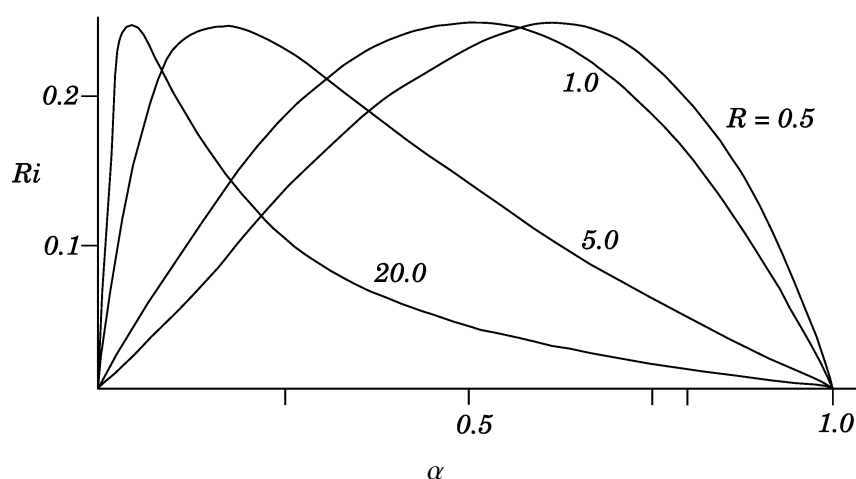


Figura 2.7: Curvas de estabilidade neutra para diferentes valores de  $R$  (Hazel, 1972 [30]).

Na maioria dos estudos experimentais de camada de mistura estratificada, a espessura do perfil de velocidade excede a espessura do perfil de densidade por um fator 2 ( $\delta_i > 2\delta_d$ ) [30, 40,

88]. Nestes casos, quando o número de Richardson é maior que 0.07, a instabilidade primária dispersiva, chamada de instabilidade de Holmboe, domina a dinâmica do escoamento [30, 90, 40, 48]. A instabilidade de Holmboe consiste de dois trens de ondas que viajam com a mesma velocidade, mas em direções opostas em relação ao escoamento médio, e é esquematizada na Fig. 2.8. A análise de estabilidade linear para o caso onde  $\delta_i \gg \delta_d$  foi investigada e comprovada

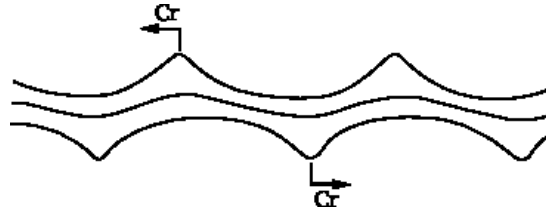


Figura 2.8: Representação da instabilidade de Holmboe.

experimentalmente por Lawrence *et al.* (1991) [48] e, posteriormente, por Haig & Lawrence (1999) [28]. Ambos trabalhos encontraram que, para  $d = 0$ , os modos não-dispersivos de K-H ocorrem somente para  $Ri < 0.07$ .

A descrição do mecanismo da instabilidade primária de Holmboe foi investigado experimentalmente por Browand & Winant (1973) [6], Strang & Fernando (2001) [88], simulado em duas dimensões por Smyth & Peltier (1991) [82] e tridimensionalmente por Smyth & Winters (2002) [84].

Na tabela (2.1) são listadas as instabilidades primárias que surgem na camada de mistura, de acordo com a relação entre as espessuras dos perfis de velocidade e densidade e o número de Richardson.

Tabela 2.1: Instabilidades primárias em função da relação entre  $\delta_i$  e  $\delta_d$

Relação $\delta_i - \delta_d$	$Ri$	Instabilidades	Referência
$\delta_i \gg \delta_d$	$Ri \leq 0.07$	Kelvin-Helmholtz	[28, 48]
$\delta_i \gg \delta_d$	$Ri > 0.07$	Holmboe	[28, 48]
$\delta_i \gg \delta_d$	$Ri = 0.046$	Transição Kelvin-Helmholtz à Holmboe	[28, 48]
$\delta_i \gg \delta_d$	$Ri < 0$	Kelvin-Helmholtz	[28, 48]
$\delta_i \leq 2\delta_d$	$Ri < 0.25$	Kelvin-Helmholtz	[30]
$\delta_i > 2\delta_d$	$Ri < 0.25$	Kelvin-Helmholtz e Holmboe	[30]

### 2.2.2 Instabilidades secundárias

A identificação da seqüência de instabilidades secundárias, que controlam a evolução da camada cisalhante livre estratificada, iniciou com os trabalhos de Peltier *et al.* (1978) [68], Davis & Peltier (1979) [21] e Klaassen & Peltier (1985) [37]. Nestes trabalhos eles fundamentaram a física do problema e então demonstraram matematicamente, baseados na teoria de Floquet [35],

que a camada de mistura estavelmente estratificada torna-se suscetível a duas classes de instabilidades secundárias (quando a instabilidade bidimensional de K-H satura), as quais podem introduzir perturbações tridimensionais (3D) no escoamento bidimensional de Kelvin-Helmholtz. A primeira classe corresponde às instabilidades que crescem dentro do núcleo do turbilhão de K-H e a segunda classe refere-se às instabilidades que se desenvolvem na região entre os turbilhões de K-H. Ainda nos tempos atuais existe uma grande controvérsia em relação a qual das classes pertence a instabilidade que desencadeia a formação dos vórtices longitudinais (tanto no escoamento homogêneo, como no estratificado) e leva o escoamento à turbulência.

As análises de Klaassen & Peltier (1985)[37] mostraram que os vórtices de K-H podem, em uma camada de mistura com moderada estratificação estável ( $Ri \leq 0.07$ ), dar origem a um crescimento espontâneo das perturbações convectivas longitudinais confinadas na região do núcleo do vórtice, na qual a estratificação estável original é invertida pelo enrolamento do turbilhão. A ocorrência desta instabilidade, chamada de *instabilidade convectiva gravitacional*, foi subsequente confirmada em uma série de experimentos por Thorpe (1985) [91] (em um tubo inclinado) e por Schowalter *et al.* (1994) [73]. Segundo Klaassen & Peltier (1989, 1991) [38, 39], esta instabilidade secundária, pertencente à primeira classe, depende do grau de estratificação do escoamento e é responsável por introduzir movimentos tridimensionais na camada de mistura. Basicamente, os movimentos tridimensionais gerados pela instabilidade convectiva gravitacional ocorrem devido a inversão local do gradiente de densidade vertical ( $\partial\rho/\partial z$ ).

Assim, a instabilidade convectiva gravitacional está associada com a desestabilização convectiva das subcamadas de densidade, que são geradas durante o enrolamento dos turbilhões K-H. Para cada rotação do núcleo do turbilhão, uma nova região instável é criada [37]. Esta instabilidade inclui movimentos convectivos nas regiões instáveis ao redor do vórtice K-H, mais precisamente na vizinhança do entranhamento onde o campo de tensões é forte, entre duas correntes que estão girando. O termo entranhamento, *entrainment*, conota a taxa para a qual o fluido irrotacional, que faz parte de um lado ou do outro da camada de mistura, passa a fazer parte dela [16].

O fenômeno físico que dá origem a instabilidade convectiva gravitacional pode ser explicado da seguinte maneira: no escoamento estratificado, o vórtice K-H envolve o entranhamento de duas subcamadas de fluido irrotacional dentro do núcleo do vórtice, como pode ser observado na Fig. 2.9. Uma das subcamadas contém fluido menos denso, proveniente da camada superior, enquanto a outra contém fluido mais denso, oriundo da camada inferior. Como o vórtice enrola, essas duas subcamadas se entrelaçam com o fluido fortemente rotacional em direção ao centro da camada, formando subcamadas de fluido mais denso e menos denso em espiral. Quando o fluido mais denso se encontra acima do menos denso a instabilidade convectiva gravitacional amplifica [37, 39, 73, 91].

Uma outra instabilidade secundária, pertencente à segunda classe, que surge na camada de mistura estratificada é a *instabilidade cisalhante* induzida por efeitos baroclínicos. Ela surge da



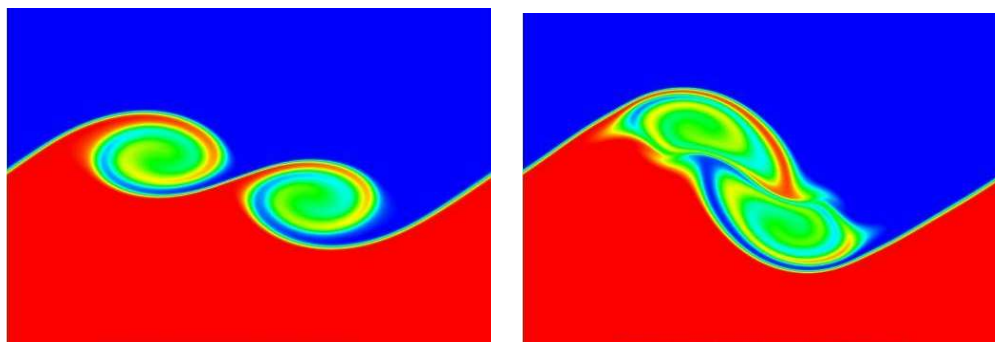


Figura 2.9: Processo de entranhamento. Visualização da instabilidade convectiva gravitacional.

seguinte forma: após o enrolamento dos turbilhões aparecem finas camadas de vorticidade na região entre eles, que são geradas pelo gradiente longitudinal do campo local de densidade e definidas como *camadas baroclínicas* por Staquet (1995) [85] (e identificada por: Caulfield & Peltier, 2000 [10]; Klaassen & Peltier, 1991 [39]) (Fig. 2.10).

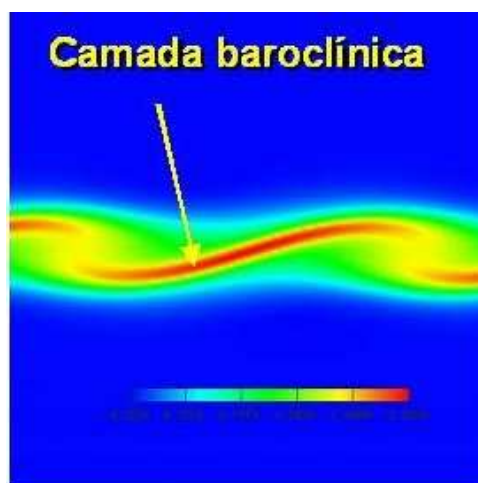


Figura 2.10: Visualização da camada baroclínica entre os vórtices de Kelvin-Helmholtz.

A presença da instabilidade secundária cisalhante na camada de mistura estratificada e sua ausência na homogênea é devida à geração de vorticidade baroclínica no escoamento estratificado, dado pelo termo fonte  $-Ri(\partial\rho/\partial x)$  na equação de vorticidade. Desta forma, um forte gradiente de velocidade e um forte gradiente de densidade são encontrados ao longo da camada baroclínica e na interface da espiral entre as duas subcamadas de diferentes densidades, onde espera-se que ambas instabilidades, cisalhante e convectiva gravitacional, possam ser excitadas [39].

O efeito do número de Richardson ( $Ri$ ) sobre a instabilidade secundária cisalhante foi estudada por Klaassen & Peltier (1991) [39], através da análise de estabilidade dos turbilhões bidimensionais de K-H com relação a pequenas perturbações tridimensionais ( $3D$ ), num escoamento a número de Reynolds  $Re = 300$ . A maior taxa de crescimento para este tipo de

instabilidade ocorre entre  $Ri = 0.08$  e  $Ri = 0.12$  e se aproxima de zero para  $Ri = 0.22$ . Este último valor é próximo do valor crítico,  $Ri = 0.25$ , para o desenvolvimento da instabilidade primária de K-H. O estudo, também, mostra que o comprimento de onda transversal ( $\lambda_y$ ) mais instável é menor que o comprimento de onda longitudinal ( $\lambda_x$ ) para números de Richardson variando de  $Ri = 0$  à  $Ri = 0.04$ , enquanto que para alta estratificação ( $Ri \geq 0.12$ ) o comprimento de onda transversal não varia significativamente.

Além das instabilidades secundárias convectiva gravitacional e cisalhante induzida, uma outra instabilidade secundária pode introduzir movimentos tridimensionais no escoamento bidimensional dos turbilhões K-H. Esta instabilidade é comum a ambos escoamentos, estratificado e homogêneo, e é chamada de *instabilidade elíptica* (pertence à primeira classe). Tal instabilidade inclui modos instáveis que permanecem confinados na parte central do núcleo do vórtice K-H e são relacionados com a instabilidade de um vórtice elíptico (Fig. 2.11) [9, 36, 43].

O termo instabilidade elíptica é o nome dado ao mecanismo de instabilidade linear pelo qual escoamentos tridimensionais podem ser gerados em regiões de linhas de correntes bidimensionais elípticas [36]. Segundo Klaassen & Peltier (1985) [37], a instabilidade elíptica se propaga à medida que o turbilhão K-H se forma, ou seja, a camada de vorticidade transversal enrola em uma formação de vórtices elípticos conectados por uma fina camada de vorticidade, mas tende a decair quando o turbilhão atinge a máxima amplitude e satura.

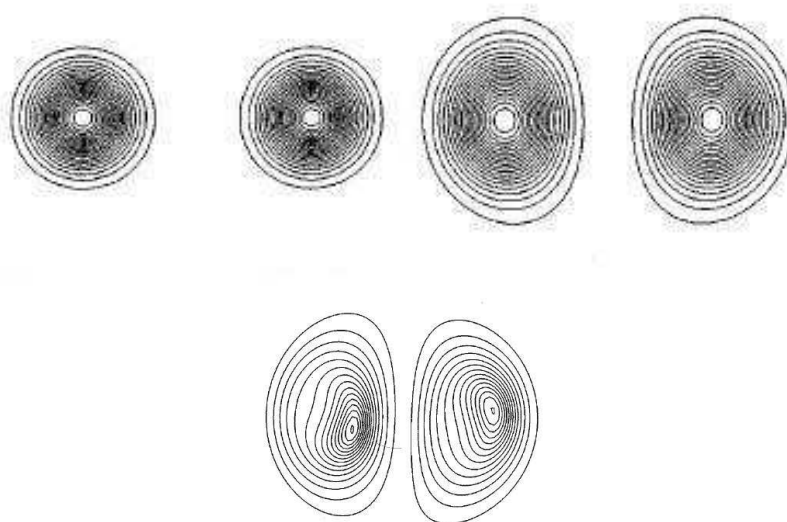


Figura 2.11: Instabilidade elíptica. Etapas inicial e final da transição (Laporte & Corjon, 2000 [43]).

Outra instabilidade, em que as perturbações senoidais de pequena escala se formam na região entre dois turbilhões adjacentes (camada baroclínica), foi observada em escoamentos geofísicos (na atmosfera por Gossard *et al.*, 1970 [26], e no oceano por Haury *et al.*, 1979 [29]), em um pequeno número de experimentos em laboratório (Thorpe, 1968 [90], Altman, 1988 [1], e Atsavaprane & Gharib, 1997 [2]), em simulações numéricas por Staquet, 1995 [85] e

recentemente por Smyth, 2003 [79]. Estas estruturas têm sido atribuídas à instabilidades secundárias do tipo K-H (Fig. 2.12), por Staquet (1995) [85], em uma camada de mistura com alta estratificação e alto número de Reynolds. A instabilidade cisalhante induzida baroclinicamente contribui para o processo de transporte dentro da camada de mistura estratificada.

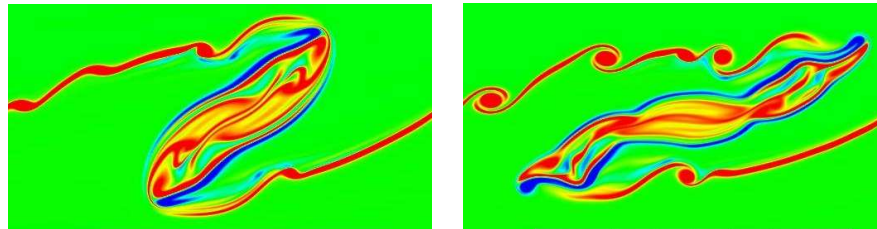


Figura 2.12: Instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica,  $Re = 2000$  e  $Ri = 0.167$ .

Staquet (1995) [85] explorou a eficiência computacional das simulações bidimensionais para o estudo dos turbilhões de K-H, para altos números de Reynolds e para um único número de Richardson. O autor confirmou a validade da teoria de Corcos & Sherman (1976) [15] para a região entre os turbilhões de K-H e detectou a instabilidade secundária do tipo K-H na camada baroclínica. Também identificou um novo modo de instabilidade que se origina na região do núcleo e propaga-se para a camada baroclínica. Smyth (2003) [79] continuou o trabalho de Staquet para menores valores do número de Richardson, em uma camada de mistura instável e fracamente estratificada, para diferentes números de Reynolds e de Prandtl, e identificou a instabilidade secundária de K-H para  $Re > 1000$ .

Segundo Staquet (1995) [85], o aumento das instabilidades secundárias de K-H induz uma cascata de energia para as pequenas escalas, sugerindo uma passagem alternativa à turbulência no escoamento bidimensional. Esta afirmação já tinha sido questionada por Klaassen & Peltier (1985) [37] frente aos experimentos de Thorpe (1985) [91], os quais mostravam que para o aparecimento da instabilidade secundária de K-H não haveria a necessidade de introduzir movimentos tridimensionais, movimentos estes que são característicos da turbulência. No presente trabalho, capítulo 5, mostra-se que a instabilidade secundária de K-H ocorre sem precisar introduzir movimentos tridimensionais no escoamento e quando estes existem ela também ocorre sem a influência deles.

Na tentativa de explicar a origem da instabilidade secundária de K-H, observada em laboratório por Thorpe (1968) [90] e na atmosfera por Gossard *et al.*, (1970) [26], Corcos & Sherman (1976) [15] criaram um modelo teórico, baseado na teoria de similaridade para a camada baroclínica. O modelo indica que a instabilidade de K-H na camada baroclínica somente ocorre para números de Reynolds grandes, o que foi posteriormente confirmado por Staquet [85].

O referido modelo analisa a evolução do escoamento próximo ao ponto de estagnação, ou seja, no ponto médio da região entre dois vórtices de K-H (ponto *S* da Fig. 2.13). Ele estima a espessura das camadas de vorticidade e densidade como uma função do tempo, e considera a

possibilidade de ocorrência (no caso gravitacionalmente estável) de menores escalas ou instabilidade secundária na camada baroclínica. A dinâmica da camada baroclínica, na vizinhança do ponto de estagnação, é modelada pelas equações de Boussinesq, em um sistema de coordenadas ortogonais e centrado na própria camada. As coordenadas ao longo da camada e na direção normal são denotadas por  $p$  e  $\eta$ , respectivamente.

De acordo com o modelo, a vorticidade é produzida baroclínicamente na região entre os vórtices e transportada para o núcleo. Dentro da região do núcleo a vorticidade é destruída pelo entranhamento do fluido, produzindo um torque em oposição à vorticidade do mesmo. Esta teoria de similaridade desenvolvida para a região entre os turbilhões de K-H, prediz que o número de Richardson, que caracteriza a estabilidade da camada baroclínica, seria inversamente proporcional à raiz quadrada do número de Reynolds da camada cisalhante original. Consequentemente, para números de Reynolds suficientemente altos a condição necessária para a instabilidade da camada de mistura, dentro da compreensão do teorema de Miles-Howard [62] [31],  $Ri < 0.25$ , poderia ser satisfeita.

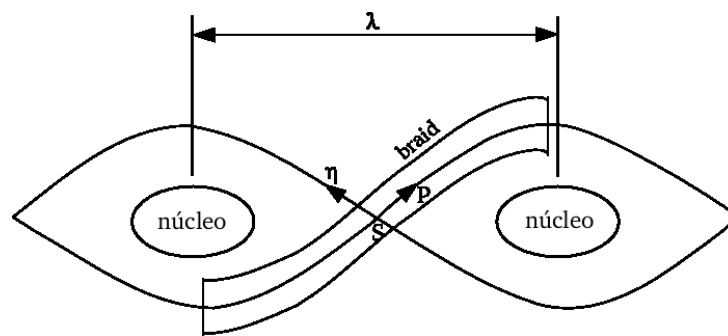


Figura 2.13: Representação esquemática do modelo de Corcos & Sherman, 1976 [15].

Koop & Browant (1979) [40] compararam seus experimentos ao modelo de Corcos & Sherman e constataram que o modelo não inclui interações entre vórtices adjacentes (emparelhamento) e que não é, por este motivo, uma maneira apropriada de determinar a espessura da camada de vorticidade. No presente trabalho, a instabilidade secundária de K-H é estudada considerando diferentes  $Re$  e  $Ri$ .

### 2.2.3 Instabilidades tridimensionais

As instabilidades secundárias que se desenvolvem nos turbilhões saturados de K-H geram movimentos tridimensionais na camada de mistura e estão relacionados ao início da transição à turbulência. Os movimentos tridimensionais produzem instabilidades transversais que formam os vórtices longitudinais, localizados entre os turbilhões de K-H. A interpretação quanto à origem dos vórtices longitudinais mais seguida e investigada é atribuída a Pierrehumbert & Widnall (1982)[70]. Os referidos autores determinaram que um conjunto de vórtices de Stuart, com configuração similar a dos vórtices de K-H, é instável a diferentes perturbações tridimen-

sionais. O modo instável é caracterizado por uma oscilação em fase com os turbilhões primários de K-H. A instabilidade resultante desta oscilação é chamada de *instabilidade translativa*, sendo conhecida como a responsável pelo início da tridimensionalização na camada de mistura homogênea e, conseqüentemente, pela formação dos vórtices longitudinais (Fig. 2.14).

Diversos trabalhos confirmam que a instabilidade translativa é a responsável por desencadear a formação dos vórtices longitudinais [5, 14, 13, 46, 47, 53, 60, 64, 71, 75]. Estes trabalhos verificaram que o comprimento de onda transversal mais instável é da ordem de  $2/3$  do comprimento de onda longitudinal, conforme a teoria de Pierrehumbert & Widnall [70].

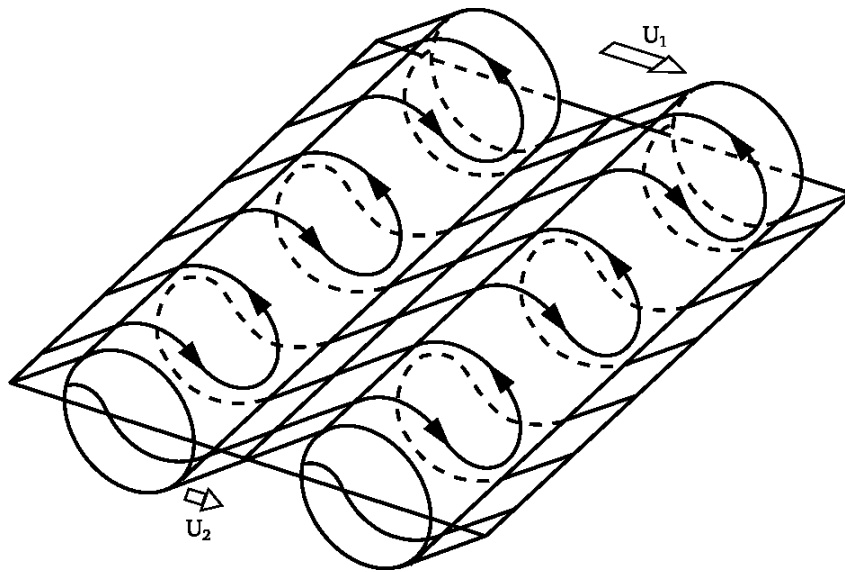


Figura 2.14: Caracterização dos vórtices longitudinais na camada de mistura (Bernal & Roshko, 1986 [5]).

Bernal & Roshko (1986) [5] determinaram que as estruturas longitudinais que aparecem após a saturação dos turbilhões de K-H são vórtices contra-rotativos, os quais são superpostos sobre os turbilhões de Kelvin-Helmholtz, e que estas contribuem para a mistura de escalar passivo, bem como para todas as componentes do tensor de Reynolds. A visualização do escoamento por Lasheras & Choi (1988) [47], em uma camada cisalhante homogênea a baixo número de Reynolds, deu um forte suporte às interpretações iniciais da dinâmica dos vórtices longitudinais contra-rotativos.

A análise de estabilidade linear de Klaassen & Peltier [37, 38, 39], baseada na superposição de perturbações infinitesimais tridimensionais no turbilhão bidimensional de K-H, de amplitude finita, mostrou que os movimentos tridimensionais, os quais aparecem na parte central do núcleo do vórtice e na região entre os turbilhões de K-H, originam instabilidades secundárias fisicamente distintas. Seus resultados mostram que o modo centrado no núcleo, a *instabilidade elíptica*, desenvolve-se primeiramente, mas sua taxa de crescimento decai antes que o turbilhão K-H atinja a máxima amplitude. Ela é, então, superada por um crescimento mais rápido, uma instabilidade centrada na região entre os turbilhões, a *instabilidade hiperbólica*, que introduz

movimentos tridimensionais no local. Segundo eles, em situações de escoamento estratificado o modo centrado no núcleo (instabilidade elíptica) perde a dominância para a instabilidade centrada na região entre os turbilhões (instabilidade hiperbólica). Entretanto, em situações de escoamento homogêneo, as duas instabilidades competem por dominância [39]. Os autores mencionam que as condições críticas para o início destas instabilidades secundárias são fortemente dependentes das condições iniciais.

A Figura 2.15a mostra isolinhas de vorticidade de uma camada de mistura, cuja camada de vorticidade transversal enrolou e formou vórtices elípticos conectados por finas camadas de vorticidade. Na Figura 2.15b observam-se dois pontos de estagnação: um associado às linhas de corrente elípticas, fechadas, no núcleo do turbilhão primário K-H, e o outro associado com as linhas de corrente hiperbólicas, para o ponto médio da região entre os turbilhões.

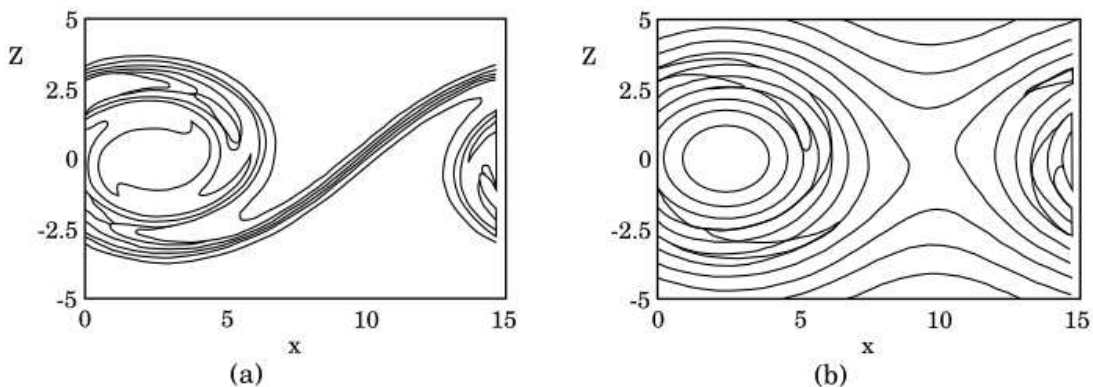


Figura 2.15: Esquema representativo da instabilidade hiperbólica (Caulfield & Peltier, 2000 [10]).

Klaassen & Peltier (1989) [38] determinaram, em sua análise de estabilidade dos turbilhões de K-H para  $Re = 300$  e  $Re = 900$ , que o número de Reynolds influencia na taxa de crescimento das instabilidades elíptica e hiperbólica. Para o escoamento a número de Reynolds 900, a taxa de crescimento encontrada para o modo centrado entre os turbilhões foi muito maior do que para o escoamento a  $Re = 300$ . Os autores atribuem esta diferença de comportamento, além do efeito da estratificação, à importante difusão viscosa para baixos números de Reynolds.

Caulfield & Peltier (2000) [10] realizaram uma análise de estabilidade secundária de um vórtice de K-H, usando a metodologia descrita por Klaassen & Peltier [37, 39], e a testaram através de simulações numéricas. Os autores mostram que as previsões teóricas de Klaassen & Peltier [37, 38, 39] são válidas e que o modo secundário, para a transição do escoamento estratificado, é fundamentalmente diferente do modo como se controla a transição à turbulência em um caso homogêneo.

Os autores mostraram que os modos instáveis geradores das instabilidades elípticas e hiperbólicas são independentes um do outro, tanto no escoamento homogêneo como no estratificado. Entretanto, quando o escoamento é estratificado os mecanismos de tridimensionalidade são diferentes, devido aos efeitos baroclínicos que intensificam a vorticidade na região entre os tur-

bilhões de K-H (camada baroclínica). Dependendo do grau de estratificação no escoamento os movimentos verticais são reduzidos na camada de mistura estratificada e a instabilidade hiperbólica pode perder domínio para a instabilidade elíptica.

Segundo a análise de Caulfield & Peltier (2000) [10] (e Klaassen & Peltier, 1991 [39]) o número de onda transversal mais amplificado cresce à medida que o número de Richardson aumenta, isto é, escoamentos com maiores números de Richardson teriam comprimentos de onda transversais menores e um maior número de vórtices longitudinais no escoamento. Entretanto, os resultados numéricos de Caulfield & Peltier (2000) mostram que o aumento do número de Richardson não altera o número de vórtices longitudinais presentes no escoamento, apenas os enfraquecem. Estes resultados obtidos via DNS contrariam a análise teórica dos autores.

Smyth & Peltier (1994) [83] mostraram que a instabilidade hiperbólica, centrada na região entre sucessivos turbilhões de uma camada de mistura homogênea, é identificada por ter uma taxa de crescimento maior do que a instabilidade elíptica centrada no núcleo. Estes resultados contradizem o sugerido por Pierrehumbert & Widnall [70], de que é a instabilidade elíptica a responsável pela transição à turbulência no caso homogêneo.

Pode-se dizer que Pierrehumbert & Widnall [70] encontraram uma instabilidade centrada no núcleo (a instabilidade translativa) como sendo a mais dominante para a geração dos vórtices longitudinais. Entretanto, Klaassen & Peltier [39] e Caulfield & Peltier (2000) [10] mostraram que há uma competição entre um modo centrado no núcleo (a instabilidade elíptica) e um modo centrado na região entre os turbilhões de K-H (a instabilidade hiperbólica), com o primeiro modo dominando inicialmente, mas sendo superado pelo último quando o turbilhão K-H atinge a máxima amplitude.

Os últimos autores citados, verificaram que a instabilidade translativa está aproximadamente relacionada com a instabilidade elíptica do turbilhão K-H. Desta forma, pode-se concluir que escoamentos com vórtices elípticos também possuem pontos de estagnação hiperbólicos, os quais são igualmente instáveis. A estabilidade do escoamento estratificado é determinada pela competição entre as instabilidades centradas no núcleo (elíptica e/ou translativa e gravitacional) e as instabilidades centradas na região entre os turbilhões (hiperbólica e cisalhante). A combinação das condições iniciais, do número de Richardson e do número de Reynolds é fundamental na determinação do tipo de instabilidade que pode se desenvolver no escoamento estratificado.

A instabilidade translativa e a hiperbólica não são os únicos mecanismos possíveis para a tridimensionalização do escoamento homogêneo. Um outro mecanismo, chamado de emparelhamento helicoidal, caracterizado por uma organização dos turbilhões de K-H em oposição de fase, foi mostrado por Comte *et al.* (1992) [12] e Silvestrini (1996) [75]. A instabilidade do emparelhamento helicoidal deforma os turbilhões de K-H, e a estrutura resultante tem a forma de uma treliça, como pode ser observado na Fig. 2.16. Este tipo de instabilidade, até o presente momento, não foi observado em escoamentos estratificados.

Cortesi *et al.* (1998) [17] investigaram numericamente a tridimensionalização do escoamento na camada de mistura plana, para diferentes fluidos (sódio, ar e água), a  $Re = 400$  e

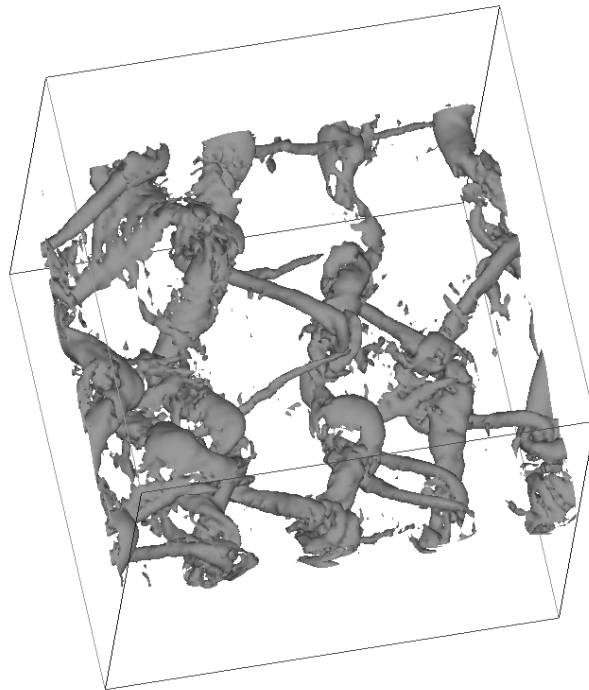


Figura 2.16: Emparelhamento helicoidal (Silvestrini, 1996 [75]).

num domínio com comprimento longitudinal  $L_x = 14\delta_i$  e transversal de  $L_y = 2/3L_x$ . Para isto utilizaram DNS e um código pseudo-espectral, onde a evolução dos campos de velocidade e do escalar ativo são seguidos independentemente por pontos de colocação, que se redistribuem adaptativamente em regiões de alto cisalhamento e de variações do escalar ativo. Testaram a influência combinada da força de empuxo ( $0 \leq Ri \leq 0.2$ ), condutividade térmica (número de Prandtl igual a 0.00535, 0.69 e 2.2) e da condição inicial para as flutuações de velocidade na formação dos vórtices longitudinais. Eles mostraram que as condições iniciais determinam o tempo para o qual a tridimensionalização do escoamento acontece, com as instabilidades bidimensionais e tridimensionais competindo entre si.

Se a perturbação transversal é forte, quando comparada a perturbação do modo fundamental, a instabilidade centrada no núcleo (instabilidade elíptica e/ou translativa) introduz fortes ondulações transversais no desenvolvimento dos turbilhões K-H, as quais induzem a formação das estruturas longitudinais. Caso contrário, quando a perturbação transversal é fraca, a instabilidade centrada na região entre os turbilhões de K-H (instabilidade hiperbólica) torna-se dominante, como o previsto pela análise de estabilidade de Klaassen & Peltier [39], e gera estruturas coerentes longitudinais.

Nas simulações numéricas de Cortesi *et al.* [17] foram observados, para o caso homogêneo, dois pares de vórtices longitudinais, em acordo com análise de estabilidade de Pierrehumbert & Windall (1982). Ao contrário, nos testes com estratificação, foram observados um maior número destes vórtices, o que concorda com a análise de Klaassen & Peltier (1991). Neste caso, o comprimento de onda transversal depende do número de Richardson ( $Ri$ ), do número



de Prandtl e fortemente das condições iniciais. A diferente distribuição espacial dos vórtices longitudinais na camada estratificada em relação a camada homogênea, se deve a uma nova fonte de geração de vorticidade (ou destruição) através da ação do torque baroclínico.

Schowalter *et al.* (1994) [73] investigaram, experimentalmente, o efeito da estratificação sobre a estrutura dos vórtices longitudinais em camadas de mistura estavelmente estratificadas, para diferentes números de Richardson e utilizando condições iniciais forçadas. Verificaram o efeito do empuxo na formação dos vórtices longitudinais e na evolução da instabilidade convectiva gravitacional. Eles constataram que dependendo da localização do vórtice longitudinal este pode ser enfraquecido ou reforçado pela estratificação. No topo dos turbilhões de K-H (onde o fluido mais pesado está embaixo,  $\partial\rho/\partial z < 0$ ) a vorticidade longitudinal medida foi maior que na região entre os turbilhões. A Figura 2.17 mostra os resultados do experimento de Schowalter *et al.* [73] para o escoamento com  $Ri = 0$  e  $Ri = 0.06$ , num domínio de duas vezes o comprimento de onda fundamental, a  $Re = 600$ . Nestes resultados observa-se que a estratificação dificulta a formação dos vórtices longitudinais (Fig. 2.17b) e a distância entre os vórtices é maior do que para o caso homogêneo, contrariando os resultados obtidos por Cortesi [17].

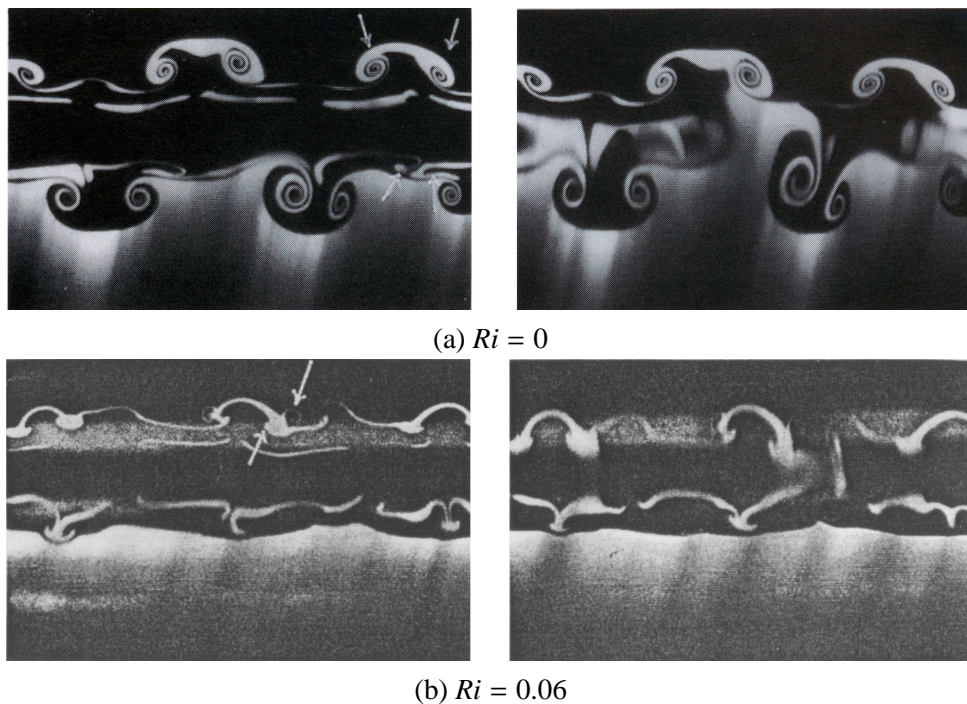


Figura 2.17: Resultados experimentais de Schowalter *et al.* (1994) [73].

# Capítulo 3

## Modelo matemático e método numérico

### 3.1 Modelo matemático

No presente trabalho é utilizado o código `Incompact3d`, elaborado conjuntamente pelo Laboratoire d'Études Aérodynamiques, da Universidade de Poitiers, França, e o Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica da Faculdade de Engenharia, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul [42]. Para a realização deste trabalho o código `Incompact3d` foi adaptado, com a finalidade de levar em conta a estratificação. As simulações foram realizadas em um PC Pentium IV, 2.8GHz e 2GB de memória, no Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH), da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

#### 3.1.1 Configuração do domínio de cálculo

O domínio de cálculo, de tamanho  $(L_x, L_y, L_z)$ , empregado para estudar a camada de mistura é mostrado na Fig. 3.1, onde a direção  $x$  é a direção principal do escoamento (longitudinal), a direção  $y$  é a direção transversal e  $z$  é a direção vertical.

#### 3.1.2 Equações do movimento

As equações que governam o movimento do fluido são as equações de Navier-Stokes na aproximação de Boussinesq, em um sistema cartesiano de referência  $\mathfrak{R} = (0; x, y, z)$ . A equação da quantidade de movimento para o campo de velocidade  $\vec{u}$ , com componentes  $(u, v, w)$ , é dada por:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p - Ri \rho \vec{i}_z + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.1)$$

onde  $p^*$  é o campo de pressão modificado.

A equação da continuidade é:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.2)$$

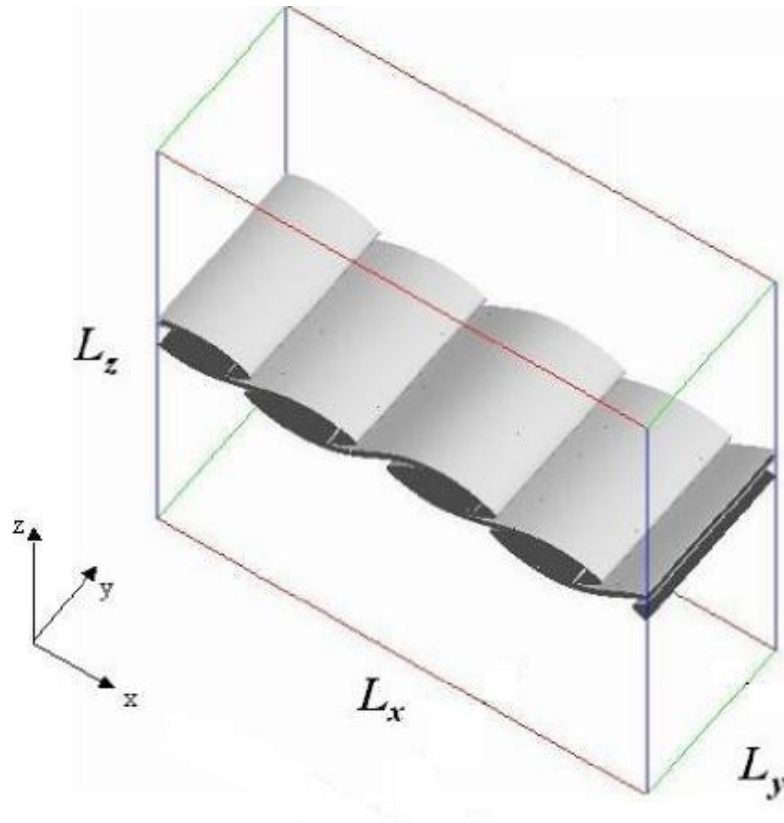


Figura 3.1: Representação do domínio de cálculo.

e a equação de transporte-difusão, derivada da equação de energia, é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \rho, \quad (3.3)$$

onde  $\rho$  é a densidade ou escalar ativo.

As variáveis utilizadas nas equações acima são adimensionais. Nelas, três parâmetros adimensionais são relevantes: o número de Reynolds ( $Re$ ), o número de Richardson ( $Ri$ ) e o número de Prandtl ( $Pr$ ). O número de Reynolds, baseado na metade da diferença da velocidade através da camada cisalhante ( $U$ ) e na espessura inicial de vorticidade ( $\delta_i$ ), é definido por:

$$Re = \frac{U \delta_i}{\nu}. \quad (3.4)$$

O número de Richardson global é definido por:

$$Ri = \frac{g R \Delta \rho \delta_i}{\rho_0 U^2}, \quad (3.5)$$

onde  $R$  é a razão entre a espessura inicial de vorticidade e a espessura de densidade ( $\delta_d$ ) ( $R = \delta_i / \delta_d$ ), e  $R \Delta \rho$  é a escala de densidade. O número de Prandtl é dado por:

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (3.6)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\kappa$  difusividade térmica.

O tempo é adimensionalizado usando a escala advectiva  $\delta_i/U$ . As escalas para adimensionalizar o comprimento, velocidade e densidade são escolhidas de tal maneira que  $\delta_i = 1$ ,  $U = 1$  e  $\Delta\rho = 1/R$ . Desta forma  $Re = 1/\nu$  e  $Ri = g/\rho_o$ .

A equação de vorticidade, obtida aplicando o rotacional à equação de movimento na aproximação de Boussinesq Eq. (3.1), é dada por:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = -Ri (\nabla \rho \times \vec{i}_z) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (3.7)$$

onde

$$(\nabla \rho \times \vec{i}_z), \quad (3.8)$$

é o torque baroclínico, com componentes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} \quad \text{na direção longitudinal } x \quad (3.9)$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{na direção transversal } y \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Condições de contorno

As condições de contorno para a camada de mistura temporal (Fig. 3.1) são:

- **periódicas**: utilizadas na direção principal do escoamento ( $x$ ), e na direção transversal ( $y$ );
- **deslizamento livre**: condição utilizada na direção vertical ( $z$ ). Esta condição impõe as seguintes restrições:  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$  e  $w = 0$  em  $z = \pm \frac{Lz}{2}$ . A condição de deslizamento livre é chamada de condição semi-periódica, equivalente a uma condição de simetria (função par) ou antissimetria (função ímpar) segundo a componente da velocidade.

### 3.1.4 Condições iniciais

A escolha da condição inicial influencia fortemente o mecanismo de transição à turbulência e a configuração das estruturas de vorticidade que se formam no escoamento quando é realizada uma simulação numérica na abordagem temporal.

As condições iniciais são definidas em termos dos campos de velocidade e densidade, como em Corcos & Sherman (1976) [15] e Patnaik *et al.* (1976) [66], onde os perfis adotados são as soluções de similaridade das equações de Boussinesq. No tempo inicial ( $t = 0$ ) o campo de densidade é  $\rho(x, y, z, t = 0) = \rho_0 + \rho(z)$ . No presente trabalho nenhuma flutuação de densidade é adicionada ao perfil  $\rho(z)$ . Os perfis de velocidade e densidade empregados nas simulações bidimensionais e tridimensionais, no instante de tempo  $t = 0$ , são dados por:

$$u(x, y, z, t = 0) = U \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{\pi} z}{\delta_i} \right), \quad (3.11)$$

e

$$\rho(x, y, z, t = 0) = -\frac{1}{R} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}Rz}{\delta_i}\right). \quad (3.12)$$

No presente trabalho a espessura do perfil inicial de velocidade (Eq. 3.11) é de aproximadamente 80% da espessura do perfil inicial de densidade ( $R = \delta_i/\delta_d = \sqrt{0.7}$ ). Isto garante que o comprimento de onda fundamental longitudinal não varia com o aumento da estratificação [30].

O perfil do tipo função erro é mais utilizado em experimentos que o perfil do tipo tangente hiperbólico. Hazel (1972) [30] investigou numericamente as características de estabilidade dos dois perfis e constatou que o comportamento de ambos, em relação a estabilidade, é muito semelhante. Sendo assim, toda a análise de estabilidade para o perfil do tipo tangente hiperbólico serve para o perfil do tipo função erro.

Com o objetivo de promover o desenvolvimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz e desencadear a formação dos turbilhões, é somado ao perfil de velocidade de base (Eq.(3.11)) um campo de perturbações. O campo de perturbações ( $u', v', w'$ ), sobreposto ao perfil de base, envolve as ondas correspondentes ao número de onda mais amplificado,  $\alpha_a$ , seu primeiro subharmônico,  $\alpha_a/2$ , um segundo modo subharmônico (quando o cálculo é realizado a quatro turbilhões) e uma onda senoidal ou ruído branco na direção transversal ( $y$ ), para o cálculo tridimensional.

Como já citado anteriormente, o comprimento de onda mais instável dado pela teoria de estabilidade linear é de aproximadamente  $\lambda_a = 7\delta_i$  ( $\alpha_a = 2\pi/\lambda_a = 0.8894\delta_i^{-1}$  [61]). Este comprimento, segundo estudos de Hazel (1972) [30], não varia com a estratificação se o número de Richardson  $\leq 0.25$  e  $\delta_i \sim \delta_d$ , somente a taxa de amplificação sofre alteração. O comprimento do domínio de cálculo é escolhido de maneira a ser múltiplo de  $\lambda_a$ , ou seja,  $L_x = N\lambda_a$ , onde  $N$  é o número de comprimentos de onda. Assim, se  $N = 2$ , dois vórtices se desenvolverão no domínio. O campo de perturbações adicionado ao campo de velocidade inicial deve satisfazer a equação da continuidade (condição de incompressibilidade).

O campo bidimensional de perturbações ( $u', w'$ ), no instante inicial, adicionado ao perfil de base para as simulações bidimensionais e domínio com dois comprimentos de onda ( $L_x = 2\lambda_a$ ), é da forma:

$$u'(x, 0, z) = \sigma^2 z \frac{L_x}{4\pi} e^{-\sigma z^2} \left( -A_f \cos\left(\frac{4\pi x}{L_x}\right) - 2A_s \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \right), \quad (3.13)$$

$$w'(x, 0, z) = e^{-\sigma z^2} \left( A_f \sin\left(\frac{4\pi x}{L_x}\right) + A_s \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \right), \quad (3.14)$$

onde  $A_f$  é a amplitude do modo fundamental,  $A_s$ , do modo subharmônico e  $\sigma = 2$ .

No presente trabalho foram realizadas simulações bidimensionais, como testes preliminares, utilizando um ruído branco como condição inicial para as flutuações de velocidade vertical,  $w'$ , e longitudinal,  $u'$ , cujos resultados são mostrados em Martinez *et al.* (2003) [54].

O campo tridimensional de perturbações ( $u', v', w'$ ), adicionado ao perfil de base, têm três variações: um ruído branco de igual amplitude para as três componentes de flutuações de velo-

cidade, ou um ruído branco para a flutuação de velocidade  $v'$  e forçada para as outras duas ( $u'$  e  $w'$ )(Eq.(3.15) e (3.17)), ou uma condição inicial forçada para as três componentes conforme as equações abaixo:

$$u'(x, y, z) = \sigma^2 z \frac{L_x}{4\pi} e^{-\sigma z^2} \left( A_f \sin\left(\frac{4\pi x}{L_x}\right) + 2A_s \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \right), \quad (3.15)$$

$$v'(x, y, z) = \sigma^2 z \frac{L_y}{4\pi} e^{-\sigma z^2} \left( A_y \sin\left(\frac{4\pi y}{L_y}\right) \right), \quad (3.16)$$

$$w'(x, 0, z) = e^{-\sigma z^2} \left( A_f \cos\left(\frac{4\pi x}{L_x}\right) + 2A_s \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) + A_y \cos\left(\frac{4\pi y}{L_y}\right) \right), \quad (3.17)$$

onde  $A_y$  é a amplitude na direção transversal.

### 3.1.5 Generalidades

A escolha da metodologia numérica para a resolução das equações governantes é um fator determinante para a qualidade dos resultados, principalmente, quando o objetivo é investigar as estruturas coerentes e as instabilidades que surgem no escoamento estratificado durante a transição do mesmo à turbulência. As técnicas mais utilizadas e que melhor atingem este objetivo são:

- 1) Simulação Numérica Direta (DNS - "*Direct Numerical Simulation*");
- 2) Simulação de Grandes Escalas (LES - "*Large Eddy Simulation*").

A DNS soluciona diretamente as equações de Navier-Stokes, geralmente empregando esquemas de diferenças finitas de alta ordem. Numa DNS todas as escalas do escoamento são simuladas, das maiores e mais energéticas (impostas pela configuração, escala integral  $L$ ) até as menores (escala de Kolmogorov,  $\eta$ ) sem precisar adicionar equações de fechamento. A principal restrição desta técnica está relacionada com o custo de cálculo computacional. Como o número de graus de liberdade ( $N = L/\eta$ ) é função do número de Reynolds ( $N = Re^{3/4}$ ), altos números de Reynolds estão associados a altos números de graus de liberdade, exigindo uma malha computacional mais refinada e conseqüentemente um maior esforço computacional.

A simulação de grandes escalas, LES, permite aumentar o número de Reynolds em relação à DNS, através da introdução de um filtro que separa as grandes das pequenas escalas. A técnica LES resolve as equações completas de Navier-Stokes somente para as maiores escalas (mais energéticas) e as menores são parametrizadas com a incorporação de um modelo sub-malha.

Nos dias atuais, a simulação numérica direta (DNS) constitui uma excelente ferramenta de pesquisa, principalmente para investigar a transição do escoamento à turbulência e a turbulência propriamente dita. Para realizar uma DNS é de extrema importância que o código numérico seja capaz de resolver todas as escalas do escoamento.

No presente trabalho são utilizadas as técnicas DNS e LES empregando um esquema numérico de alta precisão, sendo este um fator fundamental e determinante na qualidade dos resulta-

dos.

O código de cálculo Incompact3d utiliza a formulação rotacional para tratar os termos não-lineares da Eq.( 3.1),

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla}P - \vec{\omega} \times \vec{u} - Ri \rho \vec{i}_z + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.18)$$

onde  $P = p^* + (\rho_0 \vec{u}^2 / 2)$  é o campo de pressão modificado e  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$  é o campo de vorticidade. A equação da quantidade de movimento na forma rotacional conserva quantidade de movimento e energia cinética quando discretizada através de métodos espectrais ou de métodos de diferenças finitas, mesmo na presença de erros de dobramento ("aliasing") [27]. Os erros de dobramento aparecem toda vez que os termos não-lineares são calculados numericamente no espaço físico, em um domínio discretizado [8, 41].

### 3.1.6 Esquema de discretização temporal

A escolha do esquema de avanço no tempo é função da condição CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*), precisão do esquema e nível de armazenamento de memória computacional. A condição CFL restringe o passo de tempo nos esquemas explícitos.

O esquema adotado para a integração no tempo é o esquema explícito de Runge-Kutta de terceira ordem (RK3) de baixo armazenamento [94]. Este esquema apresenta um critério de estabilidade menos restritivo quando comparado a outros esquemas explícitos, sendo estável para CFL inferiores a  $\sqrt{3}$ . Ele, ainda, permite um armazenamento reduzido de memória para um nível de precisão conhecido, o que o torna vantajoso quando efetua-se o cálculo a alta resolução e quando há limitações na memória computacional.

A integração da equação de movimento (Eq. 3.18) nos instantes de tempo  $t^{(n)}$  e  $t^{(n+1)}$ , se faz em 3 subpassos de tempo  $m = 0, 1, 2$ , onde  $\vec{u}^{(0)} = \vec{u}^{(n)}$  e  $\vec{u}^{(3)} = \vec{u}^{(n+1)}$ , da seguinte maneira,

$$\frac{\vec{u}^{(m+1)} - \vec{u}^{(m)}}{\Delta t} = \alpha_m \vec{F}^{(m)} + \beta_m \vec{F}^{(m-1)} - \vec{\nabla} \Pi^{(m+1)} \quad (3.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{(m+1)} = 0, \quad (3.20)$$

onde

$$\vec{F} = -\vec{\omega} \times \vec{u} - Ri \rho \vec{i}_z + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.21)$$

$$\Pi^{(m+1)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} P dt, \quad (3.22)$$

e  $\alpha_m, \beta_m$  são os coeficientes para cada subpasso de tempo  $m$ , dados por Williamson [94]:

$$\alpha_0 = \frac{8}{15}, \quad \beta_0 = 0;$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{12}, \quad \beta_1 = \frac{-17}{60};$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{4}, \quad \beta_2 = \frac{-5}{12}.$$

A Eq.(3.19) pode ser resolvida em dois passos, usando uma velocidade intermediária:

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^{(m)}}{\Delta t} = \alpha_m \vec{F}^{(m)} + \beta_m \vec{F}^{(m-1)}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\vec{u}^{(m+1)} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\vec{\nabla} \Pi^{(m+1)}. \quad (3.24)$$

Neste método de passo fracionário, o estágio ( $m + 1$ ) é obtido resolvendo a equação de Poisson.

A equação de transporte e difusão, Eq. (3.3), é resolvida da mesma maneira que a Eq. (3.18) fazendo,

$$\frac{\rho^{(m+1)} - \rho^{(m)}}{\Delta t} = \alpha_m G^{(m)} + \beta_m G^{(m-1)}, \quad (3.25)$$

onde

$$G = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \frac{1}{Re \ Pr} \nabla^2 \rho.$$

### 3.1.7 Condição de incompressibilidade

O método de passo fracionário permite que o estágio ( $m + 1$ ) seja obtido solucionando a equação de Poisson:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Pi^{(m+1)} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^*}{\Delta t}, \quad (3.26)$$

que é obtida aplicando a divergência na Eq. 3.24. Desta forma, a condição de incompressibilidade é garantida [45, 77].

O emprego de condições periódicas e semi-periódicas permite utilizar métodos pseudo-espectrais para o cálculo das derivadas (Canuto *et al.* (1988) [8]), assim a Eq. (3.26) é resolvida em função do comportamento dos contornos. Como o domínio empregado é periódico na direção principal do escoamento (simulação temporal), resolve-se a Eq. (3.26) inteiramente no espaço de Fourier, onde a condição de incompressibilidade no espaço físico corresponde a uma projeção ortogonal no vetor número de onda,  $\vec{K}$ , no espaço espectral. Então, a Eq. (3.26) no espaço de Fourier é dada por:

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Pi = \frac{1}{\Delta t} (ik_x u^* + ik_y v^* + ik_z w^*), \quad (3.27)$$

onde  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  são as componentes do vetor número de onda para cada uma das direções.



### 3.1.8 Esquema de discretização espacial

As derivadas espaciais das equações (3.3), (3.2) e (3.18) são resolvidas numericamente usando um esquema de diferenças finitas compacto de 6ª ordem, (Lele, 1992 [49]). Os esquemas compactos são esquemas implícitos, que relacionam o valor da derivada em um ponto ao valor da derivada em pontos vizinhos. Eles têm um comportamento quase espectral, ou seja, o valor aproximado da derivada é muito próximo ao seu valor exato para uma banda larga de números de onda. Também, apresentam a vantagem de ter um ganho em precisão devido a diminuição do erro de truncamento, resultante do cálculo numérico das derivadas, e uma melhor capacidade para calcular os gradientes nos menores comprimentos de onda. Um estudo completo das propriedades dos esquemas compactos foi realizado por Lele [49].

Para a discretização das derivadas no espaço físico considera-se uma grade uniforme, onde a variável independente para cada nó  $i$  é  $\xi_i = (i-1)\Delta\xi$ ,  $1 \leq i \leq N$  e  $\xi = x, y$  ou  $z$ . Os valores das funções nos nós são  $f_i = f(\xi_i)$ , existindo uma relação com a aproximação da primeira derivada dada por:

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta\xi} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta\xi}. \quad (3.28)$$

Da mesma forma existe uma relação entre a aproximação da segunda derivada e os valores da função, dada por:

$$\alpha f''_{i-1} + f''_i + \alpha f''_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta\xi^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta\xi^2}. \quad (3.29)$$

A sexta ordem é obtida com o grupo de coeficientes (Lele, [49]):

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad a = \frac{14}{9} \quad b = \frac{1}{9}, \quad \text{para a Eq.(3.28),}$$

$$\alpha = \frac{2}{11} \quad a = \frac{12}{11} \quad b = \frac{3}{11}, \quad \text{para a Eq.(3.29),}$$

com um erro de truncamento, resultado da aproximação discreta das derivadas, da ordem de

$$\frac{4}{7!} \Delta\xi^6 f^{(7)}, \quad \text{para a Eq.(3.28),}$$

$$\frac{-8 \cdot 23}{11 \cdot 8!} \Delta\xi^6 f^{(8)}, \quad \text{para a Eq.(3.29).}$$

As equações e coeficientes acima são válidos para as três direções espaciais e para todos os pontos da grade de cálculo, pois as condições de contorno empregadas na simulação temporal são periódicas nas direções ( $x$ ) e ( $y$ ), e semi-periódicas na direção ( $z$ ). Outra vantagem de empregar o esquema compacto é que a operação de inversão da matriz tridiagonal é relativamente fácil de programar e de baixo custo computacional. A representação matricial das Eq.(3.28) e

(3.29) pode ser encontrada na documentação do código de cálculo [42], em Lardeau (2001) [44] e Moser (2002) [63].

### 3.1.9 Equivalência entre espaço físico e espectral

Com a finalidade de verificar a equivalência entre as derivadas no espaço físico e as derivadas no espaço espectral, compara-se a derivada exata de uma dada função  $f(x, y, z) = \exp(ik)$ , calculada no espaço de Fourier da forma  $f'(x, y, z) = ikf(x, y, z)$ , com a derivada obtida numericamente pelo esquema compacto. A derivada no espaço de Fourier pode ser discretizada utilizando um número de onda modificado,  $k_m$ , para cada uma das direções dadas por:

$$k_{m_x} \Delta x = \frac{a \sin(k_x \Delta x) + (b/2) \sin(2k_x \Delta x)}{1 + 2\alpha \cos(k_x \Delta x)}, \quad (3.30)$$

$$k_{m_y} \Delta y = \frac{a \sin(k_y \Delta y) + (b/2) \sin(2k_y \Delta y)}{1 + 2\alpha \cos(k_y \Delta y)}, \quad (3.31)$$

$$k_{m_z} \Delta z = \frac{a \sin(k_z \Delta z) + (b/2) \sin(2k_z \Delta z)}{1 + 2\alpha \cos(k_z \Delta z)}, \quad (3.32)$$

onde  $k_x = \frac{2\pi}{L_x}$ ;  $k_y = \frac{2\pi}{L_y}$ ;  $k_z = \frac{2\pi}{L_z}$  são os números de onda no espaço físico, respectivamente, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Com o emprego do número de onda modificado, conforme Eq.(3.30) a Eq.(3.32), a derivação no espaço físico para um esquema centrado, compacto, tridiagonal, de sexta ordem resulta, para cada direção, em uma multiplicação no espaço espectral da forma  $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x}} = ik_{m_x} \widehat{f}$ .

O intervalo de números de onda  $[2\pi/N, k_f]$  sobre o qual o número de onda modificado  $k_m$  se aproxima da diferenciação exata, dentro de uma tolerância de erro especificada, define um grupo de ondas bem resolvidas. Neste intervalo,  $N$  é o número de pontos da grade de cálculo e  $k_f$  o menor comprimento de onda bem resolvido. O limite  $k_f$  depende completamente da tolerância admitida,  $\varepsilon$ , dada por  $\frac{|k_m - k|}{k} \leq \varepsilon$ , e esta tolerância, segundo Lele (1992) [49], é conservada quando os esquemas são comparados. Desta maneira,  $k_f$  depende somente do esquema empregado e não do número de pontos,  $N$ , usados na discretização.

Uma representação do número de onda modificado  $k_m$  em função de  $k$  é apresentada na Fig. 3.2 para a primeira e segunda derivadas. Verifica-se que os esquemas compactos fornecem valores de  $k_m$  mais próximos dos obtidos pela diferenciação exata para uma faixa de números de onda maior do que para o esquema explícito de segunda ordem [49].

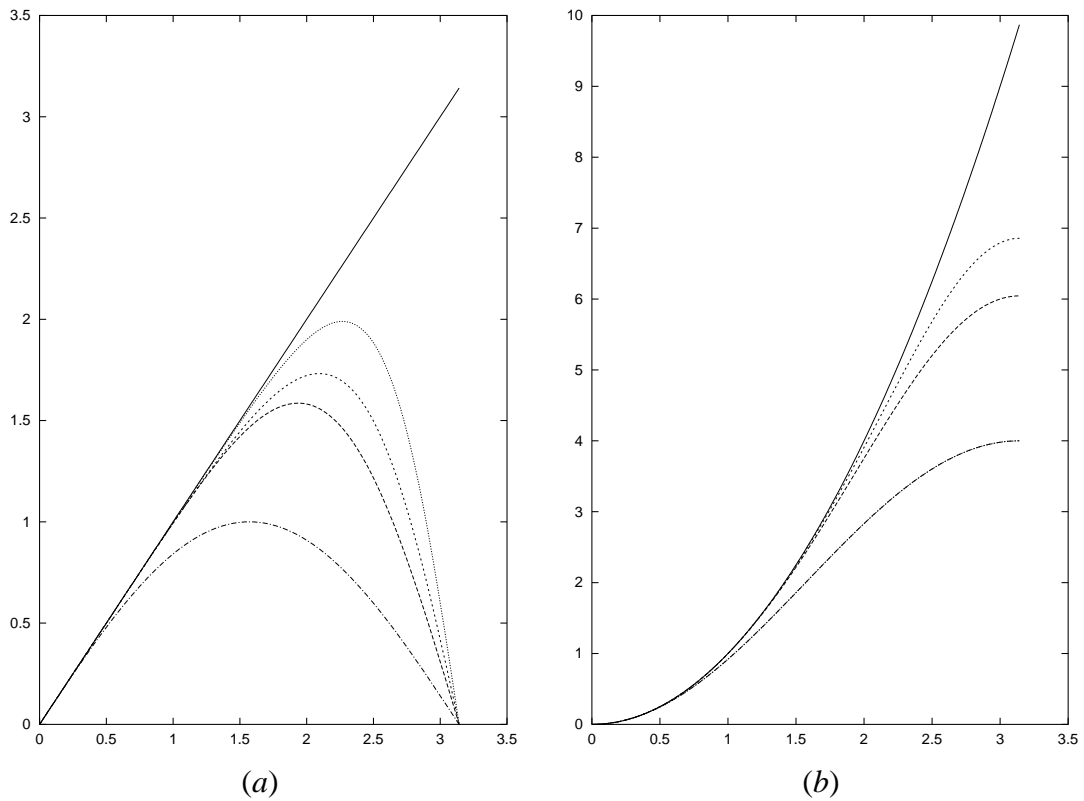


Figura 3.2: Número de onda modificado  $k_m$  (vertical) em função do número de onda  $k$  (horizontal): (a) primeira derivada; (b) segunda derivada; — derivação exata; - · - - esquema explícito de  $2a$  ordem; - - - esquema explícito de  $6a$  ordem; — esquema compacto de  $4a$  ordem; · · · esquema compacto de  $6a$  ordem [42].

## 3.2 Critérios de identificação das estruturas

A identificação das estruturas coerentes, quando se realiza uma DNS ou LES, depende, em grande parte, da escolha do método de identificação. Lesieur (1997) [50] define uma estrutura coerente como uma região do espaço de alta concentração de vorticidade, que conserva uma forma definida durante um tempo de vida  $T_c$  superior ao seu tempo de rotação  $\omega^{-1}$  e possui a propriedade de sensibilidade às condições iniciais, ou seja, imprevisível. Para identificar estas estruturas, nas simulações realizadas neste trabalho, são utilizados o critério da vorticidade e o critério  $Q$ . Estes critérios são descritos de forma sucinta a seguir.

### 3.2.1 Critério da vorticidade

A vorticidade é dada por

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}. \quad (3.33)$$

Para visualizar as estruturas coerentes nas simulações bidimensionais utiliza-se a vorticidade transversal

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.34)$$

Nas simulações tridimensionais as visualizações são realizadas com representações gráficas das isosuperfícies do módulo da vorticidade

$$\|\omega\| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad (3.35)$$

sendo as isosuperfícies determinadas para  $\|\omega\| = A\omega_i$ , onde  $\omega_i = 2U/\delta_i$  é a vorticidade inicial do perfil de base e  $A$  uma constante definida em função da vorticidade máxima. O valor de  $A$  define a isosuperfície que melhor representa a estrutura coerente. As regiões de alta vorticidade, em geral, correspondem a locais de estruturas coerentes, mas podem corresponder a zonas de alto cisalhamento, sem qualquer estrutura. A visualização por meio do módulo da vorticidade enfatiza vórtices de escalas intermediárias, mas pode esconder as estruturas de grande escala. Assim, o critério do módulo da vorticidade, embora usado com sucesso em escoamentos cisalhantes livres, pode ser inconveniente se o cisalhamento é comparável à magnitude da vorticidade dentro da estrutura [34].

### 3.2.2 Critério $Q$

O critério  $Q$  [34] se caracteriza por observar as regiões positivas do 2º invariante do tensor gradiente de velocidade  $\nabla\vec{u}$  dado por:

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (\|\Omega\|^2 - \|S\|^2) = \frac{1}{2} \nabla^2 P, \quad (3.36)$$

onde

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.37)$$

e

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.38)$$

são, respectivamente, as componentes antissimétrica e simétrica do tensor gradiente de deformação. Assim,  $Q$  é o balanço entre a taxa de rotação  $\Omega_{ij}\Omega_{ij}$  e a taxa de deformação  $S_{ij}S_{ij}$ . Conseqüentemente, as regiões positivas de  $Q$  implicam em uma taxa de rotação superior à de deformação, indicando no local uma zona turbilhonar. O critério  $Q$  permite isolar mais facilmente as estruturas coerentes que o método da vorticidade [23]. Este critério é empregado para visualizar as estruturas nas simulações tridimensionais e fazer comparações com o critério do módulo da vorticidade. A Figura 3.3 mostra a comparação entre os critérios da vorticidade e  $Q$ , onde se pode observar que o critério  $Q$ , para  $Q = 1$ , isola melhor a região turbilhonar.

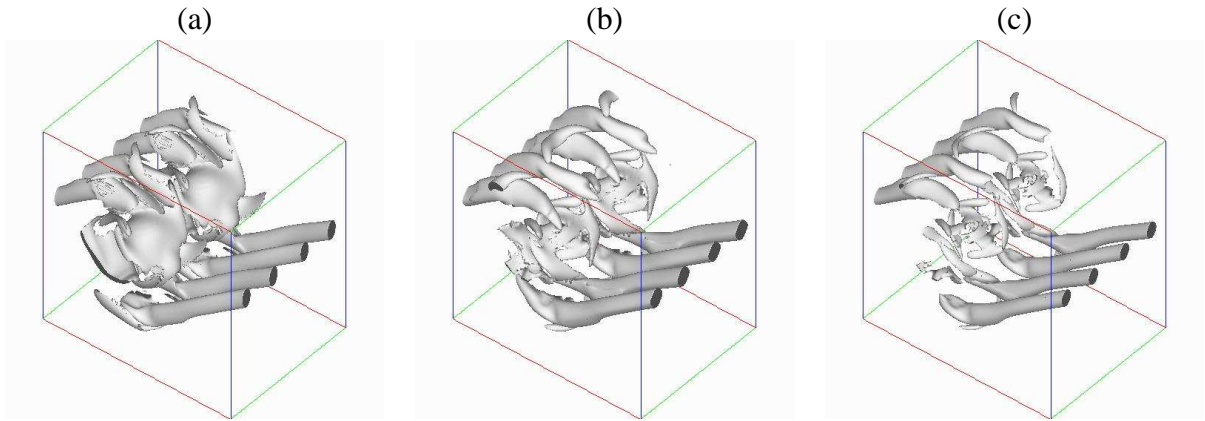


Figura 3.3: Comparação entre os critérios de identificação das estruturas coerentes. (a) Isosuperfícies de  $\|\omega\| = 2.5$ ; (b) isosuperfície de  $Q = 0.5$ ; (c) isosuperfície de  $Q = 1$ .

### 3.3 Verificação do código de cálculo

Nesta seção são realizados alguns testes, com a finalidade de verificar a eficácia do código de cálculo em relação a variação do número de Richardson. Os resultados obtidos dos vários testes são comparados com a teoria de estabilidade linear, mais precisamente com o trabalho de Hazel (1972) [30]. Para realizar tal comparação, considera-se a evolução temporal de uma pequena perturbação senoidal de amplitude inicial igual a  $10^{-6}$ .

A teoria de estabilidade linear prediz que, em escoamentos cisalhantes livres, as perturbações bidimensionais se tornam instáveis antes das tridimensionais [22]. Segundo o teorema de Squire [22, 19] para cada perturbação tridimensional existe uma perturbação bidimensional com maior taxa de amplificação. Dentro deste princípio, a validação do código de cálculo em relação à teoria de estabilidade linear é realizada em um domínio bidimensional.

O domínio computacional empregado é um quadrado de lado  $L = 7\delta_i$ , correspondendo a um comprimento de onda fundamental  $\lambda_a = 7\delta_i$ , dado pela teoria de estabilidade linear [61]. Para verificar a evolução da taxa de amplificação com o tempo utilizam-se diferentes grades computacionais de  $n_x \times n_z$  pontos, sendo  $n_x$  o número de pontos na direção do escoamento e  $n_z$  o número de pontos na direção vertical. As diferentes grades de  $n_x \times n_z$  pontos são denominadas de  $N1 = 64 \times 65$ ,  $N2 = 64 \times 129$ ,  $N3 = 128 \times 129$ ,  $N4 = 128 \times 257$  e  $N5 = 256 \times 257$ . A resolução de cada uma das grades é dada por  $\Delta x = 7\delta_i/n_x$  e  $\Delta z = 7\delta_i/n_z$ .

Todos os testes são realizados a número de Reynolds ( $Re$ ) igual a 300, número de Prandtl ( $Pr$ ) igual a 1 e números de Richardson ( $Ri$ ) iguais a 0, 0.1 e 0.2. Os perfis de velocidade e densidade iniciais empregados são dados pelas equações

$$u(x, 0, z, t = 0) = U \tanh\left(\frac{2z}{\delta_i}\right), \quad (3.39)$$

e

$$\rho(x, 0, z, t = 0) = -\frac{1}{R} \tanh\left(\frac{2Rz}{\delta_i}\right). \quad (3.40)$$

A perturbação senoidal, de amplitude infinitesimal igual a  $A_f = 10^{-6}$ , adicionada ao perfil de velocidade de base é representada por:

$$u'(x, 0, z) = -A_f 4z \frac{L_x}{2\pi} e^{-2z^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right), \quad (3.41)$$

e

$$w'(x, 0, z) = -A_f e^{-2z^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right), \quad (3.42)$$

onde  $\partial u' / \partial x + \partial w' / \partial z = 0$ .

Ressalta-se que os testes de validação levam em consideração os termos viscosos, enquanto que os valores de referência ([30], Fig. 2.5) são determinados seguindo a equação de Taylor-Goldstein (Eq. 2.12) para um escoamento cisalhante paralelo, na presença do campo gravitacional e onde o número de Reynolds é assumido grande o suficiente para considerar o escoamento como não viscoso.

No presente trabalho, empregam-se perfis do tipo função erro para o campo inicial de velocidade e densidade (Eq. 3.11 e Eq. 3.12). Somente nesta seção, para efeito de comparação com os resultados obtidos por Hazel (1972) [30], utilizam-se perfis do tipo tangente hiperbólico. Como já citado anteriormente, segundo a referência [30], a taxa de amplificação obtida para um perfil de velocidade do tipo função erro é muito próxima da obtida para um perfil do tipo tangente hiperbólico. Na análise de estabilidade linear de Hazel o número de Richardson empregado corresponde à metade do utilizado no presente trabalho, pois utiliza a metade da espessura da camada de vorticidade como comprimento de referência.

Nos testes de validação é cancelado o termo de difusão vertical, correspondente à velocidade longitudinal  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . Esta difusão aumenta a espessura da camada cisalhante durante a simulação e infere uma variação no tempo do escoamento de base. Como consequência haverá uma variação correspondente na taxa de amplificação [56], até no regime linear (aproximação de escoamento paralelo). O artifício utilizado aqui é o mesmo adotado por Medeiros *et al.* (2002) [56].

Na Tabela (3.1) podem-se visualizar as taxas de amplificação para cada teste (*DNS*), calculadas tomando-se a declividade da parte linear de cada curva.

Como esperado, todas as grades testadas verificam a teoria de estabilidade linear [61] para o caso não estratificado ( $Ri = 0$ ). Porém, observa-se que a resolução da grade tem uma grande influência sobre a taxa de amplificação nos casos estratificados. A estratificação modifica a dinâmica da camada de mistura temporal, já que surge um termo extra na equação de vorticidade, o gradiente longitudinal de densidade ( $\partial \rho / \partial x$ ), resultante da componente transversal do torque baroclínico na aproximação de Boussinesq [30].

A resolução longitudinal da grade interfere na evolução da amplitude da onda, como pode ser observado no teste com a grade *N2*, para  $Ri = 0.1$  e  $Ri = 0.2$ . Comparando os valores da

Tabela 3.1: Comparação da taxa de amplificação com o valor de referência (Hazel, 1972 [30]).

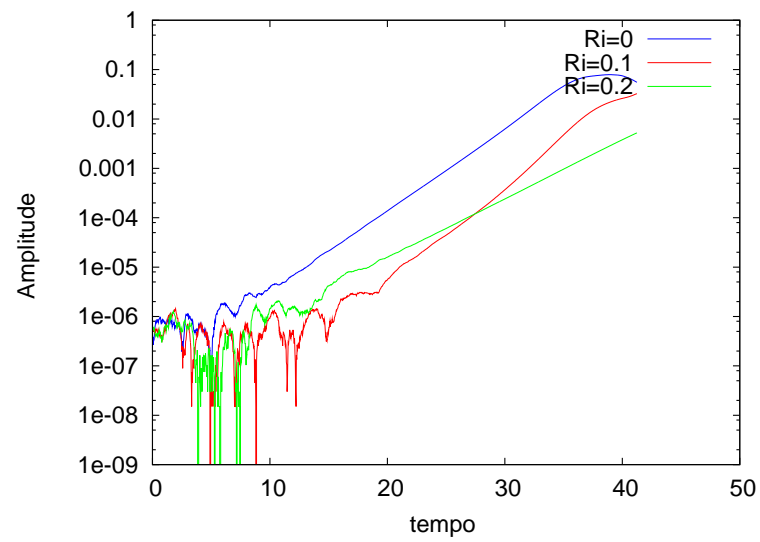
$Ri$		$N1$ $64 \times 65$	$N2$ $64 \times 129$	$N3$ $128 \times 129$	$N4$ $128 \times 257$	$N5$ $256 \times 257$	Valor Ref. [30]
0	$\alpha c_i$	0.1873	0.1863	0.1855	0.1843	0.1842	0.1867
	erro	0.33%	-0.2%	0.6%	-1.3%	-1.33%	
0.1	$\alpha c_i$	0.1949	0.1706	0.1607	0.1554	0.1546	0.1594
	erro	22%	7%	0.8%	-2.4%	-3%	
0.2	$\alpha c_i$	0.1359	0.1653	0.1329	0.1415	0.1250	0.1259
	erro	-0.7%	31%	5.6%	12.4%	-0.7%	

taxa de amplificação obtidos com a grade  $N2$  com os da grade  $N1$ , para os casos estratificados, observa-se que, aumentando a resolução vertical, a taxa de amplificação diminui para  $Ri = 0.1$  (média estratificação), com um erro de 7% comparado ao valor de referência. Já para  $Ri = 0.2$  (forte estratificação), há um aumento na taxa de amplificação (erro= 31% em relação ao valor de referência) da grade  $N2$  em relação à  $N1$ . Provavelmente isto ocorra porque o gradiente longitudinal de densidade não está sendo bem resolvido para este grau de estratificação. Quando a resolução horizontal é aumentada, grade  $N3$ , esta taxa de amplificação decresce em relação a  $N2$ , tanto para  $Ri = 0.1$  como para  $Ri = 0.2$ .

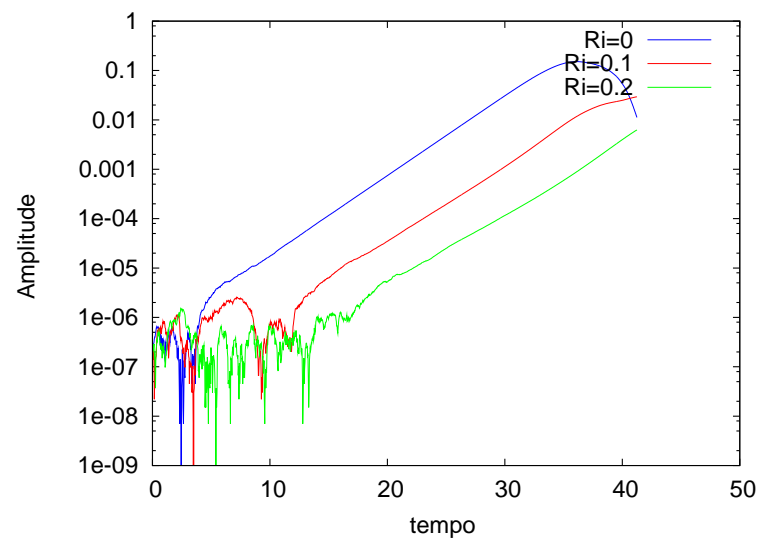
As taxas de amplificação obtidas com a grade  $N5$  mostram que a resolução empregada é mais que suficiente para representar o regime governado pela teoria de estabilidade linear.

As Figuras 3.4 e 3.5 mostram a evolução da amplitude no tempo, para diferentes números de Richardson (0; 0.1 e 0.2) e para as simulações referenciadas na Tab.(3.1).

Na Figura 3.5a, correspondente a grade  $N3$ , observa-se uma região de amplificação exponencial, a qual corresponde ao regime governado pela teoria de estabilidade linear. Os resultados obtidos com a grade  $N3$  são os que estão em melhor acordo com os resultados numéricos de Hazel. Porém, observa-se que os resultados são mais próximos aos da teoria quando  $n_x = n_z$ , sugerindo que os gradientes são melhores resolvidos.



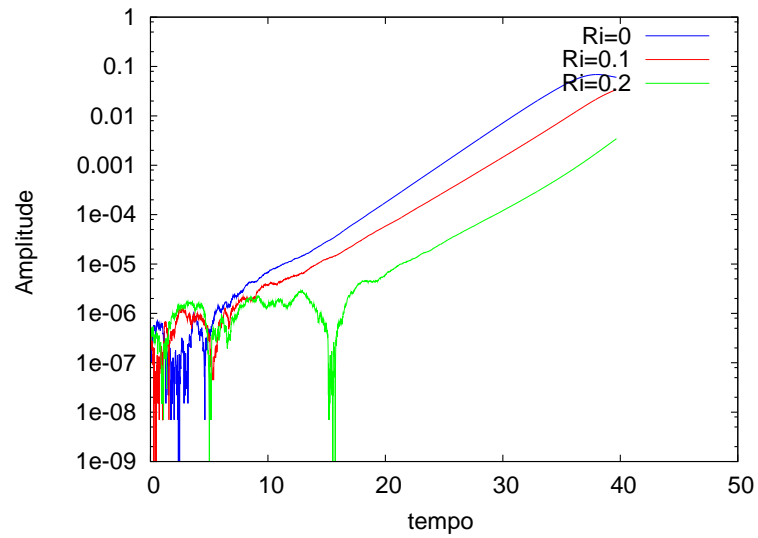
(a)



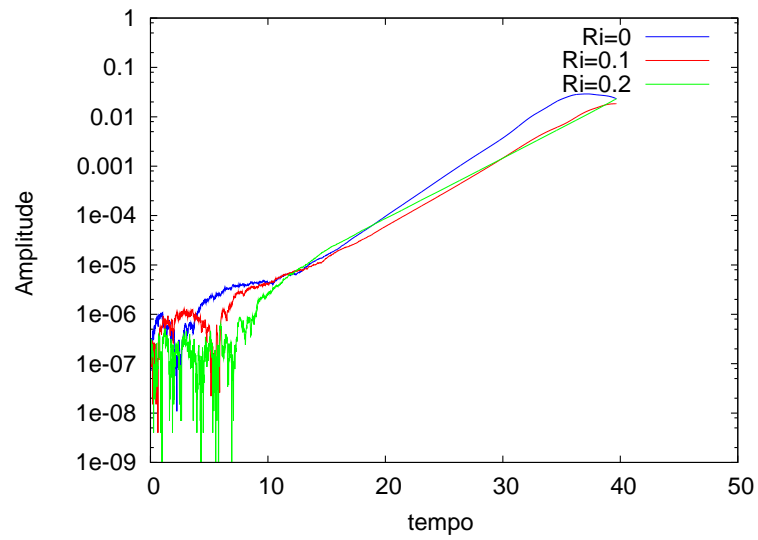
(b)

Figura 3.4: Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $u'$ . Simulação (a) N1 ( $64 \times 65$ ); (b) N2 ( $64 \times 129$ ).

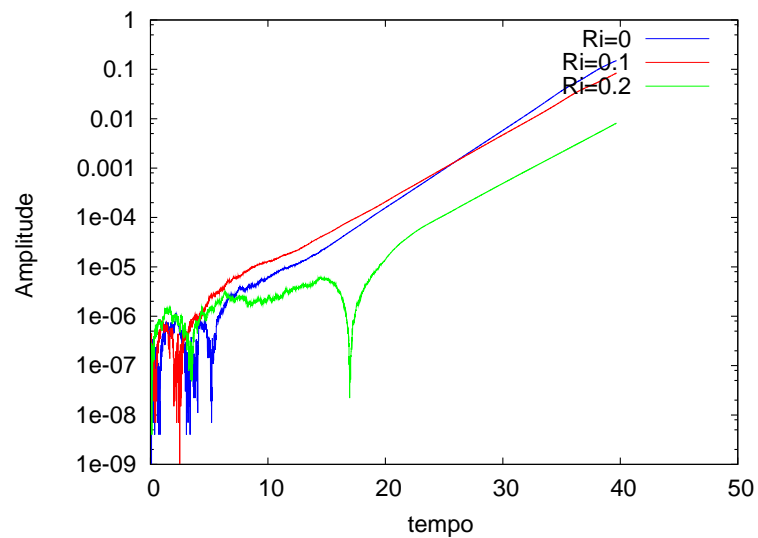




(a)



(b)



(c)

Figura 3.5: Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $u'$ . Simulação (a)  $N3$  ( $128 \times 129$ ); (b)  $N4$  ( $128 \times 257$ ); (c)  $N5$  ( $256 \times 257$ ).

# Capítulo 4

## Camada de mistura bidimensional

### 4.1 Efeitos da estratificação estável

A dinâmica bidimensional de uma camada de mistura estavelmente estratificada tem sido investigada por Thorpe (1968, 1985) [90, 91], Patnaik *et al.* (1976) [66], Klaassen & Peltier (1985, 1989, 1991) [37, 38, 39], Staquet (1995) [85], Caulfield & Peltier (2000) [10], Jacobitz (1997) [33], Fernando (1991) [25], para citar alguns autores. Compreender como se processa a dinâmica da camada de mistura é pré-requisito para a determinação de sua capacidade de mistura e dos fluxos turbulentos.

O mecanismo de transição à turbulência no escoamento bidimensional se manifesta tipicamente em dois estágios principais:

- **Primeiro estágio:** o comprimento de onda mais amplificado, o modo fundamental, amplifica na interface da camada e a instabilidade de Kelvin-Helmholtz desenvolve-se. Assim, os efeitos não lineares tornam-se importantes e geram uma camada de vorticidade que se enrola formando os turbilhões de Kelvin-Helmholtz;

- **Segundo estágio:** o segundo modo mais amplificado (subharmônico) se manifesta e provoca o emparelhamento dos turbilhões bidimensionais de K-H [95]. O emparelhamento pode se dar repetidas vezes, em um efeito cascata. Este mecanismo não leva a uma cascata de escalas cada vez menores, característica de escoamentos turbulentos. Para se ter tal cascata é necessário a tridimensionalidade no escoamento, que permite o esticamento e dobramento de turbilhões, resultando em turbilhões longitudinais [57].

A instabilidade primária de K-H se desenvolve completamente de maneira bidimensional na camada de mistura estratificada, com uma taxa de crescimento que é prevista pela teoria linear. Os turbilhões gerados por esta instabilidade, eventualmente, saturam (atingem a máxima amplitude) para um tempo adimensional  $t$  de aproximadamente 35 a 60 (sendo este tempo de saturação dependente da estratificação inicial e do nível de perturbação [10, 67]). O tempo de saturação do turbilhão de K-H coincide com o tempo do crescimento inicial das instabilidades secundárias, geradoras dos movimentos tridimensionais. Isto reforça a idéia que o turbilhão

bidimensional K-H serve para catalizar o desenvolvimento dos movimentos tridimensionais.

A estratificação modifica a dinâmica da camada bidimensional, descrita acima, quando ela é forte e o número de Reynolds é alto, o que pode ser verificado nas simulações mostradas no capítulo 5.

#### 4.1.1 Parâmetros físicos e numéricos das simulações

Os parâmetros das simulações bidimensionais são sumarizados na Tabela 4.1 para  $Re = 300$ . O parâmetro  $\epsilon_i$  representa a amplitude da perturbação (Equações 3.13 e 3.14) adicionada ao perfil de velocidade base (Equação 3.11) para o modo fundamental ( $i = 1$ ) e seu primeiro subharmônico ( $i = 2$ ).

Para cada simulação listada na Tab. 4.1 é realizado um teste com  $Ri = 0$ , isto é, sem considerar o efeito do empuxo, com o objetivo de se obter um parâmetro de comparação entre o escoamento estratificado e o não estratificado (homogêneo). Na tabela,  $L_x = L_z = 14$  corresponde a  $2\lambda_a = 2 \times 7\delta_i$  e  $L_x = L_z = 28$  corresponde a  $4\lambda_a = 4 \times 7\delta_i$ .

Tabela 4.1: Parâmetros físicos e numéricos das simulações bidimensionais -  $Re = 300$ .

Simulação	$Ri$	Domínio $L_x \times L_z$	Grade $n_x \times n_z$	Amplitude ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ )
$2DFI_A$	0	$14 \times 14$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFI_B$	0.05	$14 \times 14$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFI_C$	0.1	$14 \times 14$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFI_D$	0.2	$14 \times 14$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFII_A$	0	$28 \times 28$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFII_B$	0.05	$28 \times 28$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFII_C$	0.1	$28 \times 28$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFII_D$	0.15	$28 \times 28$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFII_E$	0.2	$28 \times 28$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )

#### 4.1.2 Camada de mistura não estratificada

A dinâmica da camada de mistura não-estratificada,  $Ri = 0$ , é mostrada na Figura 4.1 para quatro diferentes tempos. A vorticidade inicial, a qual é modulada por uma pequena perturbação, progressivamente acumula em regiões periodicamente espaçadas: os núcleos dos turbilhões K-H (Fig. 4.1a e Fig. 4.1b). A vorticidade acumulada nos núcleos induz no fluido, localizado entre eles, um campo de deformação, que transporta a vorticidade em direção ao núcleo. Esta região é chamada de "braid" ou zona entre turbilhões.

A instabilidade cresce à medida que aumenta a circulação ao redor do núcleo do turbilhão. A circulação, que é proporcional à taxa de deformação, torna mais eficiente a acumulação da vorticidade no núcleo. Então, como a camada é homogênea em densidade e o fluido é viscoso

não há nova geração de vorticidade: somente advecção e difusão. Nesta situação pode-se dizer que o campo de vorticidade inicial, para  $Ri = 0$ , é transportado pelo movimento e dissipado por viscosidade (Equação 3.8). Desta forma, na camada de mistura homogênea o valor da vorticidade somente pode decrescer, isto é, o valor da vorticidade para qualquer tempo não pode exceder a vorticidade inicial dada por  $2U/\delta_i$ .

Os núcleos dos turbilhões são instáveis a perturbações de comprimento de onda  $\alpha/2$  e o crescimento desta perturbação leva ao emparelhamento dos dois turbilhões (Fig. 4.1c e 4.1d).

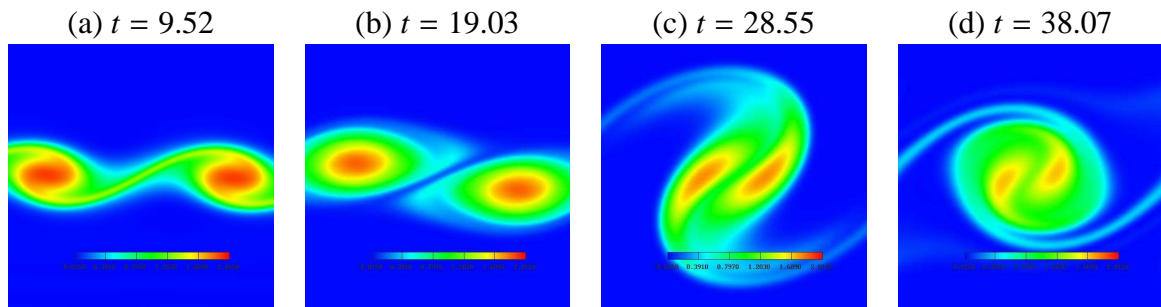


Figura 4.1: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulação  $2DFI_A$ ,  $Re = 300$  e  $Ri = 0$ .

### 4.1.3 Camada de mistura estavelmente estratificada: Formação da camada baroclínica

A evolução da instabilidade de K-H na camada de mistura estavelmente estratificada é conduzida a fim de investigar a evolução da mesma e verificar os efeitos que a estratificação estável produz na dinâmica do escoamento.

O crescimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz na camada de mistura estratificada resulta na formação de finas camadas de vorticidade entre os turbilhões. De modo que os turbilhões primários K-H não são totalmente isolados um do outro, mas conectados por finas camadas de vorticidade. As mesmas camadas são estiradas entre os turbilhões de K-H e intensificadas pelo efeito do empuxo [10, 85], que gera um gradiente longitudinal de densidade no local ( $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ ). Este gradiente de densidade corresponde à componente transversal do torque baroclínico na aproximação de Boussinesq, mostrada na Eq. (3.8).

As camadas estiradas de vorticidade juntamente com as camadas de densidade formam a *camada baroclínica*, localizada entre os turbilhões de Kelvin-Helmholtz. Esta camada baroclínica, como referenciada por Staquet [85], não existe no escoamento não estratificado.

O gradiente longitudinal de densidade reforça a camada baroclínica com vorticidade enquanto diminui a vorticidade no núcleo do turbilhão. O termo fonte do gradiente longitudinal de densidade,  $Ri\partial\rho/\partial x$ , contribui com um mecanismo extra para a geração de vorticidade. Esta propriedade faz com que a camada cisalhante estratificada bidimensional tenha um comportamento diferente em relação à não estratificada. Tal propriedade sugere que a vorticidade na

camada estratificada pode localmente crescer além do máximo valor permitido para a camada não estratificada ( $2U/\delta_i$ ). Neste caso, a geração de vorticidade é devida ao fato de que existe uma variação no campo de densidade, em vez de um gradiente de velocidade [19], sendo esta geração somente possível em um plano perpendicular à linha indicando a estratificação (no caso direção  $y$ ).

Duas instabilidades secundárias se desenvolvem na camada de mistura estratificada, além da instabilidade primária de K-H e da instabilidade secundária bidimensional subharmônica (processo de emparelhamento). Estas instabilidades, essenciais também para a tridimensionalização do escoamento, são: a instabilidade convectiva gravitacional e a instabilidade secundária cisalhante (ver item 2.2.2).

A instabilidade convectiva gravitacional é encontrada dentro da região instável do núcleo do turbilhão K-H e surge durante o processo de enrolamento, onde o fluido mais denso e o menos denso são enrolados em uma forma de espiral [73]. A instabilidade gravitacional é amplificada quando o fluido mais denso encontra-se acima do menos denso no vórtice.

A instabilidade secundária cisalhante é induzida pelo gradiente de densidade longitudinal. Este forte gradiente de densidade local é gerado quando o fluido mais denso, que foi erguido durante o enrolamento da camada de vorticidade inicial, é arrastado em direção ao centro do vórtice. Durante este processo o fluido é acelerado e a vorticidade local cresce. Como o fluido mais denso é arrastado para baixo, o gradiente longitudinal de densidade é positivo, o que contribui para o aumento da vorticidade na camada baroclínica [85].

Desta forma, a instabilidade cisalhante induzida pelo gradiente de densidade longitudinal concentra a vorticidade na camada baroclínica. A camada baroclínica é observada para todos os casos estratificados, referenciados na Tabela 4.1.

A Figura 4.2 mostra que o aumento do número de Richardson inibe o processo de emparelhamento e que a vorticidade na região entre os turbilhões excede a vorticidade no núcleo dos mesmos. Na Figura 4.2, observa-se que há uma diminuição no tamanho dos turbilhões e na espessura de vorticidade conforme o  $Ri$  aumenta, comprovando assim o efeito estabilizante da estratificação sobre o escoamento. O aumento da estratificação faz com que as forças de empuxo dominem a dinâmica do escoamento enfraquecendo o cisalhamento, que é uma fonte de energia cinética das perturbações. Em consequência, os vórtices ficam confinados em uma camada menos espessa de vorticidade, onde os movimentos verticais são enfraquecidos. Além disto, a variação longitudinal do gradiente de densidade reduz a vorticidade no núcleo dos mesmos.

A Figura 4.3 ilustra o campo de densidade para diferentes números de Richardson para um mesmo tempo. Na camada com alta estratificação ( $Ri = 0.1$  e  $0.2$ ) o processo de enrolamento dos turbilhões Kelvin-Helmholtz modifica fortemente a distribuição de densidade, diminuindo o entrainment (*entrainment*) do fluido dentro do núcleo do vórtice. A forte estratificação ( $Ri \geq 0.1$ ) inibe a instabilidade convectiva gravitacional. Igual resultado foi encontrado por Klaassen & Peltier (1985) [37] para  $Ri \leq 0.07$ .

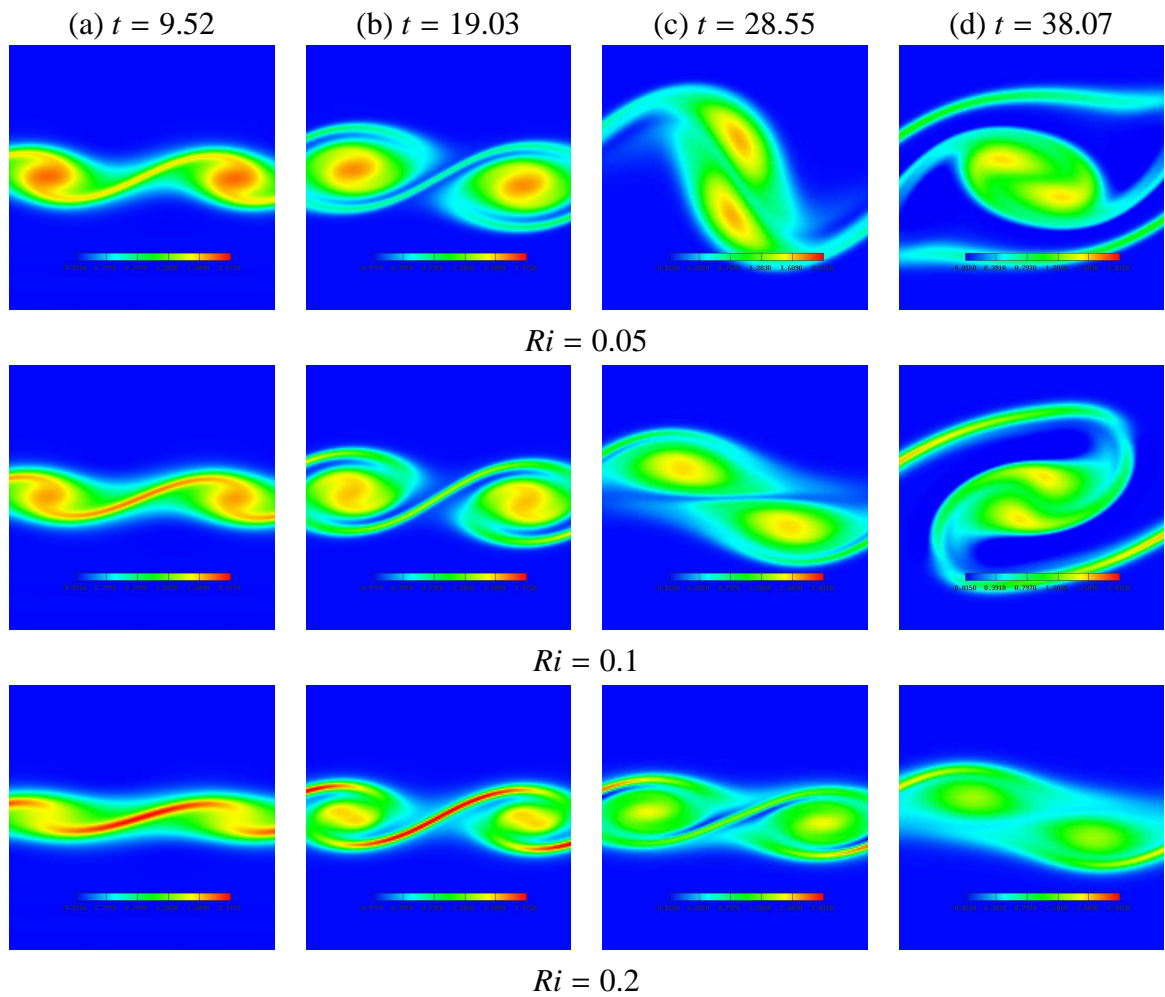


Figura 4.2: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulações  $2DFI_B$ ,  $2DFI_C$  e  $2DFI_D$ ,  $Re = 300$ .

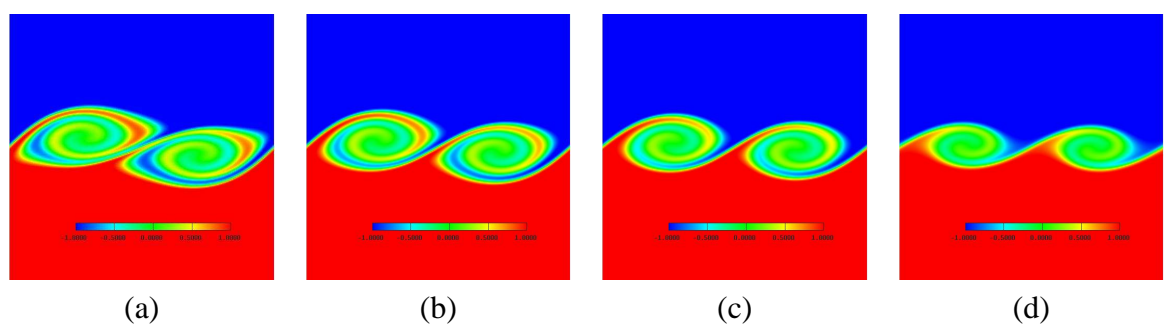


Figura 4.3: Campo de densidade para o tempo  $t = 19.03$ . Simulação  $2DFI$ ,  $Re = 300$  e (a)  $Ri = 0$ ; (b)  $Ri = 0.05$ ; (c)  $Ri = 0.1$  e (d)  $Ri = 0.2$ . Escalas de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho)

O desenvolvimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz e a influência da estratificação na sua evolução (simulações  $2DFII$ ) é mostrado nas Fig. 4.4 e 4.5.

No caso não estratificado,  $Ri = 0$ , observa-se que a vorticidade é dissipada pela viscosidade na região entre os turbilhões. Quando o vórtice K-H atinge sua máxima energia e emparelha,

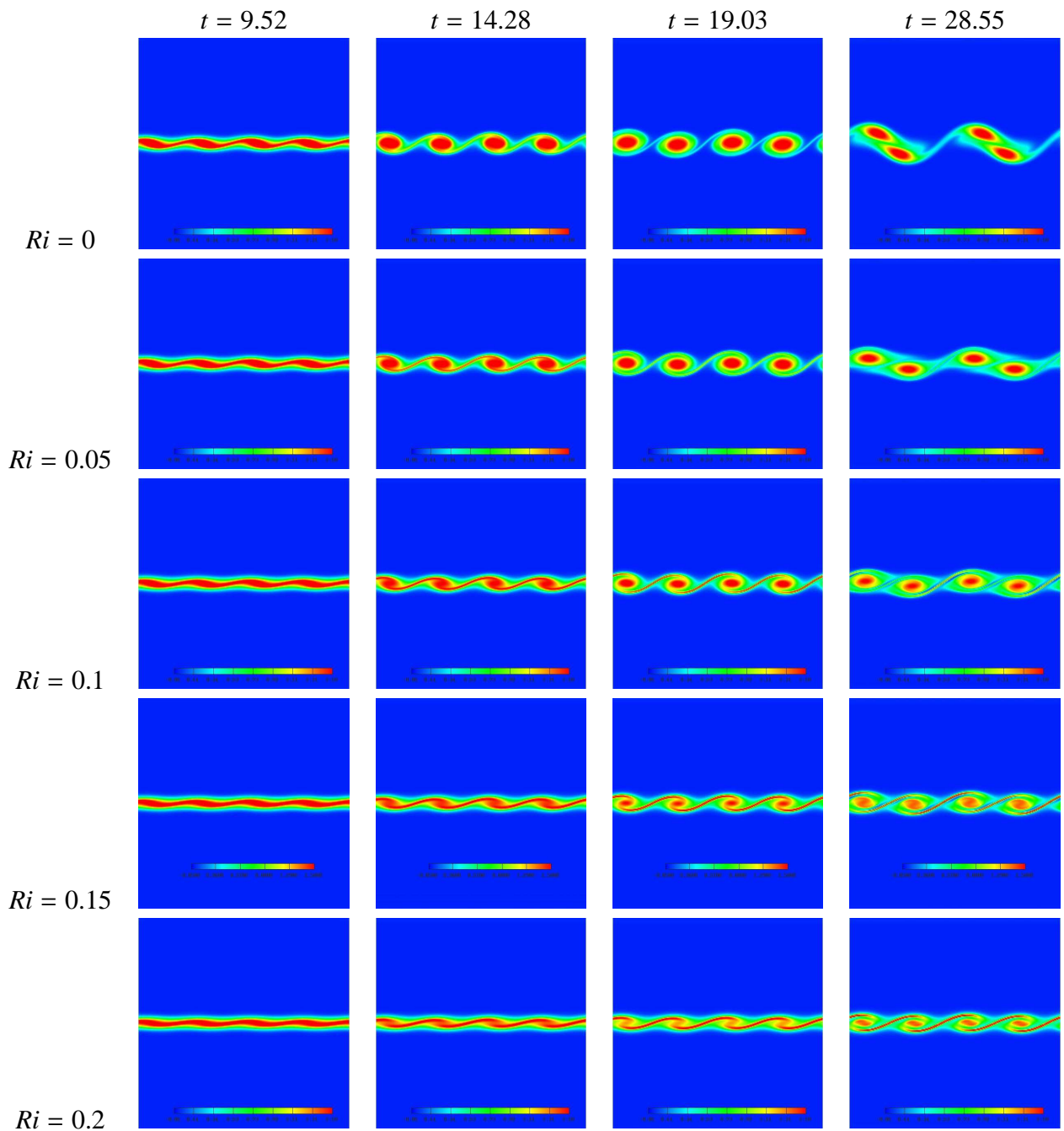


Figura 4.4: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulações *2DFII*,  $Re = 300$ .

a vorticidade que permanece no núcleo é substancialmente maior que a da região entre eles (Fig. 4.4a). Neste momento, a tridimensionalidade do escoamento já é bem importante, mas o domínio bidimensional impede que as instabilidades geradoras dos movimentos tridimensionais se desenvolvam.

Nos testes com estratificação (Fig. 4.4) verifica-se que a vorticidade aumenta na região entre os turbilhões e a camada baroclínica é visível, mesmo para uma estratificação fraca ( $Ri = 0.05$ ). O gradiente de densidade longitudinal, agora presente, influencia no desenvolvimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz e na formação da camada baroclínica. Observa-se que

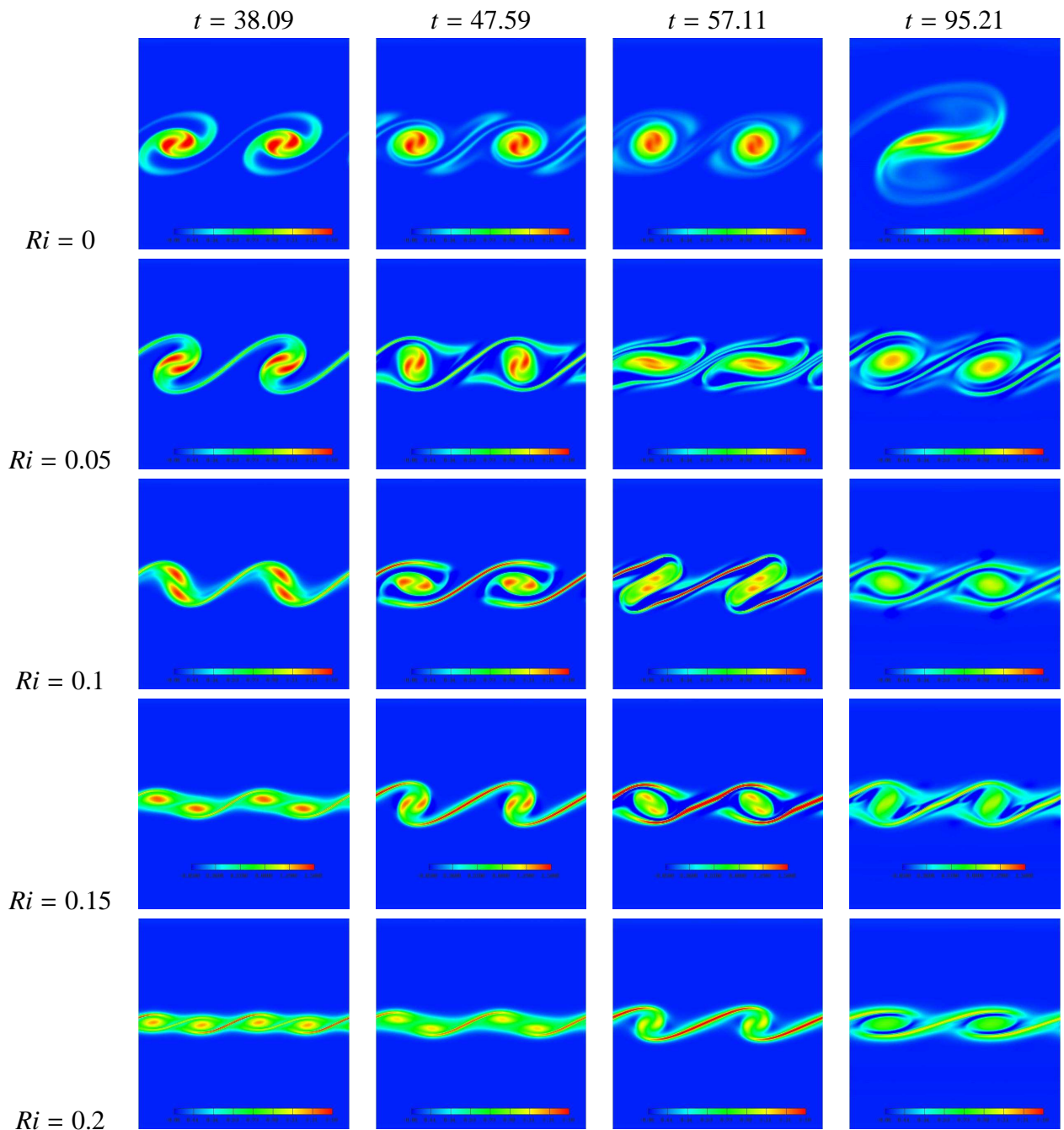


Figura 4.5: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulações *2DFII*,  $Re = 300$ .

à medida que o número de Richardson  $Ri$  cresce, há um amortecimento da instabilidade, com a consequência da diminuição da taxa de amplificação, como verificado no capítulo anterior. Também, devido aos efeitos do empuxo, ocorre um retardo no tempos para a formação do primeiro emparelhamento, em relação ao caso não estratificado. O primeiro emparelhamento ocorre em aproximadamente  $t = 34$ ,  $t = 38$ ,  $t = 43$ ,  $t = 47$  e  $t = 57$  para os testes à  $Ri = 0$ ,  $Ri = 0.05$ ,  $Ri = 0.1$ ,  $Ri = 0.15$  e  $Ri = 0.2$ , respectivamente.

Na Figura 4.5, observa-se que a estratificação dificulta a amplificação do modo gerador do segundo emparelhamento (segundo subharmônico), confirmando que os efeitos da estratificação



sobre o escoamento são mais importantes do que os de cisalhamento. Para o caso de  $Ri = 0.2$  (forte estratificação) a energia do segundo modo subharmônico não é suficiente para vencer o efeito da estratificação e o segundo emparelhamento não ocorre.

Lesieur *et al.* [52], usando *LES* para simular uma camada de mistura temporal homogênea, submetida a uma perturbação do tipo ruído branco, constataram que a espessura de vorticidade de uma camada de mistura temporal homogênea é da ordem de  $2\delta_i$  quando os turbilhões são formados (no tempo  $t_1 = 15$ ). Também, que o primeiro emparelhamento ocorre para o tempo de aproximadamente  $t_2 = t_1 + 10(2\delta_i/U)$  e o segundo emparelhamento para o tempo  $t_3 = t_2 + 10(4\delta_i/U)$ . Obviamente, estes tempos são ditados pelas condições iniciais e pelos parâmetros adimensionais empregados. O teste realizado a  $Ri = 0$  (*2DFII<sub>A</sub>*) está em acordo com o trabalho destes autores [52].

A evolução temporal do alargamento da espessura da camada de vorticidade para as simulações *2DFII* pode ser observada nas figuras 4.6 e 4.7. A Figura 4.6a mostra até a fase onde ocorre o primeiro emparelhamento e a Fig.4.6b até o tempo final da simulação. A Figura 4.7 apresenta a fase linear (item (a)), onde ocorre o crescimento da instabilidade K-H, o intervalo de tempo até o enrolamento (item (b)) e a fase onde os quatro vórtices estão formados (item (c)) e inicia o processo de emparelhamento para o caso a  $Ri = 0$ . Verifica-se que a espessura da camada de vorticidade diminui à medida que aumenta o grau de estratificação no escoamento.

Nas Figuras 4.6 e 4.7 constata-se que, até o tempo  $t = 5$ , tem-se um crescimento linear para todos os números de Richardson simulados. No intervalo de tempo de 5 a 10 as ondas de K-H se formam na camada de mistura que está sendo perturbada. A partir deste intervalo de tempo começa o processo de enrolamento para todos os testes. Verifica-se que o alargamento da espessura de vorticidade ocorre de forma exponencial até  $t = 15$ . No intervalo de tempo de 10 a 15 há um aumento na espessura de vorticidade de:

$Ri$	0	0.05	0.1	0.15	0.2
$\delta(t)$	0.62	0.52	0.42	0.32	0.26

significando que para cada 0.05 de aumento no número de Richardson ocorre um decréscimo de 0.1 na espessura da camada de vorticidade. Após este tempo o crescimento é não linear. A espessura de vorticidade aumenta em 6 vezes o seu valor inicial no primeiro emparelhamento para o teste a  $Ri = 0$ , enquanto que para o escoamento fortemente estratificado ( $Ri = 0.2$ ) ela apenas dobra o seu valor inicial. A fase linear independe do número de Richardson. Nesta fase a camada de mistura está sendo perturbada e a instabilidade de K-H começa a amplificar em  $t = 5$ , coincidindo com o final da fase linear. A partir do instante que a instabilidade de K-H amplifica, o alargamento da espessura de vorticidade passa a ser dependente do número de Richardson (ver Fig. 4.4). Então, pode-se dizer que o alargamento da espessura de vorticidade é fortemente influenciado pela condição inicial e o número de Richardson. Em síntese, os efeitos baroclínicos modificam a dinâmica da camada de duas maneiras: eles diminuem o processo de acumulação de vorticidade no núcleo do turbilhão, evitando assim a amplificação da instabilidade; e em segundo lugar, a presença deles mantém a camada baroclínica com vorticidade.

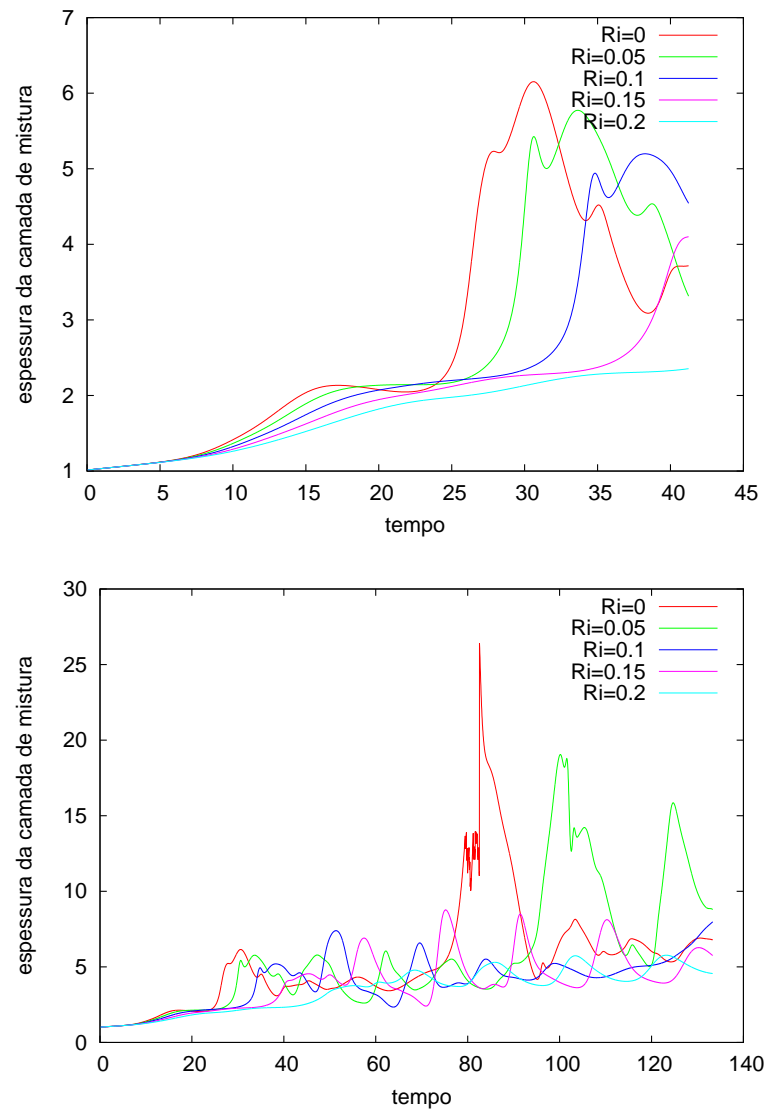
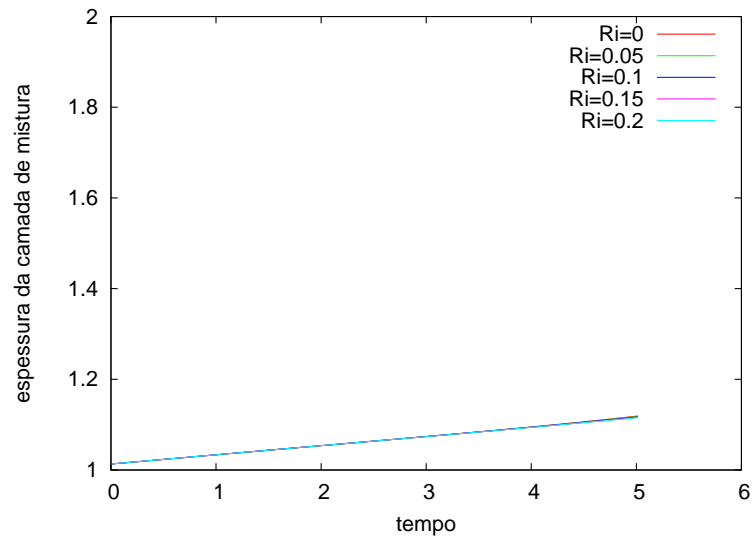
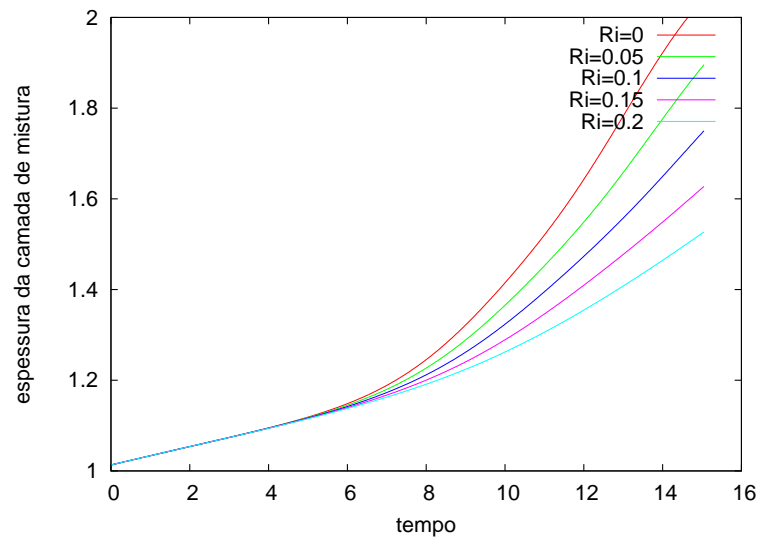


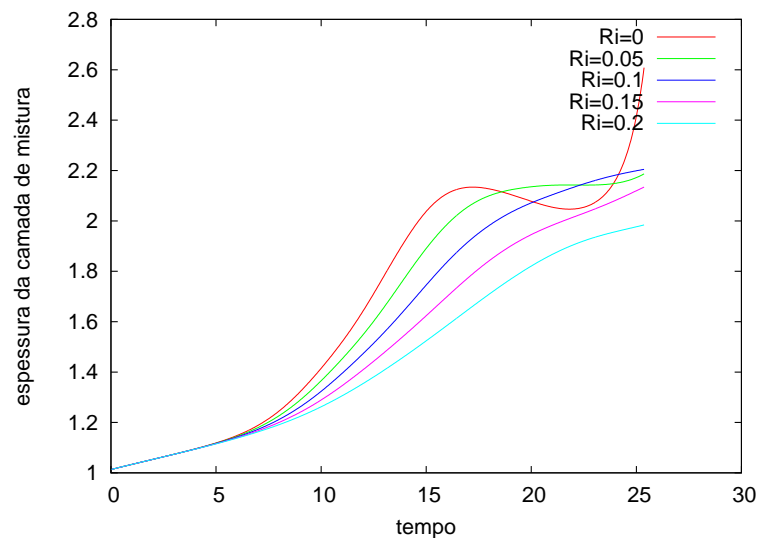
Figura 4.6: Evolução temporal da espessura de vorticidade. Simulações *2DFII*,  $Re = 300$ . Fases: (a) até o primeiro emparelhamento; (b) do tempo  $t = 0$  até final das simulações.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.7: Evolução temporal da espessura de vorticidade. Simulações  $2DFII$ ,  $Re = 300$ ; Fases: (a) linear; (b) até o enrolamento; (c) até início do processo de emparelhamento para  $Ri = 0$ .

## 4.2 Análise das estatísticas

### 4.2.1 Energia cinética

Para quantificar o efeito que a estratificação estável tem no desenvolvimento da instabilidade de K-H se faz o uso da evolução no tempo da energia cinética [39]. Se o vetor velocidade é representado por  $(u, w)$ , então a energia cinética média da perturbação por unidade de área é dada por

$$K = \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} (u'^2 + w'^2) dx dz, \quad (4.1)$$

onde  $u' = (u - \langle u \rangle)$  e  $\langle u \rangle = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} u dx$  é a média espacial da velocidade longitudinal.

A Figura 4.8 apresenta a evolução da energia cinética  $K$  para diferentes números de Richardson e para as simulações  $2DFI$ , onde a máxima energia é atingida quando os turbilhões de K-H emparelham.

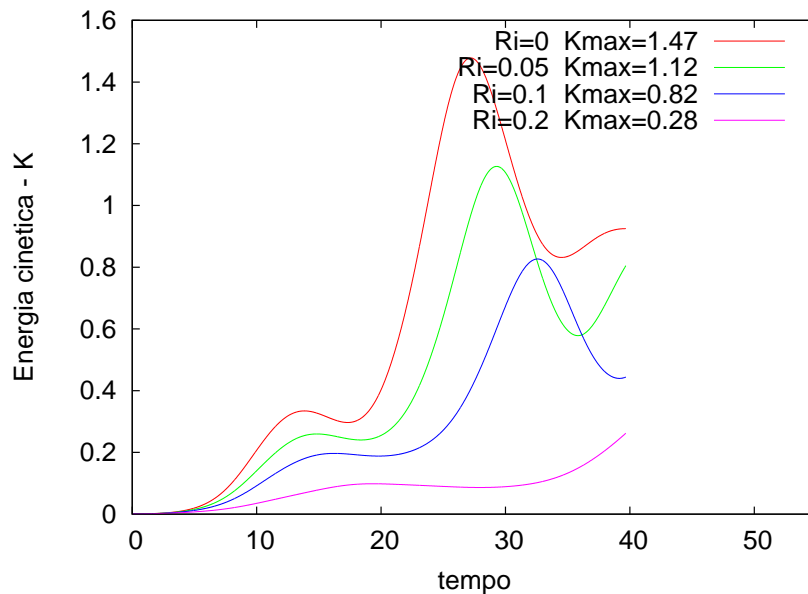


Figura 4.8: Efeito da estratificação na evolução da energia cinética ( $K$ ). Simulações  $2DFI$ ,  $Re = 300$ .

Quando são simulados quatro turbilhões, simulações  $2DFII$  (Fig. 4.9), o primeiro pico de energia acontece no primeiro emparelhamento e a máxima energia no segundo emparelhamento para  $Ri = 0$  e  $Ri = 0.05$ .

Nas simulações a  $Ri = 0.1$  e  $Ri = 0.2$ , há uma diminuição da energia cinética com o tempo, pois a estratificação diminui os movimentos verticais e tende a estabilizar o escoamento. Nestes casos de forte estratificação, o cisalhamento, que é uma fonte de energia cinética, perde dominância para a força de empuxo.

No caso de  $Ri \neq 0$ , há um considerável atraso no tempo para o qual a máxima energia é alcançada, em relação ao caso não estratificado. Esta característica é consistente com o esperado:

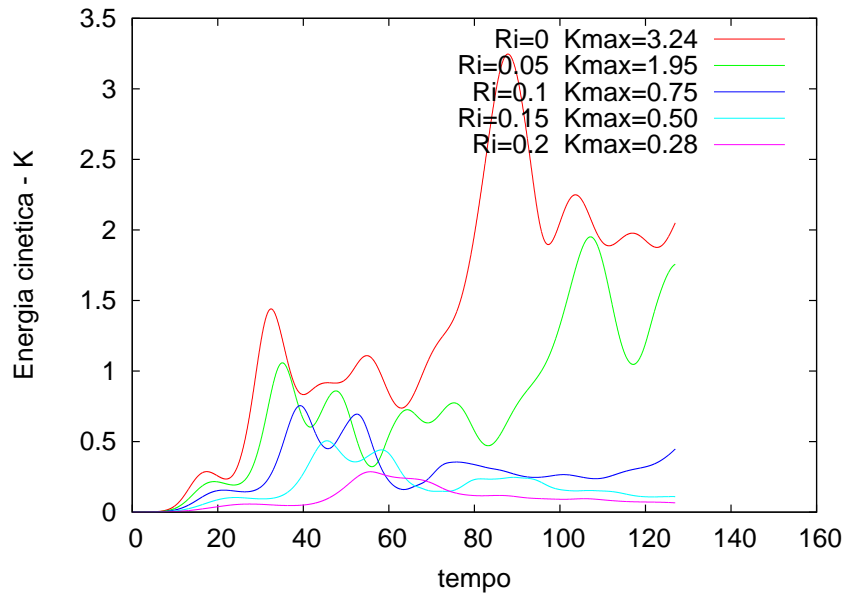


Figura 4.9: Efeito da estratificação na evolução da energia cinética ( $K$ ). Simulações  $2DFII$ ,  $Re = 300$ .

a onda precisa executar trabalho contra o potencial gravitacional para poder crescer.

A Figura 4.8 indica que quando o número de Richardson aumenta, a amplitude das oscilações diminui e há um retardo no tempo para o pico de máxima energia. Isto pode estar associado à falta de transferência de energia do escoamento de base para a perturbação do turbilhão de K-H.

#### 4.2.2 Tensões de Reynolds

De acordo com as simulações  $2DFI$ , pode-se dizer que os dois turbilhões de K-H estão formados no tempo  $t = 9.52$  para todos os números de Richardson simulados. O emparelhamento começa no tempo  $t = 19.03$  para  $Ri = 0.0$ ,  $Ri = 0.05$  e  $Ri = 0.1$ , com o vórtice da esquerda se sobrepondo sobre o da direita. No mesmo tempo, para  $Ri = 0.2$ , os vórtices encontram-se lado a lado conectados pela camada baroclínica (com maior concentração de vorticidade que no núcleo), conforme pode ser observado nas Figuras 4.1 e 4.2.

No tempo  $t = 28.55$  (ver Fig. 4.1 e 4.2), para  $Ri = 0.0$  e  $Ri = 0.05$ , tem-se um único vórtice resultante do emparelhamento. No mesmo instante, na simulação com  $Ri = 0.1$ , o emparelhamento está começando a se formar e na simulação a  $Ri = 0.2$  (forte estratificação) este emparelhamento não ocorre. Dentro do teorema proposto por Miles [62] e Howard [31] a estratificação correspondente a  $Ri = 0.2$  está próxima do limite estável. Assim impede que o modo subharmônico se amplifique.

De maneira geral, observa-se na Fig. 4.10 que, para os tempos  $t = 9.52$  e  $t = 19.03$ , onde para todos os números de Richardson simulados tem-se a mesma situação física, as intensidades turbulentas  $\langle u'u' \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle$  e  $\langle w'w' \rangle$  decrescem conforme aumenta a estratificação (aumenta o  $Ri$ ).

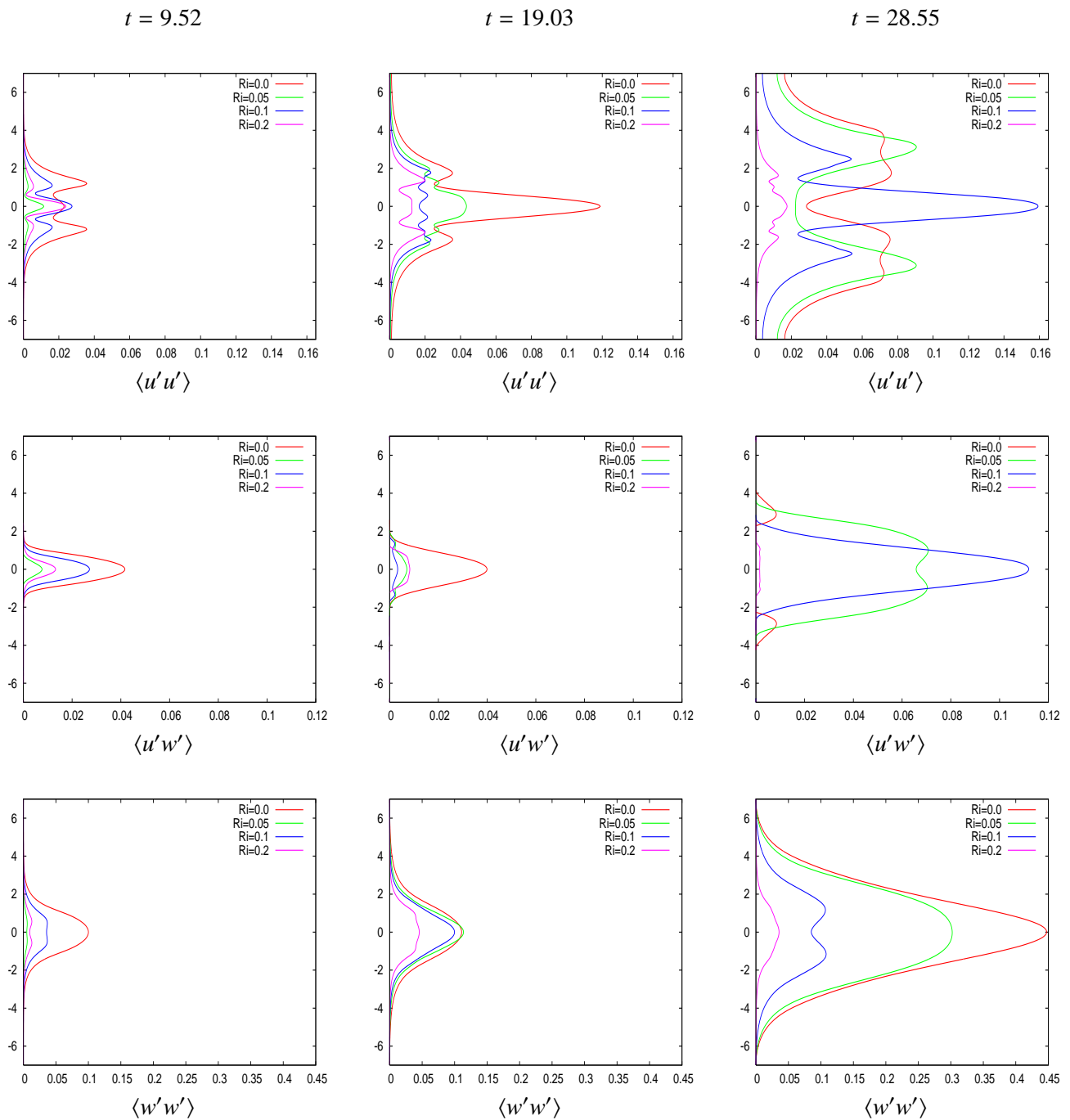


Figura 4.10: Tensões de Reynolds,  $\langle u'u' \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle$  e  $\langle w'w' \rangle$  (de cima para baixo). Simulações 2DFI,  $Re = 300$ .

Para  $t = 28.55$  as intensidades turbulentas  $\langle u'u' \rangle$  e  $\langle u'w' \rangle$  (Fig. 4.10) são maiores para  $Ri = 0.1$ , quando o vórtice que se encontra a esquerda se sobrepõe ao da direita (Fig. 4.2).

Para todos os tempos, a intensidade turbulenta vertical,  $\langle w'w' \rangle$ , diminui à medida que a estratificação cresce. Isto ocorre porque a estratificação domina a dinâmica do escoamento em relação ao cisalhamento.

### 4.2.3 Fluxos turbulentos de massa e perfis médios

O perfil de densidade média,  $\langle \rho \rangle$ , e do fluxo turbulento vertical médio de massa,  $\langle \rho' w' \rangle$ , são grandezas importantes para quantificar o efeito da estratificação estável na camada de mistura. Estas duas quantidades, juntamente com o fluxo turbulento horizontal de massa,  $\langle \rho' u' \rangle$ , desempenham um papel fundamental na dinâmica do escoamento estratificado, sendo que o processo de mistura e o crescimento da camada dependem delas.

O fluxo turbulento vertical de massa ou fluxo de empuxo é empregado para quantificar a mistura no escoamento estratificado, pois sugere como se processa a variação entre a energia cinética e a energia potencial (dada por  $E_p = \frac{1}{L_x} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} g\rho(z, t), dz$ ).

O fluxo de uma quantidade escalar ao longo de um eixo  $j$  é definido por  $F_j^f = \langle u' f' \rangle$  [89]. Tendo como base a definição anterior, o fluxo turbulento vertical médio de massa é definido como  $\langle \rho' w' \rangle$ , onde  $\rho'$  e  $w'$  são as flutuações de densidade e de velocidade vertical, e  $\langle \rangle$  denota a média espacial (que para o caso de simulações temporais coincide com a média *ensemble*) [32]. O fluxo turbulento horizontal médio de massa é definido por  $\langle \rho' u' \rangle$ , onde  $u'$  é a flutuação da velocidade horizontal ou longitudinal.

Quando a grandeza transportada, no caso a densidade, decresce com a altura (o escoamento encontra-se em situação estável), a maior parte do fluido que se desloca para baixo ( $w'$  negativo) transporta fluido menos denso ( $\rho'$  negativo) de níveis superiores e a parte que se desloca para cima ( $w'$  positivo) carrega fluido mais denso ( $\rho'$  positivo). Neste caso o fluxo turbulento vertical médio será positivo [89]. Por outro lado, quando a quantidade transportada cresce com a altura (situação instável), o fluido que se desloca para baixo ( $w'$  negativo) leva fluido mais denso ( $\rho'$  positivo) da parte superior e a parcela de fluido que se desloca para cima ( $w'$  positivo) transporta fluido menos denso ( $\rho'$  negativo). Neste caso o fluxo turbulento vertical médio será negativo.

Normalmente, os fluxos turbulentos são modelados e estão relacionados com a mistura do escoamento. A parametrização mais usada fundamenta-se no exposto acima e no conceito de que o sinal do fluxo vertical tende a ser o inverso do gradiente da densidade média, junto com um coeficiente de difusividade turbulento,  $K_z$ , que relaciona o fluxo turbulento vertical de massa ao gradiente de densidade ( $\langle \rho' w' \rangle = -K_z d\langle \rho \rangle / dz$ ) [86].

Peltier & Caulfield (2003) [67] mostraram que o fluxo turbulento vertical de massa quantifica a variação entre a energia cinética total média do escoamento e a energia potencial total média. Durante o enrolamento do turbilhão K-H a energia potencial é convertida em energia cinética, quando o fluido mais denso, que foi erguido com a camada de vorticidade inicial, gira e move-se em direção ao centro do vórtice. Se a parcela de fluido mais denso sobe, a energia potencial aumenta e a energia cinética diminui.

Os fluxos turbulentos e os perfis médios são analisados a partir das simulações *2DFI*. Os perfis de densidade média, mostrados na Fig. 4.11a-d, são bem diferentes entre si e é visível a diminuição da espessura da camada de densidade, conforme aumenta a estratificação. Comparando os perfis médios com as figuras 4.2 e 4.3, da seção 4.1.3, observa-se que esta diferença

ocorre porque há uma diminuição na espessura da camada de vorticidade e uma redução no entranhamento causados pelos efeitos baroclínicos. Estes efeitos baroclínicos enfraquecem os movimentos verticais, geram o gradiente de densidade longitudinal (que reduz a vorticidade no núcleo do turbilhão) e como consequência disto, o tamanho vertical do vórtice é reduzido se comparado com o caso não estratificado.

Na Figura 4.11e-h verifica-se que a diminuição da extensão vertical ( $z$ ) no gráfico do fluxo  $\langle \rho'w' \rangle$  é causada pelo efeito do empuxo que reduz a flutuação de velocidade vertical  $w'$ . Para o caso não estratificado,  $Ri = 0$ , estes efeitos não são atuantes e a densidade é um perfeito escalar passivo, isto é, o campo inicial de densidade é transportado pelo escoamento como se fosse um corante e não afeta o escoamento.

Para o tempo  $t = 19.03$ , simulações *2DFI*, os turbilhões estão deslocados em relação ao centro- $z$  do domínio (ver Fig. 4.1) produzindo, assim, valores negativos de  $\langle \rho'w' \rangle$ . A Figura 4.11e-h mostra que existe uma forte redução do fluxo turbulento vertical de massa, causada pelo decréscimo das perturbações da velocidade vertical. Esta drástica diminuição do fluxo turbulento vertical, com o aumento do número de Richardson, é causada pela combinação da redução do volume de fluido entranhado dentro do turbilhão K-H e pelo atraso no processo de emparelhamento dos turbilhões K-H, em relação ao caso não estratificado. Nos testes a altos números de Richardson ( $Ri \geq 0.1$ ), a gravidade desempenha um efeito dominante. Nestes casos, para o turbilhão K-H vencer o efeito da estratificação estável é necessário que ele desenvolva um importante trabalho contra o potencial gravitacional.

A figura 4.12 mostra os perfis de velocidade média e os fluxos turbulentos horizontais de massa. Verifica-se uma acentuada redução do fluxo turbulento horizontal de massa ( $\langle \rho'u' \rangle$ ) com o crescimento do número de Richardson. Desta forma, a estratificação, além de reduzir as perturbações verticais, também diminui as perturbações horizontais. Estes fatores mostram que dependendo do grau de estratificação, a mistura e a turbulência desenvolvida ocorrerão mais ou menos facilmente.



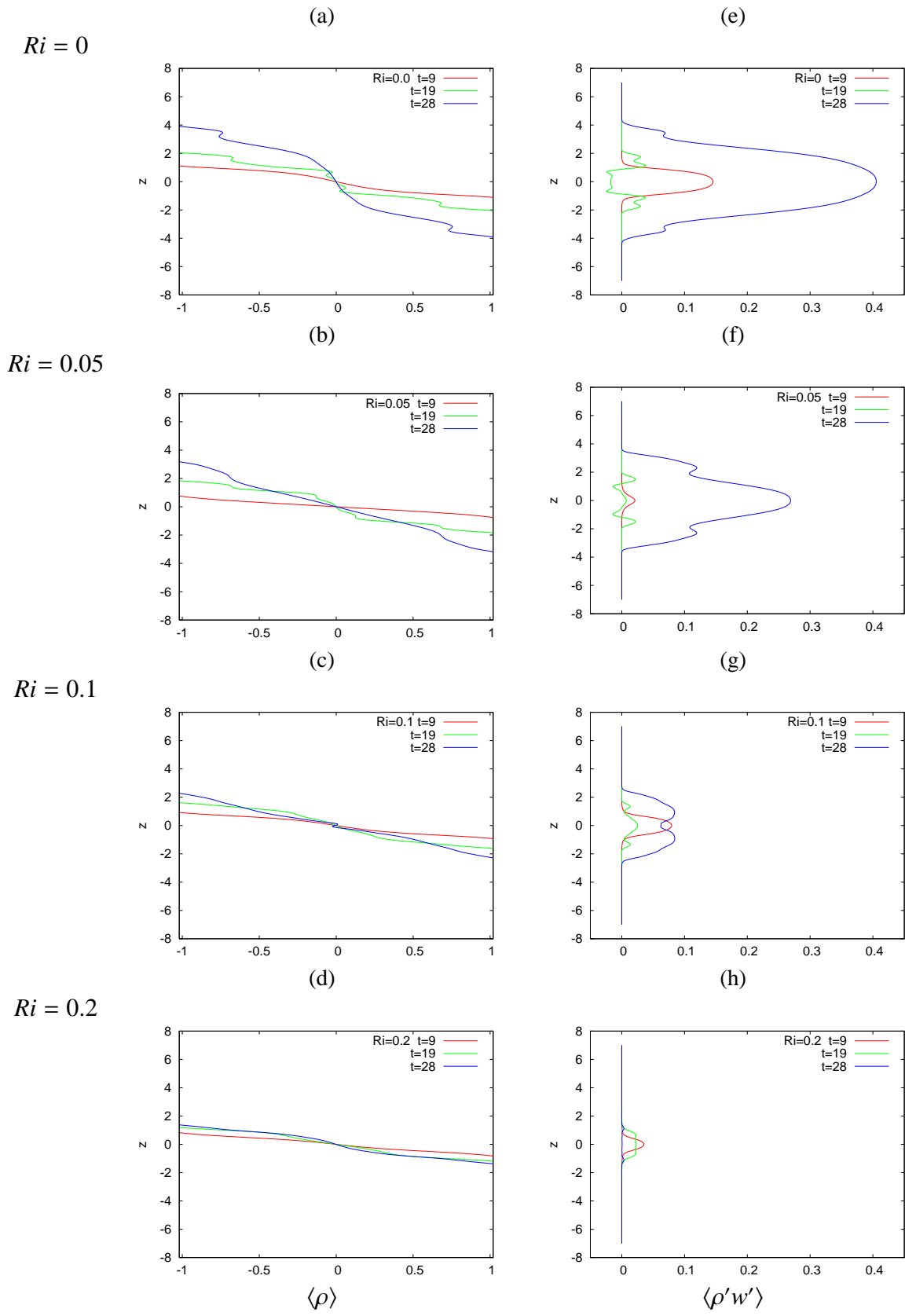


Figura 4.11: (a - d) Perfil de densidade média  $\langle \rho \rangle$ ; (e - h) Fluxo turbulento vertical de massa  $\langle \rho' w' \rangle$ ; Simulações 2DFI,  $Re = 300$ .

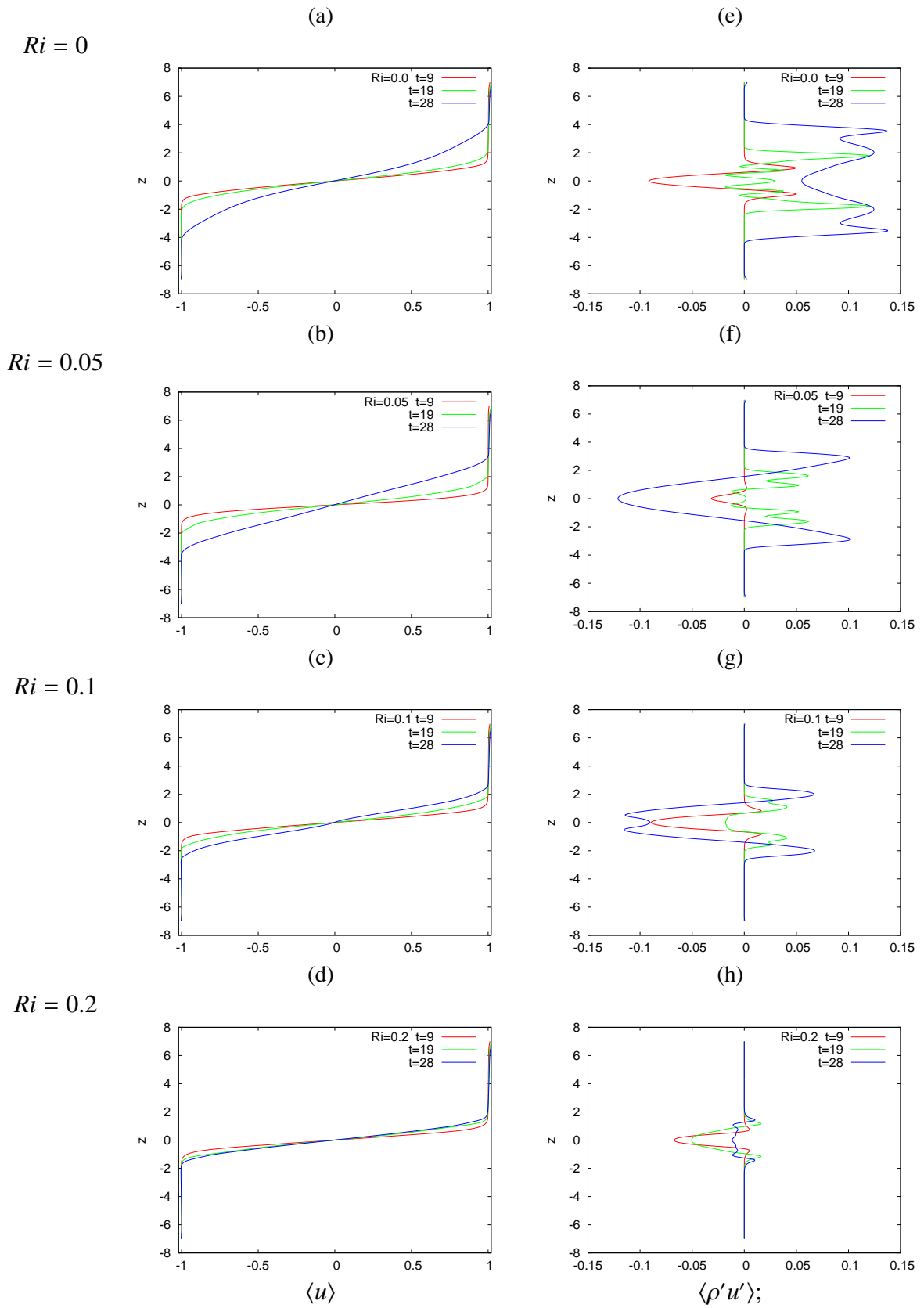


Figura 4.12: (a - d) Perfil de velocidade média  $\langle u \rangle$ ; (e - h) Fluxo turbulento horizontal de massa  $\langle \rho' u' \rangle$ ; Simulações 2DFI,  $Re = 300$ .

# Capítulo 5

## Instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica

### 5.1 Instabilidades secundárias na camada baroclínica

Uma camada de vorticidade, que se forma entre os turbilhões de Kelvin-Helmholtz (K-H), devido à ação dos efeitos de empuxo e tensão cisalhante, foi denominada de camada baroclínica por Staquet (1995)[85]. Esta camada pode ser observada nas simulações apresentadas no capítulo anterior e nos trabalhos de Patnaik *et al.* (1976) [66], Staquet (1991, 1995) [87, 85], Klaassen & Peltier (1991) [39] e de Caulfield & Peltier (2000) [10].

O desenvolvimento de instabilidades secundárias na camada baroclínica depende do grau de estratificação ( $Ri$ ), do número de Reynolds ( $Re$ ) e das condições iniciais impostas ao escoamento. Se os três fatores forem favoráveis para que a camada baroclínica seja instável, duas diferentes instabilidades secundárias podem ser encontradas na camada baroclínica:

- uma que se origina próxima ao núcleo do turbilhão de K-H (*near-core instability*) e propaga-se em direção à camada baroclínica;
- e outra do tipo K-H (*secondary Kelvin-Helmholtz instability*) na camada baroclínica propriamente dita.

Staquet (1995) [85] investigou numericamente a instabilidade secundária de K-H na camada baroclínica de uma camada estavelmente estratificada. As simulações bidimensionais foram realizadas a diferentes números de Reynolds (400, 1000, 1500, 2000, 2600) e para um único número de Richardson ( $Ri = 0.167$ ) e de Prandtl ( $Pr = 0.7$ ). A autora verificou a existência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica, e identificou um modo de instabilidade que se origina na vizinhança do núcleo do turbilhão e propaga-se em direção ao ponto de estagnação da camada.

Smyth (2003) [79] verificou o aparecimento da instabilidade secundária na camada baroclínica para menores valores do número de Richardson ( $0.04 \leq Ri \leq 0.16$ ), em relação ao estudo de Staquet, diferentes valores para o número de Prandtl ( $1 \leq Pr \leq 7$ ) e de Reynolds

( $Re \geq 1000$ ). O autor simulou uma camada de mistura instavelmente estratificada em sistema de referência fixado na região entre os vórtices, como em Corcos & Sherman (1976) (Fig. 2.13). Constatou que a instabilidade secundária de K-H aparece na camada baroclínica quando o número de Reynolds é maior que 1000, mas não mostra a instabilidade próxima ao núcleo.

A instabilidade próxima ao núcleo do turbilhão K-H desenvolve-se na vizinhança de regiões instáveis do turbilhão primário de K-H, onde movimentos convectivos de fluido mais denso e menos denso são gerados baroclinicamente.

Para que a instabilidade próxima ao núcleo se amplifique, é necessário que uma nova camada de mistura se forme entre a camada baroclínica (vorticidade positiva, cor vermelha na Fig. 5.1) e uma camada adjacente de vorticidade negativa (cor azul na Fig. 5.1) [85]. A instabilidade próxima ao núcleo se amplifica e propaga ao longo da camada baroclínica, em direção ao ponto de estagnação (ponto *S* da Fig. 2.13). A Figura 5.1 mostra uma representação do surgimento da instabilidade próxima ao núcleo. No esquema, a vorticidade positiva (no sentido horário) corresponde à cor vermelha e a vorticidade negativa (no sentido anti-horário) corresponde à cor azul da figura.

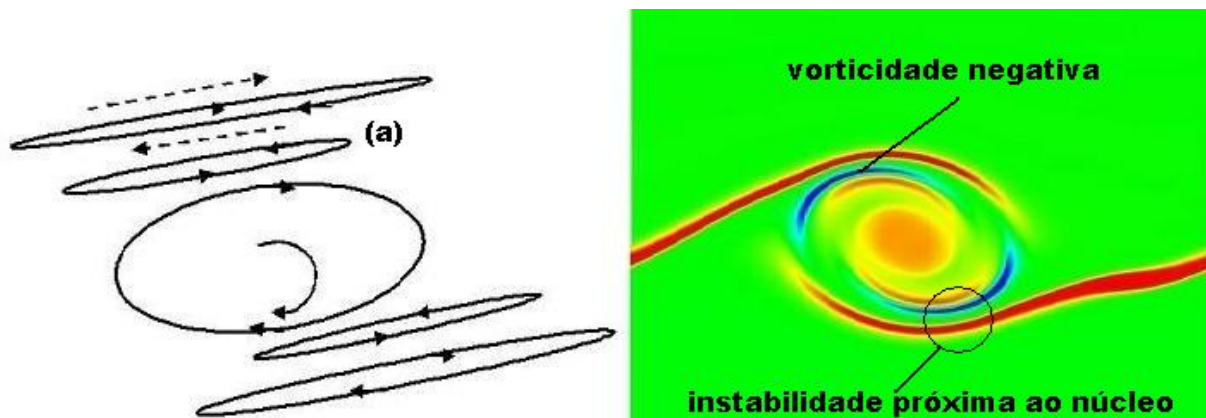


Figura 5.1: Representação esquemática da instabilidade próxima ao núcleo.

A camada de vorticidade negativa é gerada pelo forte gradiente de densidade, e indiretamente resulta da atividade convectiva no núcleo do turbilhão de K-H [85]. Desta forma, a produção de vorticidade negativa é seguida pelo crescimento da instabilidade próxima ao núcleo, que perturba a camada baroclínica induzindo uma nova instabilidade, chamada de instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz (Fig. 5.2).

As estruturas resultantes da instabilidade secundária do tipo K-H são muito similares, quanto a sua aparência e dinâmica, aos vórtices primários de Kelvin-Helmholtz, porém de menor tamanho.

As simulações numéricas de Staquet (1995) [85], a número de Richardson  $Ri = 0.167$ , mostram que para valores de  $Re$  entre 400 e 1000 a instabilidade secundária próxima ao núcleo do turbilhão K-H não se desenvolve quando é simulado um único vórtice, possivelmente porque a vorticidade da camada baroclínica e da camada adjacente de vorticidade negativa são fracas

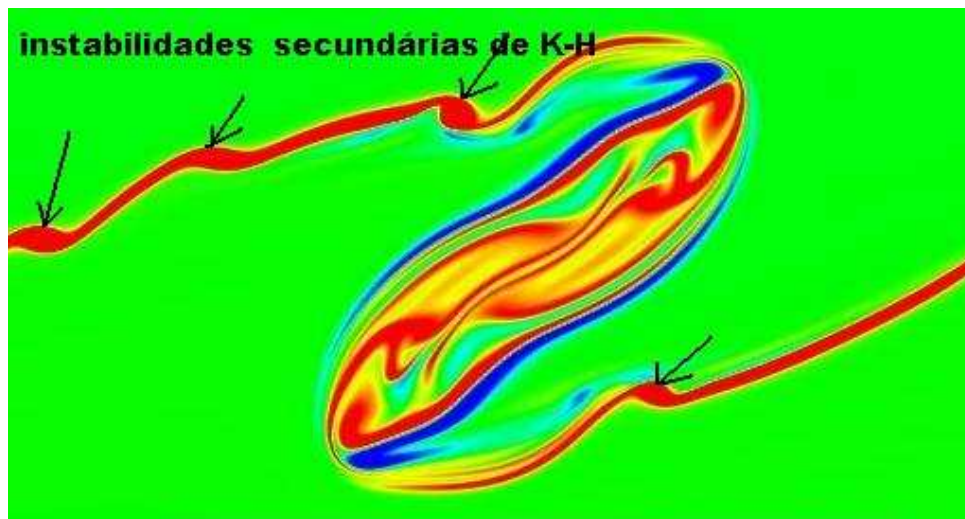


Figura 5.2: Representação da instabilidade secundária de K-H.

para induzir tal desenvolvimento. Por outro lado, quando dois turbilhões de K-H emparelham é possível o desenvolvimento de instabilidades secundárias na camada baroclínica para  $Re > 400$  e  $Ri = 0.167$ . Para  $Re \geq 1500$  e  $Ri = 0.167$  ambas instabilidades ocorrem na camada, mesmo quando o comprimento longitudinal do domínio é de um comprimento de onda fundamental ( $\lambda_a = 7$ ).

Smyth (2003) [79] realizou simulações com um perfil de densidade instável, em um domínio de  $2\lambda_a$ , para  $Re = 1000$  e  $Ri = 0.08$ , e  $Re \geq 2000$ , a diferentes números de Richardson. Ele identificou a instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz nas suas simulações, exceto na simulação a  $Ri = 0.04$  e  $Re = 2000$ . Na simulação a  $Re = 1000$  e  $Ri = 0.08$  há indicações do surgimento da instabilidade secundária na camada baroclínica, mas é destruída pelo colapso do núcleo do vórtice.

O objetivo deste capítulo é investigar a ocorrência das instabilidades secundárias na camada baroclínica, explorando a eficiência do código computacional e da técnica *DNS*. Principalmente, mostrar que as instabilidades secundárias na camada baroclínica podem ocorrer para  $Re \geq 500$ , tanto para uma média estratificação ( $Ri = 0.07$ ) como para uma forte estratificação ( $Ri = 0.167$ ), quando são simulados dois vórtices de Kelvin-Helmholtz e ocorre o processo de emparelhamento. Posteriormente, verificar a influência que o número de Reynolds do escoamento tem no desenvolvimento das instabilidades secundárias que surgem na camada baroclínica.

## 5.2 Parâmetros físicos e numéricos das simulações

Os parâmetros das simulações bidimensionais são sumarizados na Tabela 5.2. O parâmetro  $\epsilon_i$  representa a amplitude da perturbação (Equações 3.13 e 3.14) adicionada ao perfil de velocidade base (Eq. 3.11), para o modo fundamental ( $i = 1$ ) e seu primeiro subharmônico ( $i = 2$ ).

Tabela 5.1: Parâmetros físicos e numéricos das simulações bidimensionais -  $400 \leq Re \leq 2000$

Simulação	$Re$	$Ri$	Domínio $L_x \times L_z$	Grade $n_x \times n_z$	Amplitude ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ )
$2DFIII_A$	400	0.0	$7 \times 7$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0)
$2DFIII_B$	400	0.167	$7 \times 7$	$256 \times 257$	(1% $U$ ; 0)
$2DFIV$	2000	0.167	$7 \times 7$	$768 \times 961$	(1% $U$ ; 0)
$2DFV_A$	500	0	$14 \times 14$	$512 \times 513$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFV_B$	500	0.05	$14 \times 14$	$512 \times 513$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFV_C$	500	0.07	$14 \times 14$	$512 \times 513$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFV_D$	500	0.167	$14 \times 14$	$512 \times 513$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFVI$	500	0.167	$28 \times 28$	$1024 \times 1025$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFVII$	1000	0.167	$14 \times 14$	$512 \times 513$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFVIII_A$	2000	0	$14 \times 14$	$768 \times 961$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFVIII_B$	2000	0.07	$14 \times 14$	$768 \times 961$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$2DFVIII_C$	2000	0.167	$14 \times 14$	$768 \times 961$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$3DF$	500	0.167	$14 \times 5 \times 14$	$512 \times 32 \times 513$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; ruído branco)

### 5.3 Instabilidades secundárias na camada baroclínica: domínio com um turbilhão de Kelvin-Helmholtz

As simulações apresentadas no capítulo anterior, a número de Reynolds  $Re = 300$  ( $2DFI$  e  $2DFII$ ), mostraram a formação da camada baroclínica, mas sem manifestação da instabilidade secundária do tipo Kelvin-Helmholtz. Aumentando o número de Reynolds para  $Re = 400$  e usando um domínio de um comprimento de onda fundamental,  $\lambda_a = 7$ , onde apenas um vórtice é formado (teste  $2DFIII$ ), observa-se a formação da camada baroclínica para  $Ri = 0.167$  (Fig. 5.3).

O turbilhão K-H atinge a máxima amplitude e satura no tempo  $t = 39.65$  (como previsto por Caulfield & Peltier, 2000 [10]). Este fato ocorre sem que apareçam instabilidades na camada baroclínica, o que está de acordo com o trabalho de Staquet (1995) [85].

Staquet [85], em suas simulações a  $Re = 400$  e  $Ri = 0.167$ , com uma grade computacional de  $(n_x, n_z) = (512, 257)$  pontos e  $(L_x, L_z) = (14, 7)$ , mostrou que a camada baroclínica torna-se instável após o emparelhamento, mas esta instabilidade não é suficiente para que os vórtices secundários de K-H se desenvolvam na camada baroclínica, provavelmente porque a instabilidade próxima ao núcleo não ocorreu. A simulação foi realizada em um domínio de comprimento longitudinal igual a dois comprimentos de onda fundamentais ( $\lambda_a$ ), possibilitando a formação de dois turbilhões de K-H e a diferenciando da simulação  $2DFIII_B$  (Fig. 5.3).

No teste  $2DFIV$ , a  $Re = 2000$  e  $Ri = 0.167$  (Fig. 5.4), é evidente a formação da instabilidade próxima ao núcleo ( $t = 16.5$ ), que amplifica em direção à camada baroclínica e a

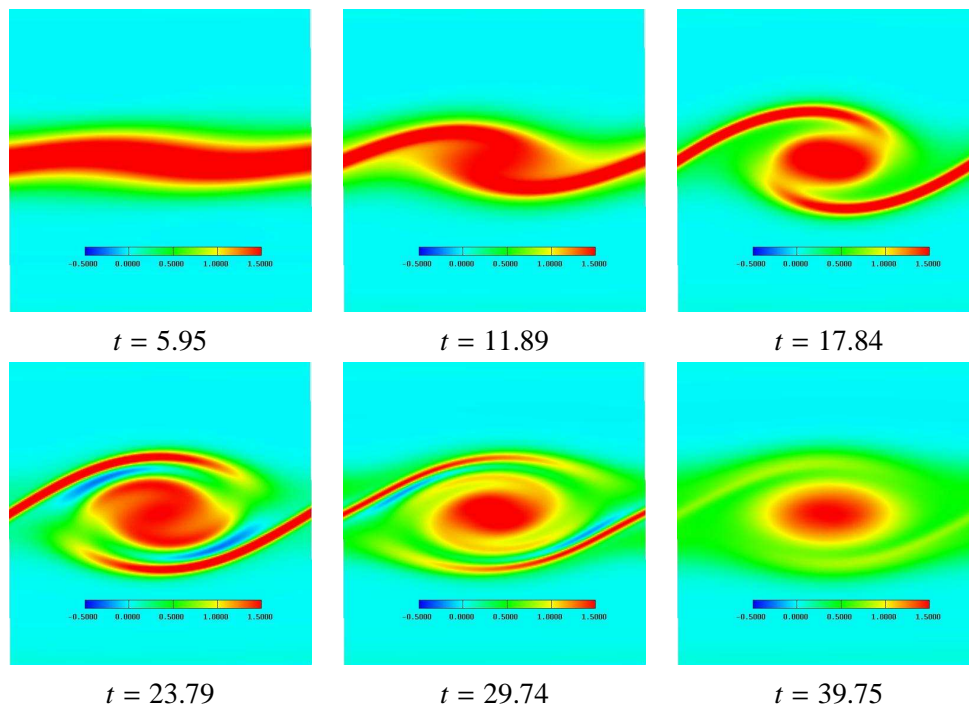


Figura 5.3: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulação  $2DFIII_B$ ,  $Re = 400$ ,  $Ri = 0.167$ .

desestabiliza. Este processo provoca o aparecimento da instabilidade secundária do tipo K-H, formando pequenos vórtices de K-H na camada baroclínica (Fig. 5.4). Segundo Staquet [85], esta instabilidade somente ocorre em uma camada bidimensional de um comprimento de onda fundamental quando a estratificação é forte ( $Ri > 0.15$ ).

A instabilidade secundária próxima ao núcleo pode ser observada na Figura 5.4 a partir de  $t = 16.5$ , onde é formada uma camada de vorticidade de sinal oposto (negativa) à do escoamento médio (positiva) ( $\omega_y = (\partial u / \partial z - \partial w / \partial x)$ ).

A vorticidade negativa é gerada pelo forte gradiente longitudinal de densidade ( $\partial \rho / \partial x$ ) e se forma entre a camada baroclínica e o núcleo do turbilhão primário de K-H, ambos de vorticidade positiva. A camada de vorticidade negativa (cor azul) desestabiliza a camada baroclínica e a torna similar a uma camada de mistura. A nova camada de mistura ao se desestabilizar forma pequenos turbilhões secundários de K-H, com a mesma dinâmica dos turbilhões primários, como pode ser observado na Figura 5.4 a partir do tempo  $t = 18$ .

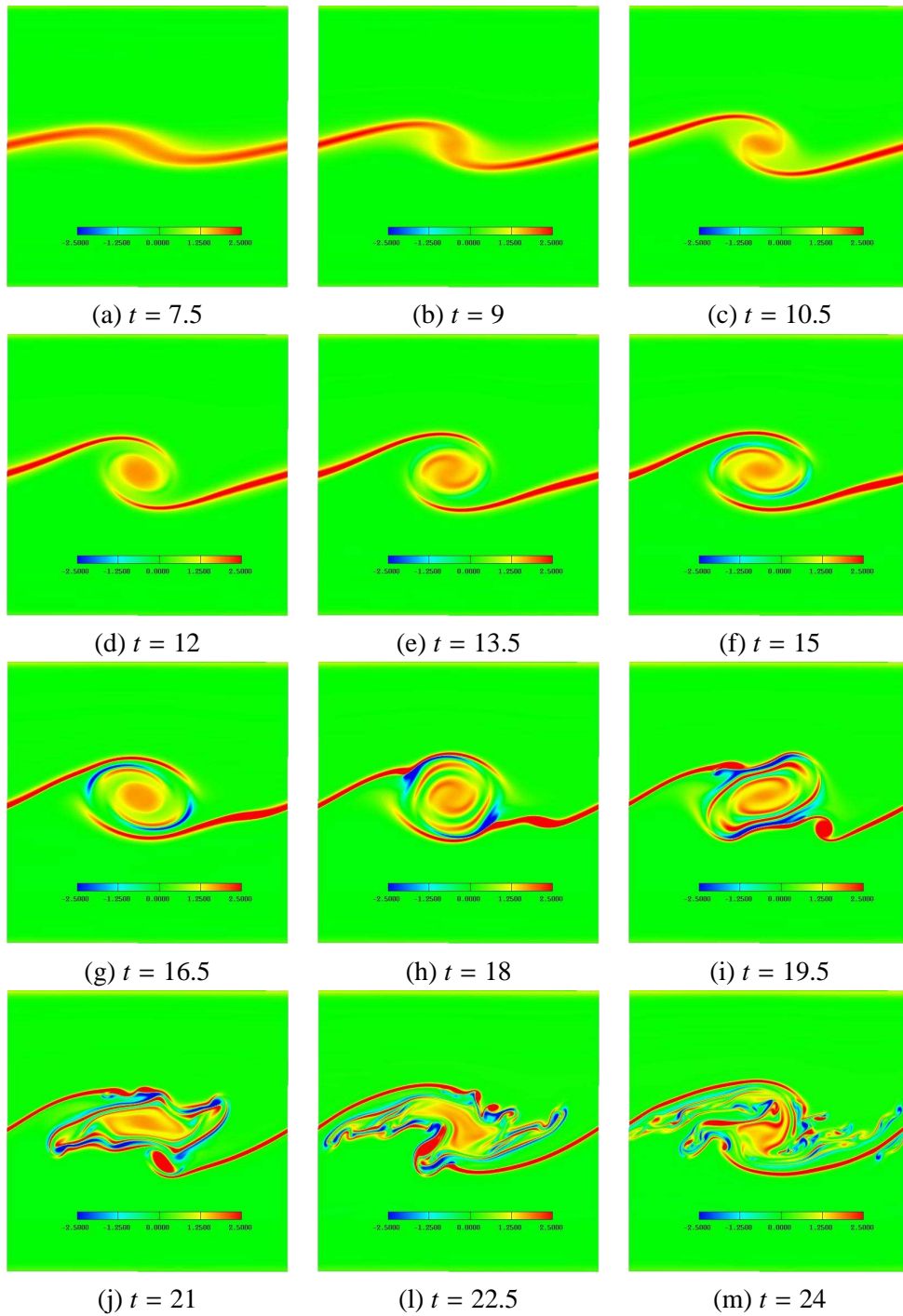


Figura 5.4: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulação *2DFIV*,  $Re = 2000$ ,  $Ri = 0.167$ .

## 5.4 Instabilidades secundárias na camada baroclínica: domínio com dois turbilhões de Kelvin-Helmholtz

Primeiramente, é analisada uma camada de mistura a número de Reynolds  $Re = 500$ , para quatro diferentes números de Richardson:  $Ri = 0$  (caso não estratificado),  $Ri = 0.05$ ,  $Ri = 0.07$  e  $Ri = 0.167$ . As simulações têm por objetivo verificar a influência da estratificação no



desenvolvimento da instabilidade secundária de K-H e da instabilidade próxima ao núcleo na camada baroclínica. Em um segundo momento, analisa-se o efeito que o número de Reynolds causa no crescimento das instabilidades secundárias na camada baroclínica.

#### 5.4.1 Influência do número de Richardson - $Re = 500$

O objetivo desta seção é mostrar que as instabilidades secundárias se desenvolvem na camada baroclínica tanto para uma média estratificação ( $Ri = 0.07$ ) quanto para uma forte estratificação ( $Ri = 0.167$ ), quando o número de Reynolds do escoamento é 500. Para atingir o objetivo são realizados testes com diferentes  $Ri$ , para verificar a influência que este parâmetro tem sobre o desenvolvimento das instabilidades secundárias na camada baroclínica. A Figura 5.5 mostra a evolução temporal da vorticidade de uma camada de mistura não estratificada ( $Ri = 0$ ) enquanto que as Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 apresentam a vorticidade para os três casos estratificados.

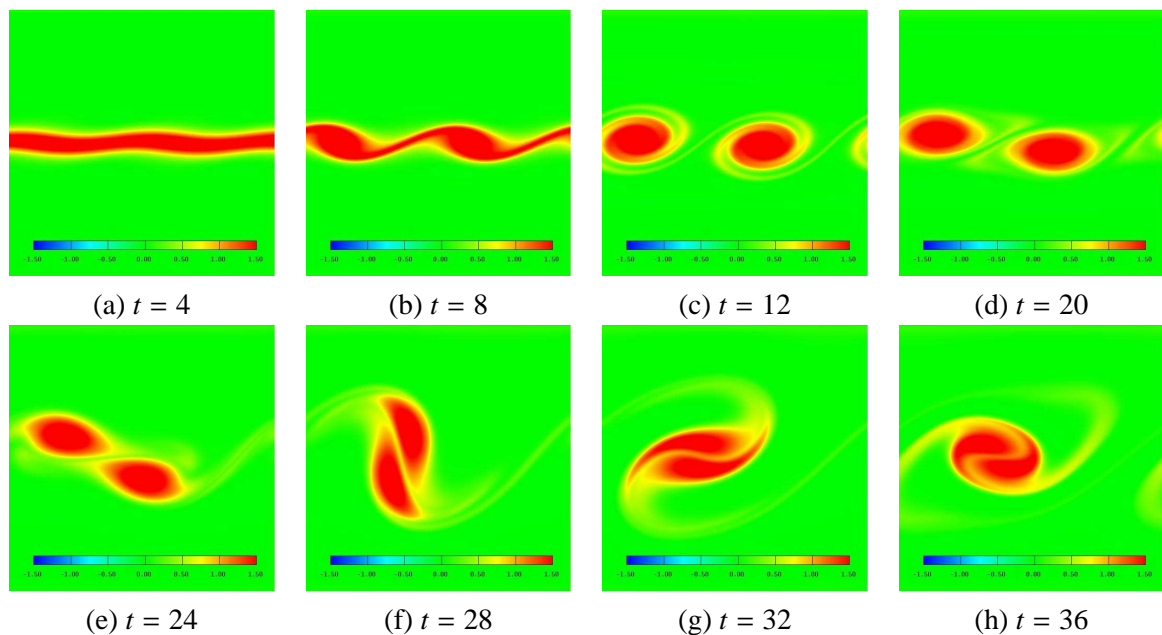


Figura 5.5: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação  $2DFV_A$ ,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0$

O processo de emparelhamento dos turbilhões de K-H se completa aproximadamente nos tempos  $t = 28$ ,  $t = 32$ ,  $t = 34$  e  $t = 38$ , respectivamente, para os casos a  $Ri = 0$ ,  $Ri = 0.05$ ,  $Ri = 0.07$  e  $Ri = 0.167$  (simulação  $2DFV$ ). Este fato mostra que o aumento do número de Richardson retarda, no tempo, o crescimento do modo subharmônico e, como consequência, o processo de emparelhamento. Nos casos estratificados, a camada baroclínica é colocada em evidência.

Observa-se que, no caso não estratificado, após o emparelhamento, o turbilhão de K-H satura (escoamento bidimensional), pois não há fonte de energia para a geração de outras insta-

bilidades. Na simulação a  $Ri = 0.05$  ( $2DFV_B$ ), a camada baroclínica aparece depois do enrolamento e é enfraquecida pela instabilidade do subharmônico. Após o emparelhamento ( $t \geq 36$ ) a camada baroclínica, novamente forte, mantém o escoamento com vorticidade e deforma o vórtice. Como o mecanismo gerador da instabilidade secundária de K-H (vorticidade negativa) e a estratificação são fracos a camada baroclínica não se desestabiliza (Fig. 5.6i-m).

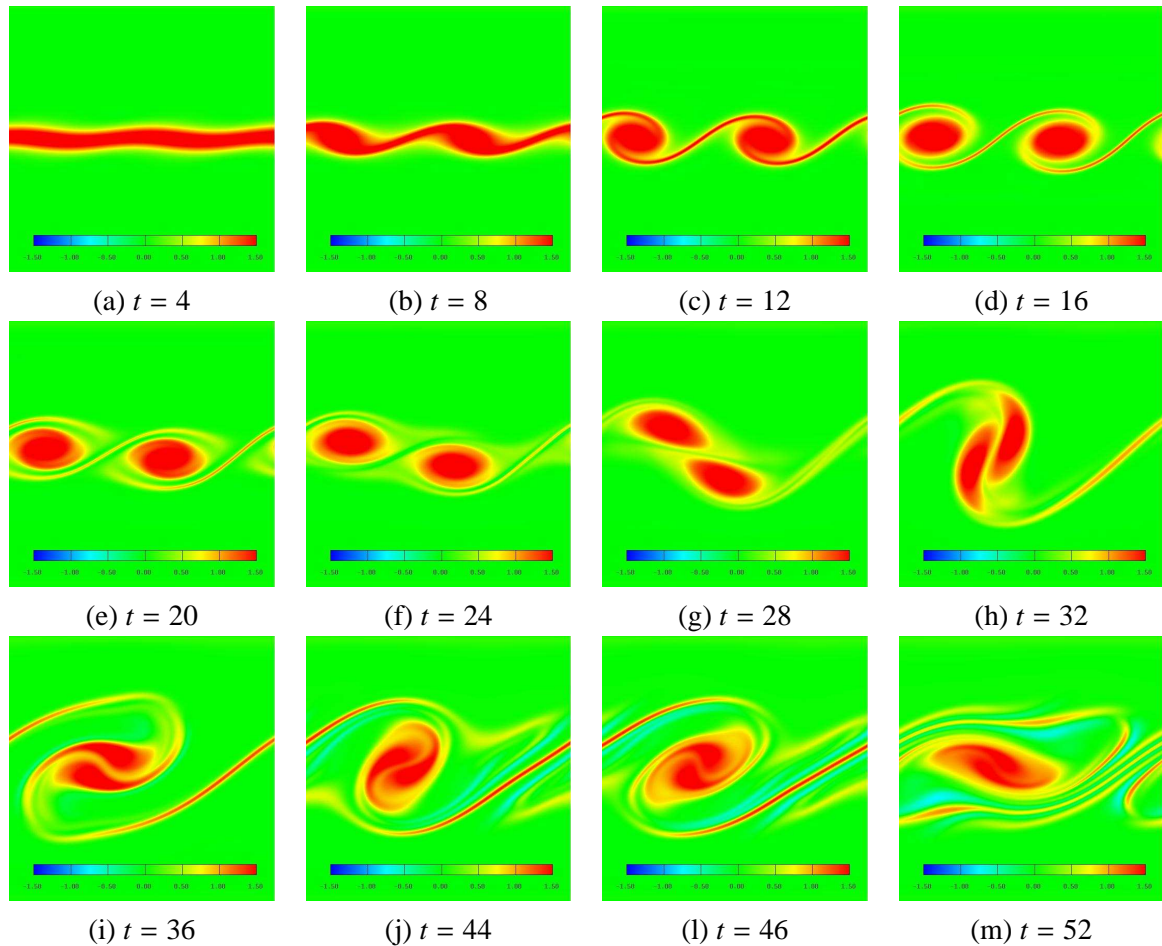


Figura 5.6: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação  $2DFV_B$ ,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.05$ .

Na camada estratificada a  $Ri = 0.07$  (Fig. 5.7), após o emparelhamento aparece uma camada de vorticidade negativa ao redor do vórtice ((h)  $t = 48$ ). Esta camada de vorticidade junto com o giro do vórtice (Fig. 5.1), formam um jato que desestabiliza a camada baroclínica, mostrando pequenos vórtices secundários de K-H (Fig. 5.7(i-m)). Neste caso é evidente a presença das duas instabilidades secundárias: a instabilidade próxima ao núcleo do vórtice ((h)  $t = 48$ ) e a instabilidade secundária de K-H ((i)  $t = 56$ ). Porém, como a estratificação não é forte ( $Ri \leq 0.1$ ), com o tempo os vórtices secundários de K-H saturam e desaparecem.

Ao contrário do caso anterior, no escoamento a  $Ri = 0.167$  os vórtices secundários de K-H estão bem definidos na camada baroclínica (Fig. 5.8 ( $t \geq 52$ )). Após o emparelhamento surge a instabilidade próxima do núcleo que desestabiliza a camada baroclínica. A instabilidade

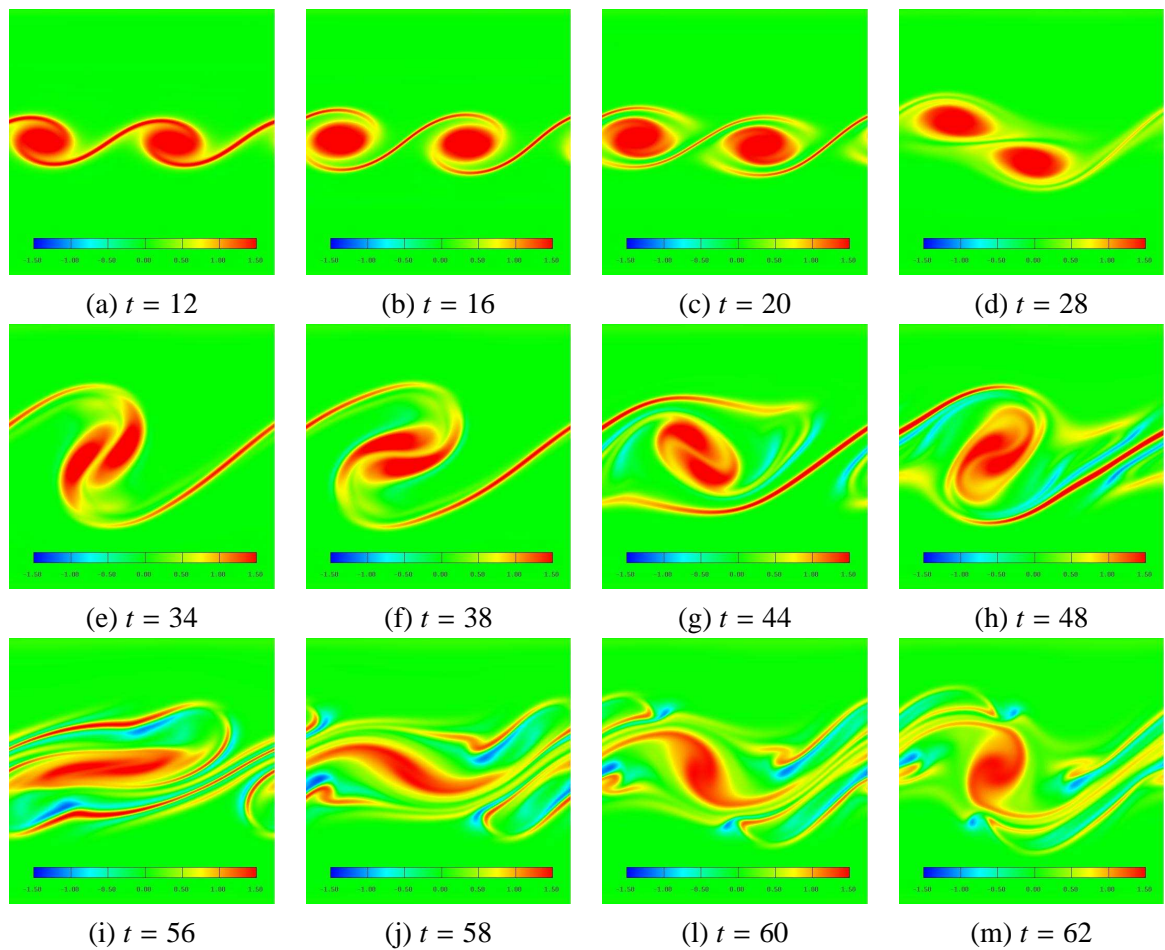


Figura 5.7: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação  $2DFV_C$ ,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.07$ .

próxima ao núcleo se propaga em direção à camada baroclínica. O vórtice é, então, fortemente deformado (Fig. 5.8f-h), pelo efeito da estratificação. O crescimento da instabilidade próxima ao núcleo leva à formação de pares de vórtices contra-rotativos no ponto de estagnação da camada baroclínica (Fig. 5.8h e i). Os vórtices secundários de K-H se desenvolvem e se alinham com a horizontal, um de cada lado da camada baroclínica (Fig. 5.8m). Tal configuração é particular as simulações a  $Re = 500$  e somente observada no presente trabalho.

Desta maneira, a instabilidade secundária de K-H se propaga e os vórtices secundários de K-H, junto com a instabilidade no centro do turbilhão, dominam a dinâmica do escoamento, sugerindo uma transferência de energia em direção às pequenas escalas.

A Figura 5.9 mostra a evolução da camada de mistura estratificada temporal num domínio de comprimento quatro vezes o comprimento de onda fundamental ( $L_x = 4\lambda_a$ ), referente à simulação  $2DFVI$ . Nesta simulação, observa-se que o surgimento das instabilidades secundárias na camada baroclínica acontece da mesma maneira que na simulação  $2DFV_D$  (Fig. 5.8), apenas avança mais no tempo. Verifica-se que a estratificação inibe o segundo modo subharmônico (forçado) e não ocorre o segundo emparelhamento.

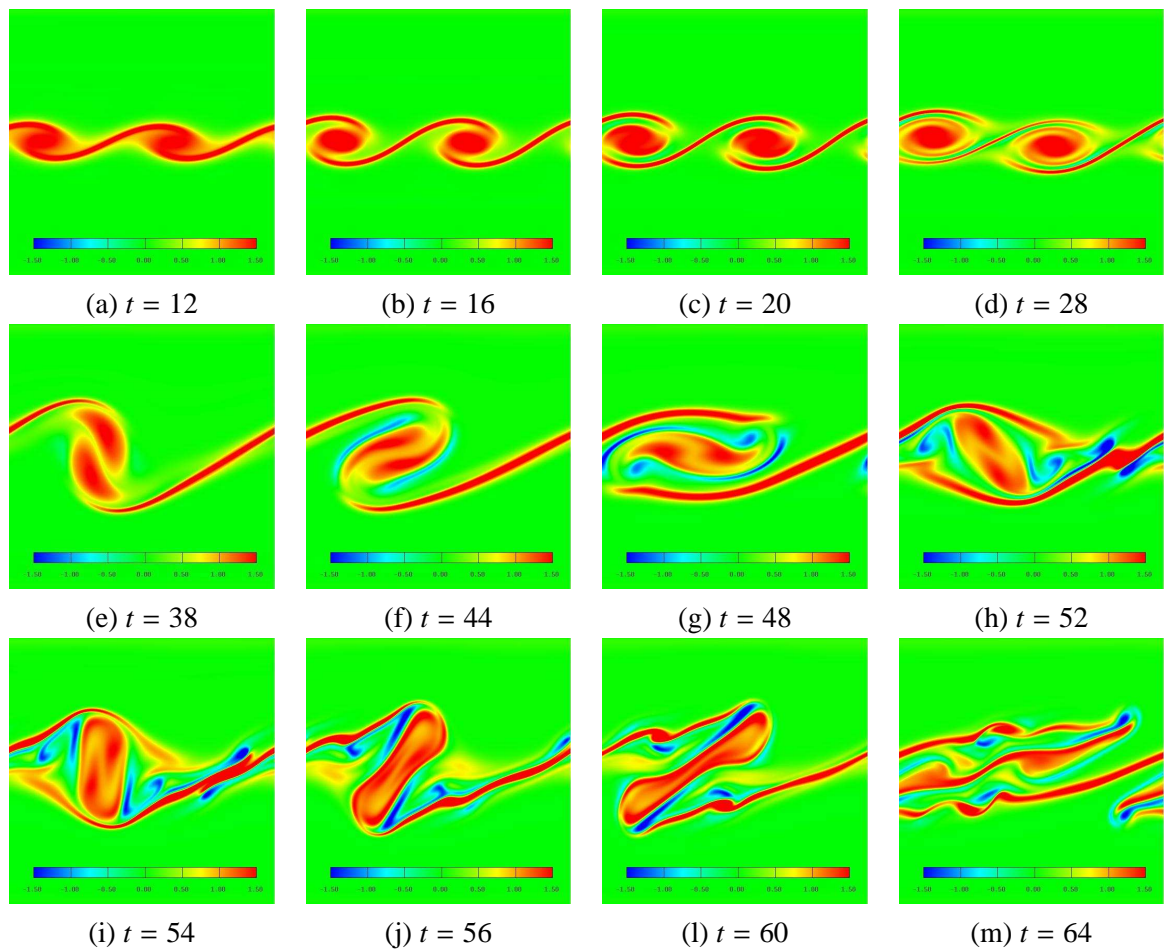


Figura 5.8: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação  $2DFV_D$ ,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.167$ .

Para quantificar o efeito que produzem a estratificação e as instabilidades secundárias que se desenvolvem na camada baroclínica, analisa-se a evolução da energia cinética no tempo, a espessura de vorticidade e o fluxo vertical de massa. A evolução no tempo da energia cinética e do alargamento da espessura de vorticidade para as simulações  $2DFV$ , a  $Re = 500$ , são mostradas na Fig. 5.10. O comportamento da energia cinética, calculada através da Eq. (4.1), na presença da instabilidade secundária do tipo K-H ( $Ri = 0.07$  e  $Ri = 0.167$ ) é o mesmo que na ausência dela (simulação  $2DFI$ , Fig. 4.8, e  $2DFII$ , Fig. 4.9,  $Re = 300$ ).

Entretanto, a evolução temporal do alargamento da espessura de vorticidade tem um comportamento diferenciado em relação as simulações a  $Re = 300$ . O alargamento da espessura da camada nos primeiros instantes não conserva a mesma linearidade inicial observada no teste  $2DFII$  (Fig. 4.6), embora as condições iniciais sejam iguais para ambos testes. A presença da vorticidade negativa, o aumento do número de Reynolds em conjunto com a estratificação, o crescimento da vorticidade além do seu valor inicial, provavelmente contribuem para alterar o comportamento do alargamento da espessura de vorticidade, em relação ao teste a  $Re = 300$ .

Medidas da evolução do fluxo vertical de massa,  $\langle \rho'w' \rangle$ , são mostrados na Fig. 5.11. O

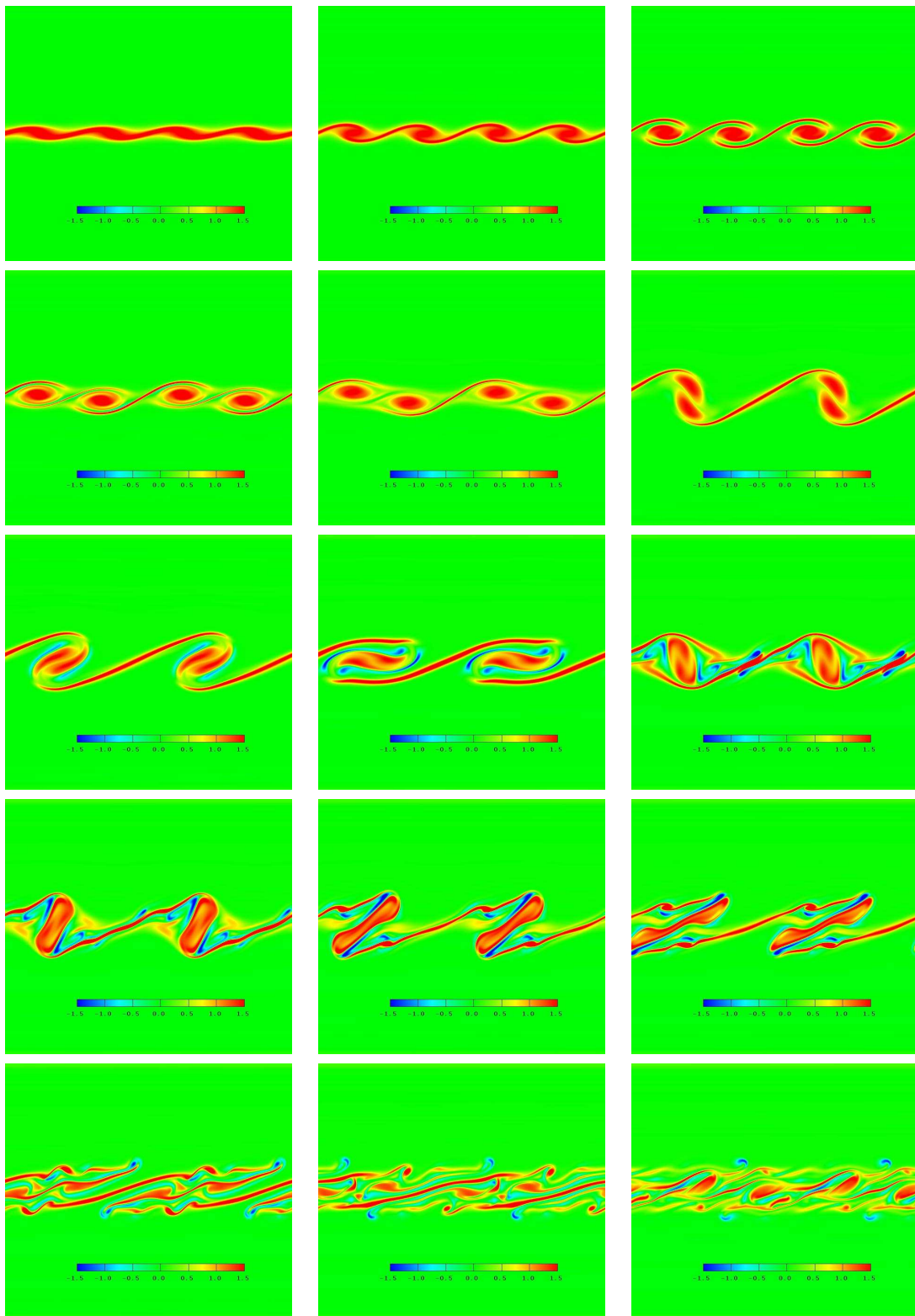


Figura 5.9: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para os tempos  $t = 8; 12; 20; 28; 32; 40; 44; 48; 54; 56; 58; 60; 64; 68; 76$  (da esquerda para direita). Simulação *2DFVI*,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.167$ .

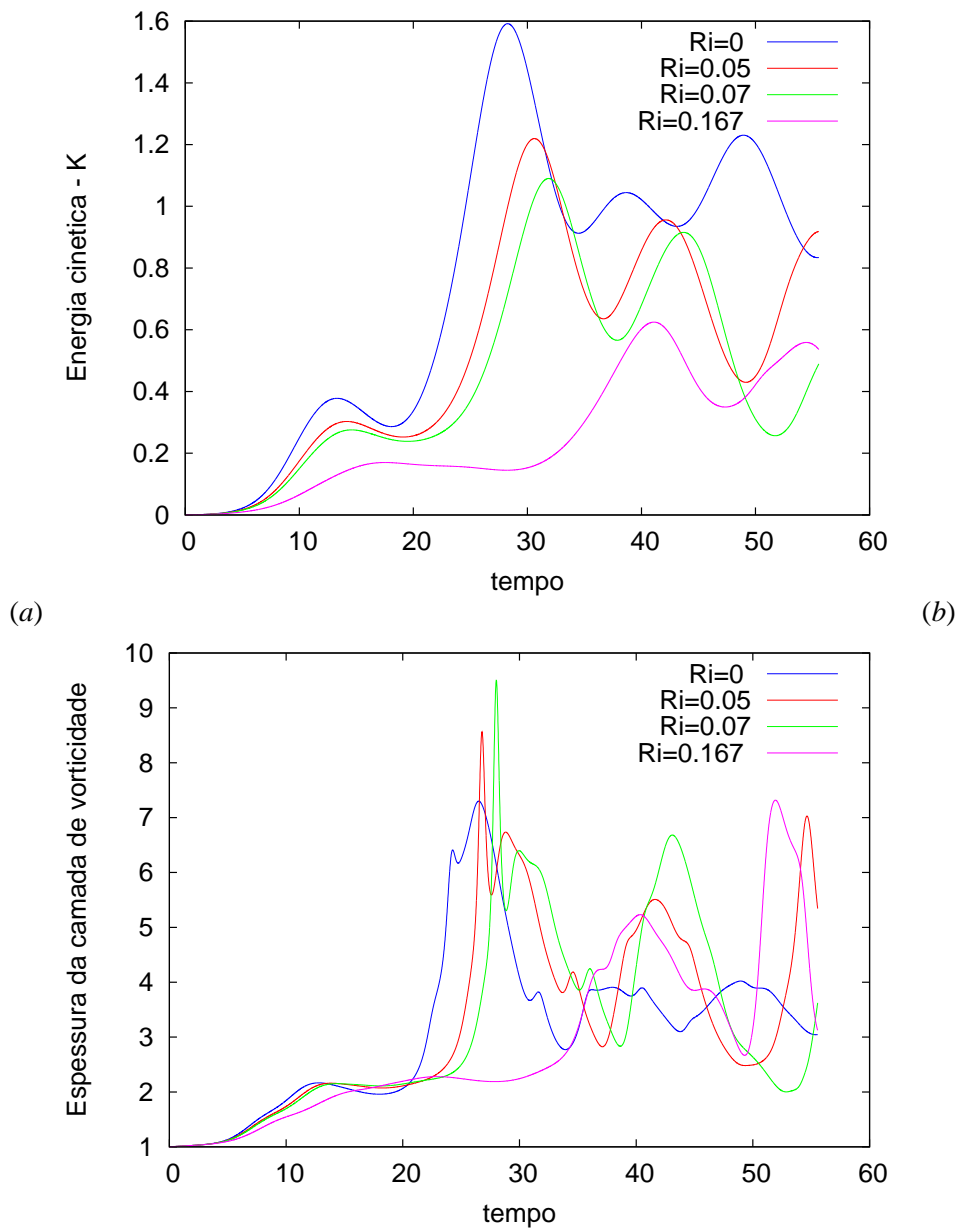


Figura 5.10: Evolução temporal: (a) da energia cinética; (b) do alargamento da espessura de vorticidade. Simulações  $2DFV$ ,  $Re = 500$ .

aumento do número de Richardson no escoamento diminui o fluxo vertical de massa, como mostrado na seção 4.2.3. Verifica-se que o fluxo vertical de massa pode aumentar quando as instabilidades secundárias de K-H surgem na camada baroclínica. Na Figura 5.11 observa-se que após o emparelhamento, o fluxo vertical de massa aumenta (mostrado na coluna da direita) em relação ao observado no escoamento sem instabilidades secundárias de K-H (equivalente ao mostrado na coluna da esquerda). No escoamento bidimensional, que não apresenta instabilidade secundária de K-H, após o emparelhamento o novo turbilhão atinge a máxima amplitude e satura, diminuindo o fluxo. Ao contrário, na presença da instabilidade secundária de K-H, o fluxo vertical de massa cresce. Tal fenômeno mostra que a instabilidade secundária na camada

baroclínica pode favorecer a mistura no escoamento altamente estratificado.

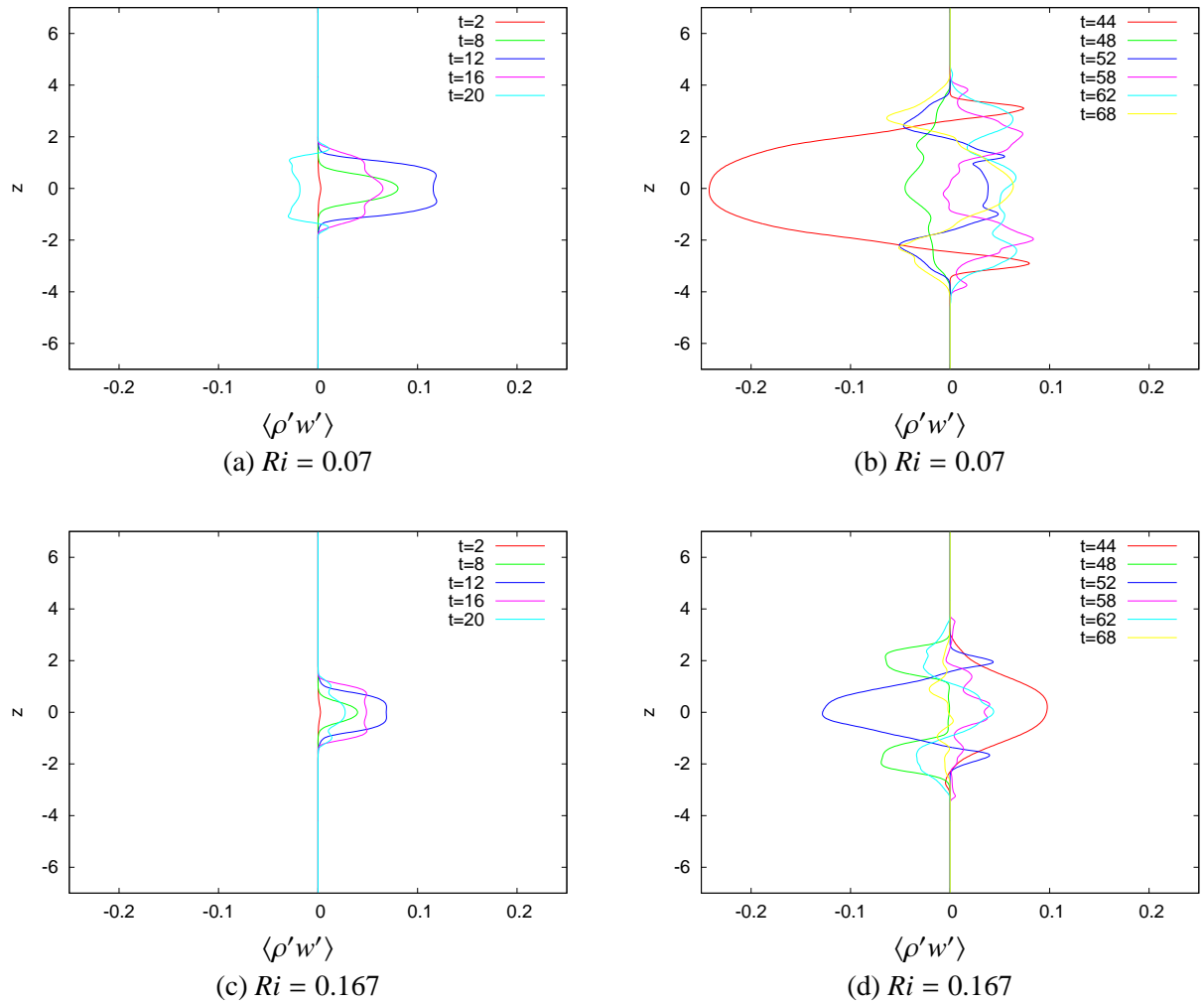


Figura 5.11: (a - b) Fluxo turbulento vertical de massa  $\langle \rho' w' \rangle$ ,  $Ri = 0.07$ ; (c - d) Fluxo turbulento vertical de massa  $\langle \rho' w' \rangle$ ,  $Ri = 0.167$ ; Simulação  $2DFV_C$  e  $2DFV_D$ ,  $Re = 500$ .

A Figura 5.12 mostra o desenvolvimento temporal das vorticidades máximas e mínimas para a simulação  $2DFV$  para  $Re = 500$  e diferentes  $Ri$ . Analisando a Fig. 5.12, para o escoamento a  $Ri = 0$ , observa-se o esperado: a vorticidade máxima diminui com o tempo em relação ao máximo valor inicial e a vorticidade mínima é nula. No teste a  $Ri = 0.05$ , a vorticidade máxima positiva também diminui com o tempo, mas surge uma vorticidade negativa que se intensifica após o emparelhamento. Como observado na Figura 5.6, esta vorticidade negativa não é suficiente para desestabilizar a camada baroclínica. No teste  $2DFI$ , para  $Ri = 0.05$  e  $Re = 300$ , não foi verificada a presença de vorticidade negativa. Provavelmente, o aumento do número de Reynolds ( $Re$ ) seja a causa do aparecimento da vorticidade negativa a  $Ri = 0.05$ .

Na camada estratificada, a  $Ri = 0.07$ , a vorticidade negativa cresce em módulo, após o emparelhamento ( $t \geq 28$ ), da mesma forma que na camada a  $Ri = 0.05$ . Porém, a diferença entre os dois casos é que para  $Ri = 0.07$ , a vorticidade positiva também cresce e este crescimento

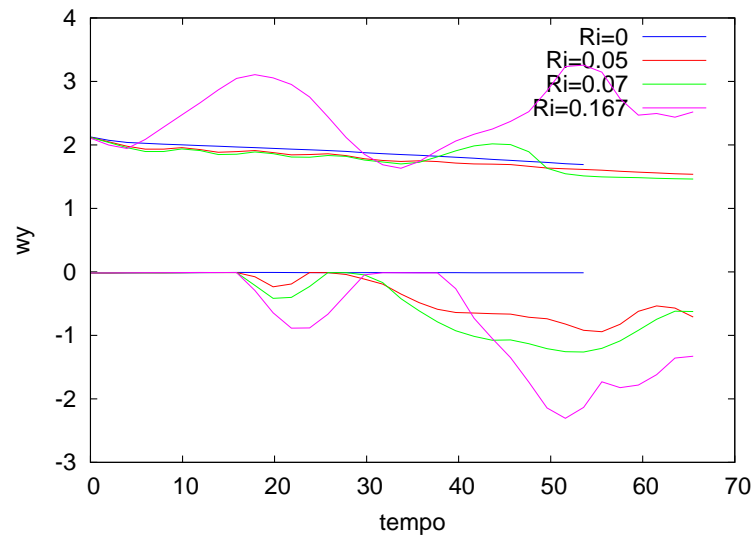


Figura 5.12: Evolução no tempo da vorticidade máxima e mínima ( $\omega_y$ ). Simulação *2DFV* e diferentes  $Ri$ ,  $Re = 500$ .

é suficiente para desestabilizar a camada baroclínica. Tal mecanismo não foi observado nas simulações a  $Re = 300$  (*2DFI* e *2DFII*) onde a instabilidade secundária do tipo K-H não se amplifica.

Na camada a  $Ri = 0.167$ , a vorticidade máxima positiva aumenta com o tempo além do valor inicial e, após o emparelhamento ( $t \geq 28$ ), a vorticidade de sinal oposto à do escoamento cresce em valor absoluto, apresentando uma simetria em relação à positiva. O primeiro máximo observado na Figura 5.12, para  $Ri = 0.167$ , é devido à presença da forte camada baroclínica, e o primeiro mínimo corresponde ao enfraquecimento da mesma pela amplificação do modo subharmônico. O segundo máximo e o segundo mínimo correspondem ao surgimento das instabilidades secundárias de K-H na camada baroclínica.

A presença da vorticidade negativa é fundamental para a geração de vórtices secundários do tipo K-H na camada baroclínica. Se as vorticidades, negativa e positiva, forem da mesma ordem de magnitude mais facilmente as instabilidades secundárias se desenvolvem na camada baroclínica. Tal fato sugere que a produção de vorticidade negativa na vizinhança do núcleo do turbilhão (*near-core instability*) é seguida pelo crescimento da instabilidade secundária do tipo K-H. Como verificado, nesta seção, esta instabilidade não se desenvolve quando a vorticidade negativa é menor (em módulo) que a positiva no escoamento.

Os perfis verticais de vorticidade transversal,  $\omega_y$ , mostrados na Fig. 5.13, sugerem que a existência de vorticidade negativa no escoamento, de magnitude próxima a da positiva, é uma condição necessária para o desenvolvimento da instabilidade próxima ao núcleo, e para que a sua propagação na camada baroclínica desencadeie a formação de vórtices secundários de K-H.



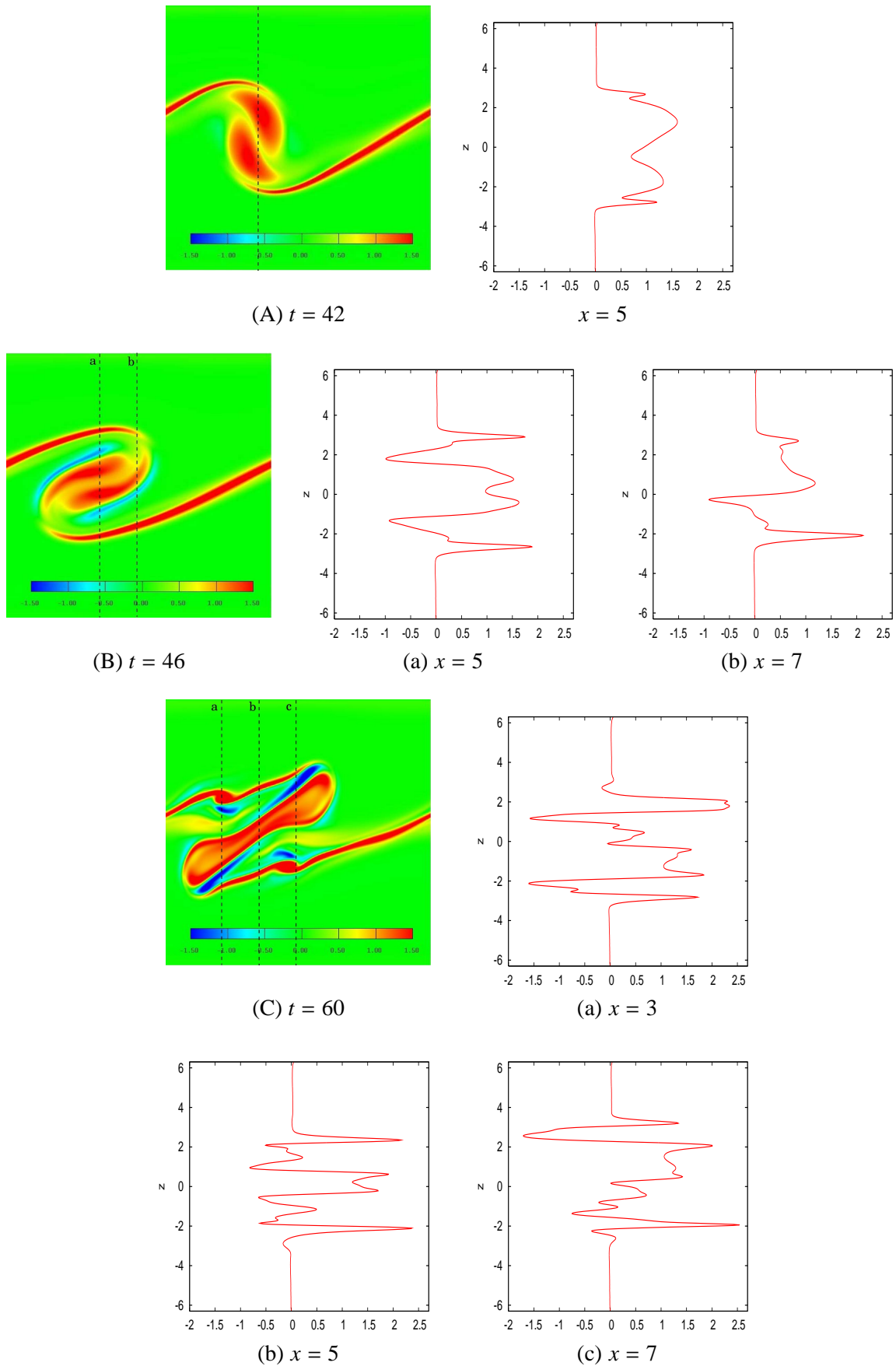


Figura 5.13: Perfis de vorticidade transversal,  $\omega_y$ . Simulação 2DFV,  $Re = 500$  e  $Ri = 0.167$ .

Constata-se, visualizando o corte da Figura 5.13A para o tempo  $t = 42$ , que a vorticidade transversal é totalmente positiva. Quando a instabilidade próxima ao núcleo se torna evidente, para  $t = 46$  e item (B), verifica-se que a vorticidade negativa é de magnitude próxima à positiva. Para  $t = 60$ , os três cortes (a - c) da Fig. 5.13C atestam a importância da vorticidade negativa na geração da instabilidade secundária de K-H na camada baroclínica.

### 5.4.2 Influência do número de Reynolds

A Figura 5.14 apresenta a simulação *2DFVII* realizada a  $Re = 1000$  e  $Ri = 0.167$ . Esta simulação foi realizada com a finalidade de verificar o quanto o aumento do número de Reynolds influencia no desenvolvimento das instabilidades secundárias na camada baroclínica. De fato, o aumento do  $Re$  permite que a instabilidade próxima ao núcleo se manifeste antes do emparelhamento dos turbilhões primários de K-H ((a)  $t = 24$  e (b)  $t = 28$ ). Como descrito anteriormente, esta instabilidade se manifesta quando surge uma camada de vorticidade negativa ao redor do núcleo.

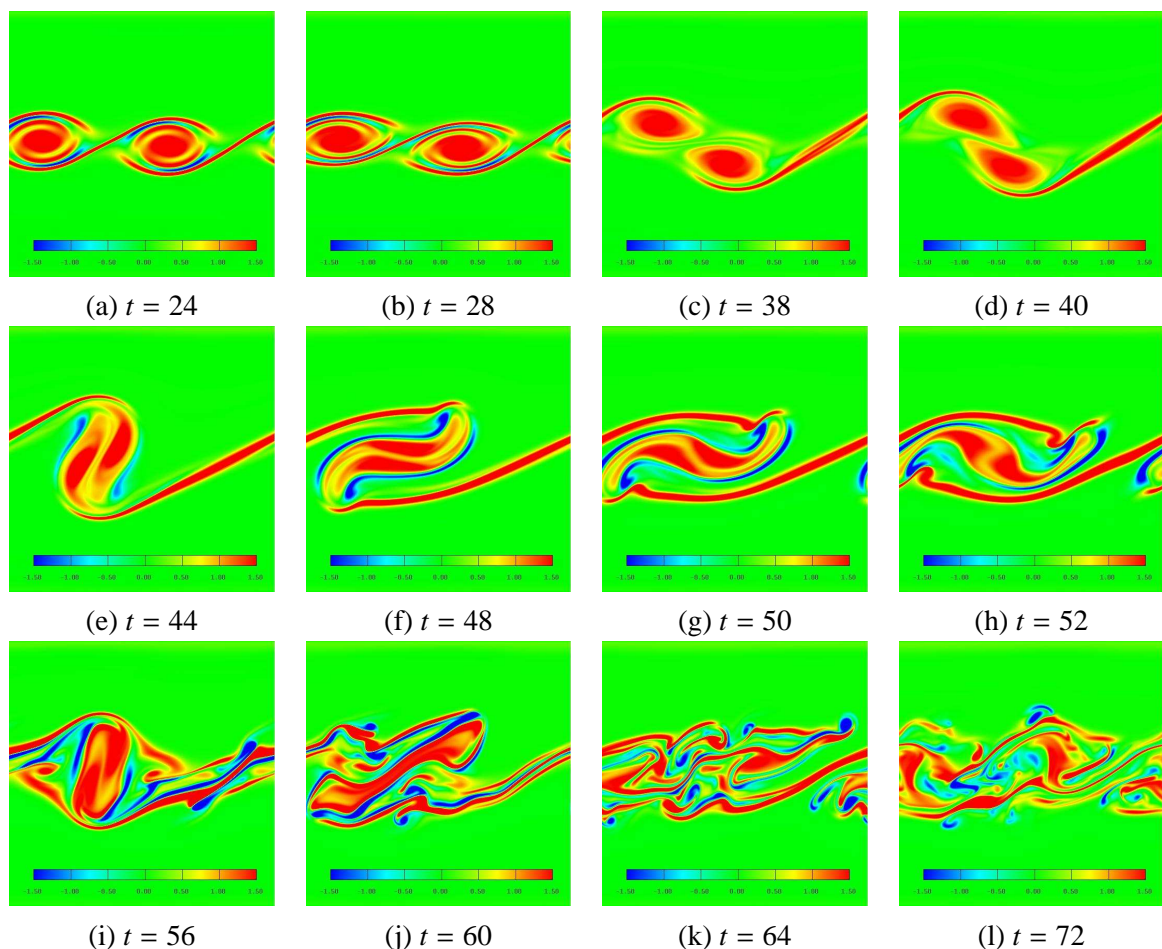


Figura 5.14: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação *2DFVII*,  $Re = 1000$ ,  $Ri = 0.167$ .

A vorticidade negativa é formada baroclinicamente quando o fluido mais leve (ou o mais pesado) completa a primeira revolução para dentro do vórtice primário de K-H. Tal movimento

convectivo, onde as camadas de fluido mais leve se sobrepõem entre as de fluido mais pesado (instabilidade convectiva gravitacional), reforça localmente o gradiente de densidade longitudinal. Este gradiente de densidade longitudinal, como comentado no capítulo anterior, aumenta a vorticidade na camada baroclínica, sendo uma fonte de energia (Equação 3.18), não encontrada no caso não estratificado, a qual possibilita o desenvolvimento de instabilidades secundárias na camada baroclínica. Observa-se na Fig. 5.14 que a vorticidade negativa diminui até o emparelhamento ( $t = 40$ ).

Comparando-se a Fig. 5.14 com a Fig. 5.8, verifica-se que o aumento do número de Reynolds possibilita a amplificação da instabilidade próxima ao núcleo antes do emparelhamento. Durante o processo de emparelhamento a instabilidade subharmônica prevalece sobre a instabilidade secundária próxima ao núcleo, enfraquecendo-a. Após o emparelhamento dos turbilhões de K-H a instabilidade próxima ao núcleo novamente se manifesta e com o giro do turbilhão ela amplifica, desestabilizando a camada baroclínica. A instabilidade secundária de K-H se desenvolve de maneira contínua, gerando cada vez mais vórtices secundários.

A Figura 5.15 apresenta a comparação entre a evolução temporal das vorticidades máxima e mínima para  $Re = 500$  ( $2DFV_D$ ) e  $Re = 1000$  ( $2DFV_{II}$ ), ambos a  $Ri = 0.167$ .

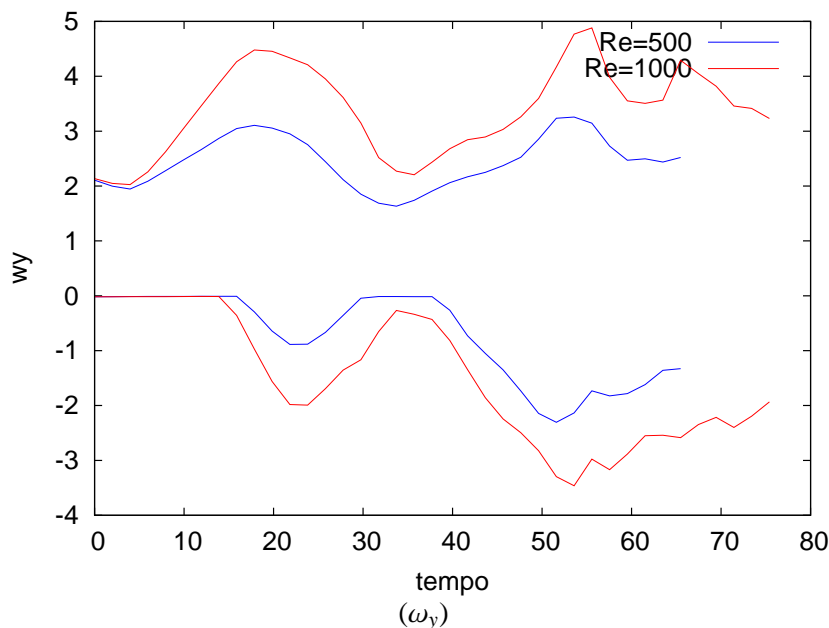


Figura 5.15: Evolução no tempo da vorticidade máxima e mínima ( $\omega_y$ ). Simulação  $2DFV_{II}$ ,  $Re = 500$  e simulação  $2DFV$ ,  $Re = 1000$ ,  $Ri = 0.167$ .

É evidente na Figura 5.15 que, quanto maior o número de Reynolds, maior a diferença entre as vorticidades máxima e mínima, mostrando uma forte influência deste parâmetro na geração das instabilidades secundárias na camada baroclínica. Este resultado está em acordo com o estudo de Staquet (1995), onde foi verificado que o aumento do número de Reynolds intensifica a vorticidade na camada baroclínica (para  $Ri = 0.167$ ).

O espectro de energia em função do número de onda longitudinal mostra a energia em cada escala, como pode ser observado na Fig. 5.16. O espectro de energia longitudinal  $E(k_x)$ , de um escoamento bidimensional, pode ser relacionado ao espectro de energia isotrópico  $E(k)$  de um escoamento tridimensional [52]. Isto é possível, relacionando a região inercial do espectro de energia isotrópica  $E(k)$ , com lei proporcional a  $k^{-a}$ , à região inercial do espectro longitudinal de energia, com lei  $k_x^{-a}$ .

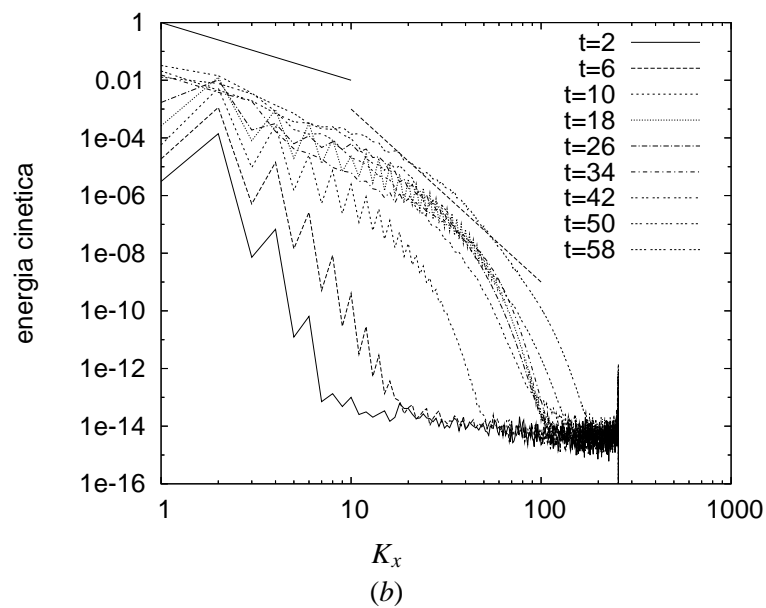
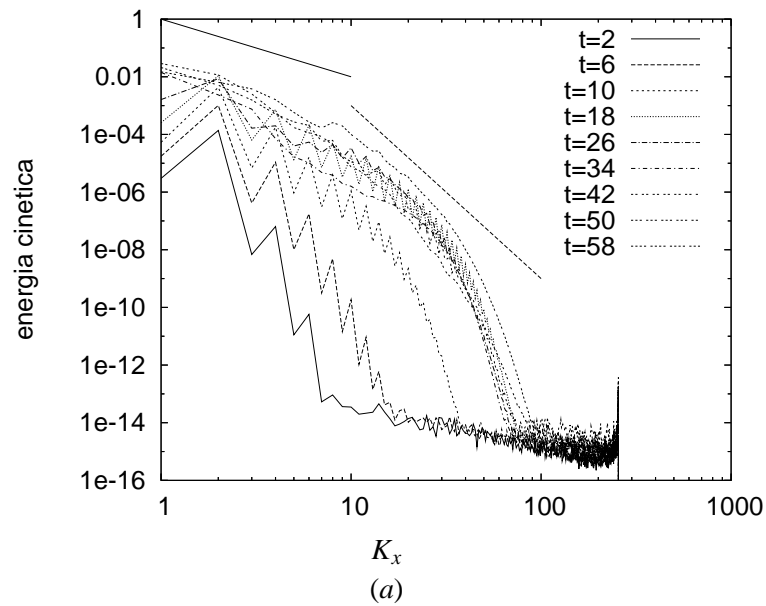


Figura 5.16: Espectro longitudinal de energia para diferentes tempos;  $Ri = 0.167$ ; (a) Simulação 2DFV,  $Re = 500$ ; (b) Simulação 2DFVII,  $Re = 1000$ .

O pico no tempo  $t = 2$  corresponde ao número de onda fundamental (Fig. 5.16). As interações entre os modos não lineares distribuem a energia em toda a largura do espectro.

Entre os tempos  $t = 38$  a  $44$ , ocorre o emparelhamento, a partir deste instante o espectro atinge uma lei  $E(k_x) \sim k_x^{-2}$  para os números de onda menores que  $20$ , conforme mostra o segmento de reta em linha contínua da Fig.5.16. Para números de onda entre  $20$  e  $30$ , é alcançada uma pequena zona de lei  $E(k_x) \sim k_x^{-3}$ , seguida de uma zona de decaimento exponencial.

Como verificado anteriormente para  $Ri = 0.167$ , o aumento do número de Reynolds do escoamento intensifica a manifestação das instabilidades secundárias na camada baroclínica, e estas se amplificam somente quando uma vorticidade ( $\omega_y$ ) negativa ocorre no escoamento, e é de valor absoluto comparável à positiva. É de se esperar que um  $Re$  maior intensifique estas instabilidades em uma camada com menor estratificação. Este fenômeno físico é observado na simulação  $2DFVIII_B$ , a  $Re = 2000$  e  $Ri = 0.07$  (Fig. 5.17,  $t = 47.6$ ), comprovando que é possível o desenvolvimento das instabilidades secundárias na camada baroclínica de um escoamento fracamente estratificado.

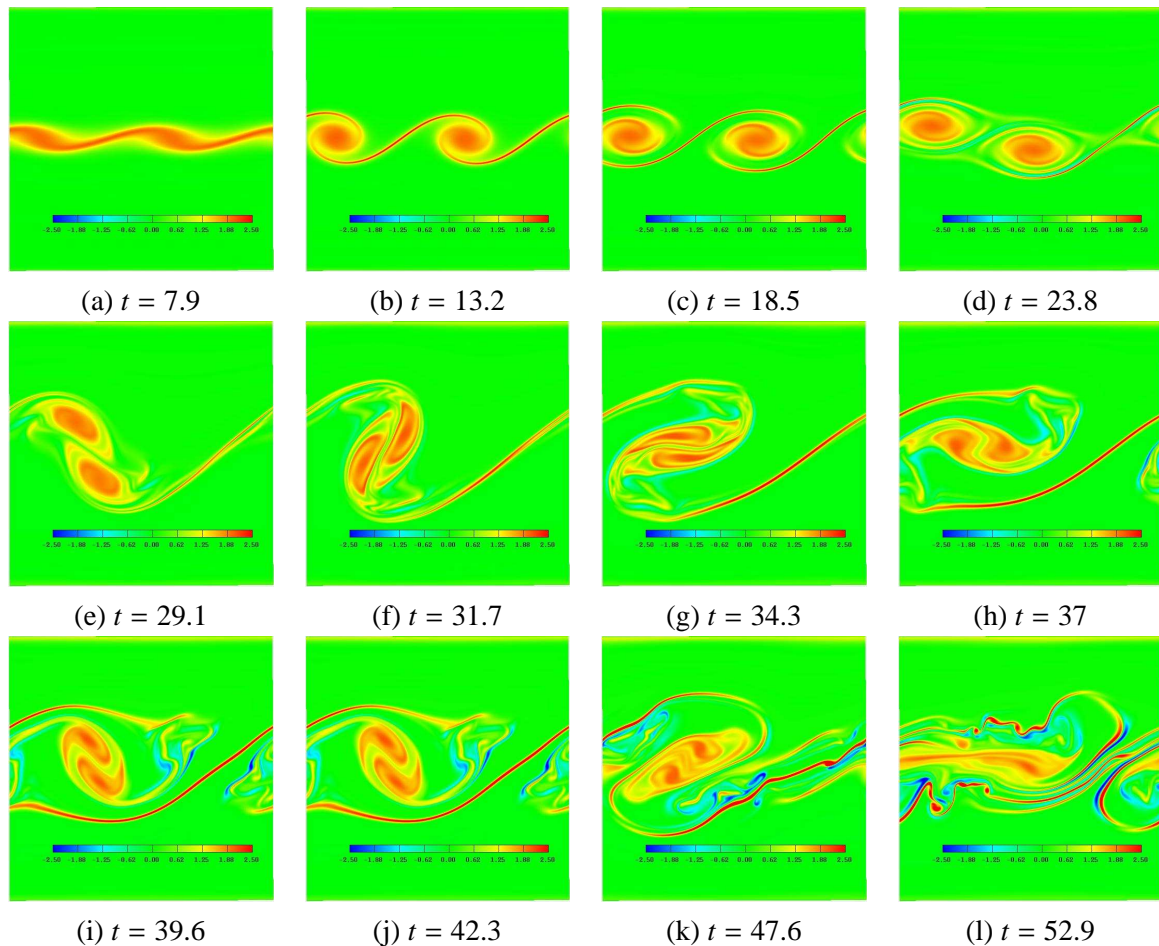


Figura 5.17: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação  $2DFVIII_B$ ,  $Re = 2000$ ,  $Ri = 0.07$ .

Na simulação  $2DFVIII_C$ , a  $Re = 2000$  e  $Ri = 0.167$ , a vorticidade pode crescer além do seu máximo valor inicial, mesmo sendo bidimensional a dinâmica do escoamento. Desta forma, transferir energia através das pequenas escalas de forma semelhante à turbulência tridimensional

(Fig. 5.18) e desencadear o desenvolvimento de sucessivas instabilidades secundárias de K-H na camada baroclínica. O campo de densidade para a simulação  $2DVIII_C$ , a  $Ri = 0.167$ , é mostrado na Fig.5.19 para tempos distintos.

A evolução da vorticidade ( $\omega_y$ ) máxima e mínima com o tempo pode ser verificada na Fig. 5.20, para os números de Richardson 0; 0.07 e 0.167 e  $Re = 2000$ . Na simulação  $2DFVIII_B$ , a  $Re = 2000$  e  $Ri = 0.07$  (Fig. 5.18), a vorticidade negativa não é suficientemente alta (em módulo) para que desestabilize a camada baroclínica tão rapidamente quanto na simulação a  $Ri = 0.167$ , mostrando a importância do número de Richardson na geração das instabilidades na camada baroclínica.

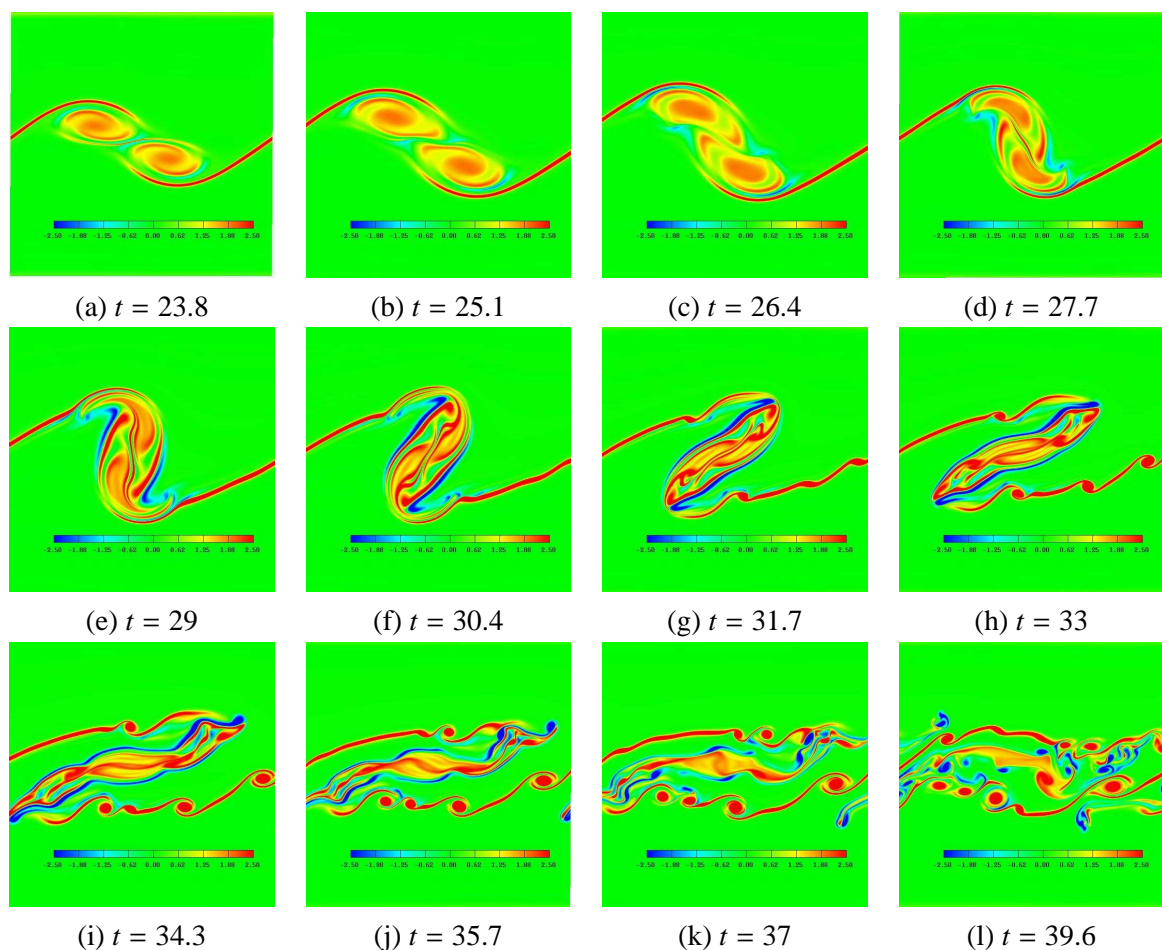


Figura 5.18: Evolução no tempo do campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) para diferentes tempos. Simulação  $2DVI$ ,  $Re = 2000$ ,  $Ri = 0.167$ .

Com base nas simulações bidimensionais apresentadas neste capítulo, pode-se dizer que o código de cálculo resolve as escalas características do movimento e possibilita a identificação das instabilidades secundárias na camada baroclínica. Verifica-se que a resolução das grades computacionais são suficientes para captar estas instabilidades.

Neste capítulo, as instabilidades secundárias de Kelvin-Helmholtz e próxima ao núcleo foram identificadas: para números de Reynolds a partir de  $Re = 500$ , quando há emparelhamento dos vórtices simulados; e para  $Re = 2000$  quando o comprimento longitudinal do domínio é

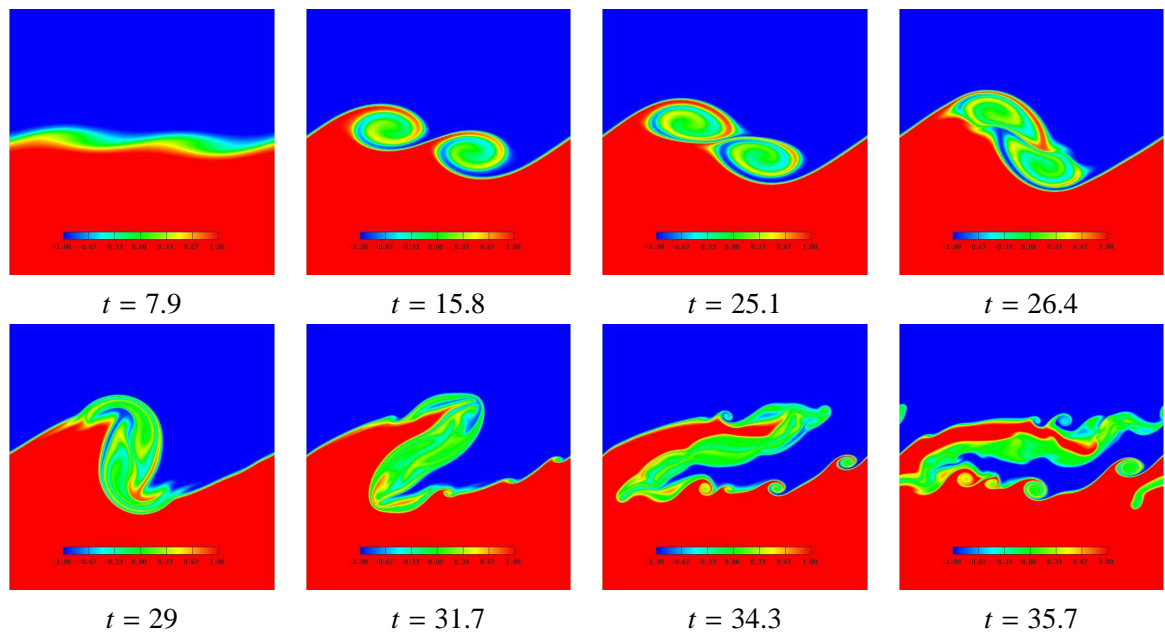


Figura 5.19: Campo de densidade. Valores variando de  $-1$  (azul) a  $+1$  (vermelho). Simulação  $2DFVIII_C$ ;  $Re = 2000$  e  $Ri = 0.167$ .

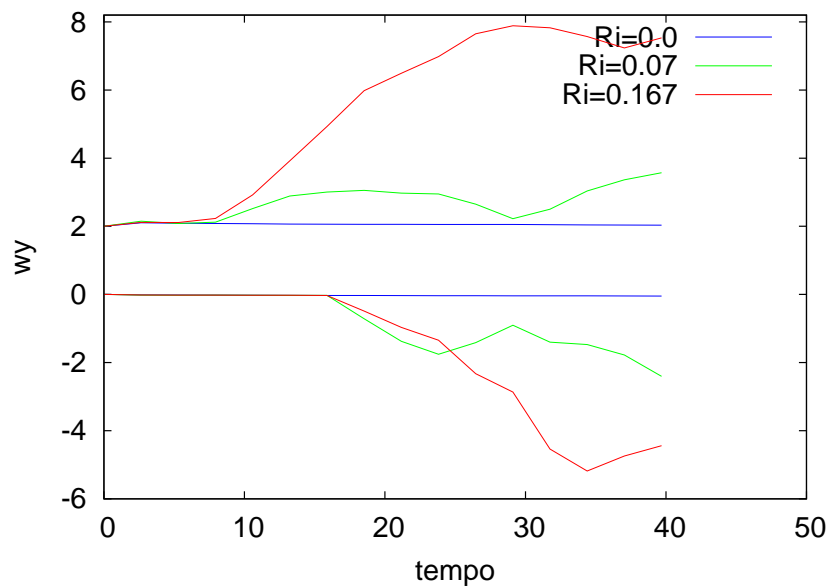


Figura 5.20: Evolução no tempo da vorticidade máxima e mínima ( $\omega_y$ ),  $Re = 2000$ . Simulação  $2DFVIII$ .

igual a um comprimento de onda fundamental ( $L_x = \lambda_a$ ).

Staquet (1995) [85] mostra que a instabilidade próxima ao núcleo amplifica na camada baroclínica apenas para  $Re \geq 1500$ , mas que é possível a amplificação da instabilidade secundária de K-H para  $Re \geq 400$  e quando a estratificação é forte ( $Ri = 0.167$ ).

Smyth (2003)[79] mostra que a instabilidade secundária de K-H, para  $Re$  altos, pode surgir sem a presença da instabilidade próxima ao núcleo. Porém o estudo foi realizado em uma camada de mistura instável.

Nos resultados mostrados acima, ficou evidente que a instabilidade de secundária de K-H se desenvolve na camada baroclínica somente quando ocorre a instabilidade próxima ao núcleo. O que contrasta com a afirmação de Staquet, descrita anteriormente.

Tabela 5.2: Instabilidades secundárias - Comparação com os dados da literatura

		Presente trabalho	Staquet	Smyth
$Re$	$Ri$	instabilidades		
500	0.05	—	—	—
500	0.07	NC - KH	—	—
500	0.07	NC - KH	—	—
500	0.167	NC - KH	—	—
1000	0.167	NC - KH	KH	—
2000	0.07	NC - KH	—	—
2000	0.167	NC - KH	NC - KH	KH

Nas simulações a  $Re = 500$  (2DFV), a instabilidade secundária de K-H aparece tanto para  $Ri = 0.07$  (fraca estratificação) quanto para  $Ri = 0.167$  (forte estratificação). Este é um fato novo, que comprova a precisão do código numérico utilizado.

A comparação dos resultados obtidos, quanto ao surgimento das instabilidades secundárias na camada baroclínica, com os trabalhos de Staquet [85] e Smyth [79] pode ser verificado na Tab. 5.2, onde NC corresponde à instabilidade próxima ao núcleo do turbilhão, e KH à instabilidade secundária do tipo K-H na camada baroclínica.

### 5.4.3 Influência da tridimensionalidade - $Re = 500$ - $Ri = 0.167$

Nesta seção, apresenta-se uma simulação tridimensional, 3DF (Tab. 5.2). O objetivo é mostrar que num domínio tridimensional a instabilidade secundária de K-H ocorre de maneira bidimensional, quando a perturbação da flutuação de velocidade na direção transversal ( $y$ ) é pequena. Esta simulação é realizada a  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.167$ , num domínio de dimensões  $(L_x, L_y, L_z) = (14, 5, 14)$ , com uma grade computacional idêntica, no plano  $xz$ , à das simulações bidimensionais a  $Re = 500$ , com  $(n_x, n_y, n_z) = (512, 32, 513)$  pontos. É empregada a mesma condição inicial utilizada nas simulações bidimensionais para as componentes do campo de perturbações  $u'$  e  $w'$  e para a componente transversal  $v'$  é utilizado um ruído branco.



Propositalmente, o ruído branco utilizado para forçar o modo transversal tem uma pequena amplitude (de  $10^{-6}$ ), a fim de que a condição inicial transversal não tenha uma forte influência sobre a instabilidade secundária. Nas simulações realizadas no capítulo 7, também é verificado que a instabilidade secundária de K-H ocorre no plano  $xz$ .

A Figura 5.21 mostra o campo de vorticidade e cortes longitudinais (plano  $xz$ ,  $y = 1.5$ ) do campo de vorticidade transversal  $\omega_y$ . Nesta Figura, constata-se que a instabilidade secundária de K-H na camada baroclínica é bidimensional.

Segundo Thorpe (1985) [91], para que se desenvolva a instabilidade secundária de K-H não haveria necessidade de introduzir movimentos tridimensionais na camada de mistura, que são característicos de um escoamento turbulento. Os resultados desta simulação confirmam a hipótese de Thorpe. Staquet (1995) [85], também, conjectura que estas instabilidades aceleram a transição à turbulência da camada de mistura fortemente estratificada. Os resultados obtidos estão em total acordo com Staquet e Thorpe.

Observa-se, ainda, na Fig. 5.21 que, após o emparelhamento dos turbilhões de K-H, surge a vorticidade negativa e a instabilidade próxima ao núcleo do novo turbilhão amplifica ( $t = 48$ ). Esta instabilidade propaga-se para a camada baroclínica, formando dois vórtices secundários bidimensionais de K-H, os quais são bem evidentes no tempo  $t = 60$ , um acima e outro abaixo do turbilhão deformado entre as duas camadas de forte vorticidade. No tempo  $t = 64$ , os vórtices secundários de K-H saturam e são perturbados pela instabilidade translativa, para formar os vórtices longitudinais.

A evolução da camada de mistura estratificada pode ser observada na Fig. 5.22, onde são mostrados os planos longitudinais, a  $y = 1.5$ , do campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Verifica-se, na figura, que o comportamento do escoamento é idêntico ao observado na simulação  $2DFV_D$  (Fig.5.8) até o tempo anterior ao aparecimento dos vórtices longitudinais ( $t = 64$ ).

As Figuras 5.23 e 5.24 apresentam a transição à turbulência da camada de mistura dos tempos  $t = 56$  a  $t = 90$ , através das isosuperfícies do critério  $Q$ , onde se observa a formação dos vórtices longitudinais após a saturação do turbilhão primário de K-H ( $t = 64$ ) e dos vórtices secundários de K-H ( $t = 68$ ).

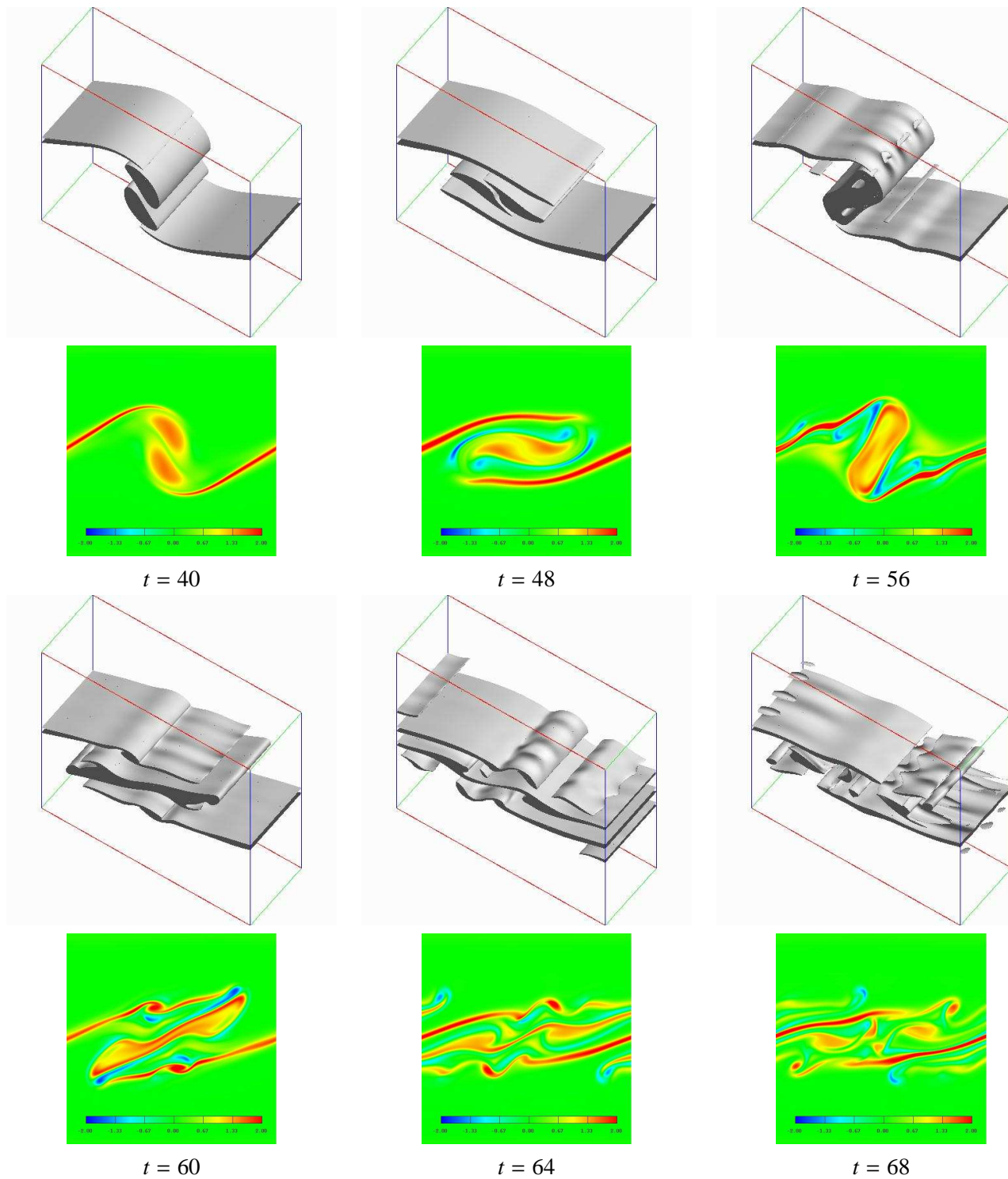


Figura 5.21: Campo de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ) e planos longitudinais a  $y = 1.5$ . Simulação 3DF,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.167$ .

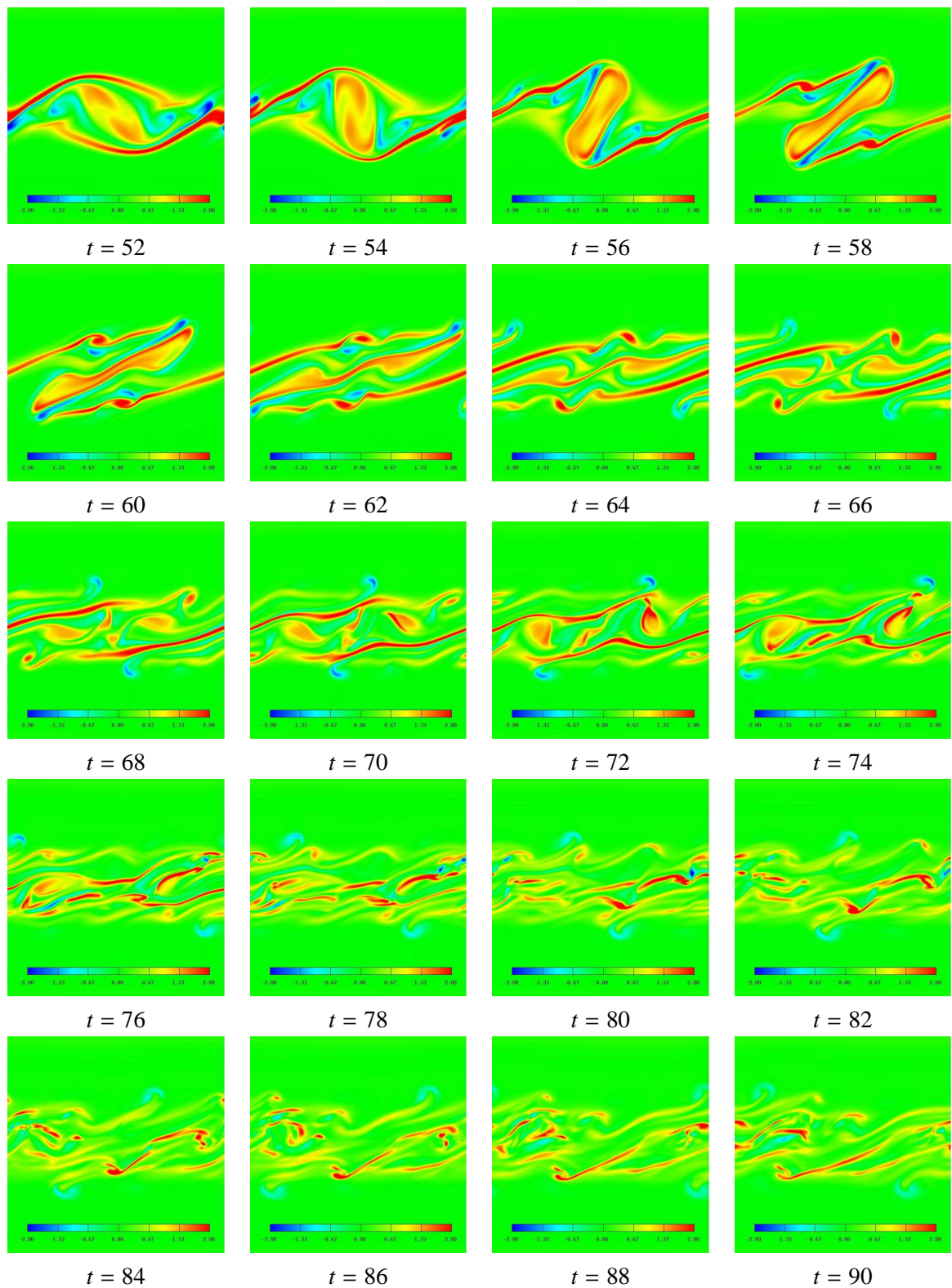


Figura 5.22: Planos longitudinais a  $y = 1.5$  de vorticidade transversal ( $\omega_y$ ). Simulação 3DF,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.167$ .

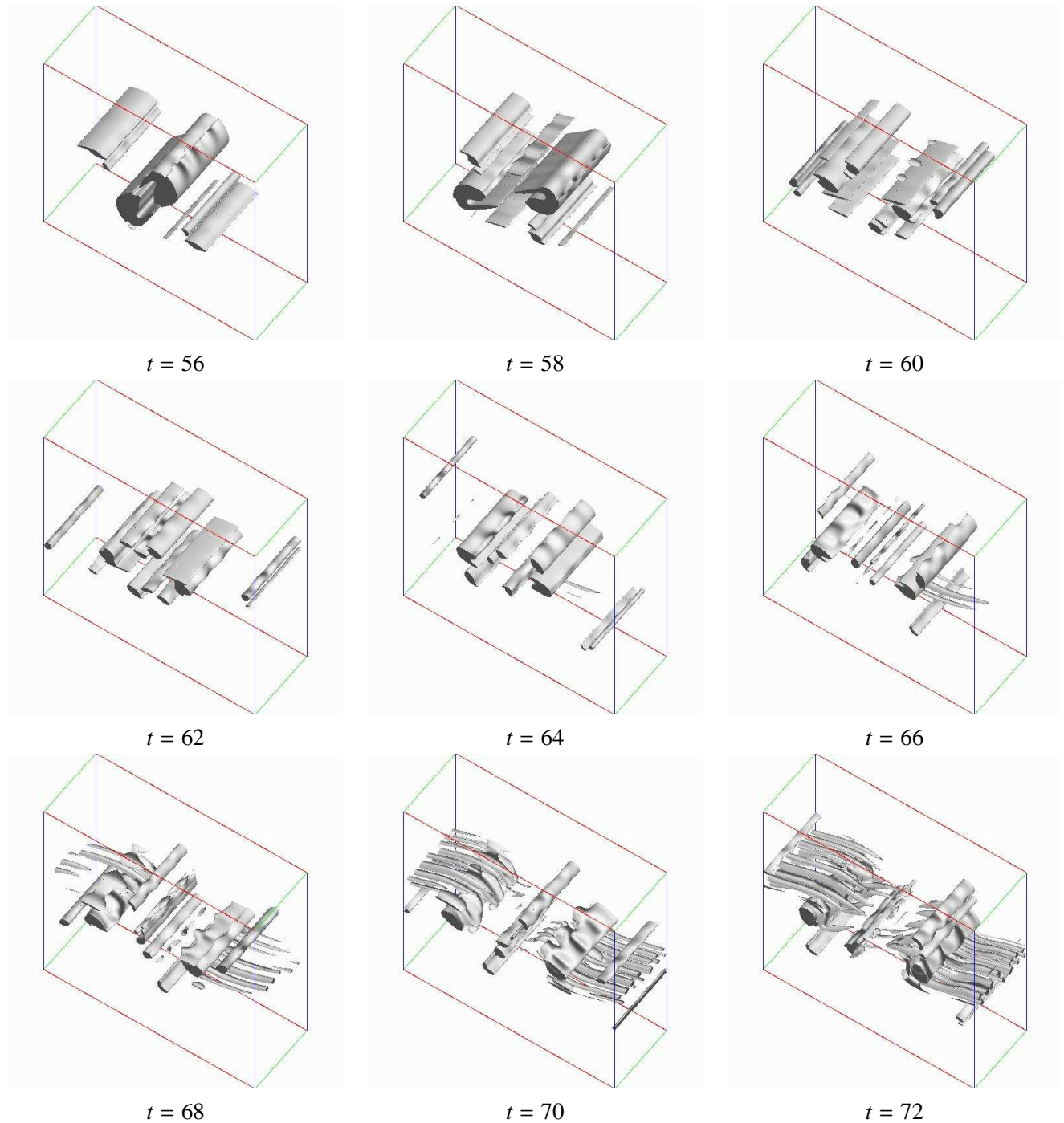


Figura 5.23: Isosuperfícies de  $Q = 0.2$ . Simulação 3DF,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.167$ .

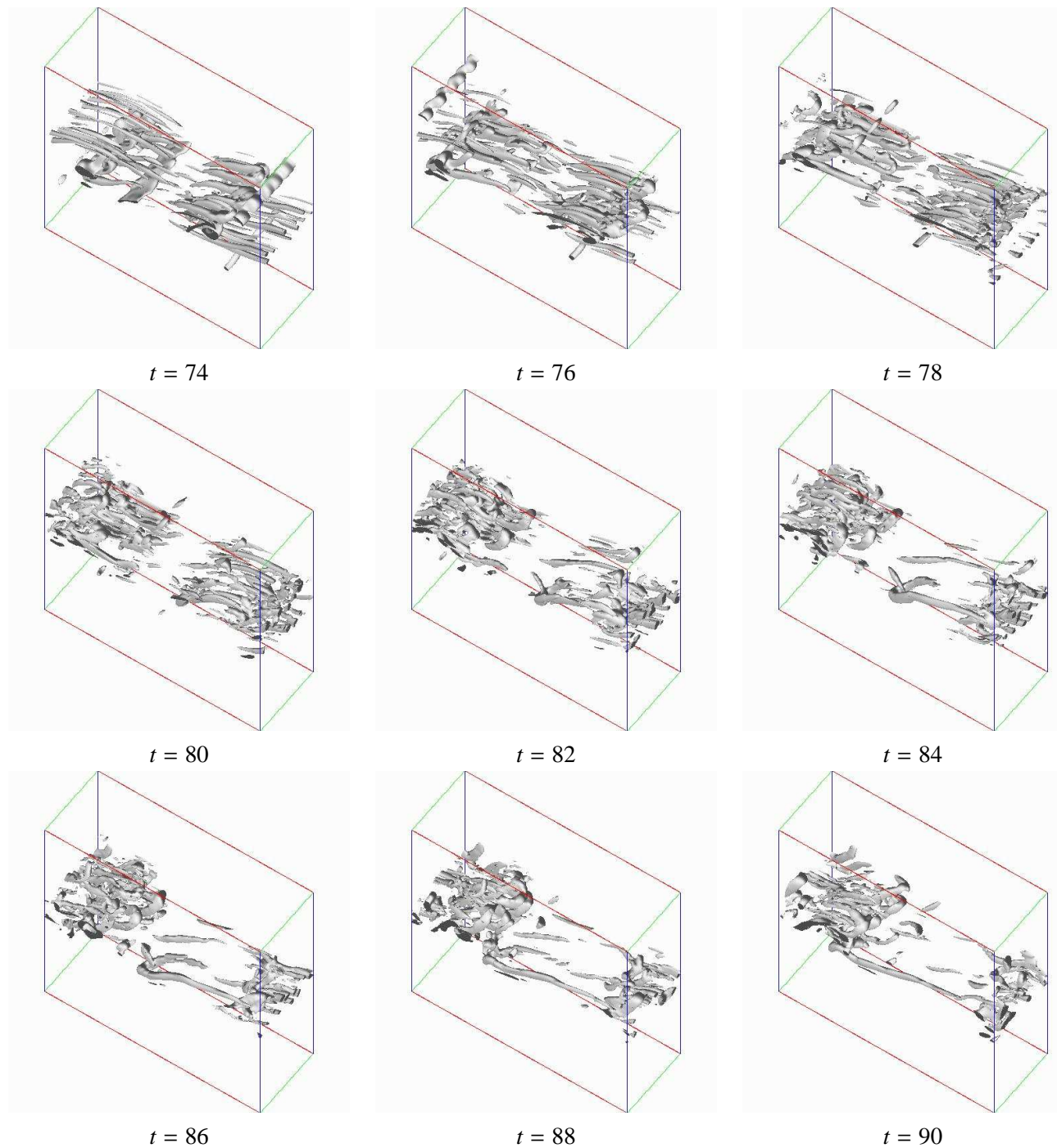


Figura 5.24: Isosuperfícies de  $Q = 0.2$ . Simulação  $3DF$ ,  $Re = 500$ ,  $Ri = 0.167$ .

## Capítulo 6

# Camada de mistura tridimensional. Formação dos vórtices longitudinais

Nos capítulos anteriores foi investigado um primeiro estágio da transição à turbulência de uma camada de mistura bidimensional estavelmente estratificada. Um segundo estágio da transição à turbulência ocorre devido à formação de vórtices longitudinais, que se desenvolvem após a saturação dos vórtices primários de Kelvin-Helmholtz (K-H). Neste capítulo investiga-se qualitativamente a natureza deste segundo estágio da transição à turbulência nas camadas de mistura tridimensional homogênea e estratificada.

Nas últimas décadas foram realizados estudos experimentais (Bernal & Roshko [5], Lasheras *et al.* [46], Lasheras & Choi [47]) e numéricos (Lin & Corcos [53], Metcalfe *et al.* [60], Comte *et al.* [13], Moser & Rogers [64], Rogers & Moser [71]) com a finalidade de investigar a transição à turbulência em camadas de mistura não estratificadas (homogêneas). Nestes trabalhos ficou evidente a existência de uma instabilidade secundária que desencadeia a formação de vórtices longitudinais na região entre os turbilhões de K-H.

À medida que os turbilhões bidimensionais de Kelvin-Helmholtz crescem e atingem a máxima amplitude, os movimentos tridimensionais começam a se manifestar. Geralmente, aparecem primeiro na parte central do núcleo dos turbilhões, depois na periferia deste núcleo e por último na região entre os turbilhões.

A análise de estabilidade secundária de Klaassen & Peltier (1991)[39] e as simulações numéricas diretas, de um simples turbilhão de K-H, de Caulfield & Peltier (2000) [10], mostram que o aumento da estratificação intensifica a dominância da instabilidade tridimensional centrada no núcleo (instabilidade elíptica) sobre a instabilidade centrada na região entre os turbilhões (instabilidade hiperbólica).

As simulações de Smyth (1999) [78] e Smyth & Moum (2000*a*, 2000*b*) [80, 81], em camada de mistura estratificada, mostram fortes movimentos tridimensionais se desenvolvendo no núcleo dos turbilhões durante o processo de emparelhamento, enquanto a camada baroclínica permanece bidimensional.

Os resultados de Cortesi *et al.* (1998, 1999) [17, 18], entretanto, sugerem que o processo de

tridimensionalização é muito sensível à forma da perturbação inicial.

Na maioria dos estudos realizados para investigar a formação dos vórtices longitudinais em camadas homogêneas, é consagrada a teoria de Pierrehumbert & Widnall (1982) [70], a qual sugere que a *instabilidade translativa* é a responsável pelo surgimento dos vórtices longitudinais. Esta instabilidade tridimensional é caracterizada por uma oscilação transversal em fase com os turbilhões de K-H (Fig. 6.1). O comprimento de onda transversal,  $\lambda_y$ , mais instável é da ordem de  $2/3$  do comprimento de onda longitudinal,  $\lambda_x$ .

Pierrehumbert (1986) [69] e Waleffe (1990) [93] verificaram que a instabilidade translativa é causada pela instabilidade elíptica ocorrendo no núcleo dos turbilhões de K-H. Estes estudos estão em concordância com a análise de Klaassen & Peltier (1991) [39].

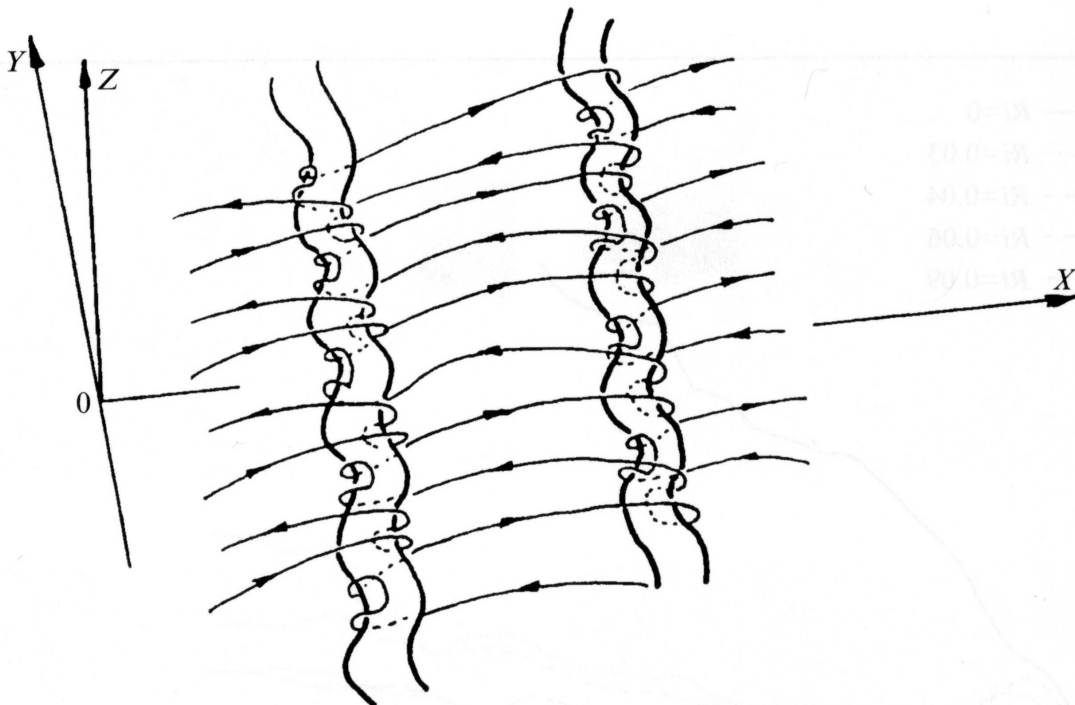


Figura 6.1: Representação esquemática da instabilidade translativa (Lasheras e Choi, 1988 [47]).

Nas camadas de mistura estratificadas, o processo de tridimensionalização é mais complexo que na camada de mistura homogênea, devido às instabilidades causadas por efeitos baroclínicos. Até o momento, muitas são as dúvidas de como os vórtices longitudinais se formam na camada de mistura estratificada e de que modo a estratificação afeta esta formação.

O mecanismo de tridimensionalidade da camada de mistura estratificada está associado, além da instabilidade translativa, com a instabilidade convectiva gravitacional e com a instabilidade secundária cisalhante bidimensional [10, 17, 73]. A instabilidade convectiva gravitacional ocorre durante o enrolamento do turbilhão K-H, formando camadas de diferentes densidades em espiral. A instabilidade secundária cisalhante surge devido à componente transversal do torque baroclínico, o gradiente de densidade longitudinal, e forma a camada baroclínica. Ambos

os casos foram citados na seção 2.2.2.

A estratificação afeta a formação dos vórtices longitudinais. Tal fenômeno ocorre devido aos gradientes de densidade, que contribuem com um mecanismo extra de geração ou destruição de vorticidade local, por meio do torque baroclínico.

O objetivo deste capítulo é mostrar o mecanismo de formação dos vórtices longitudinais na camada de mistura tridimensional estratificada e homogênea. Primeiramente, verificar de que maneira estes vórtices são afetados pela estratificação, realizando testes com diferentes números de Richardson,  $Ri = 0, 0.1, 0.2$ . Em segundo lugar analisar como a condição inicial para a flutuação de velocidade transversal ( $v'$ ) altera a formação dos vórtices longitudinais. E finalmente investigar a influência que o comprimento transversal do domínio tem no desenvolvimento dos vórtices longitudinais.

## 6.1 Parâmetros físicos e numéricos das simulações 3D - $Re = 200$

Os parâmetros das simulações tridimensionais são sumarizados na Tabela 6.1. Os nomes na primeira coluna referem-se à nomenclatura dada à simulação de acordo com as condições iniciais impostas ao escoamento. Desta forma, "3DF" refere-se ao escoamento tridimensional com condição inicial forçada para as três componentes de flutuações de velocidade ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ) e "3DFR" refere-se ao escoamento com condição inicial forçada para as flutuações de velocidade  $u'$  e  $w'$  e um ruído branco para a flutuação de velocidade transversal  $v'$ .

O parâmetro  $\epsilon_i$  representa a amplitude da perturbação (Eq. 3.15, 3.16 e 3.17) adicionada ao perfil de velocidade inicial para o modo fundamental ( $i = 1$ ), modo subharmônico ( $i = 2$ ) e modo transversal ( $i = 3$ ). Para a flutuação de velocidade transversal pode-se ter: um ruído branco, de amplitude  $0.01\%U$  (3DFRI) ou  $0.1\%U$  (3DFRII e 3DFRIII), ou uma condição forçada dada pela Eq. (3.16) (3DF). Todas as simulações são realizadas a número de Reynolds,  $Re = 200$ .



Tabela 6.1: Parâmetros físicos e numéricos das simulações tridimensionais -  $Re = 200$ 

Simulação	$Ri$	Domínio $L_x \times L_y \times L_z$	Grade $n_x \times n_y \times n_z$	Amplitude ( $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ )
$3DFI_A$	0	$14 \times 10.5 \times 14$	$128 \times 96 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.01% $U$ )
$3DFI_B$	0.1	$14 \times 10.5 \times 14$	$128 \times 96 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.01% $U$ )
$3DFI_C$	0.2	$14 \times 10.5 \times 14$	$128 \times 96 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.01% $U$ )
$3DFII_A$	0	$28 \times 10.5 \times 28$	$256 \times 96 \times 256$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.01% $U$ )
$3DFII_B$	0.1	$28 \times 10.5 \times 28$	$256 \times 96 \times 256$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.01% $U$ )
$3DFII_C$	0.2	$28 \times 10.5 \times 28$	$256 \times 96 \times 256$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.01% $U$ )
$3DFIII_A$	0	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$3DFIII_B$	0.1	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$3DFIII_C$	0.2	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; 0.1% $U$ )
$3DFRI_A$	0	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; ruído)
$3DFRI_B$	0.1	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; ruído)
$3DFRI_C$	0.2	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$	(1% $U$ ; 0.1% $U$ ; ruído)
$3DFRII$	0.1	$14 \times 28 \times 14$	$128 \times 256 \times 129$	(1% $U$ ; 0.001% $U$ ; ruído)
$3DFRIII_A$	0	$14 \times 42 \times 14$	$128 \times 384 \times 129$	(1% $U$ ; 0.001% $U$ ; ruído)
$3DFRIII_B$	0.05	$14 \times 42 \times 14$	$128 \times 384 \times 129$	(1% $U$ ; 0.001% $U$ ; ruído)
$3DFRIII_C$	0.1	$14 \times 42 \times 14$	$128 \times 384 \times 129$	(1% $U$ ; 0.001% $U$ ; ruído)
$3DFRIII_D$	0.15	$14 \times 42 \times 14$	$128 \times 384 \times 129$	(1% $U$ ; 0.001% $U$ ; ruído)
$3DFRIII_E$	0.2	$14 \times 42 \times 14$	$128 \times 384 \times 129$	(1% $U$ ; 0.001% $U$ ; ruído)

## 6.2 Influência do número de Richardson

A transição à turbulência da camada de mistura não estratificada ocorre com a formação de tubos de vórtices longitudinais que se desenvolvem depois da saturação dos turbilhões primários K-H. Estes vórtices longitudinais originam-se a partir de condições iniciais tridimensionais aleatórias ou forçadas. Na camada de mistura não estratificada, um par de vórtices longitudinais de sinais opostos (contra-rotativos) são formados para cada comprimento de onda transversal (Fig. 6.2). Na camada de mistura estratificada, os detalhes das estruturas tridimensionais e de que modo elas interagem ainda não são bem conhecidos [10, 17, 73].

A transição na camada de mistura tridimensional primeiramente se processa como verificado na simulação  $2DFII$ : a evolução da instabilidade de K-H e a formação dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz ocorre de maneira inteiramente bidimensional. Simultaneamente, durante a saturação do turbilhão K-H, inicia o crescimento das instabilidades tridimensionais, as quais levam à formação de vórtices longitudinais. Como já verificado nos capítulos anteriores, a estratificação estável afeta o desenvolvimento das instabilidades bidimensionais. Nesta seção investiga-se a influência que a estratificação tem no desenvolvimento das instabilidades e na formação dos vórtices longitudinais, variando apenas o número de Richardson na simulação  $3DFI$ .

Os resultados a seguir referem-se às simulações  $3DFI_A$  (caso não estratificado,  $Ri = 0$ ),  $3DFI_B$  (média estratificação,  $Ri = 0.1$ ) e  $3DFI_C$  (forte estratificação,  $Ri = 0.2$ ) realizadas a

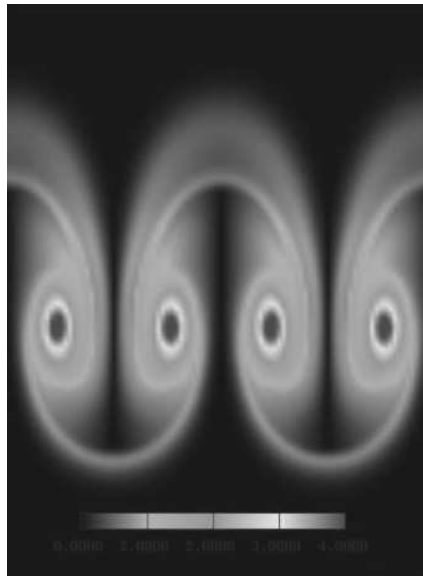


Figura 6.2: Vórtices contra-rotativos, corte transversal dos vórtices longitudinais.

número de Reynolds  $Re = 200$ . O domínio em estudo tem um comprimento transversal ( $L_y$ ) de  $2/3$  do comprimento longitudinal ( $L_x$ ), com a finalidade de forçar o modo mais amplificado na direção transversal e obter a instabilidade translativa.

Ao perfil de velocidade inicial é adicionada uma perturbação tridimensional dada pelas equações (3.15), (3.16) e (3.17). As visualizações tridimensionais são apresentadas para os três números de Richardson num mesmo instante de tempo e com isosuperfícies do módulo da vorticidade  $\|\omega\| = 0.25\omega_i$ .

Na Figura 6.3, as três configurações são semelhantes quanto ao tipo de fenômeno físico que ocorre no tempo  $t = 9.52$ , mostrando a formação de dois comprimentos de onda longitudinais, caracterizando a instabilidade de K-H, gerada pela amplificação do modo fundamental da perturbação inicial. No tempo  $t = 19.04$ , para  $Ri = 0$ , onde o campo de densidade é um escalar passivo, dois turbilhões primários de K-H (vórtices transversais, quasi-bidimensionais) se formam após o enrolamento da camada. Para  $Ri = 0.1$ , começa o enrolamento da camada de vorticidade, enquanto que para  $Ri = 0.2$  apenas duas ondas são visíveis na camada de vorticidade. O efeito estabilizante da estratificação no desenvolvimento da instabilidade primária de K-H é marcante. A análise de estabilidade linear mostra que, para um mesmo comprimento de onda, conforme o número de Richardson aumenta, a taxa de amplificação das perturbações decresce. Este fato ocorre porque a estratificação afeta os movimentos verticais diminuindo a intensidade das oscilações, reduzindo a energia cinética e, assim, retardando a formação das estruturas K-H [55].

O modo da perturbação transversal e o modo subharmônico da perturbação longitudinal tornam-se importantes para  $Ri = 0$  e  $Ri = 0.1$ , respectivamente, no instante de tempo  $t = 38.09$ . Entretanto, para o caso mais estratificado ( $Ri = 0.2$ ) a camada apresenta-se praticamente estável. Como o modo subharmônico é mais amplificado que o transversal (Tab. 6.1), ocorre

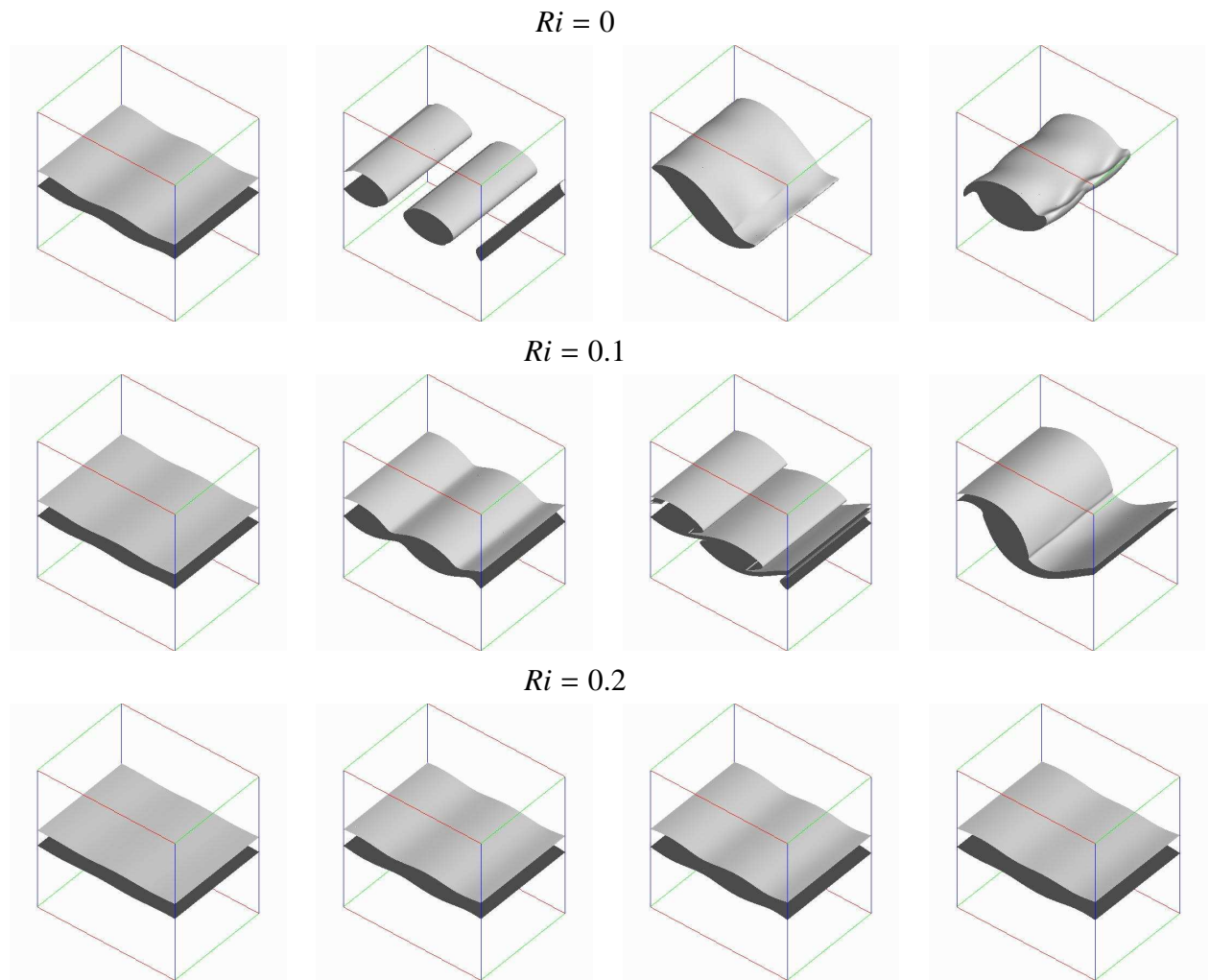


Figura 6.3: Isosuperfícies do módulo da vorticidade,  $\|\omega\| = 0.5$ , para os tempos 9.52, 19.04, 28.57 e 38.09 (da direita para a esquerda). Simulação *3DFI*,  $Re = 200$ .

antes o emparelhamento dos turbilhões que a formação dos vórtices longitudinais. Na Figura 6.4 são apresentadas as simulações para os tempos 47.62, 57.14, 66.67 e 76.19. Os vórtices longitudinais, no caso não estratificado, surgem entre os tempos 47.62 e 57.14, dois para cada comprimento de onda, compostos de dois vórtices contra-rotativos orientados na direção perpendicular ao escoamento, e aproximadamente a  $45^\circ$  em relação à horizontal. Os turbilhões longitudinais de mesmo sinal estão distanciados de aproximadamente  $0.6\lambda_x$ , confirmando a teoria de Pierrehumbert & Widnall [70]. Os vórtices longitudinais mostram alto grau de coerência e estendem-se sobre todo o domínio.

No caso de média estratificação ( $Ri = 0.1$ ), o vórtice resultante do emparelhamento se encontra entre duas finas camadas de vorticidade, que são regiões de fortes gradientes longitudinais de densidade e de forte vorticidade transversal: as camadas baroclínicas. O gradiente de densidade longitudinal reforça a vorticidade na região entre os turbilhões e a atenua no núcleo dos mesmos, evitando que a instabilidade translativa amplifique. Neste estágio, a instabilidade cisalhante induzida baroclinicamente domina a dinâmica do escoamento em relação à

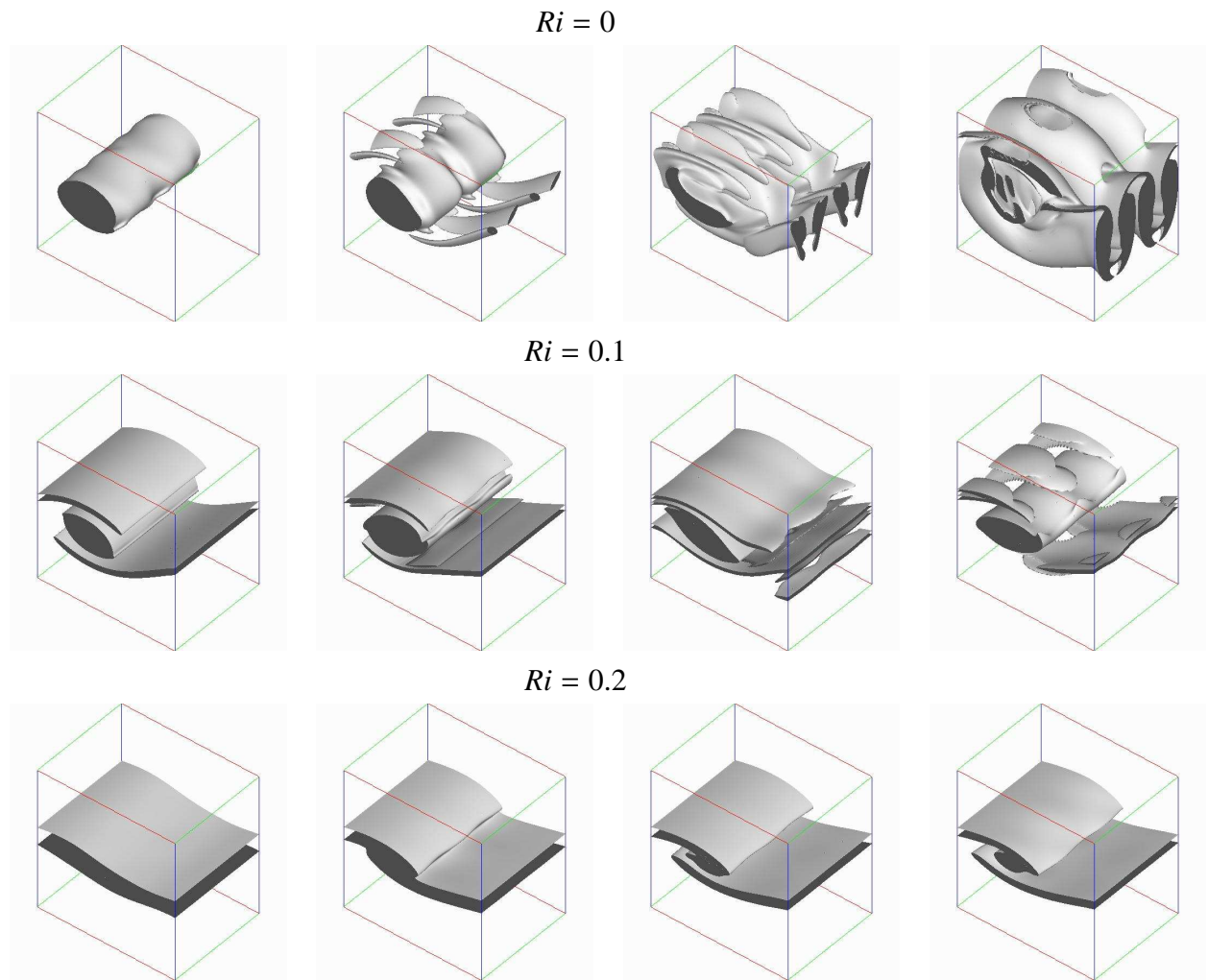


Figura 6.4: Isosuperfícies do módulo da vorticidade,  $\|\omega\| = 0.5$ , para os tempos  $t = 47.62$ ,  $57.14$ ,  $66.67$  e  $76.19$  (da direita para a esquerda). Simulação  $3DFI$ ,  $Re = 200$ .

instabilidade convectiva gravitacional. A instabilidade translativa, resultante da amplificação da perturbação transversal, atua sobre o vórtice formado a partir do processo de emparelhamento ( $t = 76$ ), enquanto que para  $Ri = 0.2$  o escoamento é ainda bidimensional. O aumento do número de Richardson no escoamento impede que o turbilhão K-H alcance sua máxima amplitude, sature e desenvolva a instabilidade translativa.

A influência da forte estratificação ( $Ri = 0.2$ ) torna-se visível na redução do fluxo médio turbulento vertical de massa, definido por  $\langle \rho' w' \rangle$ , mostrados para um mesmo tempo e diferentes números de Richardson ( $Ri = 0; 0.1; 0.2$ ) na Fig. 6.5. As forças de empuxo inibem o crescimento da energia cinética turbulenta, principalmente o crescimento da velocidade vertical. Assim, observa-se uma grande redução do fluxo de massa vertical com o aumento da estratificação. O mesmo observa-se para o fluxo longitudinal de massa,  $\langle \rho' u' \rangle$ .

A Figura 6.6 mostra as isosuperfícies do módulo da vorticidade para os tempos  $t = 104.77$  e  $114.29$ , para os dois casos estratificados considerados. Observa-se uma deformação na estrutura do vórtice longitudinal, causada por efeitos baroclínicos. Provavelmente, esta deformação

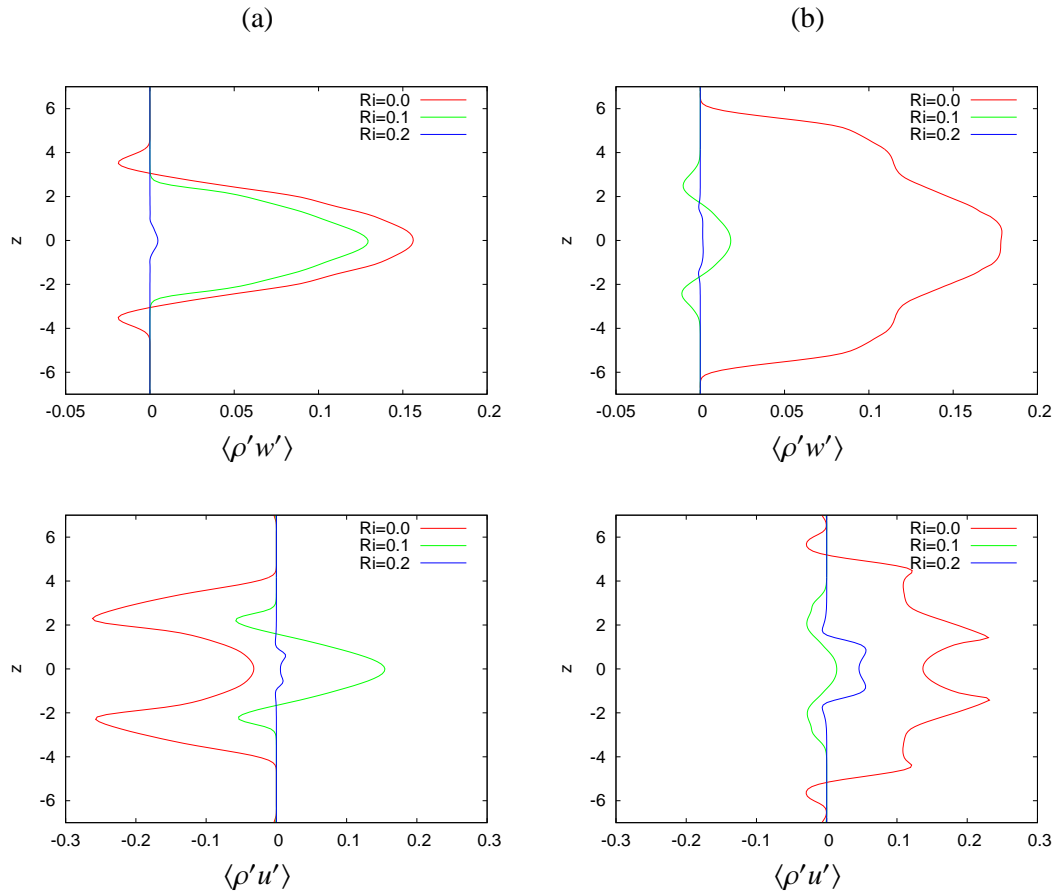


Figura 6.5: Fluxo turbulento vertical de massa,  $\langle \rho' w' \rangle$ , e fluxo horizontal de massa,  $\langle \rho' u' \rangle$ , para  $Ri = 0, 0.1$  e  $0.2$ . Simulação *3DFI*,  $Re = 200$ . (a)  $t = 38.09$ ; (b)  $76.19$

ocorra devido a instabilidade geradora dos movimentos *3D* ter uma taxa de amplificação maior na região entre turbilhões do que no núcleo. Quando o número de Richardson varia entre 0.08 e 0.12, a teoria de estabilidade secundária de Klaassen & Peltier (1991) [39] prevê uma taxa de amplificação maior para a instabilidade centrada entre os turbilhões (hiperbólica), do que para a instabilidade centrada no núcleo do turbilhão (elíptica/translativa). Para  $Ri = 0.2$  e  $t = 114.29$ , como a perturbação transversal é forçada, o efeito estabilizante da estratificação não inibe totalmente a formação dos vórtices longitudinais.

Para uma melhor identificação das estruturas coerentes é utilizado o critério  $Q$  (Eq. 3.36) [23, 34]. A Figura 6.7 mostra a comparação entre as isosuperfícies do módulo da vorticidade e as isosuperfícies determinadas pelo critério  $Q$ , para o caso não estratificado, no tempo  $t = 76.19$ , e para os casos estratificados para os tempos  $t = 104.77$  ( $Ri = 0.1$ ) e  $t = 114.29$  ( $Ri = 0.2$ ). Observa-se uma alteração na estrutura dos vórtices longitudinais, devido aos efeitos da estratificação. A deformação do vórtice longitudinal, provavelmente causada pelos efeitos da instabilidade convectiva gravitacional, pode ser provocada pela desestabilização das camadas de densidade durante o enrolamento dos vórtices K-H e pela instabilidade cisalhante bidimensional, gerada pelo gradiente longitudinal de densidade [10].

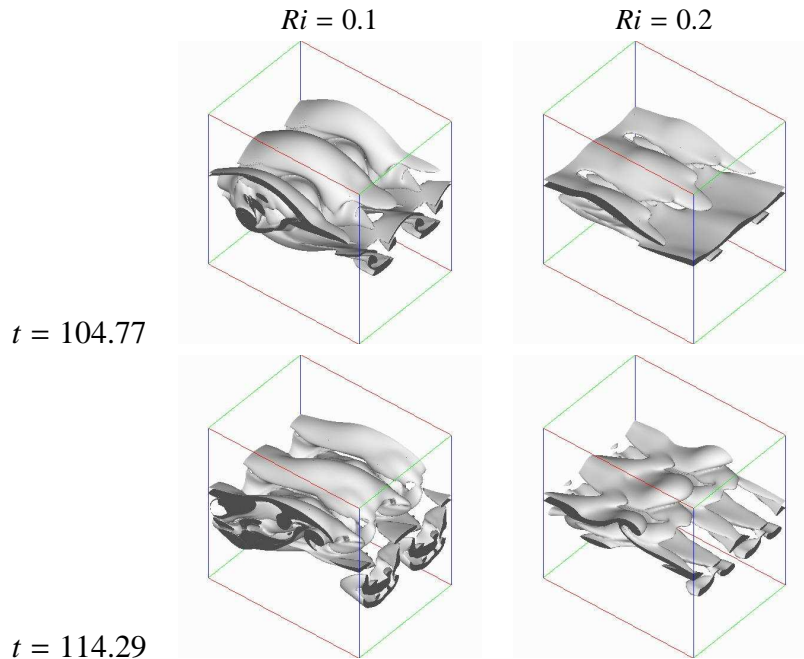


Figura 6.6: Isosuperfícies do módulo da vorticidade,  $\|\omega\| = 0.7$ , para  $t = 104.77$  e  $114.29$ . Simulação  $3DFI$ ,  $Re = 200$ .

A tridimensionalização da camada de mistura é dominada pela condição forçada do modo subharmônico e do modo transversal. Como o subharmônico cresce antes que o modo transversal, ocorre um atraso no tempo, na formação dos vórtices longitudinais. Tal fato pode ser observado comparando o caso a  $Ri = 0$  com os casos a  $Ri = 0.1$  e  $0.2$  na Fig. 6.8. No caso não estratificado, para  $t = 76.19$ , são visíveis dois pares de vórtices longitudinais, com alto grau de coerência, que se estendem por todo o domínio longitudinal. Para  $Ri = 0.1$  verifica-se que a instabilidade translativa atua no vórtice resultante do processo de emparelhamento e, no tempo posterior, os vórtices longitudinais são menos desenvolvidos que para  $Ri = 0$ , e não ocupam toda a extensão longitudinal do domínio. Eles localizam-se próximos ao núcleo do vórtice principal, o que concorda com os resultados experimentais de Showalter *et al.* (1994) [73]. Para  $Ri = 0.2$ ,  $t = 76.19$ , a instabilidade translativa praticamente não deforma o turbilhão de K-H e no tempo  $t = 104.77$  os vórtices longitudinais, ainda, são pouco evidentes.

Cortes transversais ao escoamento principal (a  $x$  constante) das simulações  $3DFI$  nos tempos  $76.19$  e  $t = 104.77$  e para  $Ri = 0$ ,  $Ri = 0.1$  e  $Ri = 0.2$ , são mostrados na Fig. 6.9. A extensão longitudinal do domínio varia de  $0 \leq x \leq 14$ . Para  $Ri = 0$  são identificados os vórtices longitudinais por sua forma de cogumelos, devido à presença de pares de vórtices contra-rotativos. Por outro lado, verifica-se que o desenvolvimento vertical dos vórtices longitudinais é fortemente afetado pela estratificação.

Para o escoamento com  $Ri = 0$ , observa-se, nos cortes transversais, que os vórtices longitudinais têm a extensão vertical de quase todo o domínio. Quando o escoamento é estratificado o efeito estabilizante da densidade faz com que os movimentos de menores escalas se concentrem

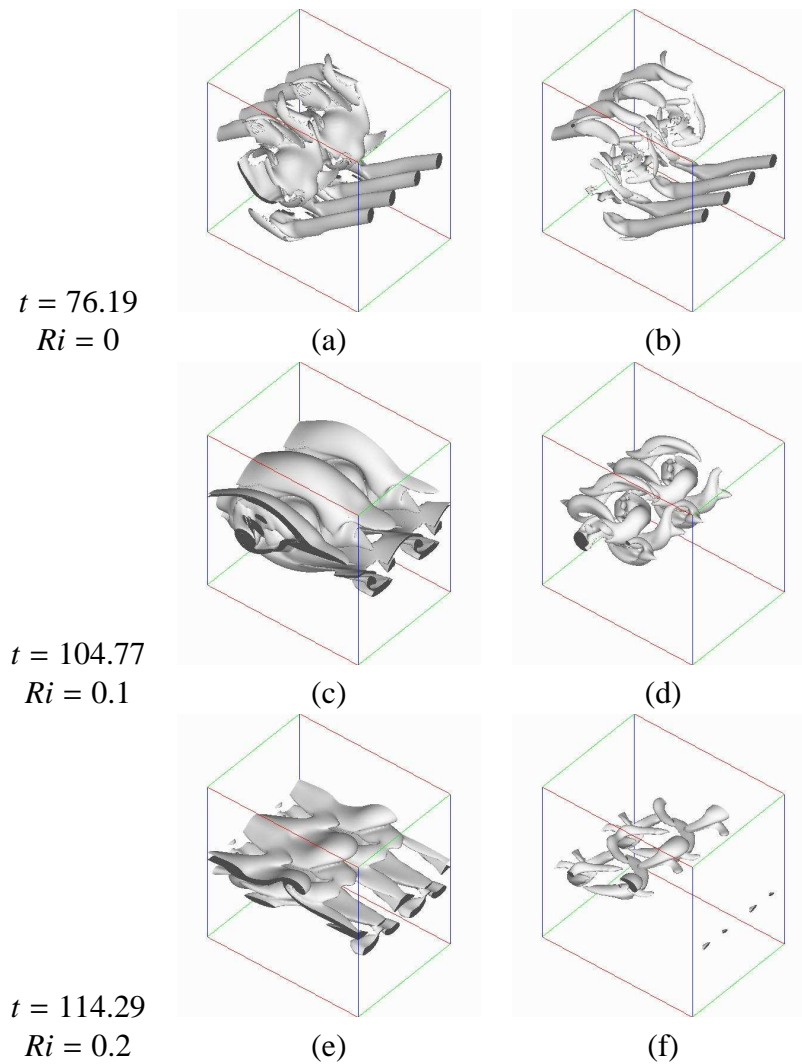


Figura 6.7: (a) Isosuperfícies de  $\|\omega\| = 2.5$ ; (b) Isosuperfícies de  $Q = 1$ ; (c) Isosuperfícies de  $\|\omega\| = 0.7$ ; (d) Isosuperfícies de  $Q = 0.2$ ; (e) Isosuperfícies de  $\|\omega\| = 0.7$ ; (f) Isosuperfícies de  $Q = 0.08$ .

sobre uma extensão vertical da ordem do tamanho dos turbilhões primários K-H. O escoamento acima e abaixo da extensão ocupada inicialmente pelos turbilhões K-H permanece irrotacional.

Os efeitos baroclínicos intensificam a vorticidade entre os turbilhões K-H, modificando o tipo de perturbação que pode se desenvolver nesta região. Neste local, os movimentos verticais são reduzidos e, desta forma, é atenuado o desenvolvimento da instabilidade necessária para a formação dos vórtices contra-rotativos. No tempo 76.19, ainda não há formação de estruturas longitudinais para  $Ri = 0.2$  e os planos transversais a  $x = 4.37$  e  $x = 6.56$ , para  $Ri = 0.1$ , mostram pontos de alta vorticidade, indicando o início da formação de estrutura.

Verifica-se que para o tempo 104.14, os vórtices longitudinais aparecem nos perfis de  $x = 2.18, 4.37, 6.56$  e  $8.75$  para  $Ri = 0.1$ , e bem menos intensamente para  $Ri = 0.2$  (Fig. 6.9). Os perfis mostram que a estratificação afeta a formação das estruturas longitudinais mesmo quando a condição inicial é forçada. Foram realizados testes com as mesmas condições iniciais

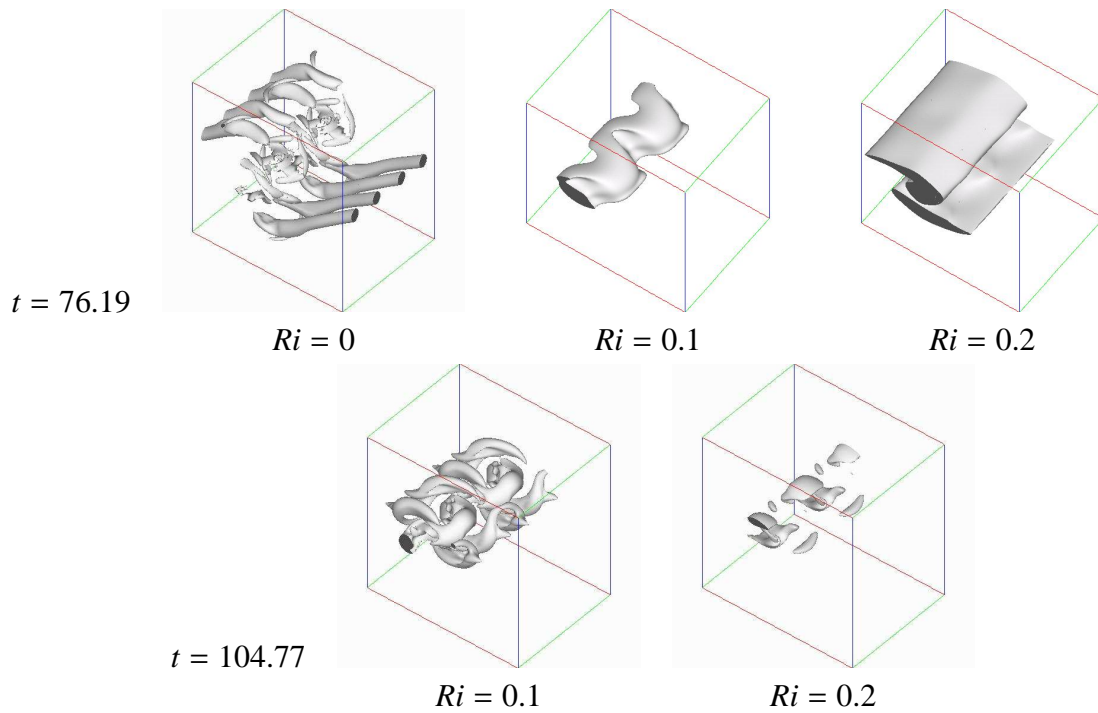


Figura 6.8: Isosuperfícies do critério Q. Simulação 3DFI,  $Re = 200$ .

das simulações 3DFI, porém em um domínio onde  $L_x = 28$ , e quatro vórtices podem se formar (3DFII, Tab. 6.1). Foi observado uma dinâmica idêntica à das simulações 3DFI, e que a estratificação inibe a amplificação do segundo subharmônico, como também foi observado nas simulações bidimensionais.



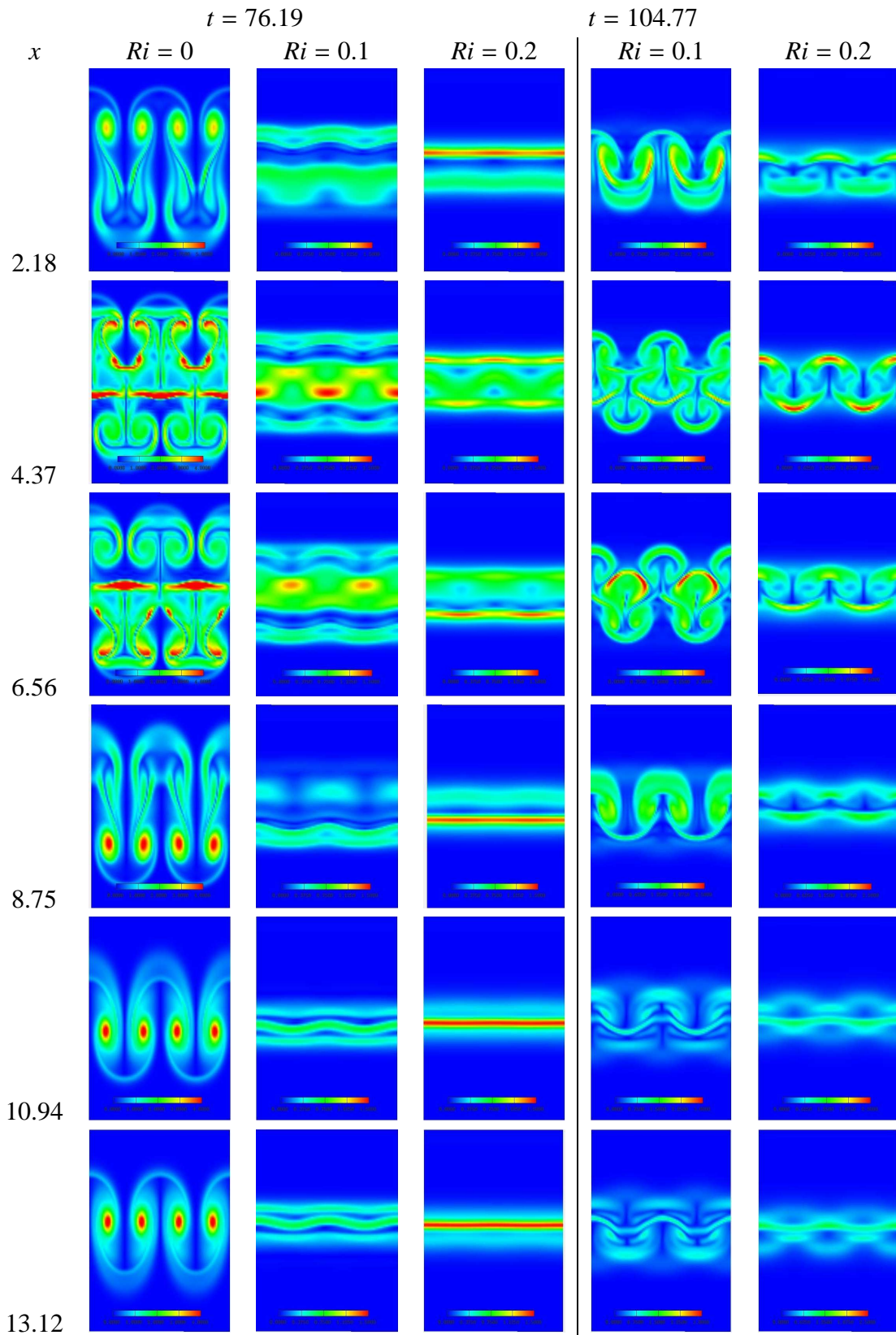


Figura 6.9: Cortes transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade referentes as simulações  $3DFI_A$ ,  $3DFI_B$  e  $3DFI_C$ , para os tempos  $t = 76.17$  e  $t = 104.77$ ,  $Re = 200$ .

## 6.3 Influência da condição inicial

Esta seção tem por objetivo verificar a influência da condição inicial na formação dos vórtices longitudinais. Para atingir o objetivo proposto, são apresentados os resultados das simulações realizadas empregando dois tipos diferentes de condição inicial para a flutuação de velocidade transversal ( $v'$ ), e uma mesma condição inicial forçada para as outras componentes ( $u'$ ,  $w'$ ) (Tab.6.1). O comprimento transversal do domínio é igual a duas vezes o comprimento de onda fundamental ( $L_y = 2\lambda_x = 14$ ).

Como a diferença na configuração dos escoamentos é devida unicamente à condição inicial, os resultados obtidos são apresentados no tempo para o qual a mesma estrutura aparece em ambos casos analisados. Assim, o tempo correspondente ao resultado da simulação *3DFRI* não corresponde ao tempo da simulação *3DFII*, para  $Ri = 0$  e  $Ri = 0.1$ .

Os resultados obtidos da simulação *3DFRI* (com ruído branco como condição inicial para a flutuação de velocidade transversal) são comparados com os resultados obtidos da simulação *3DFII* (com condição forçada para  $v'$ ) para diferentes níveis de estratificação ( $Ri = 0$ ,  $Ri = 0.1$  e  $Ri = 0.2$ ).

Na seção anterior e nas simulações bidimensionais verificou-se que a estratificação retarda a formação do turbilhão de K-H, o processo de emparelhamento e o surgimento dos vórtices longitudinais.

Tal fato, aliada ao tipo de condição inicial utilizada, determinará o tempo para o qual ocorre a formação das estruturas tridimensionais. Assim, uma condição inicial aleatória demora mais em selecionar o modo mais amplificado do que uma forçada. Por esta razão, os vórtices longitudinais na simulação *3DFRI* levam um tempo maior para se formar do que na simulação *3DFII*.

As simulações a  $Ri = 0$  são mostradas na Fig. 6.10. A teoria prevê [70] que em um escoamento homogêneo o comprimento de onda transversal é de  $2/3\lambda_x$ . Observa-se que o comprimento de onda transversal para ambas simulações é próximo de  $1\lambda_x$ . Este resultado seria esperado, já que o domínio de cálculo é periódico na direção transversal. A condição de periodicidade induz uma seleção dos modos mais amplificados de acordo com o comprimento transversal do domínio. Somente um domínio de cálculo com comprimento transversal suficientemente grande atenuaria a influência da condição de periodicidade.

A condição inicial interfere no desenvolvimento da instabilidade translativa e, conseqüentemente, na formação das estruturas longitudinais. Mas, mesmo assim, em ambos casos são formados dois pares de vórtices contra-rotativos. A condição inicial para  $v'$  claramente determina o tempo para o qual o escoamento torna-se tridimensional, com as instabilidades bidimensionais e tridimensionais competindo por dominância [17].

Na presença do modo transversal forçado, a instabilidade translativa ocorre antes e o escoamento é mais organizado do que na presença da perturbação aleatória. Por isso, maiores diferenças na formação dos vórtices longitudinais podem ser esperadas em função da condição

inicial para  $v'$ .

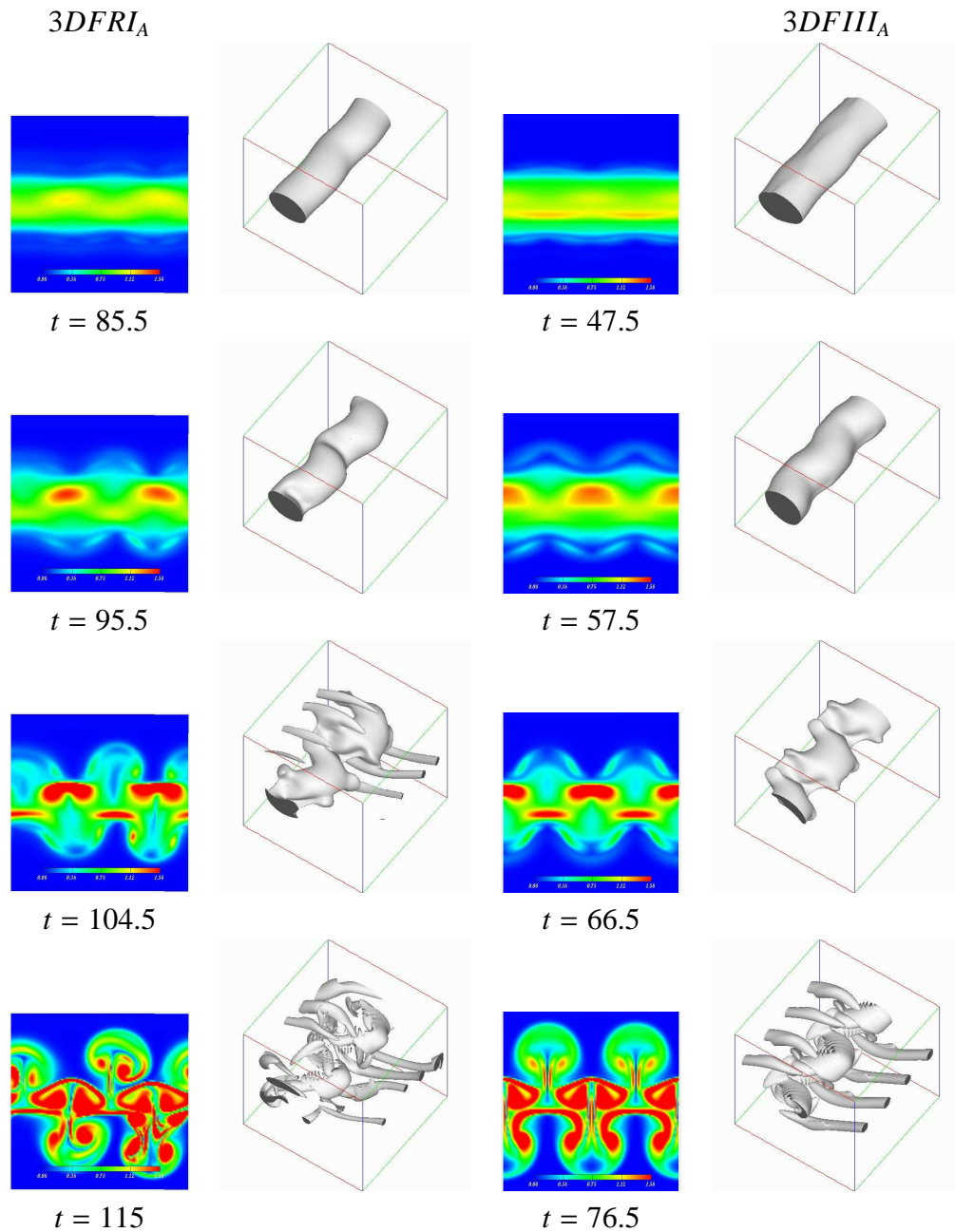


Figura 6.10: Cortes transversais ( $x = 6$ ) de isosuperfícies de vorticidade para  $\|\omega\| = 0.5$ , e isosuperfícies de  $Q = 0.1$ . Simulação:  $3DFRI_A$  (à direita) e  $3DFIII_A$  (à esquerda),  $Ri = 0$ ,  $Re = 200$ .

Para ambas condições iniciais o modo sub-harmônico se manifesta antes que o modo transversal. Observa-se nas Fig. 6.10, 6.11 e 6.12 que o processo de emparelhamento ocorreu antes (o modo sub-harmônico é mais amplificado) que a instabilidade translativa se manifeste. Desta forma, a coerência do escoamento é prolongada.

Pode-se então dizer que a formação dos vórtices longitudinais é fortemente afetada pelo número de Richardson e a condição inicial imposta ao escoamento. Este fato é aparente nos

cortes transversais das Fig. 6.10, 6.11 e 6.12.

A Figura 6.11 mostra que a separação entre os vórtices longitudinais (para  $Ri = 0.1$ ) é próxima a  $1\lambda_x$ , e assim, como para  $Ri = 0$ , maior que o clássico valor obtido pela teoria ( $2/3\lambda_d$ ). Nesta mesma figura, observa-se que os vórtices longitudinais se estendem acima e abaixo do vórtice resultante do processo de emparelhamento, formando os clássicos vórtices *cogumelos* ( $t = 142.5$  (3DFRI) e  $t = 85.5$  (3DFIII)). Estes vórtices são parte de um contínuo *grampo* que envolve o núcleo. A vorticidade é mais forte na região entre os turbilhões e diretamente acima e abaixo do núcleo. O estiramento nesta região parece ser mais forte que dentro do núcleo. Isto é, novamente, devido ao gradiente de densidade longitudinal que diminui a vorticidade no núcleo dos turbilhões de K-H enquanto aumenta na região entre eles.

Este efeito pode ser observado na Fig. 6.13 ( $Ri = 0$ ,  $Ri = 0.1$ ,  $Ri = 0.2$ ) o qual é mais facilmente visível na camada a forte estratificação ( $Ri = 0.2$ ) do que na moderada ( $Ri = 0.1$ ).

Ainda na Figura 6.11, observa-se que na simulação com o modo transversal forçado (3DFIII), no tempo  $t = 104.5$ , ocorre uma amplificação das estruturas indicando uma passagem à turbulência.

No caso fortemente estratificado ( $Ri = 0.2$ ), os vórtices longitudinais são fracamente visíveis para o caso com modo transversal forçado (Fig. 6.12). A forte estratificação impede que a instabilidade translativa ocorra, quando  $Re = 200$ . Esta tem um efeito estabilizante no crescimento da instabilidade primária de K-H, o que resulta em uma redução da instabilidade convectiva gravitacional e da instabilidade translativa.

Sabe-se que o desenvolvimento dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz é de natureza bidimensional até a sua saturação. Uma dúvida surge em relação à nova estrutura encontrada no escoamento estratificado, a camada baroclínica: até que ponto a camada baroclínica é bidimensional? Com base nos resultados obtidos, pode-se afirmar que a camada baroclínica se mantém estritamente bidimensional até o instante em que se manifestam os movimentos tridimensionais (Fig. 6.13). Na Figura 6.13 são apresentados, como um exemplo, dois planos longitudinais ( $y = 4$  e  $y = 10$ ), onde mostram que a configuração do escoamento é independente da posição  $y$ .

Campos de vorticidade em planos transversais mostrando os vórtices longitudinais desenvolvidos, podem ser visualizados na Fig. 6.14 para  $Ri = 0$  e  $Ri = 0.1$ .

Nesta seção, sugere-se que a condição inicial é um fator fundamental na evolução das estruturas longitudinais, pois modifica o tempo de tridimensionalização do escoamento, como também foi observado por Cortesi *et al.* (1998) [17].

Para quantificar a influência da condição inicial e da estratificação na dinâmica do escoamento analisa-se o fluxo turbulento vertical de massa para as duas condições iniciais empregadas. Lembra-se que apenas a condição inicial para a flutuação de velocidade transversal é diferente nas simulações analisadas. Neste caso, onde o domínio de cálculo é 3D, o fluxo turbulento vertical de massa é definido como  $\langle \rho' w' \rangle$ , onde  $w'$  é a flutuação de velocidade vertical,  $\langle \rangle$  denota a média espacial,  $\rho' = (\rho - \langle \rho \rangle)$  e  $\langle \rho \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho \, dy dx$ .

A Figura 6.15 mostra que esta diferença na condição inicial altera o fluxo vertical de massa

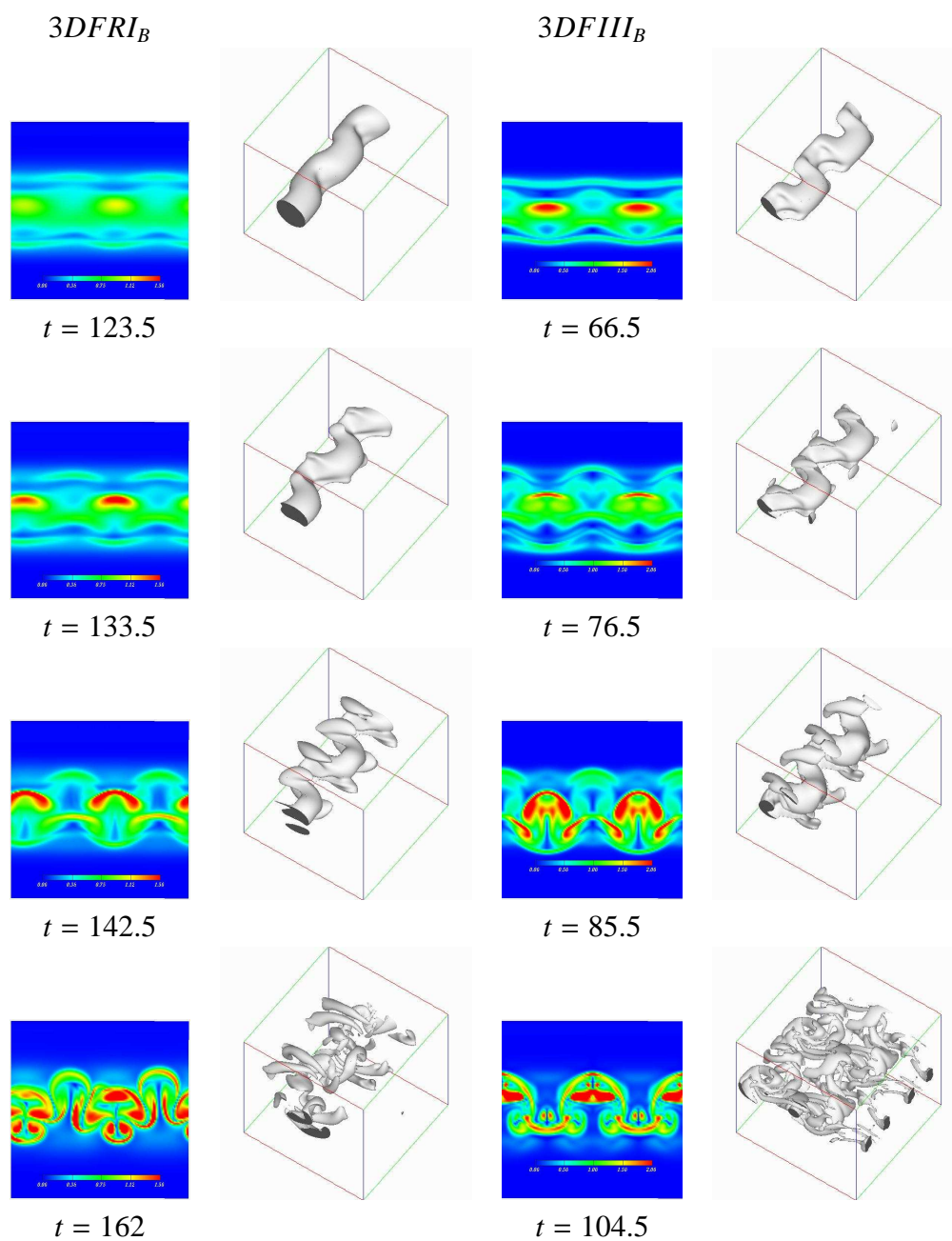


Figura 6.11: Cortes transversais ( $x = 6$ ) de isosuperfície de vorticidade para  $\|\omega\| = 0.5$ , e isosuperfícies de  $Q = 0.1$ . Simulação: *3DFRI<sub>B</sub>* (à direita) e *3DFII<sub>B</sub>* (à esquerda),  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 200$ .

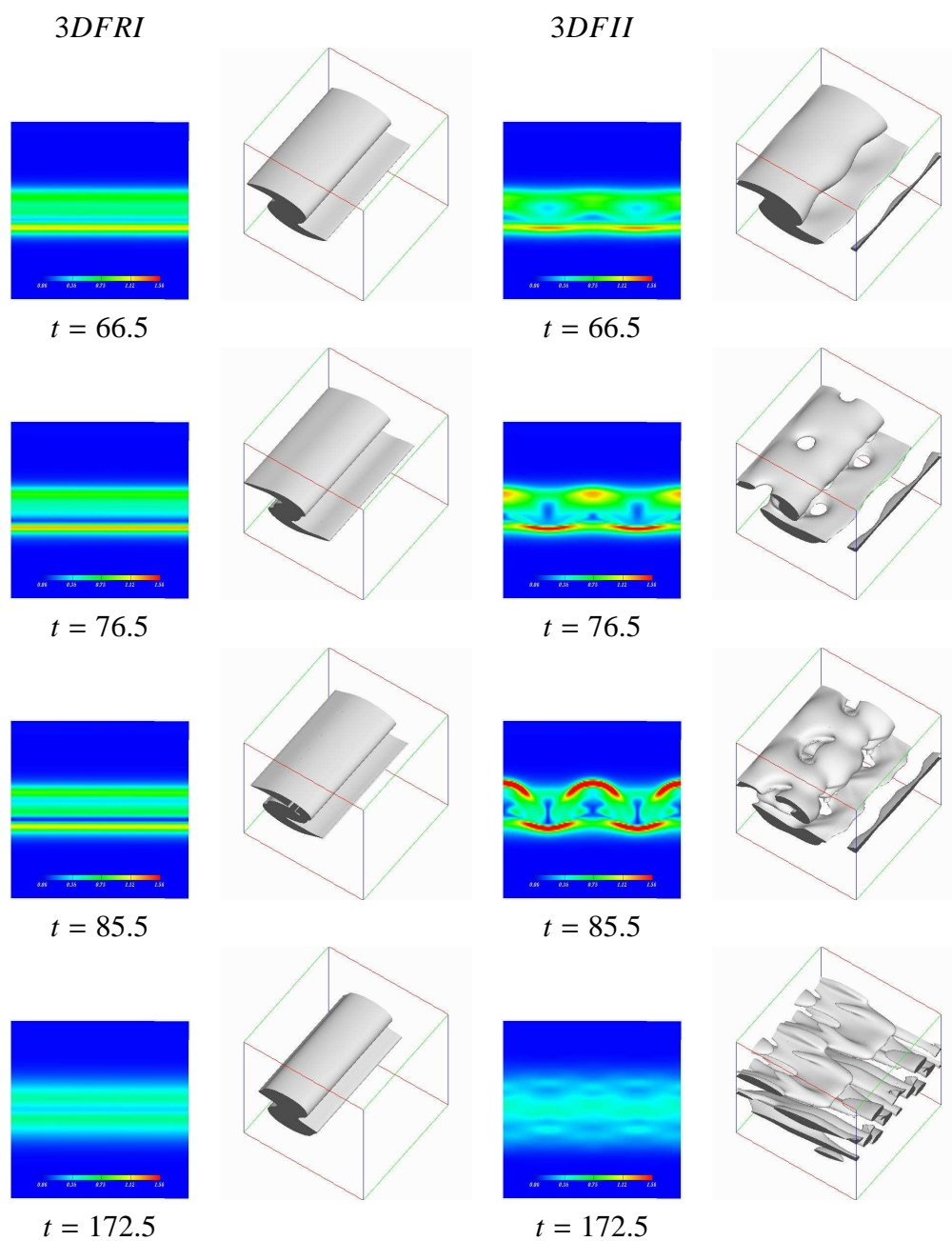


Figura 6.12: Cortes transversais ( $x = 6$ ) de isosuperfície de vorticidade para  $\|\omega\| = 0.5$ , e isosuperfícies de  $Q = 0.1$ . Simulação:  $3DFRI_C$  (à direita) e  $3DFII_C$  (à esquerda),  $Ri = 0.2$ ,  $Re = 200$ .

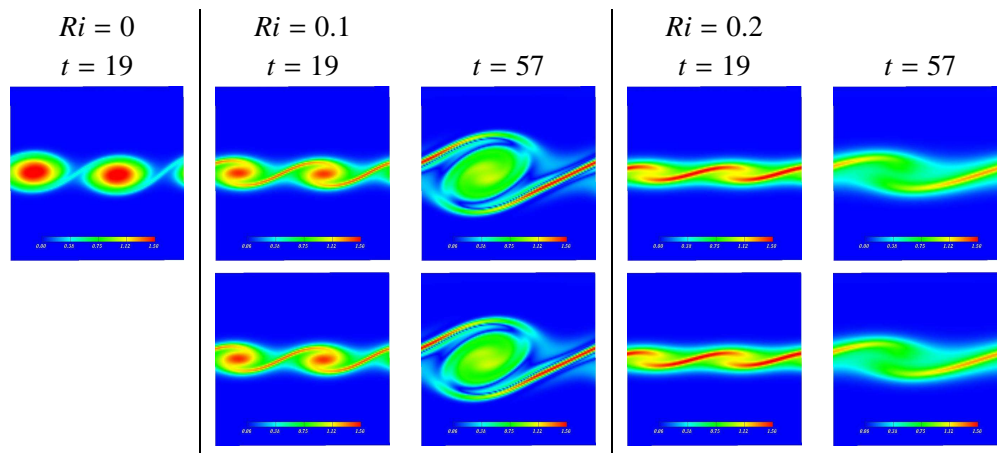


Figura 6.13: Cortes longitudinais para  $y = 4$  (primeira linha) e  $y = 10$  (segunda linha). Simulações  $3DFRII$ ;  $Re = 200$ .

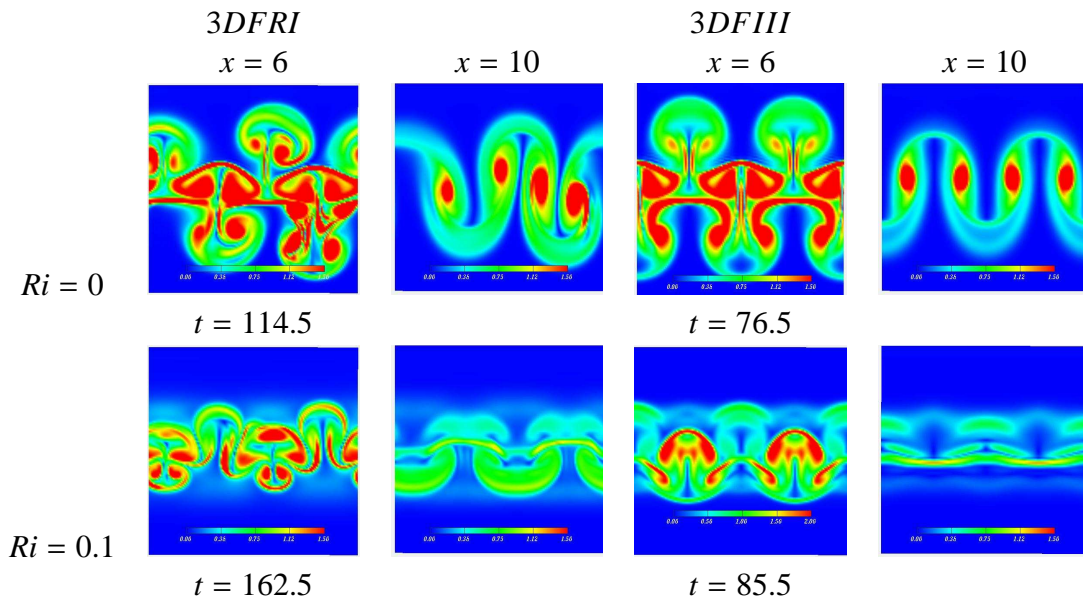


Figura 6.14: Cortes transversais ( $x = 6$  e  $10$ ) de isosuperfícies de vorticidade para  $\|\omega\| = 0.5$ . Simulação:  $3DFRI_A$  ( $Ri = 0$ ),  $3DFRI_B$  ( $Ri = 0.1$ ),  $3DFIII_A$  ( $Ri = 0$ ),  $3DFIII_B$  ( $Ri = 0.1$ );  $Re = 200$ .

de maneira significativa, somente quando a tridimensionalidade do escoamento passa a ser importante (após  $t = 76.5$ ). Enquanto o escoamento é bidimensional apenas a estratificação afeta o fluxo. Comparando as simulações a  $Ri = 0.1$  com as simulações a  $Ri = 0.2$ , mostradas na Fig. 6.16, constata-se o que foi observado anteriormente nas simulações bidimensionais: à medida que o número de Richardson aumenta o fluxo turbulento médio diminui (ver seção 4.2.2).

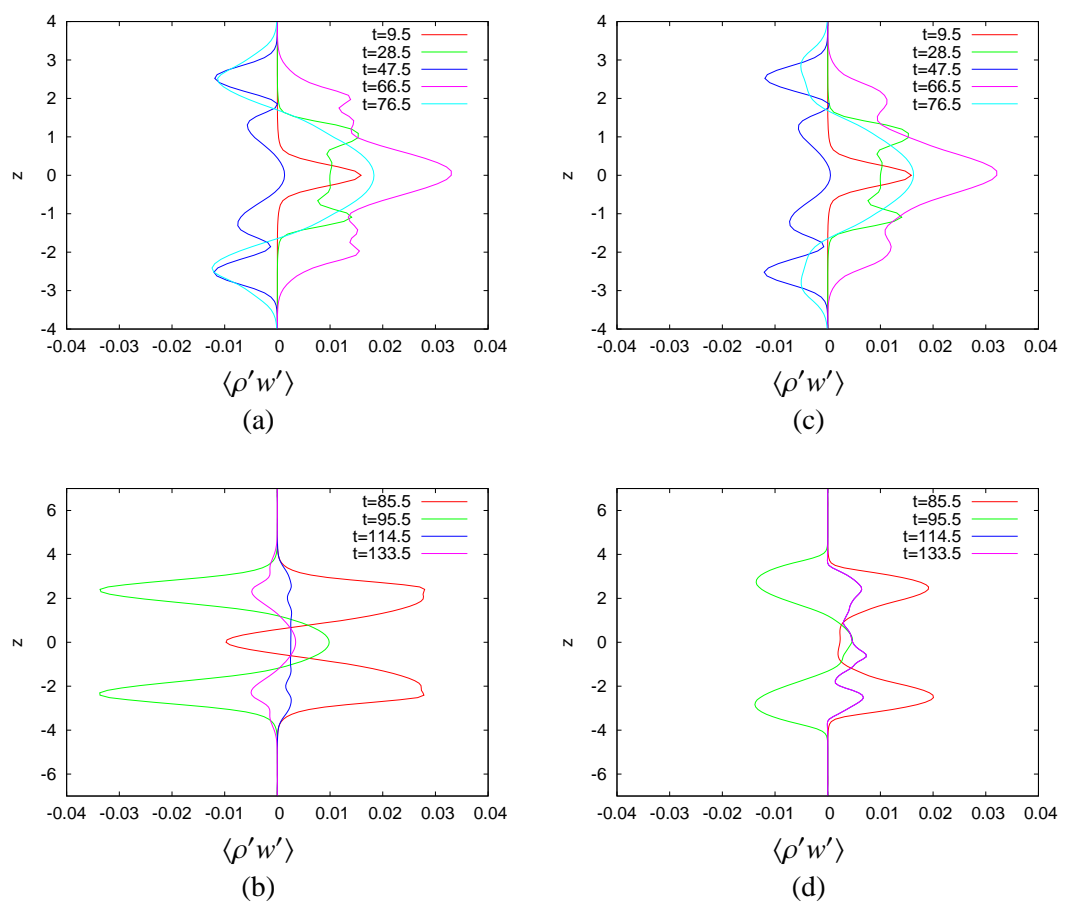


Figura 6.15: Fluxo turbulento vertical de massa,  $\langle \rho' w' \rangle$ . Simulações: (a - b) 3DFRI<sub>B</sub>; (c - d) 3DFIII<sub>B</sub>,  $Ri = 0.1$  e  $Re = 200$ .



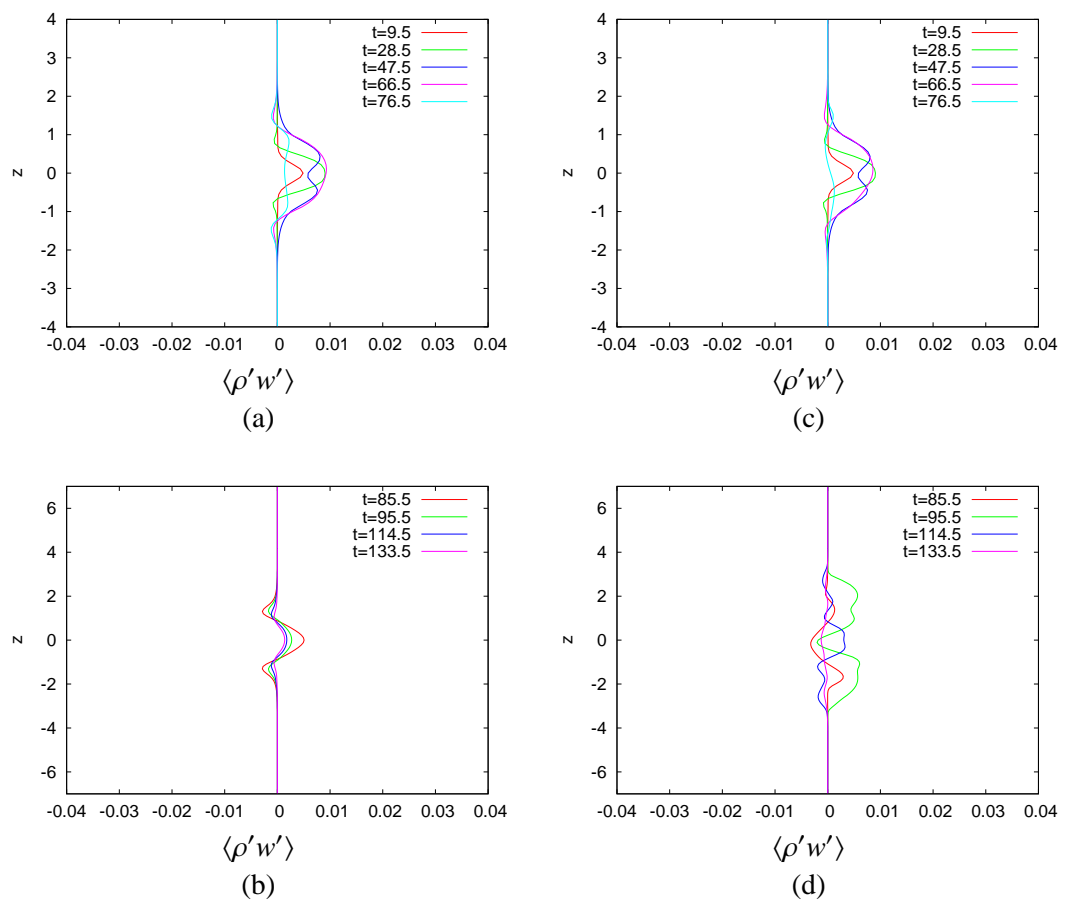


Figura 6.16: Fluxo turbulento vertical de massa,  $\langle \rho' w' \rangle$ . Simulações: (a - b)  $3DFRI_C$ ; (c - d)  $3DFIII_C$ ,  $Ri = 0.2$  e  $Re = 200$ .

## 6.4 Influência do tamanho transversal do domínio

Na seção anterior foi investigada a influência da perturbação transversal no desenvolvimento dos vórtices longitudinais em um domínio cúbico de dois comprimentos de onda fundamental. O objetivo desta seção é mostrar que o comprimento transversal do domínio, junto com a variação do número de Richardson, interfere na formação dos vórtices longitudinais. Para atingir este fim foram realizadas simulações a diferentes números de Richardson ( $Ri = 0; 0.05; 0.1; 0.15$  e  $0.2$ ) em um domínio de cálculo com extensão transversal ( $L_y$ ) seis vezes o comprimento de onda fundamental (Tab.6.1). Na literatura, não há estudos numéricos sobre a influência do domínio transversal na formação dos vórtices longitudinais em escoamentos estratificados. A maioria dos trabalhos, onde são simulados dois vórtices de K-H, estuda a formação dos vórtices longitudinais em domínios onde o comprimento transversal é  $2/3\lambda_x$  ou igual ao comprimento longitudinal.

Para mostrar a influência que o comprimento transversal do domínio tem na formação dos vórtices longitudinais analisa-se, primeiramente, uma simulação sem estratificação. A simulação realizada a  $Ri = 0$  mostra que são gerados fortes vórtices longitudinais pela amplificação do modo transversal (entre  $t = 57.5$  a  $76.5$ ), e são aparentes sete pares de vórtices longitudinais contra-rotativos ( $t = 95.5$ ), como mostra a Fig. 6.17.

Verifica-se que o comprimento de onda associado com os vórtices longitudinais é um pouco menor que o comprimento de onda dos turbilhões de K-H ( $\lambda_x = 7\delta_i$ ), próximo de  $0.8\lambda_x$ . Tal valor se aproxima do predito pela teoria de Pierrehumbert & Widnall [70] de  $0.66\lambda_x$ .

Os resultados encontrados por Cortesi *et al.* [17], para uma camada de mistura homogênea, estão de acordo com a teoria, entretanto o domínio transversal utilizado por eles tem um comprimento igual a  $2/3L_x$ . A imposição da condição de  $L_y = 2/3L_x$  por si só seleciona o modo mais instável, como mostra a simulação *3DFI* da seção 6.2, onde o comprimento de onda transversal encontrado foi de  $0.66\lambda_x$ .

Por outro lado, o resultado apresentado na seção anterior para a simulação *3DFRI<sub>A</sub>* ( $Ri = 0$ ) com  $L_y = 14$ , com condição inicial aleatória para o modo transversal, difere do atual resultado (*3DFRIII<sub>A</sub>*,  $Ri = 0$ , com  $L_y = 42$ ). Na simulação *3DFRI<sub>A</sub>* o comprimento de onda transversal ( $\lambda_y$ ) é igual ao comprimento de onda para os vórtices de K-H ( $\lambda_y = \lambda_x = 7\delta_i$ ), o que contraria a teoria de Pierrehumbert & Widnall, mas está em acordo com os resultados experimentais de Schowalter *et al.* [73]. A Figura 6.18 mostra uma comparação entre o resultado de Schowalter *et al.*, num domínio transversal de dois comprimentos de onda fundamentais, e o resultado obtido da simulação *3DFRI<sub>A</sub>*.

Aumentando o número de Richardson para 0.05 (fraca estratificação) observa-se na Fig. 6.19 que os tubos longitudinais não estão tão organizados ( $t = 124.5$ ) como no caso a  $Ri = 0$  (Fig. 6.17). Esta menor organização do escoamento se deve somente ao efeito da estratificação. Porém, como a estratificação é fraca, verifica-se na Fig.6.19 ( $t = 66.5$ ) que a instabilidade translativa deforma o vórtice principal, e no corte transversal da mesma figura, notam-se seis

pontos de concentração de vorticidade, indicando um comprimento de onda transversal maior que para o escoamento não estratificado (próximo de  $1\lambda_x$ ). Comparando os cortes transversais da Fig. 6.19 com os da Fig. 6.17, há evidências, em  $t = 66.5$ , de que a estratificação atenua a instabilidade na "borda" do vórtice resultante do emparelhamento, e diminui a extensão vertical ocupada pela camada de vorticidade. Este efeito da estratificação foi observado experimentalmente por Schowalter *et. al* [73] para uma camada de mistura a  $Ri = 0.06$  (Fig. 6.20).

Klaassen & Peltier [38, 38], utilizando a análise de estabilidade de um turbilhão de K-H, determinaram que o comprimento de onda transversal decresce em relação ao longitudinal quando  $Ri$  cresce de 0 a 0.04, e que para valores de  $Ri$  maiores do que 0.04 o comprimento de onda transversal não apresenta uma variação significativa desta relação.

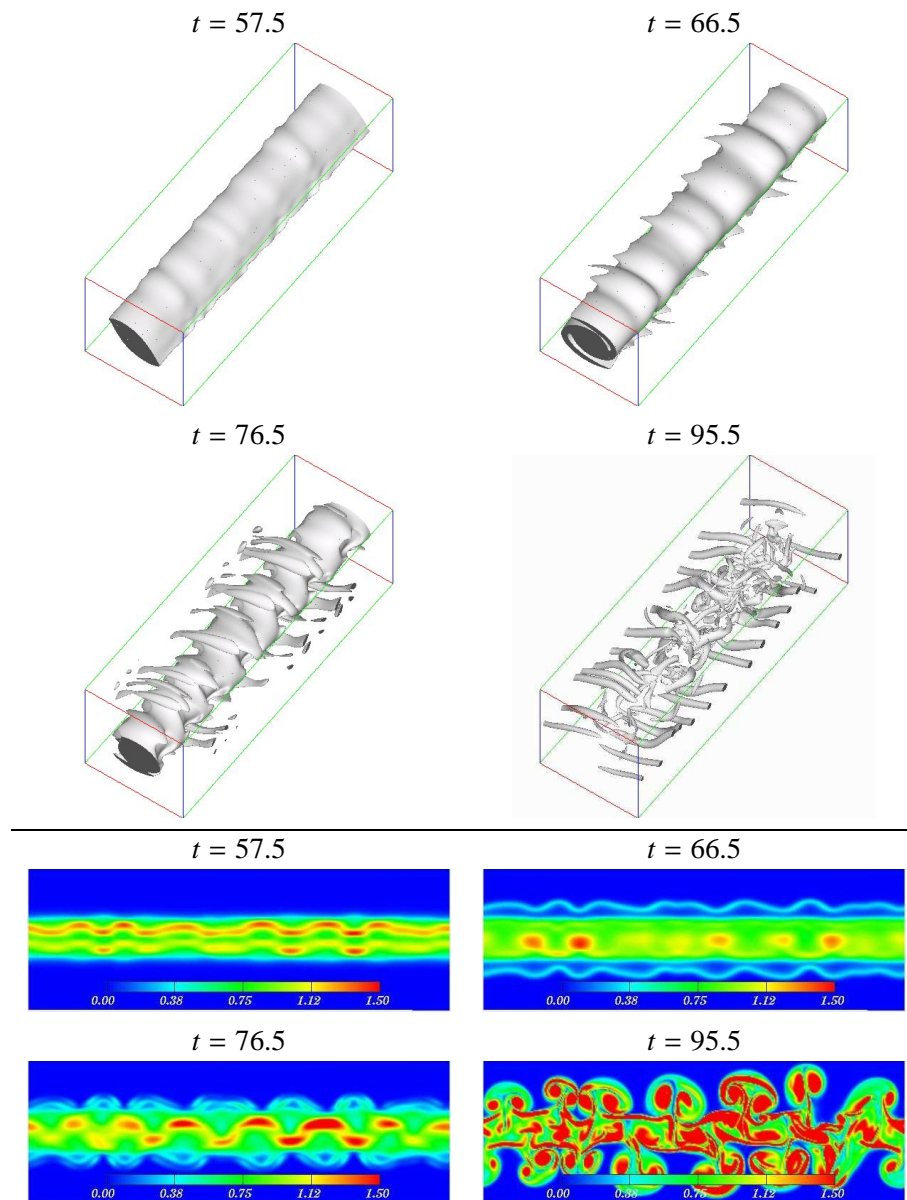


Figura 6.17: Isosuperfícies de  $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação  $3DFR_{III,A}$ ,  $Ri = 0$ ,  $Re = 200$ .

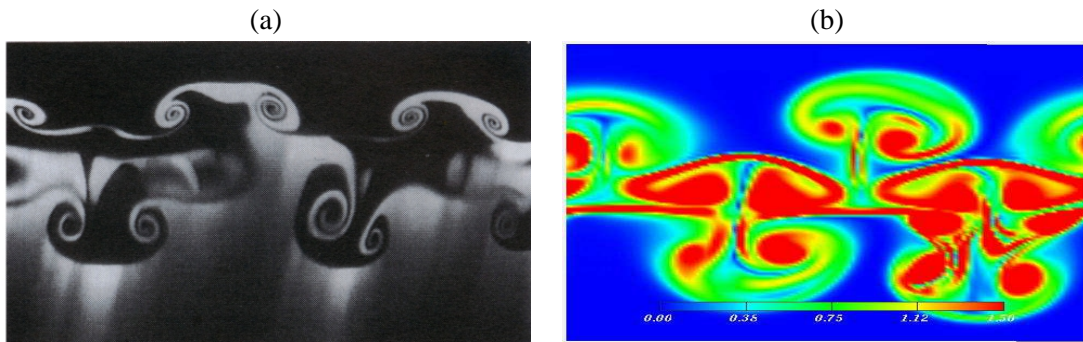


Figura 6.18: (a) Resultado obtido por Schowalter *et al.* [73],  $Ri = 0$ ; (b) Simulação  $3DFRI_A$ ,  $Ri = 0$ .

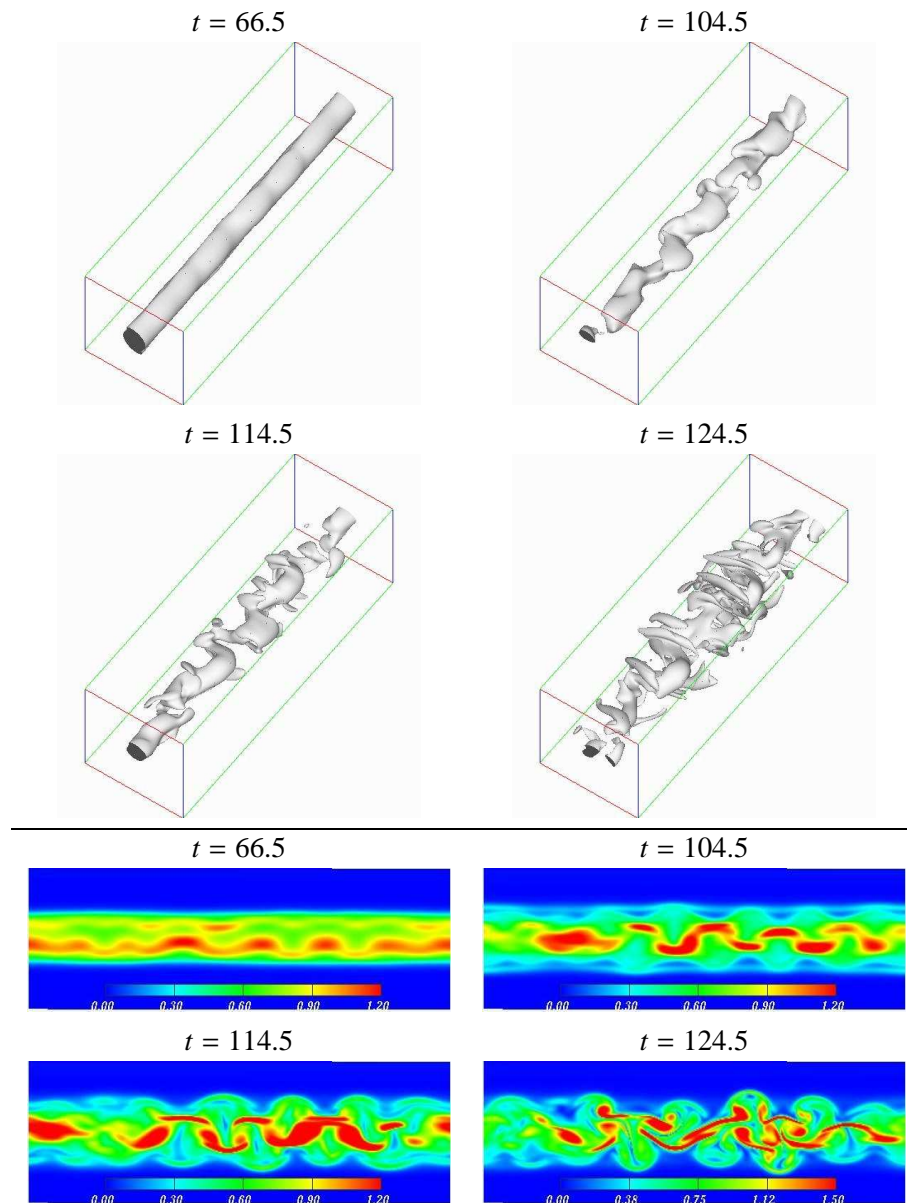


Figura 6.19: Isosuperfícies de  $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação  $3DFRIIIB$ ,  $Ri = 0.05$ ,  $Re = 200$ .

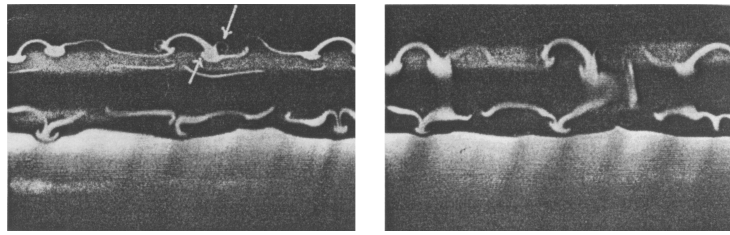


Figura 6.20: Resultado obtido por Schowalter *et al.* [73],  $Ri = 0.06$

A Figura 6.21 mostra a deformação na estrutura dos vórtices longitudinais ( $t = 133.5$  e  $t = 152.5$ ) para  $Ri = 0.1$ . Esta deformação, causada por efeitos baroclínicos, pode ser atribuída ao fato de que, para este nível de estratificação, a instabilidade secundária cisalhante reduz a vorticidade no núcleo do turbilhão e a reforça na região entre eles, formando a camada baroclínica. Este tipo de instabilidade, segundo a análise de Klaassen & Peltier [39], tem alta taxa de crescimento entre  $Ri = 0.08$  e  $Ri = 0.12$ , e se aproxima de zero para  $Ri = 0.22$ .

Desta maneira, a região entre os turbilhões é "mais propícia" ao desenvolvimento das instabilidades geradoras dos vórtices longitudinais do que a região do núcleo do turbilhão, como no caso a  $Ri = 0$  e  $Ri = 0.05$ .

Ainda na Figura 6.21 observa-se que a separação entre os vórtices longitudinais é maior que um comprimento de onda longitudinal (aproximadamente de  $1.2\lambda_x$ ) correspondendo a cinco comprimentos de onda transversal ( $t = 76.5$  e  $t = 114.5$ ). Tal ocorrência pode indicar que outros mecanismos são desencadeados quando um domínio computacional transversal maior que  $2\lambda_a = 14\delta_i$  é usado.

Cortesi *et. al* [17] em suas simulações a  $Ri = 0.1$  encontraram um número de vórtices longitudinais maior do que visualizado na Fig. 6.21 (simulação  $3DFRIII_C$ ). O maior número de vórtices encontrado por eles pode estar relacionado ao escoamento ser fortemente forçado (a amplitude do modo fundamental é de  $2.5\%U$ ), o domínio de cálculo ter uma extensão transversal de  $L_y = 2/3L_x$ , e empregarem um domínio vertical "infinito".

Por outro lado, o resultado da simulação  $3DFRIII_C$  está em acordo com o resultado experimental de Schowalter *et al.* [73], mostrado para  $Ri = 0.09$  na Fig. 6.22, onde a distância entre os vórtices longitudinais é maior que  $1\lambda_x$ .

Para verificar se a diminuição de ondulações que aparecem quando a instabilidade translativa se desenvolve é devida a influência do tamanho transversal do domínio ou do número de Richardson, foi realizada a simulação  $3DFRII$ . Esta simulação, realizada em um domínio computacional onde o comprimento transversal  $L_y = 4\lambda_x = 28$ , a  $Ri = 0.1$ , e nas mesmas condições iniciais da simulação  $3DFRIII_C$  (Fig 6.21), mostra uma deformação dos vórtices longitudinais (Fig. 6.23) e apresenta 4 comprimentos de onda transversais. Pode-se, então, dizer que o aumento do comprimento transversal do domínio de cálculo retarda o desenvolvimento das instabilidades e a formação dos vórtices longitudinais, bem como altera o comprimento de onda transversal, para este nível de estratificação.

Os resultados da simulação  $3DFR_{III_D}$ , a  $Ri = 0.15$ , têm um comportamento atípico em relação às simulações anteriores (Fig. 6.24). Nos tempos  $t = 142.5$  e  $t = 172.5$ , verifica-se que a instabilidade translativa atua no vórtice principal formando seis ondas, de comprimento transversal  $1\lambda_x$ . Os cortes transversais mostram que a vorticidade diminui, e a isosuperfície de  $Q$  no tempo  $t = 218.5$ , apresenta vórtices longitudinais achatados em uma fina camada de vorticidade. A formação das estruturas é atenuada pela estratificação. O efeito do comprimento transversal do domínio e do número de Richardson sobre o comprimento de onda transversal  $\lambda_y$  é resumido na Tabela (6.2).

Tabela 6.2: Comprimento de onda transversal,  $\lambda_y$  -  $Re = 200$ .

Simulação	$Ri$	$L_y$	$\lambda_y = n\lambda_x$
$3DFI_A$	0	10.5	$0.67\lambda_x$
$3DFI_B$	0.1	10.5	$0.67\lambda_x$
$3DFI_C$	0.2	10.5	$0.67\lambda_x$
$3DFRI_A$	0	14	$1\lambda_x$
$3DFRI_B$	0.1	14	$1\lambda_x$
$3DFRII$	0.1	28	$1\lambda_x$
$3DFIII_A$	0	42	$0.8\lambda_x$
$3DFIII_B$	0.05	42	$1\lambda_x$
$3DFIII_C$	0.1	42	$1.2\lambda_x$
$3DFIII_D$	0.15	42	$1.2\lambda_x$

Para  $Ri = 0.2$ , a alta estratificação suprime o desenvolvimento das instabilidades tridimensionais e, conseqüentemente, a formação dos vórtices longitudinais, como pode ser observado nos cortes transversais mostrados na Fig. 6.25. O escoamento comporta-se como uma camada de mistura bidimensional.

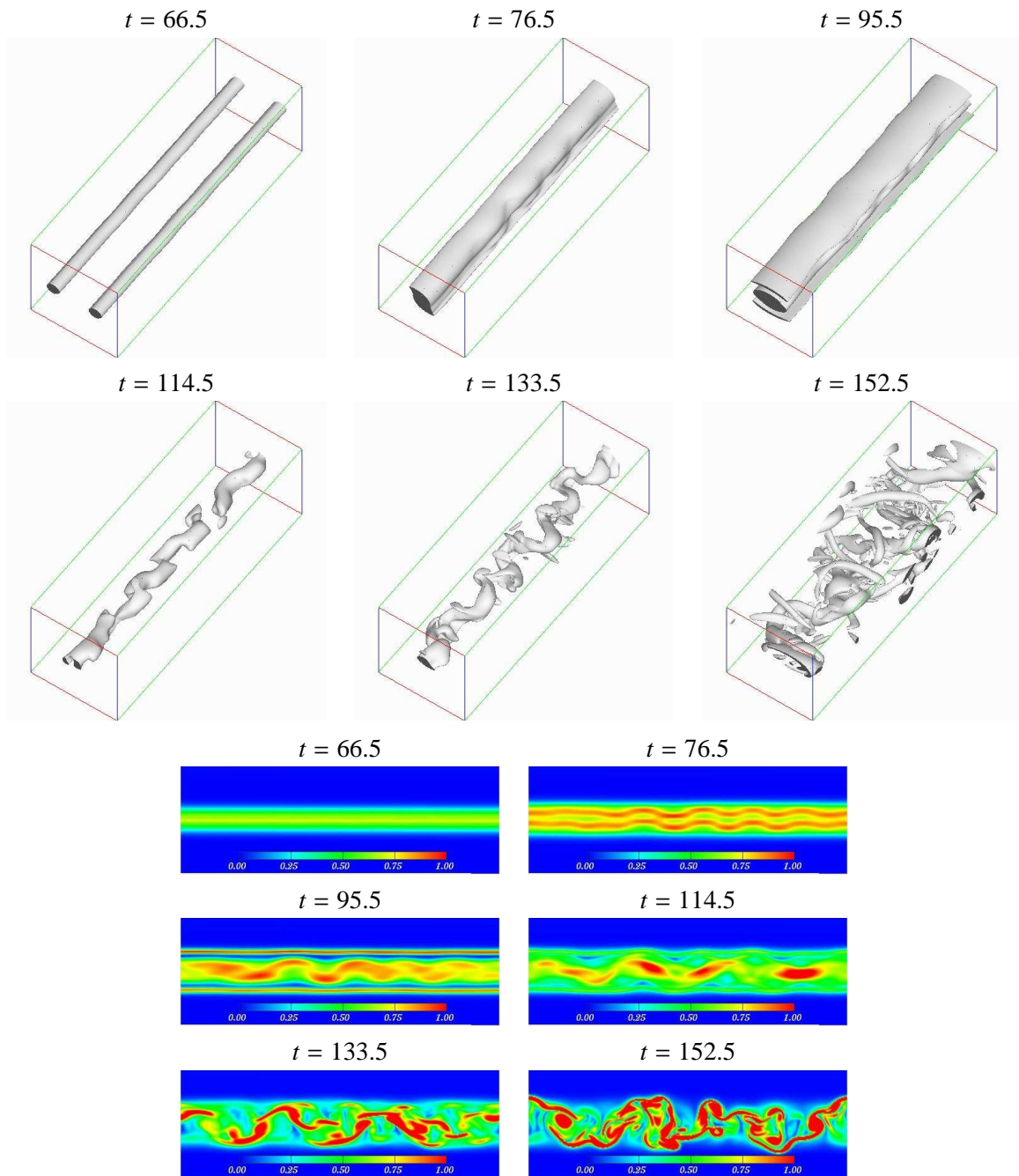


Figura 6.21: Isosuperfícies de  $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação  $3DFRIII_C$ ,  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 200$ .

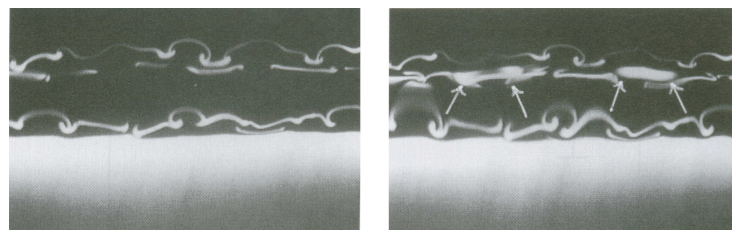


Figura 6.22: Resultado obtido por Schowalter *et al.* [73],  $Ri = 0.09$

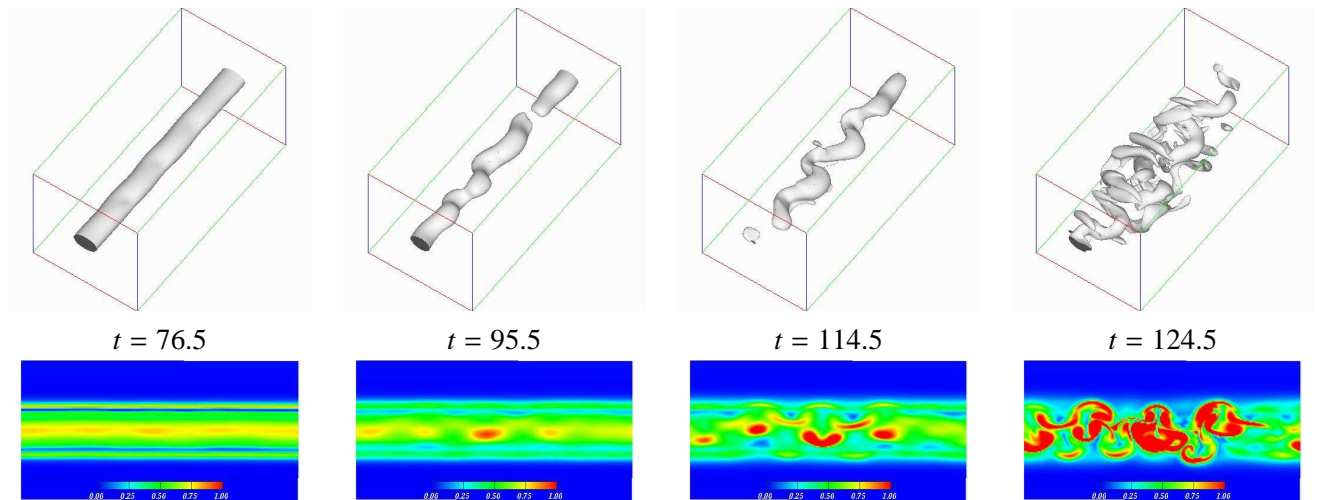


Figura 6.23: Isosuperfícies de  $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação 3DFR11,  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 200$ .

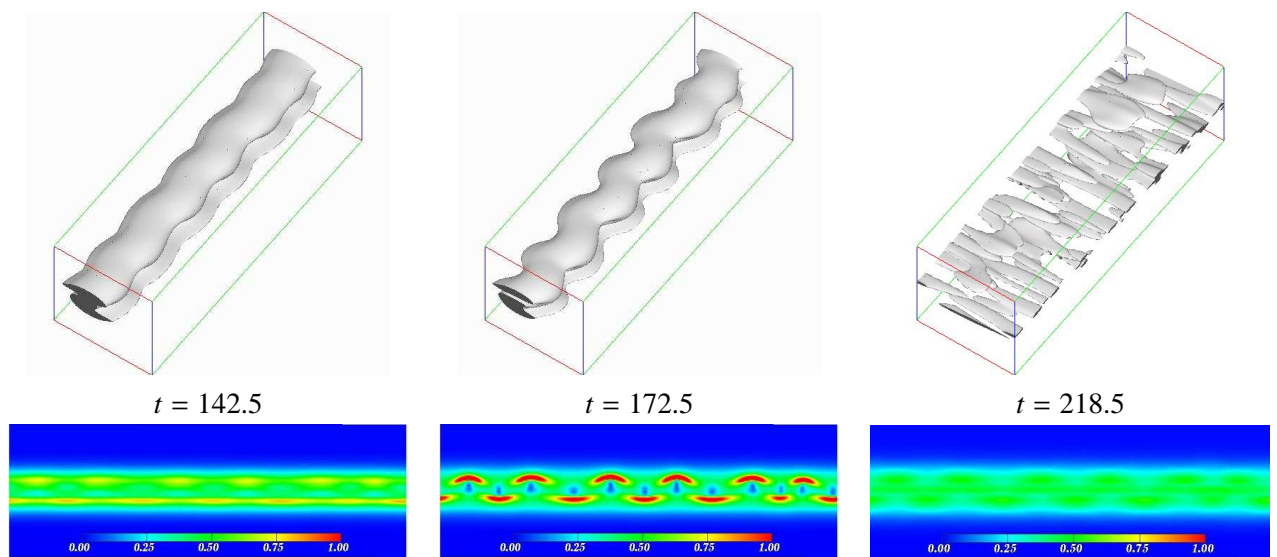


Figura 6.24: Isosuperfícies de  $Q=0.5$ , e planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação 3DFR11D,  $Ri = 0.15$ ,  $Re = 200$ .

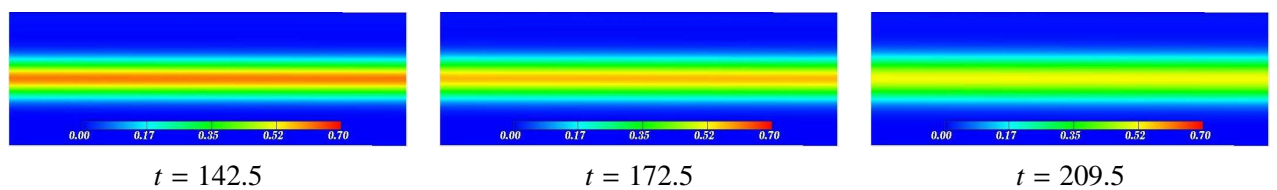


Figura 6.25: Planos transversais ( $x = \text{constante}$ ) do módulo da vorticidade. Simulação 3DFR11E,  $Ri = 0.2$ ,  $Re = 200$ .



# Capítulo 7

## Simulação de Grandes Escalas

O objetivo deste capítulo é mostrar a transição à turbulência de uma camada de mistura estratificada e não estratificada, a  $Re = 2000$ , utilizando Simulação de Grandes Escalas (LES - *Large Eddy Simulation*) e empregando o modelo sub-malha Função Estrutura Filtrada (FSF - *Filtered Structure-Function*).

A LES é uma excelente técnica para simular escoamentos turbulentos. A principal vantagem da LES, além do menor esforço computacional, é que permite aumentar o número de Reynolds do escoamento simulado em relação à DNS. Assim, para aumentar o número de Reynolds nas simulações tridimensionais é necessário introduzir um modelo sub-malha que represente a ação das escalas menores que o tamanho da malha ( $\Delta x$ ) sobre as escalas resolvidas explicitamente.

A aproximação LES é utilizada para simular uma variedade de escoamentos turbulentos (isotrópicos, cisalhantes livres, próximos de parede, rotantes, estratificados, compressíveis, reagindo quimicamente, multi-fásicos, etc). A LES é aplicada, principalmente, em escoamentos geofísicos: em meteorologia para entender o movimento de várias escalas (escalas características na camada limite atmosférica, mesoescala, e escalas planetárias), no oceano para entender a mistura devido a convecção vertical e a estratificação, e ainda para estudar os vórtices de mesoescala.

### 7.1 Equações governantes na aproximação de Boussinesq para LES

As equações de Navier-Stokes na aproximação de Boussinesq, em notação indicial, são:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \delta_{i3} \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (7.1)$$

A estas equações é acrescida a equação da continuidade:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (7.2)$$

e a equação de transporte-difusão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (7.3)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de viscosidade cinemática,  $\kappa$  o coeficiente de difusividade molecular,  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ .

As equações acima constituem um sistema fechado de 5 equações e 5 incógnitas. A solução direta destas equações só é possível a números de Reynolds ( $Re$ ) moderados. Quando o número de Reynolds é suficientemente alto, impedindo a simulação numérica direta (DNS), uma alternativa é empregar a técnica de simulação de grandes escalas (LES).

Para realizar uma LES o intervalo de escalas deve ser limitado por um processo de filtragem das equações governantes. As variáveis presentes nas equações são separadas em uma parte dita de grandes escalas ou variável filtrada  $\bar{f}(x_i, t)$ , e em outra parte chamada de pequena escala ou sub-malha  $f'(x_i, t)$ . Então, com o objetivo de separar as grandes das pequenas escalas utiliza-se um filtro de largura  $\Delta x$ , o qual caracteriza o número de onda de corte de filtragem. A finalidade da filtragem é eliminar as escalas inferiores à da largura característica do filtro, ou seja, as escalas não resolvidas  $f'$  que correspondem as escalas características menores que  $\Delta x$ .

Matematicamente, a operação de filtragem corresponde a uma convolução de uma variável  $f(x_i, t)$  por uma função filtro  $G_{\Delta x}$  na forma [50]:

$$\bar{f}(x_i, t) = \int f(y_i, t) G_{\Delta x}(x_i - y_i) dy_i. \quad (7.4)$$

Neste trabalho, o processo de filtragem se confunde com a filtragem imposta pela discretização. Isto é válido uma vez que no interior do volume de discretização todas as variáveis são mantidas constantes [74]. Aplicando o processo de filtragem (Eq. 7.4) nas equações (7.1), (7.2) e (7.3) obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} + g_i \delta_{i3} \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} Q_j, \quad (7.7)$$

onde  $T_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j}$  é o tensor de cisalhamento sub-malha e  $Q_j = \bar{\rho} \bar{u}_j - \overline{\rho u_j}$  o fluxo de escalar sub-malha.

O sistema acima, que possui mais incógnitas que equações, é um sistema aberto. Uma maneira de resolver este problema de fechamento é empregar um modelo sub-malha para avaliar o tensor sub-malha,  $T_{ij}$ , e o fluxo de escalar sub-malha,  $Q_j$ . Assim, utiliza-se o conceito de viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq) [50, 76] para modelar  $T_{ij}$  e  $Q_j$ . Boussinesq

propôs expressar o tensor de cisalhamento sub-malha em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, como segue:

$$T_{ij} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} T_{II} \delta_{ij}, \quad (7.8)$$

onde  $\bar{S}_{ij}$  é o tensor taxa de deformação do campo filtrado e é dado por:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (7.9)$$

e o fluxo de escalar sub-malha é dado por:

$$Q_j = \kappa_t \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j}, \quad (7.10)$$

onde  $\kappa_t = \nu_t / Pr_t$  é o coeficiente de difusividade molecular turbulento,  $Pr_t$  o número de Prandtl turbulento, que neste trabalho é considerado constante e igual a 1.

Substituindo as equações (7.8) - (7.9) nas equações (7.5) - (7.7), obtém-se as equações que governam o escoamento, na aproximação de Boussinesq, para LES [51]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right) + g_i \delta_{i3} \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\kappa + \kappa_t) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \right), \quad (7.13)$$

onde  $P^*$  é a pressão modificada, na qual foi incorporado o termo de energia cinética da Eq. (7.8).

De posse das equações acima, o problema de fechamento é então reduzido à determinação da viscosidade turbulenta,  $\nu_t$ , como função das variáveis do campo resolvido.

Salienta-se que para eliminar os erros de dobramento (*aliasing*), que são introduzidos quando os termos não-lineares são discretizados no espaço físico [8, 41], faz-se o uso de filtros compactos de 6ª ordem [49]. Sem o tratamento dos erros de *aliasing*, a energia acumularia nos maiores números de onda do espectro de energia cinética, tornando a simulação instável.

Assim, o filtro compacto com as mesmas características do esquema de discretização espacial, é utilizado para filtrar os termos não-lineares das equações (7.11) e (7.13). A vantagem de utilizar um filtro compacto de 6ª ordem é que ele permite uma maior flexibilidade para a escolha do número de onda de corte.

## 7.2 Modelo sub-malha no espaço físico

O problema de modelar as pequenas escalas através de uma apropriada escala sub-malha é extremamente complicado, principalmente quando se trabalha no espaço físico com métodos de diferenças finitas. Neste trabalho emprega-se apenas o modelo da Função Estrutura Filtrada (FSF), que segundo Silva & Pereira (2004) [20] satisfaz uma correta predição do campo de vorticidade resolvido quando utilizado conjuntamente com métodos pseudo-espectrais. O modelo FSF combina as vantagens de baixo custo computacional sem os problemas de dissipação excessiva, tornando possível o estudo de escoamentos transicionais [20].

Os modelos sub-malha no espaço físico, baseados no conceito de viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ), são caracterizados pela avaliação do comprimento  $l$  e da velocidade  $v$  ( $\nu_t \sim lv$ ). A diferença entre os modelos existentes para o espaço físico está na escolha das escalas  $l$  e  $v$  [76]. A escala de comprimento  $l$  é geralmente determinada a partir da largura do filtro escolhido (neste caso  $l = \Delta x$ ).

O formalismo no espaço de Fourier para o cálculo da viscosidade turbulenta,  $\nu_t$ , e da difusividade turbulenta,  $\kappa_t$ , foi apresentado por Chollet & Lesieur (1981) [11], que utilizaram a teoria EDQNM (*Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian*) para fechar as equações de conservação [50, 51]. Neste estudo o cálculo da viscosidade turbulenta passa pelo cálculo do espectro de energia no espaço de Fourier. O cálculo desta grandeza no espaço físico é difícil de ser realizado. Uma forma de resolver este problema é utilizar o conceito de função estrutura de velocidade de ordem 2, proposto por Métails & Lesieur (1992) [65]. A seguir é mostrado o formalismo do modelo Função Estrutura (FS - *Structure Function*) e do modelo Função Estrutura Filtrada (FSF - *Filtered Structure Function*), desenvolvido por Ducros (1995) e descrito em Ducros *et al.*, (1996) [24].

### 7.2.1 Modelo Função Estrutura

A principal característica do modelo função estrutura consiste em transpor a viscosidade turbulenta do espaço espectral (Fourier) para o espaço físico. A idéia base do modelo está em construir no espaço físico um coeficiente de viscosidade turbulenta normalizado por  $\sqrt{E_{\vec{x}}(k_c)}/k_c$ , sendo  $k_c = \pi/\Delta x$  o número de onda de corte.

O espectro de energia  $E_{\vec{x}}(k_c, t)$  é um espectro de energia cinética local para um dado ponto  $\vec{x}$ , o qual é apropriadamente determinado assumindo que a turbulência é localmente isotrópica. Uma relação entre o espaço de Fourier, representado pelo espectro de energia, e o espaço físico pode ser feita utilizando a função estrutura local de velocidade de ordem 2, definida por:

$$\overline{F_2}(\vec{x}, \Delta x) = \langle [\overline{u_i}(\vec{x} + \vec{r}, t) - \overline{u_i}(\vec{x}, t)]^2 \rangle_{\|\vec{r}\|=\Delta x}, \quad (7.14)$$

onde  $\langle \rangle$  representa a média de realizações.

A  $\overline{F_2}$  é calculada baseada na média estatística local do quadrado das diferenças de velocidade

des (filtradas) entre  $\vec{x}$  e os seis pontos ao redor de  $\vec{x}$  na grade computacional. Assim, supõem-se que para cada localização no espaço a turbulência é localmente isotrópica. A relação entre o espectro de energia cinética tridimensional,  $E(k)$ , e a função estrutura de ordem 2,  $\overline{F_2}(\vec{x}, \Delta x)$  denominada de relação de Batchelor [51], é dada por:

$$\overline{F_2}(\vec{x}, \Delta x) = 4 \int_0^{k_c} E(k, t) \left[ 1 - \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right] dk, \quad (7.15)$$

Considerando-se um espectro em  $k^{-5/3}$  e estendendo-o de zero a  $k_c$ , obtém-se o modelo de função estrutura:

$$v_i^{SF}(\vec{x}, t) = 0.105 C_k^{-3/2} \Delta x [\overline{F_2}(\vec{x}, \Delta x)]^{1/2}. \quad (7.16)$$

onde  $C_k = 1.4$  é a constante de Kolmogorov e  $\overline{F_2}(\vec{x}, \Delta x)$  é a função estrutura local do campo de velocidade filtrado.

Segundo Silvestrini (1996, 2003) [75, 76] a vantagem do modelo função estrutura é que ele independe do esquema numérico usado, pois envolve incrementos de velocidades em vez de derivadas. A desvantagem é que o modelo dissipa excessivamente na zona de transição e nas regiões próximas à parede, como o modelo de Smagorinsky. Embora o modelo FS seja menos dissipativo que o modelo de Smagorinsky nas regiões de vorticidade fraca, ele é mais dissipativo no centro dos turbilhões. O problema principal do modelo FS ocorre durante a transposição do espaço de Fourier ao físico onde se perde a propriedade, muito importante para a simulação de escoamentos em transição, de que a viscosidade turbulenta espectral será nula enquanto a energia cinética na escala da malha de cálculo for nula.

Uma modificação no modelo de função estrutura foi proposta por Ducros (1995) (descrito em [50]), chamado modelo função estrutura filtrada, e tem por objetivo tornar  $\overline{F_2}$  mais local no espaço espectral.

### 7.2.2 Modelo Função Estrutura Filtrada

No modelo função estrutura filtrada, FSF, o campo filtrado  $\overline{u}_i$  é submetido a um filtro passa-alta (para remover as oscilações de maiores números de onda, que afetam a energia no modelo sub-malha) antes do cálculo da função estrutura local de ordem 2, tornando-a menos sensível ao movimento de grandes escalas. O filtro consiste de um operador Laplaciano discretizado por um esquema de diferenças finitas centradas de segunda ordem e iterado 3 vezes.

O filtro Laplaciano é da forma:

$$L(\overline{u}_i) = \sum_j [\overline{u}_i(\vec{x} - \Delta\vec{x}_j, t) - 2\overline{u}_i(\vec{x}, t) + \overline{u}_i(\vec{x}_j + \Delta\vec{x}_j, t)] \quad (7.17)$$

onde  $j = 1, 2, 3$  para escoamentos livres.

A formulação final do modelo FSF, segundo Ducros *et al.* (1996) [24] é:

$$\nu_i^{FSF}(\vec{x}, t) = 0.0014 C_k^{-3/2} \Delta x [\overline{F_2}(\vec{x}, \Delta x)]^{1/2}. \quad (7.18)$$

onde

$$\overline{F_2}(\vec{x}, \Delta x) = \langle [L^3(\overline{u}_i)(\vec{x} + \vec{r}, t) - (L^3\overline{u}_i)(\vec{x}, t)]^2 \rangle_{|\vec{r}|=\Delta x}. \quad (7.19)$$

Para verificar como o código de cálculo se comporta com o modelo sub-malha realizam-se cinco simulações. Em quatro delas emprega-se a técnica de simulação numérica direta das equações de Navier-Stokes, para  $Re = 200, 500, 1000$  e  $2000$ , e numa delas a técnica de simulação de grandes escalas, a  $Re = 2000$ , usando o modelo função estrutura filtrada (FSF). Todas as simulações são realizadas sem o emprego da equação de transporte (Eq. (3.3) em DNS e Eq.(7.13) em LES). O domínio de cálculo empregado tem dimensões  $(L_x, L_y, L_z) = (14, 14, 14)$  e a malha computacional é de  $(n_x \times n_y \times n_z) = (128 \times 128 \times 129)$  pontos. A perturbação inicial é um ruído branco de igual amplitude nas três direções. A Figura 7.1 mostra a comparação entre as simulações, para um mesmo tempo ( $t = 39$ ), utilizando o espectro longitudinal de energia cinética. Observa-se que o modelo resolve satisfatoriamente as pequenas escalas, enquanto a DNS a  $Re = 2000$  claramente apresenta um caráter divergente.

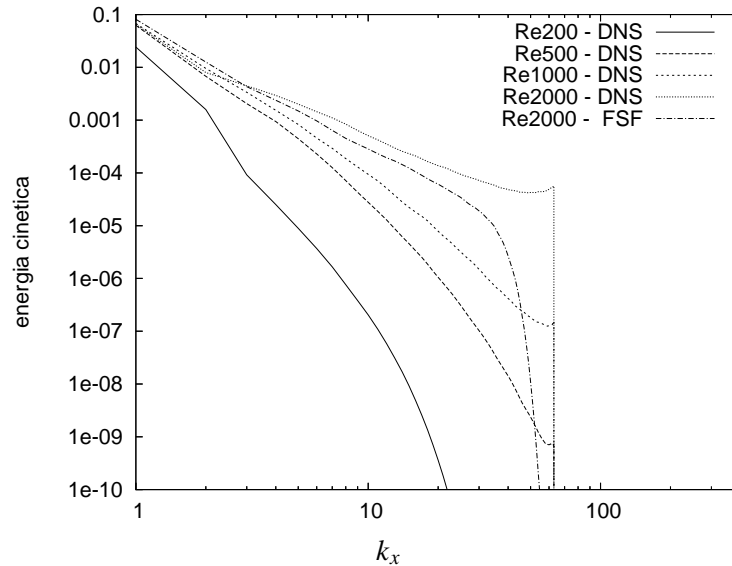


Figura 7.1: Espectro longitudinal de energia cinética,  $t = 39$ , para DNS, a  $Re = 200; 500; 1000$  e  $2000$ , e LES, a  $Re = 2000$ .

## 7.3 Resultados

Os resultados obtidos nos capítulos anteriores, via simulação numérica direta, mostraram a grande influência da estratificação estável sobre o desenvolvimento das instabilidades na ca-

mada de mistura estavelmente estratificada.

Nas DNS bidimensionais, realizadas a número de Reynolds mais altos e utilizando uma grade de alta resolução, visualizou-se as instabilidades secundárias na camada baroclínica. Os resultados obtidos sugerem que estas instabilidades aceleraram a transição da camada de mistura estavelmente estratificada à turbulência. Na literatura, tanto a investigação numérica como a experimental, sobre o mecanismo de amplificação e propagação destas instabilidades, são realizadas em domínios bidimensionais. Portanto, pouco se conhece sobre o referido mecanismo em domínios tridimensionais. Então uma dúvida surgiu: será que estas instabilidades se desenvolvem em uma camada 3D a  $Re = 2000$ , simulada por meio de LES? Elas conseguem competir com as instabilidades tridimensionais? Pretende-se responder às perguntas/dúvidas simulando uma camada de mistura estratificada tridimensional a  $Re = 2000$  utilizando Simulação de Grandes Escalas (LES) e empregando como modelo sub-malha a Função Estrutura Filtrada.

No capítulo anterior foi apresentada a transição à turbulência da camada de mistura 3D, para um número de Reynolds baixo ( $Re = 200$ ). Nestas DNS analisou-se a transição até o instante da formação dos vórtices longitudinais, responsáveis pelo desencadeamento da turbulência. Para avançar mais na análise e chegar num estágio turbulento, é preciso aumentar o número de Reynolds em relação aos da DNS, e assim simular uma camada de mistura mais próxima da encontrada em escoamentos geofísicos e de engenharia.

O processo de transição, do estágio laminar ao turbulento, de um escoamento paralelo estratificado ocorre em três fases distintas:

- a) a fase que vai do desenvolvimento da instabilidade de K-H, passa pela formação dos turbilhões de K-H até que estes atinjam a máxima amplitude e saturem;
- b) a fase do início e crescimento das instabilidades secundárias 3D, com a formação dos vórtices longitudinais, gerados nas regiões entre e ao redor dos turbilhões de K-H;
- c) e a última fase, onde a camada de mistura turbulenta colapsa, caracterizada por intensa dissipação viscosa e desencadeada pelo colapso dos vórtices longitudinais, que destroem os vórtices primários de K-H [67].

O objetivo desta seção é atingir as três fases descritas acima, identificar a evidência de instabilidade secundária de K-H na camada baroclínica e verificar a influência da estratificação na evolução da camada de mistura quando se utiliza LES. Para alcançar o objetivo proposto foram realizados testes para diferentes números de Richardson,  $Ri = 0, 0.05, 0.1$  e  $0.2$ , utilizando duas malhas distintas, mostradas na Tabela 7.1. Para verificar se o escoamento aproxima-se de um regime de auto-similaridade é realizado um teste a quatro turbilhões e sem estratificação.

### 7.3.1 Parâmetros físicos e numéricos das simulações LES - $Re = 2000$

Os parâmetros das simulações são sumarizados na Tabela 7.1. Um ruído branco de igual amplitude nas três direções ( $x, y, z$ ) é adicionado ao perfil de velocidade dado pela Eq. (3.11). A nomenclatura *FSFMRiN* refere-se às simulações LES com modelo de Função Estrutura

Filtrada (FSF), onde o  $M$  corresponde aos pontos da malha e  $N$  ao número de Richardson. *FSF4VRi0* refere-se a simulação realizada a quatro vórtices.

Tabela 7.1: Parâmetros físicos e numéricos das simulações LES -  $Re = 2000$

Simulação		Domínio $L_x \times L_y \times L_z$	Grade $n_x \times n_y \times n_z$
<i>FSF4VRi0</i>	$Ri = 0$	$28 \times 28 \times 28$	$192 \times 192 \times 192$
<i>FSF192Ri0</i>	$Ri = 0$	$14 \times 14 \times 14$	$192 \times 192 \times 193$
<i>FSF192Ri005</i>	$Ri = 0.05$	$14 \times 14 \times 14$	$192 \times 192 \times 193$
<i>FSF192Ri01</i>	$Ri = 0.1$	$14 \times 14 \times 14$	$192 \times 192 \times 193$
<i>FSF128Ri0</i>	$Ri = 0$	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 128$
<i>FSF128Ri005</i>	$Ri = 0.05$	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$
<i>FSF128Ri01</i>	$Ri = 0.1$	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$
<i>FSF128Ri02</i>	$Ri = 0.2$	$14 \times 14 \times 14$	$128 \times 128 \times 129$

### 7.3.2 Influência da resolução da grade computacional

Como citado anteriormente, o princípio básico da Simulação de Grandes Escalas consiste em separar as grandes escalas das pequenas escalas através de um processo de filtragem. A operação de filtragem elimina as escalas inferiores à largura do filtro, neste caso  $\Delta x$ . As escalas filtradas (para números de onda menores que o número de onda de corte,  $k_c$ ) são resolvidas diretamente e as escalas menores (com números de onda maiores que  $k_c$ ) são modeladas. Quando refina-se a grade de cálculo, a largura do filtro diminui e o número de onda de corte aumenta. Desta forma, a quantidade de escalas resolvidas é maior, a parcela de energia cinética sub-malha é menor e, portanto, o modelo será menos "exigido".

Segundo Lesieur (1997) [50], para que se realize uma LES que proporcione resultados satisfatórios :

- a simulação com uma grade de resolução marginal deve prever corretamente as propriedades estatísticas da turbulência, como mostrado na simulação *FSF4VRi0* (seção 7.3.3),
- a simulação com alta resolução deve ainda poder prever a forma e a topologia dos vórtices coerentes e sua evolução temporal.

Com base no princípio acima, utiliza-se uma grade computacional de  $192 \times 192 \times 193$  pontos, com a finalidade de melhor visualizar as estruturas coerentes no escoamento, principalmente para os casos com estratificação.

O desenvolvimento da camada de mistura a  $Ri = 0$ , para a simulação *FSF192Ri0* é apresentado na Fig. 7.2. Comparando as Fig. 7.2 e Fig. 7.13 observa-se que o escoamento com grade  $192 \times 192 \times 193$  apresenta uma maior coerência do que o escoamento referente a simulação *FSF128Ri0*. No tempo  $t = 38$ , por exemplo, visualiza-se dois turbilhões de K-H e vórtices longitudinais, para a simulação *FSF192Ri0*. No mesmo tempo, para a simulação *FSF128Ri0*,



visualiza-se um turbilhão de K-H, resultante do processo de emparelhamento, e vórtices longitudinais. Para os casos estratificados, observa-se um atraso na formação das estruturas quando se compara as Figuras 7.3 e 7.4 com os resultados apresentados nas Figuras 7.14 e 7.15. Para  $Ri = 0.05$  e  $t = 44.4$ , verifica-se que, na grade de  $192 \times 192 \times 193$ , enquanto os vórtices de K-H estão formados e perturbados pela instabilidade translativa, na grade  $128 \times 128 \times 129$  já ocorreu o emparelhamento e os vórtices longitudinais são aparentes. Para  $Ri = 0.1$  e  $t = 50.7$ , observa-se que o emparelhamento já ocorreu, para a grade com menor resolução, enquanto na grade com maior resolução os dois vórtices de K-H estão presentes e perturbados pela instabilidade translativa.

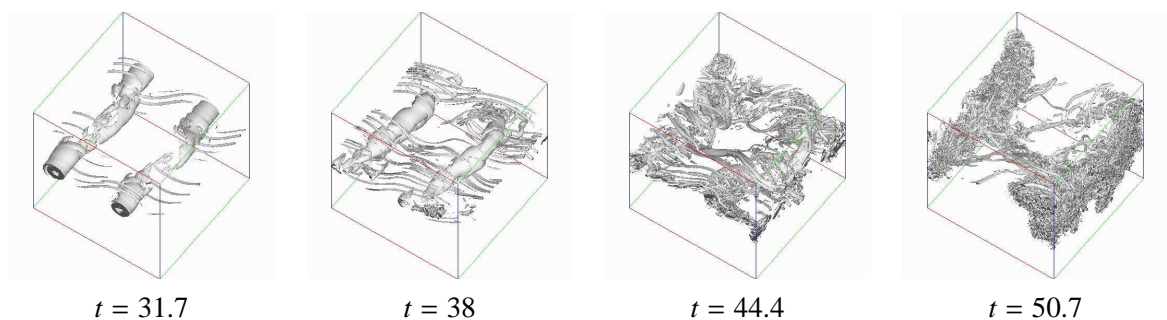


Figura 7.2: Isosuperfícies do critério Q. Simulação *FSSF192Ri0*, para  $Ri = 0$  e  $Re = 2000$ .

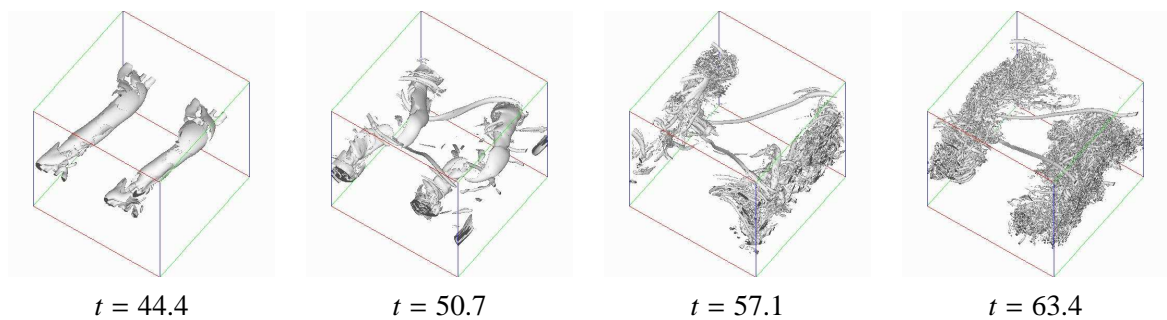


Figura 7.3: Isosuperfícies do critério Q. Simulação *FSSF192Ri005* para  $Ri = 0.05$  e  $Re = 2000$ .

Os espectros longitudinais de energia cinética são apresentados na Fig. 7.5 para  $Ri = 0$  e  $Ri = 0.05$  e na Fig. 7.6 para  $Ri = 0.1$ , referentes as simulações *FSSF192Ri0*, *FSSF192Ri005* e *FSSF192Ri01*, respectivamente. Os espectros para  $Ri = 0.05$  e  $Ri = 0.1$  mostram que a estratificação diminui o acúmulo de energia cinética nas menores escalas em relação ao caso não estratificado.

A Figura 7.7 mostra a comparação entre os espectros, no tempo  $t = 44.4$ , para as duas grades utilizadas. Para a grade de maior resolução e  $Ri = 0$  há uma correta predição de uma lei potencial, enquanto que se observa acumulação de energia na pequena escala para a resolução de  $128 \times 128 \times 129$  pontos. Verifica-se que a grade de  $128 \times 128 \times 129$  pontos, para  $Ri = 0.05$ , gera uma distribuição espectral de energia cinética de aproximadamente  $k_x^{-3}$  antes que a grade

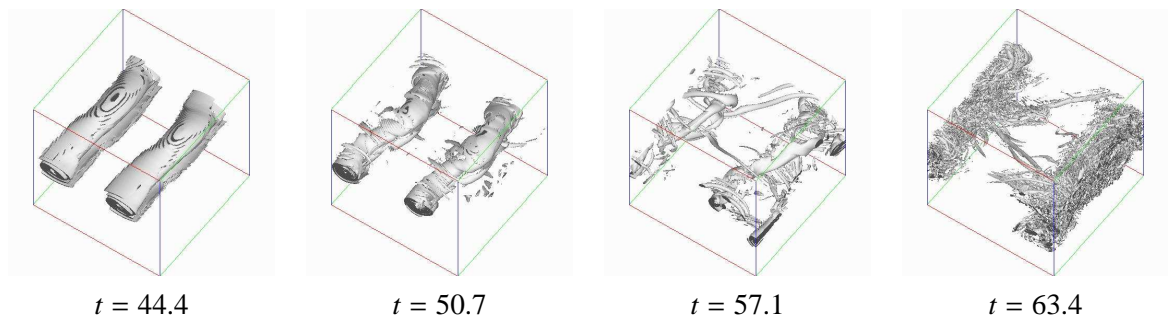


Figura 7.4: Isosuperfícies do critério Q. Simulação *FS F192Ri01* para  $Ri = 0.1$  e  $Re = 2000$ .

de  $192 \times 192 \times 193$  pontos. Isto pode ser justificado pela diferença de comportamento dos escoamentos nas duas grades. Por exemplo, a  $Ri = 0.05$ , no tempo  $t = 44.4$ , observa-se na grade ( $128 \times 128 \times 129$ ) o emparelhamento dos turbilhões de K-H e vórtices longitudinais (Fig. 7.13), enquanto que na grade ( $192 \times 192 \times 193$ ) a simulação ainda mostra dois turbilhões de K-H e vórtices longitudinais (Fig. 7.2).

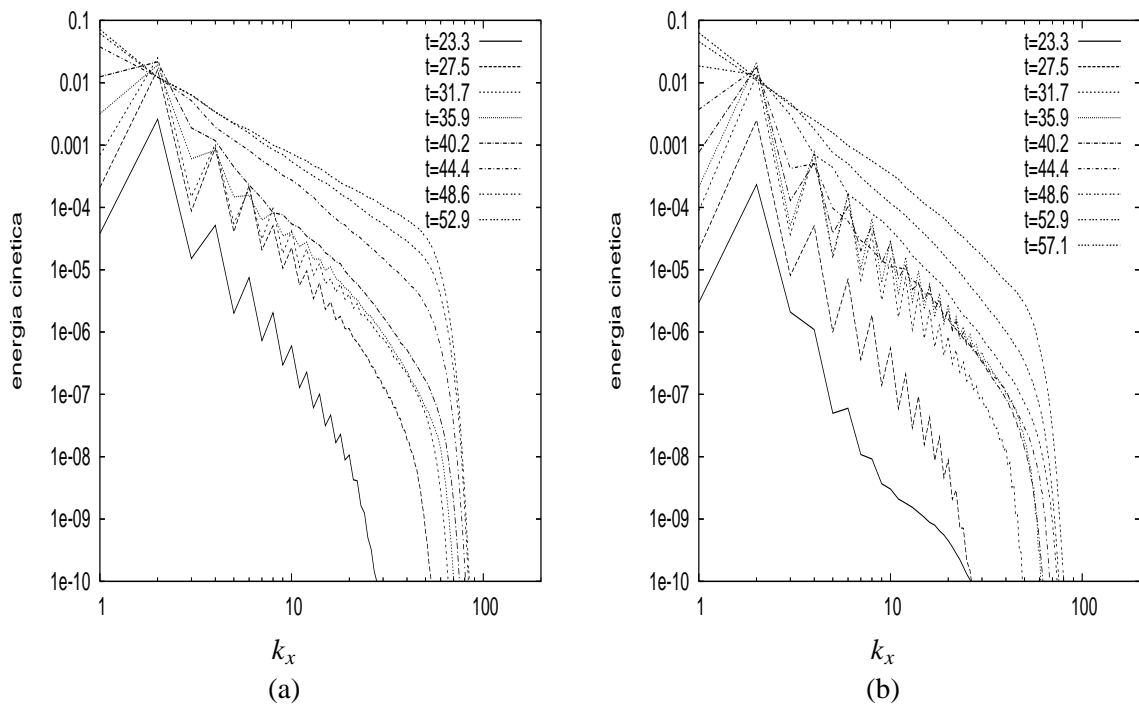


Figura 7.5: Espectro longitudinal de energia cinética para diferentes tempos. (a) Simulação *FS F192Ri0*,  $Ri = 0$ ; (b) Simulação *FS F192Ri005*,  $Ri = 0.05$ .  $Re = 2000$ .

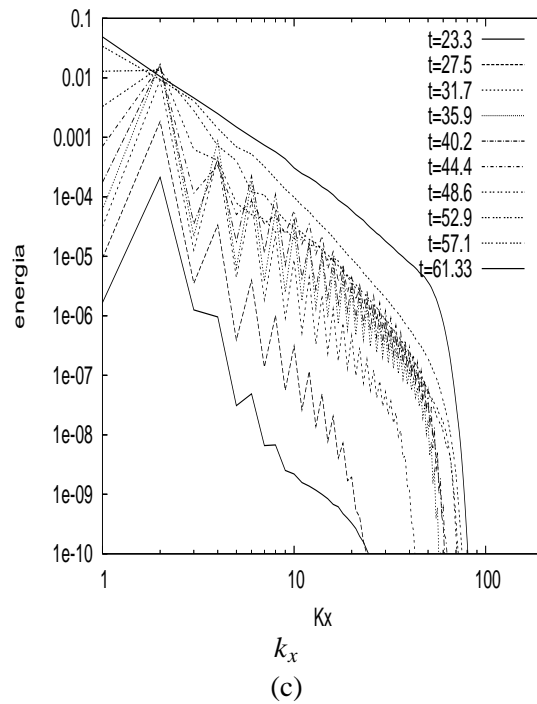


Figura 7.6: Espectro longitudinal de energia cinética para diferentes tempos. (c) Simulação  $FSF192Ri01$ ,  $Ri = 0.1$ .  $Re = 2000$ .

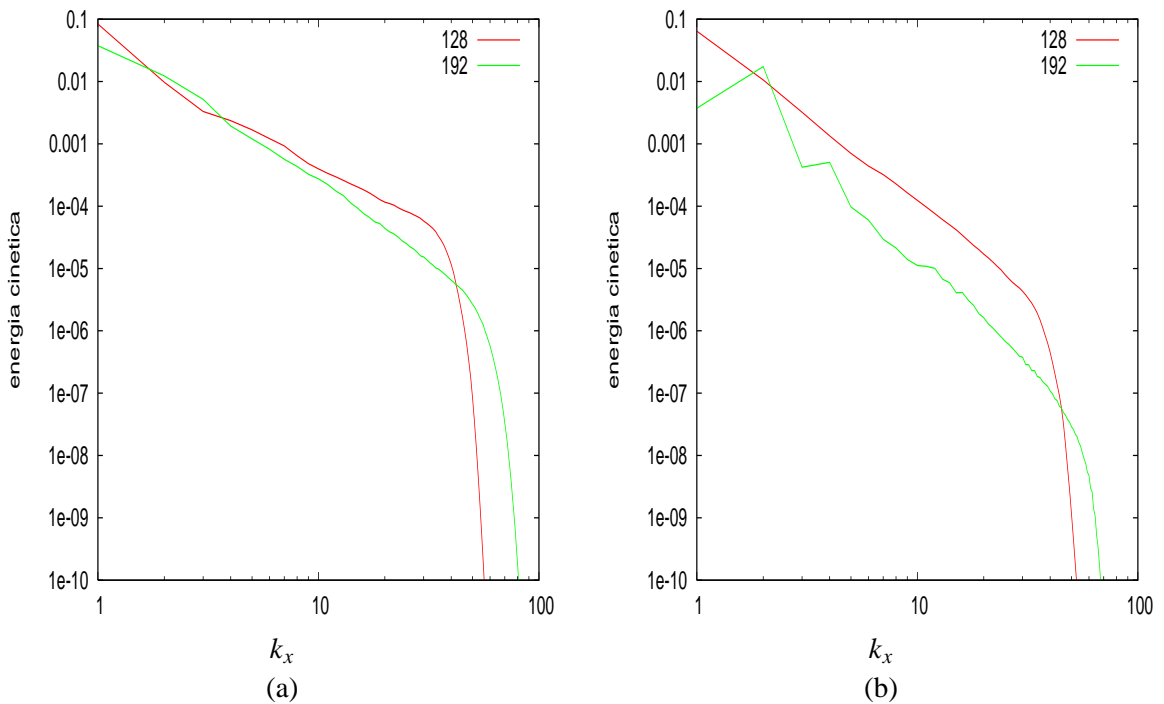


Figura 7.7: Influência da grade de cálculo no espectro longitudinal de energia cinética. (a) Comparação entre a simulação  $FSF192Ri0$  e  $FSF128Ri0$ ,  $Ri = 0$ ; (b) Comparação entre a simulação  $FSF192Ri005$  e  $FSF128Ri005$ ,  $Ri = 0.05$ ; para  $t = 44.4$ ,  $Re = 2000$ .

### 7.3.3 Aproximação de um regime de auto-similaridade

Nesta seção são analisados os resultados da simulação *FSF4VRi0*, a quatro turbilhões e a  $Ri = 0$ , com o objetivo de verificar se o escoamento se aproxima de um regime de auto-similaridade.

A Figura 7.8 mostra uma parte da evolução da camada de mistura, onde vórtices longitudinais encontram-se entre os turbilhões de K-H. O espectro longitudinal de energia cinética é mostrado na Fig.7.9.

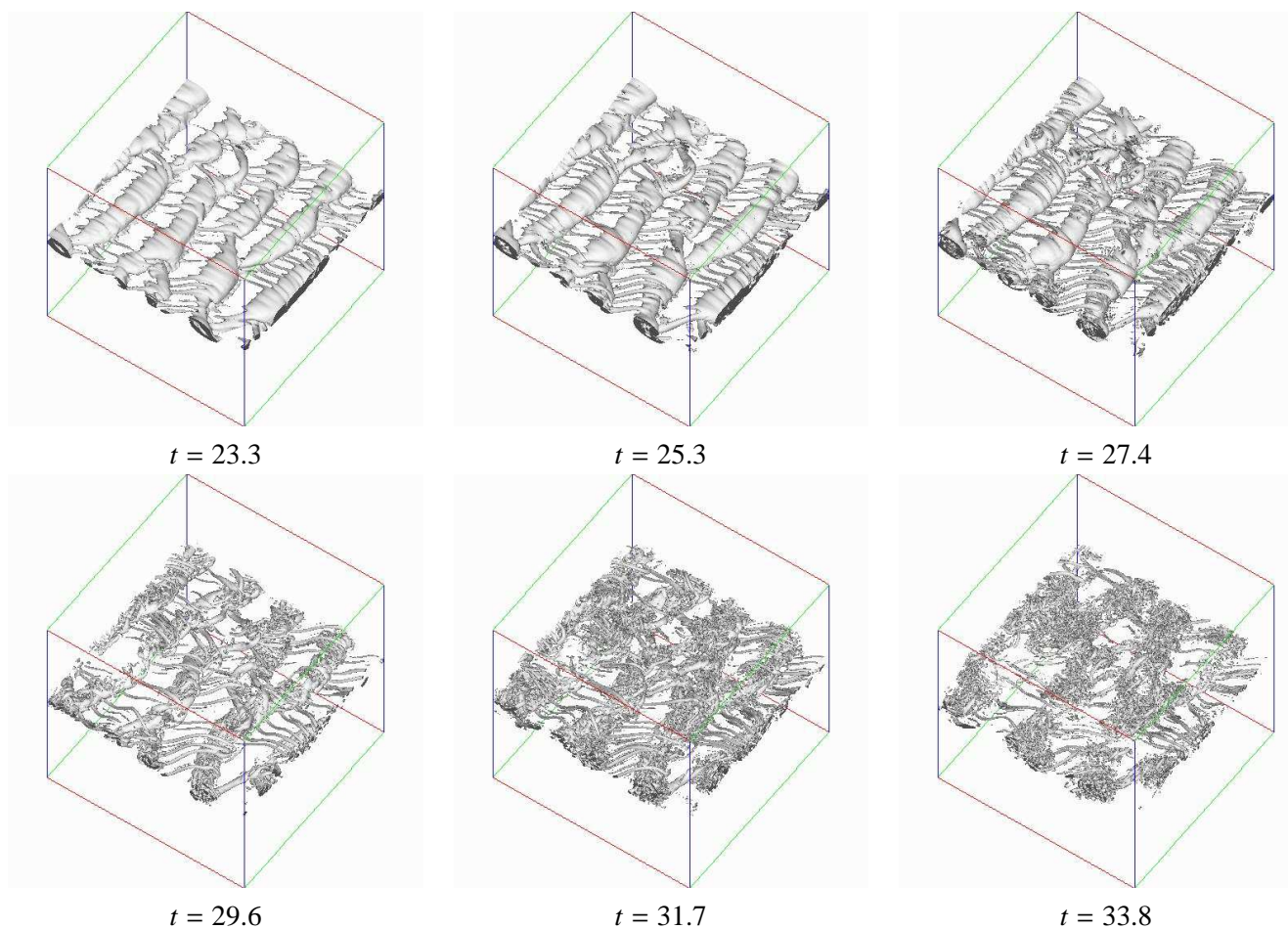


Figura 7.8: Isosuperfícies do critério Q. Simulação: *FSF4VRi0*,  $Re = 2000$ .

Observa-se na Figura 7.9 que ocorre um acúmulo de energia nos maiores números de onda ( $t = 48.6$  e  $t = 52.9$ ), o que sugere uma limitação do modelo sub-malha quanto à resolução da malha de cálculo. Provavelmente, os erros de *aliasing* não são totalmente removidos com o filtro compacto de sexta ordem ou ocorre erro do modelo (ou seja, existe diferença entre o tensor de tensões sub-malha exato e o valor calculado com a utilização do modelo sub-malha).

Os perfis verticais das intensidades turbulentas (as variâncias das flutuações de velocidade) da simulação *FSF4VRi0* são apresentados na Fig. 7.10. Estes perfis apresentam indícios de auto-similaridade, onde há equilíbrio entre a produção e a dissipação de energia.

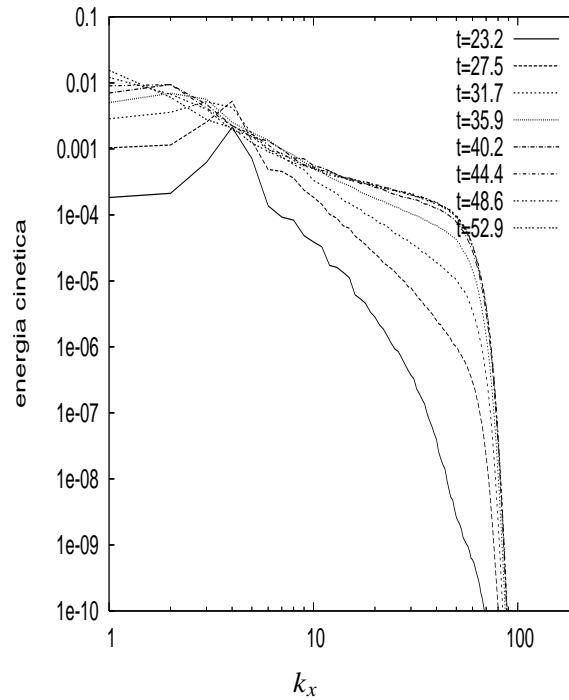


Figura 7.9: Espectro longitudinal de energia cinética para diferentes tempos. Simulação *FSF4VRi0*.  $Re = 2000$ .

A diminuição das tensões de Reynolds com o aumento de tempo indica a tendência à turbulência desenvolvida, uma característica do regime de auto-similaridade. Estes resultados estão em acordo com a LES de uma camada de mistura temporal, com perturbações *3D* isotrópicas, a  $Re = 2000$ , utilizando o modelo de viscosidade espectral dinâmico e um método espectral, realizadas por Silvestrini (1996)[75].

Uma condição necessária para a existência de um regime auto-similar é que os perfis de velocidade média e de flutuações de velocidade sejam independentes do tempo, quando a curva é renormalizada com a espessura de vorticidade local [76]. Na Figura 7.11 observa-se que a espessura de vorticidade varia muito pouco no tempo, a partir de  $t = 63.4$ . Assim, pode-se considerar que este regime é, aproximadamente, atingido a partir deste instante.

Uma comparação com os resultados obtidos da simulação a quatro vórtices (*FSF4VRi0*) com as medidas experimentais de Bell & Mehta (1990) [4] é mostrada na Fig. 7.12. Nesta figura a coordenada vertical é normalizada com a espessura de vorticidade local correspondente ao tempo  $t = 63.4$ . Sobre esta figura são plotados os dados experimentais de Bell & Mehta (1990) correspondentes a seção de medida  $x = 250\text{cm}$  do caso denominado "untripped" (onde as camadas limites para o fim da placa separatriz são ainda laminares). Observa-se que há uma aceitável concordância entre os resultados obtidos utilizando LES e os resultados experimentais de Bell & Mehta (1990). As diferenças observadas podem ser devidas a que as estatísticas do cálculo não tenham convergido o suficiente, principalmente para  $\langle v'v' \rangle$ .

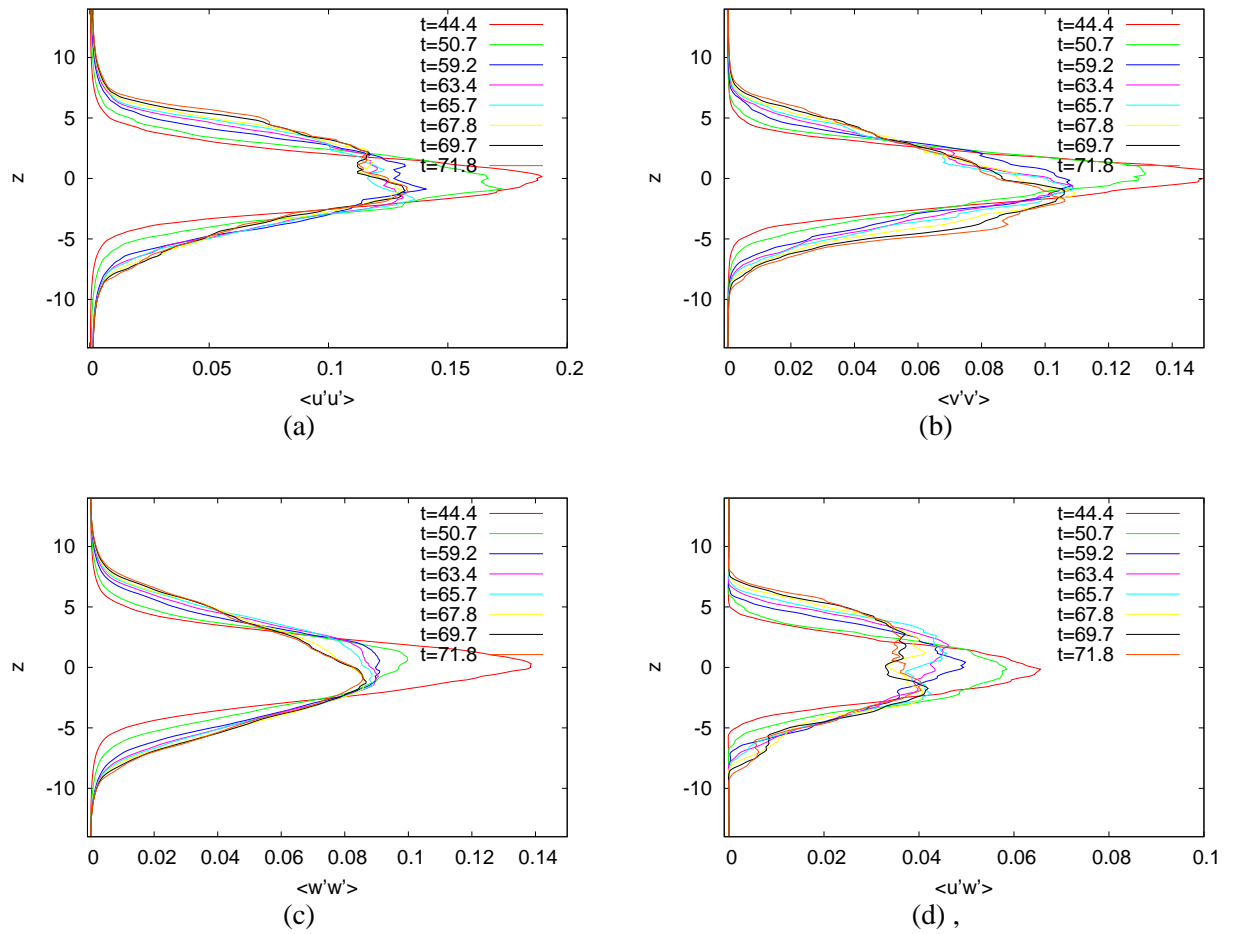


Figura 7.10: Evolução temporal das tensões de Reynolds. Simulação *FSF4VRi0*,  $Re = 2000$ ; (a)  $\langle u'u' \rangle$ ; (b)  $\langle v'v' \rangle$ ; (c)  $\langle w'w' \rangle$ ; (d)  $\langle u'w' \rangle$ ;

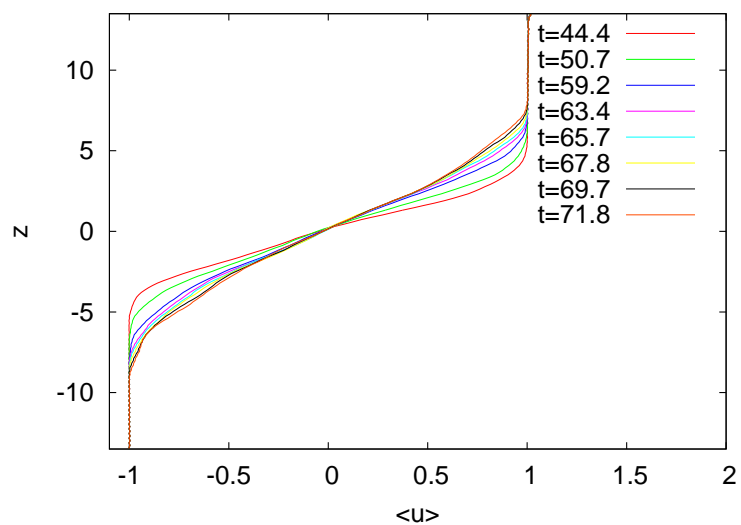


Figura 7.11: Evolução temporal do perfil médio de velocidade. Simulação *FSF4VRi0*,  $Re = 2000$ .

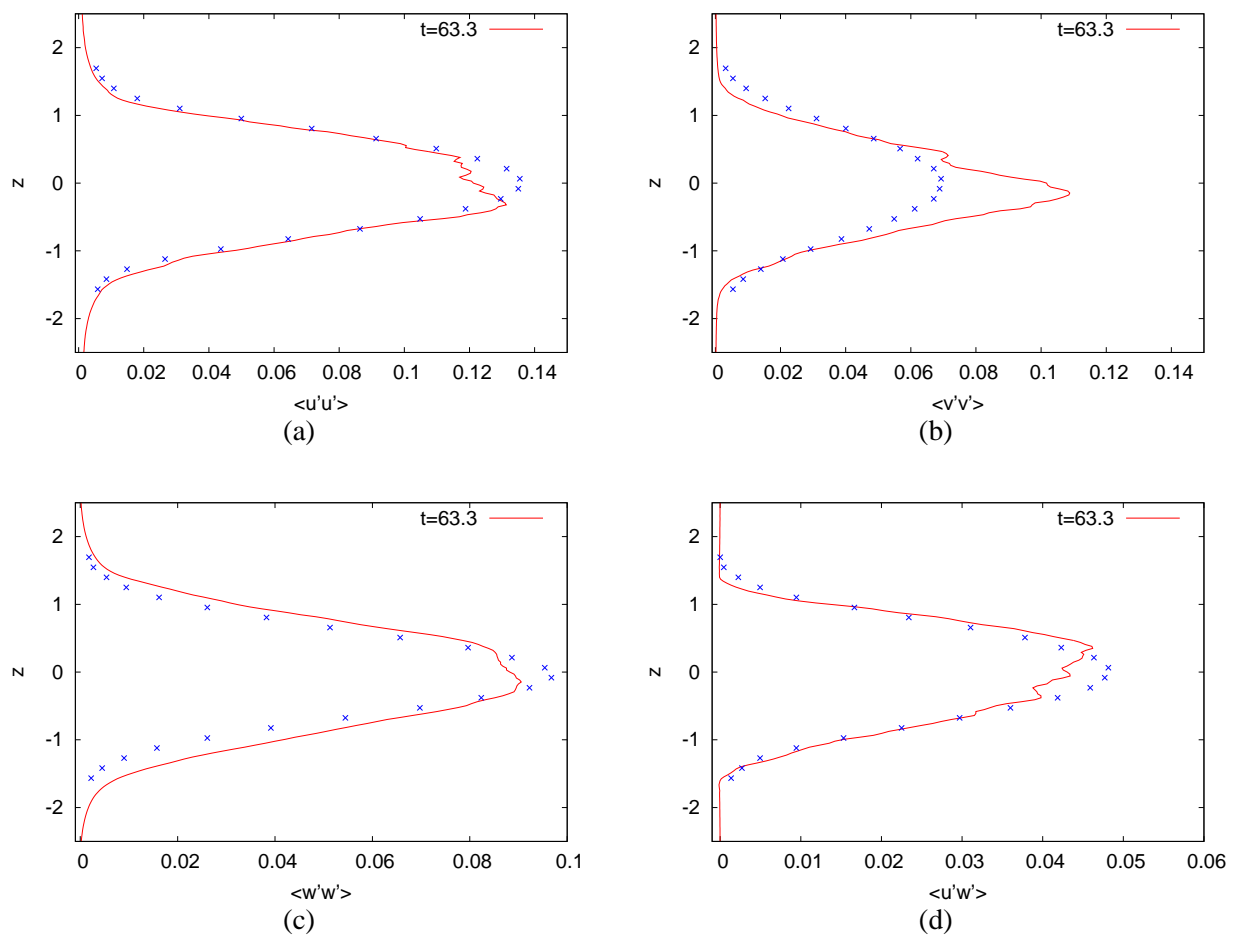


Figura 7.12: Comparação das tensões de Reynolds calculadas com as medidas experimentais ( $\times$ , em azul) em regime de auto-similaridade de Bell & Mehta, 1990 [4]. Simulação  $FS F4VRi0$ . (a)  $\langle u'u' \rangle$ ; (b)  $\langle v'v' \rangle$ ; (c)  $\langle w'w' \rangle$ ; (d)  $\langle u'w' \rangle$ ;

### 7.3.4 Influência do número de Richardson

A Figura 7.13 mostra isosuperfícies de  $Q$  obtidas a partir dos resultados referentes à simulação  $FSF128Ri0$ , desde o instante em que os vórtices longitudinais surgem até o instante em que eles "colapsam" e as pequenas escalas dominam a dinâmica do escoamento. Verifica-se que os vórtices longitudinais se formam no tempo  $t = 25.3$ , antes do emparelhamento dos turbilhões de K-H, que ocorre no tempo  $t = 41.2$ . Depois do tempo  $t = 41.2$  os vórtices longitudinais transferem a energia em direção às pequenas escalas tornando o escoamento turbulento ( $t = 60.2$ ).

As Figuras 7.14 e 7.15 mostram a evolução da camada de mistura estavelmente estratificada para os três números de Richardson estudados ( $FSF128Ri005$ ,  $Ri = 0.05$ ;  $FSF128Ri01$ ,  $Ri = 0.1$ ; e  $FSF128Ri02$ ,  $Ri = 0.2$ ), apresentando isosuperfícies de  $Q$  variando de  $Q = 0.5$  (até o tempo  $t = 50.7$ ) a  $Q = 2.5$  (de  $t = 53.9$  a  $t = 663.6$ ).

Os turbilhões de K-H são visíveis para os três diferentes números de Richardson no tempo  $t = 28.5$ . No mesmo tempo, na camada a  $Ri = 0$  os vórtices longitudinais predominam na dinâmica do escoamento (Fig. 7.13). A estratificação retarda no tempo a formação das estruturas longitudinais e o processo de emparelhamento em relação a  $Ri = 0$ , como observado nas simulações do capítulo anterior. Este atraso pode ser atribuído à instabilidade secundária cisalhante, gerada por efeitos baroclínicos, que reforça a vorticidade entre os turbilhões de K-H e a diminui no núcleo dos mesmos. A diminuição da vorticidade no núcleo do turbilhão faz com que os movimentos geradores da instabilidade elíptica/translativa sejam atenuados.

Para  $Ri = 0.05$  e a partir de  $t = 28.5$  (Fig. 7.14), a instabilidade translativa deforma o turbilhão de K-H antes que o modo sub-harmônico amplifique e ocorra o processo de emparelhamento. No tempo  $t = 41.2$  são visíveis vórtices longitudinais próximos dos turbilhões. O mesmo mecanismo é observado para  $Ri = 0.1$  no tempo  $t = 44.4$ . Entretanto, neste intervalo de tempo, o escoamento ainda permanece quase bidimensional para  $Ri = 0.2$ .

O emparelhamento dos turbilhões de K-H ocorre nos tempos  $t = 41.2$  e  $t = 47.5$  para  $Ri = 0.05$  e  $Ri = 0.1$  (Fig. 7.17), respectivamente, enquanto que para  $Ri = 0.2$  não há indícios até o tempo final da simulação. No espectro de energia, mostrado na Fig. 7.17, observa-se que para  $Ri = 0.2$  ainda dois turbilhões de K-H estão presentes no escoamento.

Para a fraca ( $Ri = 0.05$ ) e média estratificação ( $Ri = 0.1$ ), após o processo de emparelhamento, os vórtices longitudinais enfraquecem, contrário ao que ocorre a  $Ri = 0$ . É um indício de que o aumento do número de Richardson retarda a turbulência. No escoamento a forte estratificação ( $Ri = 0.2$ ) observam-se vórtices longitudinais concentrados em uma fina camada, embora a resolução da grade de cálculo não seja suficiente para captar corretamente estas estruturas. É evidente que a camada fortemente estratificada reduz a amplitude de saturação dos vórtices de K-H, bem como o crescimento das perturbações tridimensionais.

O enfraquecimento do crescimento da instabilidade de K-H (observado nas simulações bidimensionais e na DNS 3D) para  $Ri > 0.1$ , foi observado em experimentos em laboratório



[40, 25]. A influência da forte estratificação é visível na redução dos movimentos tridimensionais. Tal comportamento também foi observado em simulações numéricas de escoamento com cisalhamento e gradiente de densidade constantes (Jacobitz *et al.*, 1997 [33]), onde o crescimento da energia cinética turbulenta é inibido pelas forças de empuxo, para  $Ri \geq 0.1$ .

Certamente, as evidências numéricas apontam para a necessidade, não somente de uma adequada resolução para os vórtices longitudinais, bem como de uma extensão transversal maior do domínio, como utilizado no capítulo anterior, para que os vórtices longitudinais possam se desenvolver e interagir durante a transição à turbulência.

Uma melhor resolução para os casos estratificados possibilitaria capturar corretamente o comportamento dos vórtices longitudinais e de instabilidades secundárias que se desenvolvem na camada baroclínica. As possíveis perturbações que aparentemente se propagam ao longo dos vórtices longitudinais ( $t = 53.9$ ,  $Ri = 0.1$ ) podem levar à ruptura do mesmo e desencadear a transição às menores escalas do movimento.

A inibição dos movimentos verticais pela estratificação estável faz com que a turbulência tenha um comportamento desigual nas diferentes direções do espaço, isto é, torna a turbulência anisotrópica.

A Figura 7.16 apresenta o espectro longitudinal de energia cinética e o espectro de densidade para diferentes  $Ri$ , para o tempo  $t = 42.1$  correspondendo ao emparelhamento dos turbilhões de K-H ( $t = 42.1$ ) para  $Ri = 0$ . O espectro de densidade  $E_\rho(k, t)$  é dado pela metade da variância da densidade,  $1/2\langle\rho^2(\vec{x}, t)\rangle = \int_0^{+\infty} E_\rho(k, t) dk$  [50]. A Figura 7.16 mostra que a uma declividade de aproximadamente  $k_x^{-3}$  para o espectro longitudinal de energia cinética e de  $k_x^{-2}$  para o espectro longitudinal de densidade.

A Figura 7.17 mostra o espectro de energia em função do número de onda longitudinal. Observa-se que as interações não-lineares entre os modos distribuem a energia através da largura do espectro e induzem uma cascata de energia em direção às pequenas escalas, onde os movimentos de grandes escalas interagem para criar os movimentos de pequena escala. À medida que o número de Richardson aumenta, as estruturas são modificadas pela força de empuxo, particularmente nas grandes escalas. Além de produzir anisotropia, a supressão dos movimentos verticais amortece a transferência de energia e reduz a intensidade da turbulência. Para todos os casos, mostrados na Fig. 7.17, o espectro longitudinal de energia cinética mostra uma declividade aproximadamente em  $k_x^{-3}$ , inclusive para o caso de forte estratificação.

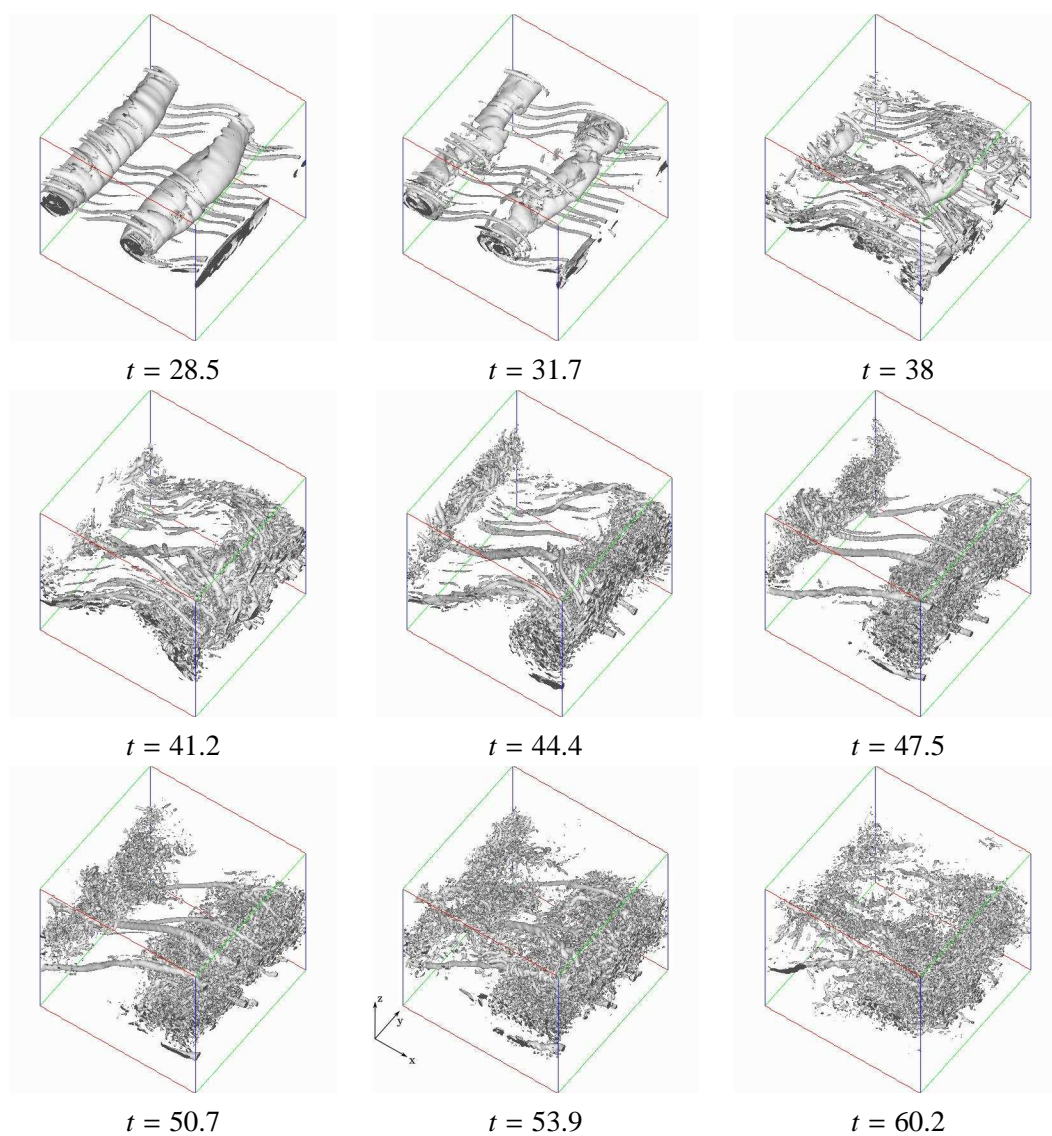


Figura 7.13: Isosuperfícies do critério Q. Simulação *FS F128Ri0* para  $Ri = 0$  e  $Re = 2000$ .

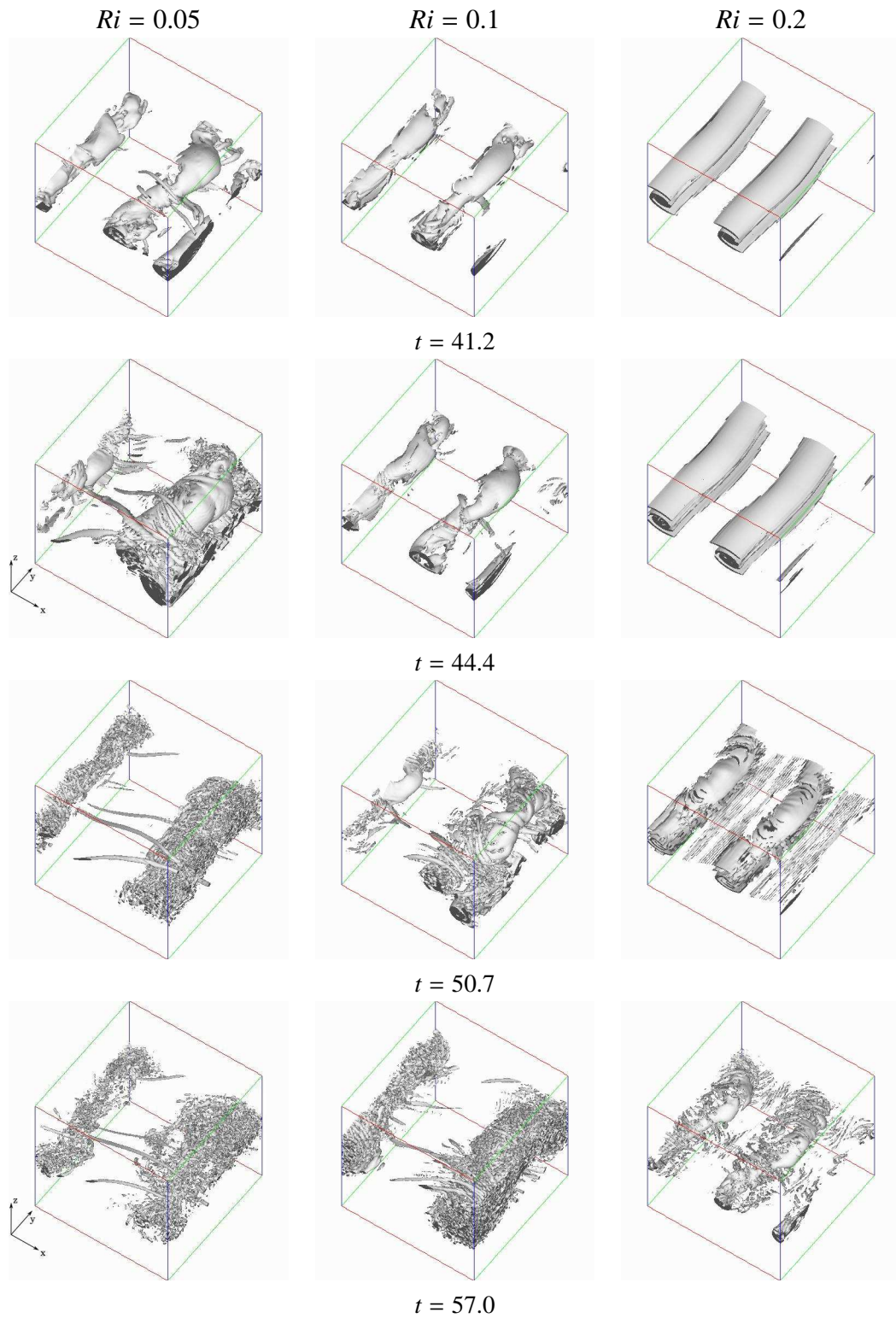


Figura 7.14: Isosuperfícies do critério  $Q$ . Simulação:  $FS F128Ri005$  ( $Ri = 0.05$ );  $FS F128Ri01$  ( $Ri = 0.1$ ) e  $FS F128Ri02$  ( $Ri = 0.2$ );  $Re = 2000$ .

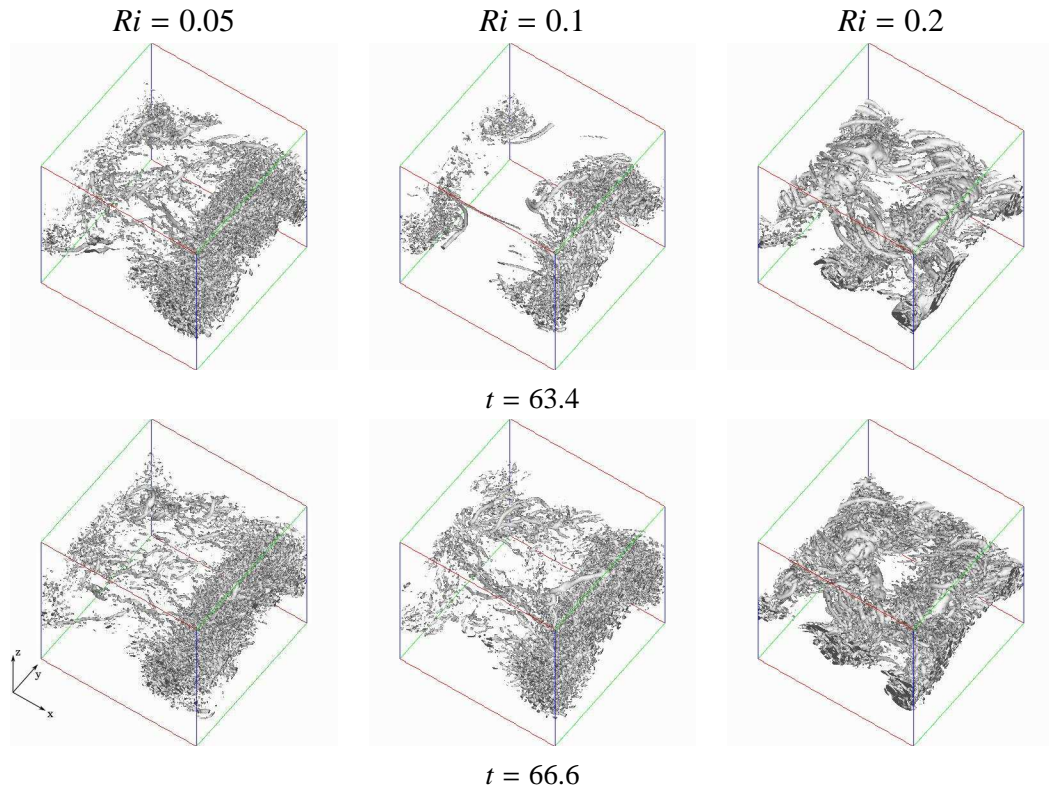


Figura 7.15: Isosuperfícies do critério  $Q$ . Simulação:  $FS F128Ri005$  ( $Ri = 0.05$ );  $FS F128Ri01$  ( $Ri = 0.1$ ) e  $FS F128Ri02$  ( $Ri = 0.2$ );  $Re = 2000$ .

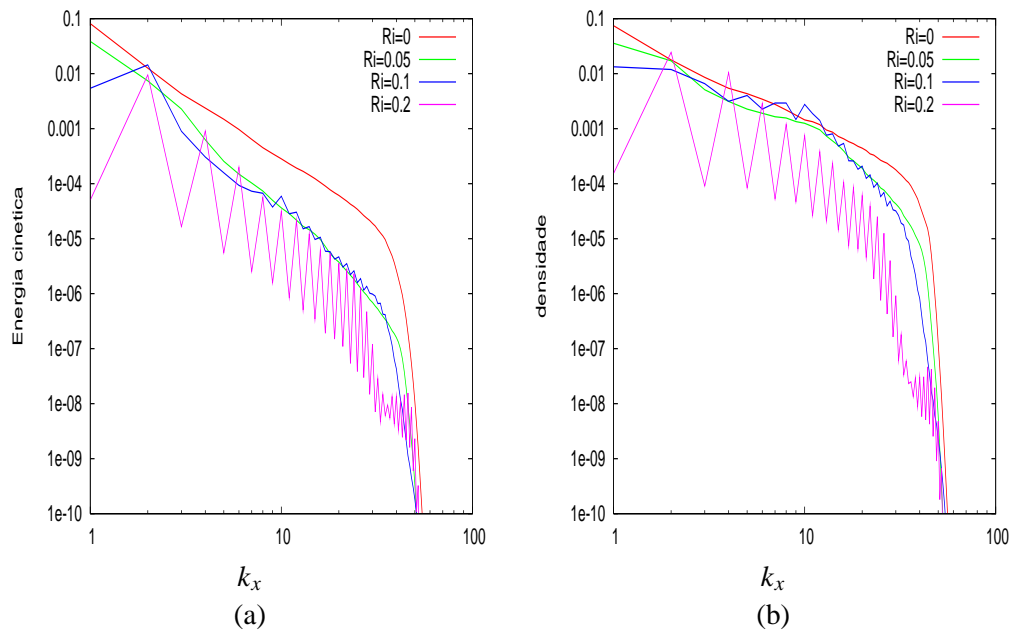


Figura 7.16: (a) Espectro longitudinal de energia cinética para diferentes  $Ri$ . (b) Espectro de densidade para diferentes  $Ri$ . Simulações  $FS F128Ri0$ ,  $FS F128Ri005$ ,  $FS F128Ri01$  e  $FS F128Ri02$ ; para  $t = 42.1$  e  $Re = 2000$ .

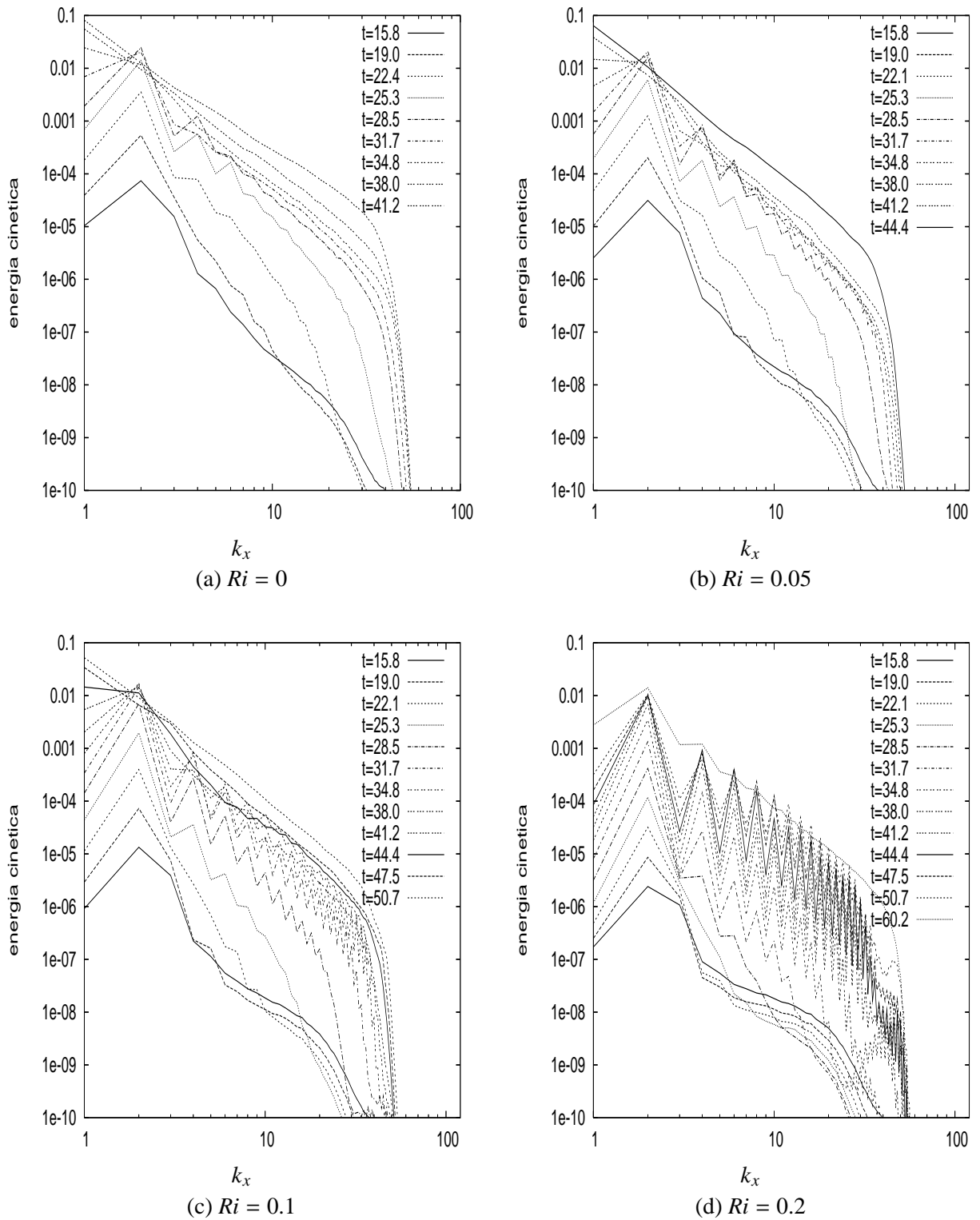


Figura 7.17: Variação temporal do espectro longitudinal de energia cinética. Para as simulações : (a)  $FSF128Ri0$  ( $Ri = 0$ ); (b)  $FSF128Ri005$  ( $Ri = 0.05$ ); (c)  $FSF128Ri01$  ( $Ri = 0.1$ ); (d)  $FSF128Ri02$  ( $Ri = 0.2$ ).

### 7.3.5 Fluxo turbulento vertical de massa e perfil médio de densidade

A evolução temporal do fluxo turbulento vertical de massa,  $\langle \rho' w' \rangle$ , é mostrada na Figura 7.18 e do perfil médio de densidade,  $\langle \rho \rangle$ , na Fig. 7.19, para  $Ri = 0.05, 0.1$  e  $0.2$ .

Quando o número de Richardson aumenta, ocorre uma diminuição do fluxo vertical de massa. Porém, observa-se que no tempo  $t = 53.9$ , para  $Ri = 0.1$ , há aumento, além do esperado, no fluxo vertical. O aumento no fluxo, observado na Fig. 7.18, pode ser atribuído ao desenvolvimento da instabilidade secundária de K-H na camada baroclínica (Fig. 7.21). No capítulo 5 foi verificado que, quando a instabilidade secundária de K-H se desenvolve na camada baroclínica, há um crescimento do fluxo vertical de massa. Supostamente este aumento de fluxo se deve às pequenas estruturas de K-H que deslocam para baixo ( $w' < 0$ ) fluido menos denso ( $\rho' < 0$ ) de níveis superiores, aumentando o fluxo médio (que será positivo).

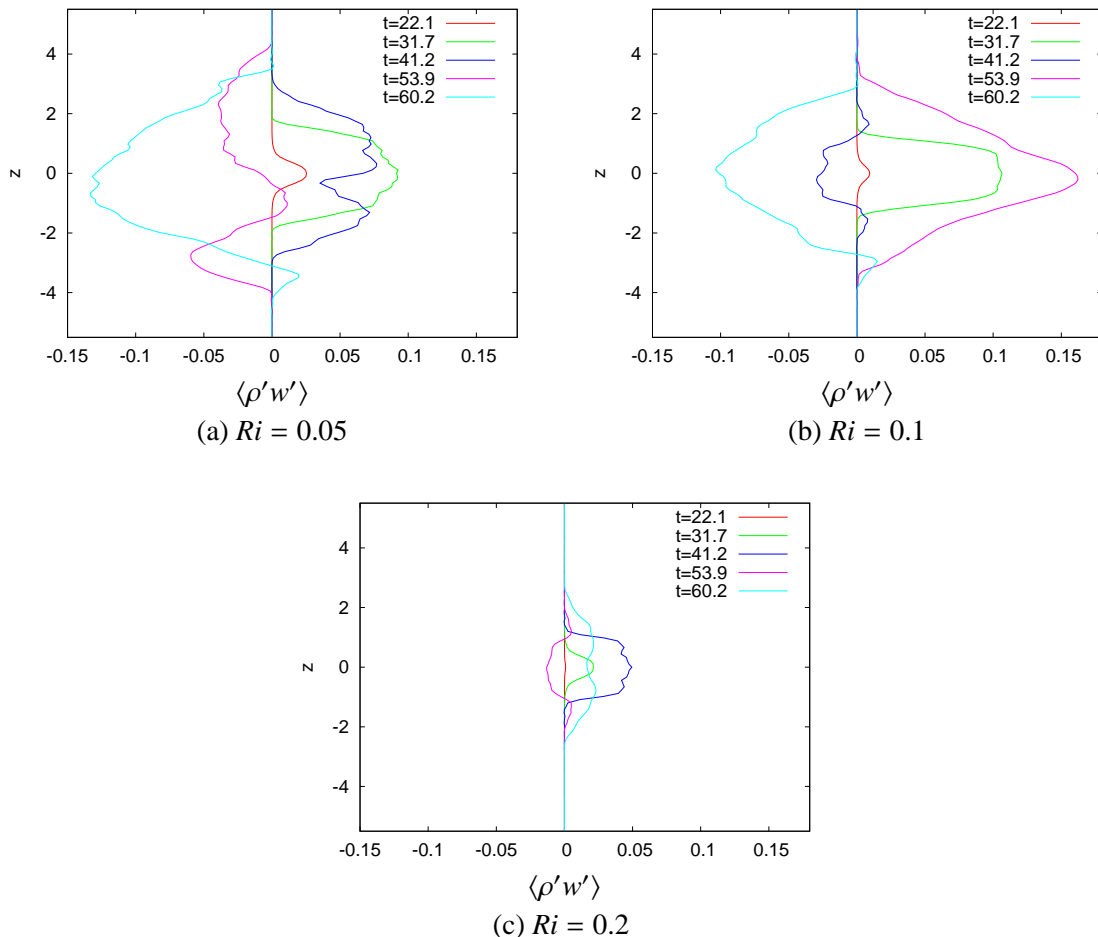


Figura 7.18: Fluxo turbulento médio vertical de massa,  $\langle \rho' w' \rangle$ , para diferentes tempos da simulação: (a) *FSF128Ri005*; (b) *FSF128Ri01*; (c) *FSF128Ri02*.

Quando o fluxo médio vertical de massa é positivo, duas situações podem estar ocorrendo:  
(a) situação de fluxo médio positivo:

\* quando o fluido que se desloca para baixo, com velocidade  $w' < 0$ , transporta uma parcela de

fluido menos denso ( $\rho' < 0$ ) de níveis superiores;

\* quando o fluido que se desloca para cima ( $w' > 0$ ) carrega uma parcela de fluido mais denso ( $\rho > 0$ ) de níveis inferiores.

(b) situação de fluxo médio negativo (situação instável):

\* quando uma parcela de fluido que se desloca para baixo ( $w' < 0$ ) transporta uma parcela de fluido mais denso ( $\rho > 0$ ), que estava na parte superior;

\* quando o fluido que se desloca para cima ( $w' > 0$ ) carrega fluido menos denso ( $\rho' < 0$ ), que estava na parte inferior.

Observa-se na Fig.7.18, que ocorrem situações instáveis, onde o fluxo médio é negativo. Pode estar ocorrendo, por exemplo para  $Ri = 0.05$  e  $t = 60.2$ , que o fluido mais denso que foi levado para cima, com o giro do turbilhão é novamente transportado para baixo.

Na Figura 7.19 são graficados os perfis de densidade média, onde observa-se que a espessura da camada de mistura diminui quando o número de Richardson aumenta.

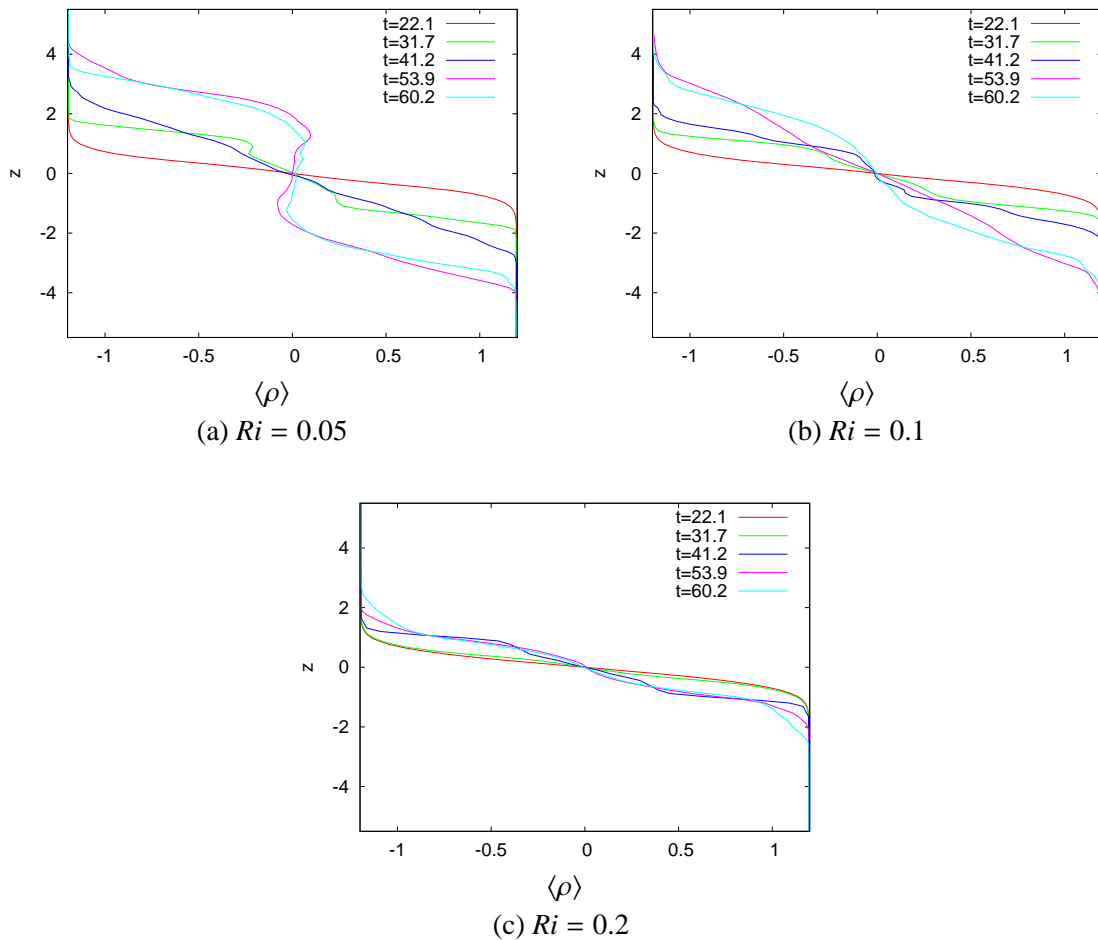


Figura 7.19: Perfil de densidade média  $\langle \rho \rangle$ , para diferentes tempos da simulação: (a)  $FSF128Ri005$ ; (b)  $FSF128Ri01$ ; (c)  $FSF128Ri02$ .

### 7.3.6 Evidências da instabilidade secundária de K-H

Na ampla gama de literatura especializada consultada, até o momento, não se encontrou visualizações de instabilidades secundárias de K-H em uma camada de mistura estavelmente estratificada tridimensional, simulada através de LES

Quando surge a instabilidade secundária de K-H há uma diminuição do campo de tensões cisalhantes na camada baroclínica. A diminuição do campo de tensões ocorre quando um jato (representado pelo item (a) da Fig. 5.1), causado pela camada baroclínica (vorticidade positiva) e uma camada adjacente de vorticidade negativa, se desloca ao longo da camada baroclínica em direção ao ponto de estagnação e a perturba.

As Figuras 7.20 e 7.21 mostram evidências da instabilidade secundária de K-H na camada a  $Ri = 0.05$  e  $Ri = 0.1$ , referentes às simulações  $FSF128Ri005$  e  $FSF128Ri01$ , respectivamente. Em uma camada de mistura estratificada a  $Ri = 0.1$  e com  $Re = 2000$ , é possível que a instabilidade secundária de K-H se desenvolva. O problema é que os vórtices secundários de K-H são muito menores que os turbilhões de K-H e para capturá-los é preciso que a malha computacional seja devidamente refinada, o que não ocorre no caso da simulação  $FSF128Ri005$  e  $FSF128Ri01$ .

As condições sobre as quais a instabilidade secundária de K-H pode se propagar na camada baroclínica foram mostradas no capítulo 5. Um campo de forte taxa de deformação entre os turbilhões de K-H comprime a camada baroclínica na direção normal a ela e tem um efeito estabilizante sobre as instabilidades, como ocorre a  $Ri = 0.2$ . Se o campo de taxa de deformação é enfraquecido ao redor do ponto de estagnação do turbilhão de K-H a instabilidade secundária pode crescer na camada baroclínica.

Duas maneiras de "enfraquecer" a taxa de deformação entre os turbilhões de K-H foram testadas experimentalmente por Atsavaprane & Gharib (1997) [2], em uma camada de mistura estratificada bidimensional, gerada em um tanque inclinado similar ao usado por Thorpe (1968) [90]. A primeira maneira é impor uma forte componente sub-harmônica, que reduz a taxa de deformação e, consequentemente, a vorticidade na camada baroclínica entre dois vórtices que emparelham. Isto pode ser visualizado no capítulo 5 para  $Re \geq 1000$ , onde a camada baroclínica é enfraquecida pelo processo de emparelhamento (Fig. 5.14). A segunda é quando os vórtices primários de K-H "colapsam", reduzindo o campo de deformação. Uma vez que o campo de deformação é diminuído a instabilidade secundária de K-H cresce rapidamente.

As simulações  $FSF128Ri005$  e  $FSF128Ri01$  apresentam evidências da instabilidade secundária de K-H ocorrendo após o emparelhamento, como nos casos bidimensionais mostrados no capítulo 5. É importante ressaltar que os cortes longitudinais, a  $y = 4.4$  mostrados nas Figuras 7.20, 7.21, 7.22 e 7.23, mostram que, mesmo quando a estratificação é fraca ( $Ri = 0.05$ ), é possível o desenvolvimento da instabilidade secundária de K-H.

A instabilidade secundária de K-H pode ser observada na Fig. 7.20, onde um pequeno vórtice de K-H aparece no centro da camada baroclínica, para  $Ri = 0.05$ . Para  $Ri = 0.1$  (média



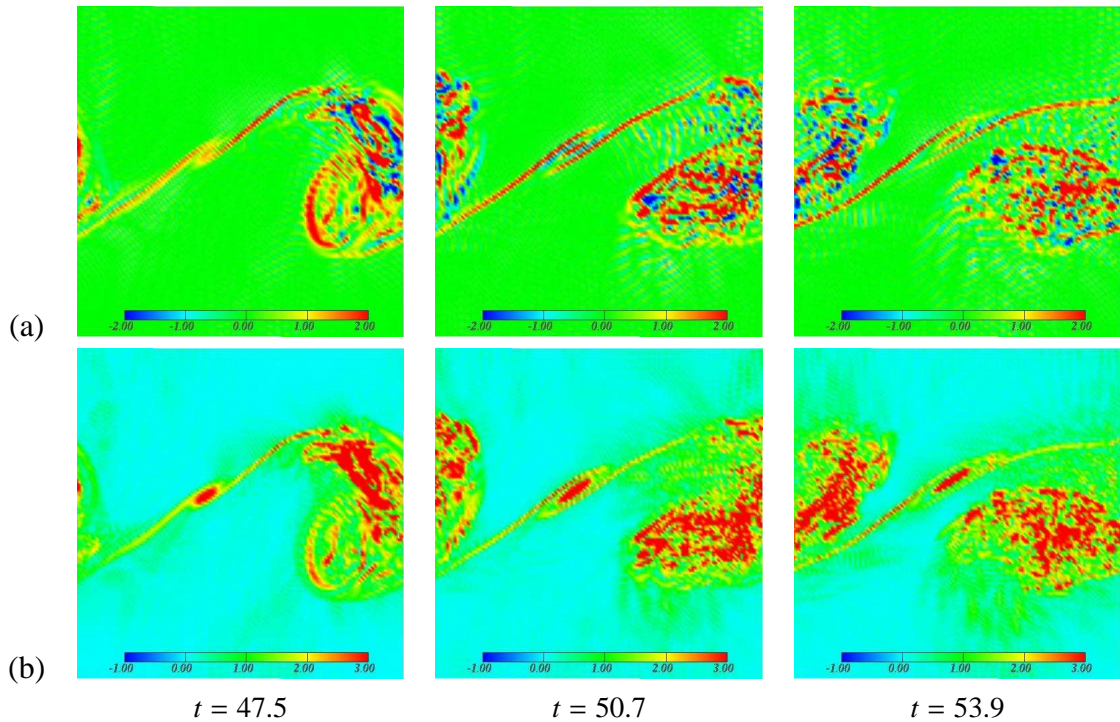


Figura 7.20: Evidência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Simulação *FSF128Ri005*,  $Ri = 0.05$ ,  $Re = 2000$ , cortes longitudinais no plano a  $y = 4.4$ ; (a) vorticidade transversal,  $\omega_y$ ; (b) módulo da vorticidade,  $\|\omega\|$ .

estratificação) é visível um vórtice secundário de K-H próximo ao turbilhão resultante do emparelhamento, e um outro no centro da camada, como se pode observar na Fig. 7.21. Como já comentado anteriormente, verificou-se a necessidade de uma grade computacional mais refinada para captar as pequenas estruturas secundárias de K-H. Quando refina-se a grade exige-se menos do modelo FSF, em contra partida, captam-se melhor as pequenas estruturas.

Nas Figuras 7.22 e 7.23, as quais mostram cortes longitudinais a  $y = 6.5$ , referentes as simulações *FSF192Ri005* e *FSF192Ri01*, claramente verifica-se a presença da instabilidade secundária de K-H, tanto para  $Ri = 0.05$  como para  $Ri = 0.1$ . Para a fraca estratificação, um vórtice secundário de K-H se forma quando os turbilhões primários estão emparelhando. Para  $Ri = 0.1$ , observa-se na Fig. 7.23, que a camada baroclínica, de forte vorticidade, está com maiores oscilações que no caso a  $Ri = 0.05$ . Assim, um vórtice secundário é observado no tempo  $t = 61.3$ , sugerindo a formação de outro imediatamente após o primeiro.

Neste caso, a instabilidade secundária de K-H surge após o emparelhamento dos vórtices primários, como nas DNS, porém quando os vórtices longitudinais já estão formados no escoamento. Novamente, este fato comprova que a condição inicial, o número de Richardson e o número de Reynolds, são fatores determinantes para o desenvolvimento das instabilidades na camada de mistura estavelmente estratificada.

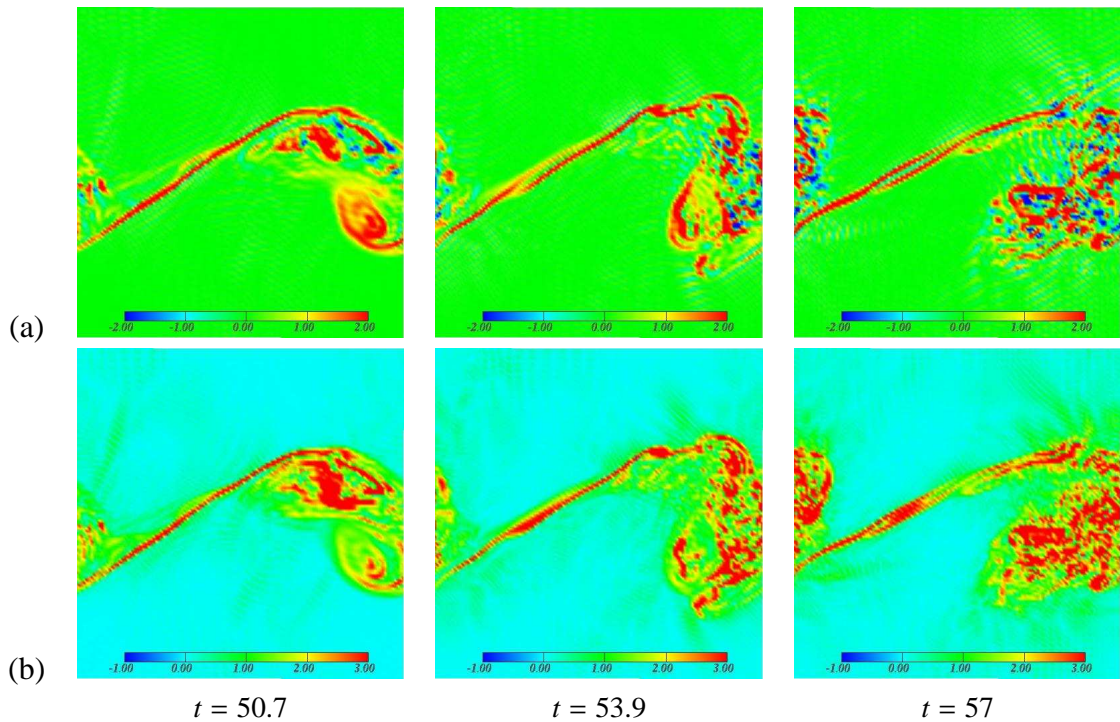


Figura 7.21: Evidência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Simulação *FSF128Ri01*,  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 2000$ , cortes longitudinais no plano a  $y = 4.4$ ; (a) vorticidade transversal,  $\omega_y$ ; (b) módulo da vorticidade,  $\|\omega\|$ .

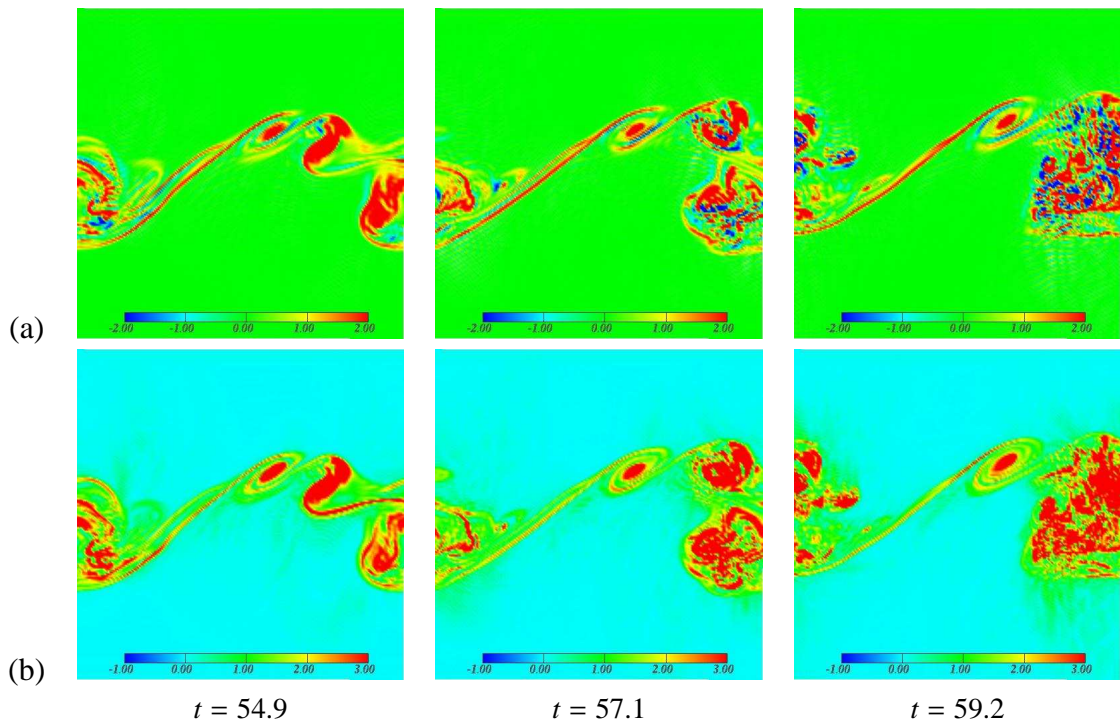


Figura 7.22: Evidência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Simulação *FSF192Ri005*,  $Ri = 0.05$ ,  $Re = 2000$ , cortes longitudinais no plano a  $y = 6.5$ ; (a) vorticidade transversal,  $\omega_y$ ; (b) módulo da vorticidade,  $\|\omega\|$ .

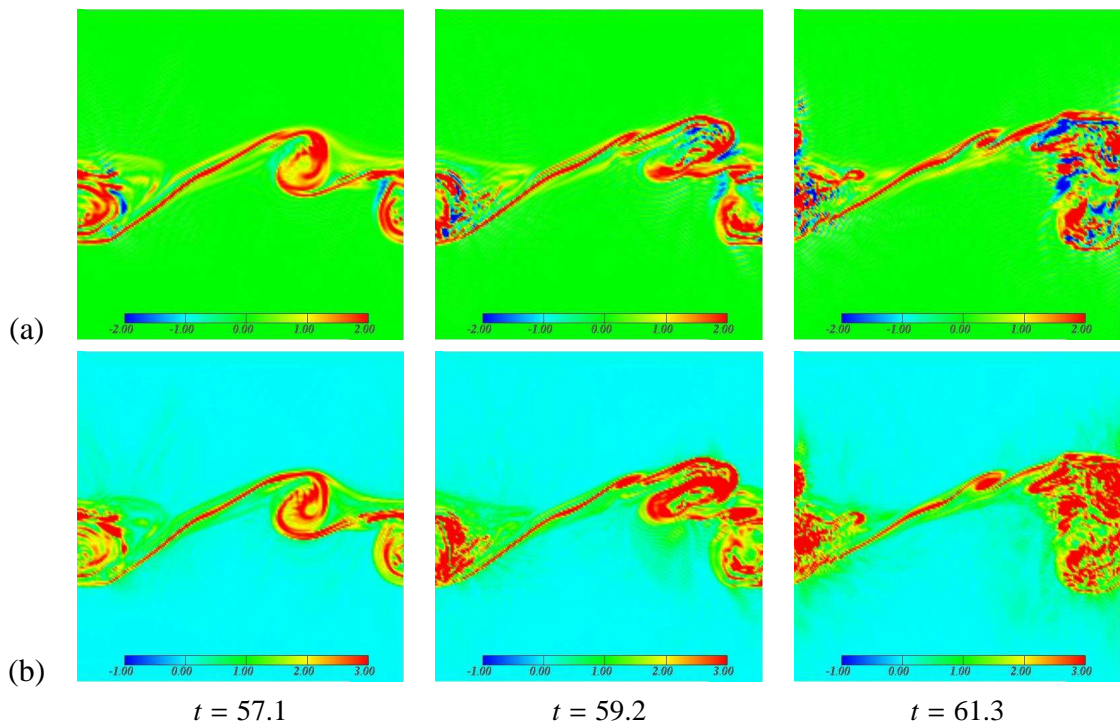


Figura 7.23: Evidência da instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Simulação *FSF192Ri01*,  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 2000$ , cortes longitudinais no plano a  $y = 6.5$ ; (a) vorticidade transversal,  $\omega_y$ ; (b) módulo da vorticidade,  $\|\omega\|$ .

### 7.3.7 A mistura em função do $Ri$

Isosuperfícies de densidade e cortes transversais no plano  $yz$ , perpendicular à direção longitudinal  $x$ , são mostrados na Fig. 7.24. Nestes cortes pode-se visualizar como o escoamento se mistura. A mistura dita a taxa à qual as diferentes propriedades do fluido são homogenizadas.

Lin & Corcos (1984) [53] sugeriram que o início da mistura é provavelmente causado pelo colapso ou concentração de vórtices longitudinais. Segundo Cortesi *et al* (1999) [18], os vórtices longitudinais contribuem para a mistura total do escoamento estratificado próximo ao tempo de colapso dos mesmos e depende das condições iniciais, do número de Richardson e do número de Prandtl.

Já Peltier & Caulfield (2003) [67] notaram uma variação qualitativa no comportamento do escoamento para  $Ri \geq 0.1$ , com a taxa de mistura aumentando diante da forte estratificação. Isto pode ser atribuído à diminuição da dissipação devido à redução da intensidade dos vórtices longitudinais para a fase final da transição.

Visualmente, verifica-se na Fig. 7.24, que a mistura no escoamento a  $Ri = 0.05$  se processa de maneira mais eficiente em relação aos outros casos estratificados, no tempo observado.

Segundo Caulfield & Peltier (2000) [10] os vórtices longitudinais são os responsáveis pela transição à turbulência e por uma melhor mistura nos escoamentos cisalhantes estratificados. Esta afirmação é contestável. A importância relativa dos vários estágios do escoamento estrati-

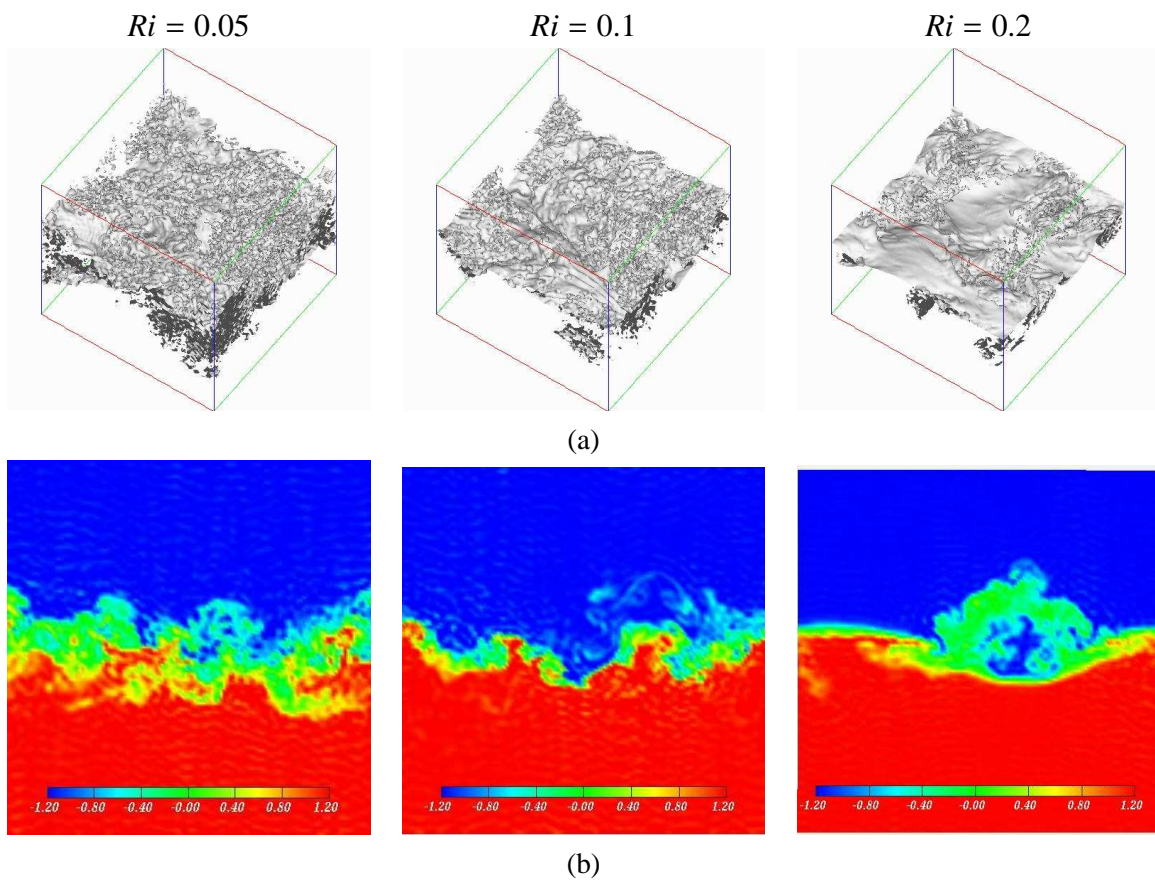


Figura 7.24: (a) Campos de densidade. (b) Cortes transversais do campo de densidade, plano  $x = 4.4$ . Simulação  $FSF128Ri005$ ,  $FSF128Ri01$  e  $FSF128Ri02$ ,  $t = 66.6$ ,  $Re = 2000$ .

ficado tem uma forte dependência dos parâmetros do escoamento, do tipo de perturbação dada pela condição inicial e das instabilidades secundárias que nele poderão se desenvolver.

# Capítulo 8

## Conclusões e Perspectivas

### 8.1 Conclusões

O presente trabalho investigou o quanto e de que modo a estratificação estável afeta o desenvolvimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz, a geração de instabilidades na camada baroclínica e as instabilidades geradoras dos movimentos tridimensionais. Para tal investigação foram empregadas as técnicas de Simulação Numérica Direta (DNS) das equações de Navier-Stokes na aproximação de Boussinesq e de Simulação de Grandes Escalas (LES). Foi verificado que a estratificação estável em densidade muda consideravelmente a dinâmica do escoamento em relação à do escoamento homogêneo.

Foi analisada qualitativamente a natureza por meio da qual a turbulência pode se desenvolver na camada de mistura tridimensional estratificada e homogênea, verificando como são formados os vórtices longitudinais após a saturação dos turbilhões de K-H. As simulações tridimensionais foram realizadas via DNS para  $Re = 200$  e por meio de LES, utilizando o modelo Função Estrutura Filtrada, para  $Re = 2000$ .

Foram realizados testes para verificar o comportamento do código de cálculo `Incompact3d` em relação aos efeitos da estratificação. Os resultados obtidos mostraram ter uma boa concordância com a teoria de estabilidade linear [30].

Os principais resultados obtidos no trabalho responderam às seguintes questões da introdução:

- *Como os parâmetros adimensionais  $Ri$  e  $Re$  interferem no desenvolvimento das instabilidades no escoamento bidimensional estratificado?*
- *As instabilidades induzidas por efeitos baroclínicos modificam a dinâmica do escoamento?*

Os parâmetros adimensionais interferem, **sim**, no desenvolvimento das instabilidades. As instabilidades geradas por efeitos baroclínicos modificam, **sim**, a dinâmica do escoamento.

- As simulações bidimensionais a número de Reynolds  $Re = 300$  mostraram que a estratificação atenua a instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Esta instabilidade é atenuada devido à presença da força de empuxo atuante no escoamento estratificado, a qual gera o gradiente longitudinal de densidade. Este gradiente alimenta a região entre os turbilhões de K-H com vorticidade, induzindo uma instabilidade cisalhante no local. O forte gradiente de densidade e as finas camadas de vorticidade formam a camada baroclínica, a qual foi observada nas simulações. Como a vorticidade é reforçada na camada baroclínica e diminuída no núcleo dos turbilhões evita que a instabilidade de Kelvin-Helmholtz se amplifique. A presença da estratificação tem um efeito estabilizante sobre a dinâmica do escoamento.

- As mesmas simulações demonstraram que o aumento do número de Richardson no escoamento acarreta um retardo no processo de emparelhamento dos turbilhões de K-H, uma redução da energia total, uma diminuição do tamanho dos turbilhões e da espessura da camada de vorticidade. O enrolamento modifica a distribuição de densidade e reduz o entranhamento (para forte estratificação), atenuando a instabilidade convectiva gravitacional. Foi verificado uma diminuição nos fluxos de massa com o aumento do número de Richardson, causada pela combinação da redução do volume de fluido entranhado dentro do turbilhão K-H, a inibição do processo de emparelhamento dos turbilhões e do decréscimo das perturbações da velocidade vertical e horizontal. O aumento do número de Richardson faz com que a dinâmica do escoamento seja dominada pelas forças de empuxo, que prevalecem frente aos efeitos de cisalhamento, como foi mostrado na evolução temporal da espessura de vorticidade e energia cinética.

- As simulações bidimensionais a  $Re = 500, 1000$  e  $2000$ , apresentadas no capítulo 5, mostraram duas diferentes instabilidades secundárias na camada baroclínica: uma que se origina na região próxima ao núcleo do turbilhão de K-H e se propaga para a camada baroclínica (a instabilidade próxima ao núcleo), e a outra na camada baroclínica propriamente dita (a instabilidade secundária do tipo Kelvin-Helmholtz). Foi verificado que as instabilidades secundárias na camada baroclínica ocorrem para  $Re \geq 500$ , tanto para uma média estratificação ( $Ri = 0.07$ ) como para uma forte estratificação ( $Ri = 0.167$ ), quando são simulados dois turbilhões de K-H e ocorre o processo de emparelhamento. Um aumento do fluxo vertical de massa foi notado imediatamente após a manifestação das instabilidades secundárias. Este aumento de fluxo pode ser relacionado à geração das pequenas estruturas do tipo K-H que se formam na camada baroclínica e diminuem localmente o número de Richardson.

- Foi verificado que o aumento do número de Reynolds favorece o surgimento da instabilidade próxima ao núcleo antes do emparelhamento dos turbilhões de K-H e intensifica a manifestação das instabilidades secundárias do tipo K-H na camada baroclínica. Estas instabilidades se amplificam somente quando uma vorticidade ( $\omega_y$ ) negativa ocorre no escoamento e é de valor absoluto comparável à positiva. Uma explicação para o surgimento das instabi-

lidades secundárias na camada baroclínica pode estar relacionada com a relação entre a taxa de deformação e a vorticidade no local. Durante o enrolamento, a vorticidade do núcleo do turbilhão, induz um campo de deformação na camada baroclínica, proporcional à circulação ao redor dos núcleos. Porém, esta região entre turbilhões, que é continuamente estirada, está também sujeita à produção de vorticidade pelo torque baroclínico. O torque baroclínico, por meio do gradiente de densidade longitudinal, aumenta a vorticidade na camada baroclínica. Tal fato sugere que a diminuição da razão entre a taxa de deformação e a vorticidade na camada baroclínica, possibilita o desenvolvimento das instabilidades secundárias. Quando foi realizada uma simulação tridimensional, a  $Re = 500$ , foi constatado que a instabilidade secundária de K-H acelera a transição à turbulência da camada de mistura, com forte estratificação, e é de natureza bidimensional. Os vórtices secundários de K-H possuem a mesma dinâmica que os turbilhões primários de K-H, mostrando que atingem a máxima amplitude e saturam quando sujeitos a perturbações transversais.

• *No escoamento estratificado, os vórtices longitudinais, são formados da mesma maneira que no escoamento homogêneo?*

• *De que forma a estratificação afeta a formação destes vórtices? Quais são os fatores que contribuem para esta alteração?*

• *O comprimento de onda transversal mais amplificado, para a camada de mistura estratificada, é o mesmo que o encontrado para a camada de mistura homogênea?*

• A natureza da transição à turbulência foi analisada por meio de DNS tanto na camada de mistura tridimensional estratificada como na homogênea. Nas simulações a  $Ri > 0$  foi constatado que os vórtices longitudinais **não** são formados da mesma maneira que no escoamento homogêneo. Isto ocorre porque a tridimensionalização na camada de mistura estratificada é mais complexa que na camada homogênea, devido ao maior número de instabilidades secundárias que se propagam no escoamento estratificado. O mecanismo de tridimensionalização da camada de mistura estratificada está associado com a instabilidade convectiva gravitacional, com a instabilidade secundária cisalhante, induzida pelo gradiente de densidade longitudinal, e com a instabilidade translativa/elíptica. A estratificação, as condições iniciais e o tamanho do domínio transversal afetam, **sim**, a formação dos vórtices longitudinais.

• Nas simulações tridimensionais a  $Re = 200$  (DNS), com condições iniciais forçadas para as flutuações de velocidades, e comprimento transversal do domínio  $L_y = 2/3L_x$ , foi investigado a influência do número de Richardson na formação dos vórtices longitudinais. Os casos estratificados mostraram alterações na estrutura dos vórtices longitudinais, causadas pela instabilidade convectiva gravitacional e a instabilidade secundária cisalhante. Com o aumento do número de Richardson, os movimentos verticais diminuem e, conseqüentemente, diminui a instabilidade convectiva gravitacional e os movimentos no núcleo dos turbilhões, geradores da instabilidade

translativa/elíptica. Foi constatado que a distribuição espacial dos vórtices longitudinais é fortemente afetada pela estratificação.

Os planos transversais, a  $x$  constante, mostram que os vórtices longitudinais, na camada de mistura não estratificada, têm a extensão vertical de quase todo o domínio e ocupam toda a extensão longitudinal do mesmo. Quando a camada de mistura é estratificada e o número de Reynolds é baixo, o efeito estabilizante da densidade faz com que os movimentos de menores escalas se concentrem sobre uma extensão do tamanho do vórtice primário e não se desenvolvem sobre todo o domínio longitudinal, o que concorda com o trabalho experimental de Schowalter *et al.* [73].

- A influência da condição inicial para a flutuação de velocidade transversal foi investigada nas simulações tridimensionais a  $Re = 200$ . Verificou-se que na presença do modo transversal forçado, a instabilidade translativa amplifica antes que na presença do modo aleatório, e o escoamento se mostrou mais organizado. Assim, maiores diferenças na formação dos vórtices longitudinais podem ser esperadas em função da condição inicial para a flutuação de velocidade transversal.

- Outro parâmetro investigado, que afetou a formação dos vórtices longitudinais, foi o comprimento transversal do domínio. No caso a  $Ri = 0$ , os resultados obtidos para  $Re = 200$  (DNS) mostraram que, quando o comprimento transversal do domínio é de seis vezes o comprimento de onda fundamental ( $L_y = 6\lambda_x = 42$ ), o comprimento de onda transversal,  $\lambda_y \approx 0.8\lambda_x$ , é próximo ao predito teoricamente por Pierrehumbert & Widnall [70]. Entretanto, se a extensão transversal do domínio é duas vezes o comprimento de onda fundamental ( $L_y = 2\lambda_x = 14$ ), o comprimento de onda transversal é igual ao comprimento de onda fundamental longitudinal ( $\lambda_y = \lambda_x$ ), quando a condição inicial para a flutuação de velocidade transversal é um ruído branco.

Para o caso estratificado, a  $Ri = 0.1$ , foi verificado que o comprimento de onda transversal é igual ao observado para  $Ri = 0$ , isto quando o comprimento transversal do domínio é  $L_y = 14$ . Por outro lado, se  $L_y$  é seis vezes o comprimento de onda longitudinal ( $L_y = 42$ ), o comprimento de onda transversal é aproximadamente 1.2 vezes o comprimento de onda fundamental longitudinal ( $\lambda_y = 1.2\lambda_x$ ) e, como consequência, um menor número de pares de vórtices foram observados. A simulação realizada num domínio com comprimento transversal quatro vezes  $\lambda_x$  ( $L_y = 28$ ), mostrou uma menor coerência nos vórtices longitudinais e o comprimento de onda transversal encontrado foi igual a  $1\lambda_x$ . Portanto, o aumento do comprimento transversal do domínio de cálculo altera o comprimento de onda transversal, um indício de que outros mecanismos podem estar ocorrendo nesta situação.

Foi observado que os vórtices longitudinais não se formam quando a condição inicial para a flutuação de velocidade transversal é um ruído branco e a estratificação é forte,  $Ri = 0.2$  ( $Re = 200$ , DNS). A forte estratificação suprime o desenvolvimento das instabilidades e há



uma tendência do escoamento se tornar laminar, porém a resolução marginal usada impede que se dê uma conclusão definitiva a respeito.

O comprimento de onda transversal mais amplificado é dependente da condição inicial, do comprimento transversal do domínio e do número de Richardson. Como as DNS tridimensionais foram realizadas apenas para  $Re = 200$ , verificou-se a necessidade de uma futura investigação da influência do número de Reynolds, para diferentes níveis de estratificação, na formação dos vórtices longitudinais utilizando diferentes domínios transversais.

- Nos cálculos utilizando DNS, a transição foi analisada até a formação dos vórtices longitudinais. Para chegar mais próximo de um escoamento turbulento foram realizadas simulações a  $Re = 2000$  usando LES.

- *A instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz, na camada baroclínica, é um fenômeno estritamente bidimensional? Ocorre no escoamento tridimensional?*

- Nas simulações a  $Re = 2000$ , através de LES, utilizando um ruído branco como condição inicial para as três componentes de flutuação de velocidade, foi verificado a formação dos vórtices longitudinais para todos os casos estratificados simulados ( $Ri = 0$ ;  $Ri = 0.1$  e  $Ri = 0.2$ ). Embora uma melhor resolução da grade de cálculo possibilitaria capturar mais corretamente o comportamento dos vórtices longitudinais e das instabilidades secundárias na camada baroclínica.

Foi observado, **sim**, evidências da instabilidade secundária de K-H ocorrendo na camada de mistura tridimensional a  $Re = 2000$ , onde os vórtices longitudinais eram visíveis, para os casos estratificados a  $Ri = 0.05$  e  $Ri = 0.1$ , após o emparelhamento dos turbilhões de K-H. A evidência da instabilidade secundária de K-H ocasionou um aumento do fluxo turbulento vertical de massa, como também foi observado no capítulo 5, quando se propagavam os vórtices secundários de K-H na camada baroclínica, sugerindo fortemente uma relação causa-efeito entre eles.

O modelo Função Estrutura Filtrada foi apto a resolver as pequenas escalas dos escoamentos estratificados e homogêneos, apesar das limitações mostradas na simulação a quatro vórtices, onde observou-se um acúmulo de energia nos maiores números de onda. Provavelmente, com a grade de pouca definição empregada, exista uma significativa diferença entre o tensor de tensões sub-malha exato e o valor calculado com a utilização do modelo sub-malha. Mesmo com esta limitação do modelo, foi obtido uma aproximação de um regime de auto-similaridade, mostrando uma concordância razoável com os valores experimentais de Bell & Metha [4].

- A partir dos resultados obtidos no presente trabalho foi constatado que os estágios do escoamento, desde o início da transição até a turbulência, têm grande dependência dos parâmetros do escoamento ( $Ri$  e  $Re$ ), do tipo de perturbação dada pela condição inicial, das instabilidades

secundárias que nele podem se desenvolver e da grade de cálculo empregada. Nos escoamentos estratificados, além dos vórtices longitudinais, outros mecanismos podem ser os responsáveis pela transição à turbulência, como por exemplo, as instabilidades secundárias na camada baroclínica.

## 8.2 Perspectivas para trabalhos futuros

- Para trabalhos futuros utilizando simulação numérica direta (DNS), recomenda-se:
  - Investigar a formação da instabilidade primária de Holmboe:
    - \* Testando diferentes espessuras para o perfil de densidade;
    - \* Verificando o comportamento do escoamento quando  $d \neq 0$  (distância vertical entre o centro da camada de mistura e o centro do perfil de densidade);
  - Verificar os efeitos da gravidade na direção longitudinal (camada de mistura inclinada com relação à  $\vec{g}$ );
  - Analisar a influência do domínio vertical na formação dos vórtices longitudinais;
  - Analisar a influência de outras condições iniciais na formação dos vórtices longitudinais, como a relação entre o modo subharmônico e o modo transversal;
  - Investigar, mais detalhadamente, o desenvolvimento das instabilidades secundárias na camada baroclínica em domínios tridimensionais, utilizando diferentes condições iniciais para a flutuação de velocidade transversal,  $Ri$  e  $Re$ .
- Utilizando simulação de grandes escalas (LES):
  - Verificar o comportamento de outros modelos sub-malha frente a estratificação;
  - Realizar testes utilizando diferentes condições iniciais;
  - Investigar mais detalhadamente as instabilidades secundárias na camada baroclínica, empregando uma grade mais refinada, para diferentes  $Ri$  e  $Re$ ;

Além das sugestões acima, propõe-se :

- Analisar a eficiência da mistura no escoamento estratificado, ou seja, o mecanismo físico que controla a eficiência com que o campo de densidade é misturado pelos processos turbulentos, em função do  $Ri$ .
- Determinar, utilizando a gama de dados obtidos, o coeficiente de dispersão e a taxa de mistura.

# Bibliografia

- [1] A      , D. B. Critical layers in accelerating two-layer flows. *J. Fluid Mech.* **197** (1988), 429–451.
- [2] A      , P.,      G      , M. Structures in stratified plane mixing layers and the effects of cross-shear. *J. Fluid Mech.* **342** (1997), 53–86.
- [3] B      , G. H. *A introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, London, 1967.
- [4] B      , J. H.,      M      , R. D. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers. *AIAA Journal* **28** (1990), 2034–2042.
- [5] B      , L. P.,      R      , A. Streamwise vortex structure in mixing layer. *J. Fluid Mech.* **170** (1986), 499–525.
- [6] B      , F. K.,      W      , C. D. Laboratory observations of shear-layer instability in a stratified fluid. *Boundary-Layer Met.* **5** (1973), 67–77.
- [7] B      , G. L.,      R      , A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.* **64** (1974), 775–816.
- [8] C      , C., H      , M. Y., Q      , A.,      Z      , T. A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer - Verlag, New York, 1988. 557p.
- [9] C      , C. P.,      K      , R. R. The nonlinear development of three-dimensional disturbances at hyperbolic stagnation points: A model of the braid region in mixing layers. *Phys. Fluids A* **12** (2000), 1032–1043.
- [10] C      , C. P.,      P      , W. R. The anatomy of the mixing transition in homogenous and stratified free shear layers. *J. Fluid Mech.* **413** (2000), 1–47.
- [11] C      , J. P.,      L      , M. Parameterization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.* **38** (1981), 2747–2757.
- [12] C      , P., L      , M.,      L      , E. Large and small-scale stirring of vorticity and a passive scalar in a 3-d temporal mixing layer. *Phys. Fluids A* **4** (1992), 2761–2778.

- [13] C , P., S , J. H., B' , P. Streamwise vortices in large eddy simulation of mixing layers. *Eur. J. Mech. - B/Fluids* **17** (1998), 615–637.
- [14] C , G. M., L , S. J. The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. Part 2: The origin of the three-dimensional motion. *J. Fluid Mech.* **139** (1984), 67–95.
- [15] C , G. M., S , F. S. Vorticity concentration and the dynamics of unstable free shear layers. *J. Fluid Mech.* **73** (1976), 241–264.
- [16] C , G. M., S , F. S. The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. Part 1: Introduction and the two-dimensional flow. *J. Fluid Mech.* **139** (1984), 29–65.
- [17] C , A. B., Y , G., B , S. Numerical investigation of the formation of three-dimensional structures in stably-stratified mixing layers. *Phys. Fluids* **10** (1998), 1449–1473.
- [18] C , A. B., Y , G., B , S. Numerical investigation of the entrainment and mixing processes in neutral and stably-stratified mixing layers. *Phys. Fluids* **11** (1999), 162–185.
- [19] C , W. O., J , T. L., J , R. D. *Theory and Computation in Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, London, 2003.
- [20] D S , C. B., P , J. C. F. The effect of subgrid-scale models on the vortices computed from large-eddy simulations. *Phys. Fluids* **16** (2004), 4506–4534.
- [21] D , P. A., P , W. R. Some characteristics of the kelvin-helmholtz and resonant over-reflection modes of shear flow instability and of their interaction through vortex pairing. *J. Atmos. Sci.* **36** (1979), 2394–2412.
- [22] D , P. G., R , W. H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, New York, 1989. -.
- [23] D , Y., D , F. On coherent-vortex identification in turbulence. *J. Turbulence* **1** (2000), 1–22.
- [24] D , F., C , P., L , M. Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate. *J. Fluid Mech.* **326** (1996), 1–36.
- [25] F , H. J. S. Turbulent mixing in stratified fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23** (1991), 455–493.
- [26] G , E. E., R , J. H., A , D. Internal waves in the atmosphere from high-resolution radar measurements. *J. Geophys. Res.* **75** (1970), 3523–3535.

- [27] G , P. M. Incompressible fluid dynamics: some fundamental formulation issues. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23** (1991), 413–453.
- [28] H , S. P., L , G. A. Symmetric and nonsymmetric holmboe instabilities in an inviscid flow. *Phys. Fluids* **11** (1999), 1459–1468.
- [29] H , L. R., B , M. G., O , M. H. Tidally generated internal wave packets in massachusetts bay. *Nature* **278** (1979), 312–317.
- [30] H , P. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. *J. Fluid Mech.* **51** (1972), 39–61.
- [31] H , L. N. Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.* **10** (1961), 509–512.
- [32] H , P., B , R. E. Turbulence evolution and mixing in a two-layer stably stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **285** (1995), 41–67.
- [33] J , F., S , S., V A , C. Direct numerical simulations of the turbulence evolution in a uniformly sheared and stably stratified flow. *J. Fluid Mech.* **342** (1997), 231–261.
- [34] J , J., H , F. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.* **285** (1995), 69–94.
- [35] J , D. W., S , P. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford University Press, London, 1977. -.
- [36] K , R. R. Elliptical instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34** (2001), 83–113.
- [37] K , G. P., P , W. R. The onset of turbulence in finite-amplitude kelvin-helmholtz billows. *J. Fluid Mech.* **155** (1985), 1–35.
- [38] K , G. P., P , W. R. The role of transverse secondary instabilities in the evolution of free shear layers. *J. Fluid Mech.* **202** (1989), 367–402.
- [39] K , G. P., R.P , W. The influence of stratification on secondary instability in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **227** (1991), 71–106.
- [40] K , C. G., B , F. K. Instability and turbulence in a stratified fluid with shear. *J. Fluid Mech.* **93** (1979), 135–159.
- [41] K , A. G., M , P. On the effect of numerical erros in large eddy simulations of turbulent flows. *J. Comp. Phys.* **131** (1997), 310–322.
- [42] L , E., S , J. H. *Documentação do código Incompact3d*. -, Poitiers França, 1999.

- [43] L , F., C , A. Direct numerical simulations of the elliptic instability of a vortex pair. *Phys. Fluids* **12** (2000), 1016–1031.
- [44] L , S. *Simulation numérica direct du contrôle d'écoulement cisailés libres par injection de fluide*. PhD thesis, Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées Université de Poitiers, 2001.
- [45] L , S., L , E., B , J. P. Direct numerical simulations of a jet controlled by fluid injection. *J. Turbulence* **3** (2002).
- [46] L , J. C., C , J. S., M , T. On the origin and evolution of streamwise vortices in a plane free shear layer. *J. Fluid Mech.* **172** (1986), 231–258.
- [47] L , J. C., C , H. Three-dimensional instability of a plane free shear layer: an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **188** (1988), 53–86.
- [48] L , G. A., B , F. K., R , L. G. The stability of a sheared density interface. *Phys. Fluids A* **10** (1991), 2360–2370.
- [49] L , S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.* **103** (1992), 16–42.
- [50] L , M. *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997. 515p.
- [51] L , M., M' , O., C , P. *Large-Eddy Simulations of Turbulence*. Cambridge University Press, New York, 2005. 205p.
- [52] L , M., S , C., L R , P., C , P. The mixing layer and its coherence examined from the point of view of two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **192** (1988), 511–534.
- [53] L , S. J., C , G. M. The mixing layer: Deterministic models of a turbulent flow. Part 3: The effect of plane strain on the dynamics of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **141** (1984), 139–178.
- [54] M , D. M. V., S , E. B. C., S , J. H. Simulação numérica direta de uma camada de mistura estratificada. In *Proceedings of the III Workshop Brasileiro de Micrometeorologia* (Santa Maria, RS, Brazil, 2003), Revista Ciência & Natura, pp. 129–134.
- [55] M , D. M. V., S , E. B. C., S , J. H. Transition to turbulence in a stable stratified temporal mixing layer through direct numerical simulation. In *Proceedings of the 10th Congress of Thermal Sciences and Engineering* (Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 2004), p. 11.

- [56] M..., M. A. F., S..., J. H., M..., M. T. Using linear and non linear stability theory for evaluating code accuracy. In *Proceedings of the III Escola de Primavera de Transição e Turbulência* (Florianopolis, Brazil, 2002).
- [57] M..., M. F. *Turbulência, cap: Instabilidade Hidrodinâmica Não Linear*, vol. 2. ABCM, 2003, pp. 305–355.
- [58] M..., M. T. *Turbulência, cap: Estabilidade de escoamentos Laminares: Teoria Linear*, vol. 2. ABCM, 2003, pp. 245–304.
- [59] M..., M. T., M..., M. A. F. Instabilidade hidrodinâmica e transição para turbulência com aplicações em engenharia e meteorologia. In *Proceedings of the 9th Congress of Thermal Sciences and Engineering* (Caxambu, Brazil, 2002).
- [60] M..., R. W., O..., S. A., B..., M. E., M..., S., R..., J. J. Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *J. Fluid Mech.* **184** (1987), 207–243.
- [61] M..., A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.* **19** (1964), 543–556.
- [62] M..., J. W. On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.* **10** (1961), 496–508.
- [63] M..., C. A. S. Simulação numérica de esteiras em transição utilizando o método dos contornos virtuais. Master's thesis, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.
- [64] M..., R., R..., M. M. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: pairing and transition to turbulence. *J. Fluid Mech.* **247** (1993), 275–320.
- [65] M..., O., L..., M. Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **239** (1992), 157–194.
- [66] P..., P. C., S..., F. S., C..., G. M. A numerical simulation of kelvin-helmholtz waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.* **73** (1976), 215–240.
- [67] P..., W. R., C..., C. P. Mixing efficiency in stratified shear flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **35** (2003), 135–167.
- [68] P..., W. R., H..., J., C..., T. L. The evolution of finite-amplitude kelvin-helmholtz billows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **10** (1978), 53–87.
- [69] P..., R. T. Universal short wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *Phys. Rev. Letter* **57** (1986), 2157–2160.

- [70] P , R. T., W , S. E. The two and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear flows. *J. Fluid Mech.* **114** (1982), 59–82.
- [71] R , M. M., M , R. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: the kelvin-helmholtz rollup. *J. Fluid Mech.* **243** (1992), 183–226.
- [72] S , E. B. C. *Turbulência, cap: Turbulência em Escoamentos Estratificados: Aplicações Industriais*, vol. 2. ABCM, 2003, pp. 359–394.
- [73] S , D. G., V A , C. W., L , J. C. A study of streamwise vortex struture in a stratified shear layer. *J. Fluid Mech.* **281** (1994), 247–291.
- [74] S N , A. *Turbulência, cap: Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos*, vol. 1. ABCM, 2002, pp. 158–190.
- [75] S , J. H. *Simulation des grandes échelles des zones de mélange: application à la propulsion solide des lanceurs spatiaux*. PhD thesis, l’Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [76] S , J. H. *Turbulência, cap: Simulação Numérica Direta e de Grandes Escalas de Escoamentos Transicionais e Turbulentos*, vol. 2. ABCM, 2003, pp. 01–81.
- [77] S , J. H., L , E. Direct numerical simulations of wakes with virtual cylinders. *Int. J. Comp. Fluid Dyn.* **16** (4) (2002), 305–314.
- [78] S , W. D. Dissipation range geometry and scalar spectra in sheared, stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **401** (1999), 209–242.
- [79] S , W. D. Secondary Kelvin-Helmholtz instability in weakly stratified shear flow. *J. Fluid Mech.* **497** (2003), 67–98.
- [80] S , W. D., J.M . Anisotropy of turbulence in stably stratified mixing layers. *Phys. Fluids* **12** (2000a), 1343–1362.
- [81] S , W. D., J.M . Length scales of turbulence in stably stratified mixing layers. *Phys. Fluids* **12** (2000b), 1327–1342.
- [82] S , W. D., P , W. R. Instability and transition in finite-amplitude Kelvin-Helmholtz and holmboe waves. *J. Fluid Mech.* **228** (1991), 387–415.
- [83] S , W. D., P , W. R. Three-dimensionalization of barotropic vortices on the f-plane. *J. Fluid Mech.* **265** (1994), 25–64.
- [84] S , W. D., W , K. B. Turbulence and mixing in Holmboe waves. *J. Phys. Oceanogr.* **265** (2002), 25–64.



- [85] S , C. Two-dimensional secondary instabilities in a strongly stratified shear layer. *J. Fluid Mech.* **296** (1995), 73–126.
- [86] S , C. Mixing in a stably stratified shear layer: two and three-dimensional numerical experiments. *Fluid Dynamics Research* **27** (2000), 367–404.
- [87] S , S. *Organized Structures and Turbulence in Fluid Mechanics, cap: Influence of a shear on a stably-stratified flow*. Kluwer, 1991, pp. 469–487.
- [88] S , E. J., F , H. J. S. Entrainment and mixing in stratified shear flows. *J. Fluid Mech.* **428** (2001), 349–386.
- [89] S , R. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997. 670p.
- [90] T , A. A method of producing a shear flow in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **32** (1968), 693–704.
- [91] T , A. Laboratory observations of secondary structures in kelvin-helmholtz billows and consequences for ocean mixing. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **34** (1985), 175–199.
- [92] T , J. S. *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press, London, 1973. 368.
- [93] W , F. On the three-dimensional instability of strained vortices. *Phys. Fluids A* **2** (1990), 76–80.
- [94] W , J. H. Low-storage Runge-Kutta schemes. *J. Comp. Phys.* **35** (1980), 48.
- [95] W , C. D., B , F. K. Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing layer growth of moderate reynolds number. *J. Fluid Mech.* **63** (1974), 238–258.