

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS QUE CARACTERIZAM O FENÔMENO DA
BIESTABILIDADE EM ESCOAMENTOS TURBULENTOS

por

Alexandre Vagtinski de Paula

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2013

DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS QUE CARACTERIZAM O FENÔMENO DA
BIESTABILIDADE EM ESCOAMENTOS TURBULENTOS

por

Alexandre Vagtinski de Paula
Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sergio Viçosa Möller

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Sergio Said Mansur, PPGEM / UNESP - Ilha Solteira

Prof. Dra. Maria Luiza Sperb Indrusiak, PPGEM / UNISINOS

Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann, PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 28 de Fevereiro de 2013

*Dedico este trabalho a minha família.
Aos meus pais, que iluminaram o caminho
da minha vida e aos meus irmãos, pelo apoio
e companheirismo incondicionais.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a conclusão deste trabalho. A minha família, pelo constante apoio e incentivo. Ao meu orientador, Prof. Sergio, pela dedicação e sabedoria demonstradas durante essa jornada. Aos meus colegas de laboratório, Carla e Rodrigo, pelas valiosas críticas e sugestões. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudo.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo acerca dos principais parâmetros que caracterizam o fenômeno da biestabilidade em dois tubos dispostos lado a lado submetidos a escoamento cruzado turbulento. A técnica experimental da anemometria de fio quente em canal aerodinâmico é aplicada na medição das flutuações de velocidade do escoamento após os tubos. As séries temporais obtidas são utilizadas como dados de entrada para determinação das funções densidade de probabilidade (PDF) usando um modelo de mistura finita, de acordo com uma função t de *Student* assimétrica e com o auxílio do método de Monte Carlo. Transformadas de ondaletas discretas e contínuas são aplicadas na filtragem das séries temporais para determinadas bandas de frequências e na análise do conteúdo de energia destes sinais. Através de conceitos de sistemas caóticos, é realizada a reconstrução do atrator do problema pelo método dos atrasos temporais, a partir das séries experimentais de velocidade, permitindo a determinação da dimensão de imersão e o cálculo do maior expoente de Lyapunov. Os resultados mostram a existência de dois patamares distintos de velocidade média nas séries temporais, correspondentes aos dois modos do escoamento, cada qual com números de Strouhal e funções densidade de probabilidade distintas. Uma análise conjunta das componentes axial e transversal do escoamento e suas PDF indicam as regiões no plano de medições onde o fenômeno se manifesta, sendo que reconstruções da trajetória filtrada das séries temporais para determinadas bandas de frequências apresentam características caótico-determinísticas. O maior expoente de Lyapunov das séries experimentais é positivo, o que é um indício de comportamento caótico.

Palavras-chave: biestabilidade; bancos de tubos; anemometria de fio quente; funções densidade de probabilidade; caos determinístico.

ABSTRACT

This work presents a study of the main parameters that characterize the phenomenon of bistability in two tubes placed side by side submitted to turbulent crossflow. The experimental technique of hot wire anemometry in aerodynamic channel is applied in the measurement of velocity fluctuations of the flow after the tubes. The time series obtained are used as input data for determining the probability density functions (PDF) using a finite mixture model, according to an asymmetric *Student t* function and with the aid of a Monte Carlo method. Wavelet transforms are applied in discrete and continuous filtering of time series for certain frequency bands and in the analysis of the energy content of these signals. By means of chaotic systems concepts, the attractor reconstruction of the problem is performed using the method of time delays from the experimental series of velocity, allowing the determination of the embedding dimension and calculating the largest Lyapunov exponent. The results show the existence of two different levels of mean velocity in time series, corresponding to two flow modes, each one with different Strouhal numbers and probability density functions. A joint analysis of axial and transverse components of flow and its PDF indicate the regions in the measurement plan where the phenomenon is manifested, and reconstructions of the trajectory of the filtered time series for certain frequency bands have chaotic-deterministic characteristics. The largest Lyapunov exponent of experimental series is positive, which is an indication of chaotic behavior.

Keywords: bistability; tube banks; hot wire anemometry; probabilistic density function; deterministic chaos.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Problema	2
1.3	Ferramentas	3
1.4	Revisão bibliográfica	4
1.5	Objetivos	19
2	METODOLOGIA	21
2.1	Técnica experimental	22
2.2	Análise no domínio do tempo e da frequência	25
2.3	Modelo de mistura finita	28
2.3.1	Teoria da verossimilhança	29
2.3.1.1	Teste de razão de verossimilhança ou inferência paramétrica	33
2.3.2	Algoritmo de maximização de expectativa	34
2.3.3	Funções de probabilidade	37
2.3.3.1	Função normal	37
2.3.3.2	Função <i>t</i> de <i>Student</i>	40
2.3.3.3	Função normal assimétrica	42
2.3.3.4	Função <i>t</i> de <i>Student</i> assimétrica	44
2.3.4	Método de Monte Carlo	45
2.3.4.1	Controle da convergência	47
2.4	Caos determinístico	48
2.4.1	Reconstrução de atratores	50
2.4.2	Dimensões	52
2.4.2.1	Dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal	53
2.4.2.2	Dimensões generalizadas	55
2.4.3	Passo de reconstrução	56
2.4.4	Dimensão de imersão	58
2.4.5	Expoentes característicos de Lyapunov	61
2.4.5.1	Expoentes de Lyapunov de séries temporais experimentais	63

2.4.5.2	Método de Rosenstein	64
2.5	Dinâmica simbólica	68
3	RESULTADOS	71
3.1	Transformadas de ondaletas e definição da pseudofrequência	72
3.2	Modelo de mistura finita	85
3.3	Modelo de duplo poço e análise bivariada dos sinais de velocidade	88
3.4	Caos determinístico	99
3.5	Dinâmica simbólica	111
4	CONCLUSÕES	114
4.1	Sugestões para trabalhos futuros	116
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118
	APÊNDICES	125
	APÊNDICE A - Análise de incertezas	126
	APÊNDICE B - Procedimento de calibração da sonda de fio quente	130
	APÊNDICE C - Tabela de dados experimentais	135
	APÊNDICE D - Procedimento para determinação do ângulo de desvio em relação à direção principal do escoamento	136

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Representação esquemática do escoamento biestável para (a) modo 1 e (b) modo 2, e seus respectivos sinais característicos (c)	1
Figura 1.2	Regimes esquemáticos de desprendimento de vórtices para escoamentos através de cilindros circulares lisos. (Adaptado de Blevins, 1990)	7
Figura 1.3	Relação entre o número de Strouhal (S) e o número de Reynolds (Re) para cilindros circulares. (Adaptado de Blevins, 1990)	9
Figura 1.4	Arranjos de tubos dispostos lado a lado em relação à corrente principal estudados por Guillaume e LaRue, 1999. (a) Dois, (b) três e (c) quatro tubos.	10
Figura 1.5	Diferentes modos de escoamento para dois tubos dispostos lado a lado: (a) tubos em contato, (b) razão p/d intermediária e (c) grande razão p/d. (Adaptado de Olinto, 2005)	13
Figura 2.1	Ilustrações esquemáticas: (a) canal aerodinâmico, (b) seção de testes. (c) Posicionamento e características da sonda	23
Figura 2.2	Principais dimensões do canal aerodinâmico. Dimensões em [mm]	24
Figura 2.3	Ilustração de um modelo de mistura finito baseado em duas componentes: (a) histograma de dados binados. (b) modelo de mistura normal	29
Figura 2.4	Fluxograma do procedimento iterativo do algoritmo de maximização de expectativa	35
Figura 2.5	(a) Função densidade de probabilidade normal. (b) função de distribuição acumulada de probabilidade normal. A curva em vermelho é a normal padrão	38
Figura 2.6	(a) Esquema de uma máquina de Galton e (b) sua fotografia	39
Figura 2.7	(a) Função densidade de probabilidade t de <i>Student</i> . (b) função de distribuição acumulada de probabilidade t de <i>Student</i> . A curva em vermelho é a função de densidade normal padrão	42
Figura 2.8	(a) Função densidade de probabilidade normal assimétrica. (b) função de distribuição acumulada de probabilidade normal assimétrica. A curva em vermelho é a função de densidade normal padrão	43
Figura 2.9	(a) Função densidade de probabilidade t de <i>Student</i> assimétrica. (b) função de distribuição acumulada de probabilidade t de <i>Student</i> assimétrica. A curva em vermelho é a função normal padrão	45

Figura 2.10	Resultado da reconstrução de atratores pelo método proposto por Takens para diversos sistemas dinâmicos. (a) Atrator de Rössler, (b) motor bipolar e (c) mapa Ugly. Na parte superior estão os atratores originais, e na parte inferior estão os atratores reconstruídos. Adaptado de Ferrara e Prado, 1999..	52
Figura 2.11	Objetos fractais: (a) Conjunto de Mandelbrot, (b) leguminosa romanesco e (c) a formação de cristais de gelo.....	53
Figura 2.12	Contagem de caixas em um segmento de reta. (a-c) A capacidade D coincide com a dimensão de Hausdorff. (d-e) A capacidade D só coincide com a dimensão de Hausdorff quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Adaptado de Ferrara e Prado, 1999.....	54
Figura 2.13	Exemplo na influência do passo de reconstrução de um atrator de Lorenz. (a) Passo muito pequeno, (b) passo adequado e (c) passo muito grande.....	57
Figura 2.14	Reconstrução em uma e duas dimensões do mapa de Hénon. (a) Os pontos A e B são vizinhos na reconstrução unidimensional. (b) Na reconstrução bidimensional os pontos A e B são falsos vizinhos. Adaptado de Ferrara e Prado, 1999.....	59
Figura 2.15	Resultado típico da determinação da dimensão de imersão pelo método dos falsos vizinhos para o atrator de Lorenz.....	60
Figura 2.16	Evolução de um elemento de volume esférico de raio $\varepsilon_0(x_0)$ em torno de um ponto inicial x_0 . Adaptado de Ferrara e Prado, 1999.....	62
Figura 2.17	Gráfico típico do valor médio do logaritmo da divergência em função do tempo para o atrator de Lorenz.....	67
Figura 2.18	Fluxograma do algoritmo de Rosenstein para o cálculo do maior expoente de Lyapunov. Adaptado de Rosenstein et al., 1993.....	68
Figura 2.19	Processo de simbolização de uma série de dados para construção do histograma das sequências simbólicas	69
Figura 2.20	Representação parcial de uma árvore simbólica binária para comprimentos da sequência simbólica k de 1 a 3	70
Figura 3.1	Geometria dos dois tubos dispostos lado a lado e o posicionamento da sonda utilizada no experimento	71
Figura 3.2	Sinais de velocidade instantânea obtidas para $f_s = 1000$ Hz, $x = 15$ mm e $p/d = 1,26$. (a) Componente axial. (b) Componente transversal. (c) Ângulo de desvio	72

Figura 3.3	Séries de velocidade e suas reconstruções via transformada discreta de ondaletas (DWT): linhas vermelhas. (a-g) Níveis de reconstrução de $n = 6$ a $n = 12$, respectivamente	75
Figura 3.4	Diferença entre a função coeficiente de correlação cruzada entre a série temporal de velocidade axial original e as séries reconstruídas (C_{xy}) com a função coeficiente de autocorrelação do sinal original (C_{xx})	76
Figura 3.5	PDF das séries de velocidade (escala de cores) e reconstruções por DWT (linhas vermelhas): (a) $N = 128, s = 32, n = 6$; (b) $N = 256, s = 64, n = 7$; (c) $N = 512, s = 128, n = 8$; (d) $N = 1024, s = 256, n = 9$; (e) $N = 2048, s = 512, n = 10$; (f) $N = 4096, s = 1024, n = 11$; (g) $N = 8192, s = 2048, n = 12$	77
Figura 3.6	Variação temporal das PDF das componentes de velocidade do modo 1 do escoamento e suas respectivas DWT com nível $n = 9$: (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal	78
Figura 3.7	Análise por DWT (a-c) e CWT (d-f) dos sinais temporais de velocidade axial, velocidade transversal e ângulo de desvio, respectivamente.....	79
Figura 3.8	Reconstrução das series temporais via DWT com nível $n = 9$	80
Figura 3.9	Análise das funções densidade de probabilidade dos sinais temporais. (a) Componente axial. (b) Componente transversal. (c) Ângulo de desvio	82
Figura 3.10	Evolução no tempo das PDF dos sinais experimentais: (a) Componente axial. (b) Componente transversal. (c) Ângulo de desvio	83
Figura 3.11	Variação do tempo de cada troca de direção do escoamento.....	84
Figura 3.12	Variação dos valores de maior ocorrência das PDF das componentes de velocidade: (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal	84
Figura 3.13	PDF das séries temporais (barras verticais) e resultados da simulação com o modelo de mistura finita (linhas sólidas): (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal. (c) Ângulo de desvio	86
Figura 3.14	Determinação do número de componentes do modelo de mistura univariado para a PDF t de <i>Student</i> assimétrica. Valores referentes ao sinal de velocidade axial	87
Figura 3.15	Séries temporais da Fig. 3.2 na faixa entre 14 e 25 segundos: (a) modo 1, (b) transição entre os modos do escoamento e (c) modo 2, com suas respectivas PDF e modelos de duplo poço de energia ((d), (e) e (f))	88

Figura 3.16 Modelos de duplo poço de energia (MDPE) univariados: (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal	90
Figura 3.17 Visualizações de escoamento em canal hidráulico de dois tubos dispostos lado a lado com $p/d=1,26$ e $p/d=1,6$. Plano superior de visualização: (a), (b), (c), (d) e (e). (f) Vista frontal, com ligeira elevação. (g) Vista lateral. $Re = 7,5 \times 10^3$ (Adaptado de De Paula, 2008)	91
Figura 3.18 Par ordenado de dados (pontos) das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado	92
Figura 3.19 Pares ordenados de dados das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado para diferentes intervalos de tempo	93
Figura 3.20 Função densidade de probabilidade cruzada (bivariada) das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado	94
Figura 3.21 PDF cruzada (bivariada) das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado. Imagem com escala de cores	94
Figura 3.22 PDF cruzada (bivariada) das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado. Contornos de isodensidade	95
Figura 3.23 Reconstrução por transformada discreta de ondaletas para diversos níveis do caso bivariado, mostrando a trajetória percorrida no plano de medição do escoamento. Níveis de reconstrução: (a) $n = 5$, (b) $n = 6$, (c) $n = 7$, (d) $n = 8$, (e) $n = 9$, (f) $n = 10$	96
Figura 3.24 Modelo de duplo poço de energia (MDPE) bivariado do comportamento biestável das componentes de velocidade axial e transversal do escoamento ..	97
Figura 3.25 Par ordenado de dados das componentes de velocidade do escoamento com o ajuste do modelo de mistura finita usando uma distribuição bivariada <i>t</i> de Student assimétrica	99
Figura 3.26 Função coeficiente de autocorrelação. (a) Sinal de velocidade axial. (b) Sinal de velocidade transversal.....	100

Figura 3.27	Reconstruções do espaço de estados para os sinais temporais com $p = 8,396s$. (a) Reconstrução 2D axial. (b) Reconstrução 3D axial. (c) Reconstrução 2D transversal. (d) Reconstrução 3D transversal	100
Figura 3.28	Reconstruções do espaço de estados para o sinal de velocidade axial. 2D: (a) $p = 0,001s$, (b) $0,005s$ e (c) $0,01s$. 3D: (d) $p = 0,001s$, (e) $0,005s$ e (f) $0,01s$	101
Figura 3.29	Reconstruções do espaço de estados para o sinal de velocidade transversal. 2D: (a) $p = 0,001s$, (b) $0,005s$ e (c) $0,01s$. 3D: (d) $p = 0,001s$, (e) $0,005s$ e (f) $0,01s$	102
Figura 3.30	Percentual de falsos vizinhos em função da dimensão de imersão. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal	103
Figura 3.31	Espectro de potências das séries temporais. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.....	104
Figura 3.32	Resultado do cálculo do maior expoente de Lyapunov das séries temporais. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.....	104
Figura 3.33	Resultados comparativos da análise para séries de comprimento $N = 131072$ pontos e $N_r = 32768$ pontos. (a) Falsos vizinhos. (b) Região linear utilizada no cálculo do maior expoente de Lyapunov.....	105
Figura 3.34	Séries temporais de comprimento $N_r = 32768$. (a) Sinal original de velocidade axial. (b) Série axial filtrada por TDO com $n = 9$. (c) Sinal original de velocidade transversal. (d) Série transversal filtrada por TDO com $n = 9$	106
Figura 3.35	Função coeficiente de autocorrelação dos sinais filtrados por transformada discreta de ondaletas com $n = 9$. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.....	106
Figura 3.36	Reconstruções do espaço de estados para os sinais temporais filtrados por TDO com $p = 8,396s$. (a) Reconstrução 2D axial. (b) Reconstrução 3D axial. (c) Reconstrução 2D transversal. (d) Reconstrução 3D transversal.....	107
Figura 3.37	Reconstruções do espaço de estados para os sinais temporais filtrados por TDO com $p = 0,14s$. (a) Reconstrução 2D axial. (b) Reconstrução 3D axial. (c) Reconstrução 2D transversal. (d) Reconstrução 3D transversal.....	108

Figura 3.38	Ampliação da reconstrução do espaço de estados tridimensional para o sinal temporal filtrado de velocidade axial com $p = 0,14s$	109
Figura 3.39	Percentual de falsos vizinhos em função da dimensão de imersão para as séries filtradas. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.....	109
Figura 3.40	Espectro de potências para as séries filtradas. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.....	110
Figura 3.41	Resultado do cálculo do maior expoente de Lyapunov para as séries filtradas. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.....	110
Figura 3.42	Transformação das séries temporais em alfabeto binário: (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal e (c) ângulo de desvio do escoamento	111
Figura 3.43	Ampliação dos 2 primeiros segundos da Fig. 3.42: (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal e (c) ângulo de desvio do escoamento	112
Figura 3.44	Frequências relativas das séries temporais, extraindo os valores médios, para diversos comprimentos da sequência simbólica k : (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal e (c) ângulo de desvio do escoamento	113
Figura B.1	Dispositivo para restringir gradualmente o fluxo do escoamento (bocal convergente), aumentando a velocidade na seção de testes do canal aerodinâmico.....	130
Figura B.2	(a) Relação típica entre velocidade real medida e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda perpendicular de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a velocidade	132
Figura B.3	(a) Relação típica entre velocidade real medida e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda inclinada de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a velocidade	133
Figura B.4	(a) Relação típica entre inclinação e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda perpendicular de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a inclinação	134
Figura D.1	Esquema de decomposição do vetor velocidade	136

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Tamanho das amostras do método de Monte Carlo durante as simulações ..	47
Tabela 3.1	Valores para a determinação da pseudofrequência e análise das PDF	74
Tabela 3.2	Resultados numéricos das simulações com o modelo de mistura finita	87
Tabela 3.3	Resultados da análise dos sinais de velocidade com o modelo de mistura bivariada e PDF t de <i>Student</i> assimétrica (valores médios de cinco simulações independentes)	98
Tabela A.1	Principais resoluções das escalas dos instrumentos utilizados neste trabalho	127
Tabela B.1	Registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade axial do fio perpendicular da sonda de fio quente	131
Tabela B.2	Registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade transversal do fio inclinado da sonda de fio quente	132
Tabela B.3	Registro de uma calibração típica para obtenção do ângulo de desvio do fio inclinado da sonda de fio quente	133
Tabela C.1	Tabela de dados experimentais	135

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AIC	Critério de Informação de Akaike
CDF	Função de Distribuição Acumulada de Probabilidade
CTA	Anemometria de fio quente a temperatura constante
DNA	Ácido desoxirribonucléico
EM	Algoritmo de Maximização de Expectativa
MCMC	Monte Carlo via cadeias de Markov
MDPE	Modelo de Duplo Poço de Energia
PDF	Função Densidade de Probabilidade
PPGEM	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
PROMECA	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS
PSD	Função densidade espectral de potência
PVC	Policloroeteno ou Policloreto de Vinila
SPECT	Tomografia computadorizada por emissão de fóton único
CWT	Transformada Contínua de Ondaletas
DWT	Transformada Discreta de Ondaletas
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNISINOS	Universidade do Vale do Rio dos Sinos

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Assimetria
a	Escala da ondaleta
a	Função genérica
A_c	Limite crítico
β	Razão de bloqueio do experimento
b	Posição da ondaleta
B	Largura da seção de testes do canal aerodinâmico, m
$C(\tau)$	Tempo de autocorrelação do sinal
$C(t)$	Função de autocorrelação
C_j	Separação inicial
Γ	Função Gamma
d	Diâmetro, m
$d(t)$	Divergência média no tempo t
d_j	Distância entre o j -ésimo par de próximos vizinhos
$d_j(0)$	Distância inicial do j -ésimo ponto ao próximo vizinho
D	Capacidade
D_0	Dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal
D_1	Dimensão de informação
D_2	Dimensão de correlação
D_q	Dimensões generalizadas de Renyi
Δt	Período de amostragem da série temporal
ε	Tolerância
ε	Comprimento ou lado das caixas (hipercubos)
ε_k	Comprimento dos eixos principais do hiperelipsóide
$\varepsilon_0(x_0)$	Raio da hiperesfera
ϕ	Função escala
ϕ	Função densidade de probabilidade
$\phi(x, \mu, \sigma)$	Função densidade de probabilidade normal
$\phi(t, \nu)$	Função densidade de probabilidade t de <i>Student</i>
$\phi_{SN}(x, \alpha)$	Função densidade de probabilidade normal assimétrica

$\phi_{St}(t, \alpha)$	Função densidade de probabilidade t de <i>Student</i> assimétrica
Φ	Função de distribuição acumulada de probabilidade normal
$\Phi(x, \mu, \sigma)$	Função de distribuição acumulada de probabilidade
$\Phi(t, \nu)$	Função de distribuição acumulada de probabilidade t de <i>Student</i>
$\Phi_{SN}(x, \alpha)$	Função de distribuição acumulada de probabilidade normal assimétrica
$\Phi_{St}(t, \nu)$	Função de distribuição acumulada de probabilidade t de <i>Student</i> assimétrica
f	Frequência de desprendimento dos vórtices, Hz
f_c	Frequência de corte, Hz
f_s	Frequência de aquisição ou amostragem, Hz
F	Família de densidade de probabilidade
${}_2F_1$	Função hipergeométrica
g	Número de componentes (classes) de um modelo de mistura finita
θ	Vetor de parâmetros
Θ	Espaço paramétrico
H	Altura da seção de testes do canal aerodinâmico, m
I_p	Matriz identidade de ordem $p \times p$
i, j, k, n	Índices inteiros
i	Tempo discreto
$i \Delta t$	Tempo, s
j	Inteiro
k	Inteiro
k	Número de onda, 1/m
k	Comprimento para a representação de palavras
k	Número de parâmetros de um modelo
L	Largura da seção de testes, m
$L(\theta)$	Função de verossimilhança
$\ell(\theta)$	Função de log-verossimilhança
$L(\hat{\theta})$	Estimador de máxima verossimilhança
L_A	Tamanho típico do atrator
L_c	Distância crítica
$\ell(\hat{\theta})$	Estimador de máxima log-verossimilhança
Λ	Matriz diagonal de assimetrias
λ_i	Expoentes de Lyapunov

λ_1	Maior expoente de Lyapunov
μ	Valor médio
μ	Vetor contendo os valores médios
m	Número de palavras geradas
M	Tamanho das amostras
M	Número de pontos reconstruídos
m	Dimensão de imersão
N	Número de pontos da série temporal
$N(\varepsilon)$	Número de hipercubos necessário para cobrir um conjunto de pontos
N_i	Número de pontos na caixa i
ν	Viscosidade cinemática, m^2/s
ν	Número de graus de liberdade
n	Número de símbolos do alfabeto
n	Número de observações
N	Número de pontos de dados
$\vec{\xi}_i$	Vetores reconstruídos
π	Proporções ou pesos de mistura
Pot	Potência do ventilador centrífugo do canal aerodinâmico, kW
p	Passo ou distância entre centros dos tubos, m
p	Passo de reconstrução ou tempo de atraso
P_{atm}	Pressão atmosférica, kPa
p_i	Probabilidade de ocorrência de um episódio do alfabeto escolhido
p_i	Distribuição de probabilidade de se ter um ponto na i -ésima caixa ao longo do atrator
Σ	Matriz de covariância
Q	Esperança condicional da log-verossimilhança da observação dos dados completos
q	Inteiro
R_m^2	Quadrado da distância entre um ponto e o seu vizinho mais próximo
Re	Número de Reynolds, $[U d/\nu]$
σ	Desvio padrão
S	Número de Strouhal, $[f d/U]$
τ	Variável randômica que segue uma distribuição Chi-quadrado
t	Tempo, s
t	Variável genérica
T	Variável randômica que segue uma distribuição t de <i>Student</i> assimétrica

T	Temperatura do experimento, °C
T	Período médio da série temporal
$T(t,\alpha)$	Função T de Owen
T_r	Tempo de amostragem dos dados, s
T	Período médio da série temporal
U	Velocidade de referência, m/s
χ^2	Função Chi-quadrado
X	Espaço amostral incompleto da variável Y
x	Distância (genérica), m
x	Variável genérica
x	Variável observada indiretamente do espaço amostral X
x_i	Série temporal
\mathbf{X}	Trajectoria reconstruída
X_i	Estado do sistema no ponto discreto i
X_j	Ponto de referência particular
X_j	Próximo vizinho
Y	Variável aleatória discreta ou contínua
y	Resultado de um experimento através da observação da variável Y
Ψ	Função ondaleta
Z	Variável randômica que segue uma distribuição normal assimétrica
$\langle \ln(d_j) \rangle$	Valor médio do logaritmo da divergência

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

O presente trabalho apresenta um estudo acerca do fenômeno biestável que ocorre em escoamentos turbulentos ao redor de bancos de tubos.

Quando dois tubos colocados lado a lado a certa distância um do outro são submetidos a um escoamento transversal, as esteiras produzidas por esse escoamento irão interagir, formando o fenômeno de biestável (*bistable*), mostrado na Fig. 1.1. Na biestabilidade há uma esteira estreita a jusante de um dos tubos e uma esteira larga a jusante do outro (Fig. 1.1a e 1.1b). Este fenômeno gera duas frequências predominantes de desprendimento de vórtices, cada uma delas associada a uma esteira: a esteira estreita está associada com a maior frequência, e a esteira larga está associada com a menor frequência de desprendimento. Através da fenda, o escoamento é desviado na direção de um dos cilindros, formando a esteira estreita. O escoamento biestável é caracterizado pela mudança no padrão de escoamento da fenda, de um lado para o outro, em períodos irregulares de tempo. Desta maneira, se a velocidade do escoamento for medida, por exemplo, ao longo de linhas tangentes às geratrizes externas dos cilindros, a jusante, um padrão de troca entre os modos do escoamento pode ocorrer conforme o ilustrado no esquema da Fig. 1.1c. De acordo com estudos anteriores, este padrão é independente do número de Reynolds e não está associado com possíveis desalinhamentos entre os cilindros ou influências externas, o que sugere ser uma característica intrínseca do escoamento.

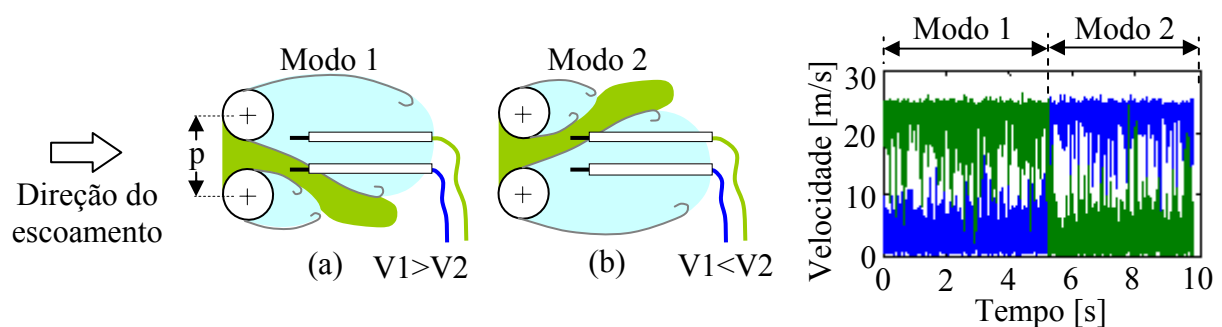


Figura 1.1 – Representação esquemática do escoamento biestável para (a) modo 1 e (b) modo 2, e seus respectivos sinais característicos (c).

Cilindros circulares são empregados em diversas aplicações de engenharia, como em núcleos de reatores nucleares, em tubulações de transporte, oleodutos e gasodutos, em linhas de transmissão de energia elétrica, em tubulações de transporte e prospecção de petróleo *offshore*, conhecidas como *risers*, e no interior de trocadores de calor do tipo casco e tubos.

A configuração de bancos de tubos é utilizada de modo usual como uma simplificação de trocadores de calor de casco e tubos reais, que são utilizados em larga escala industrial na troca de calor entre fluidos, o que permite uma análise tanto do escoamento sobre os tubos quanto da transferência de calor destes equipamentos, permitindo uma melhor compreensão dos fenômenos térmicos e hidrodinâmicos por estudos de similaridade. Em escoamentos sobre arranjos de tubos pode ocorrer vibração induzida, causadas pelas cargas dinâmicas provenientes do próprio escoamento, e que geralmente são amplificadas com o aumento da velocidade do fluido. A disposição dos tubos exerce marcante influência nos fenômenos observados nos escoamentos.

1.2 Problema

A principal característica da vibração induzida por escoamento em bancos de tubos é a randomicidade das respostas dinâmicas dos tubos, mesmo sendo os tubos de dimensões idênticas, arranjados em fileiras equidistantes e submetidos a escoamentos uniformes [Zdravkovich e Stonebanks, 1990].

Segundo Pettigrew et al., 1998, as tentativas de melhorar os processos de transferência de calor, pelo aumento da exigência de se trabalhar com temperaturas cada vez mais elevadas e baixas quedas de pressão [Groover e Weaver, 1978], podem levar à fadiga dos componentes, devida a fissuras e a desgastes por fricção, com o aumento das cargas dinâmicas produzidas pelas vibrações das estruturas.

Olinto, 2005, enfatiza que os avanços das técnicas experimentais têm fornecido resultados de grande valia na análise dos fenômenos que regem a dinâmica destes dispositivos trocadores de calor, sendo aplicados através de generalizações em equipamentos industriais em operação, como parâmetros de projeto para diversas geometrias, visando à otimização de suas condições de processo.

Weaver, 1993, comenta que existe um grande número de mecanismos distintos de excitação por escoamento, criando confusão e controvérsia na procura por fórmulas simples e universais em projetos de trocadores de calor, em função das inúmeras geometrias construtivas destes equipamentos, cada qual voltada a uma aplicação diferente, sendo que a

presença de um destes mecanismos pode acarretar em uma fonte adicional de instabilidades dinâmicas.

Tem-se então, como problema geral, o escoamento turbulento que ocorre no entorno dos tubos e, como problema principal, o fenômeno biestável, que pode acarretar em uma fonte adicional de instabilidades dinâmicas nestes dispositivos. Os primeiros trabalhos com respeito ao estudo do fenômeno biestável em cilindros circulares remontam à década de 1970 [Bearman e Wadcock, 1973]. Assim, o problema em questão é antigo e complexo, porém não resolvido.

1.3 Ferramentas

O tratamento estatístico da turbulência visa buscar padrões de ocorrência ou uma classificação dos dados coletados para uma possível modelagem dos escoamentos. Tennekes e Lumley, 1972, mostram que a função densidade de probabilidade dá informações importantes a respeito das características do escoamento. O fato de que o fenômeno biestável é caracterizado por dois estados de escoamento distintos, denominados “modos 1 e 2” por Olinto, 2005, indica que a função densidade de probabilidade desse fenômeno pode ser composta pela soma ponderada de duas ou mais densidades. Deste modo, é possível utilizar modelos que avaliam esta “mistura” de densidades. Na probabilidade e estatística, uma “mistura” é definida como uma combinação de duas ou mais distribuições ou densidades de probabilidade. Uma mistura pode ser utilizada na definição de uma função de probabilidade já existente, com uma nova densidade de mistura. Neste aspecto, a principal tarefa é a de definir as propriedades teóricas desta nova função. Um “modelo de mistura” é frequentemente utilizado na classificação estatística de dados. Em outras palavras, é a modelagem da distribuição ou densidade estatística de uma mistura (ou soma ponderada) de outras distribuições ou densidades. Este modelo probabilístico pode ser aplicado com o intuito de representar a presença de subpopulações dentro de uma população em geral, sem exigir que o conjunto de dados observados identifique as subpopulações da qual uma observação individual pertença. De modo geral, um modelo de mistura corresponde à distribuição ou densidade da mistura que representa a distribuição ou densidade de probabilidade das observações na população em geral. Tais modelos são usados na inferência estatística das propriedades de subpopulações, dadas apenas observações sobre as populações agrupadas, sem informações da identidade das subpopulações. Um “modelo de mistura finita” fornece uma representação natural da heterogeneidade de uma população em um número finito de

classes latente, ou seja, é utilizado para modelar resultados contínuos ou discretos que sejam observados a partir de populações que consistem em um número finito de subpopulações [McLachlan e Peel, 2000]. Neste contexto, os fenômenos podem ser tratados como variáveis latentes, ou seja, que não podem ser observados diretamente [Dempster et al., 1977]. Seu comportamento é observado através de suas manifestações, ou de variáveis que se pode observar diretamente, sendo tratado como um problema de dados incompletos. Assim, é possível desenvolver um modelo estatístico que relaciona um conjunto de variáveis observáveis com um conjunto de variáveis latentes.

Devido à literatura relatar que a transição entre dois estados assimétricos do fenômeno biestável é inteiramente randômica e não possui um período natural definido [Kim e Durbin, 1988], um estudo acerca das características caótico-determinísticas deste fenômeno é realizado. Para explicar o funcionamento dinâmico determinístico de sistemas complexos, a física e a matemática muitas vezes utilizam a teoria do caos. A teoria de sistemas dinâmicos tem fornecido ferramentas complementares para se analisar séries temporais caóticas obtidas em experimentos [Ferrara e Prado, 1999].

Assim, torna-se interessante realizar um estudo que determine os principais parâmetros que caracterizam o fenômeno da biestabilidade em escoamentos turbulentos em bancos de tubos, visando compreender os mecanismos fenomenológicos que ocorrem nestes dispositivos. Através da técnica experimental da anemometria de fio quente, séries temporais são obtidas e utilizadas como dados de entrada nas seguintes técnicas:

- a) Transformadas de ondaletas: visa determinar a variação do conteúdo de energia do sinal no tempo;
- b) Modelo de mistura finita: visa determinar as funções densidades de probabilidade que mais se assemelham aos dados produzidos;
- c) Caos determinístico: visa reconstruir o atrator do problema, permitindo calcular parâmetros da dependência temporal do fenômeno;
- d) Dinâmica simbólica: visa identificar padrões no escoamento através da análise de um particionamento específico com um alfabeto, e o posterior estudo de histogramas.

1.4 Revisão bibliográfica

Nesta sessão é apresentada uma introdução e uma revisão do fenômeno biestável, bem como dos modos e da frequência de desprendimento de vórtices em cilindros circulares. Na sequência é apresentada uma revisão da literatura da biestabilidade na geometria simplificada

de dois tubos dispostos lado a lado e em bancos de tubos. Uma revisão da utilização de transformadas de ondaletas, de modelos de mistura finita e da teoria do caos determinístico aplicados à mecânica dos fluidos é realizada. Também é apresentada uma breve revisão a respeito da aplicação da dinâmica simbólica a escoamentos turbulentos.

Sistemas biestáveis são encontrados em várias áreas do conhecimento. Na eletrônica digital o multivibrador biestável ou flip-flop é um circuito oscilador capaz de gerar uma onda quadrada e que serve como uma memória de um bit. Uma vez que o circuito é comutado, permanecerá indefinidamente neste estado, até a chegada de um novo sinal, que, de acordo com as variáveis de entrada, mudará ou não de estado [Evans, 1996]. Trabalhos experimentais em microrganismos e em mamíferos revelam uma dinâmica biestável com troca espontânea no processo de diferenciação celular em pequenos circuitos reguladores do gene [Chang et al., 2006]. Em neurociências, um estudo apresentado por Freyer et al., 2009, mostra que flutuações temporais de potência em eletroencefalogramas humanos em estado de repouso apresentam fortes indícios de biestabilidade em ritmos chave do cérebro, com densidade não-Gaussiana. Segundo Drubin et al., 2007, recentemente foram estabelecidos circuitos de gene sintético de mamíferos e estudos mostram o importante papel da modelagem matemática em seu projeto, onde o DNA recombinante permite a produção de proteínas sintéticas. Na mecânica dos fluidos e na engenharia, escoamentos em bancos de tubos são amplamente utilizados como simplificação de dispositivos trocadores de calor do tipo casco e tubos, com aplicação direta em plantas de processos industriais, onde o comportamento do escoamento turbulento cruzado entre as fendas dos tubos pode assumir uma característica claramente biestável [Indrusiak et al., 2005; Olinto et al., 2009].

Meneghini et al., 2010, apresenta uma revisão abrangente dos mecanismos de geração e desprendimento de vórtice em corpos rombudos, com ênfase em cilindros circulares. Segundo o autor, um corpo rombudo é definido como sendo aquele que gera separação do escoamento em uma porção considerável de sua superfície. Imediatamente após o corpo, são formadas duas camadas cisalhantes livres, com vorticidades de sinais opostos, constituindo um sistema instável na presença de certas perturbações e quando algumas condições são satisfeitas. A interação entre estas duas camadas é a principal razão da formação e desprendimento de vórtices atrás do corpo, sendo que o efeito da geometria do torna-se importante devido à possibilidade de ocorrência de diferentes pontos de separação. A magnitude deste ângulo é determinada pela natureza do processo de separação, podendo ocorrer em um canto vivo, um bordo de fuga chanfrado, ou de uma superfície contínua com o fluido sujeito a um gradiente adverso de pressão. Para este último caso, a posição em que a

separação ocorre é altamente dependente do número de Reynolds (Re), como no escoamento sobre cilindros circulares. Assim, os modos de desprendimento de vórtices de cilindros circulares são classificados em função do número de Reynolds, que é definido como:

$$Re = \frac{U d}{\nu} \quad (1.1)$$

em que U é a velocidade característica do escoamento em questão (geralmente a velocidade da corrente livre), d é um comprimento característico (o diâmetro no caso de um cilindro) e ν é a viscosidade cinemática do fluido, válido para fluidos reais ($\nu > 0$).

A largura transversal da esteira também influencia na formação e desprendimento de vórtices, pois atua diretamente na comunicação entre as duas camadas cisalhantes. Logo, quanto maior é a distância entre as camadas de cisalhamento, menor é a frequência de desprendimento de vórtices.

Blevins, 1990, classifica os modos de desprendimento de vórtices em um cilindro circular (Fig. 1.2) da seguinte forma:

$Re < 5$: o escoamento segue o contorno do cilindro, não apresentando descolamento da camada limite. Este é conhecido como escoamento reptante (*creeping flow*);

$5 \leq Re < 45$: inicia-se o processo de separação da camada limite a jusante do corpo, formando-se um par de vórtices simétricos e estacionários (de Föppl). Eles crescem com o aumento do número de Reynolds, e podem atingir uma distância de até três vezes o diâmetro do cilindro na direção do escoamento principal;

$45 \leq Re < 150$: inicia-se a oscilação da esteira de vórtices devido a instabilidades das camadas cisalhantes. Há a formação de uma esteira laminar periódica de vórtices desencontrados e de sinal de vorticidade opostos (*vortex street*);

$150 \leq Re < 300$: os vórtices que se desprendem do cilindro tornam-se turbulentos, embora a camada limite sobre o cilindro ainda permaneça laminar;

$300 \leq Re < 1,5 \times 10^5$: este regime é chamado de subcrítico. Nele, as camadas limites laminares se separam a aproximadamente a 80° em relação ao ponto de estagnação de montante e o desprendimento de vórtices é periódico. A camada limite não descolada ainda é laminar, e a transição para a turbulência ocorre antes da formação dos vórtices;

$1,5 \times 10^5 \leq Re < 3,5 \times 10^6$: esta é a faixa de transição, onde a camada limite do cilindro torna-se turbulenta e os pontos de separação movem-se para 140° . Nela, o ponto de transição à turbulência se aproxima muito do ponto de descolamento laminar que ainda o precede. As

camadas cisalhantes tendem a colar novamente ao corpo, formando uma “bolha de separação-recolamento”, que ocorre para os ângulos 80° - 100° e 120° - 140° , respectivamente;

$Re > 3,5 \times 10^6$: este é o chamado regime supercrítico. Nele o desprendimento de vórtices regular é restabelecido com uma camada limite turbulenta no cilindro. A separação da camada limite turbulenta passa a ocorrer entre 100° e 110° [Meneghini et al., 2010].

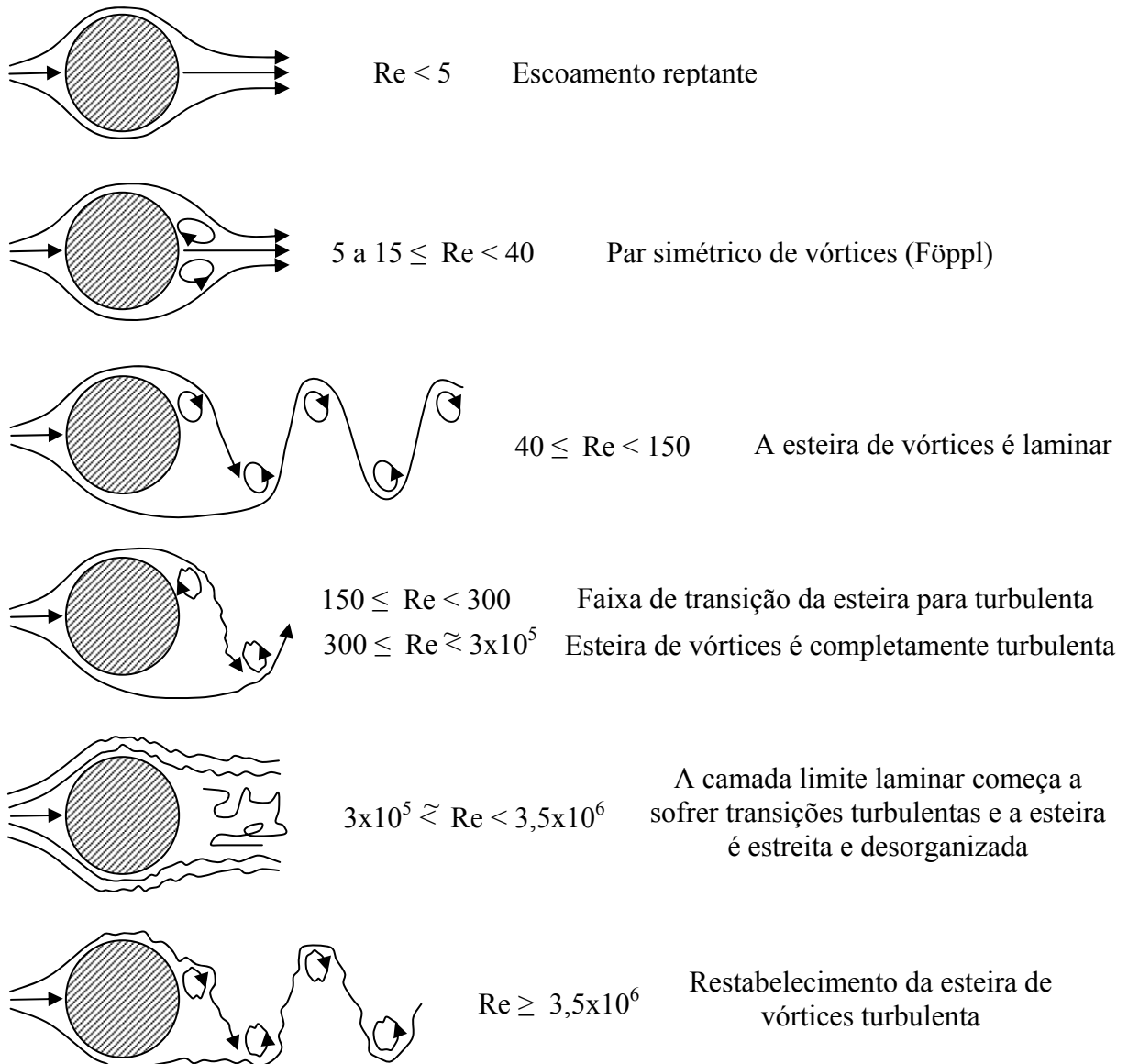


Figura 1.2 – Regimes esquemáticos de desprendimento de vórtices para escoamentos através de cilindros circulares lisos. (Adaptado de Blevins, 1990).

As frequências de desprendimento dos vórtices em cilindros podem ser adimensionalizadas na forma de número de Strouhal, definido como:

$$S = \frac{f d}{U} \quad (1.2)$$

em que f é a frequência de desprendimento dos vórtices.

A relação entre o número de Strouhal (S) e o número de Reynolds (Re) para cilindros circulares lisos é ilustrada na Fig. 1.3. Conforme a literatura, até o início do regime subcrítico a frequência de desprendimento de vórtices ocorre para valores muito baixos de número de Strouhal, menores do que 0,1 (não exibido na Fig. 1.3). Para todo o regime subcrítico, o número de Strouhal mantém-se em um valor aproximadamente constante de 0,21. No regime crítico, devido à quebra da estabilidade na geração de vórtices, o número de Strouhal pode crescer para valores na faixa de 0,4~0,5, para o caso de cilindros lisos, ou crescer lentamente até valores na faixa de 0,3 para cilindros rugosos. No regime supercrítico, o número de Strouhal volta a ser independente da rugosidade e tende para um valor de 0,3.

Quando dois tubos de igual diâmetro (d) são posicionados lado a lado e submetidos a um escoamento turbulento transversal à direção de linha de centro dos tubos, suas esteiras apresentam características bastante peculiares. A classificação dos fenômenos que ocorrem nesta configuração é geralmente realizada em função de um parâmetro p/d , chamado de razão de espaçamento, onde “ p ” é a distância entre os centros dos cilindros, ou passo. Uma breve revisão bibliográfica acerca das principais características do escoamento nesta geometria é apresentada na sequência, em ordem cronológica.

Bearman e Wadcock, 1973, identificaram a presença de intermitências no escoamento sobre dois cilindros circulares dispostos lado a lado, onde a esteira estreita de vórtices que emana da fenda entre os cilindros se move de um lado para outro, de modo randômico. Os autores chamaram este fenômeno de biestabilidade.

Zdravkovich, 1977, verificou que aparecem dois diferentes coeficientes de arrasto, associados às esteiras. Assim, as forças de arrasto que atuam sobre os dois tubos são diferentes, em função das diferentes esteiras e pressões de base (que é medida no tubo a 180° em relação ao ponto de estagnação de montante). A soma destas duas diferentes forças de arrasto biestável é sempre menor do que duas vezes a de um único tubo. A pressão de base flutua entre dois valores extremos. Segundo o autor, outra característica do escoamento

desviado é que existe uma força resultante que atua em direção perpendicular à corrente livre, associada a uma força de sustentação.

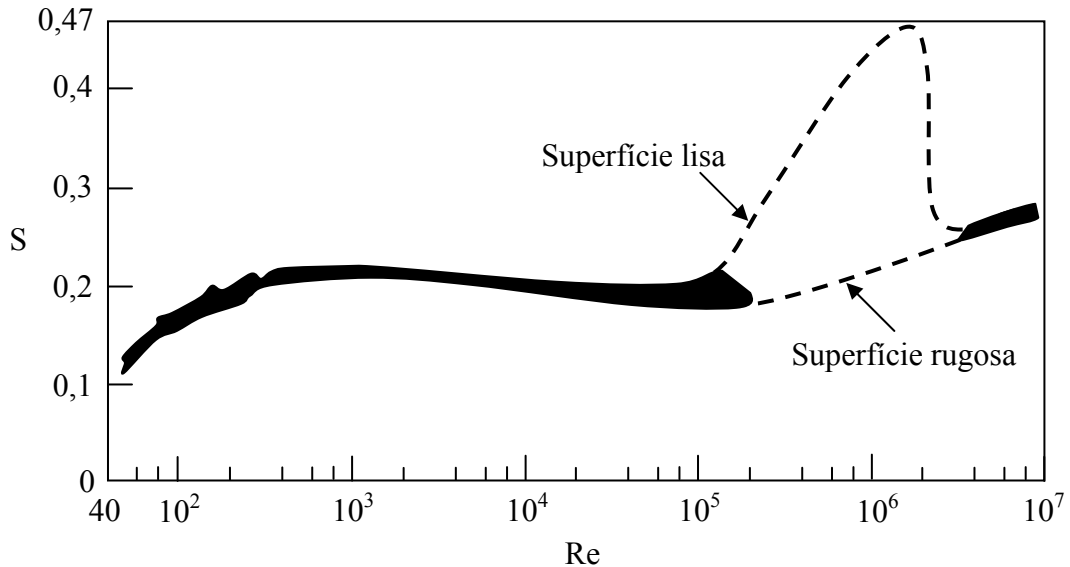


Figura 1.3 – Relação entre o número de Strouhal (S) e o número de Reynolds (Re) para cilindros circulares. (Adaptado de Blevins, 1990).

De acordo com Kim e Durbin, 1988, a transição entre dois estados assimétricos é inteiramente randômica e não possui um período natural definido. Segundo os autores, o tempo médio entre transições é da ordem de 10^3 vezes maior do que o período de despreendimento de vórtices. Realizando um estudo adimensional dos intervalos de tempo médios entre as trocas, observou-se que o tempo diminui com o aumento do número de Reynolds.

Segundo Le Gal et al., 1996, o comportamento biestável pode ser causado por perturbações turbulentas na entrada do escoamento.

Sumner et al., 1999, estudaram o escoamento ao redor de dois e três tubos posicionados lado a lado em relação ao escoamento, para $1,0 < p/d < 6,0$, e $500 < Re < 3000$. Os autores não identificaram a presença do fenômeno biestável. Para cada experimento o escoamento se desviava sempre na direção do mesmo tubo. O não aparecimento do comportamento biestável foi atribuído à combinação dos efeitos do pequeno grau de desalinhamento dos tubos com as razões de aspecto e bloqueio utilizadas nos experimentos. O padrão de organização do escoamento encontrado foi o de sincronização das esteiras de vórtices em oposição de fase. Dentro do escoamento desviado, porém, dois picos de

frequência foram detectados no espectro, cada um deles correspondendo entre 0,05-0,06 e 0,27-0,33.

Guillaume e LaRue, 1999, estudaram o escoamento em arranjos de dois, três e quatro tubos dispostos lado a lado em relação à corrente principal (Fig. 1.4). Os resultados mostraram a presença de instabilidades e diferentes modos de escoamento.

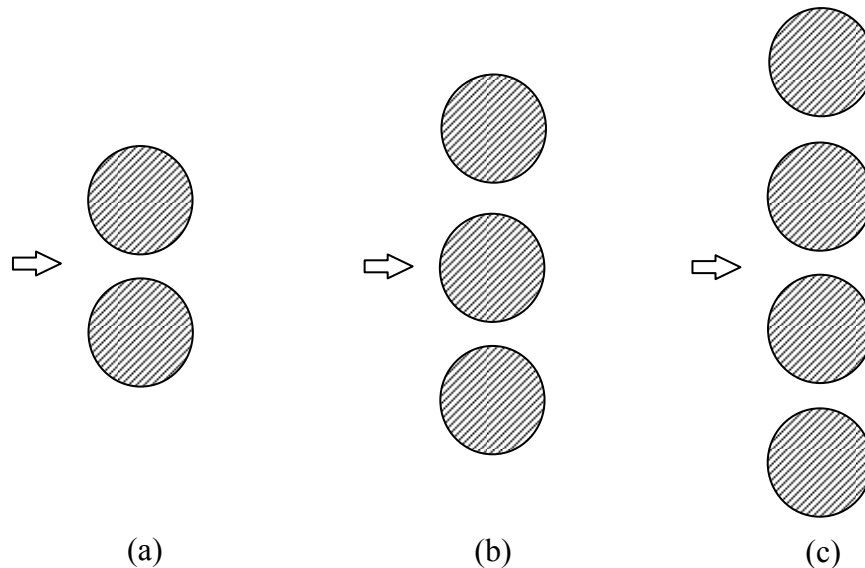


Figura 1.4 – Arranjos de tubos dispostos lado a lado em relação à corrente principal estudados por Guillaume e LaRue, 1999. (a) Dois, (b) três e (c) quatro tubos.

Três métodos foram utilizados pelos autores para aplicar perturbações exteriores ao escoamento: o primeiro consiste em desligar e ligar o ventilador do túnel de vento; o segundo abrindo e fechando uma porta posicionada na seção de teste do túnel de vento, perto dos tubos; o terceiro e mais eficaz consiste em bloquear o escoamento a montante dos tubos com uma placa, para em seguida removê-la rapidamente. Os autores classificaram o regime biestável através de três tipos de comportamentos:

Quase estável: não ocorrem mudanças no modo de escoamento com o tempo. Uma perturbação no escoamento pode causar a troca nos valores médios das esteiras, porém, os valores permanecem os mesmos até que outra perturbação seja aplicada;

Troca espontânea (flopping): os valores médios do escoamento alternam ao longo do tempo entre os dois modos de escoamento, mesmo que nenhuma perturbação seja aplicada;

Troca forçada: inicialmente, as esteiras estáveis apresentam troca espontânea, como resultado de uma perturbação súbita. Depois que uma perturbação inicial é aplicada e ocorrem as trocas, não se observam diferenças entre trocas espontâneas e forçadas. Neste estudo também foi

observado que o padrão de flutuação da esteira é dependente dos suportes utilizados na fixação dos tubos, da geometria do túnel utilizado e de interferências do escoamento a jusante. Contudo, conclusões semelhantes não são encontradas na literatura.

Zhou et al., 2002, estudaram a esteira turbulenta de dois tubos posicionados lado a lado em termos de campo de velocidade e de temperatura, para $1,5 < p/d < 3,0$. Os resultados foram comparados com as características da esteira de um único tubo. A partir de análise espectral, encontraram para $p/d = 1,5$ apenas um pico de frequência ($S = 0,11$), e para $p/d = 3,0$ e para um tubo isolado, $S = 0,21$. Segundo os autores, uma fenda muito estreita ente os tubos pode inibir a geração de vórtices internos, e os tubos passam a se comportar como uma única estrutura, gerando apenas uma esteira de vórtices. Por este fato, e como a geração de vórtices a partir das camadas de cisalhamento internas à fenda é essencial para a formação de duas esteiras de vórtices, não foram detectadas duas frequências diferentes, conforme previamente relatado por outros autores.

Alam et al., 2003, estudaram experimentalmente o escoamento ao redor de dois cilindros dispostos lado a lado e também identificaram a ocorrência de um jato desviado que emana entre os dois cilindros e se direciona ora para um dos lados, ora para o lado oposto, de maneira súbita e em períodos irregulares de tempo. Os autores apresentam uma classificação para esta configuração (Fig. 1.5), onde as forças que agem sobre os corpos são insensíveis à variação do número de Reynolds no regime subcrítico, sendo seus estudos realizados com um número de Reynolds de $5,5 \times 10^4$. Para valores na faixa de $1,1 < p/d < 2,5$ o escoamento assume um dos modos, mantendo-se nesta configuração durante um tempo e alterando para outra configuração de maneira aleatória. Para cilindros em contato, ou seja, com razão $p/d = 1$ (Fig. 1.5a), os dois tubos comportam-se como um único corpo rombudo, com uma frequência de desprendimento de vórtices menor do que a de um único tubo. Isso se deve ao aumento do espaçamento das camadas cisalhamento livre. Para pequenos espaçamentos, com razões de $1,0 < p/d < 1,2$, o comportamento de corpo rombudo ainda é mantido, mas a alta quantidade de movimento do fluido que escoava através da fenda formada entre os tubos aumenta a pressão a jusante dos tubos, reduzindo o arrasto dos dois tubos. Porém, a frequência de desprendimento de vórtices permanece a mesma observada para o caso de $p/d = 1$, ocorrendo desprendimento de vórtices somente nas camadas de cisalhamento externas. Assim, três padrões podem ser observados:

- Uma esteira simétrica de vórtices é formada e um escoamento de fenda orientado paralelamente ao eixo do escoamento;

- Apresenta um escoamento da fenda desviado, embora uma esteira de vórtices simples ainda seja visualizada, sendo este o padrão mais comum;
- Apresenta um escoamento não significativo dentro da fenda.

Para razões de espaçamento intermediárias ($1,2 < p/d < 2,2$) o escoamento é caracterizado pela formação de uma esteira larga atrás de um dos tubos e uma esteira estreita atrás do outro (Fig. 1.5b). Essas esteiras dão origem a duas frequências dominantes de despreendimento de vórtices: a frequência mais alta está associada à esteira estreita, e a frequência mais baixa está associada à esteira larga. O escoamento que passa pela fenda sofre um desvio na direção da esteira mais estreita. O fenômeno biestável ocorre quando o padrão de escoamento desviado muda intermitentemente, ou seja, quando o jato que emana da fenda se direciona ora na direção de um dos tubos, ora na direção do outro. Este fenômeno é independente do número de Reynolds, e não tem sido associado a desalinhamentos dos tubos ou outras influências externas. É considerado uma propriedade intrínseca do escoamento. Para $2,2 < p/d < 2,5$ o escoamento que emana da fenda é brevemente desviado, ou seja, o ângulo de desvio que este perfaz é pequeno em comparação aos apresentados nas faixas de p/d já citadas. Neste caso existe uma sincronização de vórtices em oposição de fase. As esteiras larga e estreita induzem diferentes forças nos respectivos tubos. Para grandes razões de espaçamento ($p/d > 2,5$) as esteiras atrás dos tubos são praticamente independentes, e se comportam como sobre dois corpos rombudos isolados. Desse modo, o escoamento se dá na direção da corrente principal. Porém, apresentam alguma interação ou sincronização, geralmente na forma de vórtices em oposição de fase. Os tubos experimentam os mesmos valores médios e flutuantes das forças de arrasto e de sustentação (Fig. 1.5c). Os autores também concluíram que a esteira estreita causa menor arrasto e maior sustentação, enquanto a esteira larga causa maior arrasto e menor sustentação nos respectivos tubos. Para $p/d = 1,1$ o tubo com esteira estreita tem uma força de sustentação negativa, associada à esteira estreita, e que gera atração entre os tubos. Para $p/d > 1,2$ foram encontrados dois valores diferentes da força de sustentação nos tubos, gerando repulsão entre eles. As maiores diferenças entre os coeficientes de arrasto e de sustentação se encontram na faixa de $1,8 < p/d < 2,2$. Para os intervalos compreendidos entre $1,1 < p/d < 1,2$ e $2,2 < p/d < 2,5$ os valores médios dos coeficientes de arrasto, induzidos pelos modos das esteiras (larga e estreita) são maiores do que no caso para um único tubo isolado.

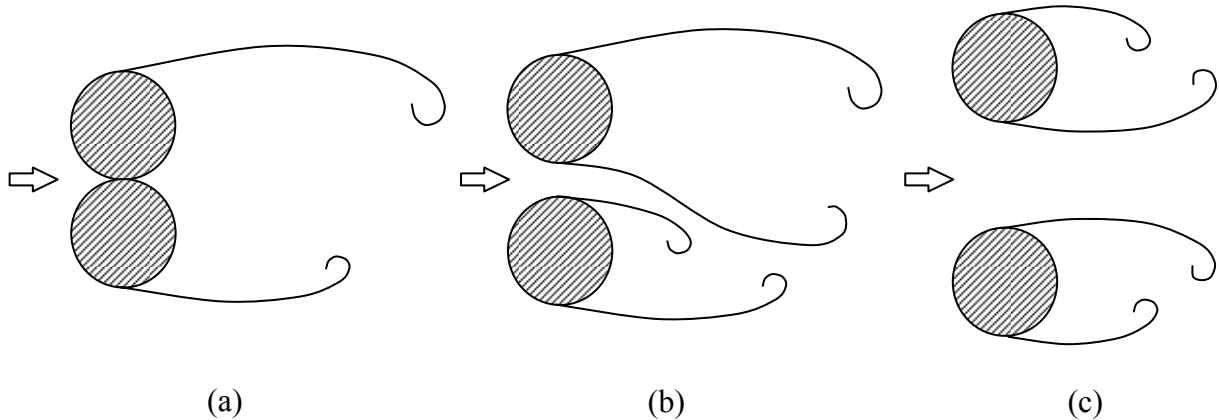


Figura 1.5 - Diferentes modos de escoamento para dois tubos dispostos lado a lado: (a) tubos em contato, (b) razão p/d intermediária e (c) grande razão p/d . (Adaptado de Olinto, 2005).

Olinto, 2005, identificou a presença do escoamento biestável em canal aerodinâmico para dois tubos dispostos lado a lado, através da técnica de anemometria de fio quente, para um número de Reynolds de 3×10^4 . Foi observado que, para medições de velocidade realizadas próximas aos tubos (até $x/d = 0,93$, onde “ x ” é a distância das sondas até a da linha de centro dos tubos, a montante), a biestabilidade é claramente identificada. Já para medições realizadas a distâncias maiores dos tubos ($x/d = 2,18$) o fenômeno biestável não é identificado. Isso se deve ao posicionamento das sondas, que, a partir de uma certa distância, na presença de um escoamento de fenda desviado, medem a velocidade dentro da mesma esteira (larga). Uma técnica de visualização de escoamento com injeção de tinta foi aplicada, buscando consolidar a interpretação dos resultados obtidos em laboratório, e os resultados mostram que o processo ocorre de forma bidimensional, pois dentro da fenda estreita o escoamento não experimenta significativa variação no plano vertical. Olinto, 2005, também apresenta resultados para uma fileira de tubos transversal ao escoamento e para bancos de tubos de configuração quadrangular, com três razões de espaçamento diferentes.

Alam e Zhou, 2007, estudaram o escoamento ao redor de dois tubos posicionados lado a lado para pequenos espaçamentos ($1,1 < p/d < 1,2$), para um número de Reynolds de $4,7 \times 10^4$. Os resultados mostram duas estruturas distintas do escoamento para $p/d = 1,1$ e $p/d = 1,2$. Para $p/d = 1,1$ o coeficiente de sustentação experimenta uma súbita mudança. O escoamento da fenda é altamente desviado, formando uma bolha de separação na região de base de um dos tubos. Para $p/d = 1,2$ a bolha de separação não ocorre. Para $p/d = 1,3$ existem dois tipos de mudanças descontínuas na estrutura do escoamento: uma é devida à mudança do

escoamento da fenda de um lado para o outro, e a outra é devida ao estouro da bolha de separação. Isso resulta em quatro modos distintos de escoamento.

De Paula, 2008, realizou medições com a técnica de anemometria de fio quente em canal aerodinâmico com duas sondas perpendiculares à direção principal do escoamento, posicionadas na esteira de cada cilindro, identificando o fenômeno biestável em dois cilindros dispostos lado a lado, três cilindros (um a montante e dois a jusante) e em duas fileiras de cilindros em arranjo triangular. A variação nos níveis de velocidade é observada após uma decomposição em bandas de frequências com o uso de transformadas de ondaletas. Também foram realizadas visualizações de escoamento em canal hidráulico com o emprego de injeção de corantes.

Silveira, 2011, estudou experimentalmente o efeito da razão de bloqueio em um canal aerodinâmico sobre o fenômeno da biestabilidade em escoamento turbulento cruzado ao redor de dois cilindros dispostos lado a lado, para uma faixa de número de Reynolds de $3,72 \times 10^3$ e $7,61 \times 10^4$, baseados na velocidade média do escoamento não perturbado e no diâmetro de cada um dos cilindros. Os diâmetros dos cilindros variam de 4,5 a 60 mm e as razões de bloqueio, d/L , variam de 4,66 a 62,18 %, em que L é a largura da seção de testes (0,193 m). As razões de espaçamento foram de $p/d = 1,26$ e $p/d = 1,6$. O autor concluiu que existe uma forte influência da razão de bloqueio sobre o fenômeno biestável. Razões de bloqueio menores que 10% não apresentam o fenômeno. Para razões de espaçamentos maiores, a eficiência no posicionamento na sonda é extremamente importante a fim de não se medir velocidades dentro da esteira larga. Neste caso há uma diminuição gradual do número de trocas entre os modos do escoamento. Para grandes razões de bloqueio (maiores que 60 %), o fenômeno biestável é praticamente encoberto, podendo fazer com que o desprendimento de vórtices se sobreponha ao fenômeno. O autor concluiu que a razão de bloqueio vem a ser o principal parâmetro do escoamento, uma vez que pode causar mudanças nos fenômenos que ocorrem nos tubos, em particular, na biestabilidade, e que o número de Reynolds e a razão de espaçamento p/d acabam por não influenciar o escoamento.

Quanto à análise de bancos de tubos, Indrusiak, 2004, aplicou transformadas de ondaletas aos sinais experimentais obtidos em escoamentos turbulentos transientes e permanentes em canal aerodinâmico com a técnica de anemometria de fio quente, mostrando que esta é uma ferramenta extremamente versátil na análise experimental, e que permite a descoberta de particularidades dos escoamentos e a melhor compreensão dos fenômenos estudados.

Ferramentas estatísticas são usualmente utilizadas para a análise de escoamentos completamente turbulentos [Silveira Neto, 2002]. Contudo, as médias estatísticas não permitem o acesso às mais importantes informações dos mecanismos físicos dos escoamentos, como no caso das instabilidades. A sensível dependência das condições iniciais e de contorno do escoamento de um fluido faz com que seu comportamento seja irregular no tempo e no espaço, fazendo-se necessário, muitas vezes, uma descrição estatística. Mansur et al., 2010, comentam que consideráveis avanços têm sido alcançados na predição de propriedades estatísticas e no estabelecimento de técnicas de controle da turbulência nos fluidos, que se refletem no aperfeiçoamento de equipamentos e processos industriais.

A classificação e agrupamento de dados são úteis na tarefa de prover modelos descritivos de densidades e distribuições de probabilidade. O tratamento estatístico via classificação de dados das propriedades de um fenômeno físico pode ser realizado através de modelos de mistura finitos, com o uso da teoria da verossimilhança. Neste contexto são utilizadas funções densidade de probabilidade, com as quais se espera descrever de maneira satisfatória o fenômeno estudado neste trabalho. Trata-se então de um problema de inferência estatística, visando-se ter o conhecimento das características do fenômeno [McLachlan e Peel, 2000]. A estimativa de máxima verossimilhança como um método de modelagem de curvas de frequência foi utilizada primeiramente por Fisher, 1922.

É sabido que na natureza diversos fenômenos físicos se comportam de acordo com uma densidade de probabilidade normal. Contudo, Jiménez, 1998, aponta que flutuações de velocidade turbulenta não precisam ter necessariamente uma densidade gaussiana em escoamentos cujos espectros de potência são mais íngremes do que k^{-1} . Li e Meneveau, 2005, obtiveram, a partir das equações de Navier-Stokes, um sistema não-linear de dinâmica simples para a evolução lagrangiana dos incrementos de velocidade longitudinal e transversal. Os resultados mostram que a turbulência hidrodinâmica contém explosões intermitentes de vorticidade e taxa de deformação com estatísticas não-gaussianas. Estas intermitências manifestam-se nas caudas muito alongadas das funções de densidade de probabilidade dos incrementos ou flutuações de velocidade entre dois pares de pontos.

Pearson, 1985, reconheceu os problemas na tentativa de se distinguir entre densidades inerentemente assimétricas e misturas de densidades simétricas. Deste modo, muitas vezes surge a necessidade do uso de funções que tenham suporte assimétrico na teoria da verossimilhança. Uma variação da função densidade normal foi desenvolvida para suportar assimetria, chamada de densidade normal assimétrica [Azzalini, 1985]. Basso et al., 2010, e Lin et al., 2007a, empregam funções do tipo normal assimétrica em modelos de mistura na

determinação da máxima verossimilhança. Do mesmo modo foram desenvolvidas funções do tipo t de *Student* assimétrica para dar suporte à variação do número de graus de liberdade [Azzalini e Capitanio, 2003]. Esta família de funções densidade de probabilidade em modelos de mistura são relatadas na literatura como uma extensão robusta de misturas formadas por densidades normais [Lin et al., 2007b], por possuírem este parâmetro adicional de ajuste. Ho et al., 2011, também apresentam uma mistura de funções do tipo t de *Student* e normal assimétrica de maneira hierárquica. Estimativas da máxima verossimilhança com o emprego de funções do tipo t de *Student* são estudadas por Peel e McLachlan, 2000.

Tennekes e Lumley, 1972, apresentam uma análise da densidade de probabilidade para duas variáveis simultaneamente, onde as componentes axial e transversal de um escoamento turbulento são estudadas conjuntamente, formando uma superfície. Deste modo, a análise do escoamento é chamada de bivariada, por levar em consideração os efeitos das duas componentes de velocidade simultaneamente.

Modelos de mistura finitos multivariados são utilizados na análise conjunta de dados e são compostos por uma soma ponderada de componentes de densidade de probabilidade. O desenvolvimento e a aplicação de modelos utilizando uma densidade normal assimétrica multivariada para estimação da máxima verossimilhança é apresentado em diversos trabalhos [Azzalini e Dalla Valle, 1996; Azzalini e Capitanio, 1999; Lin, 2009]. Trabalhos recentes que utilizam funções do tipo t de *Student* assimétrica multivariada como família de PDF na estimativa da máxima verossimilhança têm sido relatados na literatura como uma abordagem robusta [Azzalini e Capitanio, 2003; Lin, 2010]. Kotz e Nadarajah, 2004, apresentam uma variedade de densidades t de *Student* multivariadas e suas aplicações em diversas áreas. A aplicação de modelos de mistura finitas em densidades truncadas e em dados binados (classificados em bins, ou seja, exibidos em forma de histogramas com intervalos discretos) é apresentada por McLachlan e Peel, 2000. Em Lin et al., 2007b, e Lin, 2010, é apresentado um modelo de mistura finita com o emprego de funções do tipo t de *Student* assimétrica, onde um algoritmo de maximização de expectativa é empregado.

De acordo com Lin, 2010, na análise multivariada de funções do tipo t de *Student* assimétrica pode ser utilizada uma representação estocástica das PDF, ou seja, uma representação através da geração de vetores pseudoaleatórios (randômicos) realizada por computador. Assim, um método de Monte Carlo pode ser utilizado para gerar números pseudoaleatórios de acordo com a PDF. Azzalini e Genton, 2008, comentam que esta ferramenta também pode ser utilizada na análise univariada de dados.

O método de Monte Carlo visa produzir soluções aproximadas para uma grande variedade de problemas matemáticos, através de experimentos de amostragem estatística. Binder e Heermann, 2002, comentam que estudos realizados por métodos de Monte Carlo de modelos que são intratáveis por métodos analíticos auxiliam a preencher lacunas importantes na compreensão da realidade física. Deste modo, "experimentos" de computador podem ser executados. Podem-se medir funções de resposta que são inacessíveis por meio de experiência e trabalhar em dimensionalidade reduzida ou explorar mundos de dimensões superiores. O nome do método deve-se a um grupo de cientistas que trabalhavam no projeto Manhattan, para o desenvolvimento de armas nucleares em Los Alamos, no estado americano do Novo México, durante a Segunda Guerra Mundial. Isto se deve ao interesse de um dos integrantes do grupo de pesquisa no *poker*, pela semelhança da simulação estatística com os jogos de azar e a uma das divisões administrativas do microestado (principado) de Mônaco, chamada de Monte Carlo, famosa por seus cassinos [Metropolis, 1987]. Naquela ocasião, foi aplicado o método de amostragem estatística na simulação direta de problemas de natureza probabilística relacionados com a difusão aleatória de nêutrons em certos materiais [Metropolis e Ulam, 1949]. No uso em computadores digitais, ocorre uma amostragem pseudoaleatória, ou seja, um algoritmo gera uma sequência de números, os quais são aproximadamente independentes um dos outros [Knuth, 1998]. Números verdadeiramente aleatórios podem ser gerados através de hardware específico, a partir de um processo físico. Assim, o método de Monte Carlo é aplicado no presente trabalho na geração de números pseudoaleatórios para a representação estocástica de funções do tipo t de *Student* assimétrica, tanto univariadas quanto bivariadas.

Em várias áreas do conhecimento, são utilizadas representações esquemáticas na tentativa de melhor explicar o funcionamento de diversos sistemas. Neste contexto, podem ser encontrados conceitos como barreira de energia e modelo de poço de energia, amplamente aplicados na física [Friedman et al., 2000] e na química, geralmente, voltado à descrição da energia de ativação, que é a energia inicial necessária para que uma reação aconteça [Perrin e Nielson, 1997]. Um modelo semelhante pode ser aplicado ao sistema biestável, que conta com duas regiões de concentração em suas PDF.

Monteiro, 2006, apresenta uma definição para sistema. Segundo o autor, “um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto”. Um sistema pode ser caracterizado como “dinâmico” quando as demais variações que caracterizam seus objetos constituintes tem uma

representação irreduzível num espaço de fase. De acordo com Ferrara e Prado, 1999, a teoria de sistemas dinâmicos tem fornecido novas ferramentas para se analisar séries temporais caóticas obtidas em experimentos. Para explicar o funcionamento dinâmico de sistemas complexos, a física e a matemática muitas vezes utilizam a teoria do caos. Dias Júnior e Woiski, 2010, comentam que a turbulência é uma manifestação do comportamento caótico espacial e temporal de escoamentos com valores elevados do número de Reynolds. Poincaré, 1899, estudando a estabilidade do sistema solar, uma variação do “problema dos três corpos”, mostrou que a evolução deste sistema dinâmico é frequentemente caótica no sentido de que pequenas perturbações em seu estado inicial, tais como uma ligeira mudança na posição inicial de um corpo, levará a mudanças radicais em seu estado futuro. Se esta mudança sutil não é percebida pelos instrumentos de medição, então não será possível prever seu estado final. Por este motivo, Poincaré é considerado o pioneiro da teoria da estabilidade. Ruelle e Takens, 1971, em seu artigo sobre a natureza da turbulência, definiram a existência do que os autores chamaram de “atrator estranho”, que é a representação gráfica dos estados de um sistema no espaço de fases, que pode surgir quando, em uma trajetória fechada, acontecem bifurcações, conforme é variada a magnitude de algum parâmetro. Lorenz, 1963, estudando as equações simplificadas de rolos de convecção que ocorrem nas equações da atmosfera, descobriu a noção de atrator estranho e cunhou o termo de efeito borboleta. Lorenz descreveu um sistema relativamente simples de equações que resultou em uma dinâmica muito complicada, levando ao mapa caótico que mostra como o estado de um sistema dinâmico evolui no tempo num padrão complexo, não repetitivo e cuja forma é conhecida hoje como o “atrator de Lorenz”. Trata-se de um sistema não-linear, tridimensional e determinístico que exhibe comportamento caótico. Assim, o estudo do comportamento caótico da biestabilidade pode fornecer informações adicionais a respeito deste fenômeno, classificado até então na literatura como estocástico.

Ferrara e Prado, 1999, comentam que é possível desenvolver um estudo topológico de atratores utilizando uma abordagem completamente diferente, baseada na dinâmica simbólica. Lehrman e Rechester, 2001, utilizaram dinâmica simbólica para extrair de sinais caóticos provenientes de dados de flutuações turbulentas, informações relacionadas à estrutura de órbitas periódicas instáveis. Os autores concluíram que sua metodologia pode ser aplicada na análise de flutuações de dados turbulentos medidos experimentalmente. Daw et al., 2003, apresentam um método simplificado de simbolização de séries temporais experimentais, bem como sua utilização na descrição de uma seção bidimensional de Poincaré discretizada. Brida e Punzo, 2003, apresentam uma revisão abrangente da aplicação desta metodologia no estudo

da dinâmica de sistemas econômicos. Rajagopalan et al., 2007, apresentam uma análise de séries temporais simbólicas de dados de medição multidimensional para identificação de padrões em sistemas dinâmicos. Assim, o estudo de atratores baseados em dinâmica simbólica passa pela análise e caracterização das séries temporais através de histogramas representativos da densidade estatística das sequências simbólicas. Uma análise do fenômeno biestável baseada na dinâmica simbólica pode ser empregada tanto nas séries temporais experimentais quanto no atrator reconstruído no espaço de estados, visando a identificação de padrões contidos nos dados.

Deste modo, um estudo que enfoque tanto uma abordagem através de métodos estocásticos quanto determinísticos torna-se bastante interessante, uma vez que tais técnicas podem permitir uma maior compreensão global do fenômeno biestável.

1.5 Objetivos

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo para a determinação de parâmetros que caracterizam o fenômeno da biestabilidade em escoamentos turbulentos em bancos de tubos. Devido à literatura relatar a ocorrência deste fenômeno na geometria de dois tubos dispostos lado a lado, esta configuração foi escolhida para estudo, para então melhor compreender os mecanismos fenomenológicos que ocorrem em bancos de tubos, visto que a biestabilidade pode atuar como uma fonte adicional de instabilidades dinâmicas nestes dispositivos.

Desta maneira, é empregada a técnica de anemometria de fio quente em canal aerodinâmico com o intuito de medir o campo médio e flutuante de velocidades no interior do canal e a jusante dos tubos, obtendo-se assim séries temporais de velocidade (Capítulo 2.1).

Transformadas de ondaletas são utilizadas neste trabalho, tanto discretas quanto contínuas, servindo basicamente para realizar uma filtragem das séries temporais para determinadas bandas de frequências e para analisar o conteúdo de energia do sinal, respectivamente (Capítulo 2.2).

Os resultados obtidos através desta técnica experimental são utilizados como dados de entrada em um modelo de mistura finita, visando à obtenção de funções densidade de probabilidade (PDF) alteradas pelo fenômeno da biestabilidade. Funções de densidade de probabilidade do tipo normal e *t* de *Student* assimétricas, as quais possuem uma representação estocástica, são utilizadas como base no emprego de um algoritmo de maximização de

expectativa, com o auxílio do método de Monte Carlo na geração de números pseudoaleatórios (Capítulo 2.3).

Com o intuito de verificar se o fenômeno biestável pode ser modelado matematicamente como um sistema dinâmico, permitindo que as trocas entre os modos do escoamento possam ser previstas, estudam-se suas características quanto à dependência às condições iniciais, visando determinar se este é um sistema caótico determinístico. Não é objetivo deste trabalho a proposição de uma modelagem matemática para o sistema dinâmico da biestabilidade. Diversos sistemas dinâmicos reais, ou seja, com amortecimento, comportam-se de maneira complexa e, aparentemente, sem um padrão definido. Tais sistemas são estudados e melhor compreendidos através da teoria do caos, principalmente através do conceito de caos determinístico, onde as perturbações ou condições iniciais impostas ao sistema influenciam significativamente em sua dinâmica, como o que ocorre na turbulência em um fluido viscoso. Desta maneira, é interessante a reconstrução do atrator do problema, a partir da série temporal de dados experimentais, o que permite calcular parâmetros da dependência temporal do fenômeno (Capítulo 2.4).

A técnica de dinâmica simbólica é aplicada a um alfabeto binário, visando identificar padrões no escoamento através da análise de um particionamento específico e do estudo dos histogramas produzidos (Capítulo 2.5).

2 METODOLOGIA

Um estudo experimental é aplicado neste trabalho, de modo que, partindo-se da técnica de anemometria de fio quente em canal aerodinâmico, mede-se a velocidade média e as flutuações de velocidade do ar ao passar pelos tubos. Assim, são obtidas séries temporais de velocidade que, com o auxílio das ferramentas matemáticas, possibilitam uma análise quantitativa dos resultados.

São utilizadas ferramentas matemáticas que permitem uma análise no domínio do tempo e da frequência (ferramentas estatísticas), bem como uma análise conjunta nestes dois domínios (tempo-frequência), através de transformadas de ondaletas.

Os resultados obtidos da técnica experimental, que são as séries temporais de velocidade, são utilizados como dados de entrada para modelos de mistura finitos, que visam classificar os dados observados conforme uma família de funções densidade de probabilidade. Neste contexto o fenômeno biestável é tratado como um problema de dados incompletos, e a estimativa é realizada através dos dados observados (série temporal). Esta tarefa requer a estimativa de máxima verossimilhança, ou seja, conhecer qual função densidade de probabilidade tem maior probabilidade de ter produzido os dados observados, onde um algoritmo de maximização de expectativa é aplicado. Como as funções assimétricas sob estudo possuem uma representação estocástica, nesta etapa é utilizado um método de Monte Carlo no passo de estimativa dos parâmetros de verossimilhança.

Devido à grande semelhança do comportamento do fenômeno biestável, observada na análise conjunta das componentes axial e vertical de velocidade, com sistemas dinâmicos caóticos, é realizado um estudo de reconstrução do atrator do problema, a partir da série temporal de dados experimentais, o que permite calcular parâmetros da dependência temporal do fenômeno.

Também é aplicada a técnica de dinâmica simbólica, a qual possibilita a identificação de padrões do escoamento através de histogramas e com o auxílio de um alfabeto.

Nas sessões seguintes, estas técnicas são descritas em maiores detalhes:

- 2.1 Técnica experimental
- 2.2 Análise no domínio do tempo e da frequência
- 2.3 Modelo de mistura finita
- 2.4 Caos determinístico
- 2.5 Dinâmica simbólica

2.1 Técnica experimental

Para um estudo quantitativo das características do escoamento ao passar pelo banco de tubos, foi empregado o canal aerodinâmico ilustrado na Fig. 2.1. Neste canal aerodinâmico são realizadas medições de velocidade média e de flutuações de velocidade do ar.

O canal, de circuito aberto, possui uma seção de testes retangular com dimensões internas de 193 mm de largura por 146 mm de altura, confeccionada de placas de acrílico transparente. O ar que é impelido por um ventilador centrífugo de 0,75 kW passa por um difusor e, em seguida, por dispositivos homogeneizadores de fluxo do tipo grade, colmeia e tela, até atingir a seção de testes. A montante desta, a 180 mm de distância, estão fixados um tubo de Pitot e um sensor de temperatura. O tubo de Pitot, com o auxílio de um manômetro eletrônico, permite a medição da velocidade de referência do escoamento não perturbado. Os experimentos são realizados em um ambiente climatizado, com temperatura constante de 24 °C. A jusante da seção de testes, fora do canal aerodinâmico, é montado um sistema de posicionamento tridimensional, que permite um alinhamento milimétrico do suporte da sonda. O comprimento total do canal, após os dispositivos uniformizadores de fluxo, é de 1,02 m. A Fig. 2.2 ilustra as dimensões do canal aerodinâmico utilizado nas medições. A seção de testes do canal utilizada, na qual os experimentos são realizados, apresenta um perfil de velocidades uniforme e uma intensidade de turbulência máxima inferior a 1%, valor este medido sem obstáculos no interior do canal.

A velocidade do ar no interior do canal aerodinâmico é controlada por intermédio de um inversor de frequência, o qual permite variar a rotação do motor elétrico do ventilador centrífugo. Para o canal livre (sem tubos), a velocidade do ar pode variar de 0 até 15 m/s.

Os tubos utilizados nos experimentos são construídos em PVC rígido com diâmetro externo de 25,1 mm, comprimento de 146 mm e rigidamente fixados à placa superior de acrílico do canal, estando ambas suas extremidades tampadas.

As flutuações de velocidade do escoamento são medidas através da técnica de anemometria de fio quente a temperatura constante (CTA, do inglês *Constant Temperature Anemometry*), por intermédio de um equipamento DANTEC *StreamLine* 90N10. Uma sonda dupla de fios perpendicular/inclinado em relação à direção principal do escoamento, modelo DANTEC 55P71 *Special*, foi utilizada nos experimentos, alinhada com a linha tangente à geratriz interna de um dos tubos. Conforme Olinto et al., 2009, quando o escoamento percorre o interior de um banco de tubos, uma forte componente vertical surge. Assim, para que esta componente vertical possa ser melhor captada pelos fios da sonda, os experimentos são

realizados com o fio perpendicular posicionado na horizontal, conforme apresentado na Fig. 2.1c.

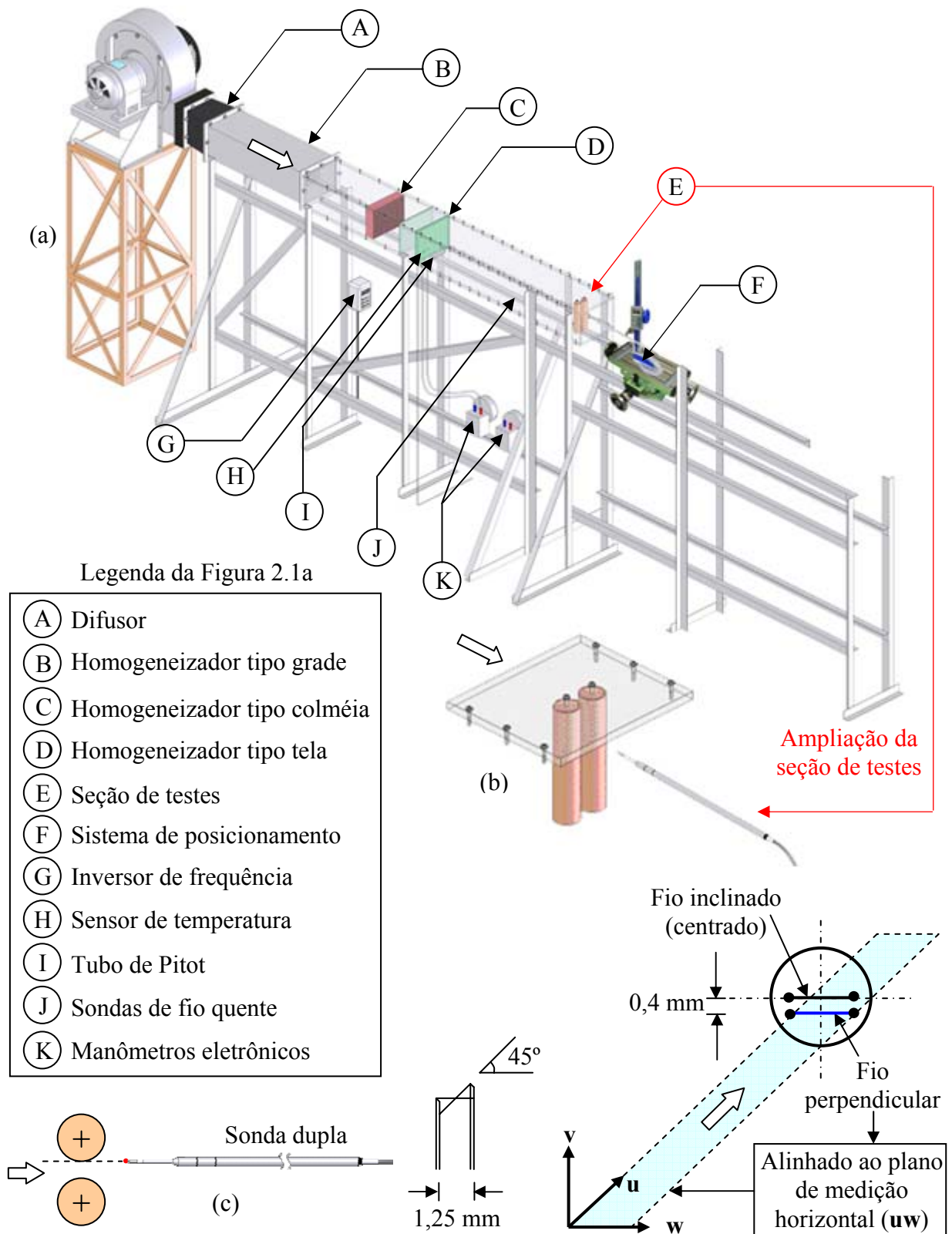


Figura 2.1 – Ilustrações esquemáticas: (a) canal aerodinâmico, (b) seção de testes.

(c) posicionamento e características da sonda.

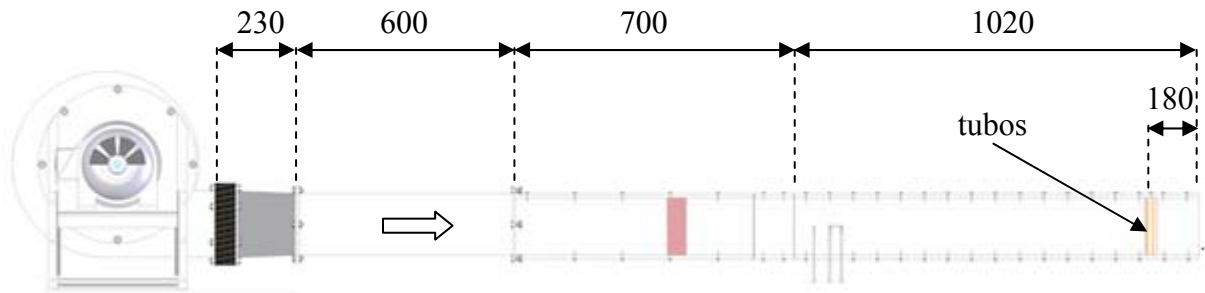


Figura 2.2 – Principais dimensões do canal aerodinâmico. Dimensões em [mm].

As séries de dados de velocidade são adquiridas por intermédio de uma placa conversora analógico/digital (A/D), modelo NATIONAL INSTRUMENTS 9215, com interface USB e 4 canais simultâneos de entrada analógica, com resolução de 16 bits ($2^{16} = 65536$ níveis) e operando na faixa de tensão de ± 10 V, controlada por um computador pessoal. O software utilizado para ajuste e configuração dos parâmetros das sondas e para a aquisição dos dados é o *StreamWare*, versão 3.4, próprio da DANTEC. A análise de incertezas das variáveis envolvidas neste trabalho encontra-se no Apêndice A.

A calibração da sonda de fio quente é realizada no interior do canal aerodinâmico, com o emprego de um dispositivo que reduz gradualmente a seção transversal do canal. Para informações mais detalhadas acerca da calibração da sonda de fio quente em canal aerodinâmico sugere-se consultar o Apêndice B.

A razão de espaçamento estudada é $p/d = 1,26$, onde “p” é o passo ou a distância entre os centros dos cilindros e “d” o diâmetro. A incerteza máxima da montagem dos bancos de tubos foi estimada em 0,5 mm.

As séries temporais são obtidas com uma frequência de aquisição (f_s) de 1 kHz, com tempo de duração dos registros (T_r) de 131,072 segundos, o que fornece um número total de pontos de dados (N) de 131072. É utilizado um filtro passa baixa para atender ao critério de Nyquist, evitando o fenômeno de dobramento ou *aliasing*. A frequência de corte é de 300 Hz, escolhida em função da característica a ser identificada no escoamento e que deve combinar com a disponibilidade de filtros de corte. Deste modo, busca-se obter uniformidade e repetibilidade dos resultados, além de uma melhor definição das curvas e funções estatísticas que visam permitir a interpretação física do fenômeno estudado. Os tempos de aquisição estão relacionados à frequência de aquisição através do número de elementos da amostra, que são escolhidos em função da característica procurada. Os tamanhos de amostras permitidos pelo sistema próprio de aquisição da DANTEC são apresentados em séries diádicas. O Apêndice C apresenta uma tabela contendo os principais dados experimentais deste trabalho.

2.2 Análise no domínio do tempo e da frequência

Após a obtenção das séries temporais, estas são tratadas por ferramentas matemáticas que permitem uma análise no domínio do tempo e da frequência, bem como em uma análise conjunta nestes dois domínios (tempo- frequência).

De acordo com Tennekes e Lumley, 1972, a análise no domínio do tempo consiste basicamente em calcular os quatro momentos da função densidade de probabilidade: valor médio, desvio padrão, assimetria (*skewness*) e planicidade (*kurtosis*). Também é utilizada a função de autocorrelação, que determina como as flutuações de uma grandeza se relacionam ao longo do tempo.

Na análise no domínio da frequência, ou análise espectral, é utilizada a transformada de Fourier através da função densidade espectral de potência (*PSD - power spectral density*). O espectro de Fourier consiste dos quadrados dos coeficientes da transformada de Fourier. Segundo Bendat e Piersol, 1986, esta função permite destacar as principais características dos sinais adquiridos, e consiste no espectro de Fourier de uma série, suavizado sobre intervalos de frequência (*bandwidth*) e sobre conjuntos de estimativas (*window*). Para tal, é utilizado o algoritmo de Welch [Welch, 1967]. Esta transformada só se aplica a fenômenos estatisticamente estacionários, e as singularidades do sinal não aparecem na análise. Assim, não lidam bem com processos transientes em diferentes escalas, por serem avaliadas sobre o intervalo completo de tempo.

Quando a hipótese da estacionariedade não pode ser mantida, devido a fenômenos transientes de diferentes escalas, a análise de Fourier torna-se inadequada, visto que as informações temporais não são visíveis neste espaço. Isso se deve aos coeficientes de Fourier estarem referidos a todo o domínio temporal do sinal, pois os componentes da base de Fourier são funções do tipo seno e cosseno, ou seja, com suporte infinito. Estas funções são localizadas no domínio da frequência, mas infinitamente distribuídas no domínio do tempo. Com isso, os coeficientes de Fourier representam um valor integral para todo o domínio, mascarando a presença de intermitências e de fenômenos transitórios [Alam e Sakamoto, 2005]. Como alternativa a essa limitação, podem ser usadas transformadas de ondaletas, que permitem o estudo dos fenômenos turbulentos sem a hipótese de estacionariedade, através da geração de espectrogramas de energia nos domínios do tempo e da frequência simultaneamente.

As ondaletas, termo derivado do francês *ondelettes*, também conhecido na língua inglesa por *wavelets*, são pequenas ondas que crescem e decaem em um período finito de

tempo, possuindo bases transientes, e sendo bastante adequadas para a análise de funções que também o sejam. Uma função ondaleta deve satisfazer a duas propriedades básicas: ter suporte efetivo limitado a um intervalo finito (com valores diferentes de zero dentro do intervalo), tendendo rapidamente a zero fora deste intervalo; e os valores positivos são cancelados pelos negativos, como em uma onda. Esta propriedade é conhecida como condição de admissibilidade.

Uma função $\psi(t)$, é uma função ondaleta, se satisfaz duas propriedades básicas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt = 1 \quad (2.1)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

A base é gerada por meio de dilatações e translações de uma única ondaleta:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \quad (2.3)$$

em que a é a escala e b é a posição da ondaleta. Uma função escala, $\phi(t)$, é associada a cada ondaleta, e satisfaz a propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (2.4)$$

Esta função escala também irá gerar uma base, por meio de dilatações e translações:

$$\phi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \quad (2.5)$$

Desta função escala são obtidos coeficientes que representam a média local do sinal nas escalas consideradas. Da função ondaleta são obtidas oscilações locais em torno da média, nas mesmas escalas [Indrusiak, 2004].

Existem diversas ondaletas, e em geral os resultados podem depender fortemente da escolha destas. Assim, deve-se escolher a melhor ondaleta, que é a que realça as características de interesse do fenômeno estudado. Neste trabalho, são usadas as mesmas famílias de ondaletas empregadas por Indrusiak et al., 2005, e Olinto et al., 2009, em função dos fenômenos estudados e das características procuradas. Para transformadas contínuas (espectrogramas) foi utilizada a ondaleta de Morlet (morl), e para as reconstruções dos sinais

(filtragens) foi utilizada a ondaleta Daubechies 20 (db20). De maneira geral, a transformada de ondaletas permite uma análise do sinal no tempo e escala. Contudo, para fins práticos, é mais conveniente expressar os resultados em termos de frequência. Assim, os valores dos coeficientes de escala podem ser transformados em valores de frequência, através de uma aproximação periódica por transformada de Fourier. Existem dois tipos básicos de transformadas de ondaletas: a transformada contínua de ondaletas (CWT, do inglês *Continuous Wavelet Transform*), e a transformada discreta de ondaletas (DWT, do inglês *Discrete Wavelet Transform*).

A transformada contínua de ondaletas é representada pela convolução linear do sinal pela ondaleta de base, e o espectro de ondaletas, ou espectrograma, é definido como o módulo desta convolução ao quadrado. No espectro de ondaletas, a energia está relacionada a cada tempo e escala, sendo que o termo espectrograma é devido à característica da transformada de ondaletas de permitir a representação da distribuição da energia de sinais transientes sobre os domínios do tempo e da frequência.

A transformada discreta de ondaletas é obtida mediante a escolha de valores discretos para os coeficientes de escala e de posição, geralmente através de séries diádicas. Assim, a transformada discreta de ondaletas é uma subamostragem elaborada da transformada contínua de ondaletas em escalas diádicas [Percival e Walden, 2000]. A definição de espectro discreto de ondaletas é dada pelo módulo da transformada discreta de ondaletas ao quadrado. Porém, o número de níveis de transformações que podem ser calculados é limitado em função do número de pontos da série temporal. Diferentemente da transformada de Fourier, na transformada de ondaletas, os coeficientes remanescentes são relacionados com as frequências mais baixas, que não são desprezados, incluindo o valor médio do sinal. O cálculo dos vetores de coeficientes de detalhes e aproximações é realizado através de um algoritmo piramidal, baseados em filtros simétricos de quadratura. Com isso, o sinal original pode ser reconstruído somando-se a última aproximação, e todos os detalhes. Esses detalhes contêm a informação perdida entre duas aproximações sucessivas. Através das ondaletas contínuas é possível observar mais claramente as características dos sinais, porém, as ondaletas discretas necessitam de menor tempo de computação e consumo de memória.

Existem também outros tipos de decomposições, como a transformada discreta de pacotes de ondaletas, que é empregada na obtenção de intervalos mais estreitos de frequência, permitindo uma análise mais detalhada do sinal, e as decomposições diádicas disjuntas, que são empregadas quando se quer analisar uma faixa de frequência em especial do total do sinal.

Porém, o estudo destas decomposições foge ao escopo do presente trabalho. Uma revisão mais abrangente dos fundamentos e da utilização das transformadas de ondaletas pode ser encontrada em Indrusiak, 2004.

2.3 Modelo de mistura finita

Um modelo de mistura finita pode ser empregado na classificação estatística de dados, como aqueles provenientes da medição em canal aerodinâmico do fenômeno biestável. Isto é feito através da modelagem da densidade ou distribuição de uma mistura (ou soma ponderada) de outras densidades ou distribuições, fornecendo uma representação para a heterogeneidade em um número finito de classes latentes. Assim, ele é utilizado para modelar resultados contínuos ou discretos que sejam observados a partir de populações que consistem de um número finito de subpopulações.

De acordo com McLachlan e Peel, 2000, um modelo de mistura finito é uma soma ponderada das densidades das g componentes da função f dada pela equação

$$f(y_j) = \sum_{i=1}^g \pi_i f_i(y_j), \quad (2.6)$$

em que $f_i(y_j)$ são as componentes de densidade da mistura e π_i são as probabilidades de mistura, quantidades não negativas que somadas são iguais a um; ou seja,

$$0 \leq \pi_i \leq 1 \quad (i = 1, \dots, g) \quad (2.7)$$

e

$$\sum_{i=1}^g \pi_i = 1. \quad (2.8)$$

Nesta formulação de modelo de mistura, o número de componentes g é considerado fixo, o que pode não ocorrer em diversas aplicações, onde este deve ser inferido com base nos dados disponíveis. No presente trabalho foi verificado que as funções densidade de probabilidade do fenômeno biestável apresentam claramente duas concentrações, ou seja, é possível inferir que $g = 2$.

As quantidades π_1, \dots, π_g são chamadas de proporções de mistura ou pesos. As funções $f_1(y_j), \dots, f_g(y_j)$ são densidades, assim como $f(y_j)$. A equação (2.6) é chamada de densidade de mistura finita de g componentes.

McLachlan e Peel, 2000, comentam que várias abordagens podem ser utilizadas para estimar a densidade de misturas. Dentre estas, encontram-se os métodos gráficos, os métodos

dos momentos, os métodos da distância mínima, abordagem Bayesiana e a estimativa de máxima verossimilhança.

A Fig. 2.3 ilustra um exemplo de modelo de mistura finita, onde duas classes com densidade normal possuindo valores médios e desvios padrão diferentes são exibidas através de um histograma de dados binados (Fig. 2.3a). O resultado da estimativa de máxima verossimilhança destes dados é apresentado na Fig. 2.3b.

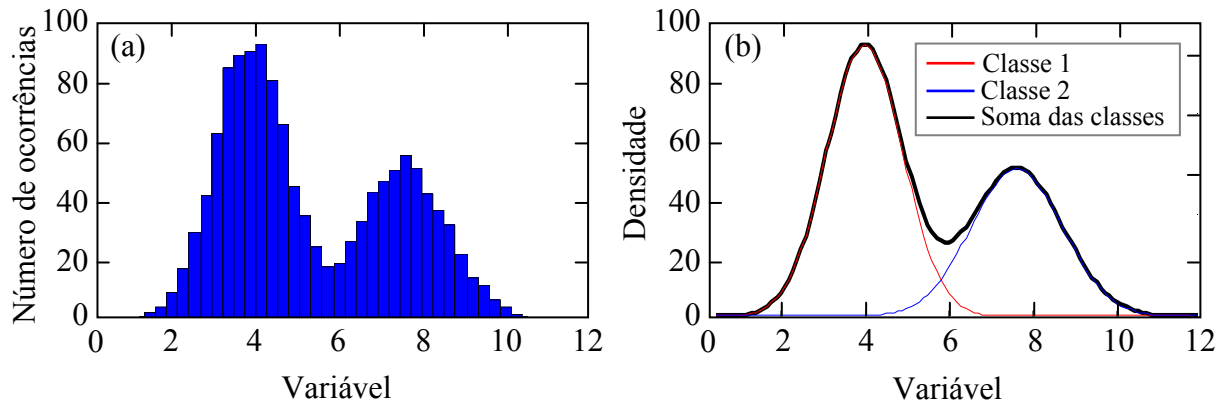


Figura 2.3 – Ilustração de um modelo de mistura finito baseado em duas componentes:

(a) histograma de dados binados. (b) estimativa de máxima verossimilhança.

2.3.1 Teoria da verossimilhança

Na análise de dados estatísticos, muitas vezes é necessário o conhecimento do modelo que tem maior probabilidade de ter produzido os dados observados. Um método estatístico bastante utilizado em áreas como geociências e engenharia para ajustar um modelo a dados coletados, fornecendo estimativas para os parâmetros desse modelo, é o “método da máxima verossimilhança”, que se baseia no princípio de que, entre todos os valores possíveis para os parâmetros de uma função de ajuste, serão escolhidos aqueles que são mais prováveis de terem produzido o conjunto de dados observado (neste trabalho, as séries temporais). Desta forma, a verossimilhança não é função dos dados, mas sim dos parâmetros do modelo (função de ajuste) escolhido. Ela é interpretada como função do vetor de parâmetros (θ) para um conjunto de dados fixo e serve para medir o quanto esses dados suportam uma hipótese sobre θ , ou seja, informa a ordem natural de preferência entre diversas possibilidades de θ .

Seja Y uma variável aleatória discreta ou contínua. O resultado de um experimento qualquer desta variável é a observação y . Para n observações da variável Y , temos que

$y = (y_1, \dots, y_n)^T$, onde T denota a matriz transposta. Esta variável Y pode ser caracterizada por uma densidade de probabilidade pertencente a alguma família F de densidades, especificada por um número finito de parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T$, que, de modo geral, são desconhecidos. Seja $f(y; \theta)$ a função densidade de probabilidade (PDF) de Y dado θ e Θ , denominado “espaço paramétrico”, o conjunto de valores possíveis para o vetor θ [Cordeiro, 1992]. A “função de verossimilhança” $L(\theta)$ é definida como sendo proporcional à densidade de probabilidade conjunta das realizações de Y . Assim, escolhe-se a família F antes de se trabalhar com a verossimilhança.

Considerando observações mutuamente independentes para todas as densidades em F , a função de verossimilhança se reduz a

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i, \theta). \quad (2.9)$$

Como estes produtos são números muito pequenos, convém trabalhar com o logaritmo natural de $L(\theta)$, para transformar o produto numa soma. Assim, define-se a “função de log-verossimilhança” ou “função suporte”, como

$$\ell(\theta) = \log L(\theta), \quad (2.10)$$

sendo mais adequada para cálculos computacionais, e permitindo que modelos possam ser comparados aditivamente, ao invés de multiplicativamente.

Para observações independentes, segue-se de (2.9) que $\ell(\theta)$ é aditiva, ou seja,

$$\ell(\theta) = \log \left[\prod_{i=1}^n f(y_i, \theta) \right] = \sum_{i=1}^n \log f(y_i, \theta). \quad (2.11)$$

Como a função logaritmo é monótona, maximizar $L(\theta)$ e $\ell(\theta)$ em Θ são processos equivalentes.

Contudo, a teoria da probabilidade trata a densidade de Y quando esta é completamente definida, ou seja, quando todos os parâmetros θ são conhecidos. Portanto, se a densidade de Y não estiver completamente definida, se supuser que sua densidade pertence à família F , o problema passa a ser de inferência estatística. Assim, estuda-se a inferência via teoria da verossimilhança onde a densidade de Y é determinada por alguma densidade de F que não se sabe indicar com precisão. Partindo-se das observações y , pode-se ter informações sobre a densidade de Y ou, equivalentemente, sobre uma hipótese expressa através de θ . De modo resumido, a verossimilhança expressa a plausibilidade do vetor θ explicar os dados y .

O “princípio de suficiência” estabelece que vetores de dados distintos com os mesmos valores das estatísticas suficientes para um vetor θ de parâmetros, fornecem conclusões idênticas sobre θ . A verossimilhança contém toda a informação dos dados relevantes para estimar os parâmetros em θ , uma vez que os próprios dados constituem um conjunto de estatísticas suficientes para os parâmetros de qualquer modelo estatístico [Cordeiro, 1992].

De acordo com Myung, 2003, existe uma importante diferença entre a função de densidade de probabilidade dos dados observados $f(y;\theta)$ e a função de verossimilhança $L(\theta)$, devido a serem definidas em dois eixos diferentes, e, portanto, não serem diretamente comparáveis entre si. Especificamente, a PDF é uma função dos dados, fornecido um conjunto particular de valores do parâmetro θ , definida na “escala de dados”. Por outro lado, a função de verossimilhança é uma função do parâmetro, dado um determinado conjunto de dados observados, definida na “escala de parâmetro”. Em suma, a PDF mostra a probabilidade de um valor de dados específico para um parâmetro fixo, enquanto a função de verossimilhança mostra a verossimilhança (probabilidade não normalizada) de um valor particular do parâmetro para um conjunto fixo de dados.

Existe uma sensível diferença entre verossimilhança e probabilidade, sendo na verdade, conceitos fundamentalmente distintos. Uma probabilidade expressa a crença que se tem sobre um resultado de um experimento. Já a verossimilhança não pode ser tratada como se fosse resultado de um experimento, o que evidencia a diferença entre os dois conceitos [Cordeiro, 1992].

Quando apenas um parâmetro é assumido como sendo conhecido, a função de verossimilhança será uma linha sobre o espaço 1D de parâmetros. Se o modelo tiver dois parâmetros, a função de verossimilhança será uma superfície posicionada sobre o espaço 2D de parâmetros. Em geral, para um modelo com k parâmetros, a função de verossimilhança $L(\theta)$ toma a forma de uma superfície k -dimensional geométrica posicionada sobre um hiperplano k -dimensional estendido pelo parâmetro do vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T$.

A estimativa pelo método da verossimilhança como um critério de comparação entre duas hipóteses rivais a serem testadas foi proposto por Fisher, 1922. Na estimativa do vetor de parâmetros verdadeiro, definido por θ_0 , escolhe-se o vetor de parâmetros que maximiza a função de verossimilhança no domínio de θ . A “estimativa de máxima verossimilhança” de θ é o vetor $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta)$ em Θ . Segundo Eliason, 1993, o princípio da estimativa de

máxima verossimilhança pode ser entendido como a tarefa de encontrar uma estimativa para θ que maximiza a probabilidade de ajuste sobre os dados observados.

O estimador de máxima verossimilhança $L(\hat{\theta})$ é dado pelo argumento máximo de $L(\theta)$, ou seja,

$$L(\hat{\theta}) = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta), \quad (2.12)$$

que é o conjunto de pontos do argumento dado, para o qual a expressão alcança seu valor máximo. Desse modo, o estimador de máxima verossimilhança é dado pela primeira derivada da função de verossimilhança. O valor máximo, que está no ponto de derivada nula, se baseia no princípio do cálculo onde, ao se derivar uma equação e igualando-a a zero, pode-se chegar ao(s) valor(es) mínimo e/ou máximo, é escrito na forma

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_r} = 0 \text{ para } r = 1, \dots, k. \quad (2.13)$$

Para verificar se as soluções das equações estão em Θ , e se correspondem a máximos locais de $L(\theta)$, é condição suficiente que a matriz de segundas derivadas avaliada no ponto $\hat{\theta}$ deva ser definida negativa, ou seja,

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0. \quad (2.14)$$

Do modo análogo, é definido o estimador de máxima log-verossimilhança, $\ell(\hat{\theta})$.

De acordo com Azzalini, 2002, em muitos casos é impossível obter uma função fechada para a expressão de estimação de máxima verossimilhança como uma função das observações, o que requer o uso de um método computacional (numérico). Quando a diferenciação analítica de $\ell(\theta)$ é possível, esta última é preferível, uma vez que a solução de equações lineares é um problema numérico mais simples do que a maximização direta de uma função.

Geralmente são utilizados métodos iterativos na busca da máxima verossimilhança quando a dimensão k do espaço de parâmetros é grande. Cordeiro, 1992, comenta que os métodos mais utilizados nesta etapa são o “método de Newton-Raphson”, e o “método de escore de Fisher”, que se baseiam em, a partir de uma estimativa inicial, gerar novas estimativas iterativamente, até que a diferença entre duas estimativas seja desprezível. Contudo, tais métodos podem não convergir ou mesmo divergir de $L(\hat{\theta})$. Segundo Cordeiro, 1992, se a verossimilhança tiver múltiplas raízes, não há garantia de que o procedimento iterativo convergirá para a raiz do maior valor absoluto da verossimilhança (máximo da

função). Em ambos os métodos é necessária a inversão de matrizes, onde estes procedimentos são muito sensíveis em relação às estimativas iniciais de $L(\hat{\theta})$.

Um único vetor de parâmetros que maximiza Θ pode existir, sendo este o único vetor mais plausível neste espaço paramétrico. Entretanto, a estimativa de máxima verossimilhança pode não ser única e nem mesmo finita dentro de um dado espaço de parâmetros, sendo que esta desempenha um papel central na inferência paramétrica em grandes amostras.

Dempster et al., 1977, apresentam um procedimento iterativo para maximização de $L(\theta)$ alternativo ao método de Newton-Raphson, chamado de “algoritmo de maximização de expectativa”.

2.3.1.1 Teste de razão de verossimilhança ou inferência paramétrica

De acordo com Tanner, 1996, o teste de razão de verossimilhança, também chamado de inferência paramétrica, pode ser utilizado para comparar o ajuste entre modelos de mistura diferentes, desde que a função de densidade escolhida represente adequadamente o fenômeno sob estudo. Este teste estatístico é baseado na razão de verossimilhança (ou de seu logaritmo). Para cada um dos modelos (rivais ou concorrentes) é estimado a log-verossimilhança. O teste de razão de verossimilhança é dado pelo dobro da diferença entre esses logaritmos, na forma

$$D = -2 \ln \frac{\ell_0(\hat{\theta})}{\ell(\hat{\theta})} = -2 \ln \ell(\hat{\theta}) + 2 \ln \ell_0(\hat{\theta}) \quad (2.15)$$

em que $\ell(\hat{\theta})$ é o estimador de máxima log-verossimilhança e $\ell_0(\hat{\theta})$ é o estimador de máxima log-verossimilhança do modelo rival.

Como a função D é decrescente, o caso correspondente ao menor valor de D é considerado como o que melhor se ajusta aos dados.

Um critério bastante utilizado na literatura é o critério de informação de Akaike (AIC), que também pode ser utilizado na busca entre os melhores parâmetros de ajuste de uma mesma distribuição [Akaike, 1974]. O critério de informação de Akaike pode ser representado na forma

$$AIC = -2 \ln \ell(\hat{\theta}) + 2k \quad (2.16)$$

em que k é o número de parâmetros do modelo estatístico.

Na prática, pode-se calcular a log-verossimilhança de diversos parâmetros de um modelo específico para testar qual destes é mais adequado, ou seja, qual parâmetro do modelo minimiza a perda de informação estimada. Este critério também pode ser empregado para comparar modelos rivais com número de parâmetros diferentes.

2.3.2 Algoritmo de maximização de expectativa

O algoritmo de maximização de expectativa (ou EM, do inglês *Expectation-Maximization*) é um procedimento iterativo para maximização de $L(\theta)$. O algoritmo EM é aplicado em diversas áreas, abrangendo aplicações como reconhecimento de fala, reconhecimento de padrões em dados, ou clusterização de dados, aprendizado de máquina, visão por computador, reconstrução de imagens médicas, tomografia por emissão de pósitrons e tomografia computadorizada por emissão de fóton único, ou SPECT (do inglês *Single Photon Emission Computed Tomography*) [McLachlan e Krishnan, 1997].

Este algoritmo, proposto por Dempster et al., 1977, consiste em duas etapas principais: uma etapa de expectativa (etapa E), seguida por uma etapa de maximização (etapa M). A etapa de expectativa é com respeito às variáveis desconhecidas, usando a estimativa atual dos parâmetros e condicionada às observações. A etapa de maximização produz então uma nova estimativa dos parâmetros, sendo que o algoritmo é iterado até que a estimativa do parâmetro tenha convergido, ou seja, quando não há mais alteração na estimativa. Moon, 1996, apresenta uma visão geral do algoritmo EM, onde é apresentado um fluxograma do procedimento iterativo (Fig. 2.4).

De acordo com McLachlan e Krishnan, 1997, o algoritmo EM é mais aplicado em situações de problemas de dados incompletos, onde a estimativa de máxima verossimilhança é dificultada pela ausência de parte dos dados em uma estrutura de dados mais familiares e mais simples. As situações onde o algoritmo EM pode ser aplicado inclui não apenas situações evidentes de dados incompletos, onde há dados ausentes, densidades truncadas, observações censuradas ou agrupadas, mas também uma variedade inteira de situações onde a incompletude dos dados não é tão natural ou evidente. Estas incluem modelos estatísticos tais como efeitos randômicos, misturas, convoluções, modelos log-lineares, e classes latentes e estruturas de variáveis latentes. A ideia básica do algoritmo EM é associar um problema de dados incompletos a um problema de dados completos de modo que a estimativa de máxima verossimilhança possa ser computacionalmente mais tratável. A metodologia do algoritmo consiste em reformular o problema em termos dos dados completos, que é resolvido mais

facilmente estabelecendo-se uma relação entre as verossimilhanças destes dois problemas, e explorando-se o cálculo mais simples da estimação de máxima verossimilhança do problema de dados completo no passo M do algoritmo computacional iterativo.

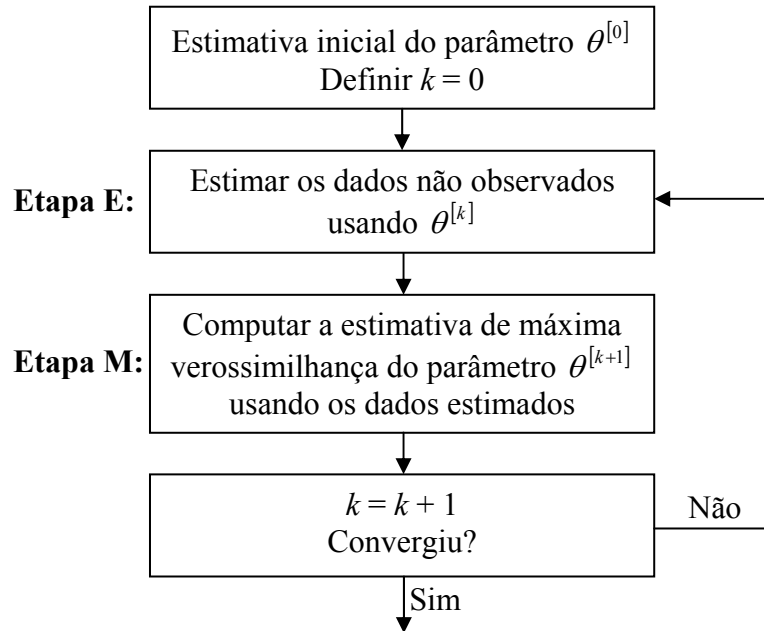


Figura 2.4 – Fluxograma do procedimento iterativo do algoritmo de maximização de expectativa.

A convergência deste método para funções exponenciais é discutida em Dempster et al., 1977, e mostra que, de modo geral, não se pode garantir a obtenção do valor máximo global, pois o algoritmo pode estacionar em máximos locais ou em um ponto de sela. A convergência pode ser lenta em alguns problemas e está intimamente relacionada com a quantidade de informação ausente. Contudo, a estabilidade numérica é alta, ou seja, a cada iteração do algoritmo EM aumenta a probabilidade dos dados observados, sendo que os valores iniciais desempenham papel importante na convergência. Para funções não exponenciais a convergência do algoritmo de maximização de expectativa é discutida por Jeff Wu, 1983.

O algoritmo consiste na formalização da ideia intuitiva de lidar com dados incompletos (observações), onde os valores faltantes são substituídos por valores estimados. Inicialmente, os parâmetros são estimados e, então, são reestimados os valores faltantes, considerando-se que os parâmetros estimados são corretos. Os parâmetros são novamente estimados, e este processo é repetido até que um critério de convergência seja alcançado.

De acordo com Dempster et al., 1977, o termo “dados incompletos” implica na existência de dois espaços amostrais Y e X e de um mapeamento de X para Y . Os dados observados y são uma realização de Y . O correspondente x de X não é observado diretamente, mas apenas indiretamente através de y . Mais especificamente, é assumido que existe um mapeamento $x \rightarrow y(x)$ de X para Y , e que x é conhecido apenas por estar em $X(y)$, o subconjunto de X determinado pela equação $y = y(x)$, onde y são os dados observados. Refere-se a x como os “dados completos”, embora em certos exemplos x inclui o que são tradicionalmente chamados de parâmetros.

As densidades dos dados completos $g(y|\theta)$ e observados $f(x|\theta)$ estão relacionados por

$$g(y|\theta) = \int_{X(y)} f(x|\theta) dx. \quad (2.17)$$

O objetivo do algoritmo EM é encontrar o valor de θ que maximiza $g(y|\theta)$, dados os valores observados y utilizando $f(x|\theta)$.

Definindo a função Q (função de θ) como sendo a esperança condicional da log-verossimilhança dos dados completos y , temos que

$$\text{Etapa E:} \quad Q(\theta|\theta^{(t)}) = E \left[\ell \left(\theta | y, \theta^{(t)} \right) \right] \quad (2.18)$$

e

$$\text{Etapa M:} \quad \theta^{(t+1)} = \arg \max_{\theta} Q \left(\theta | \theta^{(t)} \right). \quad (2.19)$$

O algoritmo de maximização de expectativa pode ser explicado mais facilmente em termos de uma amostra aleatória que consiste em duas componentes, uma de dados observados e uma de dados desconhecidos ou ausentes. Outro exemplo de aplicação do algoritmo é em modelos de mistura finita, principalmente no processo de explorar grandes quantidades de dados à procura de padrões consistentes, utilizando regras de associação. Cada observação vem de um suposto conjunto (número) de densidades. Os dados desconhecidos são indicadores das densidades, sendo que os parâmetros destas precisam ser estimados com base no número de classes existentes.

2.3.3 Funções de probabilidade

Na teoria da verossimilhança, a variável y é caracterizada por uma densidade de probabilidade pertencente a alguma família F de densidades. Na natureza, há uma série de fenômenos físicos que se comportam estocasticamente conforme curvas em forma de sino. Nestes casos, a curva normal é amplamente utilizada, onde a simetria em torno de um valor médio é a característica mais marcante desta densidade, ou seja, as áreas sob a curva em ambos os lados da média são iguais. Além disso, a curva é unimodal, ou seja, só tem apenas uma moda, um pico. Já medições de flutuações de velocidade em escoamentos turbulentos não precisam ter necessariamente densidade normal, como o descrito por Jiménez, 1998. Nestes casos, quando uma elevada quantidade de assimetria nos dados está presente, é necessária a utilização de densidades que possuam tal suporte. Pearson, 1985, reconheceu os problemas na tentativa de distinguir entre densidades inerentemente assimétricas e misturas de densidades simétricas [McLachlan e Peel, 2000]. Uma função desenvolvida visando adicionar um termo de assimetria à curva normal foi proposta por Azzalini, 1985, e Azzalini, 1986. As funções densidade de probabilidade utilizadas neste trabalho são apresentadas na sequência, e são a densidade de probabilidade normal, t de *Student*, normal assimétrica e t de *Student* assimétrica.

2.3.3.1 Função normal

Na natureza, a densidade normal, também chamada de Gaussiana ou densidade de Gauss, é muito utilizada por descrever uma série de fenômenos físicos. É uma das mais importantes densidades da estatística, e possui grande uso na estatística inferencial. É inteiramente descrita por seus parâmetros de média (μ) e desvio padrão (σ), e sua função de densidade de probabilidade, ϕ , é definida por

$$\phi(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma > 0. \quad (2.20)$$

Quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, a densidade é chamada de densidade normal padrão, e sua função de densidade de probabilidade pode ser escrita na forma reduzida

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}. \quad (2.21)$$

Se uma variável aleatória x segue uma densidade normal padrão, ela pode ser representada pela expressão $x \sim \mathcal{N}(0,1)$.

A função de distribuição acumulada de probabilidade (CDF), ou Φ , descreve a probabilidade de uma variável aleatória cair nos intervalos da forma $(-\infty, x]$, e é computada como parte integrante da função densidade de probabilidade. Assim, a distribuição acumulada de probabilidade normal padrão é escrita como

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.22)$$

A solução desta integral geralmente é dada em termos da função erro (*erf*), por

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

A curva normal tem forma de sino, conforme ilustra sua função densidade de probabilidade (Fig. 2.5a), e a função de distribuição acumulada de probabilidade é ilustrada na Fig. 2.5b. São apresentadas quatro curvas com médias e desvios padrão diferentes, para ilustrar o comportamento da variação destes parâmetros. A função normal padrão é apresentada em vermelho, para comparação.

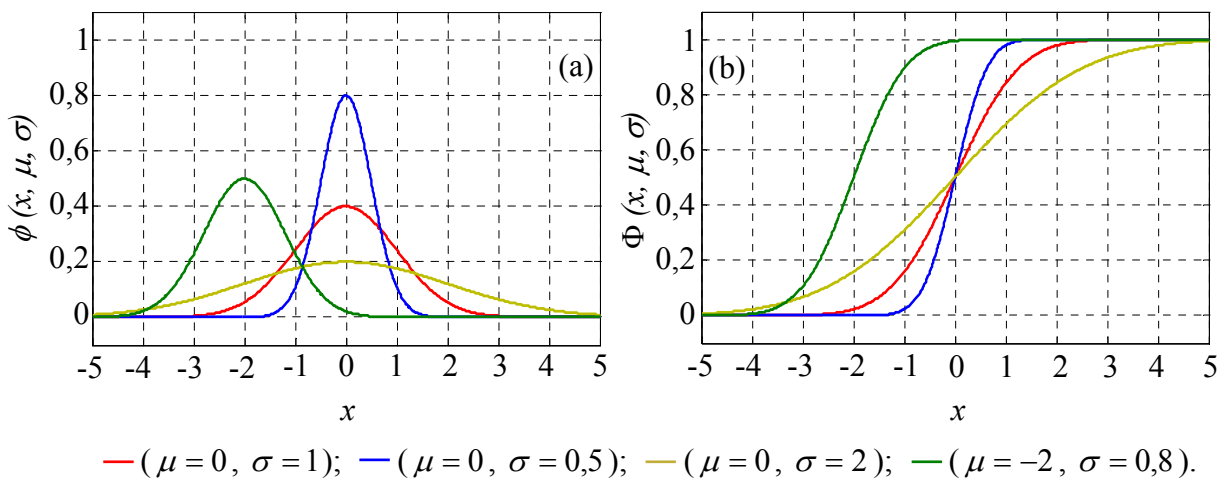


Figura 2.5 – (a) Função densidade de probabilidade normal. (b) função de distribuição acumulada de probabilidade normal. A curva em vermelho é a função normal padrão.

A geração de números aleatórios conforme uma curva normal é extremamente útil, como em simulações por computador, especialmente em aplicações do método de Monte Carlo, onde números aleatórios são gerados frequentemente conforme esta densidade. Um exemplo prático de amostragem aleatória é dado pela máquina de Galton (Fig. 2.6), inventada no final do século XIX para demonstrar o teorema do limite central e o comportamento das densidades binomial e normal. Após o lançamento de diversas esferas, a probabilidade de uma destas cair em um dos intervalos de frequência segue a função densidade de probabilidade binomial. De acordo com o teorema do limite central a densidade binomial se aproxima da densidade normal, desde que o número de linhas de pinos na máquina seja grande o suficiente.

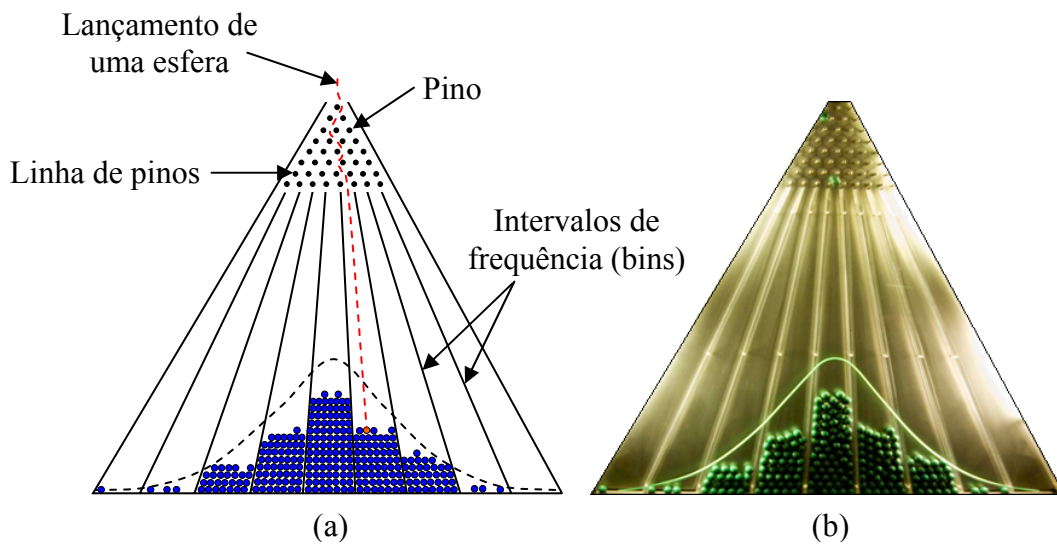


Figure 2.6 – (a) Esquema de uma máquina de Galton e (b) sua fotografia.

Se uma variável aleatória x segue uma densidade normal, ela pode ser representada pela expressão $x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, onde σ^2 é chamado de variância.

O caso multivariado da função densidade de probabilidade normal de p variáveis pode ser definido como

$$\phi_p(x_1, \dots, x_p, \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}, \quad (2.24)$$

em que μ é um vetor contendo as médias das p variáveis, e Σ é uma matriz de ordem $p \times p$, chamada de matriz de covariância, representando a covariância entre as p variáveis. O determinante da matriz de covariância, $|\Sigma|$, é chamado de variância generalizada. O termo

$(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)$ é chamado de distância de Mahalanobis, e representa uma medida da dissimilaridade entre os vetores aleatórios. Se a matriz de covariância é a matriz identidade, a distância de Mahalanobis coincide com a distância euclidiana. Se a matriz de covariância é diagonal, tem-se a chamada distância euclidiana normalizada. Se $p = 1$, a função de densidade se reduz ao caso univariado, equação (2.20).

Para o caso bivariado desta densidade, quando $p = 2$, a função é representada por

$$\phi(x_1, x_2, \mu, \Sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_{x_1})^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{(y-\mu_{x_2})^2}{\sigma_{x_2}^2} - \frac{2\rho(x-\mu_{x_1})(y-\mu_{x_2})}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \right]\right)}, \quad (2.25)$$

em que ρ é a correlação entre as variáveis x_1 e x_2 . Neste caso, tem-se que:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

e

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} \\ \rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

2.3.3.2 Função *t* de Student

A função *t* de Student é uma função de densidade de probabilidade contínua e teórica, que aparece naturalmente no problema de se determinar a média de uma população (que segue a densidade normal) a partir de uma amostra, ou seja, quando o número de dados disponíveis é pequeno. Neste problema, não se sabe qual é a média ou o desvio padrão da população, mas ela deve ser normal. A função *t* de Student é uma densidade simétrica, campaniforme e semelhante à curva normal padrão, porém com caudas mais largas. Para sua completa definição, é necessário o conceito de número de graus de liberdade (ν), que é um parâmetro que estima o número de categorias independentes em um teste particular ou experiência estatística, ou seja, é o número de determinações independentes, ou dimensão da amostra, menos o número de parâmetros estatísticos a serem avaliados na população.

Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$\phi(t, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, \quad -\infty < x < \infty, \nu > 0. \quad (2.28)$$

À medida que $\nu \rightarrow \infty$ a função densidade de probabilidade da curva t de *Student* se aproxima da curva normal. De modo prático, a partir de $\nu > 30$ as curvas já são praticamente indistinguíveis. À medida que $\nu \rightarrow 0$ a curva t de *Student* apresenta caudas mais alongadas.

A função Γ é a função *Gamma*, definida por:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt, \quad (2.29)$$

em que a é uma função genérica.

Para ν par, tem-se que:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} = \frac{(\nu-1)(\nu-3)\cdots 5 \cdot 3}{2\sqrt{\nu} (\nu-2)(\nu-4)\cdots 4 \cdot 2}, \quad (2.30)$$

enquanto que para ν ímpar,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} = \frac{(\nu-1)(\nu-3)\cdots 4 \cdot 2}{\pi\sqrt{\nu} (\nu-2)(\nu-4)\cdots 5 \cdot 3}. \quad (2.31)$$

A função de distribuição acumulada de probabilidade da curva t de *Student* é dada por:

$$\Phi(t, \nu) = \frac{1}{2} + \frac{t \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{t^2}{\nu}; \right)}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (2.32)$$

em que ${}_2F_1$ é chamada de função hipergeométrica¹.

A Fig. 2.7 ilustra a função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada de probabilidade da curva t de *Student*. São apresentadas três curvas com graus de liberdade diferentes para ilustrar o comportamento da variação deste parâmetro, e a função normal padrão é apresentada em vermelho, para comparação.

¹ A função hipergeométrica pode ser definida para $|z| < 1$ pela série ${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$.

Se uma variável aleatória x segue uma densidade t de *Student*, ela pode ser representada pela expressão $x \sim \phi(t, \nu)$.

O caso multivariado da função densidade de probabilidade t de *Student* de p variáveis pode ser definido como

$$\phi_p(t_1, \dots, t_p, \nu, \mu, \Sigma) = \frac{\Gamma[(\nu + p)/2]}{(\nu\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2} \Gamma(\nu/2)} \left[1 + \frac{(t - \mu)^T \Sigma^{-1} (t - \mu)}{\nu} \right]^{-\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}. \quad (2.33)$$

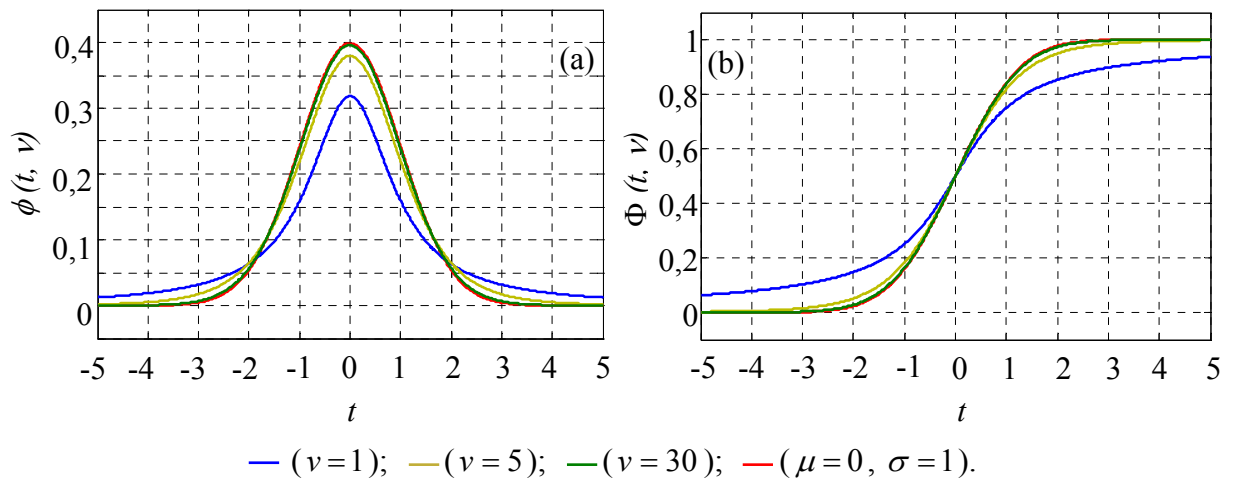


Figura 2.7 – (a) Função densidade de probabilidade t de *Student*. (b) função de distribuição acumulada de probabilidade t de *Student*. A curva em vermelho é a função normal padrão.

2.3.3.3 Função normal assimétrica

Em Azzalini, 1985, e Azzalini, 1986, uma classe de densidade normal de probabilidade com suporte à assimetria é proposta. Azzalini e Capitanio, 2003, comentam que a principal motivação da criação desta função é introduzir maior flexibilidade às famílias paramétricas de funções para que estas sejam capazes de se adaptar a dados reais. De modo geral, isso ocorre muito frequentemente em fenômenos empíricos, cujo resultado se comporta de uma forma diferente da densidade normal, mas ainda mantém alguma similaridade com a densidade normal multivariada. Assim, o ponto de desvio da normalidade ocorre de acordo com uma função densidade com forma aproximadamente igual à de um sino, mas com níveis de contorno que não são completamente elípticos, e/ou com níveis de contorno que não são bem espaçados como a densidade normal prescreve.

Deste modo, os autores propõe a seguinte função densidade normal assimétrica (ϕ_{SN}):

$$\phi_{SN}(x, \alpha) = 2\phi(x)\Phi(\alpha x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.34)$$

em que α é o parâmetro de assimetria.

A função de distribuição acumulada de probabilidade da curva normal assimétrica (Φ_{SN}) é dada por:

$$\Phi_{SN}(x, \alpha) = \Phi(x) - 2T(x, \alpha), \quad (2.35)$$

em que $T(x, \alpha)$ é chamada de função T de Owen².

A Fig. 2.8 ilustra a função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada de probabilidade da curva normal assimétrica. São apresentadas três curvas com assimetrias diferentes para ilustrar o comportamento da variação deste parâmetro, e a função normal padrão é apresentada em vermelho, para comparação. À medida que o parâmetro α tende a zero, a função normal assimétrica se assemelha à normal padrão.

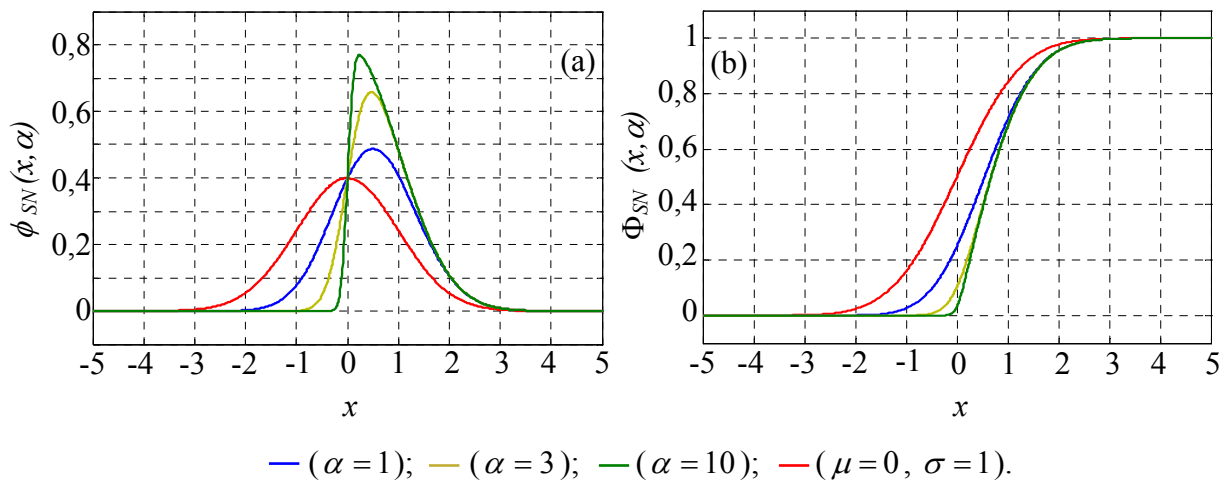


Figura 2.8 – (a) Função densidade de probabilidade normal assimétrica. (b) função de distribuição acumulada de probabilidade normal assimétrica. A curva em vermelho é a função normal padrão.

Se uma variável aleatória x segue uma densidade normal assimétrica, ela pode ser representada pela expressão $x \sim SN(x, \mu, \sigma^2, \alpha)$.

² A função T de Owen pode ser definida como $T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-\frac{1}{2}h^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$, $-\infty < h, a < \infty$.

O caso multivariado da função densidade de probabilidade normal assimétrica de p variáveis pode ser definido como

$$\phi_{SN_p}(x_1, \dots, x_p, \mu, \Sigma, \Lambda) = 2^p \phi_p(x, \mu, \Omega) \Phi_p(\Lambda \Omega^{-1}(x - \mu), \Delta), \quad (2.36)$$

em que $\Lambda = \text{Diag}\{\alpha\}$ é uma matriz diagonal de assimetria com os elementos diagonais principais de uma matriz quadrada contendo as assimetrias $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T$, $\Omega = \Sigma + \Lambda^2$ e $\Delta = I_p - \Lambda \Omega^{-1} \Lambda$, em que I_p é uma matriz identidade de ordem $p \times p$.

2.3.3.4 Função t de *Student* assimétrica

De acordo com Azzalini e Capitanio, 2003, existem muitas propostas para a definição de uma função t de *Student* assimétrica. Os autores propõem a utilização da seguinte expressão para a função densidade de probabilidade

$$\phi_{St}(t, \nu, \alpha) = 2\phi(t) \Phi\left(\alpha t \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+t^2}}; \nu+1\right), \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.37)$$

em que ν é o número de graus de liberdade e α é o parâmetro de assimetria.

O termo $\phi(t)$ é a função densidade de probabilidade da curva t de *Student*.

A função de distribuição acumulada de probabilidade da curva t de *Student* assimétrica é dada por:

$$\Phi_{St}(t, \nu, \alpha) = \Phi(t, \nu) - 2T(t, \alpha), \quad (2.38)$$

A Fig. 2.9 ilustra a função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada de probabilidade da curva t de *Student* assimétrica. São apresentadas três curvas com graus de liberdade e assimetrias diferentes para ilustrar o comportamento da variação destes parâmetros, e a função normal padrão é apresentada em vermelho, para comparação. À medida que o parâmetro α tende a zero, a função t de *Student* assimétrica se assemelha à normal assimétrica.

Se uma variável aleatória x segue uma densidade t de *Student* assimétrica, ela pode ser representada pela expressão $x \sim ST(t, \nu, \alpha)$.

O caso multivariado da função densidade de probabilidade t de *Student* assimétrica de p variáveis pode ser definido como

$$\phi_{St_p}(t_1, \dots, t_p, \nu, \mu, \Sigma, \Lambda) = 2^p \phi_p(t, \nu, \mu, \Omega) T_p \left(\Lambda \Omega^{-1} (t - \mu) \sqrt{\frac{\nu + p}{(t - \mu)^T \Omega^{-1} (t - \mu) + \nu}}, \Delta, \nu + p \right). \quad (2.39)$$

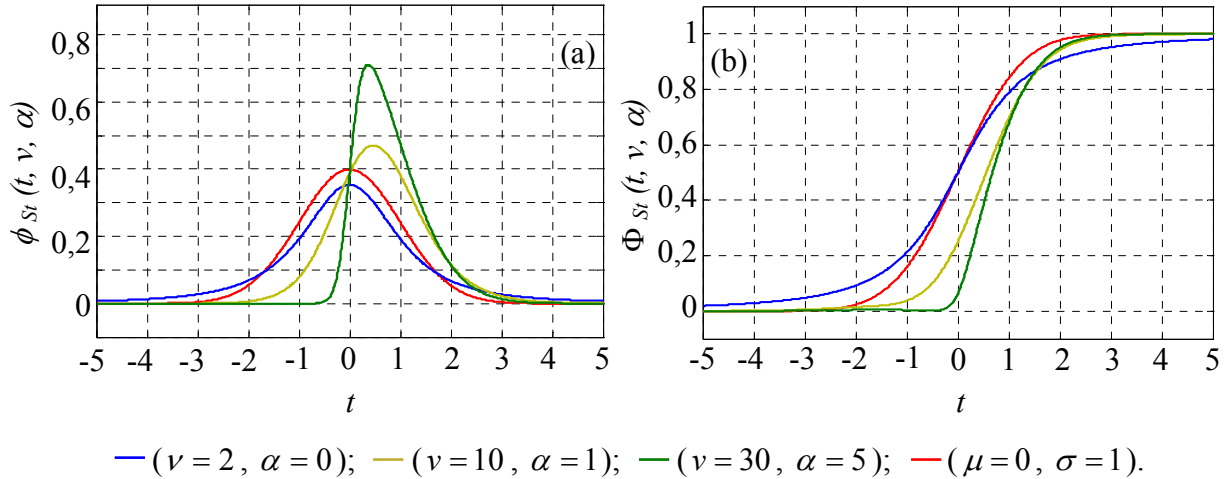


Figura 2.9 – (a) Função densidade de probabilidade t de *Student* assimétrica. (b) função de distribuição acumulada de probabilidade t de *Student* assimétrica. A curva em vermelho é a função normal padrão.

2.3.4 Método de Monte Carlo

Dependendo do modelo de mistura finita empregado, a estimativa de máxima log-verossimilhança pode não apresentar uma forma matemática fechada [Lin, 2010]. Nestes casos, pode ser utilizado um algoritmo de maximização de expectativa modificado, onde na etapa de expectativa é empregado um método de Monte Carlo para aproximar o valor da esperança condicional da log-verossimilhança dos dados completos y através de amostragem pseudoaleatória [Wei e Tanner, 1990], de modo que a equação 2.18 pode ser reescrita na forma

$$Q(\theta | \theta^{(t)}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell \left(\theta | y, \theta^{(t)} \right). \quad (2.40)$$

em que M é o tamanho da amostra do método de Monte Carlo.

Através da definição da densidade a ser estudada, uma representação estocástica pode ser utilizada na geração de estimativas pseudoaleatórias pelo método de Monte Carlo.

De acordo com Azzalini, 1986, a densidade normal assimétrica univariada pode ser representada estocasticamente por $Z \sim \phi_{SN}(x, \alpha)$, de modo que

$$Z = \delta|r_1| + \sqrt{1-\delta^2} r_2, \quad (2.41)$$

em que r_1 e r_2 são vetores randômicos independentes que seguem a densidade $\mathcal{N}(0,1)$ e o termo $\delta = \alpha/\sqrt{1+\alpha^2}$, $\delta \in (-1,1)$.

Para o caso multivariado, a densidade normal assimétrica pode ser representada estocasticamente por $Z_p \sim \phi_{SN_p}(x, \mu, \Sigma, \Lambda)$, de modo que

$$Z_p = \mu + \Lambda |s_1| + \Sigma^{1/2} s_2, \quad (2.42)$$

em que μ é um vetor contendo as médias das p variáveis, Σ é a matriz de covariância, Λ é a matriz de assimetria e s_1 e s_2 são vetores randômicos independentes que seguem a densidade $N_p(0, I_p)$, sendo que I_p é uma matriz identidade $p \times p$.

A densidade t de *Student* assimétrica univariada pode ser representada estocasticamente por $T \sim \phi_{St}(t, \nu, \alpha)$, de modo que

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\tau/\nu}}, \quad (2.43)$$

em que $Z \sim \phi_{SN}(x, \alpha)$, τ é um vetor randômico que segue uma densidade Chi-quadrado³, ou seja, $\tau \sim \chi^2(t, \nu/2)$ e $Z \perp \tau$, indicando independência dos vetores.

Para o caso multivariado, a densidade t de *Student* assimétrica pode ser representada estocasticamente por $T_p \sim \phi_{St_p}(t, \nu, \mu, \Sigma, \Lambda)$, de modo que

$$T_p = \mu + \frac{Z_p}{\sqrt{\tau}}, \quad (2.44)$$

em que τ é um vetor randômico que segue uma distribuição Gamma $\Gamma(a, b)$ com média a/b , ou seja, $\tau \sim \Gamma(\nu/2, \nu/2)$, sendo que Z_p e τ devem ser estatisticamente independentes.

³ A função Chi-quadrado pode ser definida como $\chi^2\left(t, \frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$, $t \in [0, \infty)$.

Quando uma sequência de amostras de distribuições de probabilidades é multivariada (composta por duas ou mais variáveis aleatórias), esta recebe o nome de “amostragem de Gibbs”. Este é um algoritmo que visa aproximar a distribuição conjunta quando uma amostragem direta é difícil de ser realizada. Este é um caso especial do algoritmo de Metropolis-Hastings e, assim, um exemplo do algoritmo Monte Carlo via cadeias de Markov (*MCMC - Markov Chain Monte Carlo*). Neste trabalho foram seguidos os procedimentos propostos por Lin, 2010, para a amostragem de Gibbs.

2.3.4.1 Controle da convergência

Deste modo, o método de Monte Carlo empregado gera estimativas pseudoaleatórias de acordo com funções densidade de probabilidade conhecidas. Com sua introdução no passo de estimativa do algoritmo EM, a propriedade de monotonicidade é perdida, ou seja, com os erros envolvidos, o aumento da probabilidade a cada iteração não é garantida. Diversos autores sugerem aumentar o tamanho da amostra M do método de Monte Carlo para avaliar os erros durante a simulação [McCulloch, 1994; Booth e Hobert, 1999; Lin, 2010]. Esta tarefa é realizada na prática escolhendo-se M o menor possível no início do algoritmo, pois de acordo com Wei e Tanner, 1990, é ineficiente se iniciar com um grande valor de M , já que a aproximação presente da estimativa de máxima verossimilhança deve estar distante do valor verdadeiro. Assim, após estas estimativas iniciais, aumenta-se sistematicamente o valor de M com o número de iterações. A Tab. 2.1 ilustra os valores adotados neste trabalho e sugeridos por McCulloch, 1994.

Tabela 2.1 – Tamanho das amostras do método de Monte Carlo durante as simulações.

Tamanho da amostra (M)	Iterações
50	1 a 19
200	20 a 39
5000	40 e mais

Duas abordagens são geralmente empregadas no controle das simulações com o método de Monte Carlo. Wei e Tanner, 1990, comentam que o controle sobre a convergência de uma simulação pode ser realizado por intermédio da construção de um gráfico da aproximação ao valor presente da verossimilhança versus o número de iterações, ou pelo

exame dos valores da verossimilhança em uma tabela. Após um certo número de iterações, o gráfico pode revelar que o processo se estabilizou, ou seja, restarão apenas flutuações randômicas no entorno da máxima verossimilhança. Outra abordagem é proposta por McLachlan e Krishnan, 1997, que apresentam um critério de parada para a simulação baseado na aceleração de Aitken. Segundo os autores, este critério avalia a perda do progresso da simulação, e não a convergência dos valores presentes. Para a iteração k o critério de Aitken é definido por

$$c^{(k)} = \frac{l^{(k+1)} - l^{(k)}}{l^{(k)} - l^{(k-1)}}, \quad (2.45)$$

em que $l^{(k)}$ é a verossimilhança observada na iteração k . Desse modo, a estimativa assintótica de Aitken da verossimilhança na iteração $k+1$ é dada por

$$l_A^{(k+1)} = l^{(k)} + \frac{1}{1 - c^{(k)}} (l^{(k+1)} - l^{(k)}). \quad (2.46)$$

O algoritmo EM pode ser encerrado se

$$\left| l_A^{(k+1)} - l^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad (2.47)$$

em que ε é a tolerância desejada. A tolerância utilizada nas simulações é de $\varepsilon = 10^{-3}$. O erro produzido pelo método de Monte Carlo é proporcional a $1/\sqrt{M}$, para M grande. As densidades de probabilidade geradas pelo método de Monte Carlo neste trabalho através de amostragem pseudoaleatória foram estudadas e se mostraram adequadas para as simulações realizadas.

2.4 Caos determinístico

Em 1963 o matemático Edward Lorenz fez uma descoberta surpreendente. Estudando um modelo de previsão do tempo, Lorenz observou que o mesmo não se enquadrava como randômico, periódico ou convergente. Embora seu modelo fosse definido apenas por três equações diferenciais simples, o mesmo exibia um comportamento bastante complexo [Lorenz, 1963]. Uma característica interessante foi observada pelo autor: dadas duas condições iniciais muito próximas, o sistema seguia rotas temporais bastante divergentes. Desta observação Lorenz concluiu que a previsão do tempo não seria possível para um intervalo longo de tempo. Sistemas como os estudados por Lorenz, que apresentam

comportamento aperiódico e imprevisível, mesmo que sua dinâmica seja governada por equações diferenciais determinísticas simples, são chamados de “caótico-determinísticos”.

Um sistema caótico determinístico é caracterizado por uma dependência sensível às condições iniciais de um determinado sistema dinâmico, sendo que esta dependência resulta das não linearidades presentes no sistema, amplificando exponencialmente diferenças infinitesimais nas condições iniciais.

Ferrara e Prado, 1999, citam que de um modo geral, os sistemas caótico-determinísticos possuem algumas características qualitativas do comportamento dos sistemas dinâmicos. São elas:

- 1) *Imprevisibilidade*, não é possível prever, de maneira imediata, a evolução posterior do sistema através do conhecimento de seu estado durante um tempo arbitrariamente longo;
- 2) *Espectro contínuo de frequências*, caracterizando um comportamento aperiódico;
- 3) *Invariância de escala*, significando uma certa estrutura hierárquica com características de auto similaridade;
- 4) *Recorrência (pseudoestacionário)*, embora aperiodicamente, os padrões tendem à repetição.

Muitas vezes torna-se necessário analisar um sistema sem o conhecimento dos detalhes das equações que regem sua dinâmica. Casos típicos são aqueles envolvendo dados medidos experimentalmente, onde, muitas vezes, não se tem acesso a um modelo matemático simples para a representação do problema. Parte-se então para as técnicas de reconstrução do espaço de estados.

Um espaço de estados, também chamado na literatura de espaço de fases, permite a representação do comportamento de um sistema na forma geométrica, sendo que o número de dimensões requeridas para sua representação é uma função do número de graus de liberdade do sistema. Um sistema dinâmico consiste de duas partes: as noções de um estado (a informação essencial sobre o sistema) e sua dinâmica (um conjunto de regras que descrevem como o estado do sistema evolui com o tempo). Esta evolução pode ser visualizada no espaço de fases. Em um sistema puramente determinístico, uma vez que o estado presente do sistema é conhecido (fixo), os estados em todos os momentos futuros são também determinados [Kantz e Schreiber, 2003]. De acordo com Abarbanel et al., 1993, o número de graus de liberdade de um sistema dinâmico, ou de modo equivalente, a dimensão do espaço de estados, é igual ao número de equações diferenciais de primeira ordem necessárias para descrever a evolução deste sistema.

De modo geral, o que se observa em um experimento não é seu espaço de estados, mas sim uma série temporal, ou seja, uma sequência de medições escalares. Torna-se necessário converter tais observações em vetores de estado. Esta etapa é conhecida como reconstrução do espaço de estados, na qual pode ser empregado o método dos atrasos temporais [Kantz e Schreiber, 2003].

O primeiro passo para detecção de características caótico-determinísticas em uma série temporal experimental é efetuar-se a reconstrução de seu atrator em um espaço de estados de dimensão conveniente.

2.4.1 Reconstrução de atratores

Packard et al., 1980, mostram que o espaço de estados constituído pelas derivadas sucessivas de uma das variáveis do sistema contém informações sobre a evolução temporal das outras variáveis, conduzindo às mesmas informações que o espaço formado pelas variáveis originais. Contudo, o cálculo das derivadas amplifica erros experimentais e, para um número grande de variáveis independentes, o algoritmo torna-se pouco prático [Ferrara e Prado, 1999].

Um procedimento proposto por Takens, 1981, demonstra que é possível reconstruir certas propriedades topológicas do atrator a partir da medida de uma única variável independente do sistema, ou seja, é possível definir um espaço de estados de baixa dimensão que capture a dinâmica em sua estrutura geométrica imersa nesse espaço. Takens deu a esse conjunto geométrico imergido o nome de “atrator reconstruído”. Seja uma série temporal $x_i = x(t_i)$, $i = 1, \dots, N$. Os vetores $\vec{\xi}_i$ m -dimensionais reconstruídos a partir da série temporal x_i são dados por

$$\vec{\xi}_i = \{x(t_i), x(t_i + p), \dots, x(t_i + (m-1)p)\}, \quad (2.48)$$

em que m é chamado de “dimensão de imersão” e p é chamado de “passo de reconstrução” ou “tempo de atraso”. Esse método, também é chamado na literatura de método dos atrasos temporais, e, embora o atrator reconstruído não seja idêntico ao original, suas propriedades topológicas são preservadas.

De modo resumido, Ferrara e Prado, 1999, mostram que o teorema de Takens pode ser aplicado ao fluxo bidimensional gerado por

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{F}(\bar{x}), \quad \bar{x} = \{x, y\}. \quad (2.49)$$

Como cada um dos pontos $\{x(t+\tau), y(t+\tau)\}$ origina-se de um único ponto $\{x(t), y(t)\}$, a relação entre eles é biunívoca, dado que as trajetórias no espaço de fases de sistemas determinísticos não podem se cruzar.

Assim, através da construção da sequência de valores

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(t) &= \{x(t), x(t+p)\}, \\ \bar{\xi}(t+\tau) &= \{x(t+p), x(t+2p)\}, \\ \bar{\xi}(t+2\tau) &= \{x(t+2p), x(t+3p)\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

espera-se que as componentes de $\bar{\xi}_i$ se relacionem com $\{x(t), y(t)\}$ por meio das relações biunívocas

$$\begin{aligned} \xi_1 &\equiv x(t), \\ \xi_2 &\equiv x(t+p). \end{aligned} \quad (2.51)$$

A Fig. 2.10 ilustra o resultado da reconstrução de atratores pelo método proposto por Takens para diversos sistemas dinâmicos, de onde é possível observar, através de uma simples inspeção visual, a eficácia do método, ou seja, a preservação das características topológicas dos atratores.

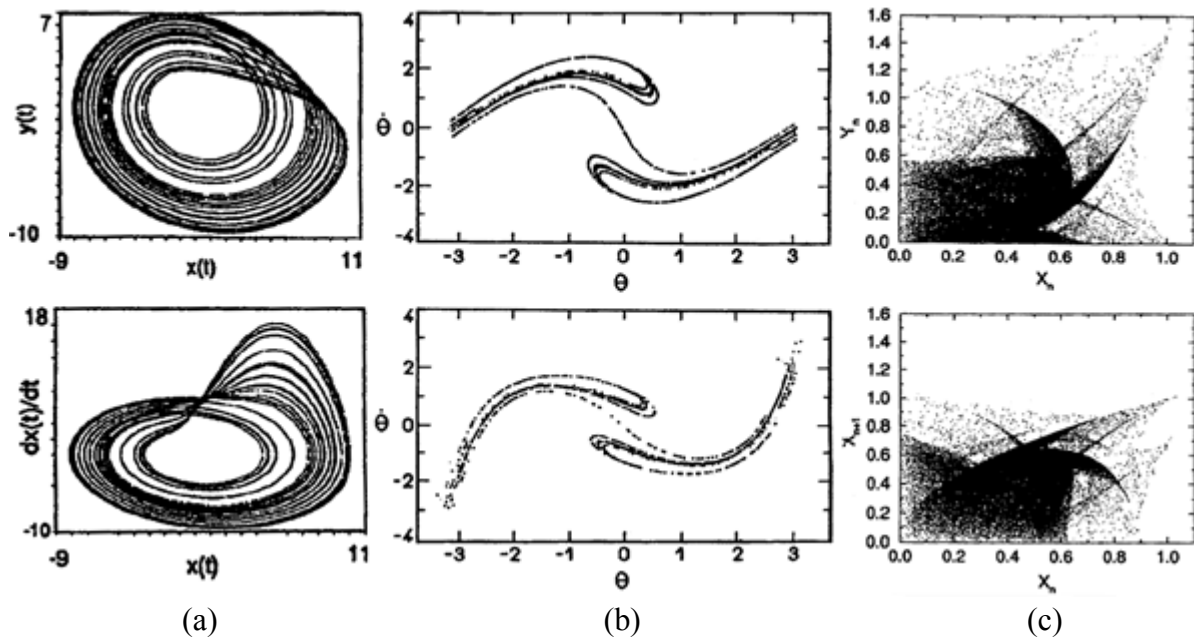


Figura 2.10 - Resultado da reconstrução de atratores pelo método proposto por Takens para diversos sistemas dinâmicos. (a) Atrator de Rössler, (b) motor bipolar e (c) mapa Ugly. Na parte superior estão os atratores originais, e na parte inferior estão os atratores reconstruídos.

Adaptado de Ferrara e Prado, 1999.

2.4.2 Dimensões

Geralmente, quando se faz referência ao conceito de dimensão, trata-se da dimensão euclidiana. Contudo, é possível construir estruturas geométricas mais complexas com dimensões não inteiras. Objetos geométricos que possuem dimensões não inteiras são chamados de "fractais" [Mandelbrot, 1975]. O termo fractal foi criado por Benoît Mandelbrot, o qual descobriu que o chamado "conjunto de Mandelbrot" (Fig. 2.11a), definido como o conjunto de pontos no plano complexo para o qual uma sequência definida iterativamente não tende ao infinito. Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Uma característica interessante dos fractais é que estes têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e são independentes de escala, podendo ser gerados por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

Na natureza existem diversos exemplos de objetos fractais, como as leguminosas das famílias da couve-flor e do brócolis, chamada de romanesco (Fig. 2.11b) e a formação de cristais de gelo (Fig. 2.11c).

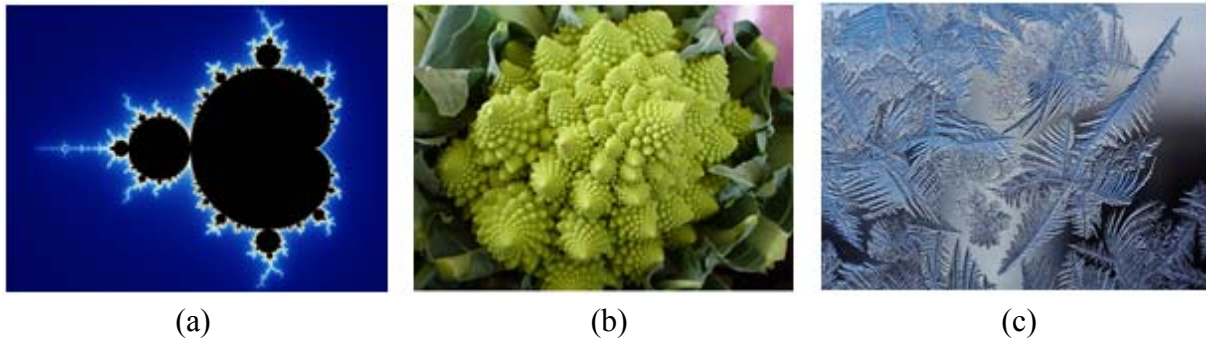


Figura 2.11 – Objetos fractais: (a) Conjunto de Mandelbrot, (b) leguminosa romanesco e (c) a formação de cristais de gelo.

2.4.2.1 Dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal

Seja um conjunto de pontos A em um espaço de dimensão p onde os pontos são recobertos com hipercubos (caixas) de lado ε . De acordo com Ferrara e Prado, 1999, a dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal D_0 é definida matematicamente por

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}, \quad (2.52)$$

em que $N(\varepsilon)$ é o número mínimo de hipercubos de lado ε necessário para cobrir todo o conjunto de pontos A . Esta definição permite a generalização do conceito de dimensão para conjuntos mais complexos do que as dimensões inteiras.

Na definição da dimensão de Hausdorff deve-se escolher “o modo particular pelo qual se dividirá o espaço de fases em caixas” [Ferrara e Prado, 1999]. Contudo, deve-se realizar uma otimização da divisão deste espaço, pois os valores de $N(\varepsilon)$ dependem fortemente desta divisão. De modo geral, calcula-se $N(\varepsilon)$ como o número de caixas de lado ε com pelo menos um ponto do atrator, utilizando uma divisão arbitrária do espaço de fases. Esta dimensão calculada é chamada de “capacidade” D , sendo uma boa aproximação para a dimensão de Hausdorff.

Como exemplo, a Fig. 2.12 apresenta este procedimento em um segmento de reta, onde, ao cobrir o atrator com caixas de modo conveniente (Figs. 2.12a, 2.12b e 2.12c), a capacidade D coincide com a dimensão de Hausdorff. Já para o caso onde o número de

caixas não é mínimo (Figs. 2.12d, 2.12e, 2.12f), a capacidade D tende a D_0 apenas quando o valor de ε tende a zero.

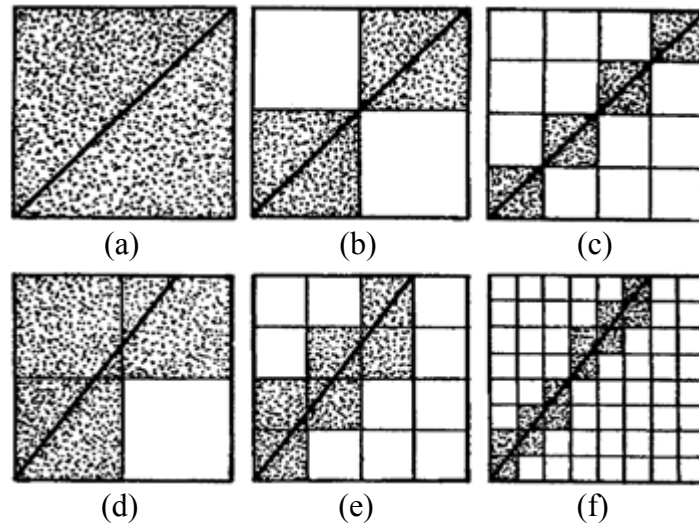


Figura 2.12 – Contagem de caixas em um segmento de reta. (a-c) A capacidade D coincide com a dimensão de Hausdorff. (d-e) A capacidade D só coincide com a dimensão de Hausdorff quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Adaptado de Ferrara e Prado, 1999.

Algoritmos numéricos para cálculo da capacidade D são chamados de “algoritmos de contagem de caixas”, e compreendem os seguintes procedimentos:

- 1) A região do espaço de fases ocupada pelo atrator é dividida em caixas de dimensão ε ;
- 2) O mapa é iterado N vezes;
- 3) É contada a quantidade de caixas $N(\varepsilon)$ que tem pelo menos um ponto do atrator;
- 4) Este cálculo é repetido para diversos valores de ε ;
- 5) A dimensão de Hausdorff D_0 é dada pela inclinação do gráfico $\log N(\varepsilon)$ versus $\log(1/\varepsilon)$.

Neste algoritmo, à medida que ε diminui, a convergência de $N(\varepsilon)$ torna-se lenta, sendo mais lenta quanto mais não uniforme for o atrator [Ferrara e Prado, 1999]. Uma gama de algoritmos otimizados e sofisticados é encontrada na literatura com o intuito de reduzir o esforço computacional deste procedimento [Hunt e Sullivan, 1985]. Com efeito, para dimensões maiores que dois, os esforços computacionais podem ser elevados. Nesses casos, a utilização do “método da integral de correlação” é mais apropriada.

2.4.2.2 Dimensões generalizadas

Em muitos fractais, algumas regiões são mais densas e visitadas com maior frequência. Assim, outros conceitos além da dimensão fractal são úteis na caracterização da complexidade de sua estrutura.

Seja p_i a variação da distribuição de probabilidades de se ter um ponto na i -ésima caixa de dimensão ε ao longo do atrator, a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. A definição de p_i é dada por

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}, \quad (2.53)$$

em que N é o número total de iterações e N_i é o número de pontos na caixa i .

As “dimensões generalizadas de Renyi” são definidas como

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q}{\log_2 \varepsilon}, \quad (q \in \mathfrak{R}, q \neq 1). \quad (2.54)$$

Aqui são apresentadas as definições das dimensões generalizadas para os casos mais simples, em que $q = 0$, $q = 1$ e $q = 2$, sendo que $q \in \mathfrak{R}$, ou seja, varia de $-\infty$ a $+\infty$.

Desse modo, para $q = 0$, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^0 = N(\varepsilon), \quad (2.55)$$

e D_0 é dado pela equação (2.52), ou seja, a dimensão fractal ou capacidade.

Assim, a definição de dimensão é dada pelo quociente de dois logaritmos, sendo irrelevante a base utilizada.

Para $q = 1$, tem-se a chamada “dimensão de informação D_1 ”, dada por

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (2.56)$$

Para $q = 2$, tem-se a “dimensão de correlação D_2 ”, dada por

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\log \varepsilon}. \quad (2.57)$$

De acordo com Hentshel e Procaccia, 1983, para atratores homogêneos, com auto-similaridade completamente descrita por uma única regra, se $q > q'$, para $q \in \mathfrak{R}$, então $D_q \leq D_{q'}$, ou seja, $D_0 \geq D_1 \geq D_2 \dots$

A diferença entre as infinitas dimensões D_q mede o grau de não homogeneidade do atrator, onde o índice q' faz o papel de uma lente com a qual se observa um conjunto [Ferrara e Prado, 1999]. De modo resumido:

- Quando $q \rightarrow -\infty$, as regiões mais densas do atrator são realçadas;
- Quando $q \rightarrow +\infty$, as regiões menos densas (rarefeitas) do atrator ganham destaque.

Um atrator é chamado de “multifractal” quando $D_q \neq D_{q'}$ para $q \neq q'$.

2.4.3 Passo de reconstrução

Para um número infinito de pontos e sem a presença de ruído, Takens, 1981, demonstra que a escolha do passo de reconstrução p é na maioria dos casos arbitrária. Contudo, devido ao tamanho finito das séries temporais experimentais e sua contaminação por ruído externo, a reconstrução depende, e muito, da escolha correta do passo de reconstrução. Dois casos limites podem ocorrer quando da escolha incorreta do parâmetro p : se for escolhido um valor muito pequeno, $x(t)$ e $x(t+p)$ terão valores parecidos, e o atrator reconstruído apresentará uma dependência linear entre ξ_1 e ξ_2 , podendo ficar comprimido em torno da diagonal $y = x$ (no caso de uma dimensão de imersão $m = 2$), o que não ocorre nas componentes reais x e y . Já se o parâmetro p for muito grande, os vetores reconstruídos $\vec{\xi}_i$ serão completamente não correlacionados, cobrindo todo o espaço de estados [Ferrara e Prado, 1999]. A Fig. 2.13 ilustra a influência do passo de reconstrução em um atrator de

Lorenz para um passo muito pequeno (2.13a), passo adequado (2.13b) e passo muito grande (2.13c).

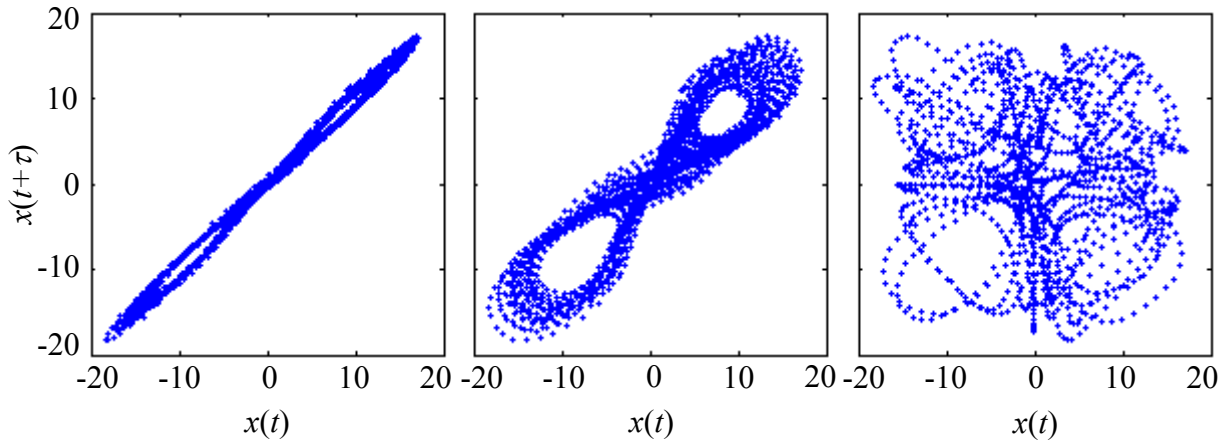


Figura 2.13 - Exemplo na influência do passo de reconstrução de um atrator de Lorenz. (a) Passo muito pequeno, (b) passo adequado e (c) passo muito grande.

Um critério simples e bastante empregado para escolha do parâmetro p visa escolher um passo de reconstrução da ordem do tempo de autocorrelação τ do sinal, definido por

$$C(\tau) = \frac{1}{2} C(0), \quad (2.58)$$

em que a função de autocorrelação é dada por

$$C(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i x_{i+t}. \quad (2.59)$$

O passo p é escolhido de modo a ser aproximadamente igual a τ . Assim, é garantido que x_i e x_{i+p} sejam linearmente independentes, mas não totalmente descorrelacionados [Ferrara e Prado, 1999].

Outros critérios existem. Um deles baseia-se na teoria da informação, sendo mais preciso e sistemático, onde o passo p é escolhido como o intervalo de tempo que minimiza a informação mútua contida em vetores vizinhos ao longo de sua evolução [Fraser e Swinney, 1986]. Contudo, tal método é de implementação numérica mais difícil, principalmente para

séries temporais pequenas. Outro método é chamado de “fator de preenchimento”, e usa de argumentos geométricos para completar a informação obtida pelo método do tempo de autocorrelação e torna-la mais precisa [Buzug et al., 1990]. Este método é de fácil implementação e fornece um critério a mais na escolha do passo p .

De modo geral, o passo de reconstrução p é tipicamente algum múltiplo do espaçamento entre os pontos da série temporal. Dias Júnior e Woiski, 2010, comentam que uma variação bastante difundida do método da autocorrelação é a escolha de um passo da ordem de $1/10$ do ponto onde ocorre o primeiro mínimo local da função de autocorrelação. O resultado da reconstrução do atrator deve ser robusto, ou seja, não pode ser afetado por pequenas alterações no passo escolhido.

2.4.4 Dimensão de imersão

De acordo com Ferrara e Prado, 1999, uma variedade lisa, ou seja, continuamente diferenciável, de dimensão de Hausdorff D_0 , deve ser imersa num espaço de dimensão m maior ou igual a $2D_0 + 1$, ou seu atrator poderá aparecer dobrado sobre si mesmo como numa projeção. Contudo, dependendo das características do atrator, uma reconstrução em um espaço de dimensão menor que $2D_0 + 1$ pode permitir que sua estrutura métrica seja revelada. À medida que a dimensão m cresce é diminuído o número total de vetores N que permitem a reconstrução. Porém, esse efeito é pouco relevante para séries temporais não muito curtas. *A priori*, não se sabe qual a dimensão de Hausdorff do atrator associado à série temporal experimental estudada. De modo geral, “as características dos dados experimentais devem ser tais que permitam a reconstrução com estatística suficiente até espaços de imersão com dimensão da ordem de $2D_0 + 1$ ” [Ferrara e Prado, 1999].

Para sistemas com uma ou duas dimensões, chamados de “baixa dimensionalidade”, é possível realizar uma análise visual para a escolha da dimensão de imersão. Um dos métodos formais utilizado na estimativa da dimensão de imersão mínima para reconstruir um atrator é o chamado “método dos falsos vizinhos” [Kennel et al., 1992]. Um falso vizinho é um ponto do sinal que só corresponde a um vizinho devido à observação das órbitas em um espaço muito pequeno, ou seja, ao se aumentar a dimensão de imersão a um valor adequado, todos os pontos vizinhos de todas as órbitas são vizinhos verdadeiros. Quando o número de falsos vizinhos para cada ponto do atrator cai a zero o atrator será suficientemente “desdobrado”, o que permite identificar a menor dimensão de imersão para representá-lo adequadamente.

Um exemplo é ilustrado na Fig. 2.14, onde é apresentada a reconstrução em uma e duas dimensões do mapa de Hénon. Os pontos A e B, que são vizinhos na reconstrução unidimensional (Fig. 2.14a), são na verdade falsos vizinhos, como mostra a reconstrução bidimensional (Fig. 2.14b).

Neste método, dois testes concomitantes são aplicados. Seja um atrator reconstruído com dimensão m . O quadrado da distância entre um de seus pontos $\vec{\xi}_n$ e o seu ponto mais próximo $\vec{\xi}_n^{(1)}$ é dado por

$$R_m^2 = \sum_{k=0}^{m-1} [x(n+kp) - x^{(1)}(n+kp)]^2. \quad (2.60)$$

Se $\vec{\xi}_n^{(1)}$ é um falso vizinho, é provável que o valor de R_m^2 aumente muito quando a dimensão m aumentar para $m+1$, ou seja, neste caso $\vec{\xi}_n^{(1)}$ será um falso vizinho se

$$\sqrt{\frac{R_{m+1}^2(n) - R_m^2(n)}{R_m^2(n)}} > L_c, \quad (2.61)$$

em que L_c é uma distância crítica.

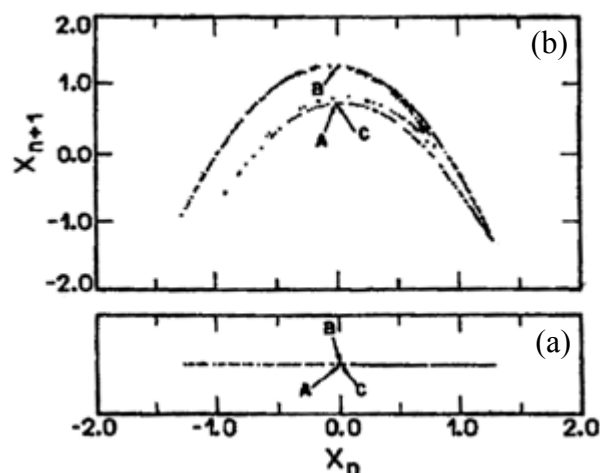


Figura 2.14 – Reconstrução em uma e duas dimensões do mapa de Hénon. (a) Os pontos A e B são vizinhos na reconstrução unidimensional. (b) Na reconstrução bidimensional os pontos A e B são falsos vizinhos. Adaptado de Ferrara e Prado, 1999.

Esta é uma condição necessária, porém não suficiente, para a identificação de falsos vizinhos. Como sinais experimentais digitais trabalham com números finitos de pontos, o vizinho mais próximo pode estar a uma distância da ordem do tamanho do atrator. Seja L_A um tamanho típico do atrator, e considerando que $R_m(n) \sim L_A$, teremos um falso vizinho se

$$R_{m+1}(n) \sim 2L_A. \quad (2.62)$$

Desse modo, é possível estabelecer a seguinte condição adicional

$$\frac{R_{m+1}(n)}{L_A} > A_c. \quad (2.63)$$

em que A_c é um limite crítico.

Assim, um ponto é considerado um falso vizinho se obedecer às condições impostas pelas equações (2.61) e (2.63).

Um resultado típico da determinação da dimensão de imersão pelo método dos falsos vizinhos é exibido na Fig. 2.15 para o atrator de Lorenz, de onde se verifica um número decrescente de falsos vizinhos à medida que a dimensão de imersão cresce.

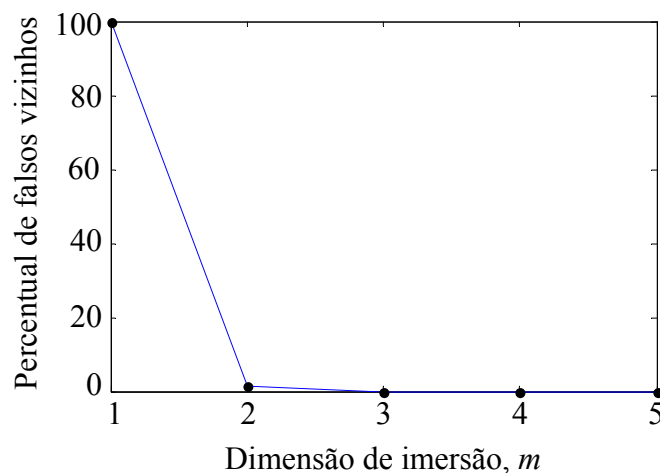


Figura 2.15 – Resultado típico da determinação da dimensão de imersão pelo método dos falsos vizinhos para o atrator de Lorenz.

Quanto ao número de pontos da série experimental, é comum trabalhar com cerca de 10^4 pontos. A frequência de amostragem também deve ser adequada, onde se deve ter no

mínimo 10 pontos em um período de correlação do sinal para que sua estrutura fina possa ser analisada [Ferrara e Prado, 1999]. Outro método bastante explorado na literatura para o cálculo da dimensão de atratores é o método da integral de correlação, também chamado de algoritmo de Grassberger-Procaccia [Grassberger e Procaccia, 1983].

Na prática, a dimensão m é muito grande [Ding et al., 1993]. Para uma série longa no tempo com baixo ruído, é suficiente que a dimensão no espaço de fases seja maior que a dimensão do atrator. Assim, a condição proposta por Takens pode não ser necessária para o cálculo da dimensão. Boas imersões são obtidas para valores menores de m . Como exemplo tem-se o atrator de Lorenz, cuja dimensão de Hausdorff é igual a $D_0 = 2,06$ no espaço de fase pleno \mathcal{R}^3 . Pelo teorema de Takens, seria necessário reconstruir a dinâmica em $2D_0 + 1 = 5 > 3$ dimensões. Porém, somente com $m = 5$ evitam-se todas as auto-interseções do atrator.

No presente trabalho o método dos falsos vizinhos será utilizado para a determinação da dimensão de imersão m .

2.4.5 Expoentes característicos de Lyapunov

Os expoentes característicos de Lyapunov ou números de Lyapunov possibilitam a análise da taxa de divergência de trajetórias de um sistema dinâmico, permitindo quantificar a dependência sensitiva às condições iniciais [Brown et al., 1991; Wolf et al., 1985; Kantz, 1994].

Seja um sistema dinâmico contínuo de m equações diferenciais ordinárias, e um pequeno hipervolume⁴ esférico de estados iniciais vizinhos y_0 em torno do ponto inicial x_0 de uma linha de fluxo. Se o raio desta hiperesfera⁵ é $\varepsilon_0(x_0)$, tem-se que

$$|y_0 - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0). \quad (2.64)$$

Após certo tempo, o fluxo deforma a hiperesfera em um objeto hiperelipsoidal com eixos principais $\varepsilon_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$ (Fig. 2.16).

⁴ Um hipervolume n -dimensional é uma medida que generaliza o conceito de volume de espaços de dimensão maior que três.

⁵ Uma hiperesfera (ou n -esfera) é a generalização da “esfera” para um espaço euclidiano de dimensão arbitrária. O mesmo vale para um objeto hiperelipsoidal, relacionado ao conceito do elipsoide.

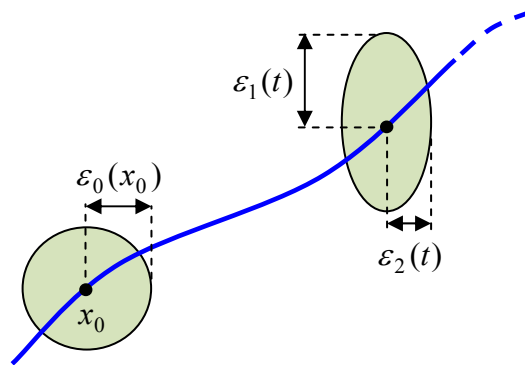


Figura 2.16 – Evolução de um elemento de volume esférico de raio $\varepsilon_0(x_0)$ em torno de um ponto inicial x_0 . Adaptado de Ferrara e Prado, 1999.

Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_k(t)$ e são definidos por

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.65)$$

Da equação (2.65), tem-se que

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(x_0) e^{\lambda_i t}, \quad (2.66)$$

de onde é possível concluir que:

- 1) A existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos definem uma instabilidade orbital nas direções associadas;
- 2) Para uma solução caótica, a dependência sensível às condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo;
- 3) Para uma solução periódica ou quase periódica pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não sejam alterados, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial [Ferrara e Prado, 1999], implicando em expoentes negativos nas direções perpendiculares ao deslocamentos e em expoente nulo ao longo da trajetória.

A equação (2.65) fornece a taxa média da divergência das trajetórias, e geralmente trabalha-se com um tempo t finito, onde o valor de λ depende da condição inicial x_0 .

2.4.5.1 Expoentes de Lyapunov de séries temporais experimentais

A detecção da presença de caos em um sistema dinâmico é um importante problema que é resolvido com a determinação do maior expoente de Lyapunov [Rosenstein et al., 1993]. De modo geral, o cálculo do espectro de expoentes de Lyapunov em séries experimentais é dificultado devido ao desconhecimento das matrizes Jacobianas ou derivadas associadas à dinâmica do fenômeno que se estuda. Assim, após a realização da reconstrução de uma das variáveis mensuradas do fenômeno através do método proposto por Takens, 1981, tem-se acesso ao atrator e à sua medida invariante, mas as informações a respeito das equações que governam a dinâmica do problema ainda são desconhecidas.

Através da reconstrução de Takens em uma dimensão de imersão adequada, é definida uma trajetória de referência, chamada de “trajetória fiducial”, a partir da sequência de vetores reconstruídos $\vec{\xi}_1 = (x(t_i), x(t_i + p), \dots)$, $\vec{\xi}_2 = (x(t_i + p), x(t_i + 2p), \dots)$, $\vec{\xi}_3 = (x(t_i + 2p), x(t_i + 3p), \dots)$ da série temporal. É realizada, então, uma análise do que ocorre com pontos na vizinhança dessa trajetória.

Os métodos propostos para a estimativa de expoentes de Lyapunov de séries experimentais diferem quanto ao número de expoentes calculados e na maneira de analisar (aproximar) a dinâmica ao longo de uma trajetória de referência, sendo que os mais conhecidos e utilizados na literatura para esta tarefa são o método de Wolf [Wolf et al., 1985], o método de Eckmann-Ruelle [Eckmann e Ruelle, 1985], o método de Brown-Bryant [Brown et al., 1991], o método de Rosenstein [Rosenstein et al., 1993] e o método de Kantz [Kantz, 1994].

Com efeito, quando as equações que descrevem um sistema dinâmico são conhecidas, é possível calcular o espectro inteiro de Lyapunov. Contudo, nas aplicações experimentais, as equações do movimento são geralmente desconhecidas, e esta abordagem não é aplicada.

O algoritmo de Grassberger-Procaccia [Grassberger e Procaccia, 1983] é o mais amplamente aplicado na quantificação de caos, principalmente devido à sua simplicidade e à possibilidade de calcular tanto a dimensão de correlação quanto a entropia do sistema. Contudo, o algoritmo é sensível a variações no número de pontos dos dados, na dimensão de imersão e no passo de reconstrução, sendo geralmente impreciso, exceto para séries temporais

e livre de ruído [Rosenstein et al., 1993]. Como a presença de um expoente de Lyapunov positivo é suficiente para diagnosticar o caos e representar instabilidades locais em uma direção particular, o cálculo do maior expoente λ_1 é de interesse prático em diversas aplicações.

2.4.5.2 Método de Rosenstein

O método de Rosenstein [Rosenstein et al., 1993] permite calcular o maior expoente de Lyapunov de uma série temporal experimental e leva em consideração todos os dados disponíveis. De fácil implementação, rápido e robusto em relação a mudanças na dimensão de imersão, tamanho da amostra de dados, passo de reconstrução e nível de ruído, o algoritmo de Rosenstein também permite calcular simultaneamente a dimensão de correlação. Desse modo, a sequência de cálculo gera estimativas tanto do nível de caos quanto da complexidade do sistema.

A primeira etapa do método consiste em reconstruir a dinâmica do atrator através de uma série temporal. Nesta tarefa é utilizado o método dos atrasos temporais. A trajetória reconstruída, \mathbf{X} , pode ser expressa como uma matriz, onde cada coluna é um vetor do espaço de fase, na forma

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_M)^T \quad (2.67)$$

em que X_i é o estado do sistema no tempo discreto i . Para uma série temporal com N pontos, $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, cada X_i é dado por

$$X_i = (x_i, x_{i+p}, \dots, x_{i+(m-1)p}) \quad (2.68)$$

em que p é o passo de reconstrução.

Assim, \mathbf{X} é uma matriz $M \times m$, e as constantes M , m , p e N são relacionadas por

$$M = N - (m - 1)p \quad (2.69)$$

A dimensão de imersão é geralmente estimada de acordo com o teorema de Takens, ou seja, para $m \geq 2D_0 + 1$, embora o algoritmo frequentemente apresente bons resultados quando

m está abaixo deste critério. Quanto à escolha do passo de reconstrução p , o algoritmo se mostra bastante robusto.

Após a reconstrução do espaço de estados, o algoritmo encontra os “próximos vizinhos” de cada ponto da trajetória. O próximo vizinho $X_{\hat{j}}$ é encontrado através da procura pelo ponto que minimiza a distância a um ponto de referência particular X_j , expresso por

$$d_j(0) = \min_{X_{\hat{j}}} \|X_j - X_{\hat{j}}\| \quad (2.70)$$

em que $d_j(0)$ é a distância inicial do j -ésimo ponto ao próximo vizinho e $\| \cdot \|$ denota a norma Euclidiana.

Uma restrição adicional imposta aos próximos vizinhos, é que sua separação temporal deve ser maior que o período médio da série temporal, dada por

$$|i - \hat{j}| > T, \quad (2.71)$$

em que T é o período médio da série temporal.

Esta restrição permite considerar cada par de vizinhos como condições iniciais próximas para diferentes trajetórias. O período médio é estimado de modo recíproco à frequência média do espectro de potência, geralmente através de uma transformada rápida de Fourier. O maior expoente de Lyapunov é estimado como a taxa média de separação dos próximos vizinhos

$$\lambda_1(i) = \frac{1}{i \Delta t} \frac{1}{(M-i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)}, \quad (2.72)$$

em que Δt é o período de amostragem da série temporal, $d_j(i)$ é a distância entre o j -ésimo par de próximos vizinhos após o passo de tempo discreto i , ou seja, $i \Delta t$ segundos, e M é o número de pontos reconstruídos.

De acordo com Rosenstein et al., 1993, a definição matemática do maior expoente de Lyapunov pode ser expressa por

$$d(t) = C e^{\lambda_1(t)}, \quad (2.73)$$

em que $d(t)$ é a divergência média no tempo t e C é a constante que minimiza a separação inicial.

Da determinação de λ_1 (equação 2.73), é assumido que o j -ésimo par de próximos vizinhos diverge aproximadamente a taxa dada pelo maior expoente de Lyapunov

$$d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)}, \quad (2.74)$$

em que C_j é a separação inicial.

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação (2.74), obtém-se

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t). \quad (2.75)$$

Para $j = 1, 2, \dots, M$, a equação anterior representa um conjunto de linhas aproximadamente paralelas, cada qual com uma inclinação proporcional à λ_1 . A normalização na separação dos vizinhos, dada por C_j na equação (2.74) é desnecessária para a estimativa de λ_1 , como mostra a equação (2.75), reduzindo o custo computacional.

Assim, o maior expoente de Lyapunov pode ser calculado usando-se um ajuste linear pelo método dos mínimos quadrados, aplicada a uma linha média definida por

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle, \quad (2.76)$$

em que $\langle \rangle$ denota a média sobre todos os valores de j . Esse processo de obter o valor médio das divergências é a chave para a obtenção de valores precisos de λ_1 utilizando-se séries com poucos pontos e na presença de ruído [Rosenstein et al., 1993].

Um gráfico de $\langle \ln d_j(i) \rangle$ ou o valor médio do logaritmo da divergência *versus* $i\Delta t$ ou tempo (s) é construído para diversos valores de m (Fig. 2.17). Após uma curta transição, há uma longa região linear que é utilizada para extrair o valor do maior expoente de Lyapunov. As curvas saturam para longos valores de $i\Delta t$, pois o sistema é delimitado no espaço de fases e a divergência média não pode exceder o “comprimento” do atrator.

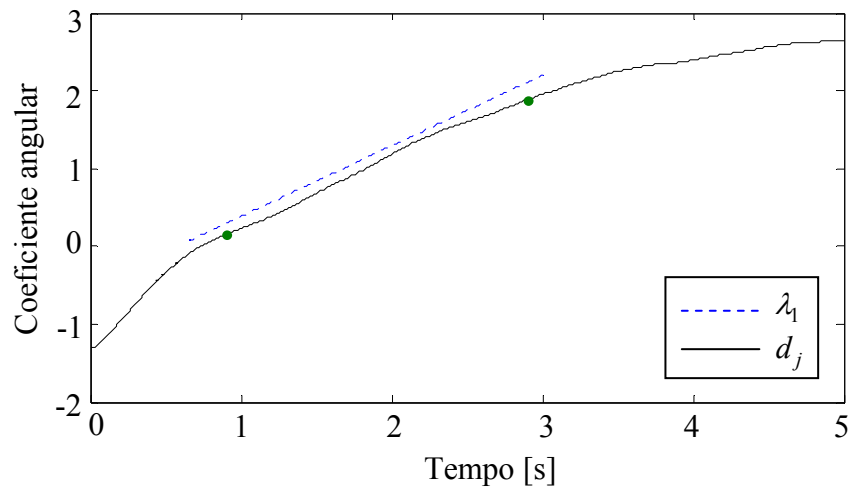


Figura 2.17 – Gráfico típico do valor médio do logaritmo da divergência em função do tempo para o atrator de Lorenz.

É importante avaliar o valor de λ_1 para vários valores da dimensão de imersão m , pois geralmente não se tem conhecimento prévio deste valor para séries experimentais. Com o algoritmo de Rosenstein é possível obter resultados satisfatórios para $m \geq n$ (bem abaixo do critério de Takens), em que n é a dimensão topológica do sistema. Isso se deve ao fato que sistemas caóticos são efetivamente estocásticos quando imersos em um espaço de fase que é muito pequeno para acomodar a dinâmica verdadeira. A região linear para determinação de λ_1 também pode ser obtida de um gráfico do coeficiente angular versus o tempo, onde um platô, ou seja, uma faixa com valores constantes (inclinação zero) indica a região de interesse.

De acordo com o método de atrasos temporais, proposto por Takens, a dimensão e os expoentes de Lyapunov são aproximadamente os mesmos, tanto para o atrator original quanto para o reconstruído.

A metodologia de reconstrução do espaço de estados e do cálculo do maior expoente de Lyapunov foi testada primeiramente em dois sistemas de dinâmica conhecida (o atrator de Lorenz e o atrator de Rössler). Os resultados obtidos são coerentes com os apresentados na literatura [Sprott, 2010].

A Fig. 2.18 apresenta um fluxograma do algoritmo de Rosenstein para o cálculo do maior expoente de Lyapunov.

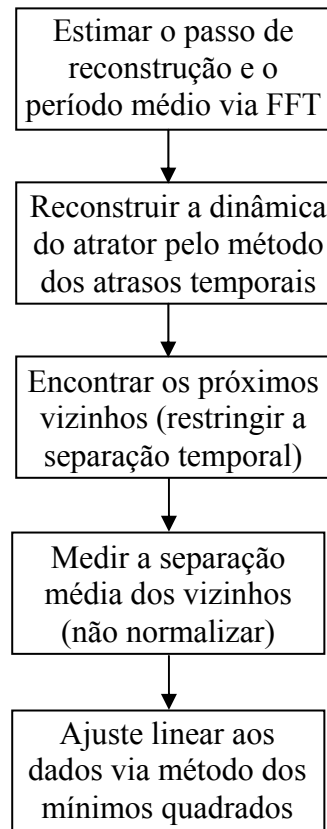


Figura 2.18 – Fluxograma do algoritmo de Rosenstein para o cálculo do maior expoente de Lyapunov. Adaptado de Rosenstein et al., 1993.

2.5 Dinâmica simbólica

A técnica da dinâmica simbólica é aplicada às séries temporais experimentais deste trabalho, buscando-se, através de histogramas, uma representação decimal dos mesmos. As etapas utilizadas neste procedimento são:

- (a) a série temporal de dados é dividida (ou particionada) em uma posição conveniente;
- (b) os valores discretos da série temporal são convertidos conforme um alfabeto escolhido, contendo n símbolos, baseada no particionamento realizado, gerando uma série simbólica;
- (c) é escolhido um comprimento k para a representação de palavras, sendo geradas m palavras correspondentes às padrões, onde $m = n^k$;
- (d) é realizada uma transformação em representação decimal das palavras geradas;
- (e) o resultado é exibido através de histogramas, de acordo com a representação decimal. Este resultado representa a densidade estatística das sequências simbólicas, onde o eixo horizontal representa as sequências simbólicas e o eixo vertical a frequência absoluta ou relativa das sequências [Dias Júnior e Woiski, 2010].

A Fig. 2.19 ilustra as etapas necessárias descritas acima para a simbolização de uma série temporal para construção do histograma das sequências simbólicas.

Para o alfabeto binário, por exemplo, existem 2 letras (0 ou 1), ou seja, $n = 2$. Se escolhermos um comprimento para a representação das palavras igual a 3 ($k = 3$), haverá $m = n^k = 2^3 = 8$ palavras (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 e 111). A probabilidade de ocorrência de um episódio binário i , denotada por p_i estará entre $0 \leq p_i \leq 1$. Uma representação parcial de uma árvore simbólica binária para comprimentos da sequência simbólica k de 1 a 3 é ilustrada na Fig. 2.20.

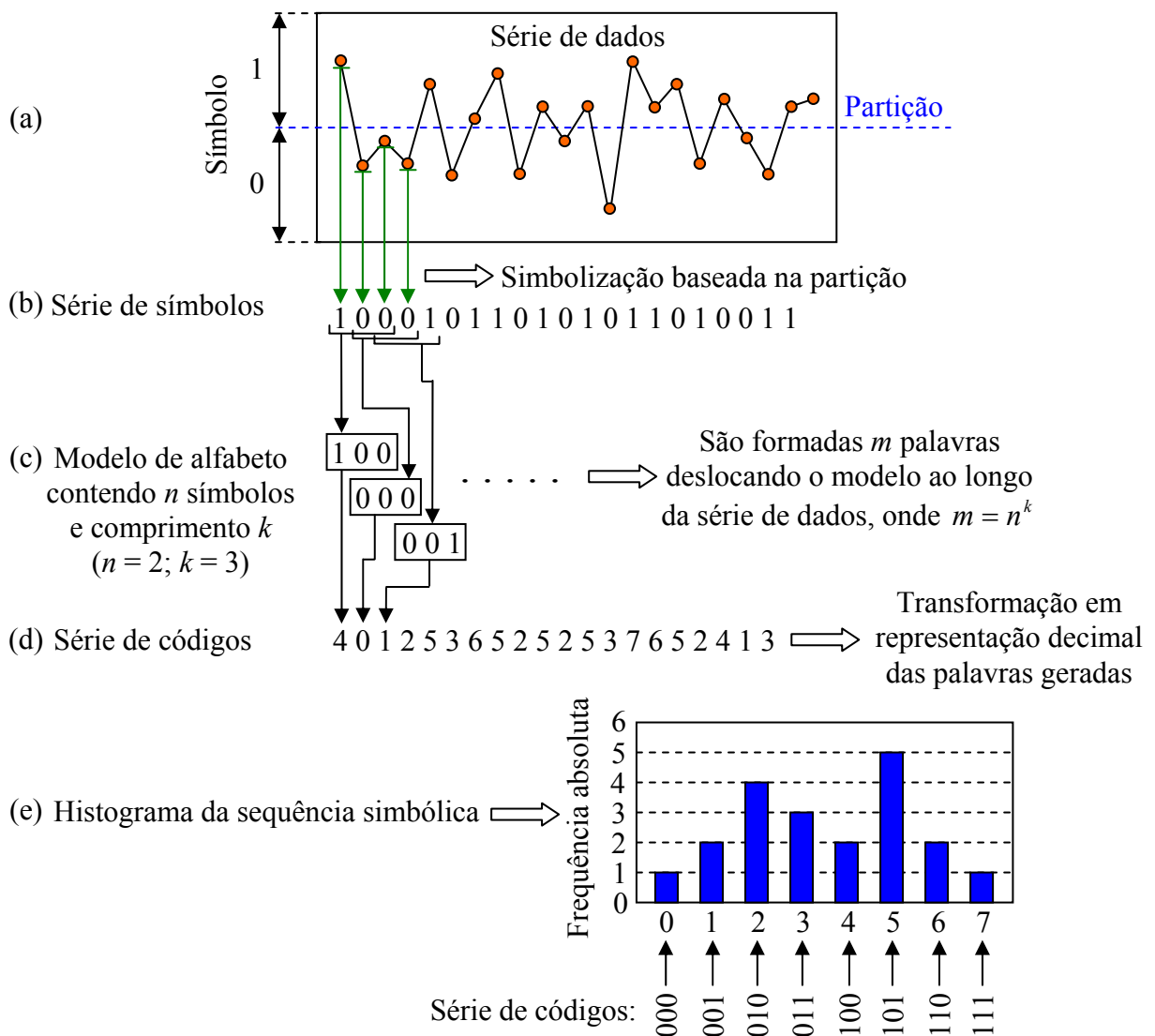


Figura 2.19 – Processo de simbolização de uma série de dados para construção do histograma das sequências simbólicas.

Dias Júnior e Woiski, 2010, comentam que, para dados puramente aleatórios, todas as sequências simbólicas de comprimento m são equiprováveis, ou seja, o resultado deverá ter densidade uniforme. Deste modo, o distanciamento deste comportamento indica a evidência de estrutura determinística nos dados, que pode ser caótica ou não.

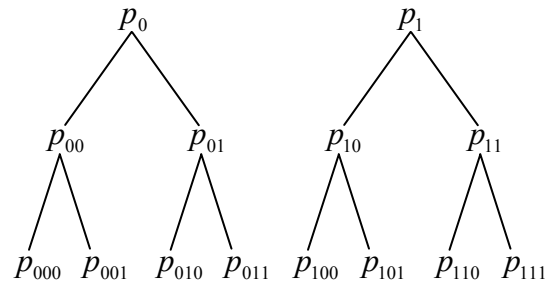


Figura 2.20 – Representação parcial de uma árvore simbólica binária para comprimentos da sequência simbólica k de 1 a 3.

3 RESULTADOS

Foram realizadas medições de flutuação de velocidade em canal aerodinâmico, bem como do ângulo de desvio em relação à direção principal do escoamento, em dois tubos posicionados lado a lado, com o intuito de detectar o fenômeno biestável nesta geometria simplificada. A Fig. 3.1 ilustra a geometria dos dois tubos e o posicionamento da sonda dupla de fio quente utilizada neste experimento. De acordo com a literatura, a instalação da sonda de fio quente nesta posição busca captar as variações de velocidade média das esteiras larga e estreita de vórtices a jusante dos tubos.

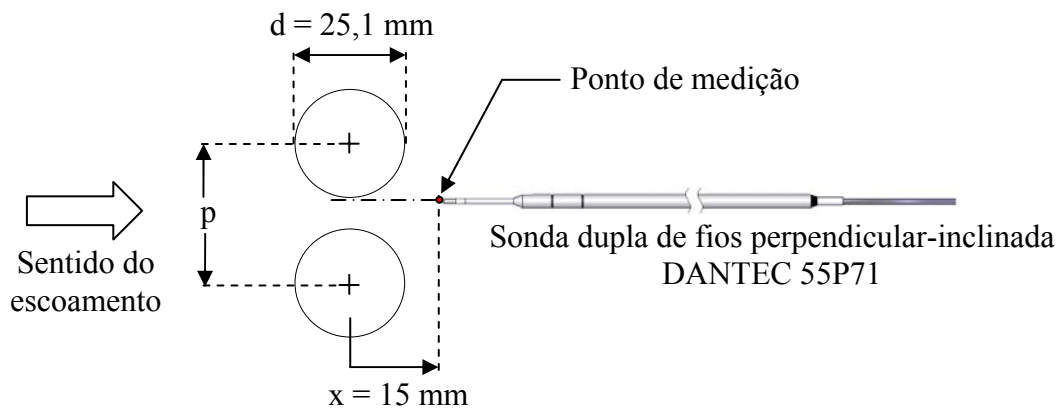


Figura 3.1 – Geometria dos dois tubos dispostos lado a lado e o posicionamento da sonda utilizada no experimento.

A Fig. 3.2 mostra os sinais temporais obtidos para um número de Reynolds de $2,28 \times 10^4$, calculado com base no diâmetro dos tubos, na velocidade de referência (14 m/s) e na viscosidade cinemática do ar. Da Fig. 3.2a é possível observar diversas trocas de velocidade média da componente axial durante todo o tempo de aquisição entre dois patamares predominantes, chamados de modos do escoamento [Alam et al., 2003], correspondentes a 3,0 m/s (esteira larga – modo 1) e 18,6 m/s (esteira estreita – modo 2). Estas mudanças são acompanhadas pela componente transversal (Fig. 3.2b) e, na medida em que o escoamento muda de direção, da esteira larga para a esteira estreita, o ângulo de desvio tende a apresentar flutuações menores (Fig. 3.2c). O procedimento para a determinação do ângulo de desvio é apresentado no Apêndice D.

3.1 Transformadas de ondaletas e definição da pseudofrequência

Como o fenômeno da biestabilidade não possui um período definido entre as trocas dos patamares de velocidade média, torna-se interessante definir um parâmetro que represente de modo geral tal variação. Uma possível metodologia para analisar este comportamento é através do conceito de pseudofrequência, que representa a provável frequência média das trocas dos modos do escoamento, analisada após a reconstrução dos sinais de velocidade por intermédio de transformada discreta de ondaletas (DWT). São realizadas reconstruções para diversas bandas de frequências (Fig. 3.3) com ondaletas Db20 e os resultados são exibidos conjuntamente com os sinais de velocidade. Um algoritmo automatizado foi desenvolvido para o cálculo da pseudofrequência das reconstruções das séries temporais de velocidade, com os mesmos níveis de reconstrução da Fig. 3.3. Dos sinais reconstruídos, é subtraído o valor médio, e são contadas as vezes que estes passam pela ordenada zero, sendo que os resultados numéricos são apresentados na Tab. 3.1.

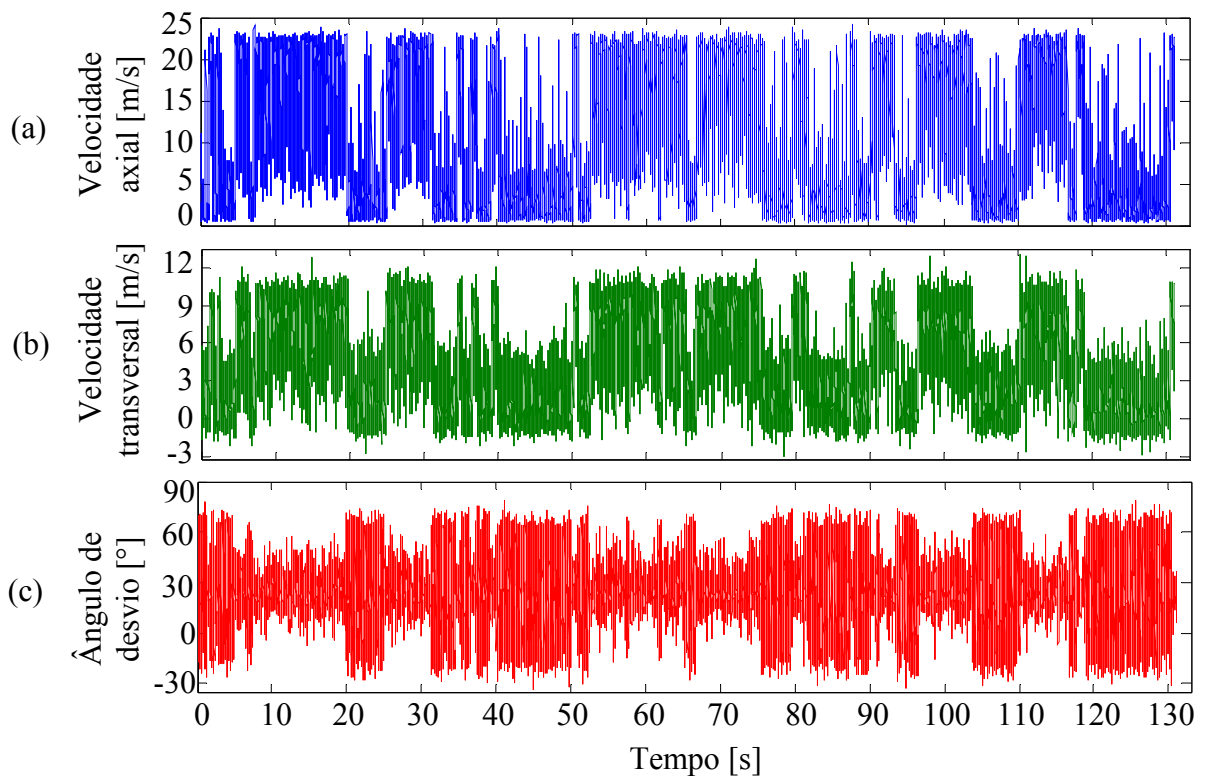


Figura 3.2 – Sinais de velocidade instantânea obtidas para $f_s = 1000$ Hz, $x = 15$ mm e $p/d = 1,26$. (a) Componente axial. (b) Componente transversal. (c) Ângulo de desvio.

Para analisar qual o nível de reconstrução (n) das séries temporais que melhor representa as trocas entre os modos do escoamento, é possível comparar a função coeficiente de correlação cruzada entre as séries temporais originais e as séries reconstruídas (C_{xy}) com a própria função coeficiente de autocorrelação dos sinais originais (C_{xx}). Assim, quando houver uma diferença significativa entre C_{xy} e C_{xx} , as baixas frequências não identificam todas as mudanças do escoamento, ou seja, acima de uma determinada esta faixa de frequências, as mudanças de direção do escoamento não serão consideradas como “estáveis”, e não são contabilizadas no cálculo da pseudofrequência do fenômeno biestável. A Fig. 3.4 apresenta o resultado da comparação entre C_{xy} e C_{xx} para a série de velocidade axial para os diferentes valores de n , de onde se observa que há pouca diferença entre os valores apresentados para n variando de 6 a 9. Já para $n = 10$, $n = 11$ e $n = 12$ a diferença entre C_{xy} e C_{xx} é significativa. Resultados semelhantes são obtidos para a série de velocidade transversal. Assim, o nível de reconstrução que melhor representa o fenômeno é aquele para $n = 9$ (Fig. 3.3d) e que fornece uma banda de frequências de 0 até 0,976 Hz. Para este caso, são observadas em média 39 trocas entre os modos do escoamento durante os 131 segundos de aquisição de dados, ou seja, completaram-se 19,5 ciclos ou períodos, com tempo médio de 6,72 segundos.

O valor calculado da pseudofrequência é de aproximadamente 0,149 Hz. As séries de velocidade são divididas em blocos de acordo com a Tab. 3.1, com comprimento N e sobreposição de 25% (s), e suas PDF são calculadas e apresentadas em um gráfico com escala de cores, para melhor identificação de concentrações, juntamente com os sinais reconstruídos por DWT (Fig. 3.5). Os resultados são similares aos encontrados na Fig. 3.3, onde o nível de reconstrução que melhor representa o fenômeno é $n = 9$ e PDF com $N = 1024$ e $s = 256$. Esta análise do crescimento do tamanho dos blocos das PDF em conjunto com as reconstruções por DWT mostra uma gradual perda de informação das pequenas escalas da turbulência do escoamento biestável.

A variação temporal das PDF das componentes de velocidade para o modo 1 do escoamento com $N = 1024$ e $s = 256$, em conjunto com suas respectivas DWT com $n = 9$, são apresentadas na Fig. 3.6. Os valores das variações das PDF do modo do escoamento são apresentados em percentual de um modo “cheio”, e são determinados dividindo-se cada PDF no valor médio de velocidade e contabilizando-se suas ocorrências. Os resultados mostram que não há uma correlação evidente entre as mudanças com o tempo. Observa-se um comportamento bastante similar entre as duas abordagens, o que leva a concluir que tanto a DWT com nível $n = 9$ de reconstrução quanto a análise de um dos modos do escoamento com

$N = 1024$ e $s = 256$ podem ser utilizados na estimativa da pseudofrequência. Esta semelhança indica autoconsistência, porém, não será explorada no restante do presente trabalho.

A Fig. 3.7 mostra uma análise da transformada contínua de ondaletas (CWT) e da reconstrução dos sinais temporais por transformada discreta de ondaletas. Os valores da CWT foram parametrizados para mostrarem os mesmos valores de escala de energia matemática. É possível observar um aumento de energia nos instantes de tempo em que a velocidade média é mais alta, com um relativo espalhamento das frequências, desde 10 Hz até aproximadamente 120 Hz (Figs. 3.7a e 3.7d).

Tabela 3.1 – Valores para a determinação da pseudofrequência e análise das PDF.

Nível de reconstrução (n)	6	7	8	9	10	11	12
Largura de banda [Hz]	0 a 7,812	0 a 3,906	0 a 1,953	0 a 0,976	0 a 0,488	0 a 0,244	0 a 0,122
Pseudofrequência [Hz]	0,284	0,179	0,172	0,149	0,126	0,065	0,050
Tempo médio das mudanças [s]	4,033	5,577	5,825	6,722	7,944	15,420	20,165
Número de mudanças de direção	65	47	45	39	33	17	13
Número de ciclos completados	32,5	23,5	22,5	19,5	16,5	8,5	6,5
Comprimento (N)	128	256	512	1024	2048	4096	8192
Tamanho da sobreposição (s)	32	64	128	256	512	1024	2048
Número de PDF	4093	2045	1021	509	253	125	61

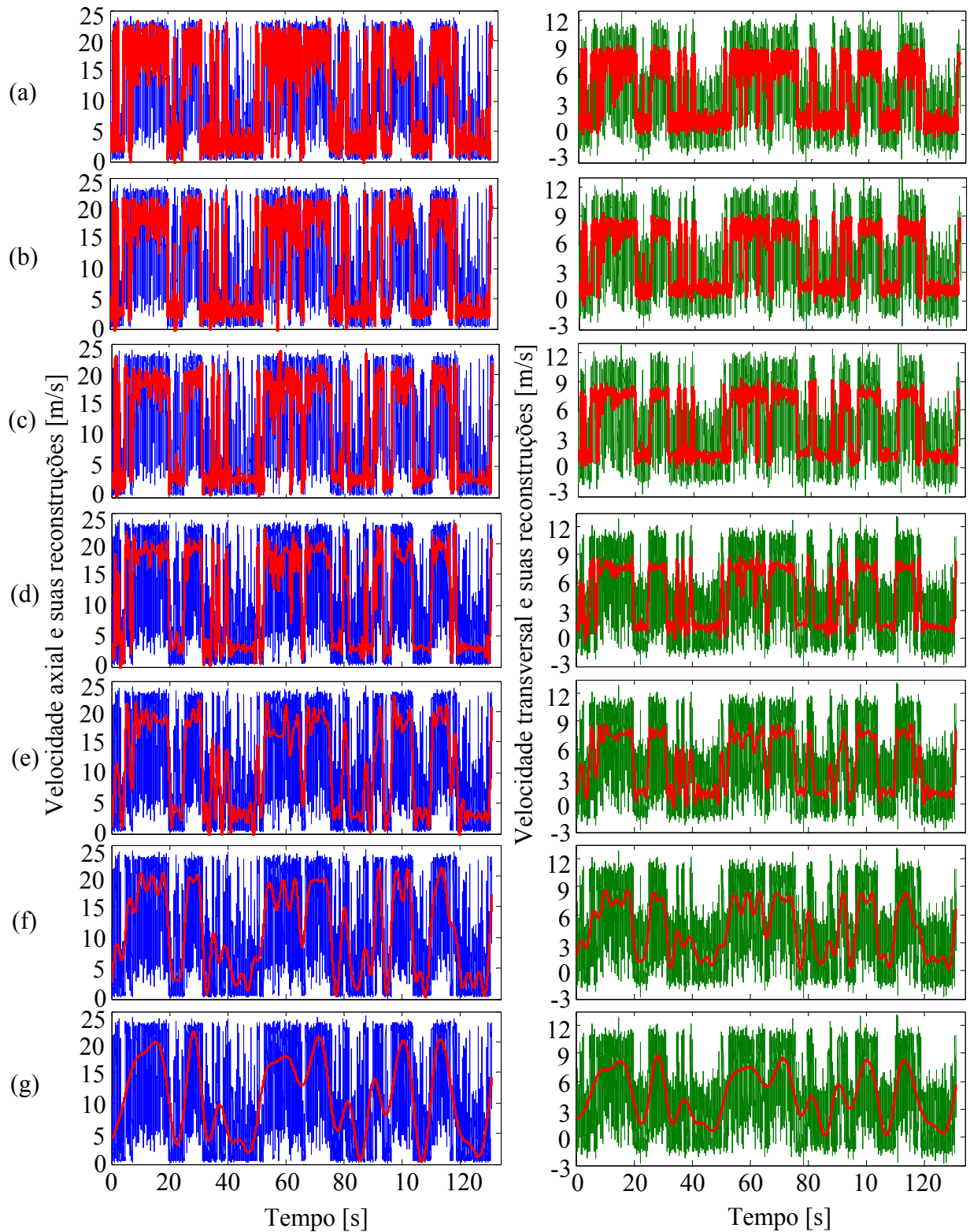


Figura 3.3 – Séries de velocidade e suas reconstruções via transformada discreta de ondaletas (DWT): linhas vermelhas. (a-g) Níveis de reconstrução de $n = 6$ a $n = 12$, respectivamente.

Quando o escoamento da fenda muda de direção, para o patamar de velocidade média mais baixa, há uma diminuição do conteúdo de energia⁶ do sinal acompanhado por uma maior concentração da faixa de frequências (até aproximadamente 30 Hz), o que indica que a esteira larga de vórtices, que possui uma velocidade média menor que a esteira estreita, possui uma concentração maior em frequência, porém com menor energia. Estas mudanças são acompanhadas pela componente transversal (Figs. 3.7b e 3.7e). O espectrograma do sinal de velocidade axial mostra este comportamento de modo mais evidente, enquanto que o espectrograma do sinal de velocidade transversal se apresenta de modo mais discreto. O espectrograma do ângulo de desvio do escoamento (Figs. 3.7 e 3.7f) apresenta um comportamento oposto, onde o conteúdo de maior energia é distribuído ao longo de uma grande faixa de frequência.

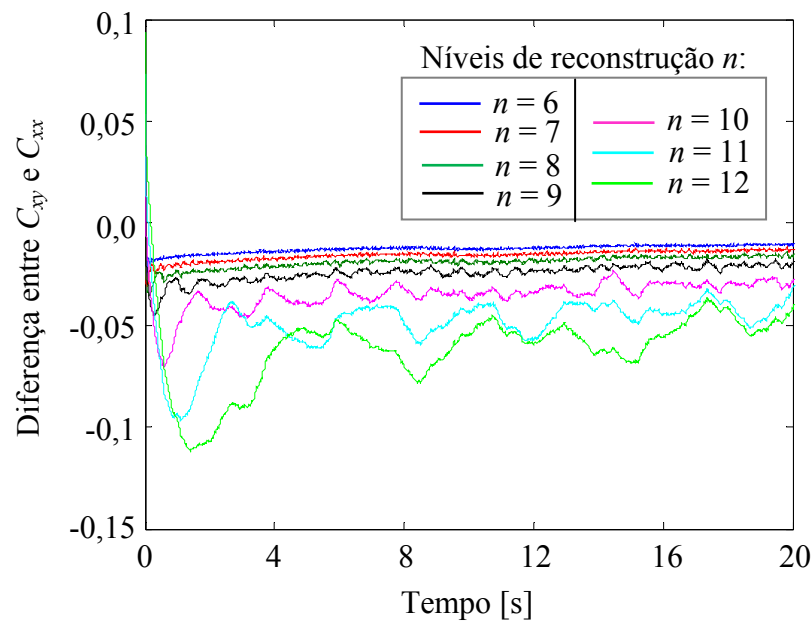


Figura 3.4 – Diferença entre a função coeficiente de correlação cruzada entre a série temporal de velocidade axial original e as séries reconstruídas (C_{xy}) com a função coeficiente de autocorrelação do sinal original (C_{xx}).

⁶ No caso dos sinais de velocidade, a energia (matemática) está relacionada à energia cinética. Já a energia referente ao sinal do ângulo de desvio não apresenta representação física.

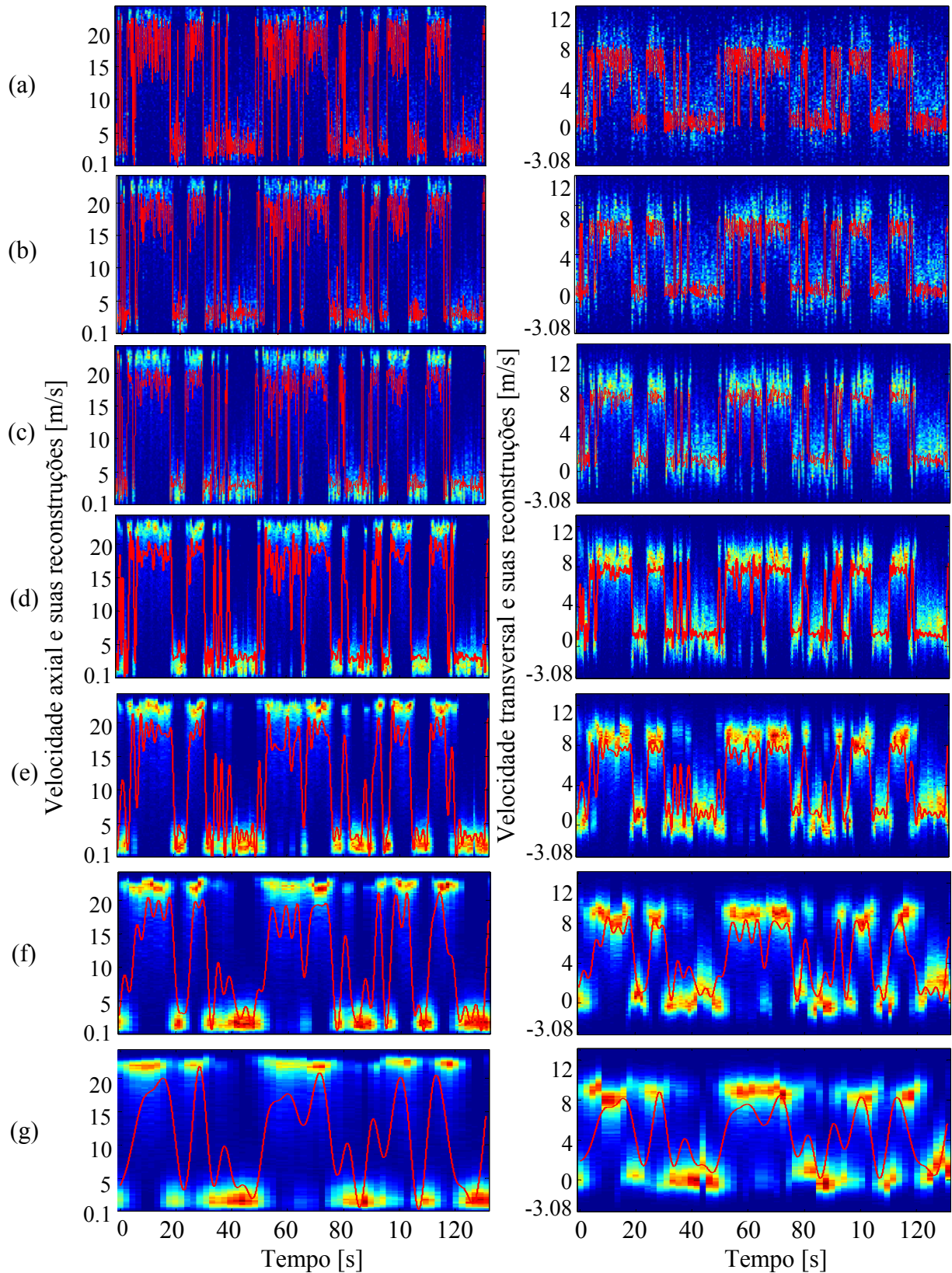


Figura 3.5 – PDF das séries de velocidade (escala de cores) e reconstruções por DWT (linhas vermelhas): (a) $N = 128$, $s = 32$, $n = 6$; (b) $N = 256$, $s = 64$, $n = 7$; (c) $N = 512$, $s = 128$, $n = 8$; (d) $N = 1024$, $s = 256$, $n = 9$; (e) $N = 2048$, $s = 512$, $n = 10$; (f) $N = 4096$, $s = 1024$, $n = 11$; (g) $N = 8192$, $s = 2048$, $n = 12$.

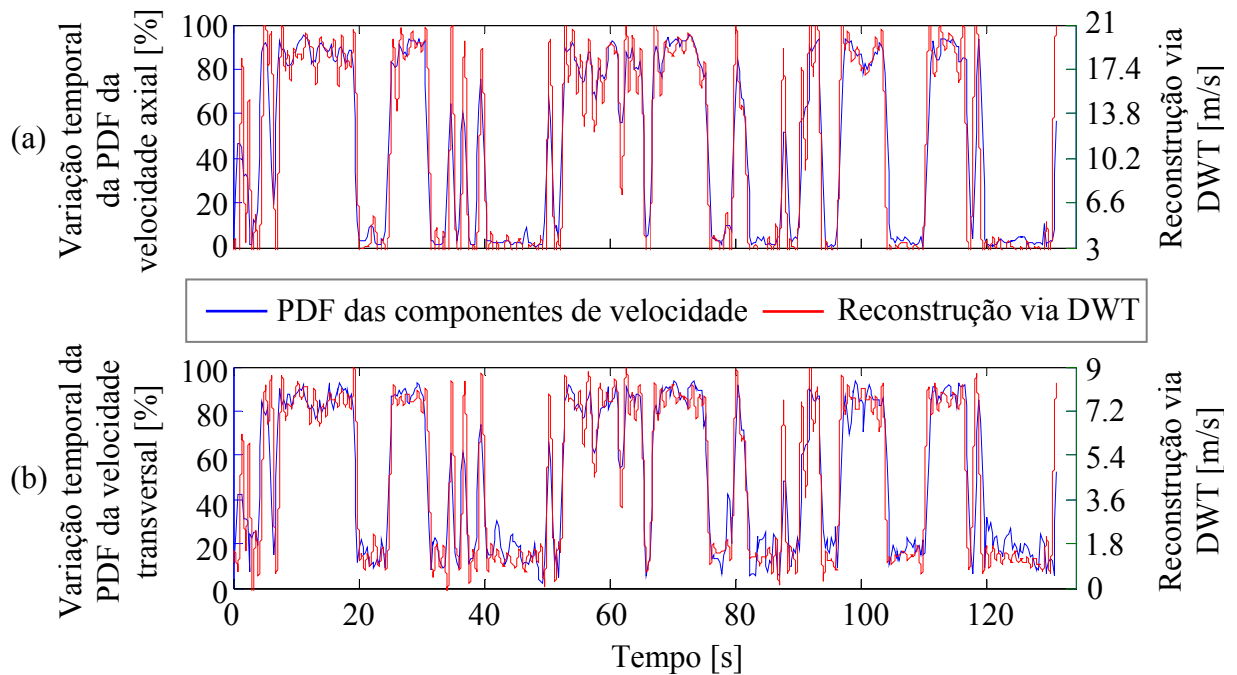


Figura 3.6 – Variação temporal das PDF das componentes de velocidade do modo 1 do escoamento e suas respectivas DWT com nível $n = 9$:
 (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal.

A Fig. 3.8 apresenta a reconstrução das componentes de velocidade por DWT para a mesma função e nível de reconstrução (Db20, $n = 9$), com o vetor de aproximação e os 9 vetores de detalhes. Os resultados mostram que a principal característica das flutuações de velocidade (Figs. 3.8a e 3.8b) é evidenciada através dos vetores de aproximação (sinais reconstruídos), pelas mudanças dos valores médios. O ângulo de desvio do escoamento (Fig. 3.8c) é bem caracterizado por suas flutuações (vetores de detalhes), desde as baixas até as altas frequências. A reconstrução deste sinal não apresenta nenhuma característica marcante, senão a variação em torno de um valor médio de $22,9^\circ$. A variação em torno deste valor médio é devida ao posicionamento da sonda de fio quente, que está alinhada com a linha tangente à geratriz interna de um dos tubos (Fig. 2.1c). O alinhamento da sonda na posição descrita capta as variações da velocidade média do escoamento, referente aos modos de esteira larga e estreita. Assim, se a sonda for posicionada entre os tubos, o valor do ângulo de desvio do escoamento de fenda deveria ser próximo de 0° . Este comportamento foi observado com o canal aerodinâmico vazio (sem os tubos). Valores semelhantes ao da Fig. 3.2c são obtidos ao se alinhar a sonda com a linha tangente à geratriz interna do tubo adjacente.

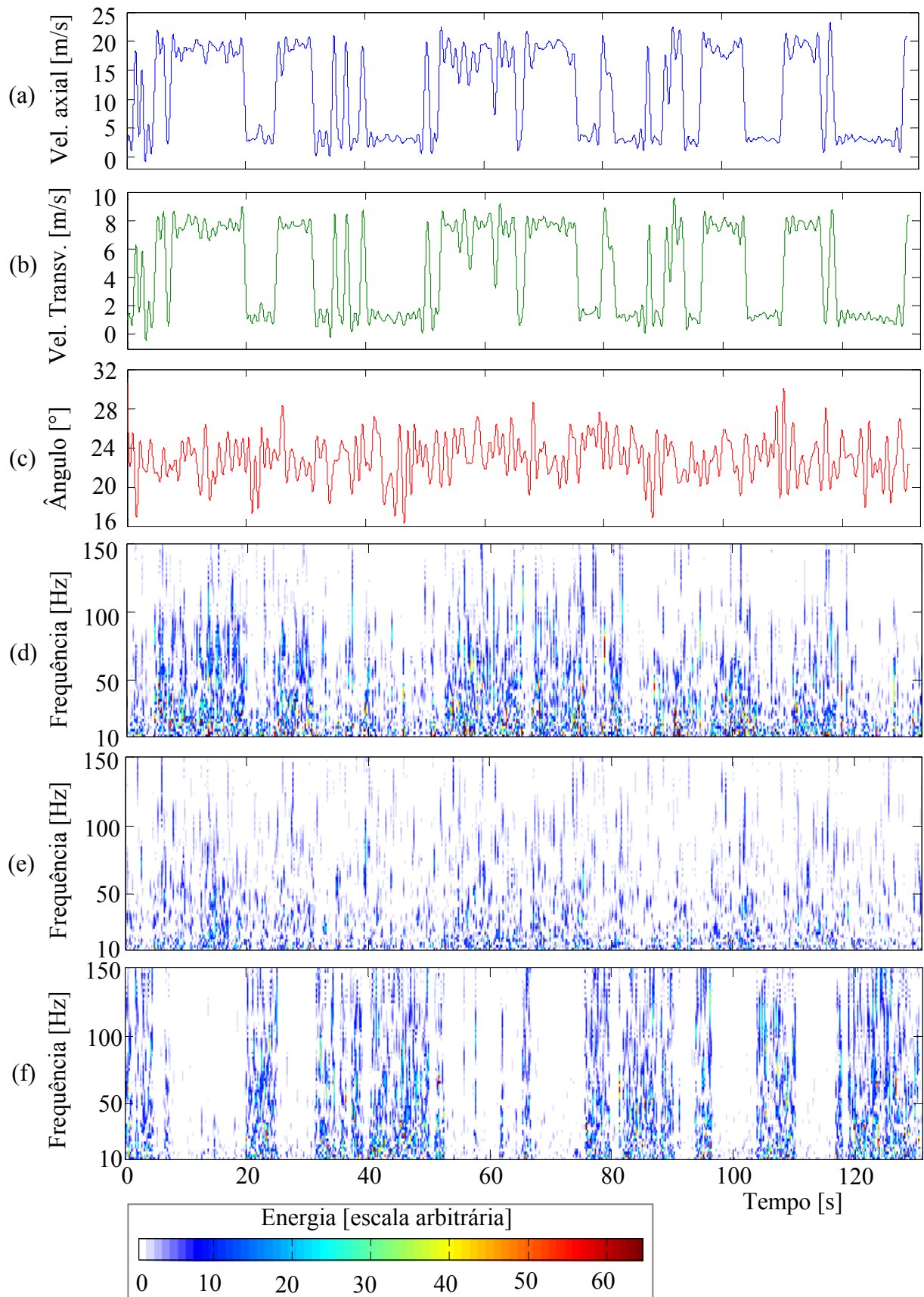


Figura 3.7 – Análise por DWT (a-c) e CWT (d-f) dos sinais temporais de velocidade axial, velocidade transversal e ângulo de desvio, respectivamente.

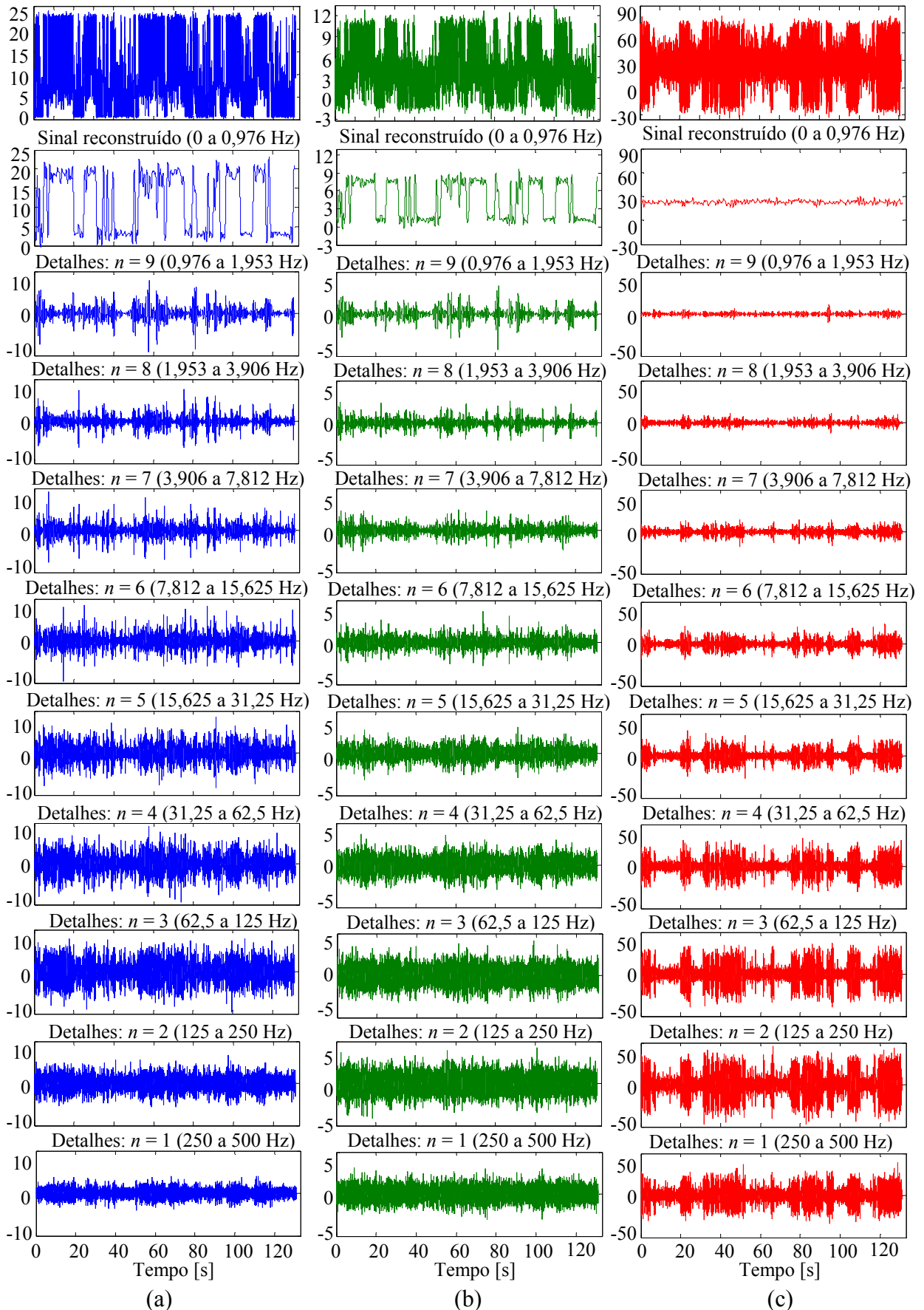


Figura 3.8 – Reconstrução das series temporais via DWT com nível $n = 9$.

(a) Velocidade axial em [m/s], (b) velocidade transversal em [m/s] e (c) $\hat{\text{A}}\text{ngulo de desvio em } [^{\circ}]$.

Uma análise das PDF dos sinais temporais é apresentada na Fig. 3.9, onde o eixo horizontal apresenta a distribuição dos valores das séries temporais e o vertical o número de ocorrências. Durante os 131 segundos de aquisição dos dados as componentes de velocidade apresentam duas concentrações de probabilidade, referentes aos modos 1 e 2, porém com diferentes formatos (Figs. 3.9a e 3.9b). A componente axial apresenta uma assimetria maior que a transversal, com valores maiores perto dos extremos. O ângulo de desvio do escoamento apresenta PDF com uma concentração em torno de um único valor, entre $21,5^\circ$ e $22,6^\circ$ (Fig. 3.9c). No entanto, o espalhamento da distribuição do ângulo de desvio é maior. O número de discretizações das séries temporais (bins) é igual a 100.

A Fig. 3.10 mostra a evolução no tempo das PDF dos sinais experimentais para $N = 1024$ e $s = 256$, de onde são observadas as trocas entre os modos do escoamento. Os valores são normalizados pelos valores máximos e os gráficos foram interpolados para apresentarem uma superfície suavizada, devido ao grande número de PDF geradas pela escolha do tamanho de blocos de dados da sobreposição, que nesta análise é igual a 509 funções densidade de probabilidade.

Quanto ao tempo de cada troca de direção do escoamento, este se mostra com um comportamento irregular (Fig. 3.11). Nenhuma correlação evidente é observada das trocas entre os modos do escoamento, sendo que as mudanças de direção com o tempo não acompanham o valor médio de 3,36 segundos.

A variação dos valores de maior ocorrência das PDF das componentes de velocidade para cada um dos modos se apresenta com um comportamento mais homogêneo (Fig. 3.12). O escoamento, quando se estabelece em um de seus modos, apresenta características probabilísticas bem preservadas ao longo tempo até a próxima troca, com variação máxima de 0,31 m/s para o modo de esteira estreita e 0,32 m/s para o modo de esteira larga. Olinto, 2005, e De Paula, 2008, apresentam o resultado da análise dos quatro momentos da função densidade de probabilidade para cada modo do escoamento, analisados separadamente, utilizando duas sondas perpendiculares de fio quente, alinhadas às tangentes internas dos dois tubos para a mesma razão de espaçamento. O valor médio da variação do desvio padrão em relação à velocidade média para o modo de esteira estreita é de 0,23 m/s e para o modo de esteira larga de 0,19 m/s. A comparação destes valores com os apresentados neste trabalho mostra que a análise da variação dos valores de maior ocorrência das PDF das componentes de velocidade para cada modo do escoamento está dentro do valor esperado.

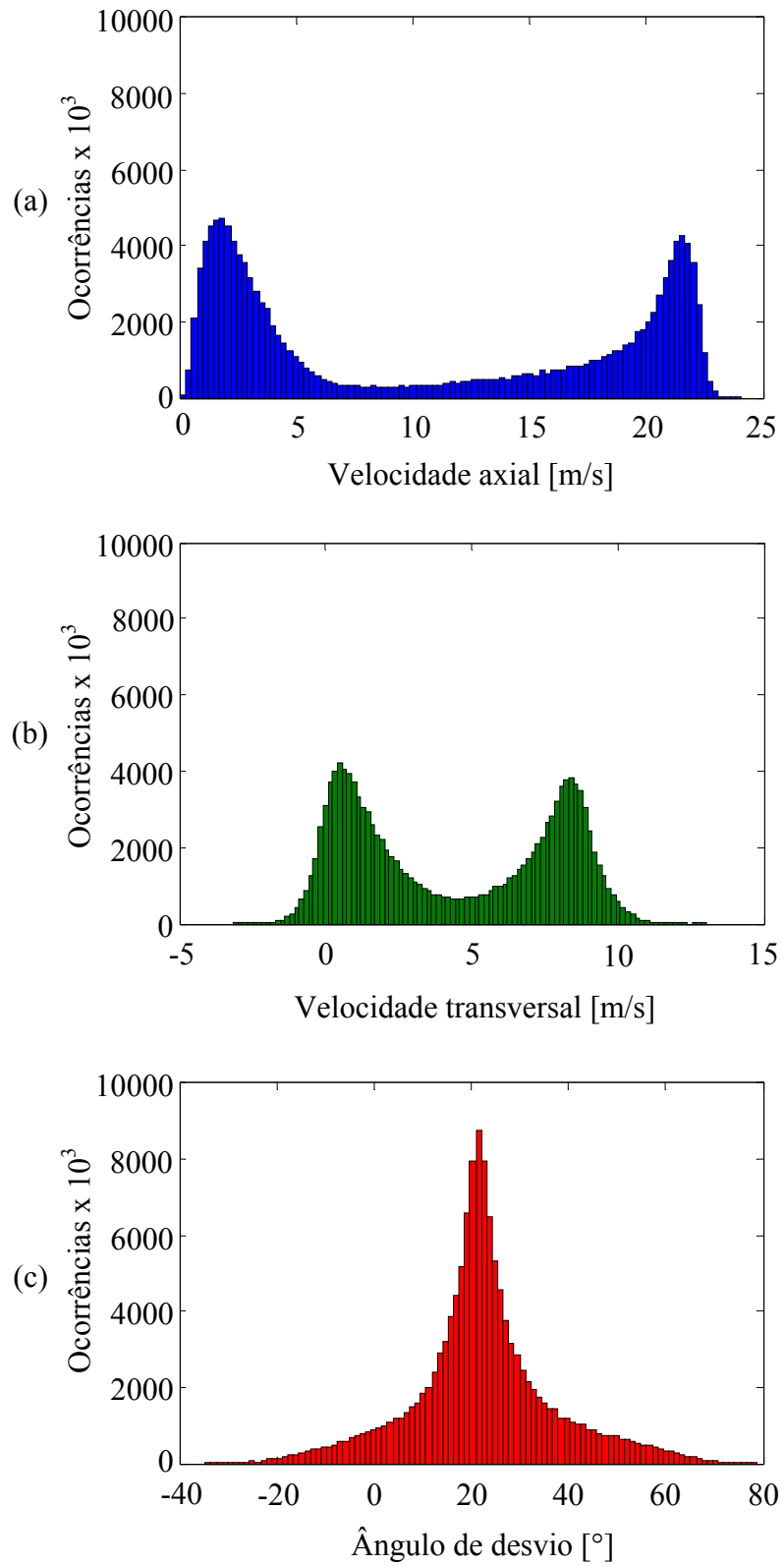


Figura 3.9 – Análise das funções densidade de probabilidade dos sinais temporais.

(a) Componente axial. (b) Componente transversal. (c) Ângulo de desvio.

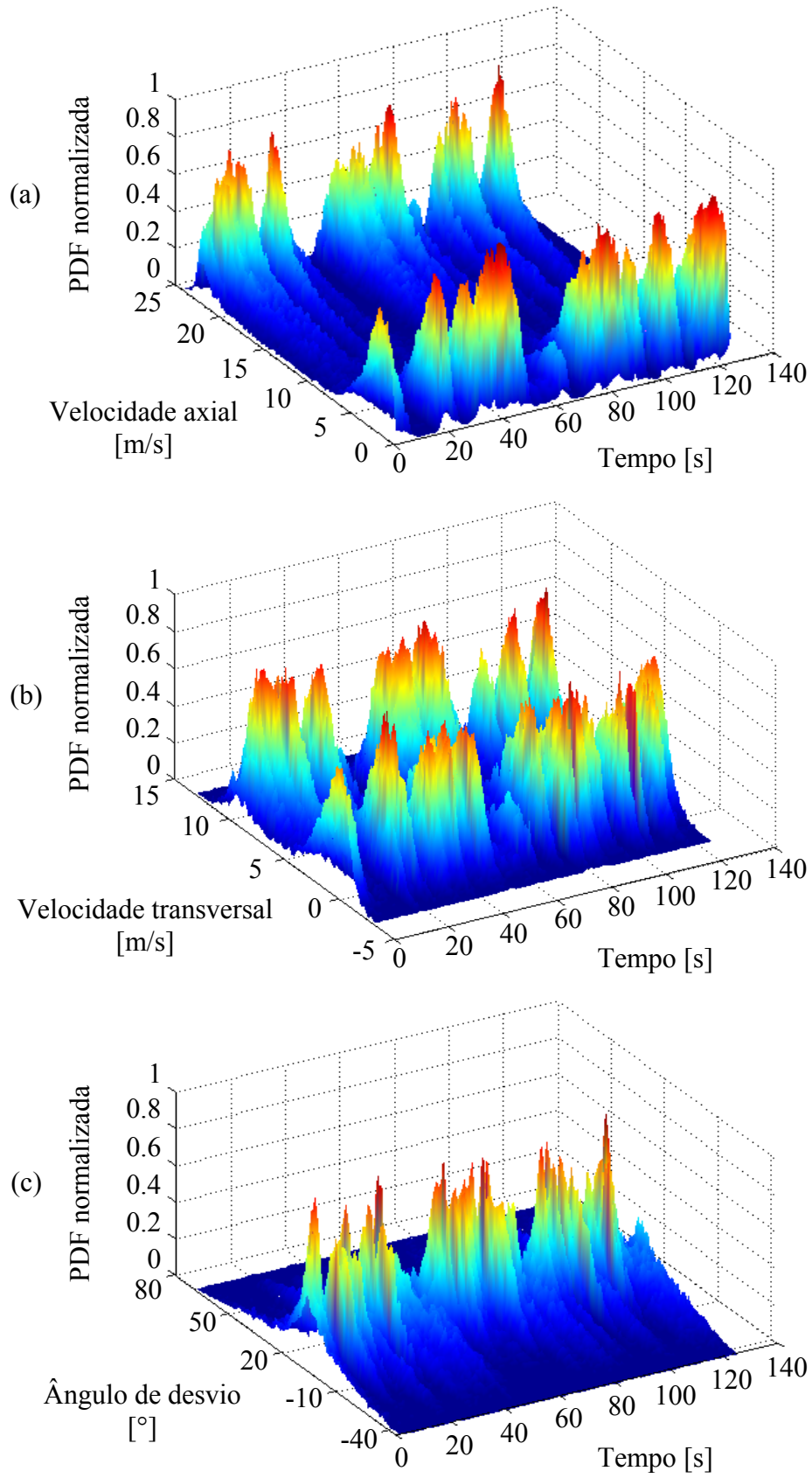


Figura 3.10 – Evolução no tempo das PDF dos sinais experimentais:
 (a) Componente axial. (b) Componente transversal. (c) Ângulo de desvio.

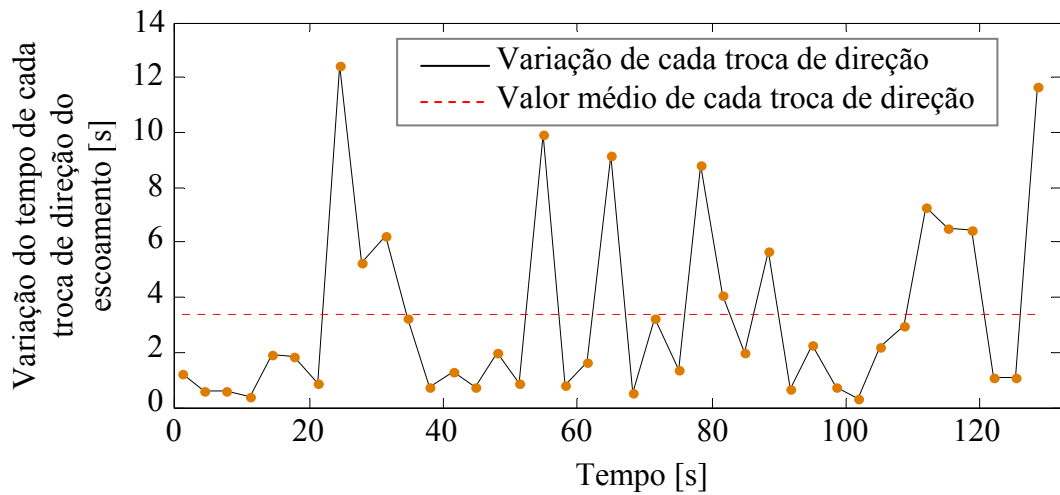


Figura 3.11 – Variação do tempo de cada troca de direção do escoamento.

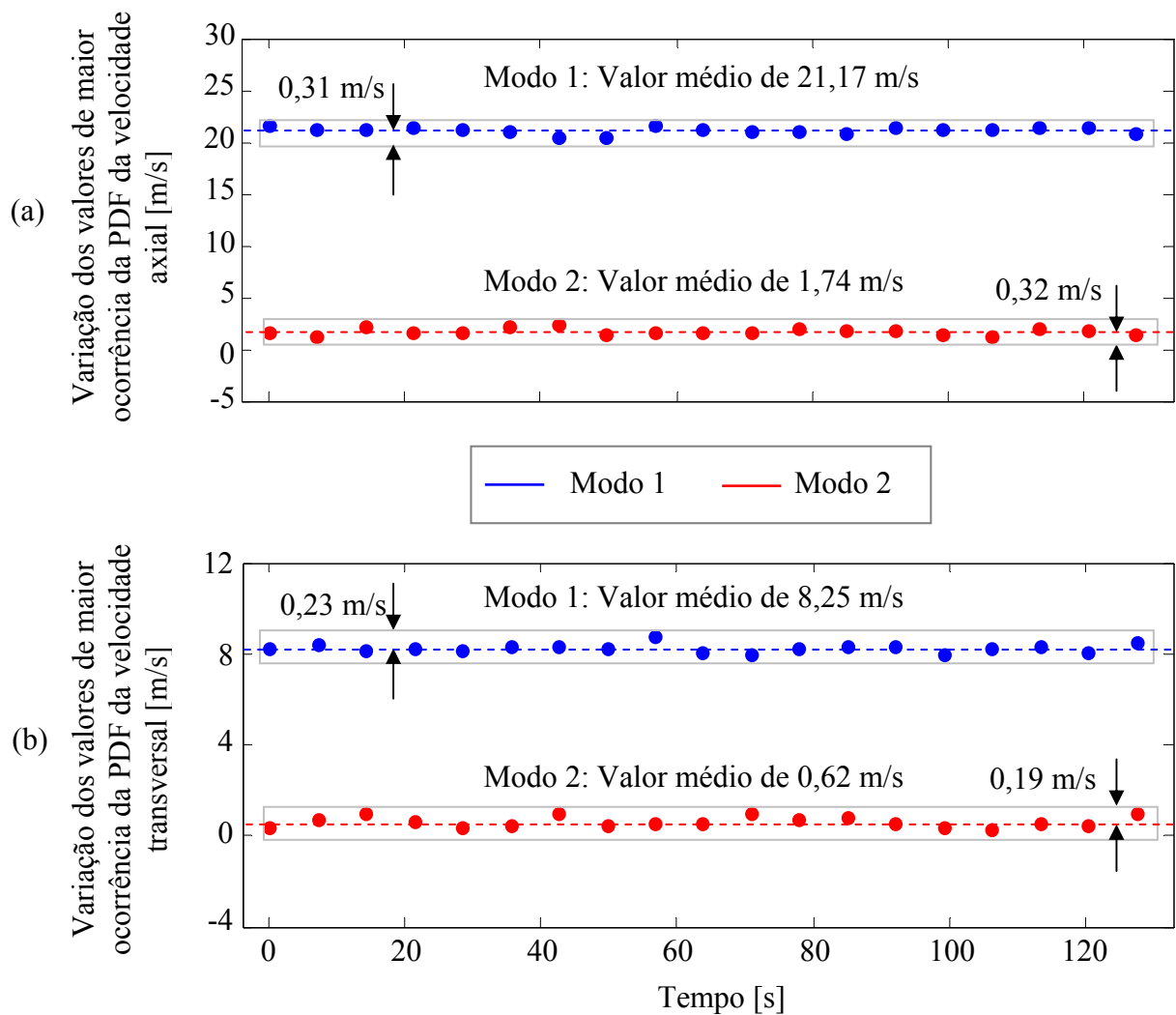


Figura 3.12 – Variação dos valores de maior ocorrência das PDF das componentes de velocidade: (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal.

3.2 Modelo de mistura finita

O modelo de mistura finita, que é utilizado na classificação estatística de dados, através da modelagem da soma ponderada de densidades de mistura, visa fornecer uma representação para o número de classes latentes dos dados experimentais. Assim, dadas apenas observações sobre as populações agrupadas (dados experimentais), este modelo é utilizado na inferência estatística das propriedades de subpopulações, porém, sem informações a respeito da identidade das subpopulações.

O resultado da simulação com o modelo de mistura finita para a estimação da máxima verossimilhança com o algoritmo de maximização de expectativa fornece os parâmetros com todos os valores numéricos necessários para expressar qual PDF t de *Student* assimétrico é mais provável de ter produzido os dados observados (séries temporais).

Como o algoritmo da maximização de expectativa é fortemente influenciado pelos valores utilizados em sua inicialização, podendo este convergir para máximos locais e não globais, é importante documentar a metodologia abordada neste procedimento.

Lin et al., 2007b, utiliza vários valores na inicialização da simulação que são representativos do espaço de parâmetros. Assim, se existirem vários modos, é possível encontrar o modo global através da comparação dos valores da log-verossimilhança.

Na análise univariada dos sinais de velocidade do escoamento, os valores iniciais da média, do desvio padrão e da assimetria foram escolhidos próximos às regiões de maior ocorrência dos dois modos do escoamento (Figs. 3.9a e 3.9b), com desvio padrão máximo de 1 m/s. Para o ângulo de desvio, que apresenta apenas um pico pronunciado na PDF (Fig. 3.9c), este valor foi escolhido como valor inicial, também com desvio padrão máximo de 1 m/s. Para uma comparação visual, cada PDF é dividida em 100 intervalos. A Fig. 3.13 apresenta os resultados da simulação com o modelo de mistura finita das séries temporais, para todo o tempo de aquisição de dados (131 segundos), de onde é observado um bom ajuste aos dados experimentais. A soma dos dados das barras verticais (séries temporais) é igual à soma do resultado obtido com o modelo de mistura aplicado.

Os resultados numéricos das simulações com o modelo de mistura finita (Capítulo 2.3) são apresentados na Tab. 3.2, onde é observada uma notável diferença dos valores das assimetrias entre os sinais de velocidade. Os valores obtidos para a média, o desvio padrão e a assimetria apresentam semelhanças com a análise realizada para o mesmo caso por Olinto, 2005. Como critério de parada para o algoritmo de maximização de expectativa, a tolerância utilizada nas simulações é de $\varepsilon = 10^{-3}$. Após 5 simulações estatisticamente independentes

(realizadas com a variação aleatória da semente do gerador de números randômicos), o número médio de realizações é de 254, com desvio padrão de 38 realizações.

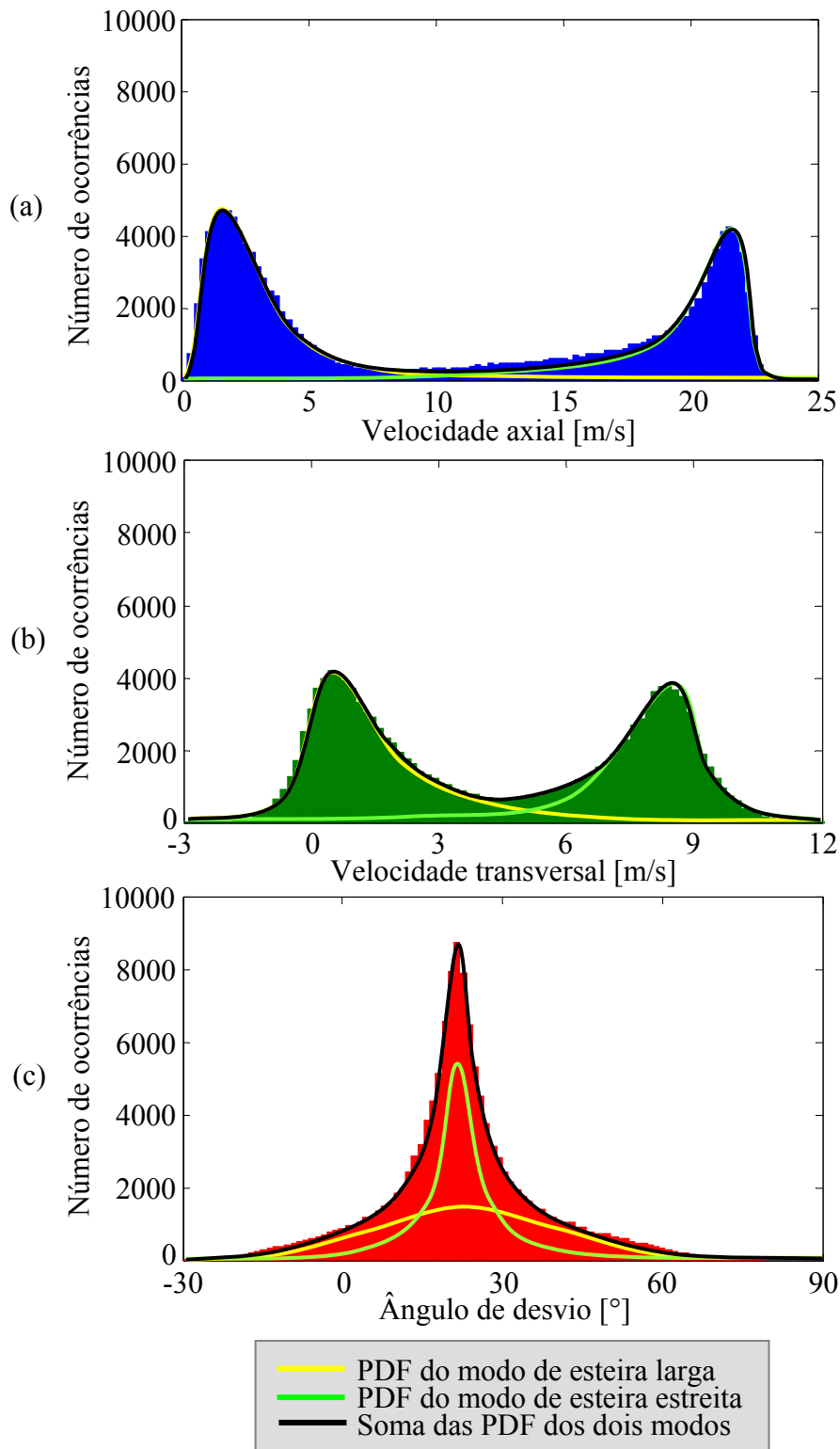


Figura 3.13 – PDF das séries temporais (barras verticais) e resultados da simulação com o modelo de mistura finita (linhas sólidas): (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal. (c) Ângulo de desvio.

Tabela 3.2 – Resultados numéricos das simulações com o modelo de mistura finita.

		Velocidade axial	Velocidade transversal	Ângulo de desvio
Média	Modo 1	2,96	1,30	22,08
	Modo 2	18,94	7,89	22,19
Desvio padrão	Modo 1	2,08	1,26	21,14
	Modo 2	3,96	1,80	7,16
Assimetria	Modo 1	3,48	0,92	0,09
	Modo 2	-1,69	-1,29	0,42
Probabilidade máxima	Modo 1	0,49	0,52	0,36
	Modo 2	0,51	0,48	0,64
Nº de graus de liberdade	Modo 1	6,23	4,15	32,41
	Modo 2	9,12	5,32	16,36

Visando identificar o número de componentes (variável g na equação 2.6) do modelo de mistura proposto com a PDF t de *Student* assimétrica (equação 2.37) que melhor se adapta ao fenômeno biestável, uma inferência paramétrica foi aplicada através do critério de informação de Akaike (AIC). Os resultados para o sinal de velocidade axial mostram que a PDF t de *Student* assimétrica com duas componentes é a que mais se ajusta aos dados (Fig. 3.14). Contudo, a diferença entre os resultados para duas e três componentes de densidade de probabilidade é pequena, o que pode indicar a tentativa do escoamento que emana da fenda entre os tubos mudar de direção em um determinado momento.

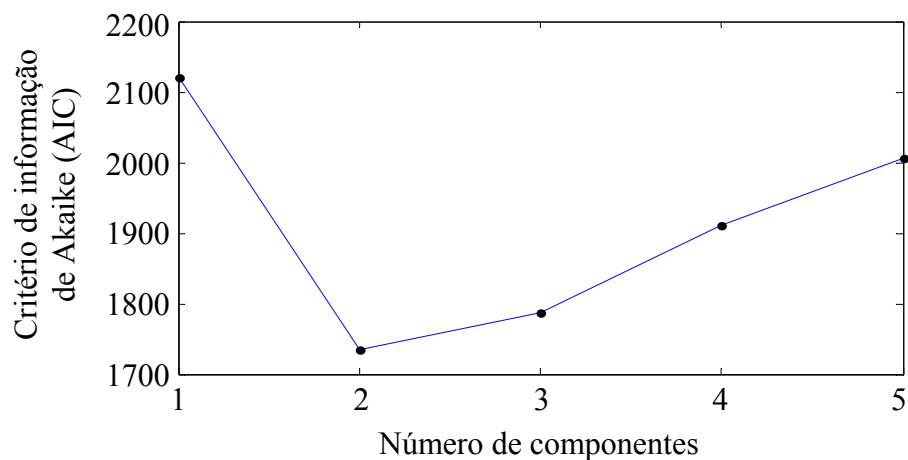


Figura 3.14 – Determinação do número de componentes do modelo de mistura univariado para a PDF t de *Student* assimétrica. Valores referentes ao sinal de velocidade axial.

3.3 Modelo de duplo poço e análise bivariada dos sinais de velocidade

Modelos de poço de energia [Friedman et al., 2000] são utilizados em diversas áreas do conhecimento na tentativa de melhor explicar o funcionamento de fenômenos complexos. Assim, um modelo de duplo poço de energia será utilizado para descrever de maneira sucinta o comportamento do sistema biestável (sinais de velocidade). Nele, dois poços de energia referentes aos modos de esteira larga e estreita são separados por uma barreira. O modelo apresenta dois pontos de mínimo (M1 e M2) e um ponto de máximo, ou estado de transição (TS), conforme as Fig. 3.15.

O comportamento da variação das séries temporais é bem explicado por este modelo (Fig. 3.15a-c), que mostra a análise dos dados da Fig. 3.2, no intervalo entre 14 e 25 segundos, onde as PDF para cada intervalo são apresentadas à direita de cada gráfico e a transição entre as concentrações de probabilidades é observada.

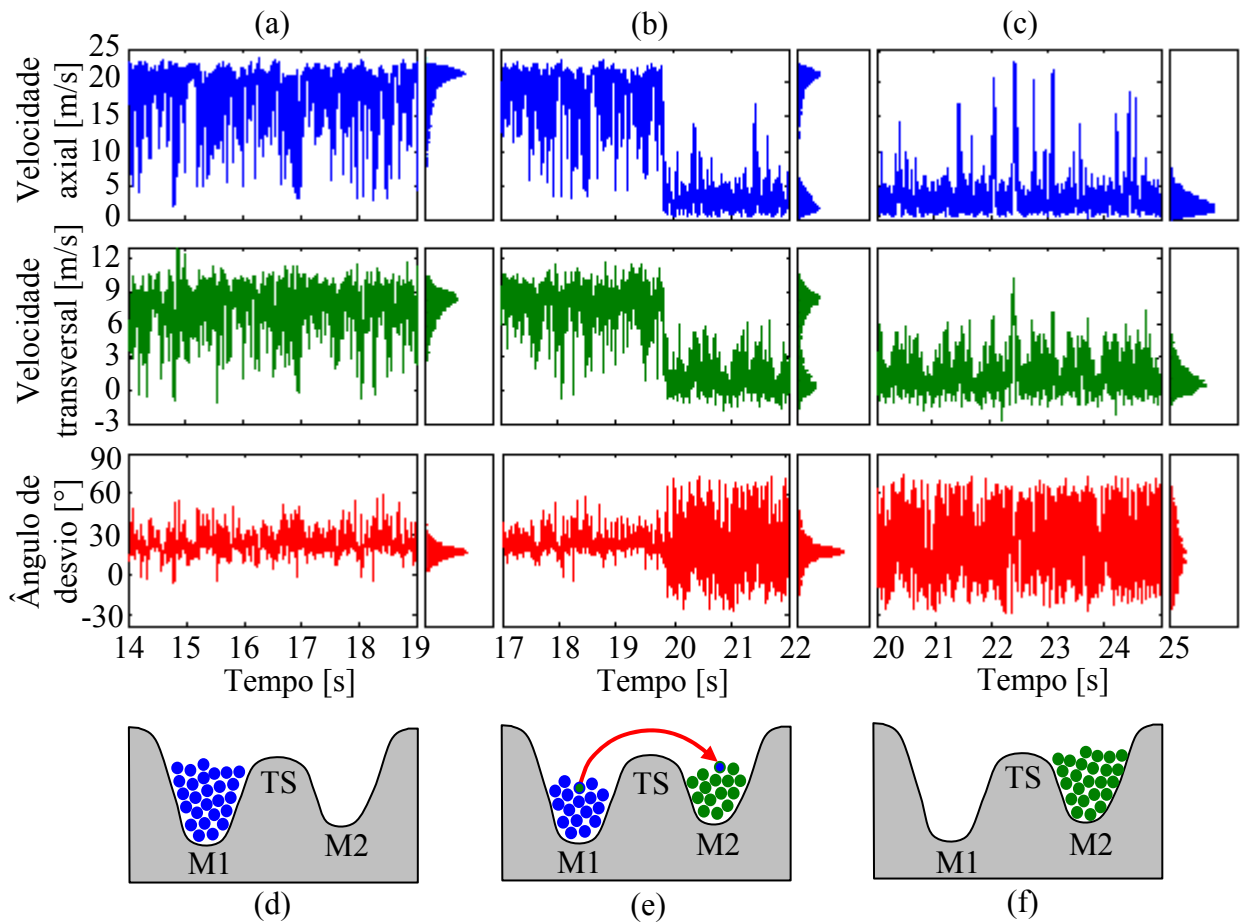


Figura 3.15 – Séries temporais da Fig. 3.2 na faixa entre 14 e 25 segundos: (a) modo 1, (b) transição entre os modos do escoamento e (c) modo 2, com suas respectivas PDF e modelos de duplo poço de energia ((d), (e) e (f)).

O modelo univariado utilizado é baseado na função densidade de probabilidade do problema, na forma

$$MDPE(x) = -\ln[PDF(x)], \quad (3.1)$$

em que x é uma das componentes de velocidade e $MDPE$ indica o modelo de duplo poço de energia, sendo que os resultados são apresentados na Fig. 3.16.

O comportamento do duplo poço de energia é dinâmico. Contudo, a análise realizada leva em consideração todos os pontos da série temporal, não prevendo o comportamento da variação da energia ao longo do tempo.

Como são obtidas informações da flutuação de velocidade do escoamento em duas direções principais (axial e transversal), torna-se interessante realizar uma análise conjunta destas grandezas. Uma análise bivariada do escoamento mostra a relação entre as PDF no plano de medição.

A Fig. 3.17 mostra o resultado da visualização de escoamento para dois tubos dispostos lado a lado em canal hidráulico com número de Reynolds de $7,5 \times 10^3$ e razões de espaçamento de $p/d = 1,26$ e $p/d = 1,6$ [De Paula, 2008]. É possível observar nas Figs. 3.17a e 3.17c a formação de uma esteira larga atrás de um dos tubos (de coloração vermelha) e uma esteira estreita atrás do outro tubo (de coloração azul). Passados alguns instantes de tempo esse padrão é alterado, e o cilindro que apresentava a esteira larga, agora, tem uma esteira estreita (3.17b e 3.17d), e vice-versa. Os resultados da visualização em três planos distintos mostram um comportamento similar do escoamento (Figs. 3.17e e 3.17f). A Fig. 3.17g mostra os detalhes obtidos da visualização lateral dos tubos, através de uma janela de vidro do canal hidráulico, para três planos de visualização distintos. Os resultados mostram que o escoamento percorre uma trajetória predominantemente bidimensional (no plano de injeção de corante). Deste modo, uma análise em conjunto das componentes de velocidade e de suas PDF no plano de medição pode ser realizada para avaliar o comportamento cruzado do fenômeno biestável.

A Fig. 3.18 ilustra o resultado das componentes axial e transversal do escoamento como um par ordenado. A escala de cores representa a evolução no tempo da posição dos pontos. Como há grande quantidade de pontos, ocorre a sobreposição dos mesmos na figura, onde tempos curtos estão cobertos por tempos longos. A Fig. 3.19 apresenta a mesma informação, porém, dividida em 8 intervalos, de onde observa-se que os pontos se espalham no plano, mas há duas regiões com concentração mais elevada, nos extremos, referentes às esteiras larga (menores velocidades) e estreita (maiores velocidades) de vórtices.

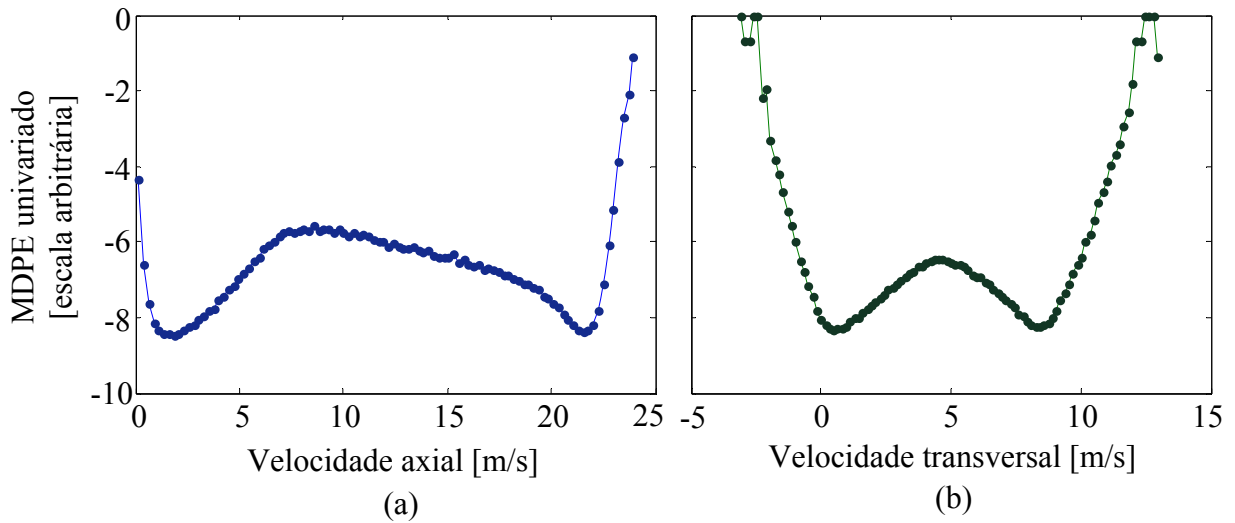


Figura 3.16 – Modelos de duplo poço de energia (MDPE) univariados:

(a) velocidade axial, (b) velocidade transversal.

Realizando uma contagem das ocorrências em cada intervalo de velocidade (bins) obtém-se a PDF cruzada dos dados (Fig. 3.20). São utilizados 50 bins para cada componente de velocidade e os resultados mostram uma concentração de probabilidade em torno de duas regiões, referentes aos modos de esteira larga e estreita de vórtices. O modo com velocidade média maior apresenta maiores concentrações (ocorrências).

A Fig. 3.21 ilustra a PDF cruzada (bivariada) das componentes axial e transversal do escoamento, através de uma imagem em escala de cores. Observa-se claramente o comportamento assimétrico da densidade bivariada. Este tipo de visualização permite uma localização mais precisa das concentrações de probabilidade do que a tridimensional (Fig. 3.20). Resultado semelhante é observado na Fig. 3.22, através da apresentação de contornos de isodensidade. No estudo de modelos de mistura bivariadas os resultados das simulações são geralmente apresentados neste formato, como os trabalhos apresentados com densidade t de *Student* [McLachlan et al, 2006], normal assimétrica [Azzalini e Dalla Valle, 1996; Azzalini e Capitanio, 1999; Lin, 2009] e t de *Student* assimétrica [Azzalini e Capitanio, 2003; Azzalini e Genton, 2008; Lin, 2010].

Em essência, as Figs. 3.20, 3.21 e 3.22 apresentam uma análise sobre os mesmos dados, porém, cada uma destas fornece vantagens diferentes. Enquanto a Fig. 3.20 exibe que o modo com velocidade média maior apresenta maior número de pontos de ocorrências, a Fig. 3.21 mostra uma série de pontos de ocorrências entre os dois modos do escoamento, e a Fig. 3.22 apresenta os resultados em forma de contornos, que é o formato mais utilizado na literatura do caso bivariado.

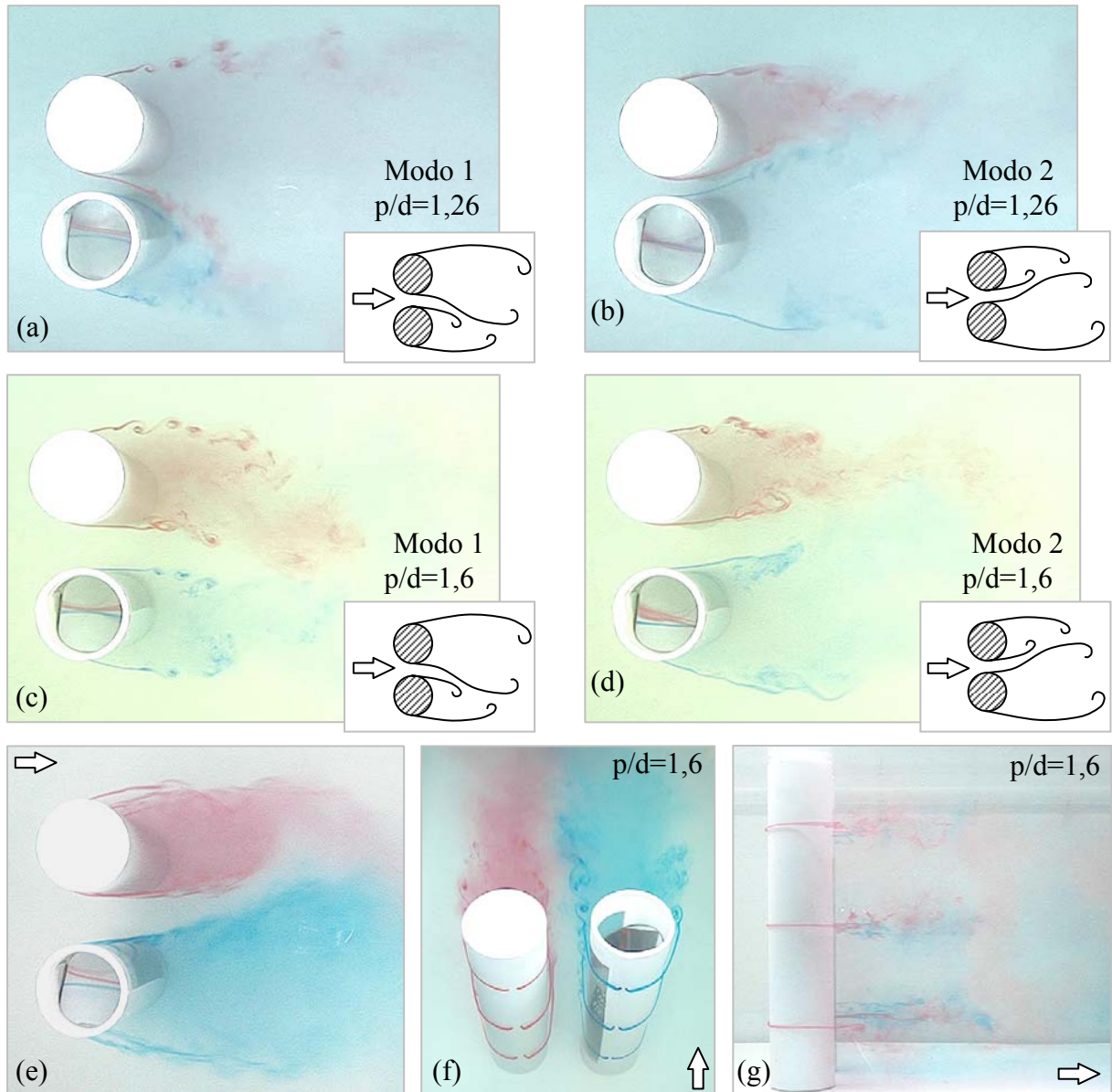


Figura 3.17 – Visualizações de escoamento em canal hidráulico de dois tubos dispostos lado a lado com $p/d=1,26$ e $p/d=1,6$. Plano superior de visualização: (a), (b), (c), (d) e (e). (f) Vista frontal, com ligeira elevação. (g) Vista lateral. $Re = 7,5 \times 10^3$. (Adaptado de De Paula, 2008).

A Fig. 3.23 ilustra a reconstrução por transformada discreta de ondaletas para diversos níveis do caso bivariado, mostrando a trajetória percorrida no plano de medição do escoamento. Para o nível de reconstrução $n = 5$ (Fig. 3.23a) são observadas várias flutuações na direção do escoamento, com um espalhamento da trajetória descrita. À medida que se aumenta o nível de reconstrução da transformada é observada uma suavização da trajetória neste plano, bem como uma diminuição da área percorrida, principalmente para $n = 10$ (Fig. 3.23f). Deste modo, o aumento gradativo do nível de reconstrução n filtra a trajetória no

plano de medição. Este comportamento pode ser relacionado com o procedimento de reconstrução do espaço de estados de um sistema dinâmico na teoria do caos determinístico. No caso de se utilizar um passo de reconstrução muito pequeno, o atrator apresentará uma dependência linear entre os vetores reconstruídos, podendo ficar comprimido em torno da diagonal do espaço de estados. Assim, as Figs. 3.22 e 3.23 são complementares, pois apresentam a manifestação do fenômeno biestável no plano de velocidades axial e transversal em uma mesma região.

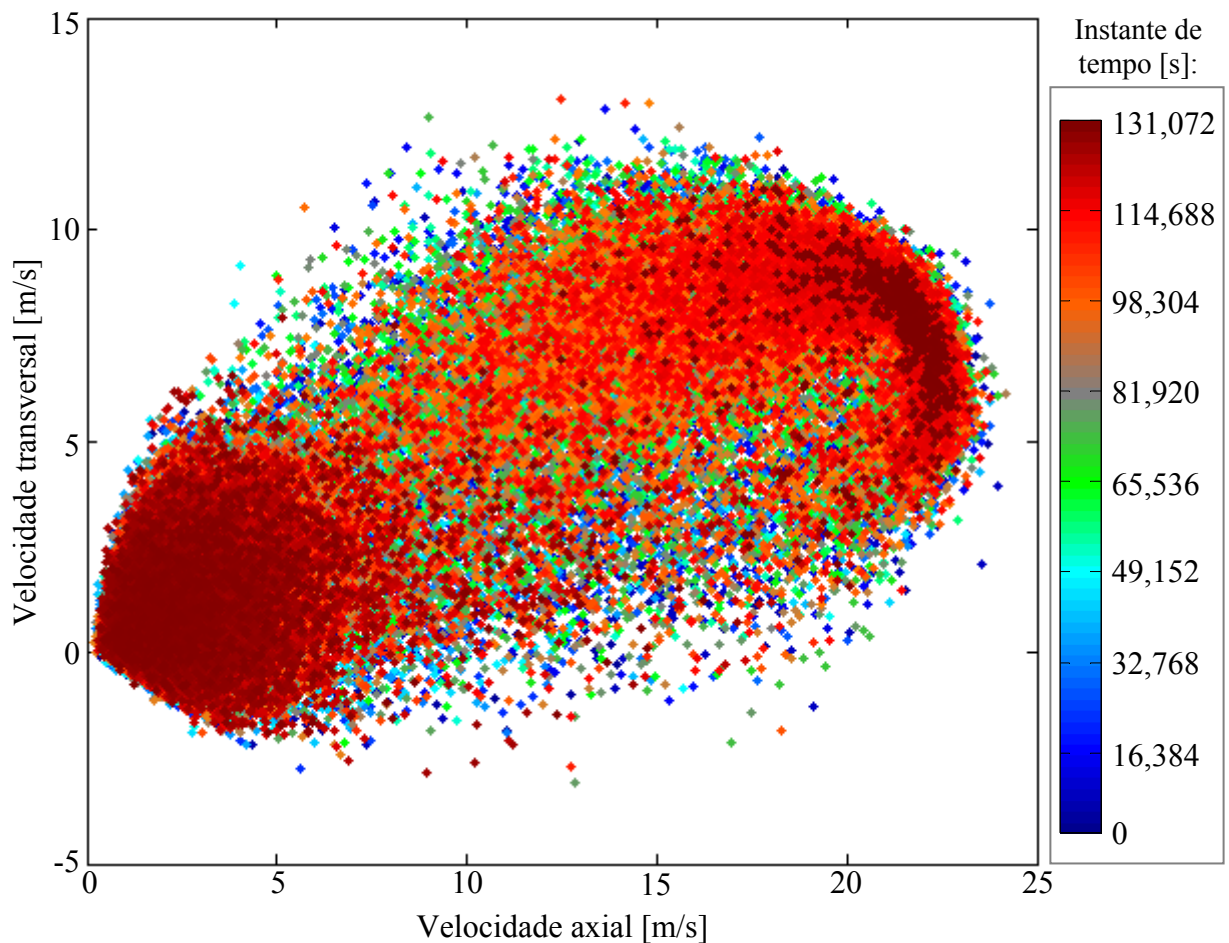


Figura 3.18 – Par ordenado de dados (pontos) das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado.

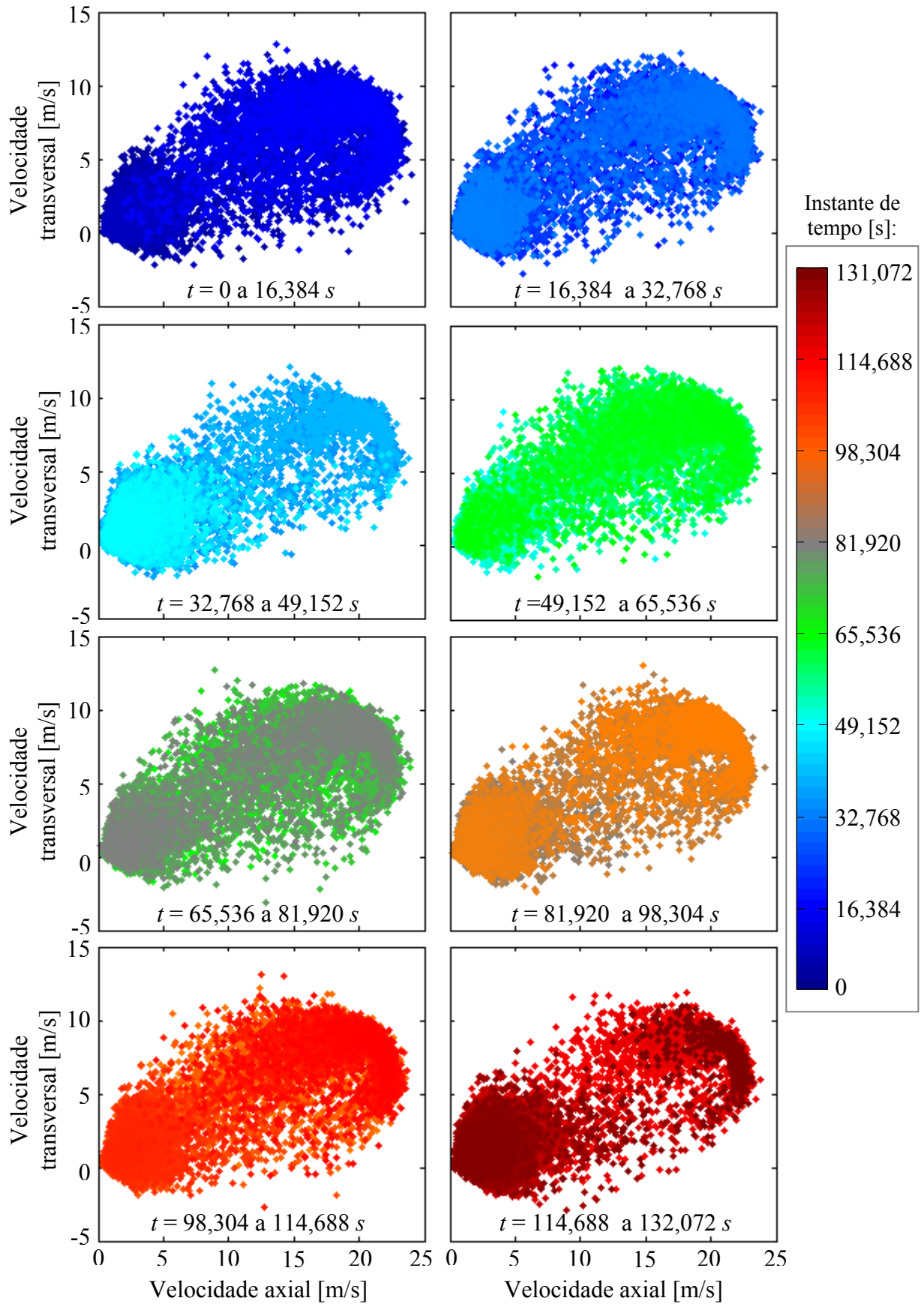


Figura 3.19 – Pares ordenados de dados das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado para diferentes intervalos de tempo.

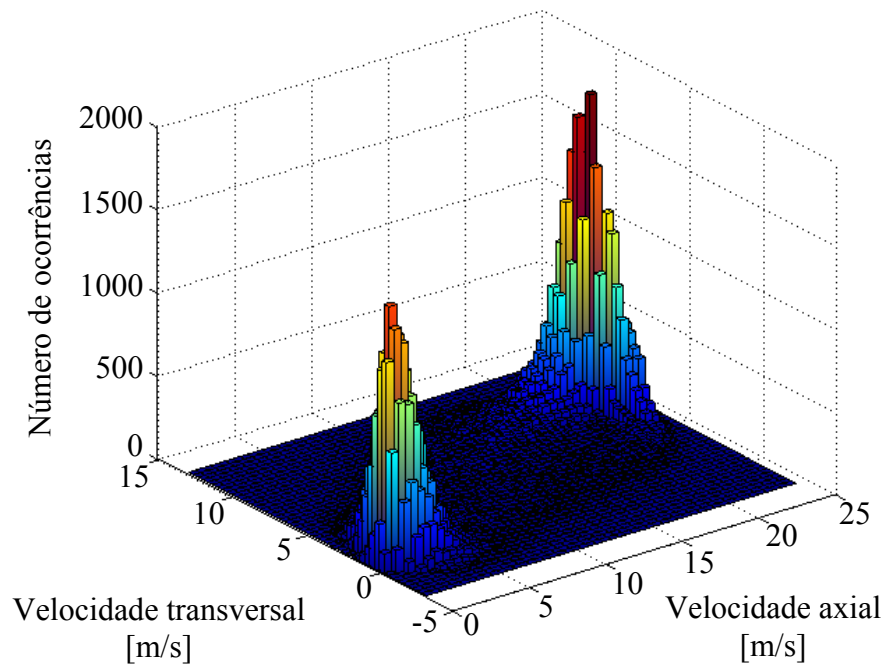


Figura 3.20 – Função densidade de probabilidade cruzada (bivariada) das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado.

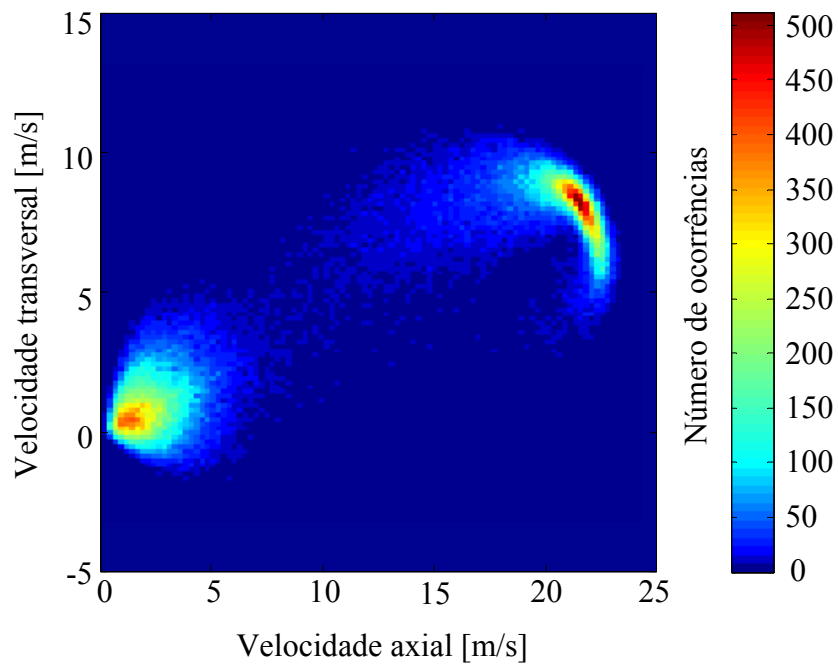


Figura 3.21 – PDF cruzada (bivariada) das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado. Imagem com escala de cores.

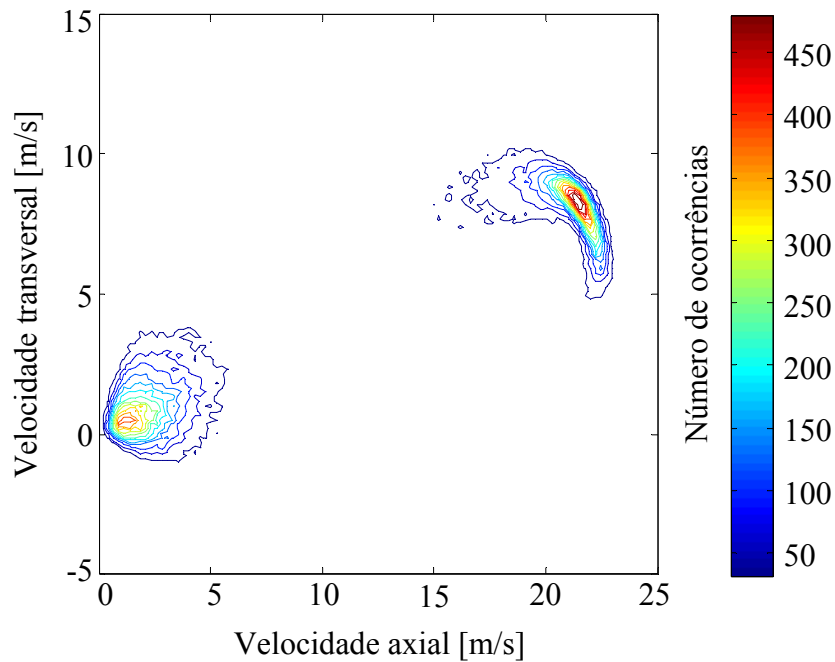


Figura 3.22 – PDF cruzada (bivariada) das componentes axial e transversal do escoamento para a geometria dos dois tubos dispostos lado a lado. Contornos de isodensidade.

Um modelo de duplo poço de energia para o caso bivariado é apresentado na Fig. 3.24, onde um patamar de transição de energia (de cor cinza) é formado. Isto significa que, quando o escoamento deixa um dos poços estáveis, alcança o patamar de transição e pode mover-se para o outro poço ou voltar para aquele em que se encontrava.

O modo do escoamento de maior velocidade média apresenta um formato altamente assimétrico, que pode estar relacionado com a presença de mais de dois modos no escoamento, como o argumentado por Alam et al., 2003, que identificaram um escoamento intermediário de curta duração no qual o escoamento de fenda é orientado paralelamente, na direção da corrente livre. Contudo, não foi realizado um estudo na tentativa de identificar algum modo intermediário do escoamento biestável através da análise conjunta dos dados de velocidade.

O modelo bivariado também é baseado na PDF das componentes de velocidade, de modo cruzado, na forma

$$MDPE(u, w) = -\ln[PDF(u, w)]. \quad (3.2)$$

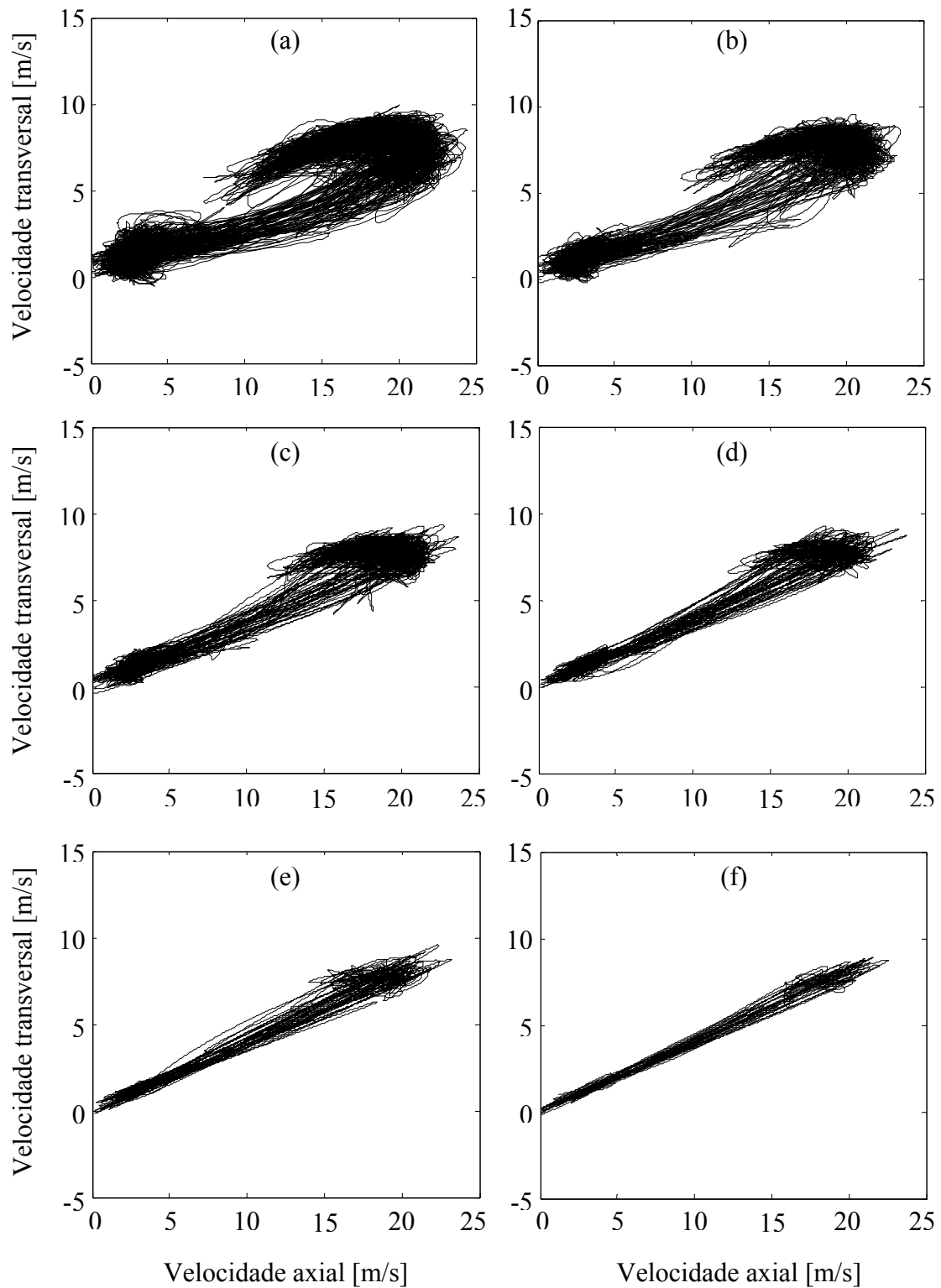


Figura 3.23 – Reconstrução por transformada discreta de ondaletas para diversos níveis do caso bivariado, mostrando a trajetória percorrida no plano de medição do escoamento.

Níveis de reconstrução: (a) $n = 5$, (b) $n = 6$, (c) $n = 7$, (d) $n = 8$, (e) $n = 9$, (f) $n = 10$.

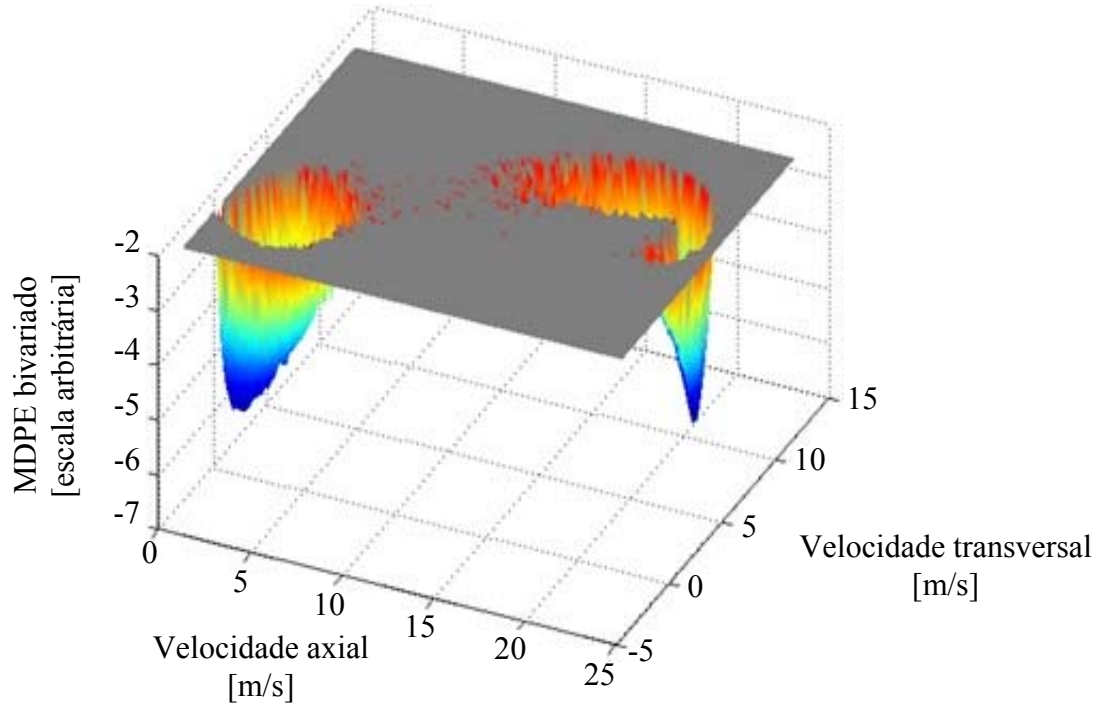


Figura 3.24 – Modelo de duplo poço de energia (MDPE) bivariado do comportamento biestável das componentes de velocidade axial e transversal do escoamento.

Na análise bivariada dos sinais de velocidade do escoamento é aplicado um modelo de mistura composto pelas séries axial e transversal de velocidade, de acordo com a equação (2.6) e com o proposto por Lin, 2010, sendo representado por

$$f(y_j | \Theta) = \pi \phi_{St_p}(y_j | \mu_1, \Sigma_1, \Lambda_1, \nu_1) + (1 - \pi) \phi_{St_p}(y_j | \mu_2, \Sigma_2, \Lambda_2, \nu_2) \quad (3.3)$$

em que π são as probabilidades de mistura, definidas nas equações (2.7) e (2.8), e ϕ_{St_p} é a função densidade de probabilidade multivariada t de *Student* assimétrica, definida na equação (2.39). Assim, o vetor com os valores médios e as matrizes de covariância e assimetria são dadas, respectivamente, por

$$\mu_i = \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \mu_{i2} \end{pmatrix} \quad \Sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{i,11} & \sigma_{i,12} \\ \sigma_{i,12} & \sigma_{i,22} \end{bmatrix} \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i,11} & 0 \\ 0 & \lambda_{i,22} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

para $i = 1, 2$ e $j = 1, \dots, N$.

Uma representação estocástica da função densidade de probabilidade multivariada t de *Student* assimétrica foi utilizada na determinação da log-verossimilhança (equação 2.44). Nas simulações realizadas foram escolhidos diversos valores iniciais de μ_i , Σ_i e Λ_i , todos próximos às regiões de maior ocorrência dos dois modos do escoamento (Fig. 3.22), com

desvio padrão máximo de 1 m/s. Assim, a obtenção de valores globais da log-verossimilhança visa a obtenção de uma solução robusta. A tolerância utilizada nas simulações (critério de parada para o algoritmo de maximização de expectativa) é de $\varepsilon = 10^{-3}$. Após cinco simulações estatisticamente independentes (realizadas com a variação aleatória da semente do gerador de números randômicos), o número médio de realizações é de 416, com desvio padrão de 62 realizações, sendo que os valores numéricos médios são apresentados na Tab. 3.3.

Embora o número de componentes do modelo de mistura finita para este caso tenha sido inferido igual a dois, o valor do critério de informação de Akaike (AIC) é exibido para futuras comparações com outros modelos de mistura e número de populações, onde o número de parâmetros livres no modelo é $k = 16$.

O resultado visual do ajuste com o modelo de mistura proposto aos dados é exibido na Fig. 3.25, de onde se observa que as curvas apresentam um ajuste qualitativo aos dados, o que sugere que o fenômeno biestável pode ser tratado como sendo um processo que segue uma distribuição bivariada com densidade t de *Student* assimétrica. Nesta figura, há a impressão de que uma considerável parcela de pontos de dados não é bem representada pelo modelo de mistura. Contudo, esta é uma impressão errônea, devido à grande quantidade de dados presentes (uns sobrepostos aos outros), o modelo proposto apresenta efetivamente a maior parte dos dados nas regiões de maior densidade das funções.

Tabela 3.3 – Resultados da análise dos sinais de velocidade com o modelo de mistura bivariada e PDF t de *Student* assimétrica (valores médios de cinco simulações independentes).

Parâmetro	Modo 1		Modo 2	
	Axial	Transv.	Axial	Transv.
Valores médios, μ	3,02	1,31	18,67	7,89
Matriz de covariância, Σ	2,15	1,88	1,31	1,18
	1,74	3,86	1,07	1,95
Matriz de assimetria, Λ	3,33	0	-1,48	0
	0	0,92	0	-1,29
Número de graus de liberdade, ν	17		46	
Proporções da mistura, π	0,51		0,49	
Estimativa e máxima log-verossimilhança, $\ell(\hat{\theta})$	-1618,3		-1591,8	
Critério de informação de Akaike, AIC	3268,6		3215,6	

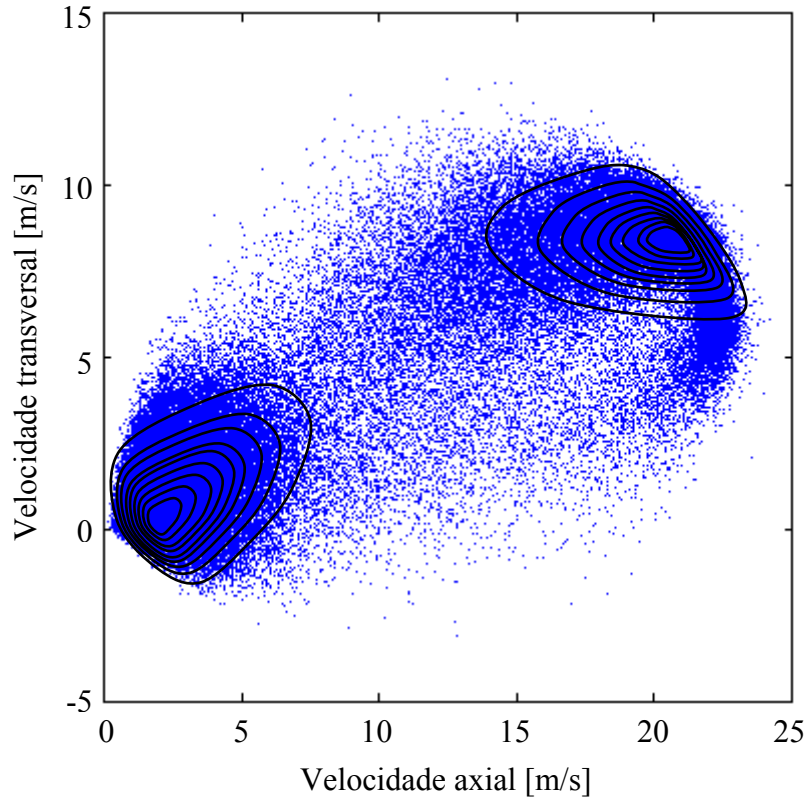


Figura 3.25 – Par ordenado de dados das componentes de velocidade do escoamento com o ajuste do modelo de mistura finita usando uma distribuição bivariada t de *Student* assimétrica.

3.4 Caos determinístico

Para analisar se as séries temporais experimentais apresentam um comportamento caótico determinístico, é necessário primeiramente efetuar-se a reconstrução de seu atrator em um espaço de fase conveniente. O método dos atrasos temporais foi empregado nessa etapa. Resultados são apresentados para espaços de estados em duas e três dimensões. As funções coeficiente de autocorrelação dos sinais de velocidade axial e transversal são apresentadas na Fig. 3.26, onde se observa, para ambos os sinais, um mínimo local no ponto 8396, ou seja, no instante de tempo de 8,396 segundos. Como representam as mesmas flutuações dos dados de velocidade, as funções coeficiente de autocorrelação da Fig. 3.26 são idênticas.

Da reconstrução do espaço de estados bidimensional e tridimensional com a defasagem $p = 8396$ (Fig. 3.27) de ambas as séries temporais não se observa nenhuma característica importante senão a cobertura completa do espaço pelo atrator, o que indica a presença de ruído.

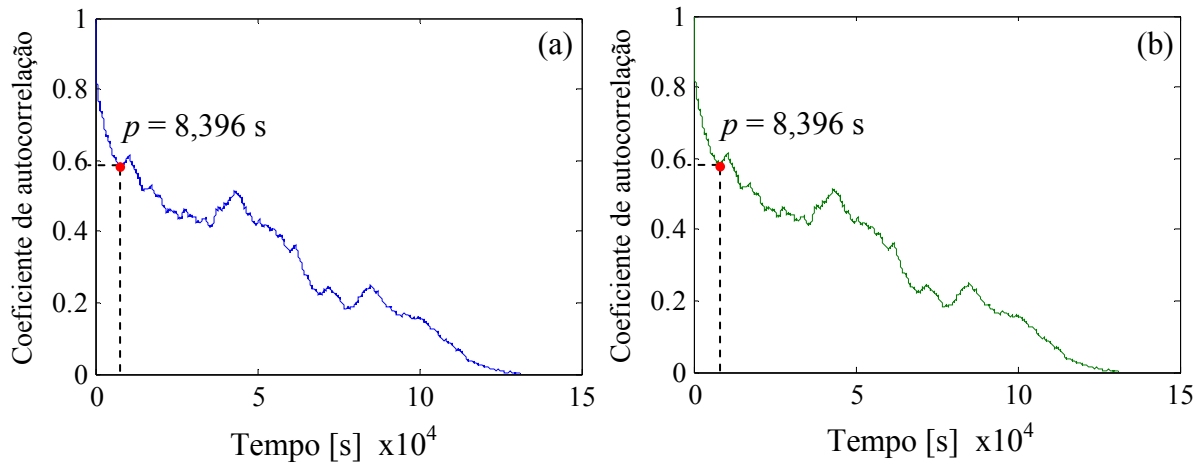


Figura 3.26 – Função coeficiente de autocorrelação. (a) Sinal de velocidade axial. (b) Sinal de velocidade transversal.

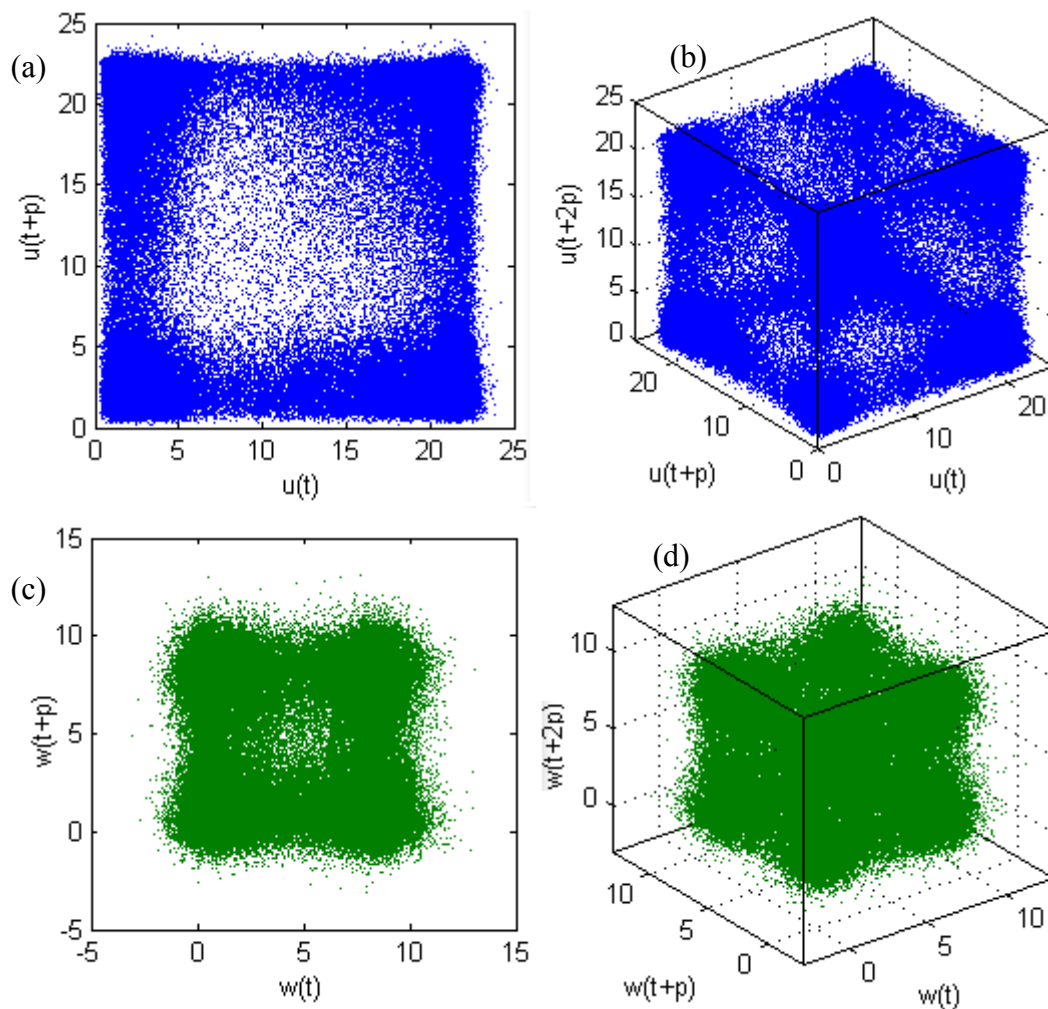


Figura 3.27 – Reconstruções do espaço de estados para os sinais temporais com $p = 8,396$ s.

(a) Reconstrução 2D axial. (b) Reconstrução 3D axial. (c) Reconstrução 2D transversal.

(d) Reconstrução 3D transversal.

De modo alternativo, são utilizados passos de reconstrução de 1, 5 e 10 pontos de dados (0,001, 0,005 e 0,01 segundos, respectivamente), apresentados na Fig. 3.28 (sinal de velocidade axial) e na Fig. 3.29 (sinal de velocidade transversal). É possível observar que para $p = 0,001s$ o atrator não cobre totalmente o espaço de estados (Figs. 3.28a, 3.28d, 3.29a e 3.29d). Contudo, à medida que se aumenta o passo de reconstrução o atrator vai preenchendo mais o espaço, como por exemplo, para $p = 0,005s$ (Figs. 3.28b, 3.28e, 3.29b e 3.29e). Para $p = 0,01s$, o atrator preenche grande parte do espaço de estados para o sinal de velocidade axial (Figs. 3.28c, 3.28f) e para a componente transversal (Figs. 3.29c e 3.29f) o atrator não satura completamente o espaço de estados. Assim, o tratamento de dados do sinal de velocidade axial será realizado com uma defasagem de $p = 0,005s$, e para o sinal transversal, $p = 0,01s$ é um passo de reconstrução adequado.

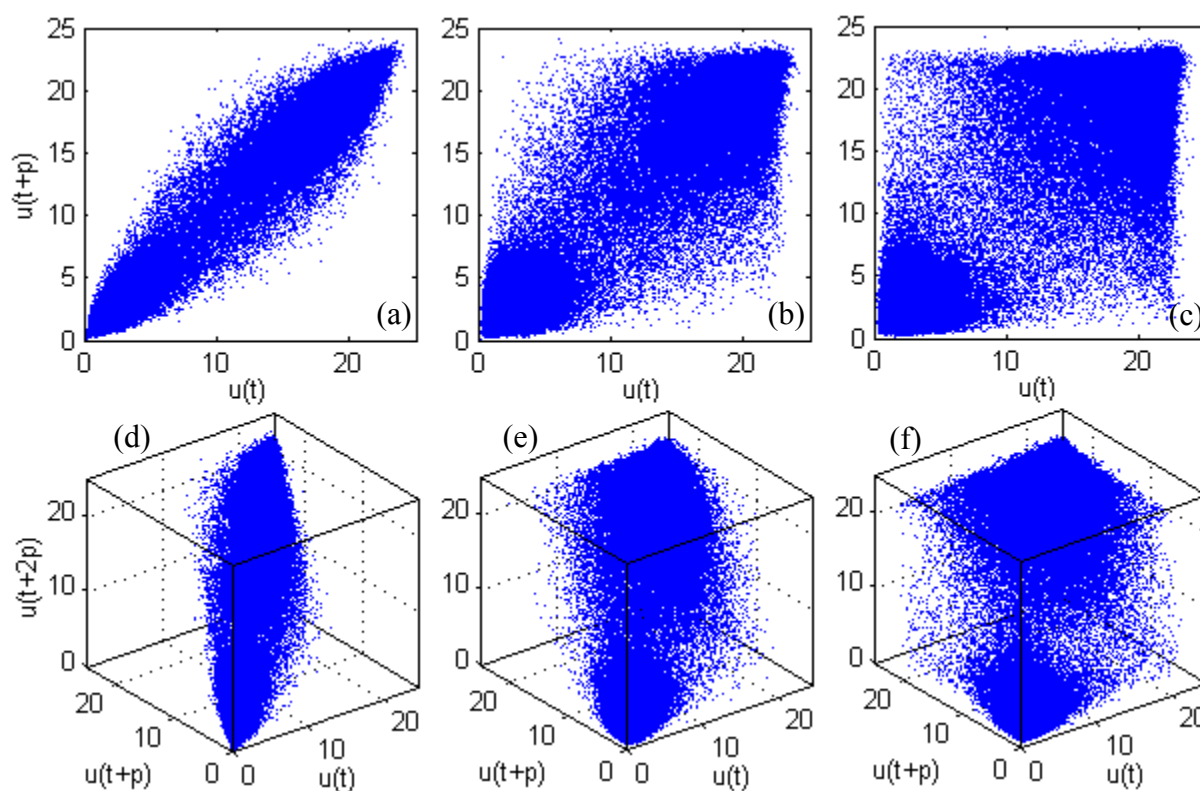


Figura 3.28 – Reconstruções do espaço de estados para o sinal de velocidade axial. 2D: (a) $p = 0,001s$, (b) $0,005s$ e (c) $0,01s$. 3D: (d) $p = 0,001s$, (e) $0,005s$ e (f) $0,01s$.

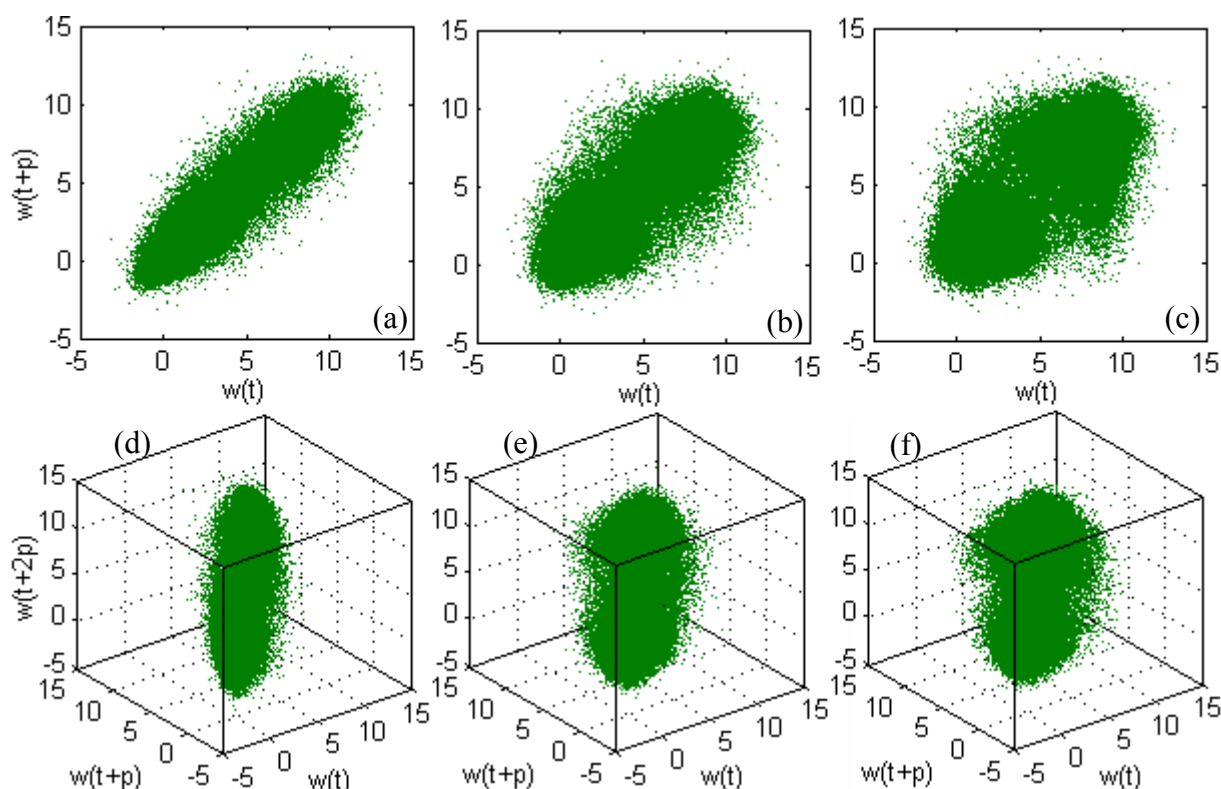


Figura 3.29 – Reconstruções do espaço de estados para o sinal de velocidade transversal. 2D: (a) $p = 0,001s$, (b) $0,005s$ e (c) $0,01s$. 3D: (d) $p = 0,001s$, (e) $0,005s$ e (f) $0,01s$.

O percentual de falsos vizinhos dos dados foi calculado para as dimensões de 1 a 20, para uma distância crítica de $L_c = 15$ e um limite crítico de $A_c = 2$ e os resultados são apresentados na Fig. 3.30. Acima da décima primeira dimensão não há falsos vizinhos para o sinal de velocidade axial (Fig. 3.30a). Para o sinal de velocidade transversal não há falsos vizinhos acima da sétima dimensão (Fig. 3.30b). Contudo, já acima da dimensão 5 o número de falsos vizinhos é pequeno (2,57% para o sinal de velocidade axial e 1,36 % para o sinal de velocidade transversal), sendo esta uma dimensão de imersão adequada. O resultado de um percentual de falsos vizinhos tendendo a zero somente para altas dimensões de imersão pode indicar a presença de ruído na série temporal.

Os espectros de potências dos sinais de velocidade são exibidos na Fig. 3.31 e mostram um pequeno pico de frequência em 78,13 Hz para ambos os sinais de velocidade. Este valor é utilizado na determinação do período médio da série temporal para efeitos de cálculo dos próximos vizinhos ($T = 1/f \approx 0,013s$), que corresponde a aproximadamente 13 pontos de dados. Conforme a literatura, o cálculo do período médio é realizado

contabilizando-se o valor médio das séries temporais, diferentemente dos espectros de potência utilizados na análise de turbulência.

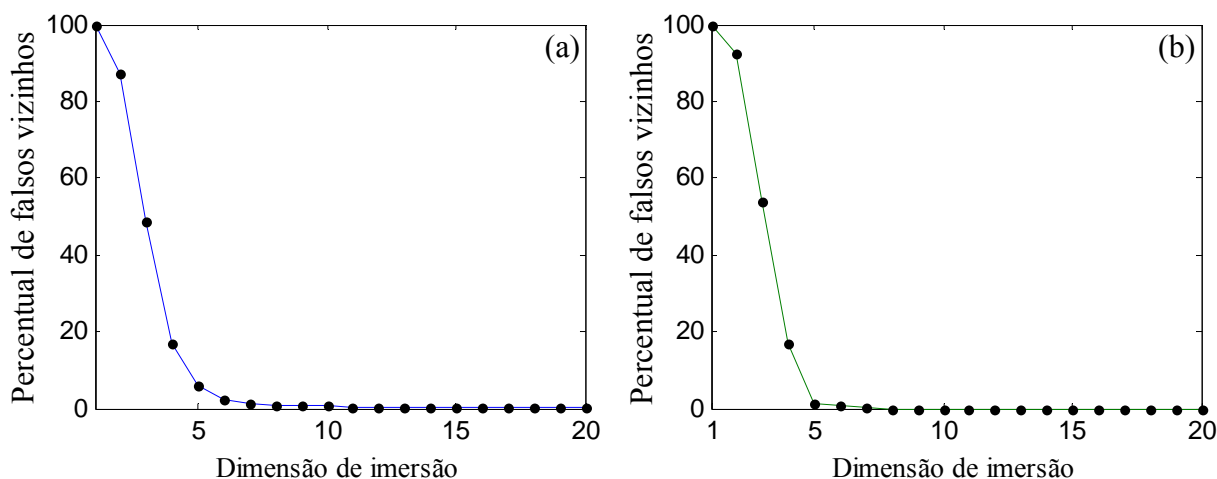


Figura 3.30 – Percentual de falsos vizinhos em função da dimensão de imersão.

(a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.

O maior expoente de Lyapunov foi calculado com o algoritmo proposto por Rosenstein et al., 1993. Os seguintes parâmetros foram utilizados nos cálculos: dimensões de imersão de $m = 3, 5, 7$ e 10 , período médio da série temporal $T = 0,013$ s e 10000 iterações. Os resultados são exibidos na Fig. 3.32, para o qual o maior expoente de Lyapunov foi calculado em $0,8598 \pm 0,0279$ para o sinal de velocidade axial e $0,8219 \pm 0,0401$ para o sinal de velocidade transversal. Estes valores são obtidos da média do resultado para as quatro dimensões de imersão calculadas. Os valores positivos do maior expoente de Lyapunov encontrados indicam a presença de comportamento caótico das séries de dados experimentais. A dificuldade para a realização desta análise é a correta localização e determinação das regiões lineares a serem utilizadas nas regressões lineares e consequente determinação dos λ_1 .

A análise desta série temporal demandou maior esforço computacional que as demais, devido ao tamanho das séries de dados ($N = 131072$ pontos). Utilizando um computador pessoal (PC) com processador Intel Core i7-2600 de 3,4 GHz, com 16 GB de memória RAM DDR3 e sistema operacional Windows 7 de 64 bits, o cálculo dos falsos vizinhos e do maior expoente de Lyapunov para cada dimensão de imersão demandaram 0,42 e 1,54 horas de cálculos, respectivamente. Assim, uma análise do comportamento do resultado em função do comprimento da série temporal de velocidade axial foi realizada. Um ponto foi retirado da

série temporal e os próximos três foram excluídos, sendo selecionado mais um ponto e excluídos os próximos três, até o final da série. Assim, no final deste processo, obtém-se uma série de tamanho reduzido (N_r), neste caso com $N_r = 32768$ pontos (também uma série diádica), amostrada a uma frequência de 142,85 Hz. Os resultados comparativos da análise dos falsos vizinhos e do maior expoente de Lyapunov mostram que o tamanho para estes valores do comprimento das séries não influencia significativamente nos resultados (Fig. 3.33). Por exemplo, a diferença no valor calculado de λ_1 é de 0,18 %.

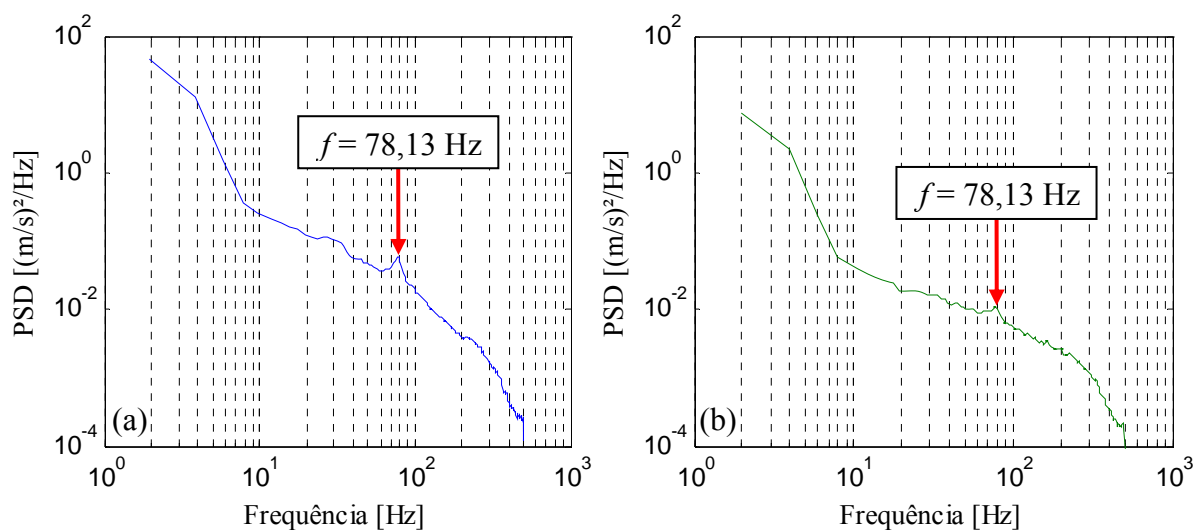


Figura 3.31 – Espectro de potências das séries temporais. (a) Velocidade axial.
(b) Velocidade transversal.

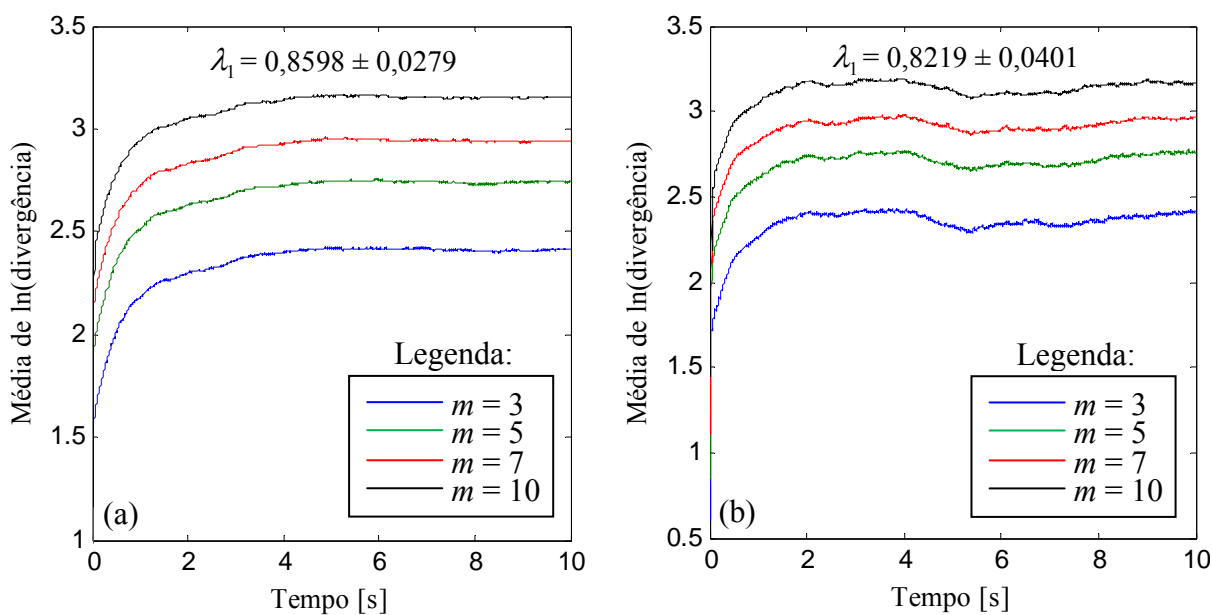


Figura 3.32 – Resultado do cálculo do maior expoente de Lyapunov das séries temporais.
(a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.

Desse modo, os cálculos seguintes foram realizados com séries de dados com o comprimento reduzido N_r , demandando 1,46 e 14,3 minutos de cálculos para os falsos vizinhos e o maior expoente de Lyapunov, respectivamente, gerando um ganho significativo no tempo de processamento.

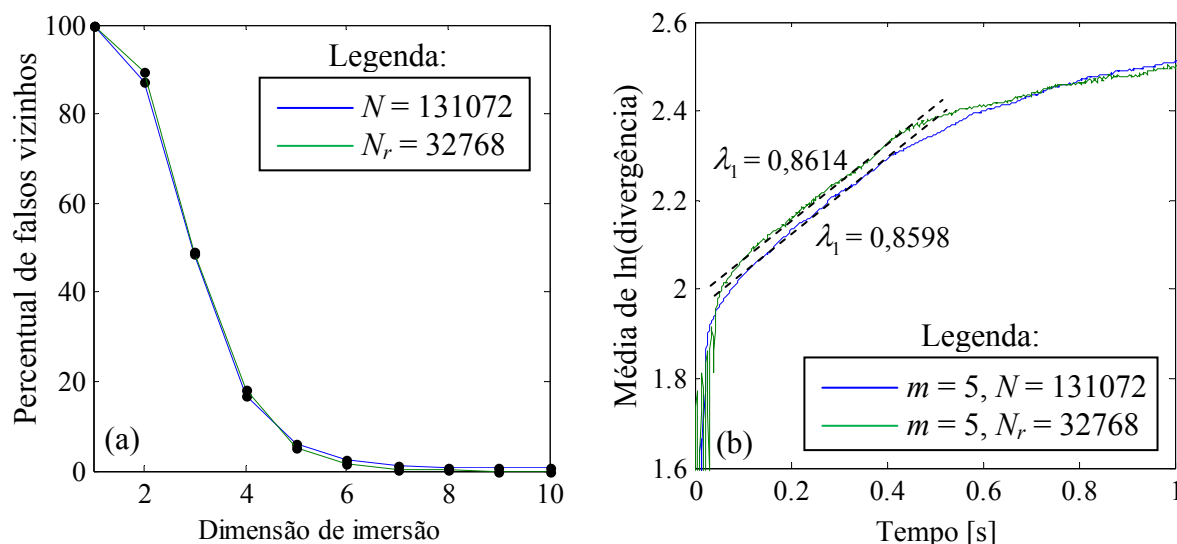


Figura 3.33 – Resultados comparativos da análise para séries de comprimento $N = 131072$ pontos e $N_r = 32768$ pontos. (a) Falsos vizinhos. (b) Região linear utilizada no cálculo do maior expoente de Lyapunov.

Uma análise semelhante àquela realizada com as séries temporais de velocidade axial e transversal com $N = 131072$ pontos é aplicada às séries de comprimento N_r filtradas por transformada discreta de ondaletas (TDO) com nível de reconstrução $n = 9$, e que fornece uma banda de frequências de 0 até 0,976 Hz (Fig. 3.34).

As funções coeficiente de autocorrelação destes sinais apresentam mínimos locais nos pontos 8408, ou seja, no instante de tempo de 14,7 segundos (Fig. 3.35).

Da reconstrução do espaço de estados (Fig. 3.36), observa-se que o atrator preenche grande parte do espaço, evidenciando que a escolha de $p = 14,7s$ não é adequada para a reconstrução do atrator.

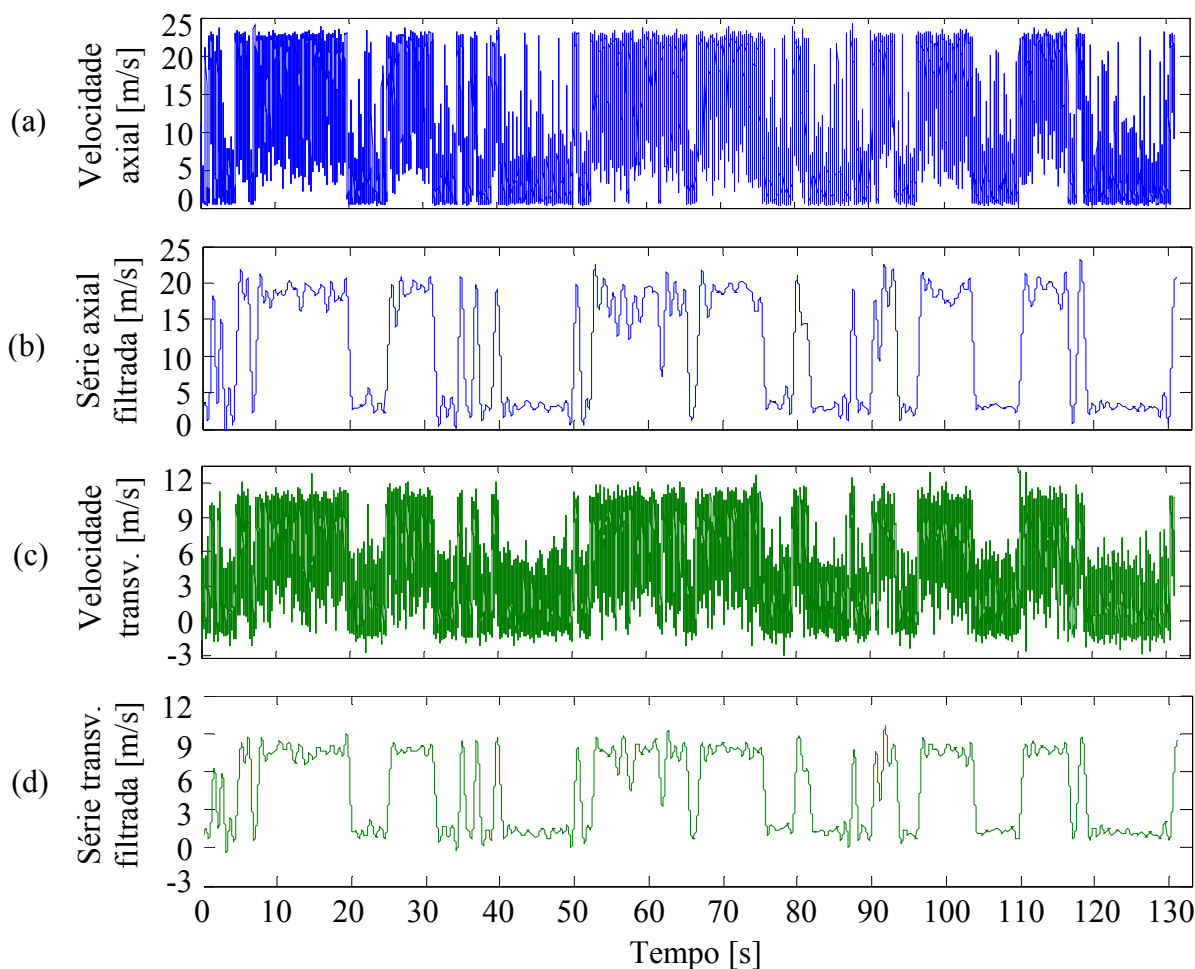


Figura 3.34 – Séries temporais de comprimento $N_r = 32768$. (a) Sinal original de velocidade axial. (b) Série axial filtrada por TDO com $n = 9$. (c) Sinal original de velocidade transversal. (d) Série transversal filtrada por TDO com $n = 9$.

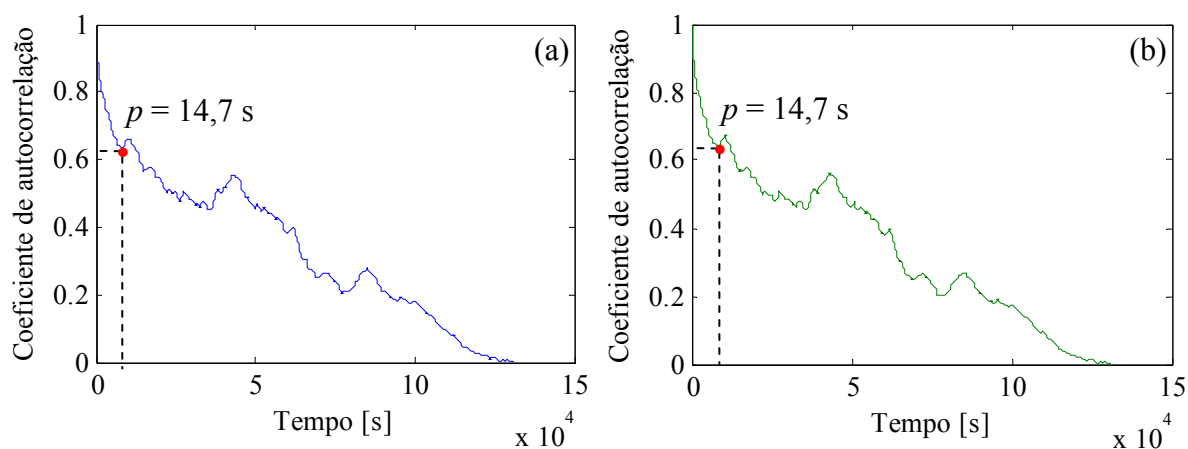


Figura 3.35 – Função coeficiente de autocorrelação dos sinais filtrados por transformada discreta de ondaletas com $n = 9$. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.

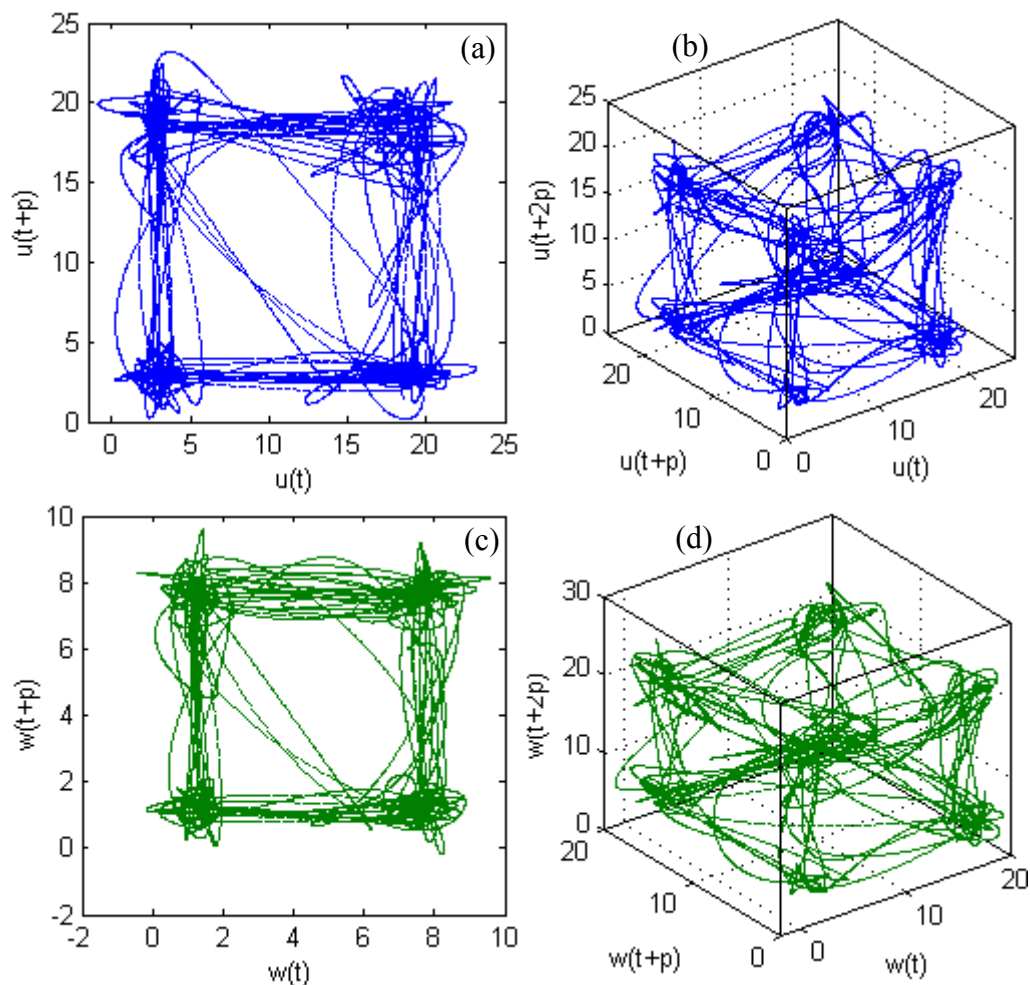


Figura 3.36 – Reconstruções do espaço de estados para os sinais temporais filtrados por TDO com $p = 8,396s$. (a) Reconstrução 2D axial. (b) Reconstrução 3D axial. (c) Reconstrução 2D transversal. (d) Reconstrução 3D transversal.

Semelhantemente ao feito para a série temporal original, com $N = 131072$, foi escolhido um valor do passo de reconstrução alternativo, neste caso de 80 pontos ($p = 0,14s$), fornecendo os espaços de estado exibidos na Fig. 3.37. Observa-se que os atratores reconstruídos apresentam uma dinâmica complexa, porém organizada, não saturando completamente o espaço de reconstrução. Assim, o passo p escolhido mostra-se adequado à tarefa de bem descrever a dinâmica do sistema biestável. Para evidenciar a riqueza de detalhes da estrutura dos atratores reconstruídos, a Fig. 3.38 exibe uma ampliação da Fig. 3.37b, mostrando que, além de um número suficiente de pontos para descrever a trajetória no espaço de estados e toda sua estrutura fina, o atrator executa vários ciclos entre as regiões de menor e de maior velocidade, relacionados com os modos de esteira larga e estreita do escoamento, respectivamente.

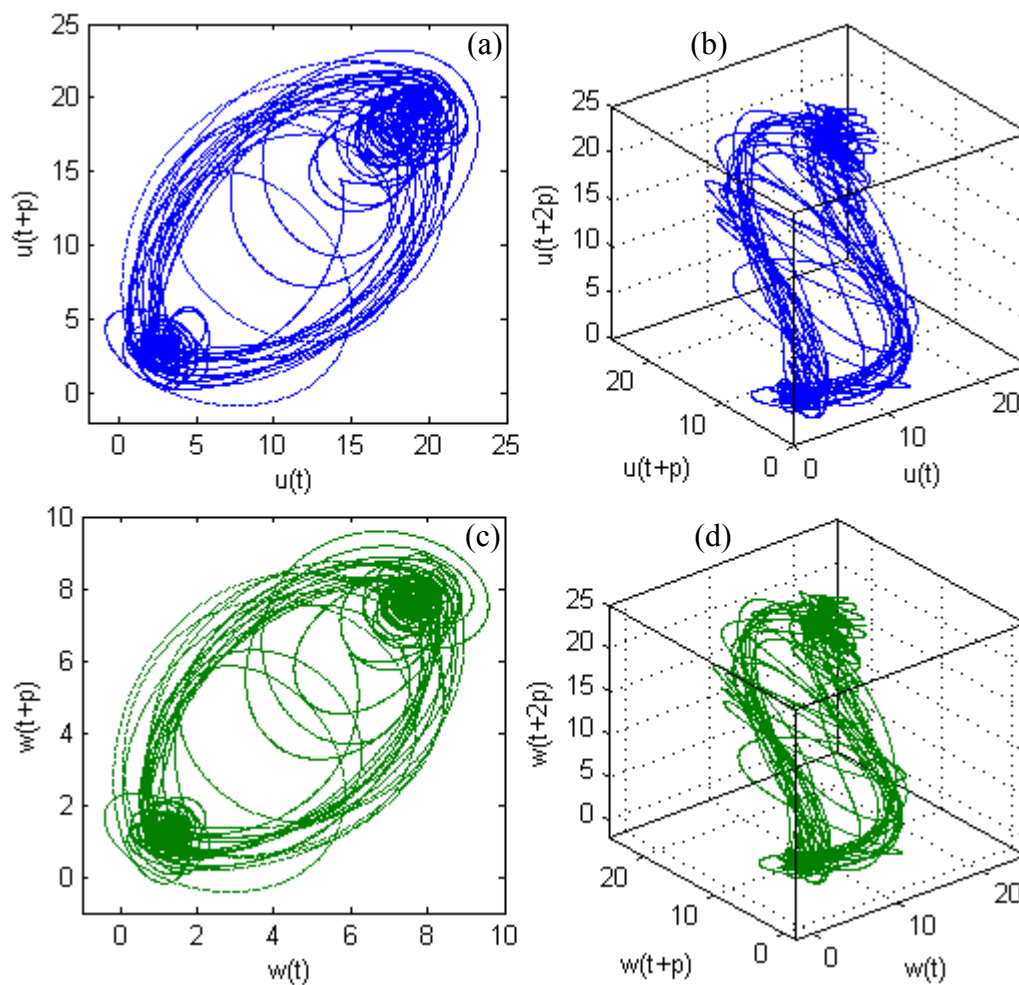


Figura 3.37 – Reconstruções do espaço de estados para os sinais temporais filtrados por TDO com $p = 0,14$ s. (a) Reconstrução 2D axial. (b) Reconstrução 3D axial. (c) Reconstrução 2D transversal. (d) Reconstrução 3D transversal.

O percentual de falsos vizinhos das séries filtradas foi calculado para as dimensões de 1 a 10 para os parâmetros $L_c = 15$ e $A_c = 2$ (Fig. 3.39). Acima da quinta dimensão não há falsos vizinhos. Porém, já acima da dimensão três o número de falsos vizinhos é pequeno, na ordem de 1,4 % para ambos os casos, sendo esta uma dimensão de imersão adequada.

Os espectros de potências das séries filtradas mostram um pequeno pico de frequência em 10,94 Hz para as duas componentes de velocidade (Fig. 3.40). Assim, o período médio da série temporal corresponde a de aproximadamente 13 pontos de dados. A diferença entre os valores dos picos de frequência das Figs. 3.31 e 3.40 são devido ao processo de subamostragem do sinal filtrado.

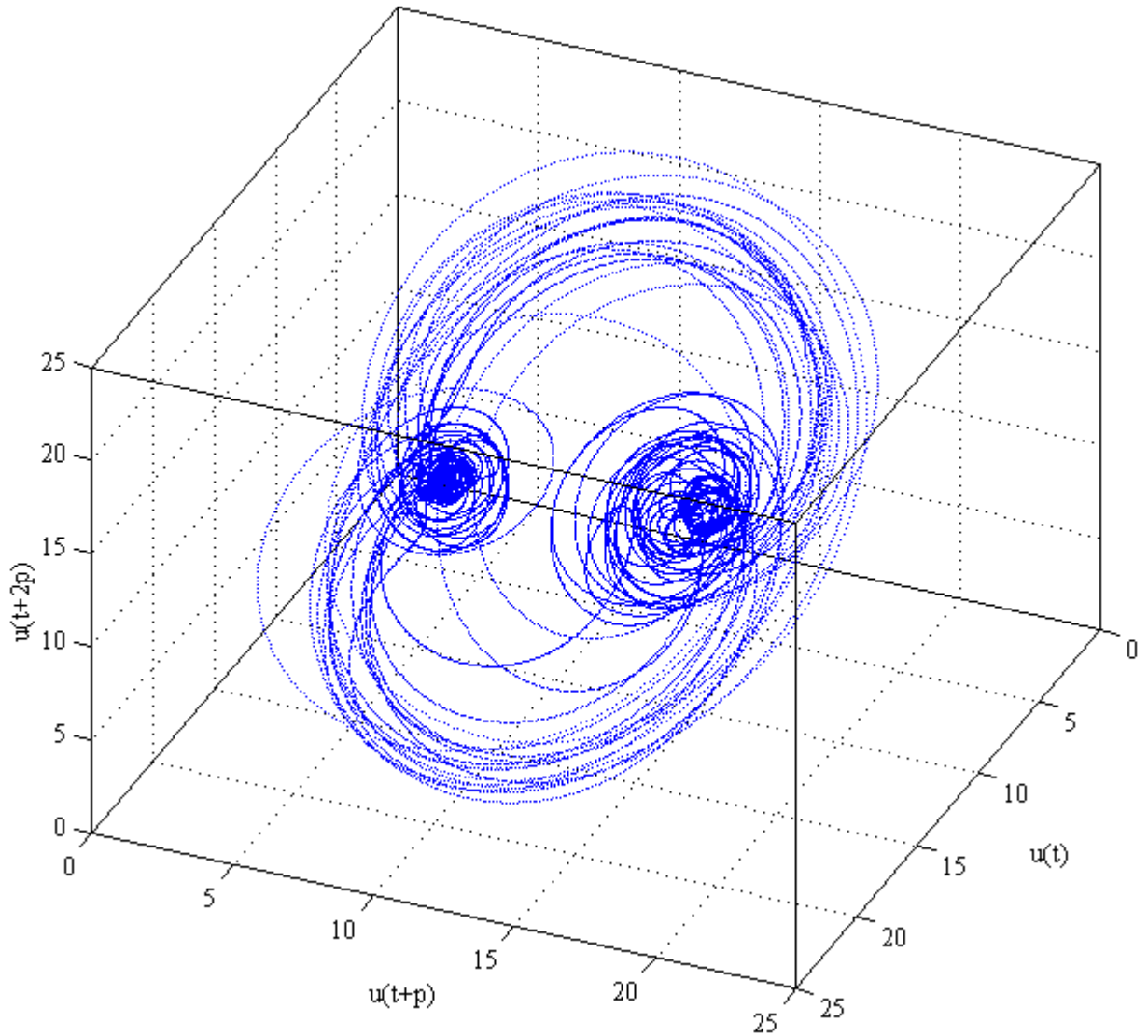


Figura 3.38 – Ampliação da reconstrução do espaço de estados tridimensional para o sinal temporal filtrado de velocidade axial com $p = 0,14$ s.

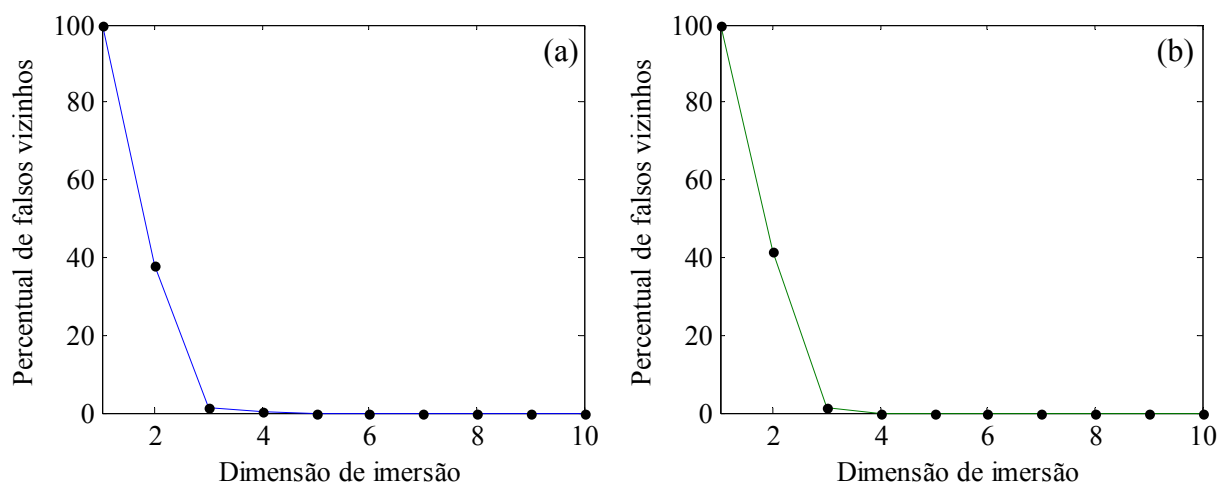


Figura 3.39 – Percentual de falsos vizinhos em função da dimensão de imersão para as séries filtradas. (a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.

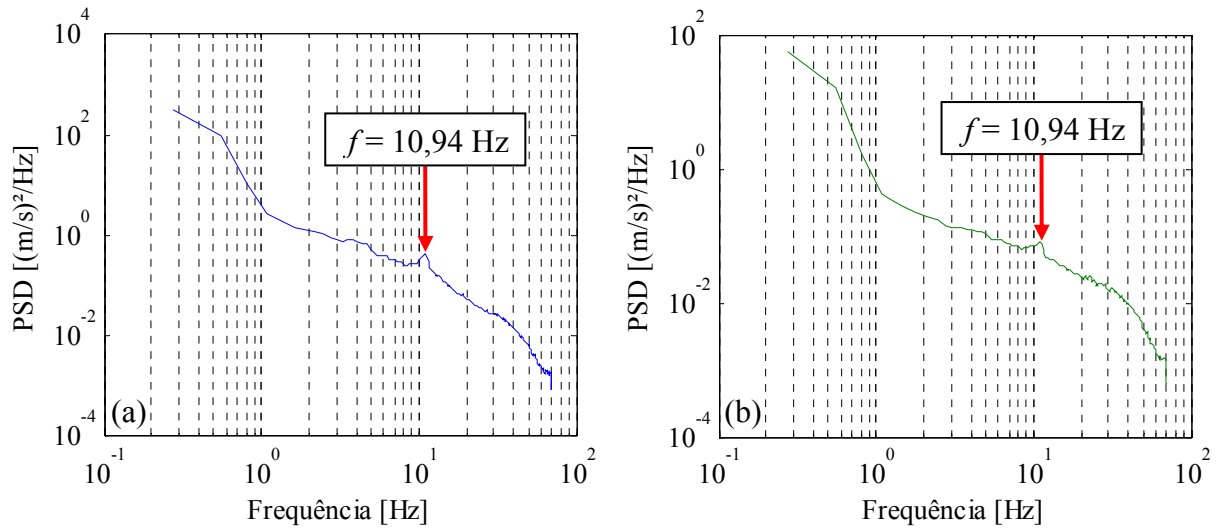


Figura 3.40 – Espectro de potências para as séries filtradas. (a) Velocidade axial.
(b) Velocidade transversal.

O maior expoente de Lyapunov foi calculado para as dimensões de imersão de $m = 3$, 5, 7 e 10, período médio da série temporal $T = 0,091$ s e 10000 iterações (Fig. 3.41). O maior expoente de Lyapunov foi calculado em $0,2548 \pm 0,0352$ para a série filtrada de velocidade axial e $0,2441 \pm 0,0337$ para a série filtrada de velocidade transversal, e indicam a presença de comportamento caótico dos dados experimentais. De modo geral, o valor do maior expoente de Lyapunov dos sinais filtrados é de cerca de 29,6 % do valor apresentado para os sinais originais de velocidade do escoamento.

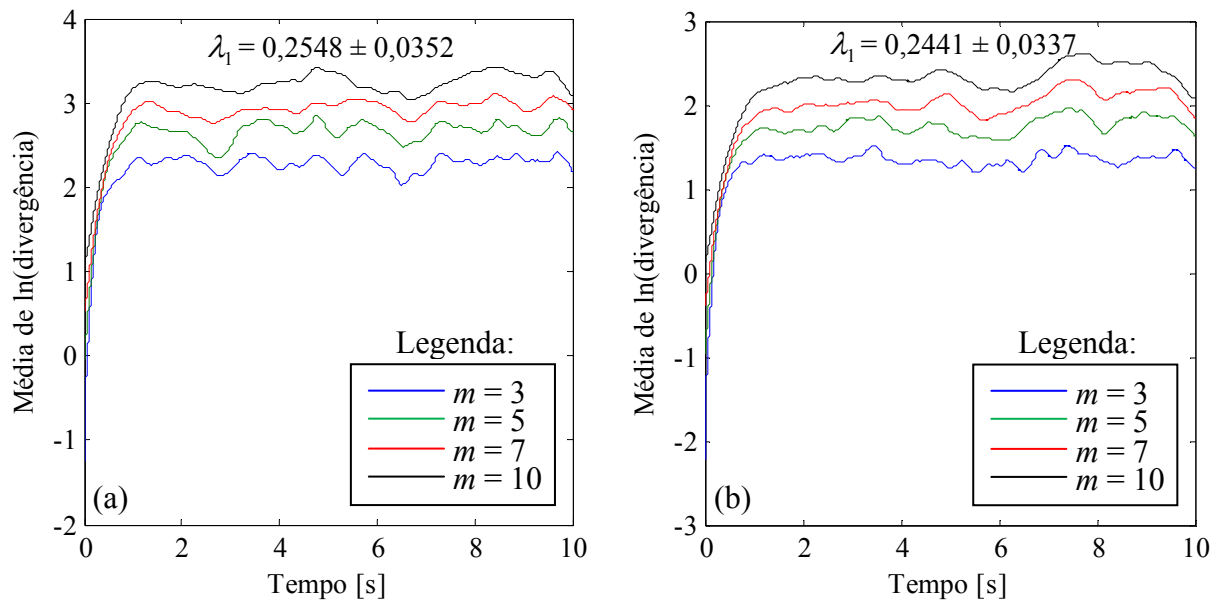


Figura 3.41 – Resultado do cálculo do maior expoente de Lyapunov para as séries filtradas.
(a) Velocidade axial. (b) Velocidade transversal.

3.5 Dinâmica simbólica

O resultado da transformação do sinal de velocidade axial em alfabeto binário apresenta diversas trocas entre os estados 0 e 1, referentes aos dois modos do escoamento (Fig. 3.42a). Para esta análise, apenas a flutuação do sinal é utilizada, ou seja, o particionamento é realizado em torno do valor 0,5. O gráfico aparece de modo semelhante a um código de barras, onde os intervalos preenchidos representam as diversas trocas em pequenos intervalos de tempo entre os estados 0 e 1, e os intervalos em branco são onde efetivamente não ocorrem trocas de direção do escoamento. Comportamento semelhante é observado na componente transversal de velocidade (Fig. 3.42b). Já o gráfico da transformação do ângulo de desvio apresenta tantas variações de estado que não se observam intervalos em branco. Isto se deve ao fato desta série temporal (Fig. 3.42c) originalmente possuir flutuações muito próximas de zero. A Fig. 3.43 apresenta uma ampliação dos 2 primeiros segundos da Fig. 3.42, de onde se observam as variações entre os estados 0 e 1 com maior clareza. Para acessar as informações dos modos do escoamento via dinâmica simbólica são escolhidas sequências simbólicas com comprimento que varia de 1 a 6, e os resultados das frequências relativas das séries temporais são exibidos na Fig. 3.44.

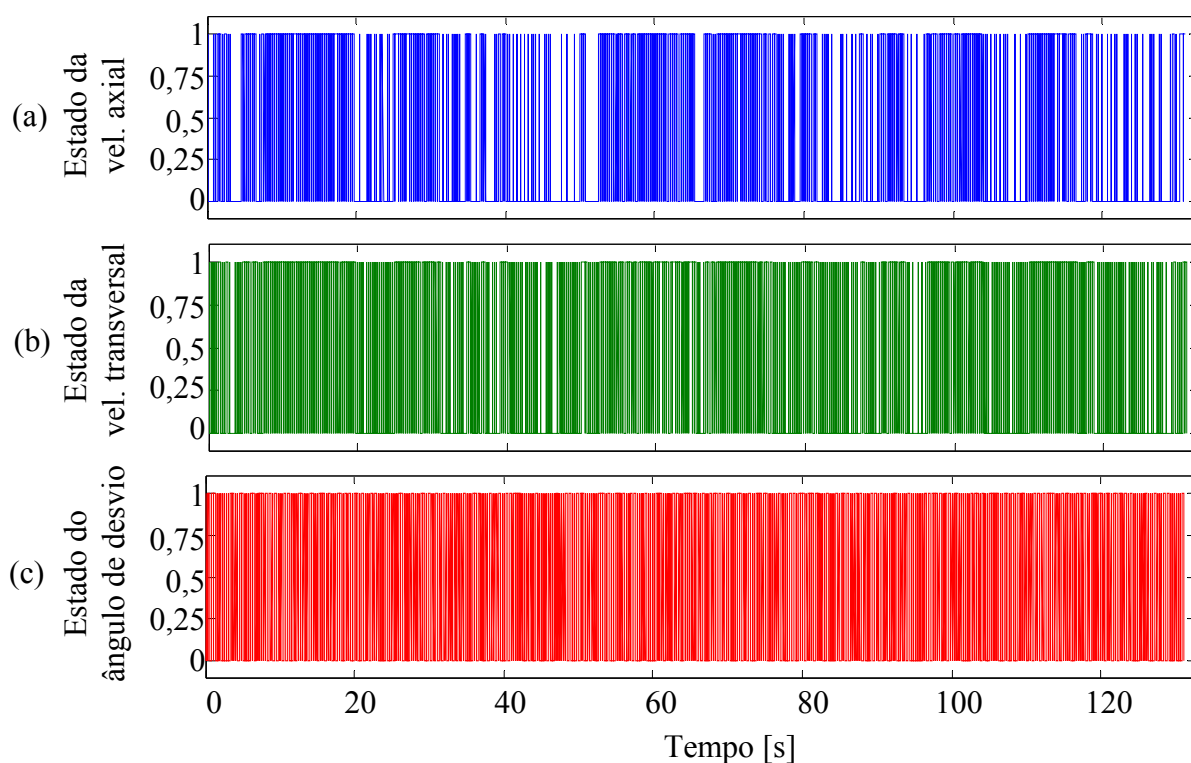


Figura 3.42 – Transformação das séries temporais em alfabeto binário:

(a) velocidade axial, (b) velocidade transversal e (c) ângulo de desvio do escoamento.

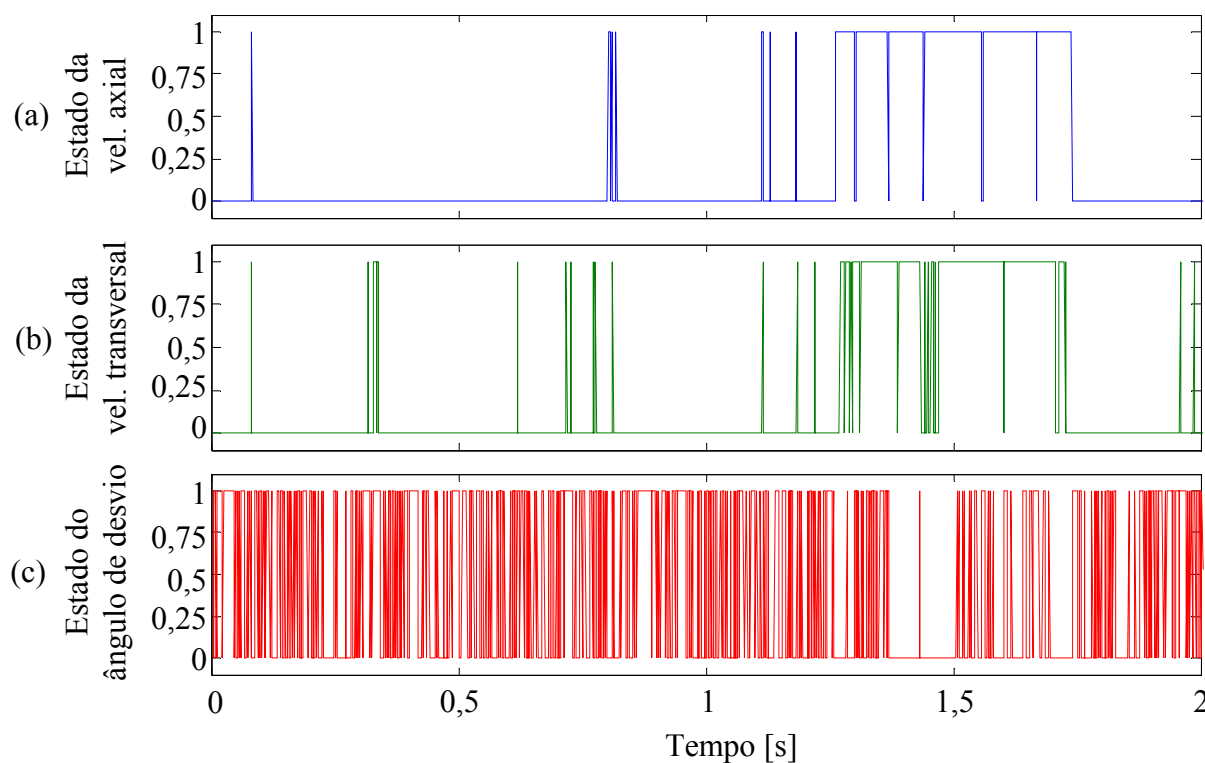


Figura 3.43 – Ampliação dos 2 primeiros segundos da Fig. 3.42:

(a) velocidade axial, (b) velocidade transversal e (c) ângulo de desvio do escoamento.

Do particionamento escolhido na Fig. 3.44, em torno do valor 0,5, é evidente a concentração em torno de dois valores, referentes aos dois modos do escoamento. Mesmo os resultados com o ângulo de desvio do escoamento, que apresentam uma grande variação do sinal particionado em torno de zero, possuem concentrações nas palavras dos extremos do alfabeto binário, correspondendo aos modos de esteira larga (palavras 0, 00, 000, 0000, 00000 e 000000) e estreita (palavras 1, 11, 111, 1111, 11111 e 111111), respectivamente. Isto mostra que a probabilidade de ocorrência de outros modos do escoamento é menor que os dois modos apresentados (modos 1 e 2). Contudo, a análise de outros particionamentos pode prover novas informações a respeito do fenômeno.

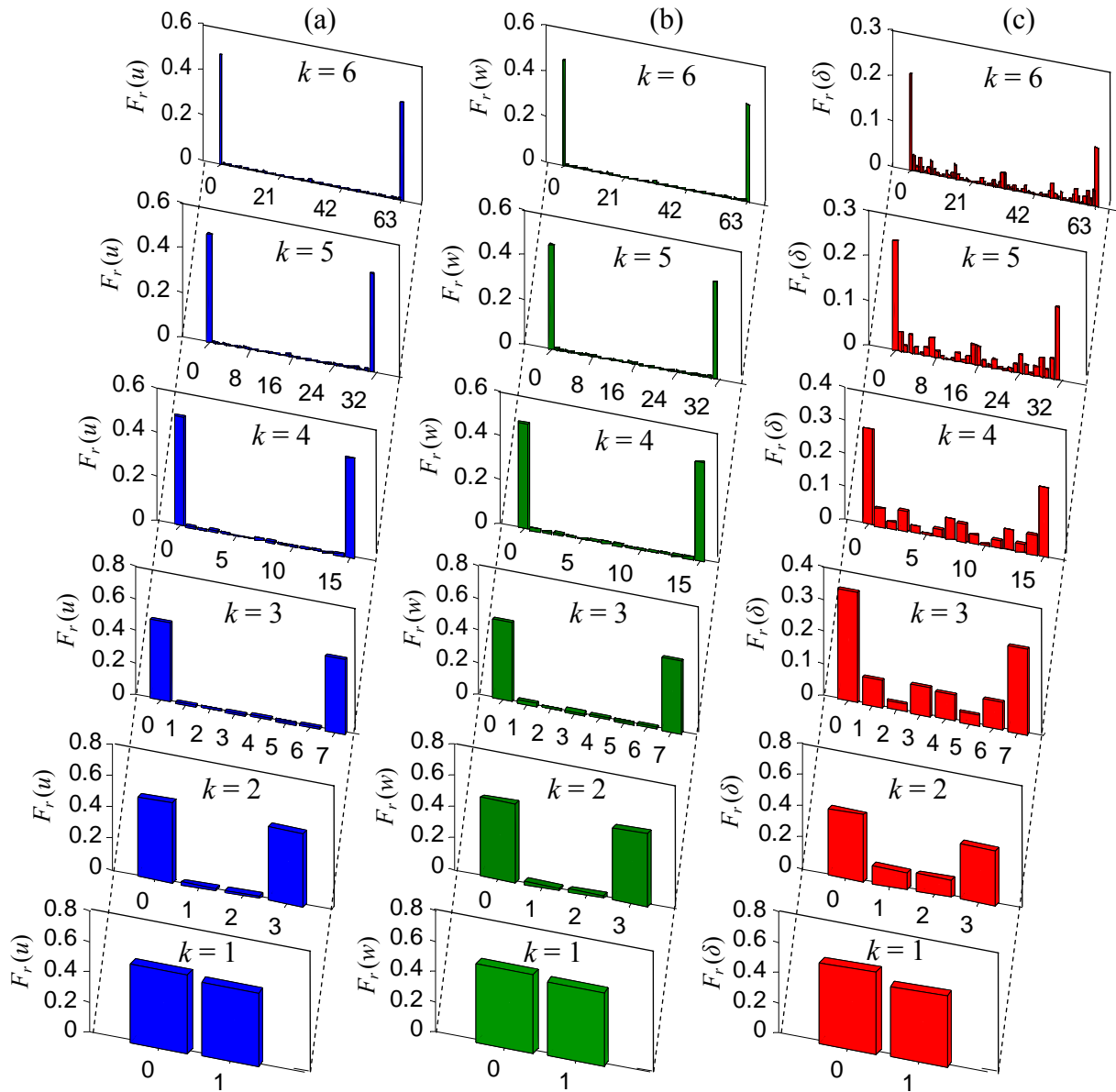


Figura 3.44 – Frequências relativas das séries temporais, extraindo os valores médios, para diversos comprimentos da sequência simbólica k : (a) velocidade axial, (b) velocidade transversal e (c) ângulo de desvio do escoamento.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, diferentes técnicas são empregadas na análise de séries temporais experimentais oriundas de um fenômeno altamente não-estacionário: a biestabilidade. Este fenômeno tem sido relatado na literatura como inteiramente randômico, não possuindo um período natural definido. As diferentes técnicas empregadas visam obter condições para melhor entender o comportamento não-estacionário do fenômeno, onde as abordagens clássicas não permitem uma descrição completa da biestabilidade.

A metodologia empregada consistiu na obtenção de séries temporais de velocidade utilizando um canal aerodinâmico e a técnica de anemometria de fio quente. Estas séries experimentais foram utilizadas como dados de entrada na análise da variação das funções densidade de probabilidade ao longo do tempo de aquisição dos dados, em transformadas de ondaletas e em um modelo de mistura finita. Na aplicação da metodologia proposta, foi estudada a geometria simplificada de dois tubos dispostos lado a lado, com razão de espaçamento $p/d=1,26$, velocidade de referência de 14 m/s e número de Reynolds de $2,28 \times 10^4$.

Modelos de mistura finita são ferramentas eficientes na classificação e análise de dados, e são aplicados na tarefa de realizar uma inferência estatística sobre os mesmos. Neste trabalho foi aplicada uma abordagem robusta, utilizando uma função densidade de probabilidade (PDF) que possui suporte à assimetria. Os resultados da análise das séries experimentais estudadas mostram que o escoamento, quando se estabelece em um de seus modos, apresenta características probabilísticas bem preservadas ao longo do tempo em que este modo está estabelecido, com variação máxima de 0,31 m/s para o modo de esteira estreita e 0,32 m/s para o modo de esteira larga. É observado que o fenômeno da biestabilidade se manifesta de acordo com uma PDF t de *Student* assimétrica, tanto qualitativamente quanto quantitativamente.

A definição de uma pseudofrequência que representa o fenômeno da biestabilidade pode ser especificada através da reconstrução por transformada discreta de ondaletas e pela análise da variação temporal das PDF das componentes de velocidade do escoamento. Para o caso estudado, a pseudofrequência do fenômeno é de aproximadamente 0,15 Hz.

As transformadas de ondaletas se mostram ferramentas úteis na análise deste fenômeno não-estacionário. O uso da transformada discreta de ondaletas auxilia na análise dos dados por intermédio da reconstrução até uma banda específica de frequência, servindo como filtro passa-baixa. Dos resultados com este tipo de transformada, pode-se observar a

variação das séries temporais com efeito reduzido de ruído. Através da transformada contínua de ondaletas o conteúdo de energia dos sinais pode ser analisado. Os resultados mostram um aumento da energia das séries de velocidade nos instantes de tempo em que a velocidade média é mais alta, com um relativo espalhamento das frequências. Quando o escoamento da fenda muda de direção, para o patamar de velocidade média mais baixa, há uma diminuição do conteúdo de energia do sinal acompanhado por uma maior concentração da faixa de frequências e também menores valores de flutuação. Este comportamento indica que a esteira larga de vórtices possui uma concentração maior em frequência, porém com menor energia total. O espectrograma do ângulo de desvio do escoamento apresenta um comportamento oposto, onde o conteúdo de maior energia é distribuído ao longo de uma grande faixa de frequência. Esta característica pode estar relacionada com a maior variação do sinal nos instantes em que a sonda está medindo a esteira larga de vórtices. A tendência do escoamento da fenda é se alinhar na direção axial do canal à medida que a velocidade aumenta, diminuindo a variação do sinal. Este comportamento também foi observado por Olinto, 2005. O uso em conjunto das transformadas discreta e contínua de ondaletas em um único gráfico sobreposto auxilia muito na identificação de comportamentos transitórios de energia, pois é facilitada a localização em ambas as escalas de tempo, frequência e energia.

Um modelo de duplo poço de energia foi utilizado para descrever o comportamento dos sinais de velocidade. Neste modelo, dois poços de energia referentes aos modos de esteira larga e estreita são separados por uma barreira, sendo baseado na PDF de cada componente. De um modo geral, o comportamento dos sinais de velocidade é bem representado qualitativamente pelo modelo.

A análise bivariada dos sinais de velocidade mostra a relação entre as PDF no plano de medição e permite uma visão mais global do fenômeno do que com os modelos anteriores. Resultados da visualização de escoamento para a geometria estudada (De Paula, 2008) mostraram um comportamento predominantemente bidimensional do escoamento, o que justifica uma análise bivariada das PDF. Tanto as PDF quanto a reconstrução por transformada discreta de ondaletas para o caso bivariado mostram claramente a concentração de ocorrência do fenômeno em duas regiões bem definidas.

No estudo do fenômeno biestável podem ser aplicadas técnicas de sistemas dinâmicos baseados em análise de séries temporais. As técnicas de reconstrução do espaço de estados têm sido extensivamente utilizadas quando se têm disponíveis apenas séries temporais. Os expoentes de Lyapunov fornecem uma caracterização tanto qualitativa quanto quantitativa do comportamento caótico de sistemas não lineares, sendo que um expoente de Lyapunov

positivo é indicativo de caos. Neste aspecto, o presente trabalho apresenta a reconstrução do espaço de estados tanto das séries temporais de velocidade axial e transversal do escoamento, quanto de séries filtradas por transformada discreta de ondaletas. Para se obter a defasagem utilizada na reconstrução do espaço de estado foi empregada a função de autocorrelação dos sinais, muito embora nos casos de elevado ruído estes valores não sejam representativos para uma correta reconstrução. A dimensão de imersão do atrator foi determinada através da análise do percentual de falsos vizinhos, dando um indicativo do número de equações necessárias para descrever o sistema. O maior expoente de Lyapunov é calculado para identificar o comportamento caótico das séries temporais experimentais. O método de Rosenstein foi utilizado nesta etapa, o qual é rápido e leva em consideração todos os dados disponíveis. De fácil implementação, o método é robusto em relação a mudanças na maioria dos parâmetros de imersão. As séries temporais analisadas apresentam os maiores expoentes de Lyapunov positivos, o que é indicio de comportamento caótico. Após a filtragem das séries por transformada discreta de ondaletas, observa-se a riqueza de detalhes do atrator reconstruído, mostrando que sua trajetória no espaço de estados é complexa e seu padrão é rico em detalhes. Para os sinais filtrados, o maior expoente de Lyapunov é menor do que para o caso das séries temporais originais. Este fato deve-se à redução do ruído produzido pela aplicação da transformada de ondaletas. De modo geral, o valor do maior expoente de Lyapunov dos sinais filtrados é de cerca de 29,6 % do valor apresentado para os sinais originais de velocidade do escoamento.

Na teoria do caos, a aplicação de dinâmica simbólica possibilita a identificação de padrões do escoamento, onde as séries temporais são transformadas de acordo com o alfabeto binário. O comportamento dos histogramas com representação decimal mostra que a concentração dos modos do escoamento é marcante, em valores bem definidos.

Observa-se que o escoamento ao redor da geometria estudada apresenta propriedades estatísticas bem preservadas ao longo do tempo e que os resultados obtidos neste trabalho com as diversas ferramentas propostas sugerem que seu comportamento não seja classificado como inteiramente randômico, como o relatado na literatura, mas com características caóticas.

4.1 Sugestões para trabalhos futuros

No presente trabalho algumas características estatísticas do fenômeno biestável foram estudadas. Sugere-se que uma metodologia semelhante seja aplicada em outras configurações

de bancos de tubos, alterando parâmetros como razões de espaçamento, diâmetros e bancos de tubos completos, ou seja, formado por diversas fileiras de tubos.

Um método consolidado para a determinação da verossimilhança da função densidade de probabilidade t de *Student* assimétrica foi utilizado. Contudo, outros métodos de inferência e funções de ajuste podem ser estudados com o intuito de melhor se ajustar aos dados medidos em laboratório.

Torna-se interessante uma comparação dos resultados obtidos com o modelo de mistura empregado para diferentes séries experimentais medidas em laboratório. Tal comparação poderia fornecer informações adicionais sobre a variação dos parâmetros e do formato das funções densidade de probabilidade sob diferentes condições.

O modelo de mistura empregado também pode ser aplicado para uma mesma série temporal, porém, variando o tamanho da amostragem, aumentando ou diminuindo os blocos de dados analisados. Tal técnica permite analisar a manutenção dos parâmetros das funções densidade de probabilidade no tempo frente ao tamanho da informação.

Além disso, o cálculo da entropia de Kolmogorov-Sinai pode fornecer informações sobre a taxa média de criação de informação no sistema ou a taxa média de perda de informação do observador.

O método de Rosenstein, empregado no cálculo do maior expoente de Lyapunov, é robusto em relação a mudanças na maioria dos parâmetros de imersão. Outros métodos existem e podem fornecer informações dos maiores expoentes de Lyapunov. Assim, um estudo destes métodos aplicados a sinais biestáveis pode ser de grande valia no estudo do comportamento deste fenômeno.

Adicionalmente, o estudo topológico do atrator reconstruído pode ser realizado através da implementação mais apurada de dinâmica simbólica em uma seção de Poincaré conveniente, sendo que este tipo de estudo visa detectar algum tipo de estrutura no atrator.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abarbanel, H. D. I.; Brown, R.; Sidorowich, J. J. e Tsimring, L. S. The analysis of observed chaotic data in physical systems, **Reviews of Modern Physics**, v. 65, p. 1331-1392. 1993.

Akaike, H. A new look at the statistical model identification, **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, p. 716-723. 1974.

Alam, M. M.; Moriya, M.; Sakamoto, H. Aerodynamic characteristics of two side-by-side circular cylinders and application of wavelet analysis on the switching phenomenon, **Journal of Fluids and Structures**, v. 18, p. 325-346. 2003.

Alam, M. M.; Sakamoto, H. Investigation of Strouhal frequencies of two staggered bluff bodies and detection of multistable flow by wavelets, **Journal of Fluids and Structures**, v. 20, p. 425-449. 2005.

Alam, M. M.; Zhou, Y. Flow around two side-by-side closely spaced circular cylinders, **Journal of Fluids and Structures**, v. 23, p. 799-805. 2007.

Azzalini, A. A class of distributions which includes the normal ones, **Scandinavian Journal of Statistics**, v. 12, p. 171-178. 1985.

Azzalini, A. Further results on a class of distributions which includes the normal ones, **Statistica**, v. 46, p. 199-208. 1986.

Azzalini, A.; Dalla Valle, A. The multivariate skew normal distribution. **Biometrika**, v. 83, p. 715-726. 1996.

Azzalini, A.; Capitanio, A. Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution, **Journal of the Royal Statistical Society, Series: B**, v. 61, p. 579-602. 1999.

Azzalini, A. **Statistical inference: based on the likelihood**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton. 2002.

Azzalini, A.; Capitanio, A. Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t -distribution, **Journal of the Royal Statistical Society, B**, v. 65, Part 2, p. 367-389. 2003.

Azzalini, A.; Genton, M.G. Robust Likelihood Methods Based on the Skew-t and Related Distributions, **International Statistical Review**, v. 76, Issue 1, p. 106-129. 2008.

Basso, R. M.; Lachos, V. H.; Cabral, C. R. B.; Ghoshc, P. Robust mixture modeling based on scale mixtures of skew-normal distributions, **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 54, p. 2926-2941. 2010.

Bearman, P. W.; Wadcock, A. J. The Interaction between a Pair of Circular Cylinders Normal to a Stream, **Journal of Fluid Mechanics**, v. 61, Part 3, p. 499-511. 1973.

Bendat, J. S.; Piersol, A. G. **Random data: analysis and measurement procedures**, Second Edition, Wiley – Interscience, New York. 1986.

Binder, K.; Heermann, D. W. **Monte Carlo simulation in statistical physics: an introduction**, Springer Series in Solid-State Sciences, Heidelberg. 2002.

Blevins, R. D. **Flow-induced vibration**, Second Edition, Van Nostrand Reinhold, New York. 1990.

Booth, J. G.; Hobert, J. P. Maximizing generalized linear mixed model likelihoods with an automated Monte Carlo EM algorithm, **Journal of the Royal Statistical Society: Series B**, v. 61, Part 1, p. 265-285. 1999.

Buzug, T.; Reimers, T.; Pfister, G. Optimal reconstruction of strange attractors from purely geometrical arguments, **Europhysics Letters**, v. 13, p. 605-610. 1990.

Brida, J. G.; Punzo, L. F. Symbolic time series analysis and dynamic regimes, **Structural Change and Economic Dynamics**, v. 14, p. 159-183. 2003.

Brown R.; Bryant, P.; Abarbanel, H. D. I. Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series, **Physical Review A**, v. 43, p. 2787-2806. 1991.

Chang, H. H.; Oh, P. Y.; Ingber, D. E.; Huang, S. Multistable and multistep dynamics in neutrophil differentiation, **BMC Cell Biology**, v. 7, No. 11, p. 1-12. 2006.

Cordeiro, G. M. **Introdução à teoria da verossimilhança**, UFRJ, Rio de Janeiro. 1992.

Daw, C. S.; Finney, C. E. A.; Tracy, E. R. A review of symbolic analysis of experimental data, **Review of Scientific Instruments**, v. 74, No. 2, p. 915-930. 2003.

De Paula, A. V. **Estudo sobre o fenômeno da biestabilidade de escoamentos turbulentos em bancos de tubos de arranjo triangular**, Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, Porto Alegre, RS. 2008.

Dempster, A. P.; Laird, N. M.; Rubin, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, **Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B**, v. 39, p. 1-38. 1977.

Dias Júnior, T.; Woiski, E. R. **Turbulência e Sistemas Dinâmicos** in: Mansur, S. S.; Vieira, E. D. R.; Silveira Neto, A. Editores, **Turbulência**, v. 7, p. 1-50, Rio de Janeiro: ABCM. 2010.

Ding, M.; Grebogi, C.; Ott, E.; Sauer, T.; Yorke, J. A. Estimating correlation dimension from a chaotic time series: when does plateau onset occur? **Physica D**, v. 69, p. 404-424. 1993.

Drubin, D. A.; Way, J. C.; Silver, P. A. Designing biological systems, **Genes & Development**, v. 21, p. 242-254. 2007.

Eckmann, J. P.; Ruelle, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors, **Reviews of Modern Physics**, v. 57, p. 617-656. 1985.

Eliason, S. R. **Maximum likelihood estimation: logic and practice**, Sage University Papers Series, Quantitative Applications in the Social Sciences, No. 07-096. 1993.

Evans, A. J. **Basic Digital Electronics - Digital system circuits and functions - How they work and how they are used**, Master Publishing, p. 188, Chicago. 1996.

Ferrara, N. F.; Prado, C. P. C. **Caos: Uma nova introdução**, Editora Edgar Blücher, São Paulo. 1999.

Fisher, R. A. On the mathematical foundations of theoretical statistics, **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, Series A, v. 222, p. 309-368. 1922.

Fraser, A. M.; Swinney, H. L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information, **Physical Review A**, v. 33, p. 1134-1140. 1986.

Freyer, F.; Aquino, K.; Robinson, P. A.; Ritter, P.; Breakspear, M. Bistability and Non-Gaussian Fluctuations in Spontaneous Cortical Activity, **The Journal of Neuroscience**, v.29, No. 26, p. 8512-8524. 2009.

Friedman, J. R; Patel, V.; Chen, W.; Tolpygo, S. K.; Lukens, J. E. Quantum superposition of distinct macroscopic states, Letters to Nature, **Nature**, v. 406, Number 6791, p. 43-46. 2000.

Grassberger, P.; Procaccia, I. Measuring the Strangeness of Strange Attractors, **Physica**, v. D9, p. 189-208. 1983.

Groover, L. K.; Weaver, D. S. 1978, Cross-flow induced vibrations in a tube bank - vortex shedding, **Journal of Sound and Vibration**, v. 59, p. 263-276. 1978.

Guillaume, D. W.; LaRue, J. C. Investigation of the flopping regime with two-, three- and four-cylinder arrays, **Experiments in Fluids**, v. 27, p. 145-156. 1999.

Hentschel, H. G. E.; Procaccia, I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, **Physica D**, v. 8, p. 435-444. 1983.

Ho, H.J.; Pyne, S.; Lin, T.I. Maximum likelihood inference for mixtures of skew Student-t-normal distributions through practical EM-type algorithms, **Statistics and Computing**, DOI: 10.1007/s11222-010-9225-9. 2011.

Hunt, F; Sullivan, F. Efficient algorithms for computing fractal dimensions, **Dimensions and Entropies in Chaotic Systems**, Qualification of Complex Behavior, New Mexico, p. 74-81. 1985.

Indrusiak, M. L. S. **Caracterização de escoamentos turbulentos transientes usando a transformada de ondaletas**, Tese de Doutorado, PROMEC-UFRGS, Porto Alegre, RS. 2004.

Indrusiak, M. L. S.; Goulart, J. N. V.; Olinto, C. R.; Möller, S. V. Wavelet time-frequency analysis of accelerating and decelerating flows in a tube bank, **Nuclear Engineering and Design**, v. 235, p. 1875-1887. 2005.

Jeff Wu, C. F. On the Convergence properties of the EM algorithm, **Annals of Statistics**, v. 11, Number 1, p. 95-103. 1983.

Jiménez, J. Turbulent velocity fluctuations need not be Gaussian, **Journal of Fluid Mechanics**, v. 376, p. 139-147. 1998.

Kantz, H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, **Physics Letters A**, v. 185, p. 77-87. 1994.

Kantz, H.; Schreiber, T. **Nonlinear Time Series Analysis**, Second Edition, Cambridge University Press, 388 p. 2004.

Kennel, M. B.; Brown, R.; Abarbanel, H. D. I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction, **Physical Review A**, v. 45, No. 6. p. 3403-3411. 1992.

Kim, H. J.; Durbin, P. A. Investigation of the flow between a pair of circular cylinders in the flopping regime. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 196, p. 431-448. 1988.

Knuth, D. **The Art of Computer Programming: Seminumerical Algorithms**, Second Edition, v. 2, p. 688. 1998.

Kotz, S.; Nadarajah, S. **Multivariate t distributions and their applications**, Cambridge. 2004.

Le Gal, P.; Peschar, I.; Chauve, M. P.; Takeda, Y. Collective behaviour of wakes downstream a row of cilindres, **Physics of Fluids**, v. 8, p. 2097-2106. 1996.

Lehrman, M.; Rechester, A. B. Extracting symbolic cycles from turbulent fluctuation data, **Physical Review Letters**, v. 87, No. 16, 164501, p. 1-4. 2001.

Li, Y.; Meneveau, C. Origin of Non-Gaussian Statistics in Hydrodynamic Turbulence, **Physical Review Letters**, v. 95, Issue 16, 164502. 2005.

Lin, T. I. Maximum likelihood estimation for multivariate skew normal mixture models, **Journal of Multivariate Analysis**, v. 100, p. 257-265. 2009.

Lin, T. I.; Lee, J. C.; Yen, S. Y. Finite mixture modelling using the skew normal distribution, **Statistica Sinica**, v. 17, p. 909-927. 2007a.

Lin, T. I.; Lee, J. C.; Hsieh, W. J. Robust mixture modeling using the skew t distribution, **Statistics and Computing**, v. 17, p. 81-92. 2007b.

Lin, T.I. Robust mixture modeling using multivariate skew t distributions, **Statistics and Computing**, v. 20, p. 343-356. 2010.

Lorenz, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow, **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130-141. 1963.

Mandelbrot, B. **Les objets fractals: forme, hasard, et dimension**, 1e Édition, Flammarion, 196 p., Paris. 1975.

Mansur, S. S.; Vieira, E. D. R.; Silveira Neto, A. **Turbulência**, v. 7, p. v, Rio de Janeiro: ABCM. 2010.

McCulloch, C. E. Maximum likelihood estimation of variance components for binary data, **Journal of the American Statistical Association**, v. 89, p. 330-335. 1994.

McLachlan, G. J.; Krishnan, T. **The EM algorithm and extensions**, Wiley Series in Probability and Statistics, New York. 1997.

McLachlan, G. J.; Peel, D. **Finite mixture models**, Wiley Series in Probability and Statistics, New York. 2000.

McLachlan, G. J.; Ng, S. K.; Bean, R. Robust Cluster Analysis via Mixture Models, **Australian Journal of Statistics**, v. 35, No. 2&3, p. 157-174. 2006.

Meneghini, J. R.; Ássi, G. R. S.; Orselli, R. M.; Carmo, B. S.; Saltara, F.; Gioria, R. S.; Bonatto, A.; Tsiloufas, S. **Ruído e Vibração Induzidos por Vórtices** in: Mansur, S. S.; Vieira, E. D. R.; Silveira Neto, A. Editores, **Turbulência**, v. 7, p. 259-324, Rio de Janeiro: ABCM. 2010.

Metropolis, N. **The Beginning of the Monte Carlo Method**, Los Alamos Science Special Issue, p. 125-130. 1987.

Metropolis, N.; Ulam, S. The Monte Carlo Method, **Journal of the American Statistical Association**, v. 44, No 247, p. 335-341. 1949.

Moffat, R. J. Describing the uncertainties in experimental results, **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 1, p. 3-17. 1988.

Monteiro, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**, Livraria da Física Editora, 2ª Edição, São Paulo. 2006.

Moon, T. K. The Expectation-Maximization algorithm, **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 13, Issue 6, p. 47-60. 1996.

Myung, I. J. Tutorial on maximum likelihood estimation, **Journal of Mathematical Psychology**, v. 47, p. 90-100. 2003.

Olinto, C. R. **Estudo experimental das características do escoamento turbulento nas primeiras fileiras de bancos de tubos**, Tese de Doutorado, PROMEC-UFRGS, Porto Alegre, RS. 2005.

Olinto, C. R.; Indrusiak, M. L. S.; Endres, L. A. M.; Möller, S. V. Experimental study of the characteristics of the flow in the first rows of tube banks, **Nuclear Engineering and Design**, v. 239, p. 2022-2034. 2009.

Packard, N.; J. Crutchfield, J.; Farmer, D.; Shaw, R. Geometry from a time series, **Physical Review Letters**, v. 45, p. 712-716. 1980.

Pearson, K. Contribution to the mathematical theory of evolution. II. Skew variation in homogeneous material. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A**, v. 186, p. 343-414. 1895.

Peel, D.; McLachlan, G. J. Robust mixture modelling using the t distribution, **Statistics and Computing**, v. 10, p. 339-348. 2000.

Percival, D. B.; Walden, A. T. **Wavelet methods for time series analysis**, Cambridge University Press, Cambridge, UK. 2000.

Perrin, C. L.; Nielson, J. B. Strong hydrogen bonds in chemistry and biology, **Annual Review of Physical Chemistry**, v. 48, p. 511-544. 1997.

Pettigrew, M. J.; Taylor, C. E.; Fisher, N. J.; Yetisir, M.; Smith, B. A. W. Flow-induced vibration: recent findings and open questions, **Nuclear Engineering and Design**, v. 185, p. 249-276. 1998.

Poincaré, J. H. **Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste**, v. 1-3, Gauthier-Villars, Paris. 1899. Fonte: American Libraries.

Rajagopalan, V.; Ray, A.; Samsi, R.; Mayer, J. Pattern identification in dynamical systems via symbolic time series analysis, **Pattern Recognition**, v. 40, p. 2897-2907. 2007.

Rosenstein, M. T.; Collins, J. J.; De Luca, C. J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, **Physica D**, v. 65, p. 117-134. 1993.

Ruelle, D.; Takens, F. **On the Nature of Turbulence**, Communications of Mathematical Physics, v. 20, p. 167-192. 1971.

Silveira, R. S. **Estudo experimental do efeito da razão de bloqueio em canal aerodinâmico sobre o número de Strouhal e o fenômeno da biestabilidade no escoamento em cilindros**, Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, Porto Alegre, RS. 2011.

Silveira Neto, A. **Fundamentos da turbulência nos fluidos** in: Freire, A. P. S.; Menut, P. P. P.; Su, J. Editores, Turbulência, v. 1, p. 1-48, Rio de Janeiro: ABCM. 2002.

Sprott, J. C. **Elegant Chaos - Algebraically Simple Chaotic Flows**, World Scientific Publishing. 2010.

Sumner, D.; Wong, S. S. T.; Price, S. J.; Païdoussis, M. P. Fluid Behaviour of side-by-side circular cylinders in steady cross-flow, **Journal of Fluids and Structures**, v. 13, p. 309-338. 1999.

Tanner, M. A. Tools for Statistical Inference: Methods for the Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Functions, **Journal of the American Statistical Association**, Springer-Verlag, v. 92, p. 220. 1996.

Takens, F. Detecting strange attractors in turbulence, **Lecture Notes in Mathematics**, v. 898, p. 366-381. 1981.

Tennekes, H; Lumley, J. L. **A first course in turbulence**, MIT Press, Cambridge, MA. 1972.

Weaver, D. S. Vortex shedding and acoustic resonance in heat exchanger tube arrays, **Technology for the 90's**. Au. Yang, M.K., Eds. Part III, Chap. 6, ASME, p. 775-810, New York. 1993.

Wei, G. C. G.; Tanner, M. A. A Monte Carlo Implementation of the EM Algorithm and the Poor Man's Data Augmentation Algorithm, **Journal of the American Statistical Association**, v. 85, No. 41, p. 699-704. 1990.

Welch, P. D. The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms, **IEEE Transaction on Audio and Electroacoustics**, v. AU-15, p. 70-75, New York. 1967.

Wolf, A.; Swift, J.; Swinney, H. and Vastano, J. Determining Lyapunov exponents from a time series, **Physica 16D**, North-Holland, v. 285, p. 285-317. 1985.

Zdravkovich, M. M. Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements, **Journal of Fluids Engineering**, v. 4, p. 618-633. 1977.

Zdravkovich, M. M.; Stonebanks, K. L. Intrinsically nonuniform and metastableflow in and behind tube arrays, **Journal of Fluids and Structures**, v. 4, No 3, p. 305-319. 1990.

Zhou, Y.; Zhang, H. J.; Yiu, M. W. The turbulent wake of two side-by-side circular cylinders, **Journal of Fluid Mechanics**, v. 458, p. 302-332. 2002.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Análise de incertezas

O erro em uma medição é dado pela diferença entre o valor real e o medido. Neste trabalho serão analisadas as incertezas de medição, que são os valores possíveis dos erros, pois os valores medidos não são previamente conhecidos. É de fundamental importância nos estudos experimentais a estimativa dos efeitos das incertezas das medições nos resultados finais, o que possibilita avaliar a provável fonte de erros.

De acordo com Moffat, 1988, a incerteza de um resultado pode ser calculada combinando-se as incertezas das variáveis envolvidas, e dada por:

$$\delta R = \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

em que $R = R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o resultado em análise e δx_i é a incerteza da variável x_i .

O coeficiente de sensibilidade do resultado R com respeito à medição de x_i é dado pela derivada parcial de R em relação a x_i .

Aplicando-se a equação (A.1) à equação (1.1), pode-se calcular a incerteza na determinação do número de Reynolds

$$\delta Re = Re \left[\left(\frac{\delta U}{U} \right)^2 + \left(\frac{\delta d}{d} \right)^2 + \left(\frac{\delta v}{v} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

A incerteza na leitura dos valores medidos é dada pela resolução da escala de medição. Deste modo, a Tab. A.1 apresenta as principais resoluções das escalas dos instrumentos utilizados neste trabalho.

A incerteza na determinação do diâmetro dos tubos é estimada em $\pm 0,0001$ m. A incerteza no posicionamento da sonda é estimada em $\pm 0,0001$ m. A aproximação da sonda em relação aos tubos é realizada com um sistema de posicionamento tridimensional, que permite um alinhamento milimétrico do suporte da mesma. Após a aproximação aos tubos, um ajuste é realizado por meio de um paquímetro, cuja incerteza de medição corresponde a $\pm 0,00005$ m.

Tabela A.1 – Principais resoluções das escalas dos instrumentos utilizados neste trabalho.

Instrumento	Resolução da escala
Termômetro	$\pm 0,5^\circ \text{ C}$
Barômetro	$\pm 0,5 \text{ mmHg}$
Micromanômetro de coluna inclinada	$\pm 0,02 \text{ mmH}_2\text{O}$
Manômetro eletrônico*	1% da leitura
Manômetro de coluna d'água	$\pm 1 \text{ mmH}_2\text{O}$

A incerteza na leitura de velocidade depende da equação utilizada para conversão dos valores de tensão obtidos pelo anemômetro de fio quente. Para sonda de fio perpendicular, a equação é dada por:

$$U_x = \left(\frac{E_x^2 - E_{0x}^2}{B_x} \right)^{1/nx}, \quad (\text{A.3})$$

em que E_{0x} é a tensão à velocidade zero e B_x e nx são os coeficientes obtidos da calibração da sonda de fio perpendicular (Indrusiak, 2004).

Aplicando-se a equação (A.1) à equação (A.3), obtém-se:

$$\delta U_x = \frac{U_x}{nx} \left[(\ln U_x \delta nx)^2 + \left(\frac{1}{B_x} \delta B_x \right)^2 + \left(\frac{2E_{0x}}{E_x^2 - E_{0x}^2} \delta E_{0x} \right)^2 + \left(\frac{2E_x}{E_x^2 - E_{0x}^2} \delta E_x \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

Para o cálculo da componente transversal da velocidade (W), utilizando-se a sonda dupla perpendicular-inclinada, a equação de conversão é dada por:

$$W = U_x \tan \beta, \quad (\text{A.5})$$

em que β é o ângulo de desvio do fio inclinado.

Aplicando-se a equação (A.1) à equação (A.5), a incerteza na leitura de W é dada por:

$$\delta W = W \left[\left(\frac{\delta U_x}{U_x} \right)^2 + \left(\frac{\delta(\tan \beta)}{\tan \beta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

* As leituras típicas deste equipamento variam de 4 a 20 mA.

A calibração da sonda de fio inclinado é dada por:

$$E_{\alpha}^2 = E_{0\alpha}^2 + B_{\alpha} U_{\text{real}}^{n\alpha} \cos^{m\alpha}(\alpha - \beta), \quad (\text{A.7})$$

em que $E_{0\alpha}$ é a tensão à velocidade zero no fio inclinado e B_{α} , $n\alpha$ e $m\alpha$ são os coeficientes obtidos da calibração da sonda de fio inclinado. O valor real de α , que é o ângulo da sonda inclinada, é de 45° . A velocidade real U_{real} é a soma vetorial de uma componente paralela ao fio inclinado e outra perpendicular ao mesmo. Esta componente perpendicular será responsável pelo resfriamento e conseqüente variação da tensão na ponte. (Indrusiak, 2004).

Na solução do ângulo de desvio as Equações (A.3) e (A.7) devem ser resolvidas em conjunto. Deste modo, o erro na leitura do valor de $\tan \beta$ é expresso por:

$$\delta \tan \beta = \frac{\tan \beta - 1}{m\alpha} \left[(\ln \tan \beta \delta m\alpha)^2 + \left(\frac{1}{B_{\alpha}} \delta B_{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{2E_{0\alpha}}{E_{\alpha}^2 - E_{0\alpha}^2} \delta E_{0\alpha} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{2E_{\alpha}}{E_{\alpha}^2 - E_{0\alpha}^2} \delta E_{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{n\alpha}{U_x} \delta U_x \right)^2 + (\ln U_x \delta n\alpha)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.8})$$

O erro na leitura dos valores de tensão E_x , E_{0x} , E_{α} e $E_{0\alpha}$ com o anemômetro de fio quente é calculado a partir dos dados do fabricante, do seguinte modo:

$$\delta E = \left(\frac{OS}{1000} + 0,0005 \right) \text{mV} \quad (\text{A.9})$$

em que OS é o fator de compensação ou *offset*, ajustado para cada medição.

Os valores B_x , n_x , B_{α} , $m\alpha$ e $n\alpha$, são obtidos por meio de regressão numérica dos dados de calibração, e os erros na leitura destes valores pode ser calculado de acordo com o descrito por Moffat, 1988, da seguinte forma:

1. Calcula-se o resultado R_0 a partir dos dados obtidos da calibração;
2. Para cada variável x_i (pontos de calibração) envolvida, calcula-se o valor de R_{i+} e R_{i-} , respectivamente, aumentando-se e subtraindo-se a incerteza de medição na variável correspondente;
3. Calcula-se o valor da incerteza atribuída a cada variável, através de:

$$\delta x_i = \left(|R_{i+} - R_0| + |R_{i-} - R_0| \right) / 2 \quad (\text{A.10})$$

4. Calcula-se o valor da incerteza de R, que é dada por:

$$\delta R = \left[\sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

As incertezas na leitura dos valores de tensão durante a calibração são calculadas a partir da Equação (A.11) e os resultados para o fio perpendicular são de $\delta n_x = 0,025$ e $\delta B_x = 0,021$. Para o fio inclinado, as incertezas na leitura dos valores de tensão são de $\delta n_\alpha = 0,005$, $\delta m_\alpha = 0,009$ e $\delta B_\alpha = 0,030$.

A faixa da incerteza das medições de velocidade com a sonda de fio duplo perpendicular-inclinada situa-se entre 3,1 e 9,8%. Estes valores dependem da curva de calibração utilizada e da região da curva em que a leitura está situada. O registro de uma calibração típica da sonda de fio duplo perpendicular-inclinada é apresentado no Apêndice B.

A convergência do algoritmo de maximização de expectativa para funções exponenciais é discutida em Dempster et al., 1977. Para funções não exponenciais, a convergência é discutida por Jeff Wu, 1983. De um modo geral, o erro produzido será proporcional à tolerância escolhida nas simulações. Contudo, com a utilização do método de Monte Carlo no passo de estimativa da máxima log-verossimilhança, a propriedade de monotonicidade do algoritmo de maximização de expectativa é perdida, sendo que o erro produzido pelo método de Monte Carlo é proporcional a $1/\sqrt{M}$, onde M é o tamanho da amostra.

APÊNDICE B – Procedimento de calibração da sonda de fio quente

A calibração da sonda de anemometria de fio quente é realizada no interior do canal aerodinâmico, com um dispositivo que restringe gradualmente o fluxo do escoamento (bocal convergente), aumentando sua velocidade, conforme ilustra a Fig. B.1.

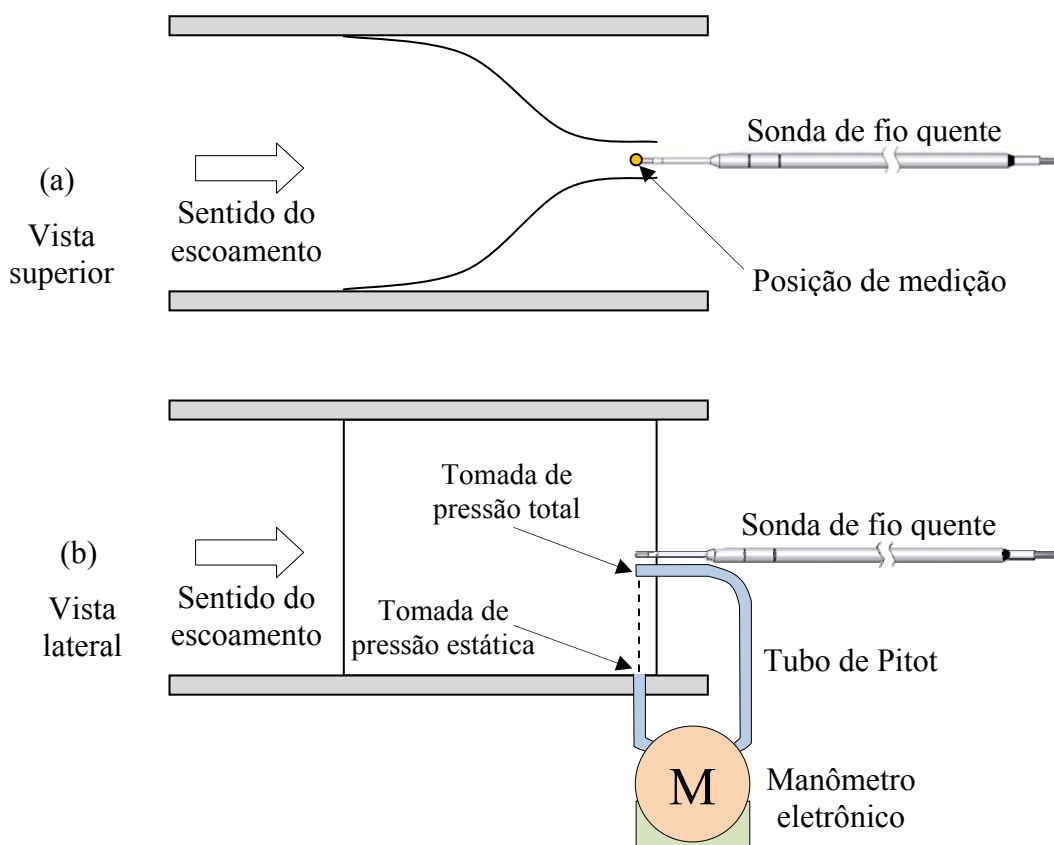


Figura B.1 - Dispositivo para restringir gradualmente o escoamento (bocal convergente), e a velocidade na seção de testes do canal aerodinâmico. (a) Vista superior. (b) Vista lateral.

Na mesma seção onde é posicionada a sondas de fio quente, modelo DANTEC 55P71, está instalado um tubo de Pitot, que é responsável pela medição da pressão. Este valor é registrado juntamente com os valores de tensão apresentados pelas sondas, e as relações entre tensão e velocidade e tensão e ângulo de desvio são determinadas. Geralmente as curvas de calibração são obtidas a partir de 10 a 12 pontos de medição, distribuídos em um intervalo conveniente. Para a velocidade, os valores vão de zero até acima da velocidade máxima esperada para o experimento. Para o ângulo de desvio da sonda estes valores variam de -30° a 30° .

São utilizados três equipamentos para a medição da pressão no interior do canal, em função de faixa de medição: um micromanômetro de coluna inclinada, um manômetro eletrônico e um manômetro de coluna d'água. Para cada novo experimento é realizada uma nova calibração. Porém, como as sondas permanecem no interior do canal até a realização do experimento, sem a necessidade da desmontagem do conjunto sonda/suporte/cabo/CTA, os valores absolutos das medições de velocidade não são afetados.

A Tab. B.1 mostra o registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade axial do fio perpendicular da sonda, e a Fig. B.2 ilustra a curva de velocidade *versus* tensão e os erros envolvidos no processo de calibração desta variável.

A Tab. B.2 mostra o registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade transversal e a Tab. B.3 mostra o registro de uma calibração típica para obtenção do ângulo de desvio do fio inclinado da sonda A Fig. B.3 ilustra a curva de velocidade transversal *versus* tensão e os erros envolvidos no processo de calibração desta variável. A Fig. B.4 ilustra a curva de ângulo de desvio *versus* tensão e os erros envolvidos no processo de calibração desta variável.

Tabela B.1 - Registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade axial do fio perpendicular da sonda de fio quente.

E_0 [V]	1,100	Coeficientes de calibração:	B_x	1,2855		
E_{0corr} [V]	1,100		n_x	0,3853		
U_{real} [m/s]	E_{corr} [V]	$\ln(E_{corr}^2 - E_0^2)$	$\ln(U_{real})$	$U_{calculada}$ [m/s]	Erro [%]	
1	3,167	1,799	0,705	1,153	3,251	-2,631
2	5,172	1,900	0,875	1,643	5,051	2,348
3	7,082	1,977	0,993	1,958	6,854	3,229
4	9,907	2,080	1,137	2,293	9,969	-0,625
5	14,968	2,207	1,297	2,706	15,110	-0,948
6	20,072	2,307	1,414	2,999	20,453	-1,898
7	25,055	2,385	1,500	3,221	25,535	-1,913
8	30,048	2,447	1,564	3,403	30,222	-0,581
9	35,175	2,500	1,617	3,560	34,641	1,517
10	40,272	2,554	1,670	3,696	39,739	1,321
11	44,229	2,584	1,699	3,789	42,811	3,205

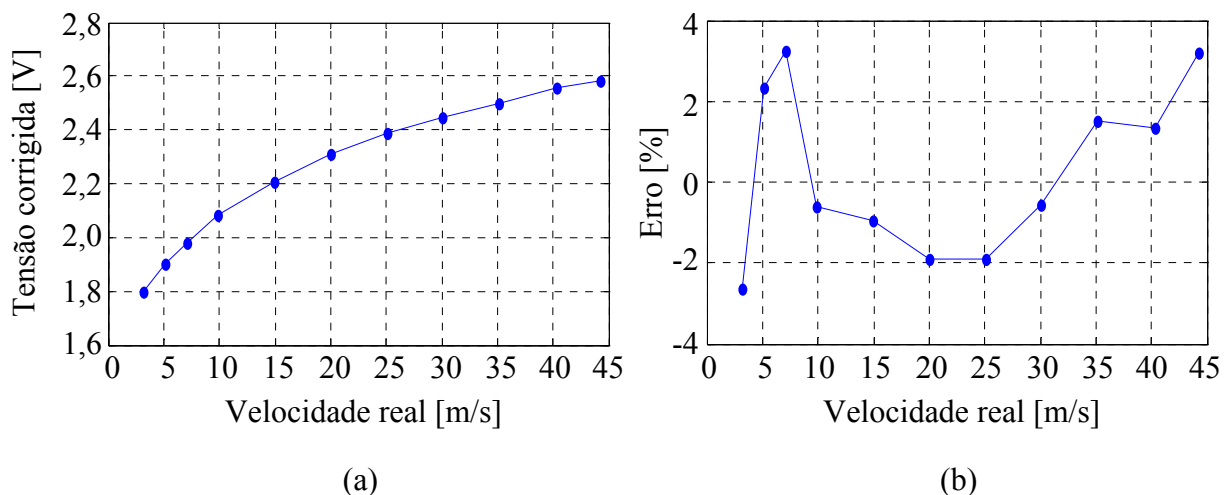


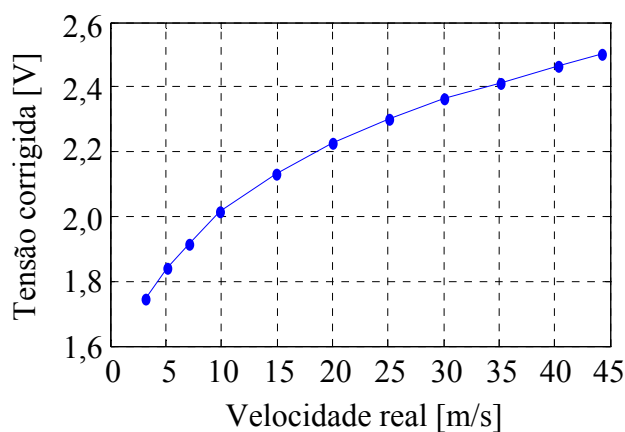
Figura B.2 - (a) Relação típica entre velocidade real medida e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda perpendicular de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a velocidade.

Tabela B.2 - Registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade transversal do fio inclinado da sonda de fio quente.

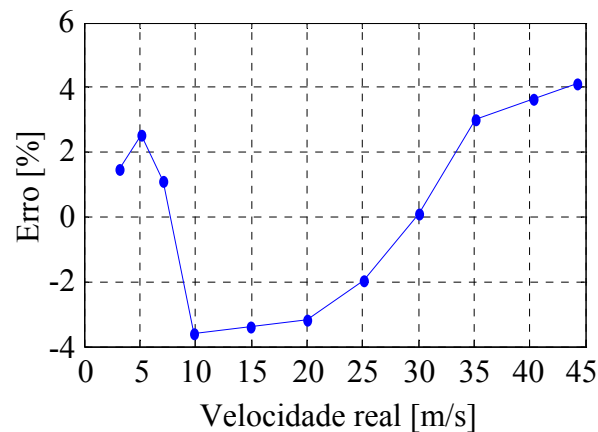
E_0 [V] 1,290 E_{0corr} [V] 1,290		Coeficientes de calibração: B_α 0,9460 n_α 0,4618 m_α 0,4298				
	U_{real} [m/s]	E_{corr} [V]	$\ln(E_{corr}^2 - E_0^2)$	$\ln(U_{real})$	U_{calc} [m/s]	Erro [%]
1	3,167	1,744	0,139	0,501	3,121	1,461
2	5,172	1,840	0,236	0,714	5,040	2,550
3	7,082	1,915	0,302	0,850	7,006	1,083
4	9,907	2,013	0,378	0,996	10,263	-3,588
5	14,968	2,134	0,461	1,175	15,479	-3,409
6	20,072	2,229	0,519	1,303	20,712	-3,190
7	25,055	2,303	0,561	1,399	25,552	-1,980
8	30,048	2,363	0,593	1,478	30,014	0,113
9	35,175	2,413	0,619	1,546	34,127	2,978
10	40,272	2,466	0,645	1,605	38,809	3,631
11	44,229	2,503	0,663	1,646	42,405	4,123

Tabela B.3 - Registro de uma calibração típica para obtenção do ângulo de desvio do fio inclinado da sonda de fio quente.

	Velocidade alvo [m/s]		15,00		Ângulo α [°]		45
	Ângulo δ [°]	$E_{\delta\text{corr}}$ [V]	$\ln(E_{\delta\text{corr}}^2 - E_0^2)$	$\cos(\alpha - \delta)$	$\ln(\cos(\alpha - \delta))$	U_{calc} [m/s]	Erro [%]
1	30	2,233	0,564	0,966	-0,015	15,512	-3,413
2	25	2,223	0,559	0,940	-0,027	15,442	-2,943
3	20	2,212	0,553	0,906	-0,043	15,445	-2,965
4	15	2,199	0,546	0,866	-0,062	15,482	-3,214
5	10	2,181	0,536	0,819	-0,087	15,417	-2,783
6	5	2,158	0,523	0,766	-0,116	15,259	-1,724
7	0	2,136	0,510	0,707	-0,151	15,315	-2,098
8	-5	2,106	0,493	0,643	-0,192	15,212	-1,413
9	-10	2,078	0,477	0,574	-0,241	15,389	-2,591
10	-15	2,042	0,455	0,500	-0,301	15,430	-2,865
11	-20	2,000	0,428	0,423	-0,374	15,507	-3,382
12	-25	1,948	0,393	0,342	-0,466	15,512	-3,417
13	-30	1,881	0,345	0,259	-0,587	15,348	-2,318



(a)



(b)

Figura B.3 - (a) Relação típica entre velocidade real medida e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda inclinada de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a velocidade.

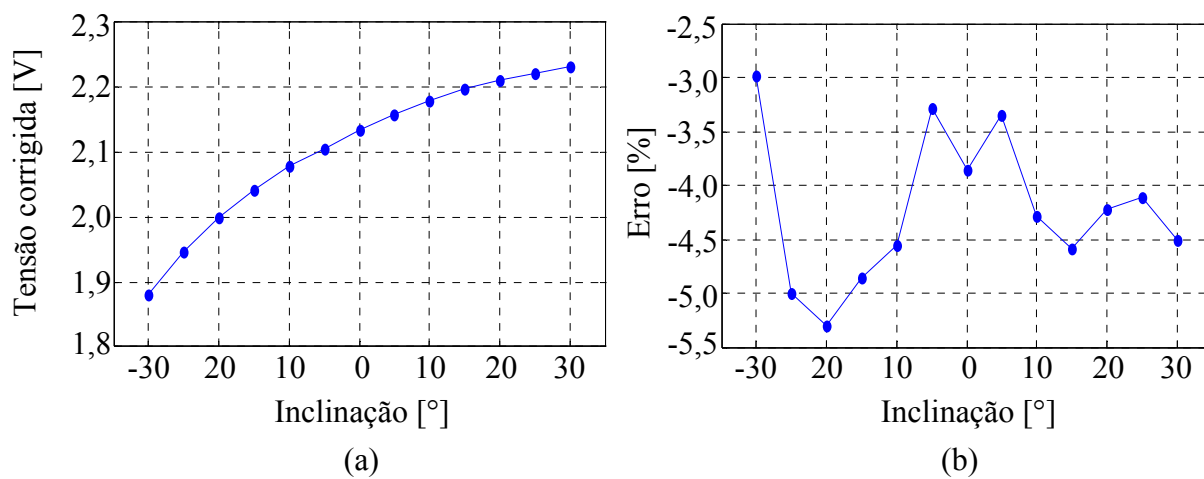


Figura B.4 - (a) Relação típica entre inclinação e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda perpendicular de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a inclinação.

APÊNDICE C – Tabela de dados experimentais

Tabela C.1 - Tabela de dados experimentais.

Variável	Valor
Diâmetro dos tubos, d	0,0251 m
Passo ou distâncias entre os centros dos tubos, p	0,0316 m
Razão de espaçamento, p/d	1,26
Material dos tubos	PVC
Velocidade de referência, U	14 m/s
Fluido de trabalho	Ar
Temperatura do experimento, T	24 °C
Viscosidade cinemática, ν	$1,54 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Pressão atmosférica, P_{atm}	100,55 kPa
Número de Reynolds, Re	$2,28 \times 10^4$
Largura da seção de testes do canal aerodinâmico, B	0,193 m
Altura da seção de testes do canal aerodinâmico, H	0,146 m
Comprimento do canal aerodinâmico, L	1,02 m
Razão de bloqueio do experimento, β	26 %
Potência do ventilador centrífugo do canal aerodinâmico, Pot	0,75 kW
Frequência de aquisição das séries temporais, f_s	1000 Hz
Número total de pontos das séries temporais, N	131072
Tempo de amostragem, T_r	131,072 s
Frequência de corte na aquisição das séries temporais, f_c	300 Hz

APÊNDICE D – Procedimento para determinação do ângulo de desvio em relação à direção principal do escoamento

O procedimento de obtenção do ângulo de desvio do escoamento é apresentado por Indrusiak, 2004. Para a sonda de fio reto, a relação existente entre a componente da velocidade U_x , perpendicular ao fio, e a tensão na ponte de Wheatstone, E_x , é dada por

$$E_x^2 = E_{0x}^2 + B_x U_x^{nx}, \quad (\text{D.1})$$

em que E_{0x}^2 é a tensão à velocidade zero e B_x e nx são os coeficientes obtidos da calibração da sonda de fio reto. A equação (D.1) relaciona diretamente a componente de velocidade perpendicular à sonda com a tensão na ponte. Contudo, não leva em consideração a velocidade real U_{real} e seu ângulo de incidência β , pois esta não tem efeito sobre seu resfriamento. A velocidade real pode ser considerada a soma vetorial de uma componente paralela ao fio inclinado e outra perpendicular, U_α , como mostra a Fig. D.1.

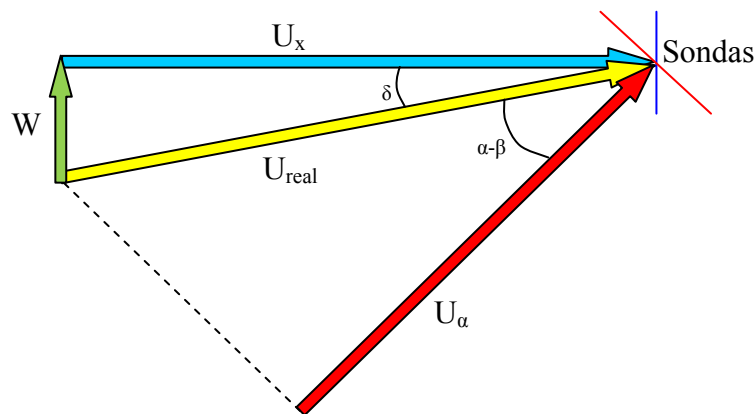


Figura D.1 – Esquema de decomposição do vetor de velocidade.

A componente perpendicular ao fio é responsável pelo resfriamento e, conseqüentemente, pela variação da tensão na ponte, E_α , dada por

$$U_\alpha = U_{real} \cos(\alpha - \beta). \quad (\text{D.2})$$

Das equações (D.1) e (D.2) obtém-se a relação entre U_α e a tensão na ponte para o fio inclinado como

$$E_\alpha^2 = E_{0\alpha}^2 + B_\alpha U_{real}^{n\alpha} \cos^{m\alpha} (\alpha - \beta), \quad (D.3)$$

em que $E_{0\alpha}^2$ é a tensão à velocidade zero no fio inclinado e B_α , $n\alpha$ e $m\alpha$ são coeficientes obtidos da calibração da sonda de fio inclinado.

As duas componentes da velocidade para o fio reto são dadas por

$$U_x = U_{real} \cos \delta \quad (D.4)$$

e

$$w = U_{real} \operatorname{sen} \beta = U_x \operatorname{tg} \beta. \quad (D.5)$$

Para a obtenção da componente w , substitui-se a equação (D.4) na equação (D.3), obtendo-se

$$E_\alpha^2 - E_{0\alpha}^2 = B_\alpha \left(\frac{U_x}{\cos \beta} \right)^{m\alpha} \cos^{m\alpha} (\alpha - \beta). \quad (D.6)$$

Os valores de $E_{0\alpha}$, B_α , $n\alpha$ e $m\alpha$ são obtidos da calibração da sonda de fio inclinado. O ângulo α , cujo valor real se aproxima de 45° , e o coeficiente $m\alpha$ são obtidos variando-se a inclinação da sonda em relação ao escoamento principal, com incrementos de 5° , entre $+30^\circ$ e -30° . No entanto, o erro estimado do posicionamento da sonda é de $\pm 0,5^\circ$, ou seja, aproximadamente o mesmo valor da variação em torno de 45° esperada para o ângulo α . Assim, é apropriado considerar na equação (D.6) o valor de $\alpha = 45^\circ$.

$$\frac{E_\alpha^2 - E_{0\alpha}^2}{B_\alpha U_x^{n\alpha}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{m\alpha} \left(\frac{\cos \beta + \operatorname{sen} \beta}{\cos^{n\alpha/m\alpha} \beta} \right)^{m\alpha}. \quad (D.7)$$

Pela mesma incerteza de calibração exposta e considerando que $\cos \beta$ é um valor próximo da unidade (pois $w \ll U_x$), o expoente $n\alpha/m\alpha$ pode ser considerado igual a um.

Esta simplificação está respaldada pela prática de calibração. Então, o valor do ângulo β é obtido da expressão

$$\operatorname{tg} \beta \delta = \sqrt{2} \left(\frac{E_{\alpha}^2 - E_{0\alpha}^2}{B_{\alpha} U_x^{n\alpha}} \right)^{1/m\alpha} - 1. \quad (\text{D.8})$$

A componente transversal do escoamento pode então ser calculada como

$$w = U_x \operatorname{tg} \beta = U_x \left[\sqrt{2} \left(\frac{E_{\alpha}^2 - E_{0\alpha}^2}{B_{\alpha} U_x^{n\alpha}} \right)^{1/m\alpha} - 1 \right]. \quad (\text{D.9})$$

Na aplicação da equação (D.9), U_x pode ser obtido de maneira alternativa através da leitura fornecida pelo programa gerenciador do anemômetro, o qual faz a conversão dos dados a partir da calibração, ou calculado pela equação (D.1). O valor de $E_{0\alpha}$ pode ser lido pelo anemômetro imediatamente antes do ensaio, enquanto que E_{α} é obtido simultaneamente com U_x .