

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução das Equações de Navier-Stokes para
Fluidos Incompressíveis via Elementos
Finitos**

por

Marcelo Maraschin de Souza

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof^a. Dr^a. Carolina Cardoso Manica
Orientadora

Porto Alegre, Abril de 2013.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Souza, Marcelo Maraschin de

Solução das Equações de Navier-Stokes para Fluidos Incompressíveis via Elementos Finitos / Marcelo Maraschin de Souza.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2013.

118 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2013.

Orientadora: Manica, Carolina Cardoso

Dissertação: Matemática Aplicada
Elementos Finitos, Navier-Stokes Incompressível em Regime Transiente, Métodos Temporais, Modelo de Deconvolução de Leray, Aerodinâmica.

Solução das Equações de Navier-Stokes para Fluidos Incompressíveis via Elementos Finitos

por

Marcelo Maraschin de Souza

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Numérica e Computação Científica

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Carolina Cardoso Manica

Banca examinadora:

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Jorge Hugo Silvestrini
PUCRS

Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey
PROMEC/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
05/04/2013.

Prof^a Dr^a Maria Cristina Varrialle
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu muita força ao longo desses últimos dois, fazendo-me capaz de superar muitos obstáculos. Aos meus pais, Wanderley e Gorete, que diante de todos os problemas enfrentados estavam sempre ao meu lado, passando-me muita força e amor para que eu pudesse superar e vencer. A minha namorada, Rayana, que em todos os momentos de dificuldade me deu muito amor, carinho e tranquilidade. A todos os meus amigos, que sempre me apoiaram em busca de meus sonhos. A minha orientadora, Prof^a. Carolina Cardoso Manica, pela orientação e estímulo que sempre me deste. As agências de fomento pelo apoio financeiro e a UFRGS pelo ensino público de muita qualidade.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xv
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Estrutura do texto	5
2 EQUAÇÕES GOVERNANTES	6
2.1 Equações de Navier-Stokes	6
2.2 Adimensionalização	7
2.3 Formulação Variacional	9
2.4 Coeficientes Aerodinâmicos	12
2.4.1 Coeficiente de Arrasto	12
2.4.2 Coeficiente de Sustentação	14
2.5 Termo trilinear	15
2.5.1 Método mais simples	16
2.5.2 Método do Ponto Fixo	16

2.5.3	Método de Newton	17
3	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL VIA ELEMENTOS FINITOS E MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL	19
3.1	Introdução ao Método de Elementos Finitos	20
3.1.1	Espaços	23
3.2	Discretização Espacial	26
3.2.1	Sistema	30
3.3	Discretização Temporal	31
3.3.1	Método de Euler implícito (EI)	33
3.3.2	Método de Crank-Nicolson (CN)	34
3.3.3	Método θ de passo fracionado (FS)	37
3.4	Método da Penalidade	41
4	ERROS, TAXAS DE CONVERGÊNCIA E APROXIMAÇÃO DE COEFICIENTES	44
4.1	Erros	44
4.2	Taxas de Convergência	47
4.3	Aproximação de Coeficientes Aerodinâmicos	48
5	MODELO DE DECONVOLUÇÃO DE LERAY	51
6	RESULTADOS	56

6.1 Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes	56
6.1.1 Exemplo 1	58
6.1.2 Exemplo 2	69
6.1.3 Exemplo 3	74
6.1.4 Exemplo 4	81
6.1.5 Exemplo 5 - Escoamento em torno de um cilindro	91
6.1.6 Exemplo 6 - Comparação para o termo não-linear	106
6.1.7 Exemplo 7 - Escoamento em torno do aerofólio NACA0012	107
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTU- ROS	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114

Lista de Figuras

3.1	Exemplo de função $u_h \in X^h$	21
3.2	Função base linear em 1D	21
3.3	Malha em 2D com funções base lineares	22
3.4	Função base linear 2D	23
3.5	Funções base quadráticas em 1D	23
3.6	Funções base quadráticas 2D	24
3.7	Triângulo dado por uma função base cúbica	24
3.8	Função bolha em 2D	25
3.9	Malha P1/P0	26
3.10	Passo de tempo do método θ de passo fracionado	41
6.1	Exemplo 1. Gráficos da velocidade e pressão no tempo $T=1s$. .	59
6.2	Exemplo 1 com Reynolds=1. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo	60
6.3	Exemplo 1 com Re=1. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elementos P2/P1, por passo de tempo	61
6.4	Exemplo 1 com Re=1000. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo	65

6.5	Exemplo 1 com $Re=1000$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo	66
6.6	Exemplo 2. Gráficos da velocidade e pressão no tempo $T=1s$. .	70
6.7	Exemplo 2. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo . .	71
6.8	Exemplo 2. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo	72
6.9	Exemplo 3. Gráficos da velocidade e pressão em $T=1s$	76
6.10	Exemplo 3. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo . .	77
6.11	Exemplo 3. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo	78
6.12	Exemplo 4. Gráficos da velocidade e pressão em $T=1s$	81
6.13	Exemplo 4 com $Re=1$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo	82
6.14	Exemplo 4 com $Reynolds=1$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo	83

6.15	Exemplo 4 com $Re=10^6$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo	87
6.16	Exemplo 4 com $Re=10^6$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo	88
6.17	Domínio do Exemplo 5	91
6.18	Níveis de malha do Exemplo 5	93
6.19	Campo de velocidade vetorial nos tempos $T=2, 4, 5, 6, 7, 8s$, respectivamente	94
6.20	Isolinhas da velocidade nos tempos $T=2, 4, 5, 6, 7, 8s$, respectivamente	95
6.21	Pressão nos tempos $T=2, 4, 5, 6, 7, 8s$, respectivamente	96
6.22	Evolução temporal do coeficiente de arrasto para diferentes métodos de discretização temporal, malha no nível 3 e passo de tempo $\Delta t = 0.00125$	99
6.23	Evolução temporal do coeficiente de sustentação para diferentes métodos de discretização temporal, malha no nível 3 e passo de tempo $\Delta t = 0.00125$	99
6.24	Evolução temporal de Δp para diferentes métodos de discretização temporal, malha no nível 3 e passo de tempo $\Delta t = 0.00125$	100
6.25	Evolução temporal do coeficiente de arrasto na malha 1 e $\Delta t = 0.00125$	102
6.26	Campo de velocidade no tempo $T = 8s$ com malha no nível 1	102

6.27	Evolução temporal do coeficiente de sustentação com o método de discretização temporal FS e $\Delta t = 0.00125$	105
6.28	Domínio do problema do aerofólio NACA0012	108

Lista de Tabelas

3.1	Tabela de parâmetros para métodos temporais	36
3.2	Tabela de parâmetros para os métodos θ de passo fracionado . .	40
4.1	Taxas de convergência esperadas para diferentes elementos . . .	47
6.1	Graus de liberdade para cada elemento	57
6.2	Exemplo 1 com $Re=1$. Taxas de convergência utilizando o elemento $P2/P1$	62
6.3	Exemplo 1 com $Re=1$. Taxas de convergência utilizando o elemento $P1b/P1$	63
6.4	Exemplo 1 com $Re=1$. Taxas de convergência utilizando o elemento $P3/P2$	63
6.5	Exemplo 1 com $Re=1$. Taxas de convergência temporal utilizando elemento $P1b/P1$	64
6.6	Exemplo 1 com $Re=1000$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento $P2/P1$	67
6.7	Exemplo 1 com $Re=1000$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento $P1b/P1$	67
6.8	Exemplo 1 com $Re=1000$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento $P3/P2$	68
6.9	Exemplo 1 com $Re=1000$. Taxas de convergência temporal utilizando elemento $P1b/P1$	68

6.10	Exemplo 2. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P2/P1	73
6.11	Exemplo 2. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P1b/P1	73
6.12	Exemplo 2. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2	74
6.13	Exemplo 2. Taxas de convergência temporais utilizando elemento P1b/P1	74
6.14	Exemplo 3. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P2/P1	79
6.15	Exemplo 3. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P1b/P1	79
6.16	Exemplo 3. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2	80
6.17	Exemplo 3. Taxas de convergência temporais utilizando elementos P1b/P1	80
6.18	Exemplo 4 com $Re=1$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P2/P1	84
6.19	Exemplo 4 com $Re=1$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P1b/P1	84
6.20	Exemplo 4 com $Re=1$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2	85
6.21	Exemplo 4 com $Re=1$. Taxas de convergência temporais utilizando elemento P1b/P1	85

6.22	Exemplo 4 com $Re=10^6$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P2/P1	89
6.23	Exemplo 4 com $Re=10^6$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P1b/P1	89
6.24	Exemplo 4 com $Re=10^6$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2	90
6.25	Exemplo 4 com $Re=10^6$. Taxas de convergência temporal utilizando elemento P1b/P1	90
6.26	Exemplo 5 - Graus de liberdade para cada nível da malha	92
6.27	Exemplo 5. Euler implícito com DNS	97
6.28	Exemplo 5. Crank-Nicolson com DNS	97
6.29	Exemplo 5. Método θ de passo fracionado com DNS	98
6.30	Exemplo 5. Crank-Nicolson com malha no nível 1	101
6.31	Exemplo 5. Método θ de passo fracionado com malha no nível 1	101
6.32	Exemplo 5. Modelo de Leray1 com Crank-Nicolson e malha nível 2	103
6.33	Exemplo 5. Modelo de Leray2 com Crank-Nicolson e malha nível 2	104
6.34	Exemplo 5. Modelo de Leray3 com Crank-Nicolson e malha no nível 2	104
6.35	Exemplo 5. Modelo de Leray3 com θ de passo fracionado e malha no nível 2	105

LISTA DE SÍMBOLOS

ν	viscosidade cinemática.
Re	Número de Reynolds.
c_d	Coefficiente de arrasto.
c_l	Coefficiente de sustentação.
Δp	Diferença de pressão.
$b^*(u, v, w)$	Forma anti-simétrica do termo não-linear.
Δt	Passo de tempo.
N_v	Graus de liberdade para cada componente da velocidade
N_p	Graus de liberdade pressão.
N_T	Quantidade de passo de tempo.
ξ	Coefficiente do método da penalidade.
δ	Coefficiente do modelo de deconvolução de Leray.
γ	Critério de parada do método de linearização.

RESUMO

O estudo das equações de Navier-Stokes desperta interesse dos estudiosos da área da análise numérica, visto que a partir destas pode-se determinar os campos de velocidade e pressão de um escoamento. Com estas equações também pode-se aproximar coeficientes aerodinâmicos, fato de grande interesse nas indústrias automobilística e aeronáutica. Por isso, propõe-se estudar a aproximação das equações de Navier Stokes via o método de elementos finitos, que tem se mostrado um bom método de resolução de problemas envolvendo fluidos. Estudam-se métodos de linearização do termo convectivo. Apresentam-se três propostas de métodos de discretização temporal para as equações dadas. Através da análise de erro e taxas de convergência para problemas com solução exata conhecida, comparam-se diferentes espaços de discretização espacial e diferentes métodos de discretização temporal. Introduce-se um modelo de regularização e através do cálculo dos coeficientes de arrasto e sustentação comprova-se a sua efetividade (no sentido de que ele permite trabalhar com malhas mais grossas, mas ainda obter soluções comparáveis às aquelas obtidas por DNS).

ABSTRACT

The study of the Navier-Stokes equations arouses interest of researchers in the area of numerical analysis, since from these one can determine the velocity and pressure fields of a flow. These equations approach aerodynamic coefficients, a fact of great interest in the aeronautical and automotive industries. Therefore, we propose to study an approximation of the Navier Stokes equations through the finite element method, which has shown to be a good method for solving problems involving fluids. We study methods of linearizing the convective term, and present three methods for time discretization. Through error analysis and convergence rates for problems with known exact solution, we compare different spatial and time discretization methods. By calculating the drag and lift coefficients around a cilinder we confirm the effectiveness of the Leray-deconvolution model in comparison to direct simulation (DNS) for solving problems with coarser meshes.

1 INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento de fluidos. A partir destas pode-se determinar os campos de velocidade e de pressão num escoamento. Logo, são muito úteis, pois descrevem a física de um grande número de fenômenos de interesses econômicos e acadêmicos. Estas equações são estudadas em todos os livros de mecânica de fluidos, dentre eles Batchelor [2] que é um livro introdutório que traz a teoria matemática aliada da compreensão física de fluidos. Ainda, pode-se estudar o livro de Lesieur [30] que traz os conceitos mais atualizados na área de turbulência.

Estas equações são utilizadas para modelar o clima, correntes oceânicas, fluxo ao redor de aerofólios de automóveis e de aviões, propagação de fumaça em incêndios e em chaminés industriais. Também são usadas diretamente nos projetos de aeronaves e carros, nos estudos do fluxo sanguíneo, no projeto de usinas hidrelétricas, na análise dos efeitos da poluição hídrica em rios, mares, lagos, oceanos e da dispersão da poluição atmosférica, etc.

Na prática, somente os casos mais simples das equações de Navier-Stokes podem ser resolvidos analiticamente. Estas são equações diferenciais parciais não-lineares em praticamente todas as situações reais, o que dificulta a obtenção da solução. Ainda, as condições de contorno e iniciais fazem com que a maioria dos problemas sejam difíceis ou impossíveis de serem resolvidos. Para tais situações reais, como a sustentação de uma asa de avião, a solução dessas equações é aproximada com a utilização de computadores.

Algumas simplificações podem ser feitas nas equações de Navier-Stokes. Neste trabalho considerou-se o fluido incompressível e também viscosidade constante.

Um dos objetivos deste trabalho é estudar a linearização do termo convectivo das equações de Navier-Stokes. Serão apresentadas três propostas de linearização discutidos em Gunzburger [14]. Dentre elas, o método do ponto fixo e o método de Newton serão testados nas simulações deste trabalho.

A partir das equações simplificadas escolhe-se um método para discretizá-las a fim de obter soluções aproximadas em um computador. No presente trabalho foi escolhido o método de elementos finitos no espaço. Os livros introdutórios de Becker [3], Johnson [22] e Brenner e Scott [6] serviram de embasamento teórico matemático no estudo de elementos finitos.

O método de elementos finitos tem se mostrado um ótimo método numérico na área de mecânica de fluidos. Uma introdução deste método aplicado a escoamentos viscosos de fluidos incompressíveis pode ser verificada em Layton [25], que desenvolve a teoria matemática na resolução de escoamentos viscosos via elementos finitos. Layton dá enfoque nas demonstrações matemáticas, tais como existência, unicidade, estabilidade e convergência.

As equações de Navier-Stokes consideradas neste trabalho estão em regime transiente, por isso o método de discretização temporal é muito importante no processo de obtenção da solução aproximada. Assim, outro objetivo deste trabalho é comparar os métodos de discretização temporal, como Euler implícito, Crank-Nicolson e método θ de passo fracionado.

Temam [40] e Heywood e Rannacher [16] estudam o método de segunda ordem, Crank-Nicolson, para as equações de Navier-Stokes já discretizadas no espaço pelo método de elementos finitos.

O método θ de passo fracionado é discutido em Bristeau, Glowinski e Periaux [7], onde são feitas algumas análises a fim de obter um método de segunda ordem. Ainda Kloucek e Rys [23] investiga analiticamente a estabilidade e con-

vergência do método aplicado as equações de Navier-Stokes em regime transiente discretizadas por elementos finitos.

Em John et al. [21] muitos métodos temporais (incluindo os abordados neste trabalho) são comparados através da aproximação da velocidade e da pressão nas equações de Navier-Stokes com soluções exatas conhecidas. Rannacher [34] e Turek [42] também estudam os métodos temporais. Faz-se comparações e análises dos métodos de segunda ordem, Crank-Nicolson e método θ de passo fracionado, aplicados nas equações de Navier-Stokes incompressíveis discretizadas no espaço pelo método de elementos finitos.

Quando um corpo se movimenta através de um fluido existe uma interação fluido-corpo, resultando em forças que podem ser dadas em função da tensão de cisalhamento e uma tensão normal. Esta força na direção paralela ao escoamento é denominada arrasto e na direção normal ao escoamento é denominada sustentação. Tais forças podem ser estudadas em livros clássicos, como Prandtl e Tietjens [33] e Schlichting [36]. Estes coeficientes aerodinâmicos tem alto interesse principalmente nas indústrias aeronáutica e automobilística.

Sendo assim, outro objetivo deste trabalho é a aproximação dos coeficientes de arrasto e sustentação em torno de um cilindro fixo. Apesar de ser um problema exaustivamente estudado ao longo dos últimos anos, não existe solução exata. Por isso, tais coeficientes serão aproximados a partir das simulações numéricas das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

Os resultados da aproximação dos coeficientes aerodinâmicos em torno do cilindro obtidos neste trabalho serão comparados com John [20] e com Schäfer e Turek [35]. John resolve o mesmo problema utilizando elementos finitos e Schäfer e Turek estabelecem um intervalo ótimo de referência na aproximação dos coeficientes aerodinâmicos em torno de um cilindro, com base em resultados numéricos de vários

artigos que resolvem o mesmo problema com métodos de discretização espacial e temporal diferentes.

Um dos grandes problemas na obtenção da solução numérica das equações de Navier-Stokes em regime transiente é o alto custo computacional, devido à linearização do termo convectivo, da malha muito refinada e de passos de tempo pequenos. Por isso, busca-se alternativas que calculem as soluções encontradas com malhas finas em malhas grossas, fazendo com que se obtenha a mesma solução com menor tempo computacional. Esta é uma das propostas do modelo de deconvolução de Leray, discutido em Layton et al. [27], onde é provada convergência da solução discreta para a solução forte das equações de Navier-Stokes discretizadas no espaço por elementos finitos, com a regularização do modelo de deconvolução de Leray e método temporal baseado na extrapolação linear de Crank-Nicolson .

O modelo de deconvolução baseia-se na regularização introduzida por Leray [28, 29], de um filtro diferencial discreto estudado por Manica e Kaya Merdan [31] e da aproximação de operadores de deconvolução de van Cittert, dado em Bertero [4]. Aplicações deste operador de deconvolução podem ser encontradas em Layton [26].

A fim de obter soluções ótimas com malhas mais grossas, outro objetivo deste trabalho é comparar este modelo de deconvolução de Leray com modelos em simulação direta ou Direct Numerical Simulation (DNS), através de gráficos e aproximação de coeficientes aerodinâmicos. Ainda, algumas comparações dos métodos temporais em combinação com esse modelo de deconvolução de Leray serão apresentadas.

1.1 Estrutura do texto

No Capítulo 2 são apresentadas as equações de Navier-Stokes bidimensionais para fluido incompressível, após é feita a adimensionalização das equações e derivada sua formulação variacional. Define-se os coeficientes aerodinâmicos e por fim são feitas algumas observações a respeito da aproximação do termo não-linear.

No Capítulo 3 é apresentada a teoria de elementos finitos, tais como os espaços, a condição inf-sup discreta e após são dadas as equações discretizadas no espaço. São apresentados os métodos temporais: Euler implícito, Crank-Nicolson e método θ de passo fracionado. Por fim apresenta-se o método da penalidade.

Cálculos de erro, taxas de convergência e aproximação de coeficientes aerodinâmicos via o método de elementos finitos são dadas no Capítulo 4. O modelo de deconvolução de Leray, que é utilizado como modelo de regularização para simulação de escoamentos turbulentos é dado no Capítulo 5.

No Capítulo 6 apresenta-se resultados da pesquisa. São aproximadas soluções da equação de Navier-Stokes em problemas com soluções exatas conhecidas. Calcula-se erros da solução aproximada para a velocidade e para a pressão, e também taxas de convergência dos métodos espaciais e temporais utilizados, fazendo comparações entre eles. Aproxima-se os coeficientes de arrasto e sustentação em torno de um cilindro via método de elementos finitos. É feito um exemplo com resultados preliminares a respeito do escoamento em torno de um aerofólio.

Por fim no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões da pesquisa.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Nesse capítulo serão apresentadas as equações governantes: as equações de Navier-Stokes (ENS). Estas equações diferenciais descrevem o escoamento de um fluido e permitem calcular campos de velocidade e pressão de um escoamento, por isso são muito utilizadas em aerodinâmica. É feita a adimensionalização das equações, de onde aparece o número de Reynolds, que permite avaliar o tipo do escoamento (a estabilidade do fluxo) e pode indicar se o escoamento é laminar, transiente ou turbulento.

Depois é apresentada a formulação variacional das equações de Navier-Stokes, que é imprescindível para o método de elementos finitos. Após, algumas aplicações e definições são dadas a respeito dos coeficientes aerodinâmicos. Por fim, faz-se algumas considerações teóricas e computacionais a respeito do termo convectivo.

2.1 Equações de Navier-Stokes

A aplicação da segunda Lei de Newton a um elemento de fluido em um escoamento, considerando as forças que atuam sobre o elemento e supondo o fluido como newtoniano, resulta as equações de Navier-Stokes. Estas, dependentes do tempo, com condição de contorno de Dirichlet, para um fluido incompressível

bidimensional em coordenadas cartesianas são dadas por

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em } (0, T] \times \Omega, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } [0, T] \times \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em } [0, T] \times \partial\Omega, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega} p \, dx dy = 0 \quad \text{em } [0, T], \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{u} = (u^1(x, y; t), u^2(x, y; t))$ é a velocidade para duas dimensões, $p(x, y; t)$ é a pressão, $\mathbf{f} = (f^1(x, y; t), f^2(x, y; t))$ é a força, ν é a viscosidade cinemática, ρ é a massa específica, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é o domínio, $\partial\Omega$ é a fronteira, \mathbf{u}_0 é a velocidade inicial e $[0, T]$ é o intervalo de tempo. Para este trabalho considere $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$.

Observe que a normalização da pressão (2.5) tem objetivo de assegurar unicidade da pressão, pois se p é solução, $p + c$ também poderia ser, para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Note que eliminando o primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.1) obtém-se as equações de Navier-Stokes em regime estacionário. Eliminando o terceiro termo do lado esquerdo de (2.1) obtém-se a equação de Stokes. A equação de Oseen é obtida considerando o terceiro do termo do lado esquerdo como $(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, onde \mathbf{b} é fixo.

2.2 Adimensionalização

A adimensionalização das equações é feita com o objetivo de obter os parâmetros envolvidos. Nas equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis pode ser feita a partir de grandezas adimensionais, de acordo com Hughes et al. [17]:

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_0}, \quad p^* = \frac{p}{U_0^2}, \quad t^* = \frac{t U_0}{L}, \quad \nabla^* = \nabla L, \quad \mathbf{f}^* = \frac{\mathbf{f} L}{U_0^2},$$

onde U_0 , L são, respectivamente, valores de referência de velocidade e comprimento. Substituindo-os em (2.1)-(2.2) temos,

$$\begin{aligned} \frac{U_0^2}{L} \mathbf{u}_{t^*}^* - \frac{U_0}{L^2} \nu \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{U_0^2}{L} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \frac{U_0^2}{L} \nabla^* p^* &= \frac{U_0^2}{L} \mathbf{f}^*, \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{L}{U_0^2}$ e desconsiderando os asteriscos, tem-se as equações adimensionalizadas

$$\mathbf{u}_t - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em } (0, T] \times \Omega, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } [0, T] \times \Omega, \quad (2.7)$$

onde $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$ é o número de Reynolds. Este número adimensional é o principal parâmetro utilizado para caracterizar se o fluxo está sob regime laminar, transiente ou turbulento. Observe que, de modo geral, se esse número é superior a 10^4 , o regime é considerado turbulento, veja Lesieur [30].

Na mecânica de fluidos, escoamento laminar é aquele em que as partículas se deslocam em camadas individualizadas, sem troca de massa entre elas e o escoamento turbulento é aquele em que as partículas apresentam um movimento aleatório, ou seja, a velocidade apresenta componentes transversais ao movimento geral do conjunto do fluido.

O escoamento laminar é o menos comum na prática, mas pode ser visualizado, por exemplo, no início da trajetória da fumaça de um cigarro. Mas a uma certa distância do cigarro observa-se movimentos transversais, que caracterizam o regime turbulento. O escoamento turbulento é o que descreve a maioria dos problemas reais.

2.3 Formulação Variacional

Primeiramente apresenta-se um teorema fundamental para o método de elementos finitos.

Teorema 2.3.1. (*Teorema da Divergência*) *Se $\partial\Omega$ é suficientemente suave para ser o gráfico de uma função Lipschitz, \mathbf{n} o vetor unitário normal e \mathbf{v} suficientemente suave, então*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Demonstração. Pode ser encontrada em Aris [1]. □

Abaixo é dada a definição de norma.

Definição 2.3.1. *Seja $u \in L^2(\Omega)$, pode-se definir uma norma $\|\cdot\|$ em $L^2(\Omega)$ por*

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}. \quad (2.8)$$

onde (\cdot, \cdot) é o produto interno no espaço $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço da velocidade $X = H_0^1(\Omega)^2$ e da pressão $Q = L_0^2(\Omega)$, onde $H_0^1(\Omega)^2 = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 \text{ e } \nabla \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^{2 \times 2} : \mathbf{v} = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ é um espaço de Hilbert ($H^1(\Omega)^2$) com condição de contorno zero e $L_0^2 = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx dy = 0\}$ é um espaço de Hilbert $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ com média zero.

Para derivar a formulação variacional das ENS: seja a velocidade $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$ e a pressão $p : (0, T] \rightarrow Q$, para qualquer $t \in (0, T]$ tome $\mathbf{v} \in X$ e $q \in Q$, multiplique, respectivamente, por (2.1)-(2.2) e integre em Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{v} \, dx dy - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx dy + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx dy + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx dy = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx dy, \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot q \, dx dy = 0, \end{aligned}$$

em que $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, integra-se por partes e aplica-se o teorema da divergência,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}_t \mathbf{v} \, dxdy - \frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dxdy + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dxdy + \\ + \int_{\partial\Omega} p \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dxdy = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dxdy, \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot q \, dxdy = 0, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ é o vetor normal. Note que $\mathbf{v} \in X$, logo $\mathbf{v} = 0$ em $\partial\Omega$. O problema resume-se a encontrar a velocidade $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$ e a pressão $p : (0, T] \rightarrow Q$ tal que

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (f, \mathbf{v}), \quad (2.9)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0, \quad (2.10)$$

para qualquer $\mathbf{v} \in X$ e $q \in Q$.

Define-se agora um subespaço de divergência livre $V \subset X$, tal que $V = \{\mathbf{v} \in X : (\nabla \cdot \mathbf{v}, q) = 0, \quad \forall q \in Q\}$. Note que V é um subespaço fechado de X , veja Layton [25].

A solução do problema não-estacionário para $\mathbf{u} \in V$ é dada por

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (f, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.11)$$

Segue definição de alguns espaços.

Definição 2.3.2. *Seja $X = H_0^1(\Omega)^2$ e $Q = L_0^2(\Omega)$, tome*

$$\begin{aligned} L^2(0, T; X) &= \{\mathbf{v} : [0, T] \rightarrow X : \int_0^T \|\nabla \mathbf{v}\|^2 dt < \infty\}, \\ L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) &= \{\mathbf{v} : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)^2 : \text{ess sup}_{0 < t < T} \|\mathbf{v}\| < \infty\} \text{ e} \\ L^2(0, T; Q) &= \{q : (0, T] \rightarrow Q : \int_0^T \|q\|^2 dt < \infty\}. \end{aligned}$$

Em Layton [25] é dada a definição de solução forte.

Definição 2.3.3. *(Solução Forte) Seja (\mathbf{u}, p) solução forte de (2.1)-(2.5), se $\mathbf{u} \in L^2(0, T; X) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$*

- $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$ é diferenciável com $\mathbf{u}_t : (0, T] \rightarrow X^*$ integrável e $p : (0, T] \rightarrow X$ é contínua;

- (\mathbf{u}, p) satisfaz

$$\int_0^T [(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + \frac{1}{Re}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})] dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt,$$

para qualquer $\mathbf{v} \in L^2(0, T; X) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ e

$$\int_0^T (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) dt = 0,$$

para todo $q \in L^2(0, T; Q)$;

- $\mathbf{u}_0 \in V$ e

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0;$$

- $\mathbf{u} \in L^4(0, T; X)$.

Aqui X^* é o espaço dual de X , com norma $\|\cdot\|_{-1}$. Como V^* é o espaço dual de V , com norma $\|\cdot\|_*$, segue abaixo definição.

Definição 2.3.4. Dada uma função $f \in L^2(\Omega)$, a norma X^* e a norma V^* de f são definidas por

$$\|f\|_{-1} = \sup_{v \in X} \frac{(f, v)}{\|\nabla v\|}, \quad \|f\|_* = \sup_{v \in V} \frac{(f, v)}{\|\nabla v\|}. \quad (2.12)$$

De Layton [25], operacionamente, a norma do dual de $V =$ a norma V^* da funções, $\|f\|_*$, é a menor norma satisfazendo,

$$(f, v) \leq \|f\|_* \|\nabla v\|, \quad (2.13)$$

Como $V \subset X$, as normas são relacionadas da seguinte forma

$$\|f\|_* \leq \|f\|_{-1}. \quad (2.14)$$

Neste trabalho não será abordada a existência de soluções para o problema contínuo de Navier-Stokes, para detalhes estude Galdi [11]. No entanto, abaixo segue uma proposição importante para provar existência de soluções, a condição inf-sup contínua.

Proposição 2.3.1. *(condição inf-sup contínua) Existe uma constante $\beta > 0$ tal que*

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{(q, \nabla \cdot \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\| \|q\|} \geq \beta > 0. \quad (2.15)$$

2.4 Coeficientes Aerodinâmicos

Os coeficientes aerodinâmicos são números adimensionais utilizados para o estudo aeronáutico, aerodinâmico e automobilístico. Medem as forças que sofre um corpo qualquer em movimento num fluido. Alguns dos coeficientes mais conhecidos são o coeficiente de sustentação ou *lift coefficient* (c_l) e o coeficiente de arrasto ou *drag coefficient* (c_d).

A obtenção destes coeficientes pode ser conseguida mediante duas vias fundamentais: a experimental e a teórica. Para a medição experimental se usam túneis de vento e maquetes em escala, aproveitando as técnicas da análise dimensional; ou ainda se mede diretamente em vôo. A via teórica se baseia na aplicação da dinâmica de fluidos computacional, que trata de resolver as equações da mecânica de fluidos aplicadas ao corpo de estudo, mediante análise numérica com a ajuda de computadores. Neste trabalho será tratada apenas a via teórica.

2.4.1 Coeficiente de Arrasto

Batchelor [2] define o arrasto como a componente resultante de força paralela (e oposta em direção) a velocidade do corpo. Para a explicação do arrasto uma ideia intuitiva: quando uma pessoa coloca a mão para fora de um veículo em

movimento, imediatamente sente uma força empurrando o braço na direção contrária a velocidade, esta força, em geral, é chamada de arrasto.

O coeficiente de arrasto é um coeficiente adimensional usado para quantificar o arrasto. Quanto mais baixo for o coeficiente menor será o arrasto do objeto.

Este coeficiente é muito comum em design de automóveis, para efeitos aerodinâmicos. Como o arrasto aerodinâmico aumenta com o quadrado da velocidade, é preferível um valor baixo, pois isso influi diretamente no consumo de combustível.

Outra aplicação do coeficiente de arrasto é na indústria de carros de corrida, onde as pessoas estão interessadas em diminuir o arrasto para atingir altas velocidades. Mas para diminuir o arrasto deve-se tomar alguns cuidados. Note que a partir do momento que o arrasto é muito baixo, corre-se o risco do veículo voar, para isso aumenta-se o coeficiente de sustentação, que será discutido na próxima subseção. Para altas velocidades, por exemplo um carro de Fórmula 1, também deve-se observar a estabilidade aerodinâmica do carro. Para estes veículos é crucial maximizar o coeficiente de sustentação e manter a estabilidade a fim de minimizar o coeficiente de arrasto.

Schäfer [35] define o coeficiente de arrasto:

$$c_d(t) = \frac{2}{\rho L U_{max}^2} \int_S \left(\rho \nu \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}_s}(t)}{\partial \mathbf{n}} n_y - p(t) n_x \right) dS \quad (2.16)$$

onde, ρ é a massa específica, L é o comprimento do corpo, U_{max} é a velocidade máxima do fluido, S é a superfície do corpo, Ω é o domínio, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$ é o vetor normal em S , $\mathbf{t}_s = (n_y, -n_x)$ é o vetor tangente e $\mathbf{u}_{\mathbf{t}_s} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_s$ é a velocidade tangencial em S .

2.4.2 Coeficiente de Sustentação

Batchelor [2] define sustentação em torno de um corpo: é a componente de força normal ao sentido do movimento do corpo.

O coeficiente de sustentação é um coeficiente adimensional usado para quantificar a sustentação. Pode-se afirmar que quanto maior for este coeficiente, maior será sustentação do corpo.

Em aeronáutica, a sustentação é a principal força que permite que uma aeronave se mantenha em vôo. Esta, ao ser maior que o peso total da aeronave, lhe permite decolar. Além disso, o coeficiente de sustentação depende diretamente do ângulo de ataque da asa. A medida que o ângulo de ataque aumenta, o c_l aumenta também (com sinal positivo), até chegar a um ponto máximo. Depois disso o fluxo de ar que passa sobre os extrados (parte superior da asa) não consegue correr em sua totalidade e manter-se aderido ao perfil aerodinâmico, dando lugar ao estol, resultando em perda de sustentação. Uma aeronave em situação de estol não está voando mas sim caindo, daí a importância do estudo do coeficiente de sustentação.

Em automobilismo, como já comentado no estudo do coeficiente de arrasto, o coeficiente de sustentação é importante. A fim do carro de corrida ter pouco arrasto, deve-se aumentar o coeficiente de sustentação em sentido ao solo (ou seja, com sinal negativo) com o objetivo de obter apoio aerodinâmico, fazendo com que o carro não vôle e tenha maior velocidade nas curvas.

Schäfer [35] define o coeficiente de sustentação:

$$c_l(t) = -\frac{2}{\rho L U_{max}^2} \int_S \left(\rho \nu \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}_s}(t)}{\partial \mathbf{n}} n_x + p(t) n_y \right) dS \quad (2.17)$$

2.5 Termo trilinear

Na formulação da equação de Navier-Stokes existe um termo trilinear, definido em $X \times X \times X$ por

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

O seguinte lema é dado em John [19].

Lema 2.5.1. *Se $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^d$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ em $\partial\Omega$. Então*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -(\nabla \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}).$$

Demonstração. Da integração por partes tem-se

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})|_{\partial\Omega} - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \mathbf{v})$$

e por hipótese $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ em $\partial\Omega$, daí tem-se o resultado. \square

Corolário 2.5.1. *Com as mesmas hipóteses do lema anterior, então*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = ((\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\nabla \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}).$$

Mas se $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ tem-se

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \tag{2.18}$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0, \tag{2.19}$$

$$b^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})). \tag{2.20}$$

onde $b^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ é a forma anti-simétrica do termo trilinear.

Para maiores detalhes a respeito do termo trilinear olhe o livro de Temam [40].

Agora, perceba que o termo da equação de Navier-Stokes $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ é não-linear. De modo geral, para calcular a solução de equações não-lineares utiliza-se métodos iterativos que requerem, em cada etapa, a solução de um sistema linear, dados (\mathbf{u}_0, p_0) . Neste trabalho serão abordados três métodos discutidos em John[18] e Gunzburger [14].

2.5.1 Método mais simples

O método mais simples consiste em mover o termo não-linear para o lado direito da igualdade em (2.9), ou seja, dados $(\mathbf{u}^m, p^m) \in X \times Q$ calcule $(\mathbf{u}_{m+1}, p_{m+1}) \in X \times Q$, tal que

$$(\mathbf{u}_{t,m+1}, \mathbf{v}) + \frac{1}{Re}(\nabla \mathbf{u}_{m+1}, \nabla \mathbf{v}) - (p_{m+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (f, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m, \mathbf{v}), \quad (2.21)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_{m+1}, q) = 0, \quad (2.22)$$

para $\forall (\mathbf{v}, q) \in (X, Q)$.

Note que essa aproximação consiste em resolver um problema de Stokes dependendo do tempo em cada iteração. Experimentalmente é um método não recomendado, pois geralmente a convergência não é muito boa, principalmente se o número de Reynolds for grande.

2.5.2 Método do Ponto Fixo

O método do ponto fixo ou método de Picard resolve o termo não-linear das seguintes maneiras:

$$(\mathbf{u}_{m+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{m+1} \approx (\mathbf{u}_{m+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_m \quad (2.23)$$

ou

$$(\mathbf{u}_{m+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{m+1} \approx (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_{m+1}. \quad (2.24)$$

A aproximação dada por (2.23) não é tão utilizada, pois há uma derivação numérica da iteração anterior a ser feita (ou seja, aproximar a derivada da velocidade da iteração passada), o que em alguns casos pode ocasionar a perda de precisão da solução.

Em (2.24) a derivada da velocidade é calculada na iteração presente. Por isso a precisão, em geral, é melhor que (2.23). Observe que (2.24) conduz às equações de Oseen: dados $(\mathbf{u}_m, p_m) \in X \times Q$ calcule $(\mathbf{u}_{m+1}, p_{m+1}) \in X \times Q$, tal que

$$(\mathbf{u}_{t,m+1}, \mathbf{v}) + \frac{1}{Re}(\nabla \mathbf{u}_{m+1}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_{m+1}, \mathbf{v}) - (p_{m+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (f, \mathbf{v}), \quad (2.25)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_{m+1}, q) = 0, \quad (2.26)$$

para $\forall (\mathbf{v}, q) \in (X, Q)$.

Segundo John [18], a partir de suas simulações numéricas, a aproximação pelo método de ponto fixo é geralmente usada em problemas onde se deseja resolver as equações de Navier-Stokes em regime transiente, que são exatamente as mesmas utilizadas nesse trabalho. Ainda segundo John, estas demandam menos tempo de resolução que o método Newton, que será apresentado a seguir.

2.5.3 Método de Newton

O método de Newton resolve o termo não linear da seguinte maneira:

$$(\mathbf{u}_{m+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{m+1} \approx (\mathbf{u}_{m+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_m + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_{m+1} - (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m. \quad (2.27)$$

A justificativa do método é feita por Segal [37], definindo $f(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})$ tal que

$$f(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (2.28)$$

e expandindo em série de Taylor

$$\begin{aligned} f_{m+1}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) &= f_m(\mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{u}_m) + (\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{u}} + \\ &+ \nabla(\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial \nabla \mathbf{u}} + O(\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m)^2. \end{aligned}$$

Negligenciando o termo quadrático, e substituindo de (2.28) tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{m+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_{m+1} &\approx \mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m + (\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m) \cdot \nabla \mathbf{u}_m + \nabla(\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{u}_m \\ &= \mathbf{u}_{m+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_m + \mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m,\end{aligned}\tag{2.29}$$

como queríamos demonstrar.

O método de Newton é utilizado principalmente na resolução das equações de Navier-Stokes em regime estacionário. Por ter convergência quadrática atinge a solução mais rapidamente do que o método de Picard. Ainda, pode-se utilizar o método de Newton também para problemas em regime transiente, porém, por necessitar maior trabalho computacional (a matriz de rigidez é cheia), deve-se observar se o método é vantajoso em relação aos outros.

Enfim, a escolha do método de aproximação do termo não-linear deve sempre ser ponderada. Cada método tem suas vantagens, o método do ponto fixo resolve mais rápido o problema em cada iteração temporal; em contrapartida, o método de Newton é mais lento em cada iteração, mas por ser de segunda ordem, necessita de menos iterações para convergir. Logo, somente com experimentos e experiência computacional para fazer esta escolha.

3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL VIA ELEMENTOS FINITOS E MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

O método dos elementos finitos originou-se da necessidade de resolver complexos problemas de elasticidade e análise estrutural, na engenharia civil e aeronáutica. Seu desenvolvimento pode ser considerado a partir dos trabalhos de Alexander Hrennikoff (1941) e Richard Courant (1942). Eles compartilharam uma característica essencial: a malha de discretização de um domínio contínuo em um conjunto de sub-domínios discretos, chamados de elementos. A partir de 1947, Olgierd Zienkiewicz do Imperial College reuniu esses métodos para juntos construir o que seria chamado de Método dos Elementos Finitos.

O desenvolvimento do método de elementos finitos começou em meados dos anos de 1950 para estrutura e análise estrutural. Ao final da década de 50, os conceitos-chave da matriz de rigidez e montagem do elemento existiam essencialmente sob a forma usada hoje. Mas o método de elementos finitos foi obtido com uma base matemática rigorosa somente em 1973 com a publicação de Strang e Fix "*An Analysis of The Finite Element Method*", e desde então tem sido generalizada em um ramo da matemática aplicada para modelagem numérica de sistemas físicos e com muitas aplicações na engenharia, por exemplo, nas disciplinas de eletromagnetismo e dinâmica de fluidos.

A grande vantagem do método de elementos finitos com relação a outros métodos, em especial o método de diferenças finitas, é quando o problema a ser resolvido tem geometrias complicadas. No método de elementos finitos é muito mais fácil e direto refinar determinadas áreas do domínio, geralmente, onde o escoamento tem maiores variações e necessita de maior refinamento. Além disso, o método de elementos finitos tem uma sólida base teórica que dá maior confiabilidade e em

muitos casos, faz com que seja possível estimar o erro da solução aproximada por elementos finitos.

3.1 Introdução ao Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos consiste em discretizar um problema contínuo para um domínio poligonal, e com finitos graus de liberdade se obter uma solução aproximada do problema resolvendo um problema discreto ou um sistema de equações. Finalmente muitas incógnitas podem ser encontradas através da utilização do computador.

O processo de discretização de elementos finitos é diferente de diferenças finitas, por exemplo. A discretização do método de elementos finitos se inicia a partir da obtenção da formulação variacional do problema proposto.

Para obter um problema que possa ser resolvido no computador a ideia em elementos finitos é tomar um espaço discreto de dimensão finita $X^h \subset X$ com funções polinomiais por partes. O objetivo é então encontrar a velocidade, pressão, temperatura, etc; de maneira discreta: $u^h \in X^h$. A partir disso, a expectativa é aproximar u^h da melhor maneira possível, ou seja, uma aproximação que consiga simular bem o problema contínuo.

Para construir um espaço de dimensão finita considere um problema unidimensional. Por simplicidade tome funções lineares por partes e seja $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M < x_{M+1} = 1$ a partição da malha com intervalo regular, ou seja, os subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$ para $j = 1, \dots, M + 1$, são igualmente espaçados, h . Tome X^h o conjunto de funções u^h , tal que seja linear em cada subintervalo, u^h contínua em $[0, 1]$ e $u^h(0) = 0, u_h(1) = 0$, veja a figura¹ 3.1.

¹Figura retirada de Johnson[22]

Para descrever uma solução $u^h \in X^h$ precisa-se calcular os valores $\alpha_j = u^h(x_j)$ em cada nó x_j , $j = 0, \dots, M + 1$, chamados graus de liberdade. Para isso são introduzidas as funções base $\phi_j \in X^h$, para $j = 1, \dots, M$, tal que $\phi_j(x_i) = 1$ se $i = j$ ou $\phi_j(x_i) = 0$ se $i \neq j$, ou seja, a função da base ϕ_j tem valor 1 no nó x_j e valor 0 nos demais nós. Uma ilustração das funções base lineares pode ser vista na figura² 3.2.

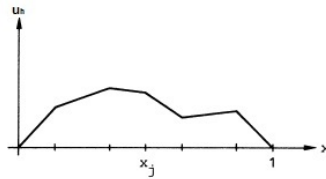


Figura 3.1: Exemplo de função $u_h \in X^h$

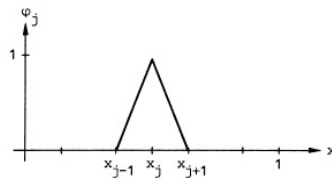


Figura 3.2: Função base linear em 1D

Para cada $u^h \in X^h$ pode-se escrever uma única combinação linear da função base ϕ_j

$$u^h = \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \phi_j(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.1)$$

onde M é a quantidade de graus de liberdade.

A partir da formulação variacional do problema discreto é feita a substituição de $u^h \in X^h$. Para a função teste v^h do problema variacional escolha uma função do espaço X^h , ou seja $v^h = \phi_i(x)$. Assim, pode-se obter o sistema linear do problema, que será abordado na seção 2.3.

²Figura retirada de Johnson[22]

Considere agora um exemplo em 2D. Tome Γ o contorno do polígono de domínio Ω . A discretização do domínio feita por uma triangularização de Ω , subdividindo Ω em um conjunto $T^h = \cup_{j=1}^M K_j$ de triângulos não-sobrepostos K_j , onde nenhum vértice de triângulo encontra-se no lado de um outro triângulo (veja figura³ 3.3). Pode-se ainda subdividir o domínio através de quadrados, caso esse não abordado nesse trabalho.

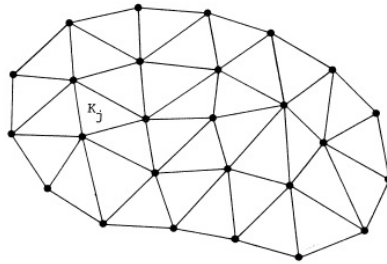


Figura 3.3: Malha em 2D com funções base lineares

Da mesma forma que foi feito para uma dimensão, as funções base para duas dimensões são definidas

$$\phi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

onde $N_i = (x_i, y_i)$ são os nós da malha. Veja na figura⁴ 3.4 as funções base lineares em duas dimensões (P1). Perceba que existem alguns triângulos hachurados, estes fazem parte do suporte de ϕ_j , são triângulos com um nó em comum, ou ainda, é o conjunto de pontos onde $\phi_j \neq 0$. Agora, em 2D, $\mathbf{u}^h \in X^h$, onde $\mathbf{u}^h = (u^{h,1}, u^{h,2})$, é dado por

$$u^{h,k}(x, y; t) = \sum_{j=1}^M \alpha_j^k \phi_j(x, y), \quad \alpha_i^k = u^{h,k}(N_i), \quad x, y \in \Omega \cup \Gamma, \quad (3.2)$$

onde $k = 1, 2$.

³Figura retirada de Johnson[22]

⁴Figura retirada de Johnson[22]

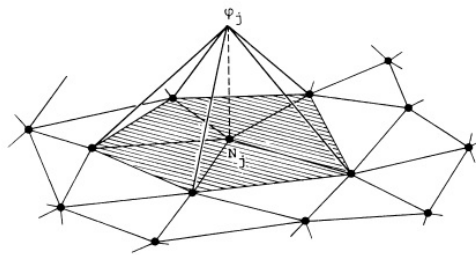


Figura 3.4: Função base linear 2D

3.1.1 Espaços

Além de funções bases lineares pode-se utilizar outras bases. Ainda em uma dimensão, veja na figura⁵ 3.5 funções de base quadráticas. Perceba que com bases quadráticas aumenta significativamente a quantidade de graus de liberdade com relação as funções base lineares, pois para cada função local se tem três pontos e não mais dois pontos.

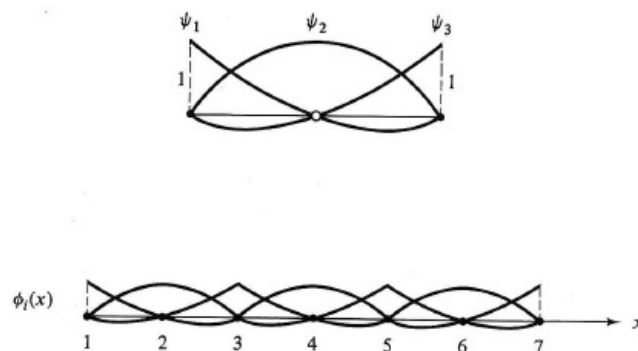


Figura 3.5: Funções base quadráticas em 1D

Além das funções base quadráticas em uma dimensão, na figura⁶ 3.6 segue em duas dimensões (P2). Note que em um triângulo tem-se seis graus de liberdade e não mais três, como acontecia nas funções lineares.

⁵Figura retirada de Becker[3]

⁶Figura retirada de Johnson[22]

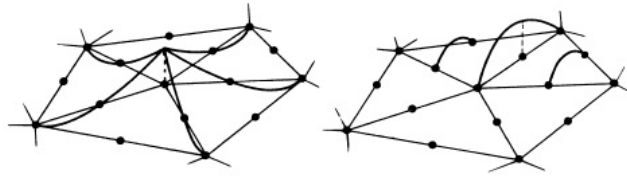


Figura 3.6: Funções base quadráticas 2D

As funções base cúbicas (P3) e bolha (P1b) também serão utilizadas neste trabalho, seguem na figura⁷ 3.7 e na figura⁸ 3.8, respectivamente. Note que P3 tem dez graus de liberdade apenas em um triângulo.

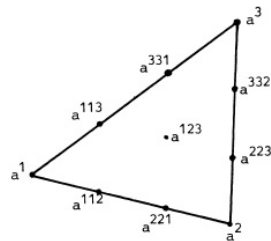


Figura 3.7: Triângulo dado por uma função base cúbica

As funções bolha são explicadas em Layton [25]: Tome X^h um espaço discreto contínuo de funções lineares por partes nos triângulos. Cada triângulo $K \in T^h$ tem três nós N_1, N_2 e N_3 . Sejam $\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \lambda_3(x, y)$ funções base lineares. Com estas funções define-se uma função cúbica por partes que é diferente de zero em somente um triângulo - a função bolha:

$$\phi_j(x, y) = \begin{cases} \lambda_1(x, y)\lambda_2(x, y)\lambda_3(x, y), & (x, y) \in K, \\ 0, & (x, y) \in K. \end{cases}$$

Note que $\phi_j(x, y) \in C^0$, $\phi_j(x, y) > 0$ em K e $\phi_j(x, y) = 0$ fora de K .

⁷Figura retiradas de Johnson[22]

⁸Figura retirada de Layton[25]

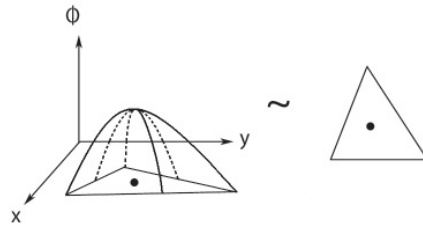


Figura 3.8: Função bolha em 2D

No problema de Navier-Stokes discreto existem aproximações para a velocidade e pressão, logo necessita-se dois espaços, que devem ser escolhidos de forma adequada para que tais soluções existam.

Segal [37] comenta alguns cuidados que devem ser tomados na escolha desses espaços. Note que a equação da continuidade (1.2) contém apenas incógnitas da velocidade, no entanto o número de linhas dessa equação é determinada pelo número de graus de liberdade da pressão. Então, dentro desse contexto, deve-se exigir que o número de incógnitas da pressão não exceda o número de incógnitas da velocidade, ou seja, a ordem de aproximação da pressão deve ser mais baixa que a ordem de aproximação da velocidade.

Mas, esta regra não é suficiente para garantir que o número de incógnitas da pressão é menor que da velocidade. Considere a malha da figura⁹ 3.9 e suponha um espaço linear para a velocidade e constante para a pressão (P1/P0), note que a constante da pressão foi colocada no centro do elemento. Logo, nesta malha observa-se oito nós para a pressão e 9 nós para a velocidade. Suponha, agora, condição de contorno de Dirichlet para a velocidade, o que significa que todas velocidades no contorno são dadas. Note que a pressão é única, com exceção a uma constante aditiva, que pode ser corrigida fixando um grau de liberdade da pressão. Assim, tem-se duas incógnitas para a velocidade e sete para a pressão, ou seja, a matriz é singular. Conclui-se que o elemento P1/P0 não é admissível.

⁹Figura retirada de Segal [37]

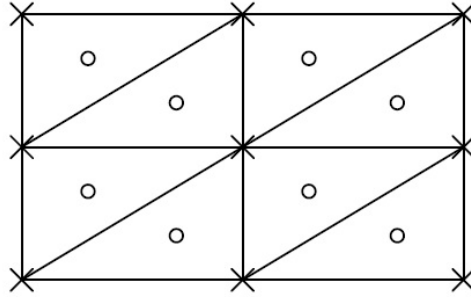


Figura 3.9: Malha P1/P0

Na prática, a condição de admissibilidade dos elementos dada acima é bastante útil, mas não explica porque o elemento satisfaz essa condição, apenas identifica os elementos que não satisfazem. Para isso existe uma condição de admissibilidade dada por Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi, conhecida como a condição inf-sup discreta.

Condição 3.1.1. (*Condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi-LBB^h*) Suponha que (X^h, Q^h) satisfaz

$$\inf_{q^h \in Q^h} \sup_{\mathbf{v}^h \in X^h} \frac{(q^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h)}{\|\nabla \mathbf{v}^h\| \|q^h\|} \geq \beta^h > 0 \quad (3.3)$$

onde β^h é limitado uniformemente em h .

Nesse trabalho serão utilizados os seguintes elementos: P1b/P1, P2/P1 e P3/P2, que satisfazem a condição inf-sup discreta. O elemento P2/P1 é conhecido como Taylor-Hood, e comumente é utilizado na resolução de problemas que envolvem as equações de Navier-Stokes. Ainda, o elemento P1b/P1 é conhecido como MINI.

3.2 Discretização Espacial

A aproximação do método de elementos finitos para as equações de Navier-Stokes com dependência do tempo (2.9)-(2.10) consiste em escolher espaços de dimensão finita $X^h \subset X$ e $Q^h \subset Q$, e calcular $(\mathbf{u}^h, p^h) \in (X^h, Q^h)$.

Os espaços devem ser escolhidos de forma apropriada. Uma base para o espaço da velocidade é X^h , tal que

$$X^h = \text{span}\{\{(\phi_i^h, 0)^T\}_{i=1}^{N_v} \cup \{(0, \phi_i^h)^T\}_{i=N_v+1}^{2N_v}\},$$

onde N_v é quantidade de graus de liberdade para cada componente da velocidade. Da mesma forma, uma base para o espaço da pressão é Q^h , tal que

$$Q^h = \text{span}\{\psi_i^h\}_{i=1}^{N_p}$$

onde N_p é a quantidade de graus de liberdade para a pressão.

A solução aproximada por elementos finitos de (2.9)-(2.10) é dada: encontre $\mathbf{u}^h : [0, T] \rightarrow X^h$ e $p^h : (0, T] \rightarrow Q^h$ satisfazendo

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{Re}(\nabla \mathbf{u}^h, \nabla \mathbf{v}^h) + b^*(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in X^h \quad (3.4) \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^h, q^h) &= 0 \quad \forall q^h \in Q^h, \quad (3.5) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{u}^h = (u^{h,1}, u^{h,2})$, pois trata-se de um escoamento bidimensional. Pode-se escrever \mathbf{u}^h e p^h da seguinte maneira

$$u^{h,k} = \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^k(t) \phi_i(x, y), \quad k = 1, 2 \quad (3.6)$$

$$p^h = \sum_{i=1}^{N_p} \beta_i(t) \psi_i(x, y), \quad (3.7)$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ são coeficientes dependentes do tempo.

Agora, para um melhor entendimento de cada termo das equações (3.4)-(3.5) e também para na próxima seção poder escrever o sistema, algumas contas são necessárias. Escolha $\mathbf{v}^h \in X^h$ e $q^h \in Q^h$. Observação: $\mathbf{v}^h = (v^{h,1}, v^{h,2}) = (\phi_j, \phi_j)$, $j = 1, \dots, N_v$, e $q^h = \psi_j$, $j = 1, \dots, N_p$. Por questões de notação, nesta seção considere os índices (x_1, x_2) ao invés de (x, y) para coordenadas espaciais.

Termo difusivo:

$$\begin{aligned}
(\nabla u^{h,k}, \nabla v^{h,k}) &= \int_{\Omega} \nabla u^{h,k} : \nabla v^{h,k} dx_1 dx_2 \quad k = 1, 2 \\
&= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^{h,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u^{h,1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u^{h,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial u^{h,2}}{\partial x_2} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{\partial v^{h,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial v^{h,1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v^{h,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial v^{h,2}}{\partial x_2} \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u^{h,1}}{\partial x_1} \frac{\partial v^{h,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^{h,1}}{\partial x_2} \frac{\partial v^{h,1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u^{h,2}}{\partial x_1} \frac{\partial v^{h,2}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^{h,2}}{\partial x_2} \frac{\partial v^{h,2}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) + \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^k \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) \right] \quad j = 1, \dots, N_v
\end{aligned}$$

Termo da pressão:

$$\begin{aligned}
(p^h, \nabla \cdot v^{h,k}) &= \left(\sum_{i=1}^{N_p} \beta_i \psi_i, \frac{\partial v^{h,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v^{h,2}}{\partial x_2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_p} \beta_i \left(\psi_i, \frac{\partial v^{h,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v^{h,2}}{\partial x_2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_p} \left[\beta_i \left(\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \right) + \beta_i \left(\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{N_p} \beta_i \left[\left(\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \right) + \left(\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) \right] \quad j = 1, \dots, N_v
\end{aligned}$$

Termo convectivo - utilizando iteraçao de ponto fixo (2.24):

$$\begin{aligned}
(u_m^{h,k} \cdot \nabla u_{m+1}^{h,k}, v^{h,k}) &= \int_{\Omega} u_m^{h,k} \cdot \nabla u_{m+1}^{h,k} \cdot v^{h,k} dx_1 dx_2 \quad k = 1, 2 \\
&= \int_{\Omega} (u_m^{h,1}, u_m^{h,2}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{m+1}^{h,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{m+1}^{h,1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_{m+1}^{h,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{m+1}^{h,2}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot (v^{h,1}, v^{h,2}) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\Omega} \left(u_m^{h,1} \frac{\partial u_{m+1}^{h,1}}{\partial x_1} + u_m^{h,2} \frac{\partial u_{m+1}^{h,1}}{\partial x_2}, u_m^{h,1} \frac{\partial u_{m+1}^{h,2}}{\partial x_1} + \right. \\
&\quad \left. + u_m^{h,2} \frac{\partial u_{m+1}^{h,2}}{\partial x_2} \right) \cdot (v^{h,1}, v^{h,2}) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\Omega} \left(u_m^{h,1} \frac{\partial u_{m+1}^{h,1}}{\partial x_1} v^{h,1} + u_m^{h,2} \frac{\partial u_{m+1}^{h,1}}{\partial x_2} v^{h,1} + u_m^{h,1} \frac{\partial u_{m+1}^{h,2}}{\partial x_1} v^{h,2} \right. \\
&\quad \left. + u_m^{h,2} \frac{\partial u_{m+1}^{h,2}}{\partial x_2} v^{h,2} \right) dx_1 dx_2 \\
&= \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_{i,m+1}^1 \left(u_m^{h,1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \phi_j \right) + \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_{i,m+1}^1 \left(u_m^{h,2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \phi_j \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_{i,m+1}^2 \left(u_m^{h,1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \phi_j \right) + \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_{i,m+1}^2 \left(u_m^{h,2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \phi_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_{i,m+1}^k \left[\left(u_m^{h,1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \phi_j \right) + \left(u_m^{h,2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \phi_j \right) \right]
\end{aligned}$$

onde $j = 1, \dots, N_v$ e $k = 1, 2$.

Termo de forca:

$$(f^k, v^{h,k}) = (f^1, v^{h,1}) + (f^2, v^{h,2}) \quad (3.8)$$

$$= (f^1, \phi_j) + (f^2, \phi_j) \quad (3.9)$$

$$= \sum_{k=1}^2 (f^k, \phi_j) \quad j = 1, \dots, N_v$$

Termo da incompressibilidade:

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot u^{h,k}, q^h) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u^{h,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^{h,2}}{\partial x_2} \right) q^h dx_1 dx_2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \psi_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \psi_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_v} \left[\alpha_i^1 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \psi_j \right) + \alpha_i^2 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \psi_j \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i^k \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}, \psi_j \right) \quad j = 1, \dots, N_p
\end{aligned}$$

Termo da derivada temporal:

$$\begin{aligned}
(u_t^{h,k}, v^{h,k}) &= (u_t^{h,1}, v^{h,1}) + (u_t^{h,2}, v^{h,2}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_v} \alpha_t^1 \phi_i, \phi_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{N_v} \alpha_t^2 \phi_i, \phi_j \right) \tag{3.10} \\
&= \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_t^k (\phi_i, \phi_j) \quad j = 1, \dots, N_v
\end{aligned}$$

3.2.1 Sistema

A partir das equações (3.4)-(3.5) e sabendo o que cada termo representa, pode-se escrever o sistema linear para obter as aproximações da velocidade e da pressão. Definindo as seguintes matrizes e vetor:

$$\begin{aligned}
(M)_{ij} &= (\phi_i, \phi_j), \quad i, j = 1, \dots, N_v \\
(A(u_m^h))_{ij} &= Re^{-1}(\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) + \left(u_m^{h,1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} + u_m^{h,2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \phi_j \right), \quad i, j = 1, \dots, N_v \\
(B^k)_{ij} &= - \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}, \psi_j \right), \quad i = 1, \dots, N_v, \quad j = 1, \dots, N_p, \quad k = 1, 2 \\
(F^k)_j &= (f^k, \phi_j), \quad j = 1, \dots, N_v, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

O sistema de (3.4)-(3.5), a ser resolvido, é dado por

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_t^1 \\ \alpha_t^2 \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 & (B^1)^T \\ 0 & A & (B^2)^T \\ B^1 & B^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Note que a matriz é dada por $(2N_v + N_p)$ linhas \times $(2N_v + N_p)$ colunas. A matriz A é conhecida como matriz de rigidez e M a matriz massa.

A fim de obter provas relacionadas a estabilidade e convergência, a pressão (sob a condição inf-sup discreta) pode ser eliminada do sistema a partir da escolha do espaço discreto de divergência livre $V^h \subset X^h$:

$$V^h := \{\mathbf{v}^h \in X^h : (q^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) = 0 \quad \forall q^h \in Q^h\}. \quad (3.12)$$

Observe que espaço discreto de divergência livre não é igual ao espaço contínuo de divergência livre, ou seja, $V^h \not\subseteq V$, porque, em geral, $\nabla \cdot \mathbf{u}^h \neq 0$.

De (3.4), a velocidade aproximada da ENS $\mathbf{u}^h(t) : [0, T] \rightarrow V^h$ satisfaz

$$(\mathbf{u}_t^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}^h, \nabla \mathbf{v}^h) + b^*(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h. \quad (3.13)$$

3.3 Discretização Temporal

O sistema de EDO's proveniente da semi-discretização apresenta três características que influenciam a escolha dos métodos de discretização temporal:

- rigidez do problema em regiões dominadas por efeitos difusivos;
- a sensibilidade global do problema físico e a falta de regularidade de sua solução;
- grande número de pontos na malha, que leva a um sistema grande de EDO's.

Neste trabalho serão abordados métodos implícitos, que são usados em problemas onde os métodos explícitos exigiriam passos de tempo impreterivelmente pequenos para manter a condição de estabilidade. Fica claro que métodos implícitos exigem uma computação adicional e conseqüentemente podem elevar o tempo computacional, mas sob o ponto de vista deste trabalho ainda são mais vantajosos por serem incondicionalmente estáveis. Métodos explícitos, geralmente, são utilizados em problemas onde o passo de tempo precisa ser muito pequeno (devido a natureza do problema), o que satisfaz automaticamente a condição de estabilidade desses métodos. Outra vantagem é a facilidade de paralelização.

Defina $\Delta t > 0$ o passo de tempo, isto é $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, onde $t_n = n\Delta t$, para $n = 1, \dots, N_T$, onde $N_T = \frac{T}{\Delta t}$ e considere $\mathbf{u}_n^h \cong \mathbf{u}^h(x, y; t_n)$ e $p_n^h \cong p^h(x, y; t_n)$. Neste trabalho serão tratados os métodos de Euler implícito (EI), Crank-Nicolson (CN), método θ de passo fracionado 0 (FS0) e método θ de passo fracionado 1 (FS1).

Todos os métodos temporais podem ser definidos a partir de um problema de valor inicial, segue

$$u_t + A(u) = f, \quad (3.14)$$

$$u(0) = u_0, \quad (3.15)$$

onde A é um operador, tal que $A : H \rightarrow H$, onde H é um espaço de Hilbert. Tome dois operadores A_1 e A_2 , tal que

$$A = A_1 + A_2. \quad (3.16)$$

Da teoria de EDO's tem-se algumas considerações a respeito da estabilidade.

A função de estabilidade (ou fator de amplificação) $R(x)$ aparece da discretização temporal dos métodos numéricos, onde se está interessado em u_{n+1}^h , tal que

$$u_{n+1}^h = R(x)u_n^h. \quad (3.17)$$

Definição 3.3.1. *Segue definição a respeito da estabilidade dos métodos numéricos.*

- A-estável: *tem-se que o método é A-estável quando a função de estabilidade satisfaz $|R(x)| \leq 1$*
- Fortemente A-estável: *tem-se que o método é fortemente A-estável quando a função de estabilidade satisfaz $\lim_{x \rightarrow \infty} |R(x)| = \omega < 1$*

3.3.1 Método de Euler implícito (EI)

O método de Euler implícito é muito comum na teoria de EDO's e também pode ser utilizado em EDP's. É um método fortemente A-estável. A desvantagem de EI com relação aos demais métodos que serão apresentados neste trabalho, é ser de primeira ordem. A partir de (3.14)-(3.15) define-se EI:

$$u_0^h = u_0; \quad (3.18)$$

então para $n > 0$, com u_n^h conhecido, obtenha u_{n+1}^h por

$$\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t} + A(u_{n+1}^h) = f_{n+1}, \quad (3.19)$$

onde $u_{n+1} = u((n+1)\Delta t)$.

Assim, o método de EI para as ENS é dado: a partir de $(\mathbf{u}_n^h, p_n^h) \in (X^h, Q^h)$ encontre $(\mathbf{u}_{n+1}^h, p_{n+1}^h) \in (X^h, Q^h)$ satisfazendo

$$\left(\frac{\mathbf{u}_{n+1}^h - \mathbf{u}_n^h}{\Delta t}, \mathbf{v}^h \right) + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}_{n+1}^h, \nabla \mathbf{v}^h) + b^*(\mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v}^h) - (p_{n+1}^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in X^h, \quad (3.20)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}^h, q^h) = 0 \quad \forall q^h \in Q^h. \quad (3.21)$$

Uma dificuldade que se encontra nos métodos implícitos é a resolução de um sistema não-linear em cada passo de tempo. Para isso existem métodos iterativos de linearização local, tais como Picard e Newton, vistos na seção 2.5.

3.3.2 Método de Crank-Nicolson (CN)

O método de Crank-Nicolson, estudado em Teman[40], é um método de segunda ordem de passo simples, combinação dos métodos de Euler implícito e Euler explícito. A partir de (3.14)-(3.15) e (3.16) define-se CN:

$$u_0^h = u_0; \quad (3.22)$$

então para $n > 0$, com u_n^h conhecido, obtenha u_{n+1}^h satisfazendo

$$\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t} + A_1(u_{n+1}^h) + A_2(u_n^h) = f_{n+1/2}, \quad (3.23)$$

onde $f_{n+1/2} = f((n + 1/2)\Delta t)$, $A_1 = \frac{1}{2}A$ e $A_2 = \frac{1}{2}A$.

Considere, por simplicidade, $H = \mathbb{R}^N$, $f = 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$ e A uma matriz $N \times N$ simétrica e positiva definida. Isolando u_{n+1}^h tem-se

$$u_{n+1}^h = \left(\frac{I + \frac{\Delta t A}{2}}{I - \frac{\Delta t A}{2}} \right) u_n^h, \quad (3.24)$$

que implica em

$$u_{n+1}^{h,i} = \left(\frac{1 + \frac{\Delta t \lambda_i}{2}}{1 - \frac{\Delta t \lambda_i}{2}} \right) u_n^{h,i}, \quad (3.25)$$

onde $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, são os autovalores da matriz A .

Tome $x = \lambda \Delta t$, considere uma função racional $R_1(x)$ definida por

$$R_1(x) = \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}, \quad (3.26)$$

chamada função de estabilidade.

Note que tem-se $|R_1(x)| \leq 1$, logo o método CN é A-estável. Agora, a verificação de fortemente A-estável, segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |R_1(x)| = 1, \quad (3.27)$$

ou seja, o método CN não é fortemente A-estável.

A seguir é dada a solução das equações de Navier-Stokes discretizadas no espaço via elementos finitos e no tempo pelo método CN.

A versão *1-leg* (ou seja, o termo não-linear é mantido na sua forma completa) do método CN para as ENS é dada: a partir de $(\mathbf{u}_n^h, p_n^h) \in (X^h, Q^h)$ encontre $(\mathbf{u}_{n+1}^h, p_{n+1}^h) \in (X^h, Q^h)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1}^h - \mathbf{u}_n^h}{\Delta t}, \mathbf{v}^h \right) + \frac{1}{Re} \left(\nabla \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2} \right), \nabla \mathbf{v}^h \right) + \\ & + b^* \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, \frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, \mathbf{v}^h \right) - \left(\frac{p_{n+1}^h + p_n^h}{2}, \nabla \cdot \mathbf{v}^h \right) = \\ & = \left(\frac{\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n}{2}, \mathbf{v}^h \right) \quad \forall \mathbf{v}^h \in X^h, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\left(\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2} \right), q^h \right) = 0 \quad \forall q^h \in Q^h. \quad (3.29)$$

Muitas variações de (3.28)-(3.29) são utilizadas. Neste trabalho, para os termos que acompanham a pressão optou-se por

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_{n+1}^h + p_n^h}{2}, \nabla \cdot \mathbf{v}^h \right) & \approx (p_{n+1}^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h), \\ \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, q^h \right) & \approx (\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}^h, q^h), \end{aligned}$$

e para o termo não-linear optou-se pela versão *2-leg*, dada por

$$b^* \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, \frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, \mathbf{v}^h \right) \approx \frac{1}{2} b^*(\mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{2} b^*(\mathbf{u}_n^h, \mathbf{u}_n^h, \mathbf{v}^h). \quad (3.30)$$

A versão *2-leg* é mais conveniente que a versão *1-leg* pois descreve o termo não-linear com menor quantidade de termos, e isso pode reduzir o tempo computacional. Mas segundo Maubach [32] deve-se tomar cuidado na escolha dessa simplificação. Maubach diz que pela experiência computacional, para fluxos laminares com número de Reynolds moderados esta escolha é apropriada, e os resultados não tem diferenças significativas. Já para escoamentos com alto número de Reynolds,

a escolha da versão 2-leg pode não alcançar os resultados desejados. Acredita-se que nesta simplificação os termos desconsiderados tenham propriedade de estabilizar o fluxo. No Capítulo 6, serão apresentados resultados comparando o método CN com as duas abordagens do termo não linear.

Da mesma forma que EI, o termo convectivo necessita de linearização, que pode ser feita através dos métodos de Picard e Newton.

Introduz-se θ_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, que condensa a forma de escrever os métodos e ajuda a implementação do código computacional e Δt_k o passo de tempo para o termo da pressão. Para se obter a solução aproximada das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, dado $(\mathbf{u}_k^h, p_k^h) \in (X^h, Q^h)$ encontre $(\mathbf{u}_{k+1}^h, p_{k+1}^h) \in (X^h, Q^h)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{k+1}^h, \mathbf{v}^h) &+ \theta_1 \Delta t [Re^{-1}(\nabla \mathbf{u}_{k+1}^h, \nabla \mathbf{v}^h) + b^*(\mathbf{u}_{k+1}^h, \mathbf{u}_{k+1}^h, \mathbf{v}^h)] - \Delta t_k (p_{k+1}^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) = \\ &= (\mathbf{u}_k^h, \mathbf{v}^h) - \theta_2 \Delta t [Re^{-1}(\nabla \mathbf{u}_k^h, \nabla \mathbf{v}^h) + b^*(\mathbf{u}_k^h, \mathbf{u}_k^h, \mathbf{v}^h)] + \\ &+ \theta_3 \Delta t (\mathbf{f}_k, \mathbf{v}^h) + \theta_4 \Delta t (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in X^h, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1}^h, q^h) = 0 \quad \forall q^h \in Q^h. \quad (3.32)$$

Na tabela 3.1 são dados os parâmetros para os devidos métodos de discretização temporal. O método de Euler explícito não é abordado no presente trabalho.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	t_k	t_{k+1}	Δt_k
Euler explícito	0	1	1	0	t_n	t_{n+1}	Δt
Euler implícito (EI)	1	0	0	1	t_n	t_{n+1}	Δt
Crank-Nicolson (CN)	0.5	0.5	0.5	0.5	t_n	t_{n+1}	Δt

Tabela 3.1: Tabela de parâmetros para métodos temporais

3.3.3 Método θ de passo fracionado (FS)

A escolha do método FS justifica-se do fato que o método EI (fortemente A-estável) é apenas de primeira ordem enquanto o método CN apesar de ser de segunda ordem, as vezes pode sofrer com instabilidade devido o fato de não ser fortemente A-estável (CN é A-estável).

Outra diferença do método FS, descrito por Bristeau, Glowinski e Periaux [7], para os métodos EI e CN é que ele resolve o problema proposto em três etapas para cada passo de tempo, por isso é um método de passo fracionado.

Tome θ no intervalo $(0, 1/2)$, a ideia do método FS é dividir o intervalo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ em três subintervalos, e integrar com respeito ao tempo em $[n\Delta t, (n+\theta)\Delta t]$, em seguida no intervalo $[(n+\theta)\Delta t, (n+1-\theta)\Delta t]$ e por fim em $[(n+1-\theta)\Delta t, (n+1)\Delta t]$. A partir de (3.15), tome

$$u_0^h = u_0; \quad (3.33)$$

O método derivado por Bristeau, Glowinski e Periaux [7] toma (3.14) e (3.16) para definir FS: para $n > 0$, com u_n^h conhecido, obtenha $u_{n+\theta}^h$, $u_{n+1-\theta}^h$ e u_{n+1}^h satisfazendo

$$\frac{u_{n+\theta}^h - u_n^h}{\theta\Delta t} + A_1(u_{n+\theta}^h) + A_2(u_n^h) = f_{n+\theta}, \quad (3.34)$$

$$\frac{u_{n+1-\theta}^h - u_{n+\theta}^h}{(1-2\theta)\Delta t} + A_1(u_{n+\theta}^h) + A_2(u_{n+1-\theta}^h) = f_{n+1-\theta}, \quad (3.35)$$

$$\frac{u_{n+1}^h - u_{n+1-\theta}^h}{\theta\Delta t} + A_1(u_{n+1}^h) + A_2(u_{n+1-\theta}^h) = f_{n+1}, \quad (3.36)$$

Considere $H = \mathbb{R}^N$, $f = 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$ e A uma matriz $N \times N$ simétrica e positiva definida, onde

$$A_1 = \tau A, \quad A_2 = \eta A, \quad \text{com } \tau + \eta = 1, \quad \tau > 0, \eta < 1. \quad (3.37)$$

Claramente, a solução de (3.14) é dada por

$$u(t) = e^{-tA}u_0. \quad (3.38)$$

Tome $\theta^* = 1 - 2\theta$, de (3.34)-(3.37), isolando u_{n+1}^h tem-se

$$u_{n+1}^h = (I + \tau\theta\Delta tA)^{-1}(I - \eta\theta\Delta tA)(I + \eta\theta^*\Delta tA)^{-1}(I - \tau\theta^*\Delta tA) \times \\ \times (I + \tau\theta\Delta tA)^{-1}(I - \eta\theta\Delta tA)u_n^h, \quad (3.39)$$

que implica em

$$u_{n+1}^{h,i} = \frac{(1 - \eta\theta\Delta t\lambda_i)^2(1 - \tau\theta^*\Delta t\lambda_i)}{(1 + \tau\theta\Delta t\lambda_i)^2(1 + \eta\theta^*\Delta t\lambda_i)}u_n^{h,i}. \quad (3.40)$$

onde $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, são os autovalores da matriz A.

Seja a função de estabilidade $R_2(x)$ dada por

$$R_2(x) = \frac{(1 - \eta\theta x)^2(1 - \tau\theta^*x)}{(1 + \tau\theta x)^2(1 + \eta\theta^*x)}. \quad (3.41)$$

Aplicando o limite quando $x \rightarrow +\infty$, obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |R_2(x)| = \eta/\tau, \quad (3.42)$$

Note que se $|R_2(x)| > 1$ o método é instável, por isso, precisa-se determinar

$$\tau \geq \eta, \quad (3.43)$$

para ter a estabilidade do método FS para grandes autovalores de A.

Agora, uma discussão sobre a ordem de aproximação do método FS.

Expandindo (3.41) em série de Taylor pode-se mostrar que

$$R_2(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2[1 + (\eta^2 - \tau^2)(2\theta^2 - 4\theta + 1)] + x^2\epsilon(x), \quad (3.44)$$

com $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$. Implica de (3.44), que o método FS é de segunda ordem se $\tau = \eta (= 1/2$ de (3.37)) ou

$$\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.29289\dots \quad (3.45)$$

Caso contrário o esquema seria de primeira ordem. Observe que se $\tau = \eta$, o método FS é incondicionalmente estável para qualquer $\theta \in (0, 1/2)$, no entanto de (3.42) tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |R_2(x)| = 1, \quad (3.46)$$

que indica que o esquema não é fortemente A-estável. Logo, não é bom para resolver problemas rígidos, ou seja, problemas que $\lambda_N/\lambda_1 > 1$. A partir dessa observação espera-se que o método não seja adequado para capturar soluções estáveis de problemas rígidos obtidas a partir das equações diferenciais parciais.

Segundo Bristeau, Glowinski e Periaux [7], de modo geral, deve-se escolher τ e η a fim de obter uma útil construção de matrizes do sistema nos três subpassos, isto é, tem que satisfazer

$$\tau\theta = \eta\theta^*, \quad (3.47)$$

que implica

$$\tau = \frac{\theta^*}{1 - \theta}, \quad \eta = \frac{\theta}{1 - \theta} = 1 - \tau. \quad (3.48)$$

Combinando (3.43) e (3.48) obtém-se que $0 < \theta \leq 1/3$. Para $\theta = 1/3$ implica $\tau = \eta$. Se $0 < \theta < 1/3$ e τ e η são dados por (3.48), tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |R_2(x)| < 1 \quad (3.49)$$

ou seja, o método é fortemente A-estável.

Ainda, pode-se provar que $\theta \in [\theta', 1/3]$, (com $\theta' = 0.087385\dots$) e τ, η dados por (3.48), implica que o método FS é incondicionalmente estável.

Assim, se $\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se $\tau = 2 - \sqrt{2}$ e $\theta^* = \eta = \sqrt{2} - 1$.

O método FS vem sofrendo algumas modificações ao longo do tempo (no que se refere ao peso dado nas partes implícitas e explícitas e a abordagem do termo não linear), as simulações deste trabalho seguirão a proposta apresentada em John et al. [21] para as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, que são dadas por (3.31)-(3.32) e a escolha dos parâmetros na tabela 3.2. Note que existem duas variações do método θ de passo fracionado, FS0 e FS1. A diferença é que FS1 requer o cálculo da força \mathbf{f} nos tempos t_n e $t_{n+1} - \theta\Delta t$, enquanto FS0 requer o cálculo da \mathbf{f} nas três etapas de tempo.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	t_k	t_{k+1}	Δt_k
FS0	$\tau\theta$	$\eta\theta$	$\eta\theta$	$\tau\theta$	t_n	$t_n + \theta\Delta t$	$\theta\Delta t$
	$\eta\theta^*$	$\tau\theta^*$	$\tau\theta^*$	$\eta\theta^*$	$t_n + \theta\Delta t$	$t_{n+1} - \theta\Delta t$	$\theta^*\Delta t$
	$\tau\theta$	$\eta\theta$	$\eta\theta$	$\tau\theta$	$t_{n+1} - \theta\Delta t$	t_{n+1}	$\theta\Delta t$
FS1	$\tau\theta$	$\eta\theta$	θ	0	t_n	$t_n + \theta\Delta t$	$\theta\Delta t$
	$\eta\theta^*$	$\tau\theta^*$	0	θ^*	$t_n + \theta\Delta t$	$t_{n+1} - \theta\Delta t$	$\theta^*\Delta t$
	$\tau\theta$	$\eta\theta$	θ	0	$t_{n+1} - \theta\Delta t$	t_{n+1}	$\theta\Delta t$

Tabela 3.2: Tabela de parâmetros para os métodos θ de passo fracionado

A partir da tabela 3.2 percebe-se a diferença dos métodos θ de passo fracionado para os métodos de Euler implícito e Crank-Nicolson. Como comentado anteriormente, FS resolve o problema em três etapas para cada passo de tempo Δt . Essas três etapas não são divididas igualmente, veja a figura 3.10. Perceba que a primeira etapa é dada por $\theta\Delta t$, a segunda etapa é dada por $\theta^*\Delta t$ e a terceira etapa novamente $\theta\Delta t$, assim as três etapas totalizam um passo de tempo Δt .

Comparando com outro método de segunda ordem: CN, o método FS atribui diferentes pesos para as partes implícitas e explícitas em cada etapa do passo de tempo, diferentemente de CN, que trata as partes de forma igual, isso pode ser

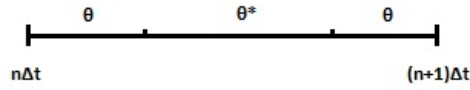


Figura 3.10: Passo de tempo do método θ de passo fracionado

verificado na tabela 3.2. Perceba que na primeira e terceira etapas (totalizando aproximadamente 60% do passo de tempo Δt) a parte implícita (θ_1 e θ_4) tem maior peso que a parte explícita (θ_2 e θ_3), pois $\tau > \eta$. Ainda, note que a pressão é tratada completamente implícita em cada etapa do passo de tempo, para verificar isso observe o termo Δt_k na tabela 3.2.

Para maiores detalhes sobre esse método temporal recomenda-se o artigo de Kloucek e Rys [23], que trata da estabilidade e convergência do método FS para as equações de Navier Stokes para fluidos incompressíveis em regime transiente.

Feita a discretização temporal pode-se escrever o sistema linear com discretização no espaço e no tempo, segue

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \Delta t A + M & 0 & \Delta t_k (B^1)^T \\ 0 & \theta_1 \Delta t A + M & \Delta t_k (B^2)^T \\ B^1 & B^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k+1}^1 \\ \alpha_{k+1}^2 \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_3 \Delta t F^1 + \theta_4 \Delta t F^1 \\ \theta_3 \Delta t F^2 + \theta_4 \Delta t F^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta_2 \Delta t A + M & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 \Delta t A + M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k^1 \\ \alpha_k^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

3.4 Método da Penalidade

O método da penalidade tem a característica de desacoplar a velocidade e a pressão. Segundo Gunzburger [14] este método tem ganhado espaço por três razões: o desacoplamento da velocidade e da pressão leva a redução do número de

graus de liberdade; a condição de incompressibilidade pode ser removida do processo de solução da velocidade; e porque o método funciona bem na prática.

O método da penalidade é utilizado em problemas de escoamentos incompressíveis com o objetivo de estabilizar os elementos que não satisfazem a condição de admissibilidade dos elementos, ou seja, não satisfazem a condição inf-sup discreta.

A ideia do método é perturbar a equação da continuidade (2.2) por um termo pequeno contendo a pressão. Uma escolha é

$$\xi p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (3.51)$$

outras possibilidades podem ser feitas, por exemplo, $\xi \nabla p$, que não será abordada.

O método da penalidade para as equações de Navier-Stokes contínuas (2.1) é dado: Se $p = -\frac{1}{\xi} \nabla \cdot \mathbf{u}$, tem-se

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\xi} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (3.52)$$

com $\xi > 0$. Assim, pode-se resolver a velocidade independente da pressão e depois a pressão é calculada.

Pode-se derivar as equações de Navier-Stokes dependentes do tempo semidiscretas (3.4)-(3.5) utilizando o método da penalidade: encontre $(\mathbf{u}^h, p^h) \in (X^h, Q^h)$ satisfazendo

$$(\mathbf{u}_t^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}^h, \nabla \mathbf{v}^h) + b^*(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in X^h \quad (3.53)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}^h, q^h) - \xi (p^h, q^h) = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (3.54)$$

Do método tem-se o termo,

$$(M_p)_{ij} = (\psi_i, \psi_j) \quad i, j = 1, \dots, N_p,$$

conhecido como matriz massa da pressão.

Note que o sistema (3.11) é modificado:

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_t^1 \\ \alpha_t^2 \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 & (B^1)^T \\ 0 & A & (B^2)^T \\ B^1 & B^2 & \xi M_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Perceba que o bloco de zeros, que multiplicava os graus de liberdade da pressão, que havia em (3.11), agora com o método da penalidade não existe mais.

4 ERROS, TAXAS DE CONVERGÊNCIA E APROXIMAÇÃO DE COEFICIENTES

Em simulações numéricas algumas perguntas sempre devem ser feitas: Será que u^h converge para u ? Ou ainda, será que o código está correto? Se a resposta para essas duas perguntas for positiva outra pergunta pode ser feita: Com que rapidez a solução aproximada está convergindo para a solução exata?

Todas essas perguntas podem ser respondidas através de cálculos de erros e taxas de convergência em problemas com soluções exatas conhecidas, e a partir disso resolver problemas onde a solução ainda não é conhecida ou não pode ser calculada.

Ainda, para problemas onde a solução exata não é conhecida, por exemplo, o escoamento em torno de um cilindro, pode-se aproximar coeficientes aerodinâmicos e fazer comparações com a literatura, a fim de aproximar o fluxo da melhor maneira possível.

4.1 Erros

Por uma questão de notação, considere

$$\begin{aligned} \|v\|_{\infty,k} &:= \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \|v(t, \cdot)\|_k, \\ \|v\|_{p,k} &:= \left(\int_0^T \|v(t, \cdot)\|_k^p dt \right)^{1/p}, \\ \|v\|_{\infty,k} &:= \max_{0 \leq n \leq M} \|v_n\|_k, \\ \|v\|_{m,k} &:= \left(\sum_{n=0}^M \|v_n\|_k^m \Delta t \right)^{1/m}. \end{aligned}$$

Assume-se que os espaços da velocidade e da pressão satisfazem a condição inf-sup discreta (3.3) e as seguintes propriedades de aproximação

$$\inf_{v \in X^h} \|u - v\| \leq Ch^{k+1} \|u\|_{k+1}, \quad u \in H^{k+1}(\Omega)^d, \quad (4.1)$$

$$\inf_{v \in X^h} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{k+1}, \quad u \in H^{k+1}(\Omega)^d, \quad (4.2)$$

$$\inf_{q \in Q^h} \|p - q\| \leq Ch^{s+1} \|p\|_{s+1}, \quad p \in H^{s+1}(\Omega). \quad (4.3)$$

onde k é o grau do polinômio interpolador da velocidade e s da pressão.

Precisa-se saber se a solução aproximada converge para a solução contínua. Em Layton [25] é dado o teorema referente a convergência para as equações de Navier-Stokes incompressíveis em regime transiente discretizadas no tempo pelo método de CN.

Teorema 4.1.1. *Tome (\mathbf{u}, p) suficientemente suaves, soluções forte das equações de Navier-Stokes (2.9)-(2.10). Discretização temporal dada pelo método de CN. Suponha que (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) são aproximações de $(\mathbf{u}(0), p(0))$. Então existe uma constante $C = C(\mathbf{u}, p)$ tal que*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\infty,0} &\leq F(\Delta t, h) + Ch^{k+1} \|\mathbf{u}\|_{\infty, k+1}, \quad (4.4) \\ \left\{ \nu \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla(\mathbf{u}_{n+1/2} - \mathbf{u}_{n+1/2}^h)\|^2 \right\}^{1/2} &\leq F(\Delta t, h) + C\nu^{1/2} \Delta t^2 \|\nabla \mathbf{u}_{tt}\|_{2,0} + \\ &\quad + C\nu^{1/2} h^k \|\mathbf{u}\|_{2, k+1}, \quad (4.5) \end{aligned}$$

onde $F(\Delta t, h) = O(\Delta t^2 + h^k)$:

$$\begin{aligned} F(\Delta t, h) &:= C \{ \nu^{-1/2} h^{k+1/2} (\|\mathbf{u}\|_{4, k+1}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{4,0}^2) + \nu^{1/2} h^k \|\mathbf{u}\|_{2, k+1} \\ &\quad + \nu^{-1/2} h^k (\|\mathbf{u}\|_{4, k+1}^2 + \nu^{-1/2} (\|\mathbf{u}_0^h\| + \nu^{-1/2} \|\mathbf{f}\|_{2,*})) + \nu^{-1/2} h^{s+1} \|p_{1/2}\|_{2, s+1} \\ &\quad + (\Delta t)^2 (\|\mathbf{u}_{ttt}\|_{2,0} + \nu^{-1/2} \|p_{tt}\|_{2,0} + \|\mathbf{f}_{tt}\|_{2,0} + \nu^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_{tt}\|_{2,0} + \nu^{-1/2} \|\nabla \mathbf{u}_{tt}\|_{4,0}^2 \\ &\quad \quad \quad + \nu^{-1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{4,0}^2 + \nu^{-1/2} \|\nabla \mathbf{u}_{1/2}\|_{4,0}^2) \}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

k é o grau do polinômio base da velocidade e s é da pressão.

No caso de utilização de elementos Taylor-Hood e método temporal Crank-Nicolson, segue abaixo.

Corolário 4.1.1. *Suponha o método de discretização temporal CN e os espaços X^h e Q^h compostos pelos elementos Taylor-Hood. Então o erro é da ordem*

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_{\infty,0} + \left\{ \nu \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \| \nabla(\mathbf{u}_{n+1/2} - \mathbf{u}_{n+1/2}^h) \|^2 \right\}^{1/2} = O(h^2 + \Delta t^2). \quad (4.7)$$

A partir de (4.4) note que o erro no espaço da velocidade na norma L^2 para as equações de Navier-Stokes é dado por $\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \| = O(h^k)$, onde k é o grau da função base da velocidade. Mas da teoria de interpolação tem-se $\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \| = O(h^{k+1})$, ou seja, a estimativa dada por (4.4) não é ótima. Por isso, pode-se tentar utilizar um argumento de dualidade chamado truque de Nitsche, a fim de obter a mesma taxa proposta pela teoria de interpolação, $\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \| = O(h^{k+1})$.

Neste trabalho não será detalhada tal estimativa, que pode ser verificada para um problema de Poisson em Thomée [41]. Mas tem-se observado que a estimativa é válida também para as equações de Navier-Stokes incompressível em regime transiente. O teorema 4.1.1 poderia ser provado novamente utilizando-se do argumento de dualidade a fim de obter esta estimativa ótima. A obtenção destas taxas ótimas para as ENS pode ser verificada com os resultados computacionais no Capítulo 6 deste trabalho.

No Capítulo 6 algumas análises de erro são feitas, por isso se fazem necessárias algumas definições, que seguem

- O erro da velocidade na norma $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ é dado por

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)} = \left\{ \sum_{n=0}^{N_T-1} \| (\nabla \mathbf{u}_{n+1} - \nabla \mathbf{u}_{n+1}^h) \|^2 \Delta t \right\}^{1/2}, \quad (4.8)$$

- O erro para a pressão na norma $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ é

$$\| p - p_h \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \left\{ \sum_{n=0}^{N_T-1} \| (p_{n+1} - p_{n+1}^h) \|^2 \Delta t \right\}^{1/2}. \quad (4.9)$$

4.2 Taxas de Convergência

Para obter as taxas de convergência no espaço da velocidade na norma do supremo deve-se ter atenção. Para alcançar as taxas ótimas da velocidade na norma L^2 algumas escolhas apropriadas devem ser feitas: para os métodos de discretização temporal CN e FS escolhe-se $\Delta t = h^{3/2}$ quando o elemento for P2/P1, para P1b/P1 escolhe-se $\Delta t = h$ e para o elemento P3/P2 escolhe-se $\Delta t = h^2$. Não serão analisadas as taxas de convergência no espaço a partir do método de Euler implícito.

Ainda, se o objetivo é encontrar as taxas de convergência no tempo algumas escolhas também devem ser feitas. Para o erro da velocidade na norma L^2 com elemento P1b/P1, deve-se escolher $h = \Delta t$ para os métodos CN e FS, pois ambos são de ordem 2 e para o método de EI basta $h = (\Delta t)^{1/2}$, pois é de ordem 1.

As taxas de convergência ótimas dos métodos espaciais esperadas pela literatura são dadas na tabela (4.1).

Elemento	Taxa em $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $	Taxa em $\ \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $
P1b/P1	2	1
P2/P1	3	2
P3/P2	4	3

Tabela 4.1: Taxas de convergência esperadas para diferentes elementos

Para obter a taxa de convergência um cálculo deve ser feito. Suponha que o erro obedeça uma relação do tipo

$$E(h) = Ch^p,$$

onde p é a taxa esperada.

Divida $E(h_1)$ por $E(h_2)$, onde h_1 e h_2 são refinamentos sucessivos da malha, tal que $h_1 > h_2$, temos

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p,$$

aplique o logaritmo

$$\log \frac{E(h_1)}{E(h_2)} = p \log \left(\frac{h_1}{h_2}\right),$$

por fim, a taxa é dada por

$$p = \frac{\log \frac{E(h_1)}{E(h_2)}}{\log \left(\frac{h_1}{h_2}\right)}. \quad (4.10)$$

4.3 Aproximação de Coeficientes Aerodinâmicos

Os coeficientes aerodinâmicos podem ser obtidos a partir de (2.16)-(2.17). Mas, existe uma alternativa de aproximação dos coeficientes a partir da formulação variacional do problema, que se adapta muito bem para o método de elementos finitos. Essa alternativa é dada em John [19].

Lembrando que $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$, $\mathbf{t}_s = (n_y, -n_x)$ e $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, então

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{t}_s}}{\partial \mathbf{n}} = (u_{1,x}n_y - u_{2,x}n_x)n_x + (u_{1,y}n_y - u_{2,y}n_x)n_y. \quad (4.11)$$

Do termo incompressível das equações de Navier-Stokes,

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = u_{1,x} + u_{2,y}. \quad (4.12)$$

Tome S o corpo em deslocamento. Desde que a velocidade em cada componente seja constante no contorno de S , então é válido que

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_s} = u_{1,x}n_y - u_{1,y}n_x = 0 \quad \text{em } S, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_s} = u_{2,x}n_y - u_{2,y}n_x = 0 \quad \text{em } S. \quad (4.14)$$

De (4.13) e (4.14) em (4.11), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_{t_s}}{\partial \mathbf{n}} &= (u_{1,y} - u_{2,x})n_x^2 + (u_{1,y} - u_{2,x})n_y^2 \\ &= u_{1,y}(n_x^2 + n_y^2) - u_{2,x}(n_x^2 + n_y^2) = u_{1,y} - u_{2,x}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Então (2.16)-(2.17)

$$\begin{aligned}c_d &= \frac{2}{\rho LU_{max}^2} \int_S \{\rho \nu [(u_{1,x}n_y - u_{2,x}n_x)n_x + (u_{1,y}n_y - u_{2,y}n_x)n_y]n_y - pn_x\} dS, \\ c_l &= -\frac{2}{\rho LU_{max}^2} \int_S \{\rho \nu [(u_{1,x}n_y - u_{2,x}n_x)n_x + (u_{1,y}n_y - u_{2,y}n_x)n_y]n_x + pn_y\} dS\end{aligned}$$

ficam

$$c_d = \frac{2}{\rho LU_{max}^2} \int_S \{\rho \nu [u_{1,y} - u_{2,x}]n_y - pn_x\} dS, \quad (4.16)$$

$$c_l = -\frac{2}{\rho LU_{max}^2} \int_S \{\rho \nu [u_{1,y} - u_{2,x}]n_x + pn_y\} dS. \quad (4.17)$$

Segundo John [19] pode-se derivar novas regras sobre os coeficientes c_d e c_l , calculando-os sobre todo o domínio Ω e não mais sobre S . Para isso, na obtenção da formulação variacional do problema algumas mudanças devem ser feitas. A partir de (2.1), aplicando o teorema da divergência e considerando condição de contorno não nula sobre S , tem-se

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + b^*(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (f, \mathbf{v}) + \\ - \int_S p \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \int_S \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = 0.\end{aligned}\quad (4.18)$$

onde \mathbf{n} acima definido é o vetor normal direcionado de S para Ω . Por isso, altera-se o sinal das integrais em S .

Para o coeficiente de arrasto, tome a função teste $\mathbf{v} = (v_1, 0)^T$ e $v_1|_S = 1$.

Para o coeficiente de sustentação, tome $\mathbf{v} = (0, v_2)^T$ e $v_2|_S = 1$.

Note que para o coeficiente de arrasto,

$$- \int_S p \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = - \int_S pn_x dS, \quad (4.19)$$

e a partir (4.12), (4.14) e (4.15) obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_S \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_S \nu (u_{1,x} n_x + u_{1,y} n_y, u_{2,x} n_x + u_{2,y} n_y) \cdot (1, 0) dS \\
&= \int_S \nu (u_{1,x} n_x + u_{1,y} n_y) dS = \int_S \nu (-u_{2,y} n_x + u_{1,y} n_y) dS \\
&= \int_S \nu (-u_{2,x} n_y + u_{1,y} n_y) dS = \int_S \nu \frac{\partial \mathbf{u}_{t_s}}{\partial \mathbf{n}} n_y dS. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Então, de (4.19) e (4.20) em (4.18), tem-se

$$\int_S \left[\nu \frac{\partial \mathbf{u}_{t_s}}{\partial \mathbf{n}} n_y - p n_x \right] dS = -[(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + b^*(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (f, \mathbf{v})] \quad (4.21)$$

Finalmente, multiplicando tudo por $\frac{2}{\rho L U_{max}^2}$, de (4.16) e (4.21), tem-se

$$c_d(t) = -\frac{2}{\rho L U_{max}^2} [(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + b^*(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (f, \mathbf{v})], \quad (4.22)$$

onde $\mathbf{v} = (v_1, 0)$ e $v_1|_S = 1$

Para o coeficiente de sustentação, analogamente,

$$-\int_S p \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = -\int_S p n_y dS, \quad (4.23)$$

e de (4.12), (4.13) e (4.15)

$$\begin{aligned}
\int_S \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_S \nu (u_{2,x} n_x + u_{2,y} n_y) dS \\
&= \int_S \nu (u_{2,x} n_x - u_{1,x} n_y) dS = \int_S \nu (u_{2,x} n_x - u_{1,y} n_x) dS \\
&= -\int_S \nu \frac{\partial \mathbf{u}_{t_s}}{\partial \mathbf{n}} n_x dS. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Então, de (4.23) e (4.24) em (4.18), tem-se

$$-\int_S \left[\nu \frac{\partial \mathbf{u}_{t_s}}{\partial \mathbf{n}} n_x + p n_y \right] dS = -[(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + b^*(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (f, \mathbf{v})] \quad (4.25)$$

Multiplicando tudo por $\frac{2}{\rho L U_{max}^2}$, de (4.17) e (4.25), tem-se

$$c_l(t) = -\frac{2}{\rho L U_{max}^2} [(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + b^*(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (f, \mathbf{v})], \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{v} = (0, v_2)$ e $v_2|_S = 1$.

5 MODELO DE DECONVOLUÇÃO DE LERAY

Em 1934, J.Leray [28, 29] introduziu a seguinte regularização das equações de Navier-Stokes (2.1)-(2.2)

$$\mathbf{u}_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (5.2)$$

que ficou conhecida como modelo de Leray.

Leray escolheu $\bar{\mathbf{u}} = g_\delta \star \mathbf{u}$, onde \star é a convolução, g_δ é um Gaussiano associado com uma escala de comprimento δ . Essa teoria de Leray mostra-se eficaz como um modelo de regularização para simulação de escoamentos turbulentos com a modificação que o filtro Gaussiano é substituído por um filtro diferencial estudado por Germano [13, 12],

$$\bar{\mathbf{u}} := (-\delta^2 \Delta + 1)^{-1} \mathbf{u}. \quad (5.3)$$

Segue definição do filtro diferencial discreto, dado em Manica e Kaya Merdan [31]

Definição 5.1. (*Filtro diferencial discreto*) Dado $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$, para um filtro de raio $\delta > 0$, $\bar{\mathbf{u}}^h = A_h^{-1} \mathbf{u}$ é a única solução em $X^h \subset X$ de

$$\delta^2 (\nabla \bar{\mathbf{u}}^h, \nabla \mathbf{v}^h) + (\bar{\mathbf{u}}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in X^h \quad (5.4)$$

Definição 5.2. Defina a projeção L^2 , $\Pi^h : L^2(\Omega)^2 \rightarrow X^h$ e o operador Laplaciano discreto $\Delta_h : X \rightarrow X^h$ por

$$(\Pi^h \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = 0, \quad (5.5)$$

$$(\Delta_h \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = -(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}^h), \quad (5.6)$$

para qualquer $\mathbf{v}^h \in X^h$.

Pode-se escrever que $A_h := (-\delta^2 \Delta_h + \Pi^h)$ e $\bar{\mathbf{u}}^h = (-\delta^2 \Delta_h + \Pi^h)^{-1} \mathbf{u}^h$.

Neste trabalho será considerado o modelo de deconvolução de Leray:

$$\mathbf{u}_t + D_N(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (5.8)$$

onde D_N é um operador de deconvolução de van Cittert, dado por Bertero [4], segue definição.

Definição 5.3. *O operador de deconvolução discreto de van Cittert D_N é definido por*

$$D_N \mathbf{u}^h = \sum_{n=0}^N (I - A_h^{-1})^n \mathbf{u}^h. \quad (5.9)$$

Então para $N = 0, 1, 2, 3$, os operadores são dados por

$$D_0^h \mathbf{u}^h = \mathbf{u}^h, \quad \mathbf{u}^h \in X^h, \quad (5.10)$$

$$D_1^h \mathbf{u}^h = 2\mathbf{u}^h - \overline{\mathbf{u}^h}^h, \quad \mathbf{u}^h \in X^h, \quad (5.11)$$

$$D_2^h \mathbf{u}^h = 3\mathbf{u}^h - 3\overline{\mathbf{u}^h}^h + \overline{\overline{\mathbf{u}^h}^h}^h, \quad \mathbf{u}^h \in X^h, \quad (5.12)$$

$$D_3^h \mathbf{u}^h = 4\mathbf{u}^h - 6\overline{\mathbf{u}^h}^h + 4\overline{\overline{\mathbf{u}^h}^h}^h - \overline{\overline{\overline{\mathbf{u}^h}^h}^h}^h, \quad \mathbf{u}^h \in X^h. \quad (5.13)$$

Por questões de notação, quando $N = 0$ tome Leray₀, quando $N = 1$ tome Leray₁, ou seja, para N tem-se Leray_N.

Segundo Dunca e Epshteyn [10] o operador de deconvolução D_N satisfaz para \mathbf{u} suave,

$$D_N \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + O(\delta^{2N+2}) \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.14)$$

Uma vantagem do modelo é que aumentando $N \rightarrow N + 1$ aumenta a precisão de $O(\delta^{2N+2})$ para $O(\delta^{2N+4})$, mas isso requer a resolução de mais um

problema de Poisson $((-\delta^2\Delta + 1)^{-1}\mathbf{u})$ por passo de tempo. Por isso, deve ser observado se é benéfico altos valores de N , pois o tempo computacional pode aumentar significativamente. Observe que na prática trabalha-se com valores $N \leq 7$.

Após obter a formulação variacional, a discretização espacial e a discretização temporal pode-se encontrar a solução aproximada. Tome $\Delta t > 0$, $(\mathbf{u}_0, p_0) \in (X^h, Q^h)$. Para $n = 0, 1, 2, \dots, M-1$, encontre $(\mathbf{u}_{n+1}^h, p_{n+1}^h) \in (X^h, Q^h)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_{k+1}^h, \mathbf{v}^h) + \theta_1 \Delta t [Re^{-1}(\nabla \mathbf{u}_{k+1}^h, \nabla \mathbf{v}^h) + b^*(D_N^h \overline{\mathbf{u}_{k+1}^h}, \mathbf{u}_{k+1}^h, \mathbf{v}^h)] - \\ & - \Delta t_k (p_{k+1}^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) = (\mathbf{u}_k^h, \mathbf{v}^h) - \theta_2 \Delta t [Re^{-1}(\nabla \mathbf{u}_k^h, \nabla \mathbf{v}^h) + b^*(D_N^h \overline{\mathbf{u}_k^h}, \mathbf{u}_k^h, \mathbf{v}^h)] + \\ & + \theta_3 \Delta t (\mathbf{f}_k, \mathbf{v}^h) + \theta_4 \Delta t (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in X^h \quad (5.15) \end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1}^h, q^h) = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (5.16)$$

onde θ_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, são escolhidos de acordo com o método temporal utilizado, veja as tabelas 3.1 e 3.2.

A estimativa de convergência do modelo Leray com CN é dada por Layton et al.[27], segue:

Teorema 5.1. *Tome (\mathbf{u}, p) suficientemente suaves, soluções forte das equações de Navier-Stokes (2.9)-(2.10) satisfazendo as condições de contorno periódicas ou não deslizante, tal que as normas de (\mathbf{u}, p) no lado direito de (5.17)-(5.19) sejam finitas. Suponha (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) aproximações de $(\mathbf{u}(0), p(0))$. Suponha também o método de discretização temporal CN. Então para Δt suficientemente pequeno existe uma constante $C = C(\mathbf{u}, p)$ tal que*

$$\|\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|\|_{\infty,0} \leq F(\Delta t, h, \delta) + Ch^{k+1} \|\|\mathbf{u}\|\|_{\infty,k+1}, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \nu \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\|\nabla(\mathbf{u}_{n+1/2} - \mathbf{u}_{n+1/2}^h)/2\|\|^2 \right\}^{1/2} & \leq F(\Delta t, h, \delta) + C\nu^{1/2} \Delta t^2 \|\|\nabla \mathbf{u}_{tt}\|\|_{2,0} \\ & + C\nu^{1/2} h^k \|\|\mathbf{u}\|\|_{2,k+1} \quad (5.18) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
F(\Delta t, h, \delta) := & C^* \{ \nu^{-1/2} h^{k+1/2} (\| \mathbf{u} \|_{4,k+1}^2 + \| \nabla \mathbf{u} \|_{4,0}^2) + \nu^{1/2} h^k \| \mathbf{u} \|_{2,k+1} \\
& + \nu^{-1/2} h^k (\| \mathbf{u} \|_{4,k+1}^2 + \nu^{-1/2} (\| \mathbf{u}_0^h \| + \nu^{-1/2} \| \mathbf{f} \|_{2,*})) + \nu^{-1/2} h^{s+1} \| p_{1/2} \|_{2,s+1} \\
& + \nu^{-1/2} \delta^{2N+2} \| \Delta^{N+1} A^{-(N+1)} \mathbf{u} \|_{2,0} + \nu^{-1/2} (\delta h^k + h^{k+1}) \left(\sum_{n=0}^N \| A^{-n} \bar{\mathbf{u}} \|_{2,k+1} \right) \\
& + (\Delta t)^2 (\| \mathbf{u}_{ttt} \|_{2,0} + \nu^{-1/2} \| p_{tt} \|_{2,0} + \| \mathbf{f}_{tt} \|_{2,0} + \nu^{1/2} \| \nabla \mathbf{u}_{tt} \|_{2,0} + \nu^{-1/2} \| \nabla \mathbf{u}_{tt} \|_{4,0}^2 \\
& + \nu^{-1/2} \| \nabla \mathbf{u} \|_{4,0}^2 + \nu^{-1/2} \| \nabla \mathbf{u}_{1/2} \|_{4,0}^2) \} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

onde s é o grau do polinômio base da pressão e k da velocidade.

Demonstração. A demonstração desse teorema é feita por Layton et al. [27]. \square

Do teorema pode-se obter as ordens de convergência dos métodos. Abaixo segue utilizando os elementos Taylor-Hood.

Corolário 5.1. *Tome (\mathbf{u}, p) suficientemente suaves, soluções forte das equações de Navier-Stokes (2.9)-(2.10). Suponha (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) são aproximações de $(\mathbf{u}(0), p(0))$. Espaços de elementos finitos Taylor-Hood. Suponha também condições de contorno periódicas ou $\mathbf{u} \in H_0^{2N+2}(\Omega)^2$ nas condições de contorno não deslizante, e que as normas do lado direito de (5.17)-(5.19) sejam finitas. Então o erro do método de elementos finitos para o esquema de deconvolução de Leray é da ordem*

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_{\infty,0} + \left\{ \nu \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \| \nabla (\mathbf{u}_{n+1/2} - \mathbf{u}_{n+1/2}^h) \|^2 \right\}^{1/2} = O(h^2 + \Delta t^2 + \delta^{2N+2})$$

Aqui, também cabe uma discussão a respeito da obtenção de taxas de convergência. Observe que com a utilização dos modelos de deconvolução de Leray deve-se observar a seleção do parâmetro δ .

Primeiro sob o ponto de vista da obtenção das taxas de convergência. Suponha que esteja aproximando as ENS em regime transiente com elementos Taylor-Hood e método temporal CN. A partir da teoria de interpolação espera-se ordem 3 na norma do supremo da velocidade e ordem 2 na norma do gradiente da

velocidade. Escolhendo o modelo de Leray com $N = 0$ (Leray0), note que além de escolher $\Delta t = h^{3/2}$ precisa-se escolher δ , tal que $\delta = h^{3/2}$. Note que escolhendo $\delta = h$ o erro ficaria limitado por δ^2 , já que $N = 0$.

Por isso, quando o modelo de deconvolução de Leray for utilizado com o intuito da obtenção de taxas de convergência deve-se prestar atenção também na escolha de δ .

Sob o ponto de vista da solução do escoamento (exemplo 5 do capítulo 6), onde se está interessado em aproximar qualitativamente problemas reais, a escolha de δ geralmente é feita a fim de que as soluções do modelo de deconvolução de Leray tenham relação com o incremento da malha. Em geral, escolhe-se δ dada por uma função linear de h , por exemplo $\delta = h$ ou $\delta = h/2$.

No exemplo 5 do capítulo 6 (escoamento em torno de um cilindro), a escolha de δ é dada por $\delta = 2\pi r/2n$, onde r é o raio do cilindro e n a quantidade de pontos em torno do cilindro, ou seja, δ é o comprimento do cilindro dividido por duas vezes o número de pontos ao redor do dele. Logo, essa escolha tem relação com o tamanho do incremento da malha próxima ao cilindro (local onde ocorre a maior variação no escoamento).

6 RESULTADOS

Nesse capítulo serão apresentados alguns resultados de solução numérica das equações de Navier-Stokes, em alguns casos comparando-os com suas respectivas soluções exatas, através de cálculos de erros, gráficos e taxas de convergência. Será, também, apresentado um problema que não possui solução analítica: escoamento em torno de um cilindro, onde serão calculados coeficientes de arrasto e sustentação. Por fim, são dados resultados preliminares do escoamento em torno de um aerofólio.

Todos os resultados desse trabalho foram obtidos com o código livre FreeFEM++ 3.20 [15], que é um software desenvolvido para resolver equações diferenciais parciais através do método de elementos finitos. Algumas das características desse programa são: descrição do problema, que pode ser feita através da inserção da formulação variacional; fácil descrição dos contornos; geração automática da malha; a grande variedade de elementos finitos triangulares.

6.1 Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes

Nessa seção serão abordados alguns problemas com solução exata conhecida para as equações de Navier Stokes dependentes do tempo (2.1) - (2.5). Serão utilizadas as discretizações espaciais por triângulos P2/P1, P3/P2 e P1b/P1, que satisfazem a condição inf-sup discreta (3.3). A discretização temporal será feita a partir de quatro métodos: Euler implícito (EI), Crank-Nicolson (CN), método θ de passo fracionado 0 (FS0) e método θ de passo fracionado 1 (FS1).

O sistema linear é resolvido pelo método UMFPACK [9], que é um código para soluções de sistemas de equações lineares, $Ax=b$, usando um método

multifrontal não-simétrico. O método UMFPACK é uma versão sofisticada da fatoração LU.

Apesar de todos os elementos utilizados neste trabalho satisfazerem a condição inf-sup discreta, nos exemplos desta seção foi utilizado o método da penalidade (3.53)-(3.54) com $\xi < 10^{-8}$, para melhorar a aproximação no cálculo do erro da pressão. No exemplo 2, utilizou-se $\xi < 10^{-10}$. Essas escolhas de ξ 's se fazem necessárias de tal forma que essa perturbação inserida no sistema não seja limitante do erro. No exemplo 2, por exemplo, por ser um problema onde o erro era menor que 10^{-8} , precisou-se escolher uma perturbação menor.

É importante observar que sem a utilização do método da penalidade o erro da velocidade era obtido com insignificantes variações em relação a utilização do método, com exceção dos elementos P1b/P1, que obteve resultados piores sem a utilização da penalidade. Já para o erro da pressão, independente dos espaços utilizados, os resultados sem a penalidade eram bem piores do que com a penalidade.

Para o termo não-linear utilizou-se a iteração do ponto fixo (2.26) em cada passo de tempo com critério de parada $\gamma < 10^{-8}$, pois este se mostrou mais rápido que o método de Newton, mas com resultados semelhantes.

Os exemplos são resolvidos em um quadrado unitário, com malha regular, tal que $h = 1/64$. Na tabela 6.1 são dados os graus de liberdade da velocidade e pressão para cada elemento utilizado.

Elemento	Velocidade	Pressão	Total
P2/P1	33282	4225	37507
P1b/P1	24834	4225	29059
P3/P2	74498	16641	91139

Tabela 6.1: Graus de liberdade para cada elemento

O tempo final em todos os exemplos desta seção é $T = 1s$ e o passo de tempo é dado por

$$\Delta t = 0,1 \times 2^{-i}, \quad (6.1)$$

para $i \in \mathbb{N}$.

Os erros da velocidade e da pressão calculados e mostrados nas figuras dessa seção são calculados através de (4.8) e (4.9), respectivamente. Já as taxas de convergência da velocidade na norma do supremo (Taxa 1) e na norma H^1 (Taxa 2) devem obedecer as estimativas (4.4) e (4.5), respectivamente. Ou estimativas com um grau a mais na norma do supremo da velocidade se considerar a utilização do truque de Nitsche (ver tabela 4.1).

Os gráficos deste capítulo estão com legenda colorida, que pode facilitar a visualização dos resultados numa versão virtual.

6.1.1 Exemplo 1

Trata-se de um problema com predominância de erro no espaço. Seja $\Omega = (0, 1)^2$ e a solução exata de (2.1) - (2.5) dada por

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin(t) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ u_2 &= \sin(t) \cos(\pi x) \cos(\pi y) \\ p &= \sin(t) \left(\sin(\pi x) + \cos(\pi y) - \frac{2}{\pi} \right) \end{aligned}$$

Note que o lado direito \mathbf{f} , a condição inicial \mathbf{u}_0 e as condições de contorno são obtidas a partir de que (u_1, u_2, p) sejam soluções de (2.1)-(2.5) para dado número de Reynolds. Nesse caso foram escolhidos dois valores adimensionais.

Na figura 6.1 seguem os gráficos das soluções exatas da velocidade e da pressão no tempo $T = 1s$.

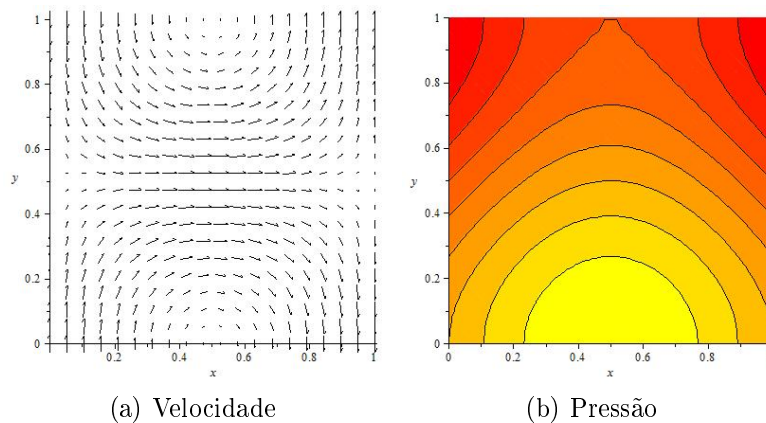


Figura 6.1: Exemplo 1. Gráficos da velocidade e pressão no tempo $T=1s$

Primeiro analisou-se para Reynolds pequeno, $Re = 1$, a escolha de Δt é dada por (6.1), tal que $i = 0, \dots, 8$.

Na figura 6.2 são comparados diferentes métodos de discretização espacial através da análise do erro na velocidade em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ e do erro da pressão em $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ com diferentes passos de tempo, a partir de dois métodos temporais: CN e FS0. Os melhores resultados da velocidade são obtidos com o elemento P3/P2, independente do método temporal, o que era esperado, já que o problema tem predominância de erro no espaço. Note que o elemento P1b/P1 apresenta resultado pior em relação aos demais elementos. Para a pressão os melhores resultados são obtidos com o método temporal FS0, percebe-se que os espaços P3/P2 e P2/P1 tem resultados praticamente iguais, o que dispensaria a utilização do elemento P3/P2, que tem tempo computacional maior.

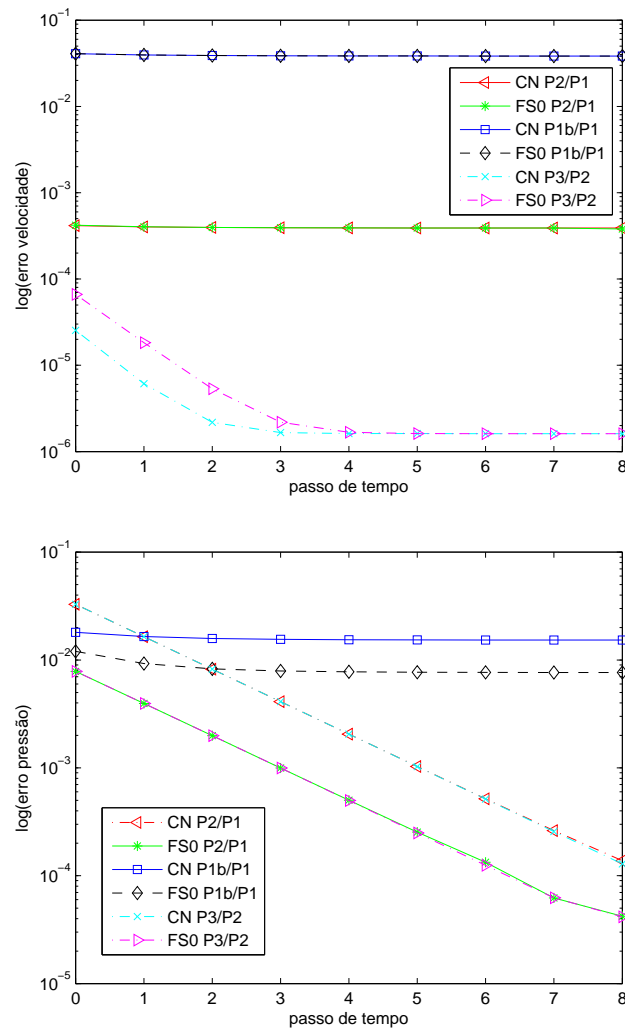


Figura 6.2: Exemplo 1 com Reynolds=1. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo

Na figura 6.3 são analisados os métodos de discretização temporal nas mesmas normas. Percebe-se que para a velocidade, todos os métodos, a partir de $i = 4$ ficam iguais. Para os passos de tempo iniciais os métodos FS0 e CN prevalecem em relação aos demais. Para o erro na pressão o comportamento dos quatro métodos é bem semelhante, mas com uma leve vantagem do método de Euler implícito. Conjectura-se que o método de ordem 1 alcançou bons resultados porque o exemplo tem predominância de erro no espaço, portanto, o método temporal não interfere muito na solução. Estes resultados estão de acordo com John et al.[21],

onde utilizou-se elemento $Q2/P1^{\text{disc}}$, que é um elemento que subdivide domínio em quadrados e triângulos com funções quadráticas (nos quadrados) no espaço da velocidade e funções lineares descontínuas (nos triângulos) no espaço da pressão.

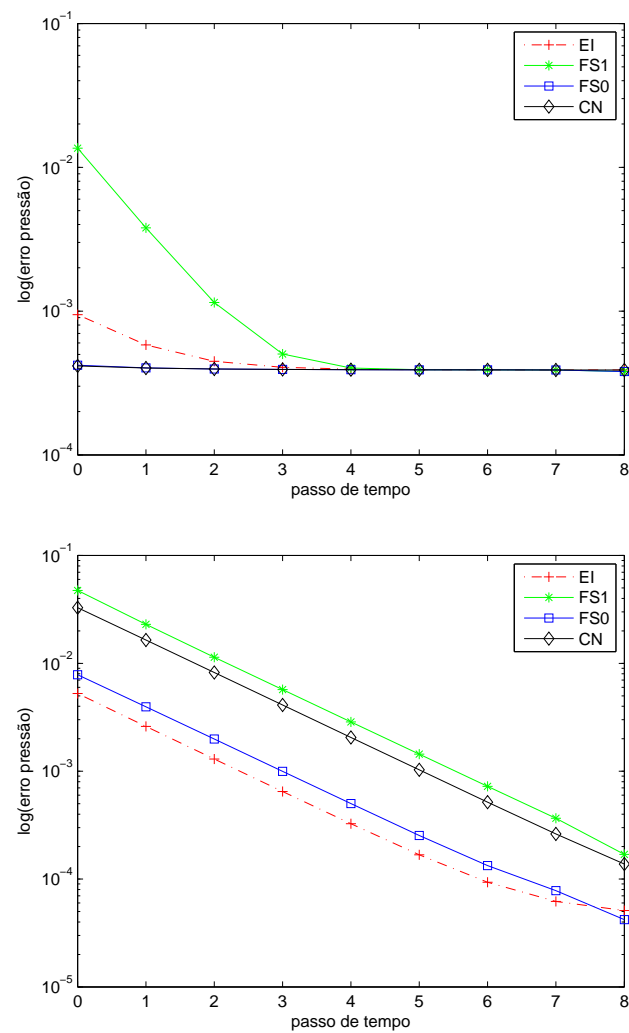


Figura 6.3: Exemplo 1 com $Re=1$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elementos $P2/P1$, por passo de tempo

Nas tabelas 6.2-6.4 são analisadas as taxas de convergência no espaço, onde para cada elemento escolhe-se Δt apropriado para obter a taxa correta. Estas escolhas são mostradas na seção 4.2.

Para os três elementos foram alcançadas as taxas esperadas a partir dos dois métodos de discretização temporal testados. Observe que as taxas da velocidade na norma L^2 estão um grau acima do esperado por (4.4), isso justifica a utilização do truque de Nitsche (seção 4.1) para obter a estimativa ótima da velocidade na norma L^2 .

As taxas de convergência a partir da estimativa ótima são dadas na tabela 4.1.

Por conveniência e tempo computacional, em nenhum exemplo desse capítulo serão calculadas taxas do método FS1. Para análise de taxas de convergência no espaço o método temporal EI também não foi testado.

	CN				FS0			
h	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	0.00414	-	0.10376	-	0.00414	-	0.10376	-
1/16	7.03e-5	2.9405	0.00628	2.0230	7.03e-5	2.9410	0.00628	2.0230
1/36	6.21e-6	2.9920	0.00123	2.0059	6.21e-6	2.9920	0.00123	2.0059

Tabela 6.2: Exemplo 1 com $Re=1$. Taxas de convergência utilizando o elemento P2/P1

Observe que Erro 1 e Erro 2 são os erros da velocidade nas normas do supremo e H^1 , respectivamente.

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	0.04819	-	0.81315	-	0.04817	-	0.81315	-
1/16	0.00298	2.0067	0.16245	1.1617	0.00298	2.0062	0.16245	1.1617
1/36	0.00058	1.9989	0.06965	1.0442	0.00059	1.9991	0.06965	1.0442

Tabela 6.3: Exemplo 1 com $Re=1$. Taxas de convergência utilizando o elemento P1b/P1

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	0.00052	-	0.00726	-	0.00052	-	0.00726	-
1/16	1.91e-6	4.0547	0.00010	3.0571	1.91e-6	4.0546	0.00010	3.0571
1/36	7.38e-8	4.0161	9.08e-6	3.0155	7.38e-8	4.0160	9.08e-6	3.015

Tabela 6.4: Exemplo 1 com $Re=1$. Taxas de convergência utilizando o elemento P3/P2

Pode-se analisar também a taxa de convergência temporal. Segue na tabela 6.5 as taxas para cada método temporal utilizando elementos P1b/P1. A escolha de h é feita de tal forma a obter a taxa de convergência ótima da velocidade na norma L^2 , tais escolhas são comentadas na seção 4.2.

Note que as taxas dos métodos CN e FS0 são as mesmas observadas na tabela 6.3, justamente porque a taxa esperada é igual em ambos os casos. Observa-se que foram alcançadas as respectivas taxas de convergência para os três métodos temporais testados: ordem 1 para EI e ordem 2 para CN e FS0.

	EI		CN		FS0	
Δt	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1
1/4	0.179341	-	0.048196	-	0.048178	-
1/16	0.048182	0.9480	0.002984	2.0067	0.002985	2.0062
1/36	0.021437	0.9986	0.000589	1.9989	0.000590	1.9991

Tabela 6.5: Exemplo 1 com $Re=1$. Taxas de convergência temporal utilizando elemento P1b/P1

Agora, para Reynolds maior, $Re = 1000$, utilizou-se os passos de tempo Δt 's dados em (6.1), tais que $i = 0, \dots, 7$.

Na figura 6.4 o menor erro da velocidade é obtido com os elementos P3/P2, já para os elementos P1b/P1 os resultados são bem piores em relação aos demais, que é algo esperado por ser um exemplo com predominância de erro no espaço. Para a pressão o método FS0 tem o melhor comportamento independentemente dos elementos utilizados.

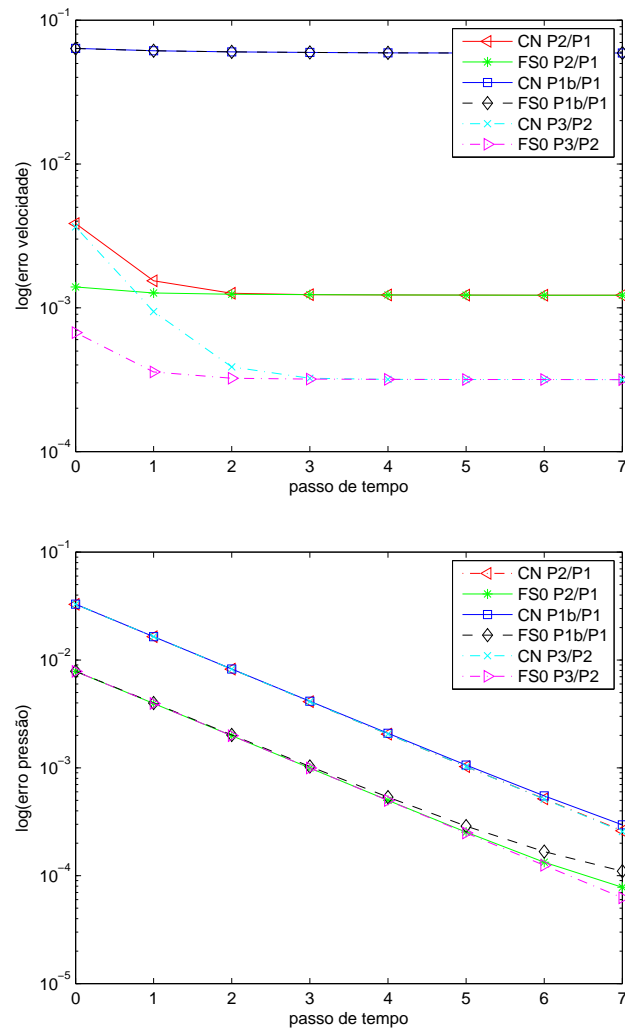


Figura 6.4: Exemplo 1 com $Re=1000$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo

Na figura 6.5 são analisados os métodos de discretização temporal, note que diferentemente do exemplo com Reynolds menor, o método FS1 aproxima bem a solução exata da velocidade já para os primeiros passos de tempo. O método com aproximação menos satisfatória para o erro na velocidade é EI. Já para a pressão o método de EI conseguiu a melhor aproximação. Conjectura-se, da mesma forma do exemplo com $Re = 1$, que o método de ordem 1 fica melhor que os demais por ser um exemplo com predominância de erro no espaço. Observe que novamente o método FS0 aproxima melhor a solução exata da pressão do que os métodos FS1 e CN. Os

resultados estão de acordo com John et al.[21], ou até melhores, se comparados aos elementos P3/P2.

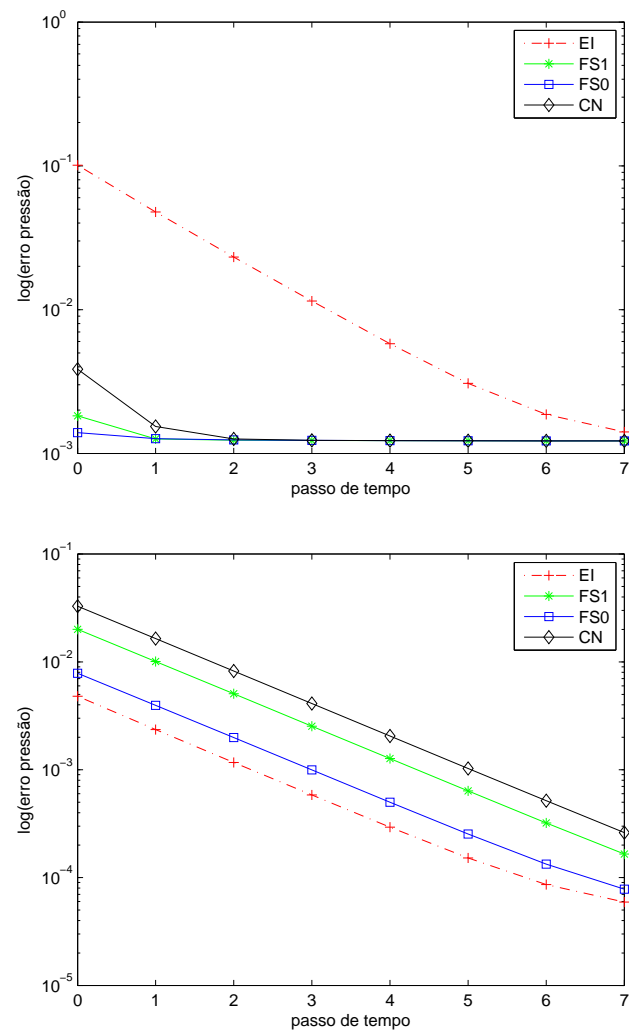


Figura 6.5: Exemplo 1 com $Re=1000$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo

Nas tabelas 6.6-6.8 são apresentadas as taxas de convergência espaciais para cada método temporal analisado. Note que as taxas estão convergindo para o valor esperado pela literatura, ver tabela 4.1. Para os primeiros passos da análise do elemento P2/P1 (em ambos métodos temporais) as taxas parecem estar um grau acima do esperado, mas conforme a malha é refinada as taxas vão caindo, provavelmente até chegar a taxa correta.

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/36	4.086e-5	-	0.00650	-	4.086e-5	-	0.00650	-
1/64	4.025e-6	4.0278	0.00122	2.9052	4.025e-6	4.0280	0.00122	2.9052
1/100	7.325e-7	3.8179	0.00035	2.7767	7.323e-7	3.8184	0.00035	2.7767
1/144	1.780e-7	3.8789	0.00012	2.7843	1.779e-7	3.8797	0.00012	2.7843
1/196	5.810e-8	3.6325	5.824e-5	2.5637	5.809e-8	3.6302	5.806e-5	2.5642
1/256	2.287e-8	3.4909	3.048e-5	2.4236	2.285e-8	3.4935	3.037e-5	2.4265

Tabela 6.6: Exemplo 1 com $Re=1000$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P2/P1

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/36	0.00112	-	0.15876	-	0.00112	-	0.15876	-
1/64	0.00024	2.6273	0.05973	1.6990	0.00024	2.6301	0.05973	1.6990
1/100	8.637e-5	2.3632	0.03087	1.4785	8.598e-5	2.3661	0.03087	1.4785
1/144	3.778e-5	2.2674	0.01929	1.2896	3.758e-5	2.2698	0.01929	1.2896
1/196	1.958e-5	2.1317	0.01342	1.1750	1.947e-5	2.1331	0.01342	1.1750
1/256	1.124e-5	2.0781	0.00999	1.1069	1.118e-5	2.0772	0.00999	1.1076

Tabela 6.7: Exemplo 1 com $Re=1000$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P1b/P1

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	0.02260	-	0.45371	-	0.02269	-	0.45486	-
1/16	0.00035	2.9887	0.02287	2.1550	0.00035	2.9915	0.02287	2.1568
1/36	1.228e-5	4.1611	0.00190	3.0657	1.228e-5	4.1611	0.00190	3.0658
1/64	1.096e-6	4.1991	0.00031	3.1193	1.096e-6	4.1991	0.00031	3.1193

Tabela 6.8: Exemplo 1 com $Re=1000$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2

Na tabela 6.9 são dadas as taxas de convergência para cada método temporal, utilizando elementos P1b/P1. Observe que a taxa para o método EI está um pouco acima do esperado (ordem 1). Já para os métodos CN e FS0, as taxas estão de acordo com a literatura (ordem 2).

Δt	EI		CN		FS0	
	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1
1/36	0.103243	-	0.001124	-	0.001122	-
1/64	0.059891	0.9464	0.000247	2.6273	0.000247	2.6301
1/100	0.035833	1.1509	8.637e-05	2.3632	8.598e-05	2.3661
1/144	0.023132	1.2001	3.778e-05	2.2674	3.758e-05	2.2698
1/196	0.015439	1.3114	1.958e-05	2.1317	1.947e-05	2.1331
1/256	0.010753	1.3542	1.124e-05	2.0781	1.118e-05	2.0772

Tabela 6.9: Exemplo 1 com $Re=1000$. Taxas de convergência temporal utilizando elemento P1b/P1

6.1.2 Exemplo 2

Neste exemplo é discutido um problema com predominância de erro no tempo, inclusive, para os elementos $P2/P1$ e $P3/P2$ a aproximação é exata no espaço.

Seja $\Omega = (0, 1)^2$ e a solução exata de (2.1) - (2.5) dada por

$$\begin{aligned} u_1 &= t^3 y^2 \\ u_2 &= t^2 x \\ p &= tx + y - (t + 1)/2 \end{aligned}$$

Da mesma forma que no exemplo 1, o lado direito \mathbf{f} , a condição inicial \mathbf{u}_0 e as condições de contorno são obtidas a partir de que (u_1, u_2, p) sejam soluções de (2.1) - (2.5) para dado número de Reynolds, que nesse caso considerou-se apenas $Re = 1$. Para este exemplo utilizou-se $i = 0, \dots, 8$ para o passo de tempo Δt , dado por 6.1.

Observe que utilizando os elementos $P2/P1$ e $P3/P2$ obtém-se a solução exata no espaço, pois u_1 é um polinômio de grau 2 no espaço, u_2 é de grau 1 e p também é de grau 1, já os elementos $P1b/P1$ não atingem a solução exata no espaço da velocidade pois u_1 é de grau 2, e $P1b$ é exato apenas para polinômios de grau 1.

Os gráficos das soluções exatas da velocidade e da pressão no tempo $T = 1s$ são apresentados na figura 6.6.

Na figura 6.7 são apresentados os gráficos comparando o erro na velocidade e na pressão de diferentes métodos de discretização espacial para diferentes passos de tempo. Note que para a velocidade os elementos $P2/P1$ e $P3/P2$ obtiveram resultados iguais, pois como observado anteriormente, ambos já alcançam a solução exata no espaço referido, diferentemente do elemento $P1b/P1$. A partir do momento que um elemento atinge a solução exata, o erro é dado apenas pelo método temporal e os erros de arredondamento.

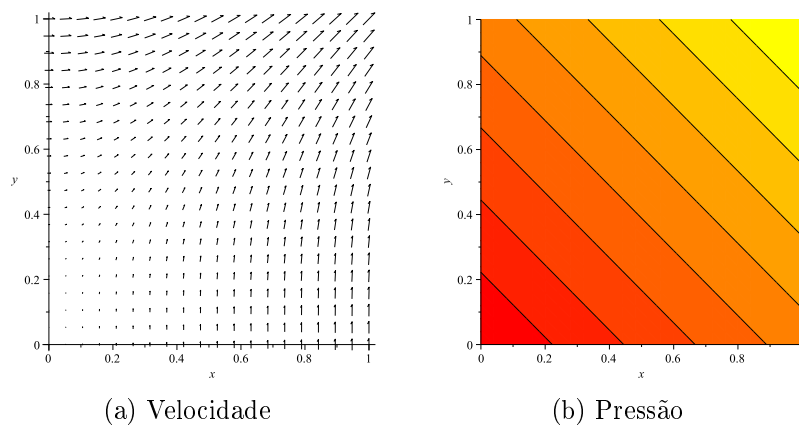


Figura 6.6: Exemplo 2. Gráficos da velocidade e pressão no tempo $T=1s$

Para a norma do erro na pressão os elementos P3/P2 e P2/P1 também tiveram resultados iguais, isso justifica-se novamente por esses espaços alcançarem a solução exata no espaço.

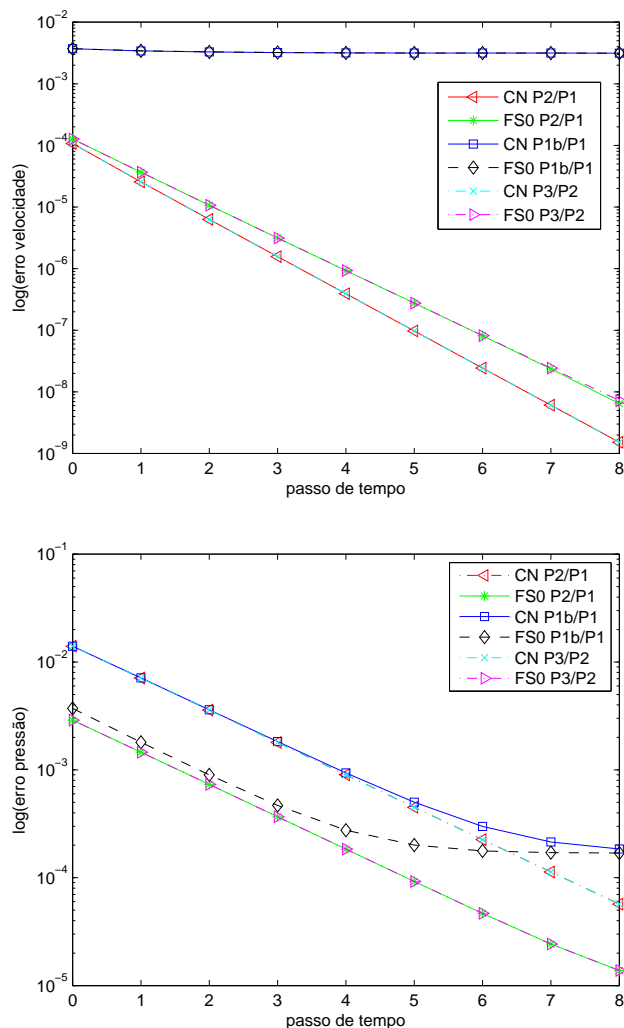


Figura 6.7: Exemplo 2. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo

Na figura 6.8 são analisados os métodos de discretização temporal. Note que para este exemplo, já com os elementos P2/P1, as estimativas de erro para a velocidade são menores que o artigo de John et al.[21] para todos os métodos de discretização temporal. Para a velocidade o método mais eficaz, em todos os passos de tempo, foi CN. Já para a pressão foi o método FS0 que alcançou a melhor aproximação, além disso, percebe-se que CN tem aproximação bem inferior à FS0 na pressão em todos os passos de tempo.

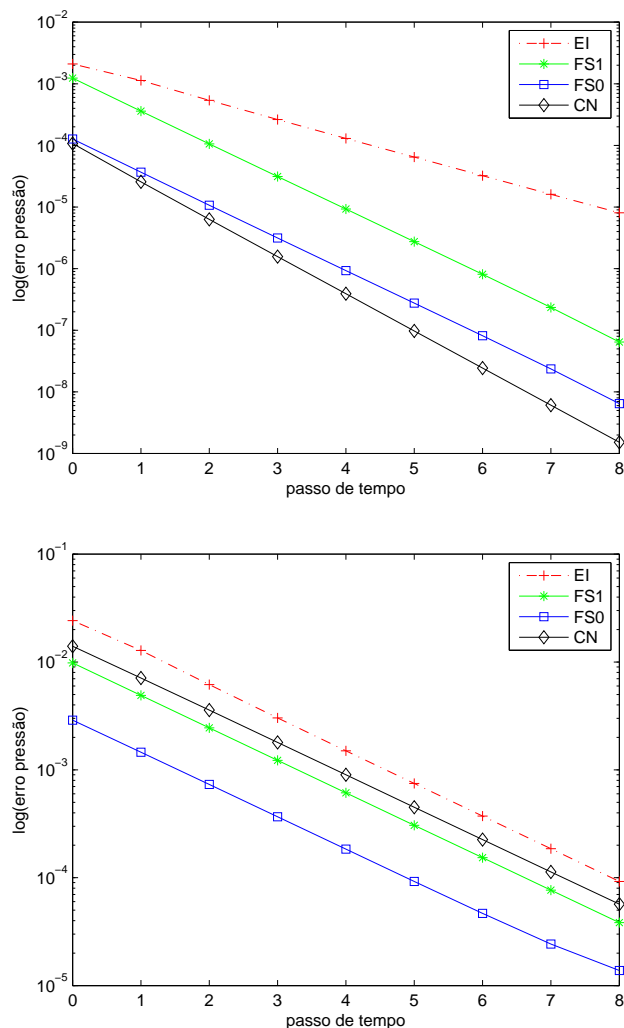


Figura 6.8: Exemplo 2. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo

Nas tabelas 6.10 até 6.12 são analisadas as taxas de convergência no espaço. Perceba que as taxas para o gradiente da velocidade nos elementos P2/P1 e P3/P2 estão um grau acima do esperado, mas isso ocorre do fato desses elementos obterem a solução exata no espaço da velocidade, assim a taxa se comporta de acordo com a escolha do passo de tempo. Observe que Δt é escolhido de tal forma a encontrar a taxa da norma do supremo da velocidade, que é um grau acima da norma H^1 , segundo tabela 4.1. Por isso a Taxa 2 está um grau acima do esperado

nos elementos $P2/P1$ e $P3/P2$. Já para os elementos $P1b/P1$ as taxas estão se comportando de maneira consistente com a literatura.

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	3.155e-5	-	0.00016	-	3.152e-5	-	0.00018	-
1/16	3.205e-7	3.3106	2.455e-6	3.0554	2.974e-7	3.3638	4.561e-6	2.6514
1/36	2.814e-8	2.9995	2.146e-7	3.0044	1.978e-8	3.3423	5.448e-7	2.6201
1/64	5.008e-9	2.9999	3.817e-8	3.0014	3.070e-9	3.2380	1.207e-7	2.6189
1/100	1.312e-9	3.0000	9.997e-9	3.0022	7.47e-10	3.1659	3.743e-8	2.6245

Tabela 6.10: Exemplo 2. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento $P2/P1$

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	0.01130	-	0.07338	-	0.01130	-	0.07338	-
1/16	0.00070	2.0018	0.01398	1.1959	0.00070	2.0018	0.01398	1.1959
1/36	0.000139	2.0004	0.00586	1.0713	0.00013	1.9998	0.00586	1.0713

Tabela 6.11: Exemplo 2. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento $P1b/P1$

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	6.511e-6	-	4.045e-5	-	6.917e-6	-	5.411e-5	-
1/16	2.003e-8	4.1721	1.528e-7	4.0241	1.369e-8	4.4901	4.051e-7	3.5306
1/36	7.81e-10	4.0000	5.952e-9	4.0019	4.36e-10	4.2481	2.370e-8	3.5002
1/64	5.95e-11	4.0002	5.95e-10	4.0028	4.07e-11	4.1232	2.607e-9	3.8362

Tabela 6.12: Exemplo 2. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2

Segue na tabela 6.13 a análise das taxas de convergência dos métodos temporais. As taxas esperadas foram obtidas nos três casos testados, ordem 1 para EI e ordem 2 para CN e FS0.

Δt	EI		CN		FS0	
	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1
1/4	0.045364	-	0.011303	-	0.011303	-
1/16	0.011304	1.0023	0.000704	2.0018	0.000704	2.0018
1/36	0.005018	1.0014	0.0001391	2.0004	0.0001392	1.9998

Tabela 6.13: Exemplo 2. Taxas de convergência temporais utilizando elemento P1b/P1

6.1.3 Exemplo 3

Neste exemplo é feita uma pequena variação com relação ao exemplo 2. Alterou-se apenas a parte temporal da componente vertical da velocidade e também a pressão. Note que essa variação tem relação com a teoria de problemas rígidos, onde alguns métodos temporais podem ter problemas de aproximar as soluções para

algum passo de tempo. Da teoria de EDO's tem-se que o passo de tempo deve ser delimitado por $\Delta t < \lambda^{-1}$, onde λ vem da solução de um problema teste de EDO, $y' = -\lambda y$. Observe que nesses casos o erro pode crescer tanto que pode chegar a dominar os cálculos. Para esse exemplo considerou-se $\lambda = 50$.

Seja $\Omega = (0, 1)^2$ e a solução exata de (2.1) - (2.5) dada por

$$\begin{aligned} u_1 &= t^3 y^2 \\ u_2 &= \exp(-50t)x \\ p &= (10 + t) \exp(-t)(x + y - 1) \end{aligned}$$

O lado direito \mathbf{f} , a condição inicial \mathbf{u}_0 e as condições de contorno são obtidas a partir de que (u_1, u_2, p) sejam soluções de (2.1) - (2.5) para $Re = 1$. A escolha de Δt é dada pela equação (6.1) tal que $i = 0, \dots, 7$.

Da mesma forma que no exemplo 2, este terceiro exemplo também tem solução exata no espaço para os elementos P2/P1 e P3/P2, portanto o erro da velocidade e pressão para esses elementos é dado apenas pelo método temporal e os erros de arredondamento. Já para o elemento P1b/P1 tem-se solução exata apenas no espaço da pressão.

Na figura 6.9 seguem os gráficos das soluções exatas da velocidade e da pressão em $T = 1s$.

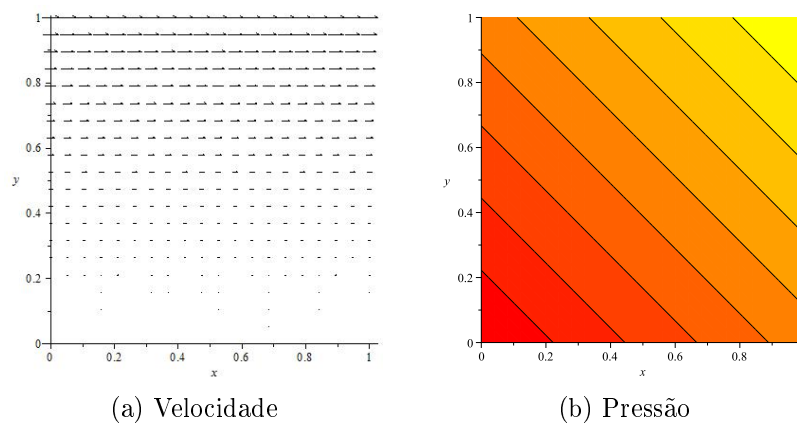


Figura 6.9: Exemplo 3. Gráficos da velocidade e pressão em $T=1s$

Na figura 6.10 são apresentados os gráficos de erro para diferentes tipos de elementos em cada passo de tempo. Note que para a pressão, independente dos elementos utilizados o erro é o mesmo, isso acontece pelo fato que os três elementos utilizados alcançam a solução exata para a pressão. Ainda na pressão observe que método FS0 é melhor que o método CN, independente dos elementos.

Para o cálculo do erro na velocidade, novamente os elementos P3/P2 e P2/P1 alcançam a solução exata na velocidade, por isso os gráficos de ambos são exatamente iguais. O elemento P1b/P1 aproxima bem a solução exata até $i=3$, após esse passo de tempo o elemento se mostra inferior aos demais, justamente por não alcançar a solução exata no espaço da velocidade, diferentemente dos demais elementos.

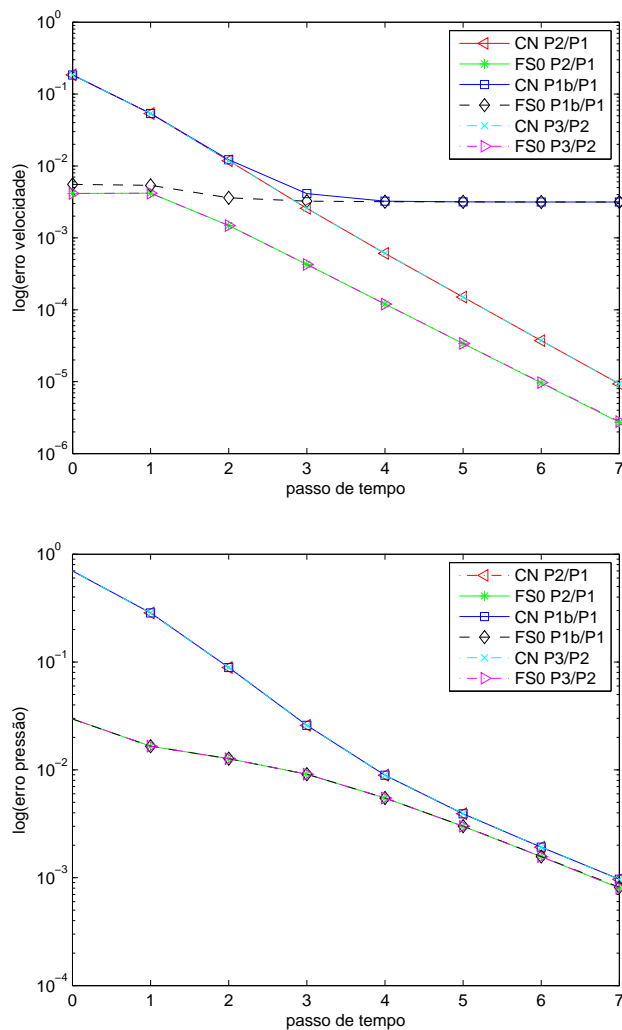


Figura 6.10: Exemplo 3. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo

Na figura 6.11 são analisados os métodos de discretização temporal, novamente nota-se a semelhança destes gráficos com os de John et al. [21]. O método que melhor aproxima tanto a velocidade quanto a pressão, para qualquer passo de tempo é o FS0. Observe também que, da mesma forma que aconteceu nos exemplos 1 e 2, o método FS1 é inferior (na velocidade e na pressão) ao método FS0. Conjectura-se que isso se deve ao fato mencionado na subseção 3.3.3, que o método FS1 não atualiza a forçante f em todos os tempos.

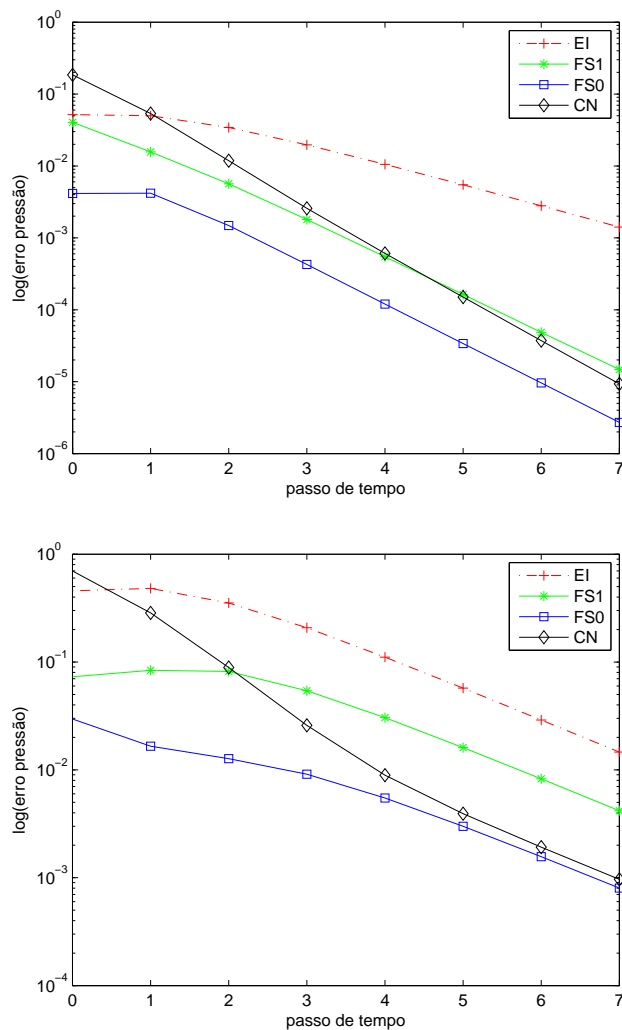


Figura 6.11: Exemplo 3. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo

Nas tabelas 6.14 até 6.16 são analisadas as taxas de convergência espacial. Observa-se, da mesma forma que no exemplo 2, que as taxas na norma H^1 para os elementos P2/P1 e P3/P2 estão um grau acima. Isso justifica-se novamente pelo fato desses elementos alcançarem a solução exata no espaço, assim a taxa se comporta de acordo com Δt escolhido. Já na tabela 6.15 observa-se que as taxas para o elemento P1b/P1 estão de acordo com o esperado, ver tabela 4.1.

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	0.06776	-	0.24450	-	0.00054	-	0.00153	-
1/16	0.00278	2.3034	0.00414	2.9412	0.00034	0.3252	0.00062	0.6499
1/36	0.00022	3.1188	0.00033	3.1171	2.986e-5	3.0258	6.852e-5	2.7217
1/64	3.920e-5	3.011	5.830e-5	3.0173	5.299e-6	3.0050	1.441e-5	2.7090

Tabela 6.14: Exemplo 3. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P2/P1

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/16	0.03461	-	0.08224	-	0.00225	-	0.01479	-
1/36	0.00947	1.5973	0.01594	2.0230	0.00105	0.9392	0.00612	1.0883
1/64	0.00277	2.1329	0.00526	1.9255	0.00034	1.9269	0.00329	1.0774
1/100	0.00105	2.1704	0.00256	1.6130	0.00013	2.0361	0.00201	1.0982
1/144	0.00049	2.0488	0.00160	1.2868	6.685e-5	2.0246	0.00142	0.9589
1/196	0.00026	2.0150	0.00111	1.1891	3.606e-5	2.0017	0.00103	1.0171

Tabela 6.15: Exemplo 3. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P1b/P1

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	0.03527	-	0.08226	-	0.00232	-	0.00493	-
1/16	0.00015	3.9043	0.00023	4.2264	2.119e-5	3.3897	5.036e-5	3.3069
1/36	6.118e-6	4.0041	9.083e-6	4.0104	8.266e-7	4.0005	2.707e-6	3.6048
1/64	6.124e-7	4.0003	9.090e-7	4.0006	8.271e-8	4.0008	2.869e-7	3.9004

Tabela 6.16: Exemplo 3. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2

Segue na tabela 6.17 as taxas de convergência dos métodos temporais, onde se observa que os métodos estão convergindo para os valores esperados (ordem 1 para EI e ordem 2 para CN e FS0). Note que EI é o método que necessita de passo de tempo menores para obter a taxa.

Δt	EI		CN		FS0	
	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1
1/36	0.019700	-	0.009478	-	0.001051	-
1/64	0.013243	0.6902	0.002778	2.1329	0.000347	1.9269
1/100	0.009863	0.6602	0.001054	2.1704	0.000139	2.0361
1/144	0.007295	0.8270	0.000499	2.0488	6.685e-05	2.0246
1/196	0.005579	0.8696	0.000268	2.0150	3.606e-05	2.0017

Tabela 6.17: Exemplo 3. Taxas de convergência temporais utilizando elementos P1b/P1

6.1.4 Exemplo 4

Escolheu-se um problema de decaimento de vórtices, que pode ser encontrado em um artigo publicado por Chorin em 1968 [8]. A solução exata de (2.1) - (2.5) é dada por

$$\begin{aligned} u_1 &= -\cos(n\pi x) \sin(n\pi y) \exp(-2n^2\pi^2 t/\tau) \\ u_2 &= \cos(n\pi y) \sin(n\pi x) \exp(-2n^2\pi^2 t/\tau) \\ p &= -0.25(\cos(2n\pi x) + \cos(2n\pi y)) \exp(-4n^2\pi^2 t/\tau) \end{aligned}$$

em um domínio $\Omega = (0, 1)^2$. Neste trabalho considerou-se o termo de relaxação $\tau = 1$ e a configuração do vórtice $n = 4$. O lado direito \mathbf{f} , a condição inicial \mathbf{u}_0 e as condições de contorno são obtidas a partir de que (u_1, u_2, p) sejam soluções de (2.1) - (2.5) para os valores requeridos do número de Reynolds, que nesse caso foram dois. A escolha de Δt é dada por (6.1) tal que $i = 0, \dots, 7$.

Segue na figura 6.12 os gráficos das soluções exatas da velocidade e da pressão no tempo $T = 1s$.

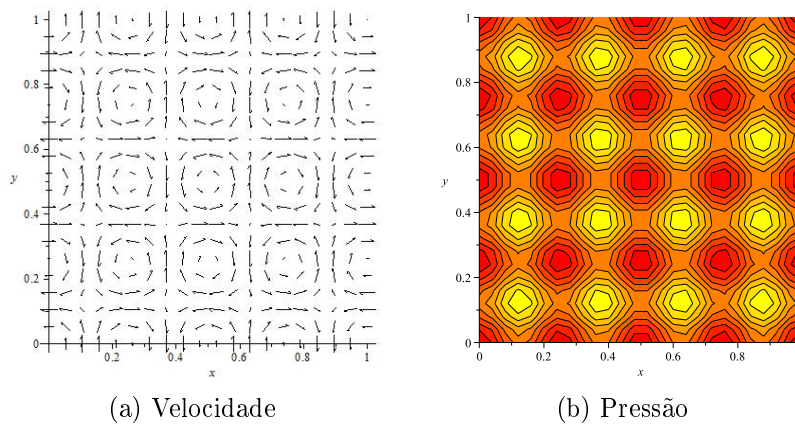


Figura 6.12: Exemplo 4. Gráficos da velocidade e pressão em $T=1s$

Primeiro considerou-se $Re = 1$. Na figura 6.13 são comparados diferentes métodos de discretização espacial através da análise do erro na velocidade e na pressão. Percebe-se que para a velocidade o método FS0 aproxima melhor que o

método CN, independente dos elementos utilizados. Para a pressão também nota-se que em praticamente todos os passos de tempo o método FS0 é superior ao CN, independente do tipo de elemento utilizado. Note que novamente não é vantajoso utilizar a discretização espacial P3/P2, pois o tempo computacional é muito grande e os resultados são praticamente iguais a P2/P1, que tem menos graus de liberdade e conseqüentemente menor tempo computacional. Novamente, não é vantajoso utilizar o elemento P1b/P1 para passos de tempo pequenos.

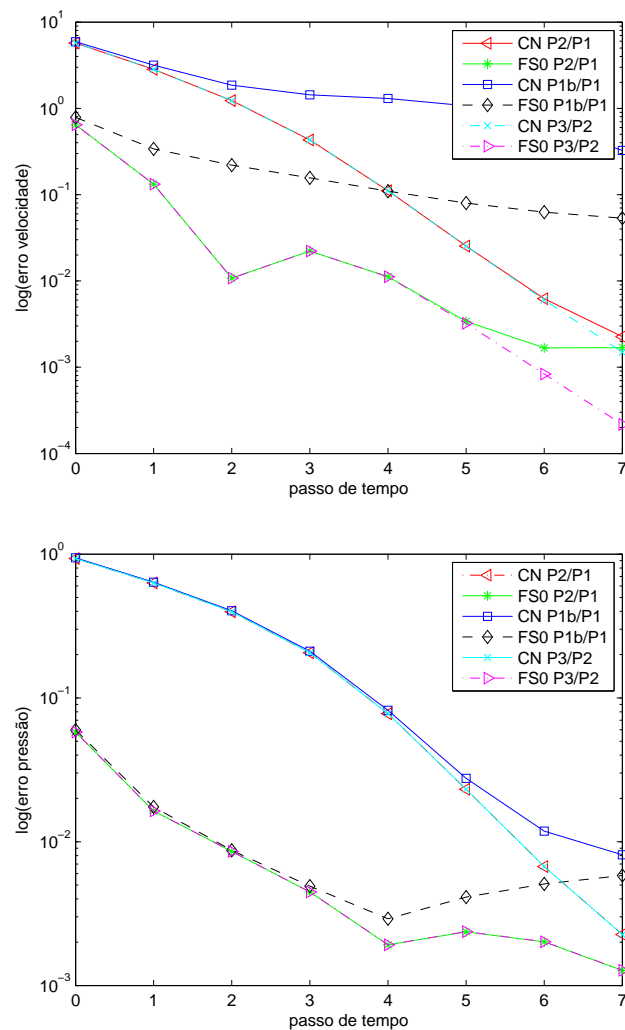


Figura 6.13: Exemplo 4 com $Re=1$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo

Na figura 6.14 são analisados os métodos de discretização temporal, onde percebe-se que o erro na velocidade e na pressão é menor em praticamente todos os passos de tempo com os métodos FS0 e FS1. Novamente observa-se semelhança dos gráficos entre o presente trabalho e o artigo de John et al. [21].

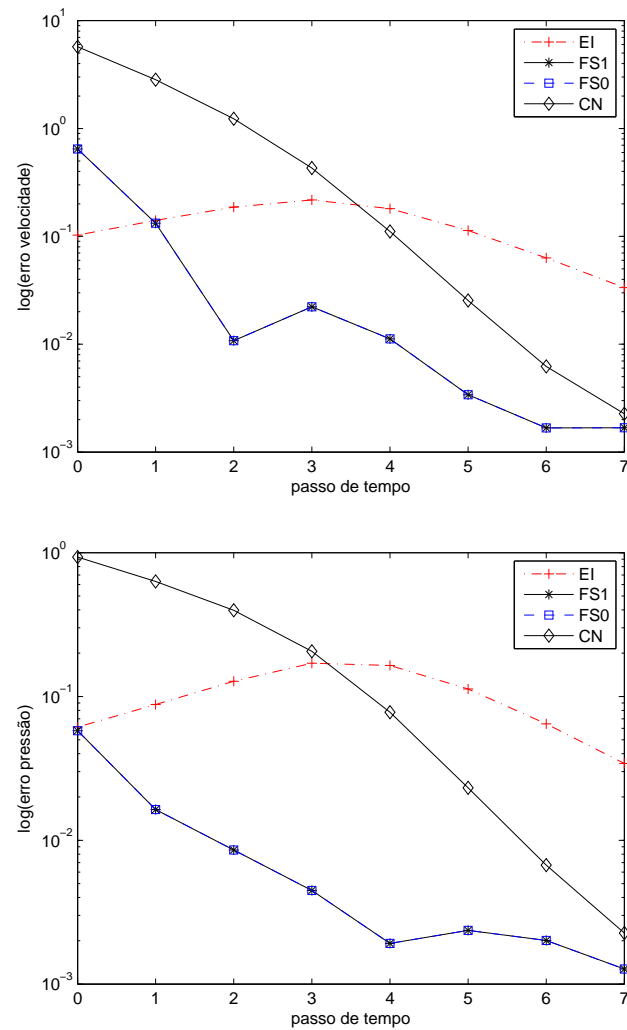


Figura 6.14: Exemplo 4 com Reynolds=1. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo

Nas tabelas 6.18-6.20 são analisadas as taxas de convergência no espaço. Para o método CN as taxas da norma do supremo estão convergindo de forma esperada, já as taxas da norma do gradiente da velocidade estão um grau acima nos elementos P2/P1 e P3/P2, e de acordo com a literatura nos elementos P1b/P1 (ver tabela 4.1). Finalmente, para o método FS0, observa-se a taxa um pouco acima do esperado na norma do gradiente da velocidade nos elementos P1b/P1 e P3/P2, e de acordo com a literatura nos demais casos. Conclui-se que provavelmente com h mais refinado todas estas taxas irão convergir para os valores esperados.

	CN				FS0			
h	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/36	0.04464	-	0.05898	-	0.00508	-	0.00720	-
1/64	0.00699	3.2219	0.00964	3.1478	0.00090	3.0027	0.00186	2.3458
1/100	0.00179	3.0438	0.00252	2.9996	0.00023	3.0116	0.00075	2.0259
1/144	0.00060	2.9990	0.00087	2.8976	7.907e-5	2.9871	0.00036	2.0197
1/196	0.00023	3.0071	0.00037	2.7807	3.130e-5	3.0056	0.00019	1.9891

Tabela 6.18: Exemplo 4 com $Re=1$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P2/P1

	CN				FS0			
h	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/100	0.16157	-	0.93615	-	0.01251	-	0.09252	-
1/144	0.09390	1.4882	0.63218	1.0766	0.00942	0.7759	0.05375	1.4893
1/196	0.05417	1.7839	0.45923	1.0366	0.00615	1.3817	0.03414	1.4719
1/256	0.03168	2.0091	0.34978	1.0194	0.00385	1.7585	0.02316	1.4529
1/324	0.01975	2.0048	0.27568	1.0106	0.00239	2.0110	0.01657	1.4196

Tabela 6.19: Exemplo 4 com $Re=1$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P1b/P1

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/4	0.51892	-	3.9218	-	0.05092	-	0.38901	-
1/16	0.03149	2.0212	0.04246	3.2645	0.00368	1.8951	0.00525	3.1045
1/36	0.00106	4.1747	0.00153	4.09191	0.00013	4.0510	0.00026	3.6704
1/64	0.00010	4.0008	0.00015	3.9789	1.379e-5	3.9994	3.799e-5	3.3953
1/100	1.78e-5	4.0012	2.702e-5	3.9257	2.315e-6	3.9997	9.169e-6	3.1855

Tabela 6.20: Exemplo 4 com $Re=1$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2

Segue na tabela 6.21 as taxas de convergência dos métodos temporais. Observe que devido a complexibilidade do exemplo o método de ordem 1, Euler implícito, inicialmente, obtém taxa negativa (ou seja, o erro está aumentando conforme se refina o passo de tempo), mas logo a seguir as taxas começam a convergir para 1. Os métodos CN e FS estão convergindo para 2, que é a taxa esperada pela literatura. Note que CN está convergindo mais rapidamente, mas o erro para cada nível de malha é sempre menor com o método FS0.

Δt	EI		CN		FS0	
	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1
1/100	0.086816	-	0.161572	-	0.012513	-
1/144	0.090441	-0.1121	0.093905	1.4882	0.009429	0.7759
1/196	0.082185	0.3104	0.054179	1.7839	0.006158	1.3817
1/256	0.069505	0.6275	0.031681	2.0091	0.003850	1.7585
1/324	0.056704	0.8640	0.019756	2.0048	0.002397	2.0110

Tabela 6.21: Exemplo 4 com $Re=1$. Taxas de convergência temporais utilizando elemento P1b/P1

Por fim, considerou-se $Re=10^6$. A escolha de Δt é dada por (6.1) tal que $i = 0, \dots, 7$. Para a malha, considere novamente $h = 1/64$. Para este exemplo, devido ao alto valor do número de Reynolds, não foi possível, com simulação direta ou *Direct Numerical Simulation* (DNS), conseguir uma aproximação com os primeiros valores de Δt . Note que o artigo de John et al. [21] utiliza uma escala menor de Δt , por isso se deve tomar cuidado ao comparar este trabalho com o artigo neste exemplo. Portanto, devido ao fato de não obter aproximação para os primeiros passos de tempo, utilizou-se o modelo de deconvolução de Leray (5.15)-(5.16) dado por Layton et al. [27]. Optou-se pelo modelo com $N=1$ (Leray1) e escolheu-se $\delta = h$.

Na figura 6.15 são apresentados os gráficos do erro na velocidade na norma $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ e do erro da pressão na norma $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ para diferentes elementos. Note que em praticamente todos os passos de tempos, tanto para a velocidade quanto para a pressão, o método FS0 com Leray1 se mostrou melhor que CN com Leray1, independente dos elementos utilizados. Perceba também que o elemento P1b/P1 funcionou bem para este exemplo, e o elemento P3/P2 é dispensável, pois aumenta significativamente o tempo computacional e com resultados bem próximos a do elemento P2/P1.

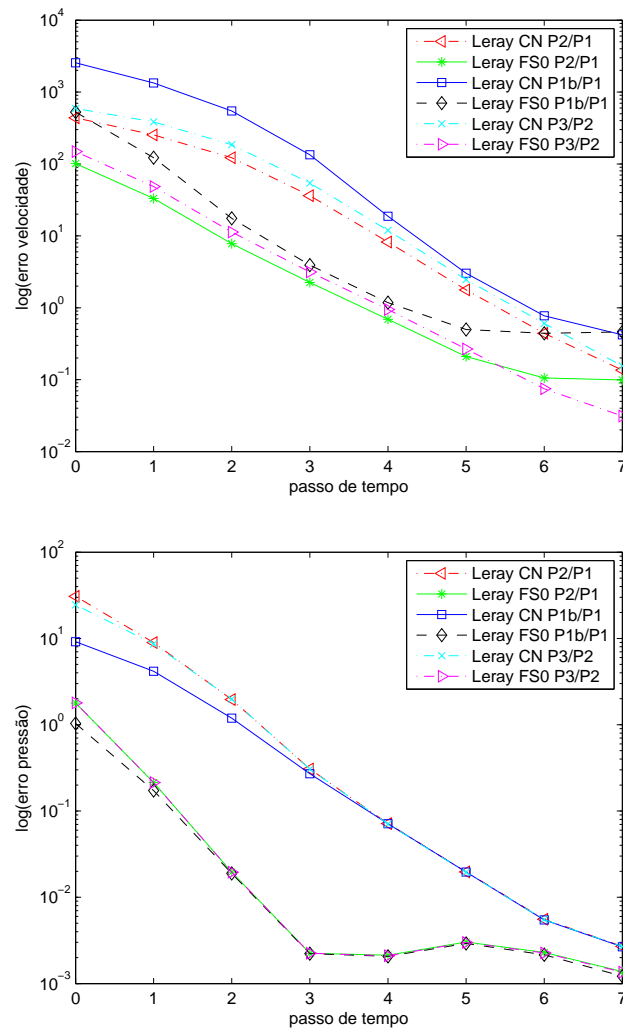


Figura 6.15: Exemplo 4 com $Re=10^6$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização espacial por passo de tempo

Na figura 6.16 são analisados os métodos de discretização temporal. Observe que os métodos FS0, FS1 e principalmente o CN, utilizando simulação direta (DNS), não aproximam a solução exata nos primeiros passos de tempo (por isso não se tem valores nos gráficos), mas com Leray1 se consegue as aproximações. Observa-se que refinando o passo de tempo as soluções com DNS e com o modelo de turbulência de Leray se encontram, com os devidos métodos de discretização temporal. Novamente o método que melhor aproxima a velocidade e a pressão em praticamente todos os passos de tempo é o método FS0.

Enfim, observou-se com esse exemplo que o modelo de deconvolução de Leray é eficaz em computações com passo de tempo grande, onde modelos com DNS não foram capazes de obter uma solução. Mostrou-se também que o modelo é eficiente quando utilizado com o método temporal FS0, caso esse não encontrado nos trabalhos pesquisados. Ainda, o modelo com FS0 mostrou-se mais eficiente que o modelo combinado com o método CN.

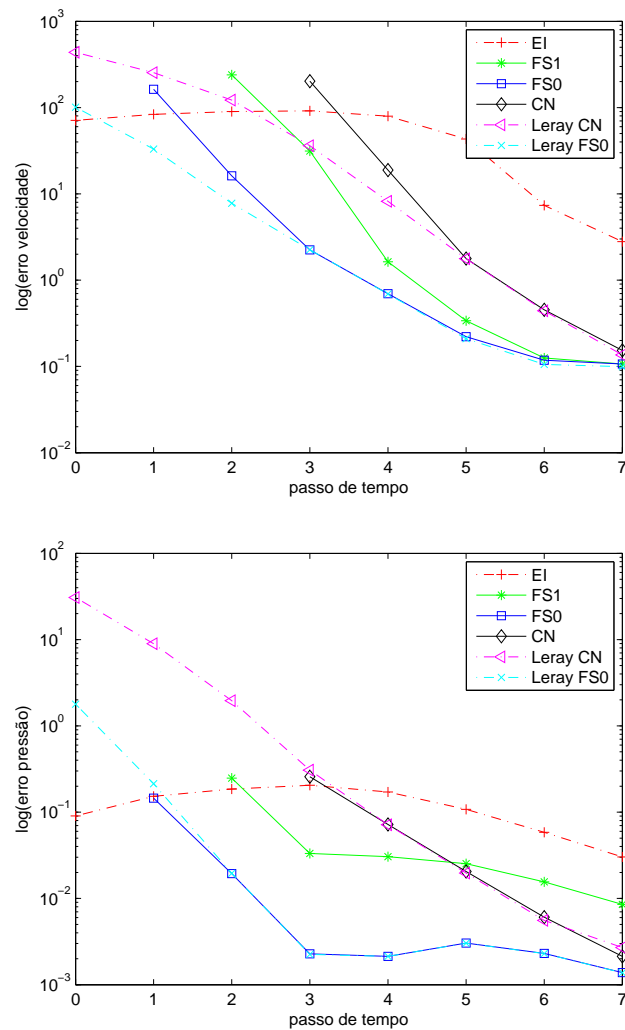


Figura 6.16: Exemplo 4 com $Re=10^6$. Cálculo dos erros da velocidade e pressão para diferentes métodos de discretização temporal, utilizando elemento P2/P1, por passo de tempo

Nas tabelas 6.22-6.24 são analisadas taxas de convergência dos elementos. Neste caso as taxas são calculadas a partir do modelo de deconvolução de Leray com $N=1$. Nesse caso, escolhe-se $\delta = h^{1/2}$ para o elemento P1b/P1, $\delta = h^{3/4}$ para o elemento P2/P1 e $\delta = h$ para o elemento P3/P2. Com ambos os métodos temporais percebe-se que os elementos convergem a taxa esperada (ver tabela 4.1), mas necessitam de h bem refinado.

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/16	0.91272	-	79.509	-	0.08171	-	2.3971	-
1/36	0.10205	2.7017	3.4051	3.8851	0.01098	2.4744	0.35788	2.3452
1/64	0.01874	2.9452	0.68413	2.7893	0.00216	2.8201	0.12022	1.8958
1/100	0.00494	2.9859	0.21370	2.6072	0.00059	2.9072	0.05279	1.8440
1/144	0.00165	2.9936	0.08515	2.5233	0.00020	2.9143	0.02584	1.9587
1/196	0.00065	2.9947	0.04096	2.3738	8.251e-5	2.9361	0.01411	1.9613

Tabela 6.22: Exemplo 4 com $Re=10^6$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P2/P1

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/100	0.42849	2.6061	79.888	1.7469	0.04136	1.5432	2.7210	1.7010
1/144	0.22165	1.8077	26.455	3.0308	0.02262	1.6546	1.4335	1.7574
1/196	0.12375	1.8905	9.9074	3.1857	0.01316	1.7572	0.81056	1.8494
1/256	0.07380	1.9355	4.7256	2.7719	0.00808	1.8262	0.49903	1.8162
1/324	0.04650	1.9601	2.8002	2.2215	0.00520	1.8709	0.33131	1.7388
1/400	0.03068	1.9742	1.9393	1.7434	0.00345	1.9398	0.23487	1.6325

Tabela 6.23: Exemplo 4 com $Re=10^6$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P1b/P1

h	CN				FS0			
	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2	Erro 1	Taxa 1	Erro 2	Taxa 2
1/16	0.07345	-	2.7627	-	0.00806	-	0.30150	-
1/36	0.00294	3.9651	0.13383	3.7331	0.00039	3.7349	0.05666	2.0614
1/64	0.00030	3.9559	0.03205	2.4841	4.909e-5	3.6021	0.01478	2.3346
1/100	5.12e-5	3.9739	0.00932	2.7669	9.12e-6	3.7696	0.00447	2.6803

Tabela 6.24: Exemplo 4 com $Re=10^6$. Taxas de convergência espaciais utilizando o elemento P3/P2

Analisa-se também a taxa de convergência temporal. Segue na tabela 6.25 as taxas para cada método temporal utilizando elementos P1b/P1 e Leray1. Todos os métodos, aos poucos, estão convergindo para as taxas esperadas (ordem 1 para EI e ordem 2 para CN e FS0). Note que devido a complexibilidade do problema os métodos temporais necessitam de maior refinamento do passo de tempo em comparação aos demais exemplos.

Δt	EI		CN		FS0	
	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1	Erro 1	Taxa 1
1/64	0.508363	-	0.428495	-	0.082370	-
1/100	0.469904	0.1763	0.428495	1.8046	0.041366	1.5432
1/144	0.405309	0.4055	0.221655	1.8077	0.022626	1.6546
1/196	0.339399	0.5756	0.123750	1.8905	0.013162	1.7572
1/256	0.282511	0.6869	0.073800	1.9355	0.008081	1.8262
1/324	0.236164	0.7606	0.046508	1.9601	0.005200	1.8709

Tabela 6.25: Exemplo 4 com $Re=10^6$. Taxas de convergência temporal utilizando elemento P1b/P1

6.1.5 Exemplo 5 - Escoamento em torno de um cilindro

Este exemplo trata do escoamento em duas dimensões em torno de um cilindro. O domínio do problema é mostrado na figura 6.17. Neste caso, para fazer uma comparação de resultados com John [20] utilizou-se as equações (2.1)-(2.5) com condições de contorno tal que $\mathbf{u}(t; 0, y) = \mathbf{u}(t; 2.2, y) = 0.41^{-2} \sin \pi t / 8 (6y(0.41 - y), 0) \text{m/s}$ e condição de não-deslizamento nas partes superior e inferior. Considere $\nu = 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$, $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ e tempo $T = 8\text{s}$.

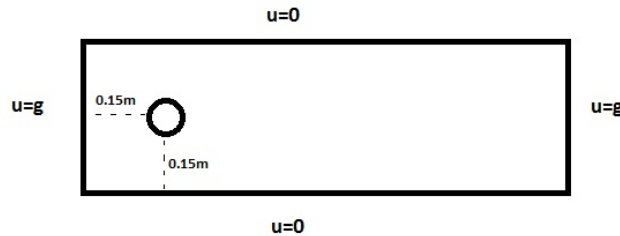


Figura 6.17: Domínio do Exemplo 5

O objetivo deste problema é calcular os coeficiente de arrasto (4.22) e sustentação (4.26), e ainda a diferença de pressão entre parte da frente e de trás do cilindro dada por $\Delta p = p(8; 0.15, 0.2) - p(8; 0.25, 0.2)$ no tempo $T = 8\text{s}$. Para tais aproximações, necessita-se alguns dados. A velocidade média de entrada no duto é $u_1(t) = \sin(\pi t / 8) \text{m/s}$. Como $T = 8\text{s}$, a velocidade máxima é $u_1|_{max} = 1 \text{m/s}$, o diâmetro do cilindro é $L = 0,1 \text{m}$ e a densidade do fluido é $\rho = 1 \text{kg/m}^3$. Note ainda que a partir da velocidade média podemos constatar que o número de Reynolds está no intervalo $0 < \text{Re} \leq 100$.

Considerou-se os valores de máximo dos coeficientes de arrasto ($c_{d,max}$) e sustentação ($c_{l,max}$), para posterior comparação com John [20].

Para este exemplo utilizou-se a discretização espacial P2/P1, e para a discretização temporal Euler-implícito, Crank Nicolson e FS. Nesse caso FS0 e FS1 coincidem, pois a única diferença entre os dois métodos é na atualização da forçante \mathbf{f} . Como neste caso $\mathbf{f}=\mathbf{0}$, FS0 e FS1 são iguais.

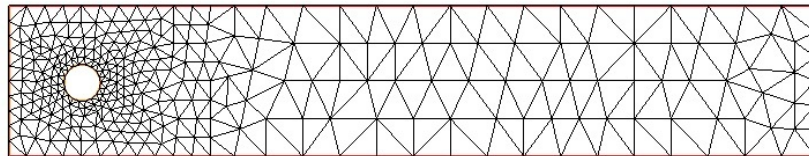
Para o termo não-linear utilizou-se o esquema 2-leg (3.30)-(3.30), o termo anti-simétrico (2.20) e o método de Newton (2.29) com critério de parada $\gamma < 10^{-10}$, que mostrou-se mais eficiente que o método de Picard nesse caso. A resolução do sistema foi feita através do método UMFPACK [9].

Através das tabelas e gráficos, os resultados dessa seção são comparáveis ao artigo de John [20]. Em John foram utilizados dois esquemas de discretização espacial, P2/P1 e Q2/P1^{disc}. John também utiliza um diferente método de solução de sistema (GMRES) e ainda a utilização de um método multigrid.

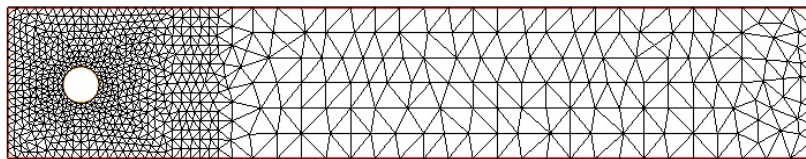
Para as computações foram escolhidos 3 níveis de malha. A malha 2 do presente trabalho tem a mesma quantidade de graus de liberdade da malha 1 do trabalho de John e a malha 3 deste trabalho com a malha 2 de John [20]. As malhas podem ser visualizadas na figura 6.18. Segue na tabela 6.26 a quantidade de graus de liberdade em cada nível de malha. Para o passo de tempo escolheu-se $\Delta t = 0,02/2^i$, onde $i = 0, \dots, 4$.

Nível	Velocidade	Pressão	Total
1	2436	327	2763
2	6426	840	7266
3	24272	3109	27381

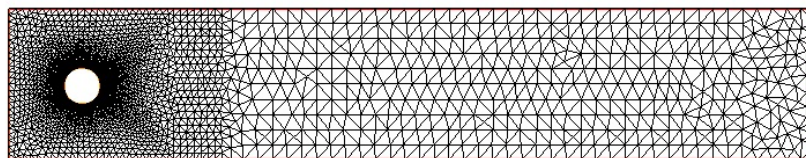
Tabela 6.26: Exemplo 5 - Graus de liberdade para cada nível da malha



(a) Malha nível 1



(b) Malha nível 2



(c) Malha nível 3

Figura 6.18: Níveis de malha do Exemplo 5

Na figura 6.19 mostra-se o campo de velocidade em diferentes tempos. Nota-se que no tempo $T=2s$ já existe a formação de vórtice próximo ao cilindro, a partir do tempo $T=5s$ observa-se claramente a geração de vórtices no domínio. Esta mesma figura também pode ser comparada com John [20]. No sentido gráfico pode-se dizer que os resultados estão semelhantes.

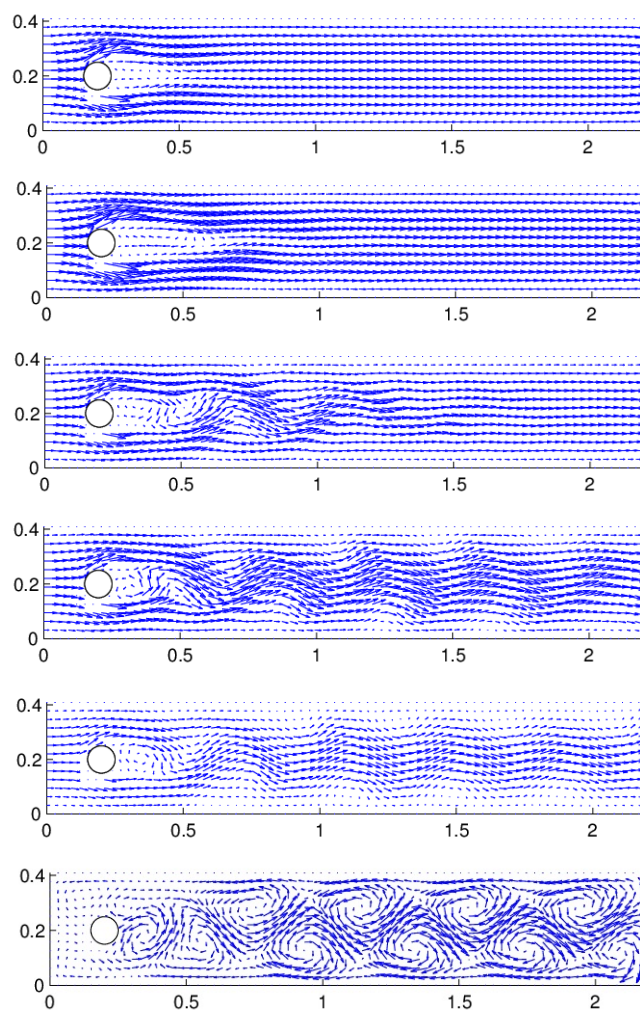


Figura 6.19: Campo de velocidade vetorial nos tempos $T=2, 4, 5, 6, 7, 8$ s, respectivamente

Na figura 6.20 são mostradas isolinhas da velocidade.

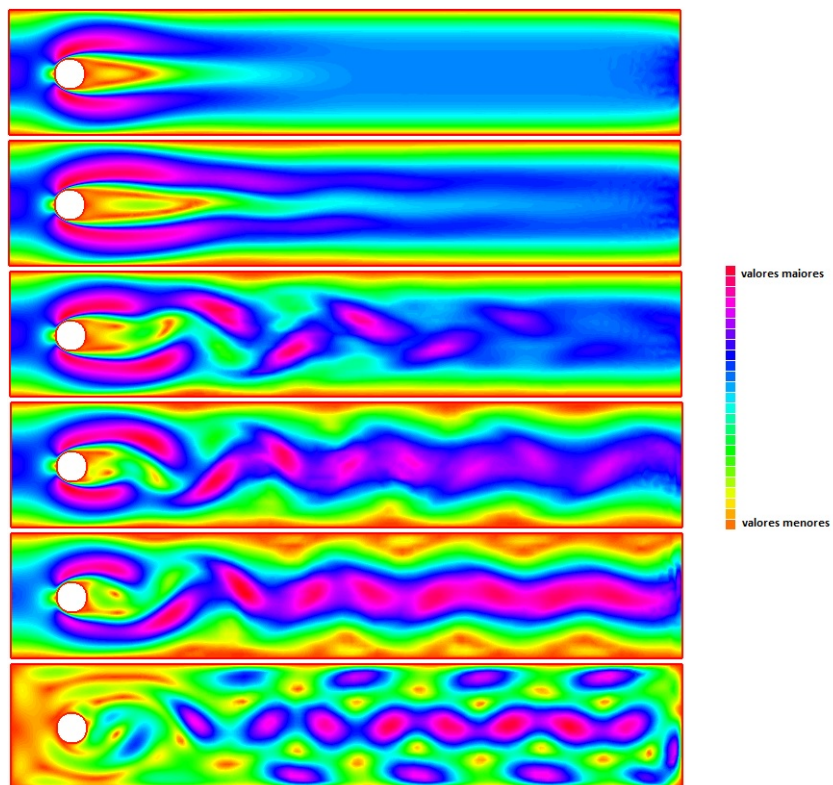


Figura 6.20: Isolinhas da velocidade nos tempos $T=2, 4, 5, 6, 7, 8$ s, respectivamente

Ainda, na figura 6.21 é mostrado o campo de pressão em diferentes tempos.

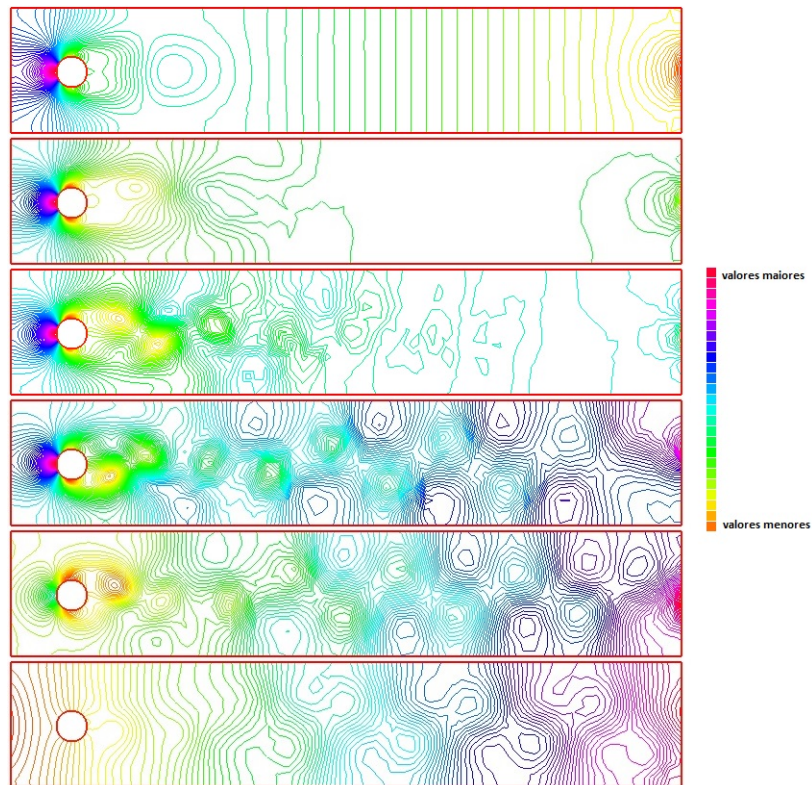


Figura 6.21: Pressão nos tempos $T=2, 4, 5, 6, 7, 8s$, respectivamente

Agora, serão calculados coeficientes de arrasto, sustentação e $\Delta p(8s)$. As tabelas 6.27, 6.28 e 6.29 também podem ser comparadas com John [20].

Em Schäfer e Turek [35], este mesmo exemplo é resolvido, com diversos métodos de solução numérica, incluindo métodos de diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos, todos eles com malhas bem refinadas. Conclui-se que o intervalo ótimo de aproximação do coeficiente de arrasto é $2.93 < c_{d,max} < 2.97$, o coeficiente de sustentação é $0.47 < c_{l,max} < 0.49$ e para a diferença da pressão o intervalo é $-0.115 < \Delta p(8s) < -0.105$.

Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{l,max})$	$c_{l,max}$	$\Delta p(8s)$
2	0.02	3.94	2.9688156	0.94	0.0011532756	-0.12644723
2	0.01	3.93	2.9685914	7.27	0.017513428	-0.12539603
2	0.005	3.93	2.9684933	6.32	0.15133755	-0.10284139
2	0.0025	3.9325	2.9685012	6.2425	0.27918489	-0.10277201
2	0.00125	3.93375	2.9685533	6.205	0.34465934	-0.10826145
3	0.02	3.94	2.9495693	0.92	0.00117303	-0.12642784
3	0.01	3.93	2.9493413	7.21	0.023094919	-0.12468559
3	0.005	3.93	2.9492476	6.295	0.16940978	-0.10096363
3	0.0025	3.9325	2.9493094	6.2275	0.29669602	-0.10507507
3	0.00125	3.9325	2.9494520	5.72625	0.37342446	-0.11012605

Tabela 6.27: Exemplo 5. Euler implícito com DNS

Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{l,max})$	$c_{l,max}$	$\Delta p(8s)$
2	0.02	3.96	2.966817	5.76	0.4252636	-0.10341796
2	0.01	3.94	2.9677771	5.72	0.4395816	-0.10987897
2	0.005	3.94	2.9682405	5.715	0.44286571	-0.11106215
2	0.0025	3.9375	2.9684635	5.7075	0.44233924	-0.11141863
2	0.00125	3.93625	2.968574	5.70875	0.44227988	-0.11156644
3	0.02	3.94	2.94787	5.76	0.454906	-0.105271
3	0.01	3.94	2.94886	5.72	0.468869	-0.110712
3	0.005	3.94	2.94933	5.705	0.470592	-0.11146
3	0.0025	3.9375	2.94956	5.7025	0.470288	-0.111705
3	0.00125	3.93625	2.94966	5.7025	0.470129	-0.111824

Tabela 6.28: Exemplo 5. Crank-Nicolson com DNS

Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{l,max})$	$c_{l,max}$	$\Delta p(8s)$
2	0.02	3.94	2.9670828	5.72	0.46536749	-0.11087478
2	0.01	3.94	2.9678846	5.71	0.45473204	-0.1113912
2	0.005	3.935	2.9682856	5.71	0.44797908	-0.11156249
2	0.0025	3.935	2.9684852	5.7075	0.44485994	-0.11163467
2	0.00125	3.935	2.9685848	5.70875	0.44322709	-0.11166792
3	0.02	3.94	2.94816	5.7	0.490578	-0.111436
3	0.01	3.94	2.94897	5.7	0.481648	-0.111718
3	0.005	3.935	2.94938	5.7	0.475536	-0.111831
3	0.0025	3.935	2.94958	5.7025	0.472414	-0.111888
3	0.00125	3.935	2.94968	5.70125	0.470737	-0.111918

Tabela 6.29: Exemplo 5. Método θ de passo fracionado com DNS

Analisando os dados destas tabelas e fazendo uma relação com o artigo de John [20] e com Schäfer e Turek [35] nota-se que o método de EI é apropriado apenas para o cálculo de aproximação do coeficiente de arrasto e da diferença da pressão com Δt bem pequeno; para o coeficiente de sustentação o método é inapropriado. Os métodos CN e FS mostraram-se apropriados para o cálculo de todos os coeficientes. O coeficiente de sustentação é muito sensível e sofre bastante variação ao longo do tempo, por isso no nível 2 ainda não foi possível encontrar valores dentro do intervalo de referência de Schäfer e Turek [35], mas percebeu-se que os valores encontrados neste trabalho estão mais próximos do intervalo ótimo de referência do que em John [20].

Nas figuras 6.22, 6.23 e 6.24 é apresentada a evolução temporal dos coeficientes de arrasto, sustentação e diferença de pressão. Para todos os gráficos utilizou-se $\Delta t = 0.00125$ e a malha no nível 3. Note que na aproximação do coeficiente de sustentação o método de EI não acompanha os métodos CN e FS nos pontos

de máximo e mínimo relativo. Na figura 6.23 vê-se que o método de ordem 1 está sempre atrasado aos demais.

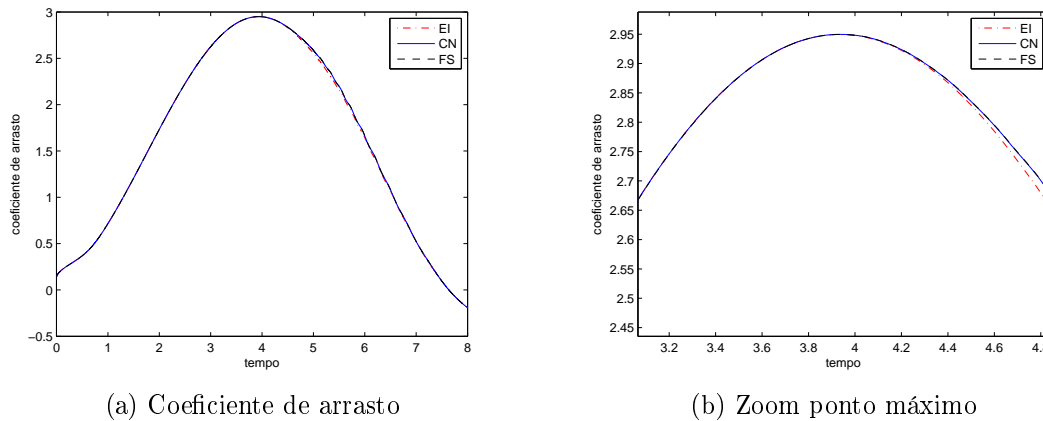


Figura 6.22: Evolução temporal do coeficiente de arrasto para diferentes métodos de discretização temporal, malha no nível 3 e passo de tempo $\Delta t = 0.00125$

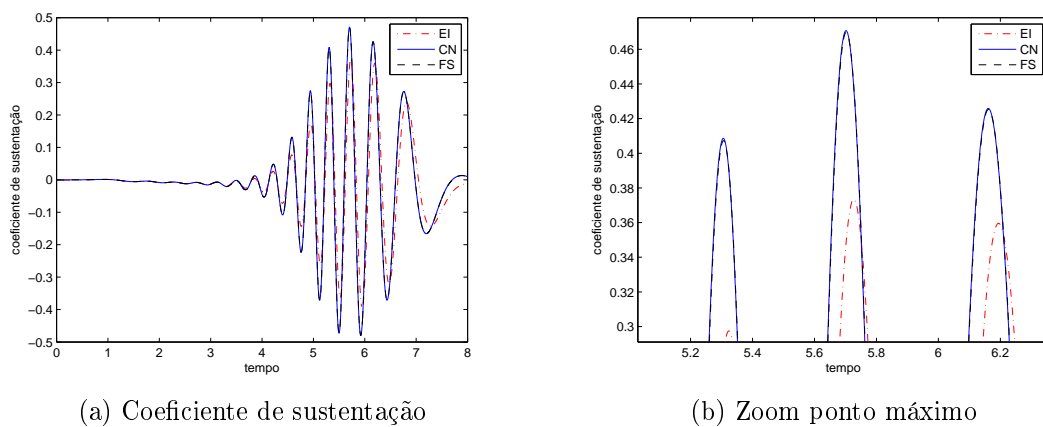


Figura 6.23: Evolução temporal do coeficiente de sustentação para diferentes métodos de discretização temporal, malha no nível 3 e passo de tempo $\Delta t = 0.00125$

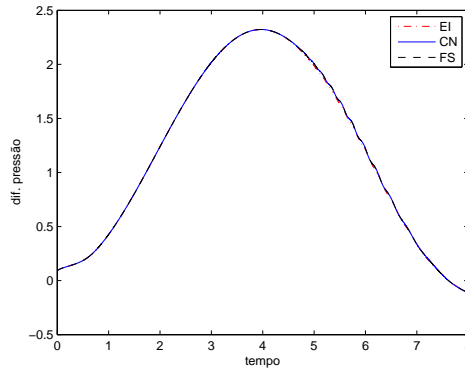


Figura 6.24: Evolução temporal de Δp para diferentes métodos de discretização temporal, malha no nível 3 e passo de tempo $\Delta t = 0.00125$

Agora serão feitas algumas análises deste exemplo utilizando o modelo de deconvolução de Leray (5.15)-(5.16). A grande vantagem do modelo estudado é obter as soluções esperadas com menos graus de liberdade que os exemplos com DNS.

Com uma malha no nível 1, conseguiu-se aproximar o coeficiente de arrasto a partir do modelo de deconvolução de Leray com $N=1$ (Leray1) e testou-se também para o modelo de Leray com $N=0$ (Leray0). Considerou-se $\delta = \frac{\pi r}{n}$, onde r é o raio do cilindro e n é o número de pontos na borda do cilindro. Nas tabelas 6.30 e 6.31 são apresentadas as aproximações do coeficiente de arrasto utilizando os modelos de deconvolução de Leray, a partir dos métodos de discretização temporal CN e FS.

Observe que para a malha no nível 1 não foram obtidas boas aproximações dos coeficientes de sustentação, devido ao fato que para este coeficiente necessita-se de maior número de graus de liberdade.

Nas tabelas 6.30 e 6.31 a aproximação do coeficiente de arrasto com DNS, em ambos os métodos temporais, não estão no intervalo ótimo dado por Schäfer e Turek [35]. Com Leray0 o coeficiente de sustentação ótimo ainda não é aproximado. Já com Leray1 bons resultados são obtidos, ou seja, valores dentro do intervalo de

referência. Isso confirma a observação feita em Layton et al. [27], que o erro do modelo de Leray com $N=0$, da mesma forma que com DNS, pode crescer ao longo do tempo, diferentemente dos modelos de deconvolução de Leray com $N \geq 1$.

-	-	DNS		Modelo Leray0		Modelo Leray1	
Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$
1	0.02	3.94	2,8721195	3.94	3.1075974	3.94	2,9614752
1	0.01	3.93	2,8730164	3.93	3.1084583	3.93	2,9623644
1	0.005	3.92	2,8734746	3.93	3.1089116	3.925	2,9628197
1	0.0025	3.92	2,8737038	3.9275	3.1091385	3.9225	2,9630498
1	0.00125	3.9175	2,8738189	3.92625	3.1092527	3.92125	2,9631655

Tabela 6.30: Exemplo 5. Crank-Nicolson com malha no nível 1

-	-	DNS		Modelo Leray0		Modelo Leray1	
Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$
1	0.02	3.92	2,8722666	3,92	3.107692	3,94	2,9615456
1	0.01	3.92	2,8730993	3,93	3.1085435	3,92	2,9624477
1	0.005	3.92	2,8735152	3,925	3.1089547	3,92	2,9628647
1	0.0025	3,9175	2,8737253	3,925	3.109161	3,92	2,9630732
1	0.00125	3,9175	2,8738297	3,92625	3.1092645	3,92125	2,9631777

Tabela 6.31: Exemplo 5. Método θ de passo fracionado com malha no nível 1

Segue ainda, na figura 6.25 o gráfico do histórico temporal do coeficiente de arrasto. Nota-se claramente a diferença entre a aproximação com DNS e com Leray1. O resultado obtido com DNS não consegue aproximar o ponto de máximo desejado, diferentemente de Leray1. Confirmando a efetividade do modelo.

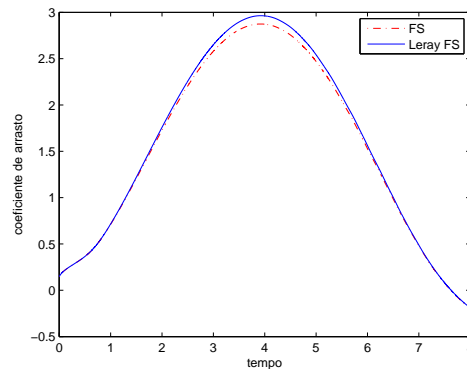


Figura 6.25: Evolução temporal do coeficiente de arrasto na malha 1 e $\Delta t = 0.00125$

Na figura 6.26 são apresentados quatro gráficos no tempo $T = 8s$, todos na mesma malha (nível 1) e passo de tempo iguais ($\Delta t = 0.02$), com métodos temporais diferentes e comparando o modelo em DNS com o de Leray1. Note que, nos respectivos métodos temporais, os exemplos com Leray1 levam vantagem sobre os modelos com DNS. Percebe-se que dentre todos, o método FS com Leray1 foi o que melhor capturou os fenômenos físicos do problema proposto, tal como a formação de vórtices.

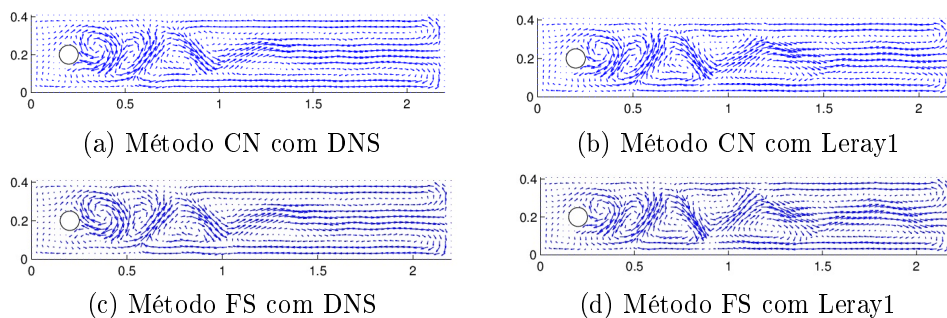


Figura 6.26: Campo de velocidade no tempo $T = 8s$ com malha no nível 1

Com a malha no nível 2, conseguiu-se aproximar o coeficiente de sustentação no intervalo de referência a partir do modelo de deconvolução de Leray com $N=3$ (Leray3). Considerou-se também os modelos de deconvolução de Leray com $N=1,2$, mas apenas com $N=3$ os resultados foram satisfatórios. Considere novamente $\delta = \frac{\pi r}{n}$.

A escolha por Leray3 é justificada pelo fato que Leray 1 e Leray 2 não aproximaram todos os coeficientes de maneira ótima, ou seja, dentro de intervalo de referência. A partir disso confirma-se o argumento exposto no Capítulo 5, que quanto mais filtros são aplicados, maior a ordem de aproximação do modelo de Leray.

Observe nas tabelas 6.32 e 6.33 os coeficientes aproximados por Leray1 e Leray2, respectivamente, ambos aproximados pelo método CN. Note que o coeficiente de sustentação está sendo aproximado de maneira semelhante ao modelo Leray3, ver tabela 6.34. Mas o coeficiente de arrasto para Leray1 e Leray2 está fora do intervalo de referência, diferentemente de Leray3. Por isso, para este exemplo se fez necessário a utilização de um maior número de filtros.

É importante observar que o mesmo comportamento foi verificado com o método FS.

Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{l,max})$	$c_{l,max}$	$\Delta p(8s)$
2	0.02	3.96	2.9995776	5.78	0.45512743	-0.10058374
2	0.01	3.94	3.0005047	5.74	0.46899419	-0.10775428
2	0.005	3.94	3.0009494	5.73	0.47078589	-0.10955744
2	0.0025	3.94	3.0011634	5.725	0.47027826	-0.1100912
2	0.00125	3.93875	3.0012689	5.725	0.46979967	-0.11028516

Tabela 6.32: Exemplo 5. Modelo de Leray1 com Crank-Nicolson e malha nível 2

Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{l,max})$	$c_{l,max}$	$\Delta p(8s)$
2	0.02	3.96	2.9765314	5.78	0.45613274	-0.10217384
2	0.01	3.94	2.9774789	5.73	0.46905216	-0.10913284
2	0.005	3.94	2.9779238	5.72	0.47082412	-0.11060902
2	0.0025	3.9375	2.9781398	5.7175	0.47054864	-0.11104666
2	0.00125	3.9375	2.9782464	5.71625	0.46986316	-0.1112157

Tabela 6.33: Exemplo 5. Modelo de Leray2 com Crank-Nicolson e malha nível 2

Nas tabelas 6.34 e 6.35 são apresentados os resultados utilizando os métodos de discretização temporal CN e FS, respectivamente, combinados com a regularização Leray3.

Todas as aproximações dos coeficientes com o modelo de deconvolução de Leray com $N=3$ estão no intervalo de referência de Schäfer e Turek. Note que o coeficiente de sustentação com DNS não era obtido no intervalo ótimo (ver tabelas 6.28 e 6.29), já com Leray3 o resultado desejado é obtido. Observe que o método FS com Leray3 obteve os coeficientes ótimos em quase todos os passos de tempo, diferentemente do método CN, que obteve valores ótimos só para dois passos de tempo, mostrando mais uma vez, a eficiência do método θ de passo fracionado.

Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{l,max})$	$c_{l,max}$	$\Delta p(8s)$
2	0.02	3.94	2.968507	5.76	0.45693479	-0.10273712
2	0.01	3.94	2.9689559	5.73	0.46924747	-0.10952412
2	0.005	3.94	2.9694004	5.72	0.47096868	-0.11086995
2	0.0025	3.9375	2.9661175	5.715	0.47064383	-0.11127115
2	0.00125	3.93625	2.9697224	5.71375	0.46989104	-0.1114308

Tabela 6.34: Exemplo 5. Modelo de Leray3 com Crank-Nicolson e malha no nível 2

Nível	Δt	$t(c_{d,max})$	$c_{d,max}$	$t(c_{l,max})$	$c_{l,max}$	$\Delta p(8s)$
2	0.02	3.94	2.968728	5.72	0.4912897	-0.11062063
2	0.01	3.94	2.9690268	5.71	0.48043859	-0.11122779
2	0.005	3.935	2.9694297	5.715	0.47249932	-0.11142283
2	0.0025	3.9375	2.9696298	5.7125	0.47194154	-0.11150124
2	0.00125	3.9325	2.9697301	5.7125	0.47083318	-0.11153619

Tabela 6.35: Exemplo 5. Modelo de Leray3 com θ de passo fracionado e malha no nível 2

Por fim, na figura 6.27, o gráfico com o histórico temporal do coeficiente de sustentação comparando os modelos com DNS nos níveis de malha 2 e 3, e com o modelo de Leray3 com a malha no nível 2. Claramente, observa-se a vantagem do modelo de Leray3 em relação ao modelo com DNS no nível 2. E comparando com o modelo em DNS na malha nível 3, que tem mais graus de liberdade, conclui-se que o modelo de Leray3 aproximou o coeficiente de sustentação com um nível a menos de malha.

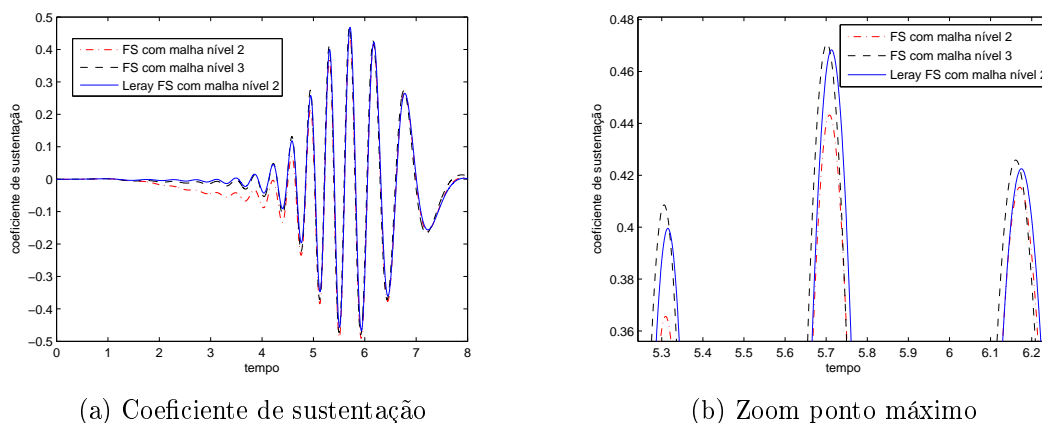


Figura 6.27: Evolução temporal do coeficiente de sustentação com o método de discretização temporal FS e $\Delta t = 0.00125$

Para este exemplo seria possível ainda fazer uma análise do número adimensional de Strouhal (St), dado por

$$St = \frac{fL}{U}, \quad (6.2)$$

onde f é a frequência de vórtices. Este adimensional é útil para a análise de oscilação em problemas de dinâmica de fluidos. Em geral, no escoamento em torno de um cilindro os dois números adimensionais governantes são exatamente os números de Reynolds e Strouhal.

O número de Strouhal pode ser visto como função do número de Reynolds. Para o escoamento em torno de um cilindro pode-se encontrar um estudo em Schlichting [36]. Nota-se que o número de Strouhal varia com o número de Reynolds de forma crescente de $0 < Re \leq 1200$. Após esse número de Reynolds, o número de Strouhal permanece em $St = 0,21$ até para $Re = 4 \times 10^3$, e a partir desse ponto ele decresce pra $St = 0,17$. Segundo Schlichting, em $10^6 \leq Re \leq 3 \times 10^6$ não existe formação regular de vórtices. Por fim, para valores de Reynolds acima de $Re = 3 \times 10^6$, o número de Strouhal fica em torno de $St = 0,27$.

6.1.6 Exemplo 6 - Comparação para o termo não-linear

É feita uma comparação entre diferentes tratamentos do termo não-linear das equações de Navier-Stokes. No Capítulo 3 foram dadas duas alternativas de descrever este termo com o método CN, segue.

1-leg:

$$b^* \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, \frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, \mathbf{v}^h \right) = \frac{1}{4} b^*(\mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{4} b^*(\mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{u}_n^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{4} b^*(\mathbf{u}_n^h, \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{4} b^*(\mathbf{u}_n^h, \mathbf{u}_n^h, \mathbf{v}^h);$$

2-leg:

$$b^* \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, \frac{\mathbf{u}_{n+1}^h + \mathbf{u}_n^h}{2}, \mathbf{v}^h \right) \approx \frac{1}{2} b^*(\mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{2} b^*(\mathbf{u}_n^h, \mathbf{u}_n^h, \mathbf{v}^h).$$

A partir desses dois tratamentos foram refeitas algumas simulações dos exemplos 1,2,3 deste capítulo com o elemento P2/P1 e observou-se que não há diferenças significativas entre a utilização do 1-leg ou do 2-leg no sentido de aproximação de solução. Mas percebe-se que com 1-leg tem-se um acréscimo de tempo computacional com relação a 2-leg.

Alguns testes para o problema do escoamento em torno de um aerofólio NACA0012, com número de Reynolds $Re=10^4$, foram feitos e constatou-se que o método CN com 1-leg aproximou melhor as soluções do que com o método CN com 2-leg. Isso confirma Maubach [32], que diz que para escoamentos com altos valores para Reynolds a versão 2-leg pode não alcançar valores desejados.

6.1.7 Exemplo 7 - Escoamento em torno do aerofólio NACA0012

Nesta subseção são apresentados alguns resultados preliminares a respeito do escoamento em torno do aerofólio NACA 0012.

As equações que descrevem o comportamento do escoamento em torno do aerofólio também são as equações de Navier-Stoke para fluidos incompressíveis, dadas a seguir

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla \cdot \sigma = \mathbf{f} \quad \text{em } (0, T] \times \Omega, \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } [0, T] \times \Omega, \quad (6.4)$$

onde

$$\sigma = -\frac{p}{\rho}\mathbb{I} + 2Re^{-1}\mathbb{D}(\mathbf{u}) \quad (6.5)$$

é o tensor tensão, $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$ é o tensor deformação e \mathbb{I} é a matriz identidade.

O domínio do problema é mostrado na figura¹ 6.28, onde Γ_U é o contorno na entrada do fluido, Γ_D é o contorno na saída, Γ_S é o contorno nas laterais, Γ_B é o contorno no aerofólio e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \sigma_{11}n_x + \sigma_{12}n_y$. Para melhor entendimento das condições de contorno veja Tamura [39].

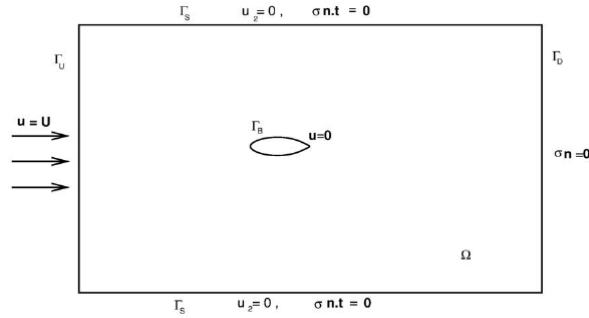


Figura 6.28: Domínio do problema do aerofólio NACA0012

Nesse exemplo considere a força $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ e a massa específica $\rho = 1kg/m^3$. Defina o espaço $Y =: \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 : \mathbf{v}=\mathbf{0}$ em $\Gamma_U \cup \Gamma_B$ e $v_2 = 0$ em $\Gamma_S\}$

A partir de (6.3) e (6.4) pode-se obter a formulação variacional. Para qualquer $t \in (0, T]$, tome $\mathbf{v} \in Y$ e $q \in Q$, multiplique, respectivamente, por (6.3) e (6.4), integre em Ω e aplicando o teorema da divergência tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}_t \mathbf{v} \, dxdy + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dxdy - \int_{\Gamma_U} \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_S} (\sigma_{11}n_x + \sigma_{12}n_y) \cdot v_1 \, ds - \\ - \int_{\Gamma_S} (\sigma_{21}n_x + \sigma_{22}n_y) \cdot v_2 \, ds - \int_{\Gamma_D} \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_B} \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds + \\ + \int_{\Omega} \sigma(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dxdy = 0, \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot q \, dxdy = 0. \end{aligned}$$

Note que $\mathbf{v} \in Y$, logo $\mathbf{v} = 0$ em $\Gamma_U \cup \Gamma_B$ e $v_2 = 0$ em Γ_S . E pelas condições naturais, tem-se que $\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$ em Γ_D e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$ em Γ_S .

¹Figura retirada de Srinath e Mittal [38]

A partir dessas hipóteses e de (6.5) a formulação variacional é dada: encontre a velocidade $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow Y$ e a pressão $p : (0, T] \rightarrow Q$ tal que

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + b^*(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) + 2Re^{-1}(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}) = 0, \quad (6.6)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0, \quad (6.7)$$

para qualquer $\mathbf{v} \in Y$ e qualquer $q \in Q$

Pode-se derivar o quarto termo do lado esquerdo de outra forma, conforme

$$\begin{aligned} 2(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}) &= (\mathbb{D}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}) + (\mathbb{D}(\mathbf{u})^T, \nabla \mathbf{v}^T) \\ &= (\mathbb{D}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}) + (\mathbb{D}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}^T) \\ &= 2(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v})). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Tem-se observado que a formulação $2(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))$ é superior a $2(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{v})$ em problemas mais complexos, como este do escoamento em torno de um aerofólio. Isso explica-se do fato que $2(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))$ preserva as propriedades físicas do problemas. Logo, esta formulação favorece a convergência de problemas com condições de contorno irregulares.

Também observa-se que em problemas mais complexos uma alternativa de estabilização da solução pode ser inserida. Introduce-se a estabilização de viscosidade artificial,

$$\omega(\nabla(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n), \nabla \mathbf{v}) \quad (6.9)$$

onde ω é uma constante.

Apesar dos métodos temporais utilizados neste trabalho serem incondicionalmente estáveis para as equações de Navier-Stokes incompressíveis em regime transiente, em problemas mais complexos, como o desta seção, alguns artifícios podem ser utilizados a fim de melhorar a solução. Para maiores informações a respeito

desta estabilização de viscosidade artificial, veja Labovsky et al. [24] ou Bowers e Rebholz [5].

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A escolha do espaço de elementos finitos deve ser feita com muito critério, pois dependendo do refinamento da malha pode aumentar significativamente a quantidade de graus de liberdade e conseqüentemente o tempo computacional. Nos exemplos de 1 a 4 do capítulo 6 observou-se que o elemento P3/P2, na maioria das vezes, aproximou as soluções de forma bem semelhante ao elemento Taylor-Hood (P2/P1), mas com tempo computacional bem maior. Por isso, a utilização do elemento P3/P2 é favorável apenas quando o problema tem predominância de erro no espaço, como no exemplo 1. Já o elemento MINI (P1b/P1) mostra-se mais rápido (por ter menos graus de liberdade) mas, em geral, a aproximação é inferior aos elementos P2/P1 e P3/P2.

Por estes motivos a respeito de discretização espacial, no exemplo 5, optou-se pelo elemento P2/P1, que é mais eficiente que P1b/P1 e mais rápido que P3/P2. Tal tese está de acordo com a literatura, onde o elemento P2/P1 é utilizado em grande escala na área de pesquisa de problemas envolvendo fluidos. Ainda, percebeu-se que P2/P1 aproximou as soluções da velocidade e da pressão de forma semelhante ao elemento Q2/P1^{disc}, se comparados os resultados dos exemplos 1 a 4 com o artigo de John [21].

A respeito da aproximação do termo não linear observou-se que a escolha pelo método de Picard ou de Newton é muito relativa. Ambos os métodos convergem muito bem, mas tratando-se de tempo computacional deve-se sempre analisar qual é o método mais apropriado para o problema em questão. Por isso, esta escolha deve ser baseada em experimentos para cada problema diferente abordado.

Com relação aos métodos de discretização temporal pode-se verificar algumas diferenças. O método de Euler implícito conseguiu aproximar as soluções das equações de Navier-Stokes, mas por ser um método de primeira ordem, de modo geral, as soluções ficaram menos satisfatórias que os métodos de segunda ordem. Em especial, para a aproximação do coeficiente de sustentação em torno de um cilindro (exemplo 5) o método mostrou-se inadequado. Já o método Crank-Nicolson apresentou bons resultados. Por ser um método de segunda ordem, já se esperava tais resultados.

Finalmente o método θ de passo fracionado 0 (FS0). Este método, também de segunda ordem, mostrou-se muito eficiente, tanto para as aproximações da velocidade e da pressão (Exemplos 1-4) quanto para as aproximações dos coeficientes aerodinâmicos (Exemplo 5). Na grande maioria dos casos testados, o método FS0 aproximou a pressão melhor do que os outros métodos e também foi o que melhor aproximou o coeficiente de sustentação. Essas vantagens são justificadas pelo fato do método FS0 resolver o problema três vezes em cada passo de tempo, por ser um método fortemente A-estável e conjectura-se que esta eficiência também tenha relação com os pesos impostos pelo método, dando maior importância a parte implícita do que a parte explícita.

Fazendo uma relação do método FS com Crank-Nicolson, percebe-se que CN define pesos iguais as partes implícita e explícita. Ainda há o fato de CN ser A-estável enquanto FS é fortemente A-estável, esta diferença pode ser relevante quando as condições iniciais e de contorno forem irregulares. Segundo Turek [42], essa diferença faz com que o método CN tenha oscilações numéricas que podem ser corrigidas apenas com passos de tempo suficientemente pequenos. Ao passo que FS seria capaz de aproximar tais soluções com passo de tempo maior sem apresentar instabilidade. Estas oscilações em alguns casos podem produzir soluções não físicas, veja Turek [42].

O método θ de passo fracionado também mostrou-se mais eficiente que Crank-Nicolson quando combinado com a regularização dada pelo modelo de deconvolução de Leray. A desvantagem do método FS com relação aos demais métodos é o tempo computacional, que normalmente é no mínimo o dobro de CN.

É importante observar que logo a partir das primeiras simulações notou-se que o método FS1 não era tão eficiente quanto FS0, por isso em muitas análises optou-se apenas abordar o método FS0. Como já explicado no desenvolvimento do trabalho, a desvantagem do método FS1 se deve ao fato de não atualizar a força \mathbf{f} em todas as etapas do passo de tempo.

Através do exemplo 5, onde o objetivo era a aproximação de coeficientes aerodinâmicos, confirmou-se o fato do modelo de deconvolução de Leray aproximar as soluções em níveis de malha mais grossa, onde modelos com simulação direta não conseguem capturar de forma ótima tais soluções. Também observou-se que a quantidade de filtros implica em aumento de precisão do modelo, mas por outro lado deve-se limitar a quantidade de filtros, pois isso pode aumentar o tempo computacional.

Outra vantagem do modelo de deconvolução de Leray com relação a DNS foi mostrada no exemplo 4 com número de Reynolds 10^6 , no qual foi capaz de aproximar soluções com passo de tempo (Δt) grandes, onde modelos com DNS não conseguiram aproximar. Indica-se assim outra área de interesse para o modelo. Por fim, o modelo de deconvolução de Leray mostrou-se eficiente quando combinado com a discretização temporal dada pelo método θ de passo fracionado, caso esse não encontrado nos trabalhos pesquisados.

Para trabalhos futuros pretende-se aproximar os coeficientes aerodinâmicos em outras geometrias (exemplo: aerofólio), paralelização dos códigos computacionais, inserir nas equações de Navier-Stokes efeitos reativos e de compressibilidade, e trabalhar em três dimensões.

Referências Bibliográficas

- [1] ARIS, R. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Books on Engineering. Dover Publ., 1989.
- [2] BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2000.
- [3] BECKER, E., CAREY, G., AND ODEN, J. *Finite Elements: An introduction*. Texas finite element series. Prentice-Hall, 1981.
- [4] BERTERO, M., AND BOCCACCI, P. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. Institute of Physics Pub., 1998.
- [5] BOWERS, A. L., AND REBHOLZ, L. G. Increasing accuracy and efficiency in fe computations of the Leray-deconvolution model. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 28, 2 (2012), 720–736.
- [6] BRENNER, S., AND SCOTT, R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2007.
- [7] BRISTEAU, M. O., GLOWINSKI, R., AND PERIAUX, J. Numerical methods for the Navier-Stokes equations. applications to the simulation of compressible and incompressible viscous flows. *Computer Physics Reports* 6 (1987), 73–187.
- [8] CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation* 22, 104 (1968), pp. 745–762.
- [9] DAVIS, T. A. Algorithm 832: Umfpack v4.3-an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. Math. Softw.* 30, 2 (June 2004), 196–199.

- [10] DUNCA, A., AND EPSHTEYN, Y. On the stolz-adams deconvolution model for the large-eddy simulation of turbulent flows. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 37, 6 (2006), 1890 – 1902.
- [11] GALDI, G. An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary value problem. In *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics*, G. Galdi, J. Heywood, and R. Rannacher, Eds., Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Birkhauser Basel, 2000, pp. 1–70.
- [12] GERMANO, M. Differential filters for the large eddy numerical simulation of turbulent flows. *Physics of Fluids* 29 (1986), 1755–1757.
- [13] GERMANO, M. Differential filters of elliptic type. *Physics of Fluids* 29 (1986), 1757–1758.
- [14] GUNZBURGER, M. *Finite element methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice, and algorithms*. Computer science and scientific computing. Academic Press, 1989.
- [15] HECHT, F. Freefem++. *Third Edition, Version 3.19*.
- [16] HEYWOOD, J., AND RANNACHER, R. Finite-element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. part iv: Error analysis for second-order time discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 27, 2 (1990), 353–384.
- [17] HUGHES, W., BRIGHTON, J., AND WINOWICH, N. *Schaum's Outline of Fluid Dynamics*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Companies, Incorporated, 1999.
- [18] JOHN, V. Numerical solution of incompressible flows. *Lecture notes of a mini-school held at the University of Texas*.

- [19] JOHN, V. Parallele losung der inkompressiblen Navier-Stokes gleichungen auf adaptiv verfeinerten gittern. *Otto-von-Guericke University Magdeburg (1997)*.
- [20] JOHN, V. Reference values for drag and lift of a two-dimensional time-dependent flow around a cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 44, 7 (2004), 777–788.
- [21] JOHN, V., MATTHIES, G., AND RANG, J. A comparison of time-discretization/linearization approaches for the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 44–47 (2006), 5995 – 6010.
- [22] JOHNSON, C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 1987.
- [23] KLOUCEK, P., AND RYS, F. Stability of the fractional step θ -scheme for the nonstationary Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 31, 5 (1994), 1312–1335.
- [24] LABOVSKY, A., LAYTON, W. J., MANICA, C. C., NEDA, M., AND REBHOLZ, L. G. The stabilized extrapolated trapezoidal finite-element method for the Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198, 9-12 (2009), 958 – 974.
- [25] LAYTON, W. *Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows*. Computational Science and Engineering Series. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [26] LAYTON, W. The interior error of van cittert deconvolution of differential filters is optimal. *Applied Mathematics E-Notes* 12 (2012), 88–93.

- [27] LAYTON, W., MANICA, C. C., NEDA, M., AND REBHOLZ, L. G. Numerical analysis and computational testing of a high accuracy leray-deconvolution model of turbulence. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 24, 2 (2008), 555–582.
- [28] LERAY, J. Essai sur les mouvements plans d’une liquide visqueux que limitent des parois. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Paris, Série IX* 13 (1934), 331–418.
- [29] LERAY, J. Sur les mouvements d’une liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.* 63 (1934), 193–248.
- [30] LESIEUR, M. *Turbulence in Fluids*. Fluid Mechanics and Its Applications Series. Springer Science+Business Media B.V., 2008.
- [31] MANICA, C., AND KAYA MERDAN, S. Convergence analysis of the finite element method for a fundamental model in turbulence. *Technical Report, University of Pittsburgh,*, 2006 (submitted).
- [32] MAUBACH, J. M. Local bisection refinement for n -simplicial grids generated by reflection. *Siam Journal on Scientific Computing* 16 (1995).
- [33] PRANDTL, L., AND TIETJENS, O. *Applied Hydro- and Aerodynamics*. 1934.
- [34] RANNACHER, R. *Finite Element Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Preprint. IWR, 1999.
- [35] SCHÄFER, M., AND TUREK, S. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. *Flow Simulation with High-Performance Computers II* (1996).
- [36] SCHLICHTING, H. *Boundary-layer Theory*. 6.ed. McGraw-Hill, 1968.

- [37] SEGAL, A. Finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J.M. Burgerscentrum - Research School for Fluid Mechanics*.
- [38] SRINATH, D., AND MITTAL, S. Optimal aerodynamic design of airfoils in unsteady viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199, 29–32 (2010), 1976 – 1991.
- [39] TAMURA, H. Shape optimization of a body located in the incompressible Navier-Stokes flow. *Kawahara Lab.* (2007.).
- [40] TEMAM, R. *The Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. CHEL Series. American Math. Soc., 2001.
- [41] THOMÉE, V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. No. n.º 25 in Springer Series in Computational Mathematics Series. Springer-Verlag, 1997.
- [42] TUREK, S. A comparative study of time-stepping techniques for the incompressible Navier-Stokes equations: From fully implicit non-linear schemes to semi-implicit projection methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 22, 10 (1996), 987–1011.